

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO**

HELAINÉ MARIA DE SOUZA PONTES

**MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA**

**PONTA GROSSA
2018**

HELAINÉ MARIA DE SOUZA PONTES

**MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, na linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Celia Finck Brandt

**PONTA GROSSA
2018**

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

P814 Pontes, Helaine Maria de Souza
Modelagem matemática sob a ótica da
teoria dos registros de representação
semiótica e da educação dialógica/ Helaine
Maria de Souza Pontes. Ponta Grossa, 2018.
279f.

Tese (Doutorado em Educação - Área de
Concentração: Educação), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof^a Dr^a Celia Finck
Brandt.

1.Educação dialógica. 2.Educação
matemática. 3.Ensino e aprendizagem.
4.Modelagem matemática. 5.Teoria dos
registros de representação semiótica.
I.Brandt, Celia Finck. II. Universidade
Estadual de Ponta Grossa. Doutorado em
Educação. III. T.

CDD: 511.8

TERMO DE APROVAÇÃO

HELAINÉ MARIA DE SOUZA PONTES

MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A ÓTICA DA TEORIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:



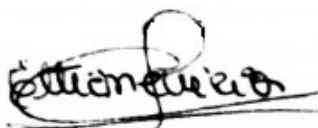
Orientador (a) Profª Dra. Celia Finck Brandt - UEPG



Prof. Dr. Tiago Emanuel Kluber - UNIOESTE



Prof. Dr. Dionísio Burak - UEPG



Profª Dra. Etienne Cordeiro Guérios - UFPR



Profª Dra. Tânia Stella Bassoi - UNIOESTE

Ponta Grossa, 27 de fevereiro de 2018.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me conduziu durante todo o percurso e passou a ter um significado diferente para mim nos últimos tempos, por ter conseguido desvinculá-Lo da igreja e materializá-Lo nas pessoas, principalmente as que necessitam do meu apoio e dedicação.

À UEPG, pela acolhida, negada por outras instituições.

À Prof.^a Dr.^a Celia Finck Brandt, pela orientação esclarecedora e carinhosa, pela confiança, e pelo respeito à minha autonomia.

Aos professores da banca, Dr.^a Ettiène Cordeiro Guerios, Dr.^a Tânia Stella Bassoi, Dr. Tiago Emanuel Klüber pelas valiosas contribuições por ocasião do exame de qualificação. Em especial agradeço ao Prof. Dr. Dionísio Burak, pela importância de suas pesquisas ao meu estudo.

Aos professores do PPGE/ UEPG, em especial aos professores Dr.^a Maria José Subtil e Dr. Névio de Campos, pelo admirável profissionalismo e comprometimento com a formação docente.

Ao diretor da escola onde a pesquisa foi realizada e atual secretário da educação do município de Araucária Prof. Me. Henrique Rodolfo Theobald, pela confiança dispensada.

A todos os estudantes que se dispuseram à uma nova metodologia de ensino e permitiram a realização da pesquisa.

Aos meus pais, Sr. Noé Geraldo de Souza e Sr.^a Zilda Barboza Mendes de Souza, pelo amor incondicional.

Ao meu marido Valdemir Anselmo Pontes, pelo incentivo, pelo apoio, pelo companheirismo e pela compreensão.

À minha filha Isabella Mady de Souza Pontes, pelo interesse manifestado nas longas conversas sobre a pesquisa, pelas sugestões apresentadas, pela paciência e dedicação dispensados à leitura e correção dos textos.

Ao meu filho Gustavo Zakir de Souza Pontes, por compreender minha ausência durante tanto tempo por conta do estudo intenso.

À minha amiga, Marli Terezinha Langner, pelo entusiasmo e interesse demonstrados ao trabalho realizado, pelas ideias compartilhadas e pela responsabilidade com a organização das tarefas do cotidiano que me permitiu dedicar o tempo necessário para os estudos.

RESUMO

Esta pesquisa foi conduzida em busca da resposta da seguinte questão: Quais as implicações que decorrem do ensino, na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem nas dimensões cognitiva e social, à luz Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das contribuições de Paulo Freire para a educação dialógica? Portanto o objetivo delineado é evidenciar as implicações do ensino, na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem, por meio de uma análise cognitiva, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004, 2009, 2010, 2011, 2012a, 2012b, 2012c) e por meio de uma análise social, fundamentada nas contribuições de Freire (1979, 1983, 2001, 2017a, 2017b) para a educação dialógica. Almejando atingir o objetivo traçado, a metodologia do trabalho foi embasada no suporte teórico da pesquisa de estudo de caso etnográfico, de acordo com o entendimento de André (2008) e de Marconi e Lakatos (2002). Neste sentido, os instrumentos de coleta de dados utilizados foram as produções dos estudantes durante a realização das atividades propostas, os relatórios construídos a partir da observação sistemática participante e questionários. A pesquisa foi realizada em uma escola municipal de Ensino Fundamental, da cidade de Araucária – PR. Os sujeitos da pesquisa compreendem a professora pesquisadora e seus 32 (trinta e dois) estudantes de uma turma do nono ano. Os procedimentos metodológicos foram conduzidos pela Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática e de acordo com a concepção de Burak (1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b). Para tanto, o trabalho foi desenvolvido a partir dos temas escolhidos pelos estudantes, por critério de relevância, que envolvia os problemas causados pela dengue e pela crise econômica, assim como a reutilização do lixo. O problema levantado consistia em saber se a reutilização do lixo, para confecção de peças artesanais, poderia ajudar no combate da dengue e diminuir os problemas causados pela crise econômica. Sua solução mostrou que deixando de jogar um volume equivalente à 387,73 litros de lixo, poderia ser arrecadado R\$ 2.805,00, na venda das peças confeccionadas com este material reutilizado. A principal implicação do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem na dimensão cognitiva, que reflete implicações secundárias, foi evidenciada por intermédio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica na medida em que surgiam as dificuldades dos estudantes sobre os objetos matemáticos necessários à resolução do problema levantado. A interação constante entre professora e estudantes em busca de superar as dúvidas apresentadas, característica fundamental da educação dialógica, fazia emergir manifestações e registros que, analisados com base nos pressupostos da teoria de Duval, revelaram fragilidades decorrentes da falta de conhecimentos elementares da matemática, que pode ser proveniente da predominância de uma educação tradicional. Já as implicações secundárias são caracterizadas pela dificuldade dos estudantes na construção dos conceitos matemáticos, evidenciada pela falta de hábito de trabalhar nesta perspectiva e pela resistência à metodologia proposta. Em ambos os casos, constata-se a internalização de um ensino bancário, considerado pela maioria dos estudantes como metodologia que oferece maior possibilidade de promover a aprendizagem. As implicações do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem na dimensão social, foram reveladas à luz dos pressupostos teóricos da educação dialógica defendida por Freire, na medida em que os estudantes manifestaram mudanças de atitudes em relação aos cuidados e reutilização do lixo, uma vez que o diálogo, a motivação e a interação, permitiram o desenvolvimento de sua autonomia, criatividade e criticidade.

Palavras-chave: Educação Dialógica - Educação Matemática – Ensino e Aprendizagem - Modelagem Matemática – Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This research was conducted in order to answer the following question: Which are the implications of teaching, from the perspective of Mathematical Modeling, for learning in the cognitive and social dimensions, on perspective of the Theory of Semiotic Representation Registers and Paulo Freire's contributions to the dialogical education? Therefore, the objective of this study is highlight the implications of teaching, from the perspective of Mathematical Modeling, through a cognitive analysis based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (2004, 2009, 2010, 2012a, 2012b). , 2012c) and through a social analysis, based on the contributions of Freire (1979, 1983, 2001, 2017a, 2017b) for dialogic education. Aiming at reaching the goal set, the methodology of the work was based on the theoretical support of the study of ethnographic case study, according to the understanding of André (2008) and Marconi and Lakatos (2002). In this sense, the instruments of data collection used were the productions of the students during the accomplishment of the proposed activities, the reports constructed from the participant systematic observation and questionnaires. The research was carried out in a municipal school of Elementary School, in the city of Araucária - PR. The research subjects comprise the research teacher and her thirty-two (32) students from a ninth grade class. The methodological procedures were conducted by Mathematical Modeling, from the perspective of Mathematical Education and according to the conception of Burak (1992, 1194, 2004, 2006, 2010a, 2010b). To do so, the work was developed based on the themes chosen by the students, by relevance criteria, which involved the problems caused by *dengue* and the economic crisis, as well as the reuse of garbage. The problem raised was whether the reuse of garbage, for making handicrafts, could help combat dengue and reduce the problems caused by the economic crisis. Its solution showed that leaving to play a volume equivalent to 387.73 liters of garbage, could be raised R\$ 2,805.00, in the sale of the pieces made with this material reused. The main implication of teaching in the perspective of Mathematical Modeling, for learning in the cognitive dimension, which reflects secondary implications, was evidenced through the Theory of Semiotic Representation Registers in the measure that the students' difficulties arose about the mathematical objects necessary to solve the problem raised. The constant interaction between teacher and students seeking to overcome the doubts presented, a fundamental characteristic of dialogic education, gave rise to manifestations and records that, analyzed on the basis of Duval's theory, revealed fragilities due to the lack of elementary knowledge of mathematics. can come from the predominance of a traditional education. The secondary implications are characterized by the difficulty of students in the construction of mathematical concepts, evidenced by the lack of habit of working in this perspective and by the resistance to the proposed methodology. In both cases, one can see the internalization of a banking education, considered by the majority of the students as the only possible methodology to promote learning. The implications of teaching in the perspective of Mathematical Modeling, for learning in the social dimension, were revealed on perspective of the theoretical presuppositions of dialogical education defended by Freire, as the students manifested changes in attitudes regarding the care and reuse of garbage, a instead, the dialogue, the motivation and the interaction, enabled the development of its autonomy, creativity and criticality.

Key words: Dialogical Education - Mathematical Education - Teaching and Learning - Mathematical Modeling - Theory of Semiotic Representation Registers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Design da tese.....	18
Figura 2: Etapas da Modelagem Matemática.....	37
Figura 3: Educação Matemática na perspectiva das Ciências Humanas e Sociais.....	39
Figura 4: Funcionamento de uma expansão discursiva por inferência.....	69
Figura 5: Arranjo com flores de papel higiênico feito pela equipe a Oficina de Reutilização do Lixo	99
Figura 6: Decoração das salas de aula com arranjo de flores	99
Figura 7: Vaso de flor com garrafa PET confeccionado pela equipe da Oficina de reutilização do lixo	101
Figura 8: Resposta sujeito A8.	116
Figura 9: Estrutura diádica e triádica da significância	118
Figura 10: Resposta do sujeito A12 para a questão 2 e 3 da atividade CC.....	119
Figura 11: Resposta do sujeito A12 para as perguntas 4 e 5 da atividade CC.	122
Figura 12: Resposta do sujeito A12 para a questão 6 da atividade CC.....	124
Figura 13: Resposta do sujeito A5 para as questões 2 e 3 da atividade CC.....	124
Figura 14: Resposta do sujeito A5 para as questões 4 e 5 da atividade CC.....	125
Figura 15: Resposta do sujeito A5 para a questão 6 da atividade CC.....	126
Figura 16: Resposta do sujeito A5 para a questão 1 da atividade AC.....	137
Figura 17: Resposta do sujeito A5 para as questões 3 e 4 da atividade AC.....	137
Figura 18: Resposta do sujeito A13 para as perguntas 2 e 5 da atividade AC.....	139
Figura 19: Resposta do sujeito A13 para as questões 3 a 6 da atividade AC.....	139
Figura 20: Resposta do sujeito A13 para a questão 7 da atividade AC.....	139
Figura 21: Resposta do sujeito A2 para a questão 6 da atividade AC.....	140
Figura 22: Resposta do sujeito A2 para a questão 7 da atividade AC.....	141
Figura 23: Resposta do sujeito A2 para as questões 15 a 18 da atividade AC.....	142
Figura 24: Modificação mereológica.	142
Figura 25: Resposta sujeito A2 para as questões 8 a 10 e 12 a 14 da atividade AA.	143
Figura 26: Resposta do sujeito A2 para a questão 19 da atividade AC.....	146
Figura 27: Resposta do sujeito A8 para as questões 16 a 18 da atividade AC.....	147
Figura 28: Resposta do sujeito A8 para a questão 19 da atividade AC.....	148
Figura 29: Resposta do sujeito A2 para a questão 3 da atividade RP.	167

Figura 30: Resposta do sujeito A2 para as perguntas 4 e 5 da atividade RP.....	167
Figura 31: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 8 da atividade RP.....	168
Figura 32: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 13 da atividade RP.....	169
Figura 33: Pergunta 14 da atividade RP.....	169
Figura 34: Resposta do sujeito A11 para a pergunta 14 da atividade RP.....	170
Figura 35: Resposta do sujeito A13 para a pergunta 14 da atividade RP.....	170
Figura 36: Resposta do sujeito A 12 para a pergunta 14 da atividade RT	171
Figura 37: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 14 da atividade RP.....	171
Figura 38: Resposta sujeito A21	172

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Diálogo na Modelagem Matemática	47
Quadro 2: resposta sujeito A13 para as perguntas 5, 6 e 7da atividade AC.....	51
Quadro 3: Sugestões de produtos feitos a partir da reutilização do lixo	92
Quadro 4: Atividade da primeira fase da etapa de resolução de problema.	94
Quadro 5: Continuação da atividade do Quadro 4	95
Quadro 6: Autorização para participação na Oficina de Reutilização do Lixo	96
Quadro 7: Dedução da fórmula da área do círculo.....	98
Quadro 8: A matemática do rolinho de papel higiênico e a reutilização do lixo	100
Quadro 9: Produtos à venda na Festa Julina.....	102
Quadro 10: Produtos confeccionados pelos sujeitos da pesquisa.....	103
Quadro 11: Preço da matéria prima do vaso de flor.....	104
Quadro 12: A reutilização do lixo, a dengue e crise econômica.	106
Quadro 13: Lixo acumulado na casa da pesquisadora	109
Quadro 14: Kit de material e lixo para os estudantes interessados	109
Quadro 15: Trabalho em sala de aula.....	111
Quadro 16: Trabalho da equipe da Oficina de Reutilização do Lixo	112
Quadro 17: Atividade para dedução da fórmula do comprimento da circunferência.....	113
Quadro 18: Medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro	116
Quadro 19: Símbolos usados para operação de divisão	122
Quadro 20 - Respostas questão 1 da atividade AC.	127
Quadro 21: Respostas questão 2 da atividade AC.....	128
Quadro 22: Respostas questão 3 da atividade AC.....	128
Quadro 23: Respostas questão 4 da atividade AC.....	128
Quadro 24: Respostas questão 5 da atividade AC.....	129
Quadro 25: Respostas questão 6 da atividade AC.....	129
Quadro 26: Respostas questão 7 da atividade AC.....	129
Quadro 27: Respostas questão 8 e 9 da atividade AC.....	130
Quadro 28: Respostas questão 10 da atividade AC.....	131
Quadro 29: Respostas questão 11 da atividade AC.....	132

Quadro 30: Respostas questão 12 e 13 da atividade AC.....	132
Quadro 31: Respostas questão 14 da atividade AC.....	133
Quadro 32: Respostas questão 15 da atividade AC.....	133
Quadro 33: Respostas questão 16 da atividade AC.....	133
Quadro 34: Respostas questão 17 da atividade AC.....	134
Quadro 35: Respostas questão 18 da atividade AC.....	134
Quadro 36: Respostas questão 19 da atividade AC.....	134
Quadro 37: Resposta do sujeito A5 para a questão 2 da atividade AC.	136
Quadro 38: Padrões de calculadora.....	149
Quadro 39: Questão 3 da atividade RP.	151
Quadro 40: Sugestão de atividade.....	164
Quadro 41: Questionário	175
Quadro 42: Respostas da questão 9 do questionário	180
Quadro 43: Respostas pergunta 8 do questionário	184
Quadro 44: Respostas pergunta 21 do questionário	184
Quadro 45: Respostas pergunta 2 do questionário	189
Quadro 46: Respostas pergunta 4 do questionário	190
Quadro 47: Respostas pergunta 7 do questionário	193
Quadro 48: Respostas pergunta 8 do questionário	194
Quadro 49: Respostas pergunta 18 do questionário	195
Quadro 50: Respostas pergunta 11 do questionário	200
Quadro 51: Respostas pergunta 12 do questionário	203
Quadro 52: Respostas pergunta 5 do questionário	206
Quadro 53: Respostas pergunta 13 do questionário	207
Quadro 54: Respostas pergunta 14 do questionário	207
Quadro 55: Respostas pergunta 15 do questionário	208
Quadro 56: Respostas pergunta 3 do questionário	214
Quadro 57: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 1).....	215
Quadro 58: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 2).....	215
Quadro 59: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 3).....	216
Quadro 60: Respostas pergunta 19 do questionário	216

Quadro 61: Trabalhos do curso inicial	238
Quadro 62: Trabalhos curso avançado	238
Quadro 63: Levantamento Preliminar de dissertações e teses.....	249
Quadro 64: Levantamento preliminar de artigos.....	251
Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática	253
Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica.....	265
Quadro 67: Artigos que tratam dos Registros de Representação Semiótica	274
Quadro 68: Dissertações e Teses do levantamento final.....	277
Quadro 69: Artigos do levantamento final.....	279

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: UMA PROPOSTA DE ENSINO.....	20
2.1 ASPECTOS DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA MAIS RELEVANTES PARA A PESQUISA	20
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA	32
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	38
2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: APROXIMAÇÕES E DELIMITAÇÕES	43
3 UMA ANÁLISE COGNITIVA DA APRENDIZAGEM A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS.....	49
3.1 ASPECTOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS PARA A APRENDIZAGEM	49
3.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: APROXIMAÇÕES E DELIMITAÇÕES	74
4 REVISÃO DE LITERATURA.....	76
4.1 LEVANTAMENTO PRELIMINAR.....	76
4.2 SELEÇÃO DOS TRABALHOS LEVANTADOS	77
4.3 ESPECIFICIDADES DA PESQUISA QUE NÃO FORAM CONTEMPLADAS EM TRABALHOS ANTERIORES	81
5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	84
5.1 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	84
5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	88
Fonte: Dados da pesquisa	112
6 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS.....	112
6.1 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA.....	113
6.2 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DA ÁREA DO CÍRCULO	127
6.3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	148
6.3.1 Sobre a fragilidade do ensino na perspectiva do método tradicional e a potencialidade do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática	149

6.3.2 Sobre o ensino que acontece paralelamente à pesquisa com enfoque na resistência pela metodologia adotada e na condição do professor que assume o papel de pesquisador.....	158
6.3.3 Sobre o ensino na perspectiva da aprendizagem de aspectos sociais relevantes.....	166
6.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO	174
6.4.1 Autonomia	179
6.4.2 Metodologia de ensino	183
6.4.3 Diálogo	188
6.4.4 Criticidade	193
6.4.5 Criatividade	200
6.4.6 Motivação	203
6.4.7 Interação professor/estudante e estudante/estudante	205
6.4.8 Interação estudante/objeto do conhecimento.....	214
7 CONSIDERAÇÕES.....	222
OS BASTIDORES DA DOCÊNCIA E DA PESQUISA: UM DESABAFO, ALGUMAS	
PROVOCAÇÕES.....	231
REFERÊNCIAS.....	240
APÊNDICE A – Levantamento preliminar de dissertações e teses	248
APÊNDICE B - Levantamento preliminar de artigos	250
APÊNDICE C - Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática	252
APÊNDICE D - Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação	
Semiótica.....	264
APÊNDICE E - Artigos que tratam dos Registros de Representação Semiótica	273
APÊNDICE F - Dissertações e Teses do levantamento final	276
APÊNDICE G - Artigos do levantamento final	278

1 INTRODUÇÃO

Minha formação acadêmica seguiu seu curso na direção do magistério já no ensino secundário e prosseguiu com a graduação em Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática. Porém, sem qualquer intenção de exercer a profissão, passei¹ por duas experiências, atuando em serviços administrativos de empresas da iniciativa privada, num período aproximado de seis anos. Este desinteresse talvez tenha sido causado por ser de uma família composta por várias professoras, que não demonstravam motivação pelo que faziam.

A escolha pela docência aconteceu por questões de conveniência e o aspecto que teve maior relevância nesta decisão foi a possibilidade de organização do tempo, de forma que conseguisse conciliar a vida profissional com a pessoal, levando em conta os compromissos exigidos pela maternidade. No entanto, inusitadamente, me identifiquei com o magistério logo no início da carreira.

Entusiasmada com a nova experiência, e afastada dos estudos já há algum tempo, procurei participar de todos os cursos de formação oferecidos pela mantenedora. Concluída a especialização passei por uma verdadeira peregrinação em busca do programa de pós-graduação *stricto sensu*. Neste percurso, enfrentei oito processos de seleção para ingresso no programa de mestrado.

Durante este período, o desgosto causado pela sensação de incompetência, não poderia deixar de refletir na sala de aula, afetando a interação com os estudantes que demonstravam desrespeito, desvalorização e desinteresse pelo meu trabalho. Foi uma fase de angústia que só me fazia pensar em desistir. Porém, na oitava tentativa de ingresso no programa de mestrado e na condição de suplente no processo de seleção, mediante a desistência de uma candidata que acabara de ser aceita em outro programa de pós-graduação, consegui o tão almejado objetivo. Finalmente matriculada como aluna regular do mestrado, outros desafios se apresentavam. O maior deles era sentir-me inserida e em condições de atingir um bom desempenho, o que me parecia impossível.

Com muito esforço e em vias de defender a dissertação, estava convencida de que conseguiria a aprovação, segura de que tinha, ao menos, os requisitos mínimos para isso. Para minha surpresa, tive a grande honra de receber muitos elogios pela pesquisa realizada e obtive o título de mestre com a seguinte consideração “[...] a banca destacou a relevância da temática e proposição teórico-metodológica de ensino para a Educação Matemática” (BURAK,

¹ Os verbos na primeira pessoa do singular referem-se às ações da pesquisadora, que aconteceram sem a presença da orientadora.

BRANDT, ARAGÃO E MORALES, 2011, In: PONTES, 2011)². Esta conquista foi sem dúvida, uma das maiores realizações da minha vida e revelou que os percalços comentados anteriormente, haviam sido superados, por conta de ter voltado a estudar, fazendo-me acreditar que estava, de fato, na profissão certa.

Convencida de tudo isso, fui em busca do doutorado e participei de cinco processos de seleção. Já sem argumentos para convencer a família que iria insistir ainda mais, consegui, finalmente, esta oportunidade.

Esta trajetória que compreende um período de vinte e dois anos atuando como professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental foi desafiadora. Algumas vezes, desgostosa de tantas frustrações não abandonei minha carreira por acreditar, mesmo diante de tanta dificuldade, na possibilidade de mudança, por não aceitar que deveria desistir da educação e por procurar na formação permanente, condições de melhorar a qualidade do meu trabalho. A motivação, energia e esperança me fizeram perceber nesta caminhada, que quanto mais me aproximava dos estudantes, expressando amorosidade e preocupação por eles, mais fácil se tornava a nossa relação e é nesta perspectiva que venho trabalhando, procurando adotar as exigências necessárias para ensinar. Com erros e acertos, tentativas frustradas e grandes realizações, tristezas e alegrias, posso afirmar com tranquilidade que sou muito satisfeita pelo que faço, entusiasmada para aprender ensinando e convicta de que a educação é capaz de mudar o mundo.

A partir da minha experiência em sala de aula e pelos depoimentos de colegas de todas as áreas, observo que um dos maiores desafios que temos é conquistar o interesse dos estudantes pelo assunto que pretendemos ensinar.

Nesse sentido, Burak (2010b) ao observar, em seus estudos, o descontentamento dos graduandos da licenciatura em Matemática em relação às metodologias de ensino tradicionais de seus professores, constatou que predominava:

[...] um ensino fragmentado em que o estudante deveria aprender o que lhe era ensinado, não havendo espaço para se trabalhar aquilo que ele queria aprender, o que era de seu interesse ou curiosidade sobre determinado assunto. Esses efeitos contribuíam, de forma significativa, para a pequena motivação, o pouco interesse e, conseqüentemente, para a reprovação e o abandono da escola (p. 22).

O fato de nos prendermos aos conteúdos elencados nas Diretrizes Curriculares limita consideravelmente as possibilidades de um trabalho transdisciplinar. No entanto, esta postura

² Componentes da banca de defesa da dissertação de mestrado do programa de pós-graduação em Educação da UEPG, sob o título “A Educação Matemática à luz de princípios da aprendizagem significativa e suas implicações na interação professor-aluno-conhecimento matemático, em aula.

compartimentada é fruto de nossa formação e romper com este paradigma é um grande desafio.

Fui instigada a trabalhar com a Modelagem Matemática durante o programa de mestrado, mas a insegurança falou mais alto e me fez resistir à proposta, mesmo sendo orientada por um pesquisador renomado nesta área.

Burak (2010b), analisando os depoimentos dos sujeitos de uma de suas pesquisas sobre a Modelagem Matemática, certificou-se que: “Os fatores de insegurança e preocupação [...] sem dúvida acabam por exigir uma nova postura do professor, conhecedor de suas limitações diante de situações novas e inusitadas” (p. 28).

Como para minha pesquisa de mestrado, ainda não me sentia em condições de superar estas limitações, direcionei meus estudos em busca de conhecer:

O que se evidencia nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente no ensino fundamental, se as ações de ensino forem conduzidas à luz de princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa? (PONTES, 2011, p. 12)

No início do ano letivo de 2011, pouco tempo antes da defesa da minha dissertação, me inscrevi num curso de formação do Projeto NEPSO (Nossa Escola Pesquisa sua Opinião), oferecido pela Universidade Federal do Paraná. Um projeto de pesquisa de opinião pública, cujo tema deve ser definido pelos estudantes. Meu entusiasmo com este trabalho foi enorme, principalmente por observar o envolvimento e dedicação dos estudantes nas atividades desenvolvidas.

Não hesitei em me inscrever novamente no curso, para propor o projeto às minhas turmas no ano de 2012. Paralelo a isso, retornei à Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) para participar do GEPAM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Aprendizagem Matemática) e matriculei-me como aluna especial da disciplina Tópicos Especiais da Educação Matemática. A partir de um estudo mais aprofundado sobre a Modelagem Matemática, visto na disciplina em curso, fiquei extremamente surpresa ao constatar que, trabalhando com o projeto NEPSO, estava fazendo Modelagem Matemática. A resistência oferecida durante o programa de mestrado foi absolutamente eliminada e atualmente a Modelagem Matemática está inserida na minha prática docente.

No grupo GEPAM, nos dedicamos ao estudo das contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymound Duval, para o ensino da álgebra. No ano de 2013 tive oportunidade de participar do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática) e novamente do GEPAM, na Universidade Estadual de Ponta Grossa.

No grupo GEPEMA nos propusemos a desenvolver a Modelagem Matemática, a partir do tema que cada equipe do grupo escolheu. O trabalho foi embasado na concepção de Burak (1992, 2004, 2010). No grupo GEPAM, demos continuidade no desenvolvimento do trabalho iniciado no ano anterior.

Diante do exposto, percebi a importância da Modelagem Matemática no ensino, assim como a necessidade de evidenciar as implicações desta metodologia para a aprendizagem dos estudantes. Para tanto, entendo a relevância da análise cognitiva das produções dos estudantes provenientes do ensino nesta perspectiva, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Considero também que as manifestações destes estudantes, durante o desenvolvimento das atividades propostas, devem ser analisadas de forma que seja evidenciada sua aprendizagem, na dimensão social, de acordo com as contribuições de Freire para a educação dialógica. Desde modo, entendo que isso merece ser tratado como objeto de estudo desta investigação.

Considero que tanto minha trajetória de vida profissional como os estudos realizados na academia, justificam meu interesse por esta pesquisa, que está estruturada de acordo com o design definido na figura a seguir:

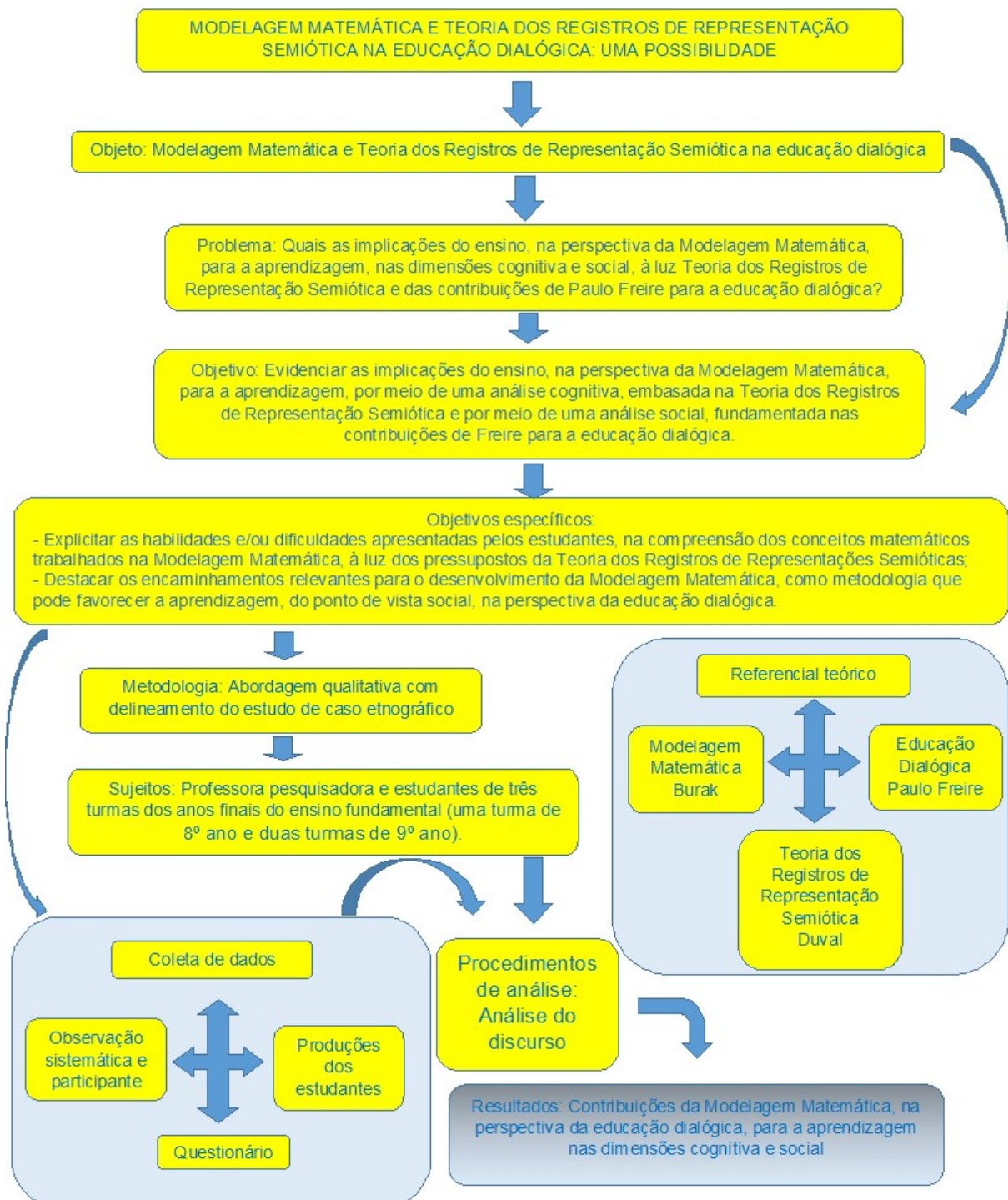


Figura 1: Design da tese
Fonte: Dados da pesquisa

Para que fosse possível atingir os objetivos da pesquisa e responder à pergunta norteadora, o presente trabalho foi estruturado em 5 capítulos, que serão descritos a seguir.

O quadro teórico desta investigação, disponível no primeiro capítulo, traz, inicialmente, as contribuições dos estudos de Paulo Freire (1979, 1983, 2001, 2017a, 2017b), destacando os aspectos mais relevantes de uma educação dialógica. A seguir, são discutidos

os subsídios da Modelagem Matemática de modo geral e mais especificamente, a concepção de Burak (1992, 1994, 2004, 2006, 2010^a, 2010b), levando em consideração a Educação Matemática na perspectiva das Ciências Humanas e Sociais. Traz também as aproximações que podem ser estabelecidas entre a Modelagem Matemática e a educação dialógica, assim como as delimitações. Pretendeu-se assim, fundamentar com este aporte teórico, os procedimentos metodológicos deste estudo, assim como a análise dos dados que apontam as implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem dos estudantes na dimensão social.

O segundo capítulo se encarrega de trazer o aporte teórico necessário para alicerçar as análises dos dados coletados, que foram efetivadas em uma perspectiva cognitiva da aprendizagem. Para tanto, buscou-se as contribuições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004, 2009, 2010, 2011, 2012a, 2012b, 2012c) e suas aproximações com os pressupostos da educação dialógica.

O terceiro capítulo é dedicado à revisão de literatura, considerando o levantamento das publicações que tratam da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak; da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das publicações que abordam tanto a Modelagem Matemática como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para concluir este capítulo, salientou-se as especificidades desta pesquisa que não foram abordadas nos trabalhos que constituem o corpus de investigação deste estudo.

No quarto capítulo, o leitor terá oportunidade de conhecer as concepções teóricas que motivaram a opção pela pesquisa de estudo de caso etnográfico, assim como, os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa.

Por fim, no quinto capítulo constam as análises dos dados provenientes dos: relatórios de observação transcritos a partir dos áudios gravados durante as aulas; dos registros das produções dos estudantes e dos questionários.

Inicia-se a seguir, a discussão sobre os fundamentos teóricos que embasaram o trabalho de investigação.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: UMA PROPOSTA DE ENSINO

2.1 ASPECTOS DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA MAIS RELEVANTES PARA A PESQUISA

Como o tema da pesquisa trata tanto da Modelagem Matemática como da Teoria dos Registros de Representação Semióticas, entende-se que é de fundamental importância evidenciar os pressupostos teóricos de uma educação dialógica, que foram adotados como princípios tanto do ensino, como da aprendizagem neste estudo. Portanto, serão discutidas as contribuições mais relevantes de Freire (1983, 2017a, 2017b) que subsidiaram a análise dos dados desta pesquisa em relação à aprendizagem dos estudantes, do ponto de vista social.

Para analisar o problema de comunicação existente entre o técnico e o camponês, no processo de desenvolvimento da sociedade agrária, Paulo Freire (1983) entende que o termo extensionista atribuído ao agricultor educador, é equivocado.

O autor afirma que, de acordo com uma análise linguística, Bally, discípulo de Saussure, defende a ideia de campos associativos, em que se estabelecem relações entre os termos numa unidade estrutural, de acordo com os desdobramentos entre os campos significativos destes termos. “Daí que, em seu ‘campo associativo’, o termo extensão se encontre em relação significativa com transmissão, entrega, doação, messianismo, mecanicismo, invasão cultural, manipulação, etc.” (FREIRE, 1983, [s/p]).

Nenhuma dessas relações define de fato o entendimento de educador, na concepção de Freire (1983), uma vez que defende ser este profissional o responsável pela libertação do oprimido. O termo extensionista limita o caráter do compromisso que este profissional assume, já que é rotulado por um conceito que o nega na tarefa de educar e de educar-se. Sendo assim, a tarefa do educador que se recusa à domesticação dos homens é a comunicação e não a extensão.

Entende-se, portanto, que o conceito de extensão é indicado para retratar a prática de muitos professores que se preocupam exclusivamente em fazer dos estudantes, receptores de uma verdade que consideram absoluta e que não pode sequer, ser questionada. Desta forma, quando o termo extensionista é referido neste estudo, reporta-se a esses profissionais.

Já quando possibilitado pela comunicação, o conhecimento é fruto da curiosidade tanto do educando como do educador, que por meio de uma relação dialógica e mediatizados pelo objeto cognoscível, se tornam sujeitos cognoscentes em busca de inventar, reinventar,

refletir criticamente e transformar a realidade. Nesta perspectiva, não cabe ao educando se submeter passivamente a receber os conteúdos que o extensionista lhe impõe (FREIRE, 1983).

A realidade mencionada anteriormente, que corresponde ao mundo natural do educando, pode estar tão arraigada a ele que, o faz sentir-se mais como parte integrante deste mundo, do que como sujeito capaz de transformá-lo. Esta proximidade dificulta a admiração que exige um distanciamento para que possa ser vista em perspectiva. Isso reforça o conhecimento não científico e qualquer tentativa de promover o ensino elaborado, pode ser recebida com desconfiança, recusa ou aceitação.

O estudante pode entender que as mazelas da sociedade em que vive são naturais por estar tão acostumado a sobreviver ao invés de viver, considerando que deve ser assim mesmo. Esse é o motivo da desconfiança ao se deparar com uma possibilidade de mudança, podendo inclusive, recusá-la, uma vez que se limita a enxergar somente o que está ao alcance dos seus olhos. Não se dispõe a sair do seu mundo e conhecer o que está além dele, limitando-se ao conhecimento não científico.

Por outro lado, pode acontecer de o estudante estar tão inconformado com a sua situação de oprimido, que se permite enxergar em outra perspectiva, porque faz o distanciamento necessário da sua realidade para conhecer possibilidades de mudança e se dispõe ao conhecimento elaborado.

Para que o conhecimento científico se efetive, é necessário que se respeite as estruturas culturais e sociais, assim como a linguagem, que não podem ser dissociadas do pensamento. Desta forma, o objetivo fundamental da educação popular consiste em possibilitar o aprofundamento da tomada de consciência da realidade, por meio da problematização das relações que são estabelecidas entre os homens e dos homens com o mundo, efetivando o humanismo. Para que seja autêntico, o humanismo precisa ser comprometidamente dialógico, ou seja, deve de fato, vivenciar o diálogo (FREIRE, 1983).

Ainda que seja muito importante o que foi pontuado, Freire afirma que existe resistência por uma educação dialógica, manifestada pelos extensionistas, ao alegarem que, a lentidão dos resultados, nesta proposta de ensino, é incompatível com o estímulo da produtividade. Este posicionamento denuncia uma inegável descrença no homem simples e revela o equívoco da absolutização de sua ignorância. Sendo assim, o autor defende que:

Ninguém sabe tudo, assim como ninguém ignora tudo. O saber começa com a consciência do saber pouco [...]. Pois sabendo que sabe pouco que uma pessoa se prepara para saber mais. Se tivéssemos um saber absoluto, já não poderíamos

continuar sabendo, pois que este seria um saber que não estaria sendo. Quem tudo soubesse já não poderia saber, pois não indagaria. O homem, como um ser histórico, inserido num permanente movimento de procura, faz e refaz constantemente o seu saber. E é por isto que todo saber novo se gera num saber que passou a ser velho, o qual, anteriormente, gerando-se num outro saber que também se tornara velho, se havia instalado como saber novo (FREIRE, 1983, [s/p]).

Se nada disso for considerado, forma-se uma relação vertical, rígida e opressora, em que o educando é impedido de manifestar sua opinião, colocar suas dúvidas e participar de alguma forma, apenas escuta e obedece. Este tipo de comportamento não é proveniente de qualquer tipo de limitação dos estudantes, no aspecto cognitivo. Reflete, portanto, as marcas causadas pelo poder de dominação de uma sociedade fechada, que impõe cruelmente suas ordens, evitando que os estudantes problematizem seu silêncio e as causas desse silêncio. O tempo necessário para uma relação dialógica, não pode jamais ser considerado perdido, como pontuam alguns extensionistas, uma vez que, problematizando a realidade, se ganha em criticidade e segurança, ou seja, em condições de agir para transformar (FREIRE, 1983).

Há que ser discutido também o argumento equivocado de que o objeto do conhecimento científico não pode ser compreendido em uma relação dialógica, uma vez que já está pronto e acaba necessitando apenas ser transmitido. Freire (1983) defende que, um conhecimento abstrato é mais bem compreendido quando contextualizado, problematizado e, se possível, trabalhado em uma experiência concreta. O conhecimento histórico não pode também jamais se limitar à memorização de datas, mas precisa ser compreendido de acordo com seu contexto, caso contrário, passa a ser apenas produto de uma ação extensionista.

Feitas as considerações sobre a comunicação como instrumento do ato de ensinar e aprender, serão apresentados a seguir, aspectos relevantes sobre a formação do professor, assunto que conduz a obra *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática docente* de Paulo Freire (2017a).

Ao prefaciар esta obra, uma das mais relevantes de Paulo Freire, Oliveira (2017a) pontua a consideração do autor sobre os “conteúdos obrigatórios à organização programática e o desenvolvimento da formação docente”, ao afirmar que os “[...] saberes necessários à uma pedagogia fundada na ética, no respeito à dignidade e à própria autonomia do educando” são imprescindíveis. Para tanto, complementa afirmando que demanda do educador uma “[...] convivência amorosa com seus alunos e na postura curiosa e aberta que assume e, ao mesmo tempo, provoca-os a se assumirem enquanto sujeitos sócios-históricos-culturais do ato de conhecer” (2017a, p. 11 e 12).

Como a formação docente e a prática do educador progressista são o mote desta obra, Freire (2017a) pontua como primeiro saber indispensável ao educador, a compreensão de que ensinar não se resume a transferir conhecimento, vai muito, além disso, é oportunizar aos educandos, a produção e a construção do conhecimento. Portanto, afirma que:

[...] embora diferentes entre si, quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado. É neste sentido que ensinar não é transferir conhecimento, conteúdos nem formar é ação pela qual um sujeito criador dá forma, estilo ou alma a um corpo indeciso e acomodado. Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto, um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender (2017a, p. 23).

Freire (2017a) defende ainda que, a educação nesta perspectiva provoca no aprendiz a “curiosidade epistemológica”, necessária para que se possa alcançar o conhecimento real do objeto.

Quanto ao conhecimento, Freire (2017a) afirma que o ciclo gnosiológico compreende o aprendizado do conhecimento já existente e a busca dos que ainda não existem. Isso exige a consciência de que não estamos demasiados certos das nossas certezas para que possamos de fato, pensar certo. Esta condição instiga a curiosidade que a princípio é ingênua, porque proveniente do senso comum que deve ser respeitada, mas pode ser superada com a busca motivada pelos questionamentos e indagações, que irão direcionar a pesquisa para que se conheça o desconhecido. Desta forma, acontece a “promoção” da ingenuidade, que transforma o conhecimento do senso comum em conhecimento científico.

Foi numa postura curiosa que a proposta de discutir temas recorrentes da mídia, para desenvolver a Modelagem Matemática proposta neste estudo, emergiu. Entre tantas sugestões, destacou-se os temas mais relevantes, aqueles que tinham uma relação mais próxima com a realidade dos estudantes, como serão vistos posteriormente.

Freire (2017a) afirma que não é possível, agir com indiferença em relação ao conhecimento que o educando traz consigo, sua experiência de vida, a relação da realidade do seu mundo com os saberes curriculares. Oportunidade, por exemplo, de discutir sobre o descaso do poder público em relação às comunidades pobres onde vive a grande maioria dos estudantes que convivem com problemas de infraestrutura, violência e muitos outros.

Para Freire (2017a) tanto a curiosidade ingênua como a epistemológica são iguais na essência e diferentes na qualidade, haja vista que a primeira é superada quando se critica e se aproxima cada vez mais, de forma rigorosamente metódica, do objeto cognoscível. Não há,

portanto, uma ruptura entre as duas, mas uma superação, que é possível quando o educador tem a consciência de que ensinar exige criticidade.

O problema levantado sobre o tema da Modelagem Matemática, a princípio, é proveniente de uma curiosidade ingênua e de acordo com o encaminhamento desta metodologia, os dados obtidos na pesquisa exploratória vão oferecendo fundamentos suficientes para transformar o que antes, não passava de uma especulação, em curiosidade epistemológica.

De acordo com Freire (2017a) a capacidade humana de comparação, decisão, intervenção e outras tantas, são provenientes de uma formação moral que precisa estar vinculada aos conteúdos escolares, estabelecendo uma relação entre a decência e a boniteza, desta forma, “Ensinar exige estética e ética” (p. 34). Todas as capacidades humanas que se deram a partir da linguagem, permitindo a comunicação do inteligível, podem ao mesmo tempo embelezar o mundo por meio de grandes ações, como podem, rompendo com a ética, deixá-lo impregnado de feiura.

Freire (2017a) entende que é a imperiosa prática formadora, quando eminentemente ética, que promove a esperança, é ela que pode intervir para melhorar. É intervindo no mundo, com responsabilidade ética que o educador, consciente de tantos problemas que a sociedade enfrenta, pode agir juntamente com seus educandos, como sujeitos da história em busca de mudanças. A consciência da inconclusão do homem se dá por esse permanente movimento de busca. Se inacabados, conscientes deste inacabamento e abertos à procura é possível exercer “[...] tanto mais e melhor a nossa capacidade de aprender e de ensinar quanto mais sujeitos e não puros objetos do processo nos façamos”, porque “Ensinar exige consciência do inacabamento” (FREIRE, 2017a, p. 50 e 59).

Este inacabamento, que muitas vezes, é proveniente da sensação de impotência perante os problemas enfrentados, pode encontrar na Modelagem Matemática, oportunidade de superação. É buscando a solução dos problemas, que se consegue desenvolver habilidades necessárias para ir além.

Desrespeitar a curiosidade, inquietude, gosto estético e linguagem do educando é desviar a rigorosidade ética, um ato denominado transgressão, portanto, o professor que discrimina por ser preconceituoso é transgressor da eticidade, porque “ensinar exige respeito à autonomia do ser do educando” (FREIRE, 2017a, p. 59).

No entendimento de Freire, a avaliação da prática docente se dá em grande medida, pela vigilância do bom senso, pois este que determina a coerência entre o respeito que deve ser dado à autonomia, dignidade e identidade do educando e as estratégias adotadas em sala

de aula, para evitar um discurso hipócrita, vazio ou inoperante. Para exercitar o bom senso, a curiosidade é determinante, quanto mais indagamos, comparamos, duvidamos ou aferimos, “[...] mais eficazmente curiosos nos podemos tornar e mais crítico se pode fazer o nosso bom senso” (2017a, p. 62).

Nesse sentido, foi o bom senso que impediu a professora pesquisadora de aceitar inerte o problema levantado sobre o tema da Modelagem Matemática e suas possíveis consequências. O bom senso alertou que isto não é correto e exigiu de sua rigorosidade científica, o dever de buscar meios que permitissem mudar esta situação, já que, na condição de sujeito histórico, tem este compromisso.

E ainda, no cotidiano da sala de aula, seu bom senso indicou que ao ser abordada por um estudante desesperado por enfrentar problemas familiares, ainda que se considerasse sem preparo para ajudá-lo, tinha condições de encaminhá-lo à equipe pedagógica da escola e cobrar providências quanto às medidas necessárias para este caso, que certamente demandava intervenção de instituições assistenciais. O bom senso a advertiu que o aluno com atitudes que evidenciam o consumo de drogas merece o mesmo encaminhamento, porque “Ensinar exige bom senso” (FREIRE, 2017a, p. 61).

A educação pública brasileira vem provando do dissabor, já há muito tempo, do descaso e do abandono. Agora, mais especificamente, sofre as consequências de um desgoverno com aprovação de medidas que fragilizam o que era considerado, até então, direito adquirido³, trazendo o risco iminente de maiores angústias e desafios. Sendo esta, a condição que se encontra o ensino público de modo geral, é preciso enfrentar, não somente a pretensão deste desgoverno, como também a indiferença demonstrada por alguns profissionais da educação, que, acomodados com as garantias já conquistadas, relegam ao acaso, o que está por vir. Como se bastasse a segurança de suas conquistas e nada importasse, o prejuízo que tanta omissão pode causar.

Ainda que os problemas sejam, de fato, muitos, o professor não tem o direito de exercer seu papel de educador desrespeitando os educandos, nem mesmo de aceitar passivamente, a desvalorização do seu trabalho. Deve, portanto, entender que são questões que precisam ser discutidas com os estudantes para buscar a dignidade merecida, já que “Ensinar exige humildade, tolerância e luta em defesa dos direitos dos educadores” (FREIRE, 2017a, p. 66).

³ Aposentadoria especial, hora-atividade e outros direitos ameaçados.

Quanto às questões sociais, Paulo Freire trabalhou bravamente no sentido de fazer com que a educação desenvolvesse a capacidade crítica dos estudantes ao ponto de permitir que sua condição de oprimidos fosse revertida. Sua proposta de ensino evidencia que:

Insisto, com a força que tenho e que posso juntar na minha veemente recusa a determinismos que reduzem a nossa presença na realidade histórico-social à pura adaptação a ela. O desemprego no mundo não é, como disse e tenho repetido, uma fatalidade. É antes o resultado de uma globalização da economia e de avanços tecnológicos a que vem faltando o dever ser de uma ética realmente a serviço do ser humano e não do lucro e da gulodice irrefreada das minorias que comandam o mundo (2017a, p. 130).

Neste sentido, a prática docente pode ser efetiva, na medida em que seja direcionada para a superação da educação enquanto reprodução da sociedade.

Contrariamente ao mecanicismo do conteúdo decorado e da transferência do conhecimento, Freire (2017a) entende que “[...] a nossa capacidade de aprender, que decorre a de ensinar [...] implica a nossa habilidade de *apreender* a substantividade⁴ do objeto aprendido”. É nesse sentido que a educação é capaz de formar o “[...] sujeito crítico epistemologicamente curioso, que constrói o conhecimento ou participa de sua construção” (p. 69).

Para Freire (2017a), a prática educativa compreende os sujeitos que tanto ensinam como aprendem e os objetos cognoscíveis, as metodologias, os materiais, os sonhos, as utopias e os ideais. Com tudo isso envolvido, a prática educativa tem como qualidade a *politicidade*, ou seja, não pode ser politicamente neutra. O professor deve, portanto, ser coerente com sua posição política, para que seu trabalho não seja neutro diante de uma situação que merece ser superada, desde que respeite a vontade do estudante em relação ao seu interesse ou sua recusa pela mudança. Isso porque “Ensinar exige apreensão da realidade” (FREIRE, 2017a, p. 68).

O autor (2017a) entende que professor e alunos juntos, aprendendo, ensinando, inquietando-se, produzindo e resistindo aos obstáculos, promovem uma relação entre a esperança e a alegria necessária à atividade educativa. Nesta relação motivada pelo fim da injustiça, da discriminação, da impunidade e do fatalismo imobilizante, que caracterizam atitudes progressistas, a luta não poderia deixar de ser criticamente esperançosa em busca da decência (FREIRE, 2017a).

Freire (2017a), alerta que o conformismo diante de uma situação de miséria, de abandono, de violência e de ofensa, é conivente a quem acredita que a história é determinada,

⁴ A substantividade do objeto significa o que é essencial, ou fundamental do objeto de estudo.

a quem entende que essas condições que negam o direito à vida são assim mesmo, a quem admite que não há o que fazer. Também alerta que contrariando o discurso fatalista, é pela manifestação da raiva que o dominado se move para brigar em nome do seu amor ao mundo, em nome do seu direito de “ser mais”. Recusando-se adaptar a situações negadoras da humanização, o dominado repudia a experiência dominadora e luta pelo respeito, dignidade e valorização da vida, porque “Ensinar exige alegria e esperança” (FREIRE, 2017a, p. 72).

Freire (2017a) defende que é preciso constatar que é possível, para intervir na realidade e não se adaptar a ela, isso representa uma tarefa complexa e geradora de novos saberes. Neste sentido o estudar por estudar é neutro e descomprometido, ou seja:

Não é na resignação, mas na rebeldia em face das injustiças que nos afirmamos. Uma das questões centrais com que temos de lidar é a promoção de posturas rebeldes em postura revolucionárias que nos engajam no processo radical de transformação do mundo (FREIRE, 2017a, p. 76).

O autor (2017a) alerta que muitas vezes a resignação é produto do entendimento de que a situação em que vivem pessoas oprimidas é de sua inteira responsabilidade e incompetência, portanto são culpadas por viverem em condições miseráveis. Neste sentido, o educador progressista precisa saber ler a “leitura do mundo” que seus educandos fazem da sua própria presença no mundo e isso precede a “leitura da palavra”. Daí a tarefa fundamental dos educadores poderem experimentar com intensidade a dialética que existe entre a “leitura do mundo” e a “leitura da palavra”, porque “Ensinar exige a convicção de que a mudança é possível” (FREIRE, 2017a, p. 74).

Foi esta dinâmica dialética que permitiu compreender a “leitura do mundo” que os estudantes faziam em relação aos problemas que os afetavam. Permitiu também que a motivação, promovida pela curiosidade, direcionasse a busca por uma possível solução do(s) problema(s) levantado(s) em relação ao tema da Modelagem Matemática desenvolvida. É numa relação dialógica, que a curiosidade ingênua se transforma em curiosidade epistemológica e que a “leitura da palavra” vai ganhando sentido.

Ainda sobre curiosidade, Freire (2017a, p. 82) defende que “[...] nenhuma curiosidade se sustenta eticamente no exercício da negação da outra curiosidade”, portanto assevera que “[...] minha curiosidade não tem o direito de invadir a privacidade do outro e expô-la aos demais”. O autor (2017a) alerta que para se estabelecer um bom clima pedagógico democrático é fundamental que o educando aprenda em sua prática que, tanto sua curiosidade como sua liberdade, estão submetidas a limites éticos.

Desta forma recomenda:

Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não *aprendo* nem *ensino*. Exercer minha curiosidade de forma correta é um direito que tenho como gente e a que corresponde o dever de lutar por ele, o direito à curiosidade. Com a curiosidade *domesticada* posso alcançar a memorização mecânica do perfil deste ou daquele objeto, mas não o aprendizado real ou o conhecimento cabal do objeto (FREIRE, 2017a, p. 83).

Neste clima de respeito encontrado em uma prática pedagógica democrática, que nasce “[...] de relações justas, sérias, humildes, generosas, em que a autoridade docente e as liberdades dos alunos se assumem eticamente, autentica o caráter formador do espaço pedagógico” (FREIRE, 2017a, p. 90). Sem silenciar a liberdade dos educandos, o educador permite que livres vão assumindo a reponsabilidade de suas ações eticamente e adquirindo autonomia para decidir, porque “Ensinar exige segurança, competência profissional e generosidade” (FREIRE, 2017a, p. 89).

Para Freire (2017a), a percepção que os estudantes têm do trabalho docente é o instrumento de medida da competência profissional, o educador não pode jamais, contrariar o que fala com atitudes incoerentes ao seu discurso. As atitudes dos estudantes e até mesmo seu silêncio, dizem muito sobre sua postura em sala de aula. Saber compreender estas informações permite ao professor, avaliar se o que foi discutido está compreendido, se há necessidade de mudar a metodologia, se o amontoado de conteúdos programáticos a ser cumprido é, de fato, essencial para a vida do educando, enfim, permite estar em constante vigilância epistemológica, porque “Ensinar exige comprometimento” (FREIRE, 2017a, p. 94).

Freire (2017a) alerta que o professor deve ser professor por ser a favor da decência, da liberdade, da autoridade, da democracia, da esperança e da boniteza da prática pedagógica, logo, ser contra o despudor, o autoritarismo, a licenciosidade, a ditadura, a discriminação, a dominação econômica e a arrogância intelectual. Neste sentido, a educação deixa de atender os interesses dominantes, uma vez que deixa de ser *imobilizadora* e *ocultadora* de verdades, porque “Ensinar exige compreender que a educação é uma forma de intervenção no mundo” (FREIRE, 2017a, p. 96).

No entanto, Freire (2017a) adverte que a liberdade sem limite pode se perverter em licença e transformar a autoridade em autoritarismo. Mas como é possível a liberdade com limites, seria uma liberdade asfíxiada ou castrada? Não, se liberdade for entendida como possibilidade de decisão e a decisão como certeza de consequências, sejam boas ou ruins, esperadas ou inesperadas, logo, a decisão é um processo responsável. “Quanto mais

criticamente a liberdade assuma o limite necessário tanto mais autoridade tem ela, eticamente falando, para continuar lutando em seu nome” (p. 103). Freire (2017a) defende que é na experiência de inúmeras decisões que a autonomia vai se constituindo, a autonomia não precede a decisão, é processo de amadurecimento, de vir a ser. Neste sentido, uma pedagogia da autonomia precisa valorizar experiências estimuladoras tanto da decisão como da responsabilidade. Isso porque “Ensinar exige liberdade e autoridade” (p. 102).

A educação tem o poder de intervenção no mundo tanto quando aspira mudanças radicais na sociedade como quando pretende imobilizar a História. Neste sentido, tem grande influência nos sonhos, ideais e utopias do educando, o que Freire (2017a) chama de politicidade da educação. Não deve ser neutra porque a neutralidade pressupõe unanimidade de opiniões em relação a qualquer aspecto, seja ele, econômico, social ou moral. Como é política e não neutra, a educação progressista crítica se faz na luta, no respeito às diferenças, na busca de mudanças, porque “Ensinar exige tomada consciente de decisões” (FREIRE, 2017a, p. 106).

Para Freire (2017a) é sabendo ouvir paciente e criticamente que o professor aprende a falar com seus estudantes. Quem tem o que dizer deve oportunizar os que escutam a falar, em um ambiente motivador e desafiador. O professor que aprende a falar escutando, tem, enquanto fala, o silêncio necessário para ser ouvido, condição fundamental no espaço da comunicação.

Não há inteligência da realidade sem a possibilidade de ser comunicada. [...]. Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim (FREIRE, 2017a, p. 115 e 116).

Neste sentido, Freire (2017a) orienta que a prática pedagógica nesta perspectiva impõe ao professor escutar o educando para conhecer sua incompetência provisória, para que, ao escutá-lo, possa aprender a falar com ele. A negação da escuta é arrogância, é um posicionamento de quem não tolera uma opinião diferente da sua, de quem considera que o seu posicionamento é o único correto. Evitar esse tipo de conduta e promover o diálogo necessário para a aprendizagem é ter humildade, é aceitar as diferenças, é demonstrar amorosidade, é estar disposto às mudanças, é ser tolerante, é apreciar e experimentar o gosto pela alegria e pela vida. No entanto, a humildade, tão necessária no convívio com o próximo, não pode fazer de qualquer pessoa, submissa da arrogância de quem não pratica o respeito. O agente desta indecência merece apenas o silêncio e o olhar de protesto de quem foi

humilhado, que revelarão as evidências da imoralidade desta afronta e impedirão a licenciosidade que, de forma inconveniente, poderia tomar o lugar da liberdade.

É cada vez mais comum se ouvir os lamentos de professores desgostosos pelo desrespeito com que vêm sendo tratados pelos educandos, que, num comportamento de arrogância absurda, vomitam palavras ríspidas e de baixo calão, numa tentativa insistente de provocação desmedida. Neste clima de tensão e humilhação, estes colegas vão se esvaindo ao ponto de, com absoluta desmotivação, fazer de seu trabalho uma simples obrigação. É evidente que, neste cenário de desânimo total, não existe nada que se aproxima ao cumprimento de qualquer exigência enumerada anteriormente. No entanto, por mais desconforto que esta situação possa causar, o professor deve, de forma humilde, demonstrar sua indignação, fazendo que o agente da atitude arrogante entenda sua extrema covardia, demonstrada na conduta desprezível. Atitude esta que pode ser resultado de uma triste realidade deste estudante, que talvez sofra a falta de afeto e cuidado necessários para sua formação por parte da família, ou até mesmo o abandono. Resultado também da indiferença do Estado, que omisso, deixa de cumprir seu dever de provimento de necessidades básicas, como saúde, educação e segurança, fazendo com que os oprimidos entendam sua condição miserável de estar no mundo, como responsabilidade sua, uma vez que é iludido por uma política assistencialista medíocre que revela a inoperância do serviço público.

Dizer que é fácil seria uma grande hipocrisia, mas provocar o olhar do estudante curioso, envolvido, motivado e ansioso por um futuro digno, assim como seus questionamentos e dúvidas expressos na fala ingênua que vão adquirindo corpo e robustez na busca do conhecimento, são sem sombra de dúvida, uma recompensa que não pode ser mensurada, tamanha sua grandeza. Isso porque “Ensinar exige saber escutar” (FREIRE, 2017a, p. 110).

A perspectiva de um futuro digno manifestada pelo olhar do estudante ansioso representa a conscientização que ele tem de sua condição de oprimido. Segundo Freire (2017a) mesmo que este estudante ainda seja condicionado, demonstra curiosidade e expectativa para superar seu condicionamento, ultrapassando o determinismo da classe dominante que considera a crise que vivemos, uma fatalidade com a qual se deve adaptar.

A ideologia da globalização defendida na política de governo neoliberal que concentra o capital nas mãos da minoria, tão criticada por Freire (2017a) no final do último milênio, volta a ganhar força com o agravante do desvio de dinheiro público. Entender a corrupção como fatalidade e resignado, adaptar-se como objeto acomodado diante do discurso

autoritariamente feito, é, segundo Freire (2017a) posicionamento de quem não foi instigado a superar a curiosidade ingênua, de quem não é sujeito da História do mundo.

Para Freire (2017a) o discurso ideológico é ameaçador, tem poder de persuasão, confunde a curiosidade e distorce a percepção dos fatos, o saber ouvir deve estar acompanhado pelo saber criticar. Neste exercício crítico de resistência ao poder da ideologia dominante “[...] vou gerando certas qualidades que vão virando sabedoria indispensável à minha prática docente” (FREIRE, 2017a, p. 130). Prática esta que deve estar pautada no idealismo que aposta no ser humano e na ética, porque “Ensinar exige reconhecer que a educação é ideológica” (FREIRE, 2017a, p. 122).

Os ideais de uns são, sem sobra de dúvida, diferentes dos ideais de outros, seja na natureza, seja nas características, uns almejam coisas distintas de outros, enfim são diferentes na forma de pensar, agir, de ser e de vir a ser. A partir do respeito a essas diferenças o educador, de acordo com Freire (2017a), não pode ter a pretensão de, a qualquer custo, conquistar seus educandos, nem tampouco, precisa temer que pretendam conquistá-lo. Tem que ter disponibilidade, para, seguro do tema que vai discutir com eles, expor seu posicionamento, sem a arrogância de quem sabe tudo e com a leveza de quem ignora algo, mas sempre disposto a saber melhor. “Minha segurança se alicerça no saber confirmado pela própria experiência de que, se minha inconclusão, de que sou consciente, atesta, de um lado, minha ignorância, me abre de outro, o caminho para conhecer” (FREIRE, 2017a, p. 132).

Para Freire (2017a), é neste processo de abertura, manifestada pela inquietude e curiosidade da inconclusão, que se dá a relação dialógica. Relação que permite conhecer mais da realidade dos educandos, que no atropelo da vida frenética cheia de compromissos, pode passar despercebida. Que permite discutir sobre os acontecimentos atuais, que aliás, deu início à escolha do tema trabalhado na Modelagem Matemática e estudado criticamente nesta pesquisa, porque “Ensinar exige disponibilidade para o diálogo” (FREIRE, 2017a, p. 132).

No entendimento de Freire (2017a) querer bem ao educando e à prática pedagógica, sem o medo de romper com a barreira entre a seriedade docente e a afetividade, é estar disponível à alegria de viver. A afetividade não está afastada da cognoscibilidade e não é inimiga da rigorosidade, “Pelo contrário, quanto mais metodicamente rigoroso me torno na minha busca e na minha docência, tanto mais alegre me sinto e esperançoso também” (FREIRE, 2017a, P. 139). Misteriosamente, a prática pedagógica tem a capacidade de despertar no educador a sensibilidade, fazendo-o cumprir seu dever com amorosidade, porque ensinar “Exige querer bem aos educandos” (FREIRE, 2017a, p. 138).

Esse sentimento toma conta da professora pesquisadora que quer tão bem seus estudantes e sua prática pedagógica, ao ponto de preferir, neste momento, se expressar na primeira pessoa. São eles que conduzem minha vida em busca do novo, que estimulam minha criatividade, que provocam minha curiosidade, fazendo-me aprender diariamente. São eles que me irritam pela indiferença e que me encantam pela singularidade de cada um na forma de agir, sorrir, chorar, ouvir, falar, bagunçar, aprender e ensinar. Porque é por meio do olhar curioso, da manifestação de indiferença, da demonstração de amor, da atitude rebelde e da vontade de conhecer dos estudantes, que procuro conduzir minha prática pedagógica.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Para iniciar a discussão sobre a Modelagem Matemática, é interessante considerá-la neste primeiro momento, uma tendência da Educação Matemática. Para Flemming, Luz e Mello (2005), pesquisadores “[...] mostram diferentes abordagens quando tratam das tendências da Educação Matemática” (p. 14). Entende-se que uma tendência em Educação Matemática, é, sobretudo, um tema recorrente nas pesquisas deste campo. Para este estudo, serão levadas em conta, as tendências de Educação Matemática contempladas nas Diretrizes Curriculares da Educação do Estado do Paraná. De acordo com este documento, os conteúdos de Matemática devem ser abordados por meio da: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, Etnomatemática, História da Matemática e Investigação Matemática, que além de fundamentar a prática docente “[...] têm grau de importância similar entre si e complementam-se umas às outras” (PARANÁ, 2008, p. 63).

Na tentativa de elucidar aspectos inerentes à Modelagem Matemática, até mesmo quanto ao seu significado, alguns pesquisadores têm se debruçado no estudo sobre este assunto. Serão destacadas, portanto, as contribuições de Klüber (2007, 2012) e Bueno (2011) sobre o tema em questão.

Em busca de saber o que é Modelagem Matemática, o primeiro autor (2007), deparou-se com estudiosos que trazem concepções e propostas diferentes a esse respeito, desta forma, alerta que:

[...] Modelagem Matemática, não é algo de fácil compreensão, nem do ponto de vista semântico, do significado da palavra, que do latim modulari significa: **dar forma, reproduzir, que serve de modelo, exemplar**; e nem do ponto de vista das atividades, que não são iguais e, algumas vezes, totalmente contrárias, pois umas solicitam a construção de modelos matemáticos e outras não (p. 115 – grifos do autor).

Bueno (2011), em busca de esclarecer suas dúvidas sobre o tema, elabora um questionário aberto a quatro pesquisadores renomados⁵, contendo as seguintes questões: O que é Modelagem Matemática? O que é modelo matemático? Como se faz Modelagem Matemática na sala de aula? Quais são os objetivos para fazer Modelagem Matemática na sala de aula?

Tanto Klüber (2007) como Bueno (2011) concordam que a Modelagem Matemática está em processo de construção. Para tanto, Klüber (2007) conclui esta etapa de sua investigação afirmando que:

[...] nas atuais discussões das Modelagens na Educação Matemática, resta-nos dizer que as Modelagens estão postas educacionalmente em sentido metafórico, ainda carecendo de maiores esclarecimentos e entendimentos enquanto tendências teórico-metodológicas no âmbito da Educação Matemática. Metaforicamente porque não representa em termos diretos o que se faz, podendo conter inúmeras atividades que não comportem a construção de um modelo matemático, e mesmo de um processo que culmine nessa construção (p. 116 e 117).

Porém, de acordo com o entendimento de Bueno (2011):

O primado ao apontar diferenças sobre concepções de Modelagem Matemática entre os estudiosos é compreender parte de uma ciência em desenvolvimento, de modo que haja no decorrer do trabalho reflexões em termos de exemplos e consulta. Entende-se por este estudo que toda prática de Modelagem Matemática pode ser válida e não existe uma melhor ou pior que outra. O que existem são afinidades de ideias, propósitos e crenças. [...] acredita-se que ela possa trazer contribuições favoráveis ao ensino e aprendizagem da Matemática seja em qualquer nível de ensino, seja em acordo com qualquer maneira de concebê-la (p. 98).

Klüber (2012), ainda dedicado ao estudo do tema e amparado pela fenomenologia e hermenêutica, como modo de conceber a produção do conhecimento, dá prosseguimento à sua pesquisa e estabelece questões norteadoras para analisar as produções de comunicações científicas e relatos de experiência, publicadas na VI Conferência Nacional sobre Matemática na Educação Matemática - VI CNMEM. Por meio delas, destacou as compreensões mais significativas de Modelagem Matemática na Educação Matemática, assim como os oito autores brasileiros⁶ que normalmente são referenciados nessa área e que foram apontados de forma recorrente nestas produções.

⁵ Os estudiosos investigados são: Maria Salett Biembengut, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa e Dale William Bean.

⁶ Lourdes Maria Werle de Almeida; Jussara Loyola de Araújo; Jonei Cerqueira Barbosa; Rodney Carlos Bassanezi; Maria Salett Biembengut e Nelson Hein; Dionísio Burak; Ademir Donizeti Caldeira; Otávio Jacobini.

A questão principal da pesquisa de Klüber (2012): “*o que é isto, a Modelagem Matemática na Educação Matemática?*”, suscitou questões auxiliares: “1) *O que dizem os textos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática?* 2) *Quais os encaminhamentos tomados para o desenvolvimento da Modelagem Matemática? Que fundamentos/concepções/conceitos se mostram como seus orientadores?*” (p. 90).

A primeira pergunta auxiliar está relacionada à seis núcleos de ideias, a saber: “1) Como ambiente de Aprendizagem; 2) Como desdobramentos; 3) Como método; 4) Como processo; 5) Desde a sua constituição; 6) Como investigação Matemática” (Klüber, 2012, p. 376). Neste sentido, destaca-se algumas considerações de Klüber (2012) sobre esta questão. A Modelagem Matemática como

[...] ambiente de aprendizagem, apesar de ser uma tentativa de estabelecimento de lócus particular para no âmbito da Educação Matemática, se mostra muitas vezes de uma amplitude que permite ser reconfigurada, ora para processo, ora para método”. [...] O fato de ser assumida como estratégia, atividade, tendência, ou mesmo como um projeto é decorrência de suas características interdisciplinares. [...] A ideia de Modelagem Matemática como Investigação Matemática não mostra força entre os demais núcleos. [...] Por fim, a ideia da constituição da Modelagem Matemática se mostra como característica principal, pois ao se revelar como constituída por mais de uma disciplina abre-se um horizonte para que se pensem os demais núcleos, desde ambiente de aprendizagem, passando pelo método, seja matemático, seja de ensino, até um processo em que se busca dialogar com referência à realidade. Assim, assumo que a Modelagem matemática é constituída por mais de uma disciplina e somente nessa direção ela pode alcançar a sua contribuição mais efetiva à Educação Matemática (p. 378 e 379).

A segunda pergunta auxiliar, que se refere aos procedimentos em Modelagem Matemática na Educação Matemática, está relacionada a quatro núcleos, ou seja: “1) Sobre Modelos; 2) Sobre investigar; 3) Sobre temas; 4) Sobre ações didático-pedagógicas” (KLÜBER, 2012, p. 379). Neste caso, o autor (2012), aponta:

[...] o que se denomina de realidade em Modelagem Matemática é aquilo que é tematizado, por isso indico a dimensão temática articulada à dimensão investigativa e matemática. Diante disso se revela a necessidade de explicitar o que vem a ser matematização, para além de compreensões que apenas visam retratar a realidade. Assim, o que venho argumentando é que se deve questionar: como é possível elaborar procedimentos didático-pedagógicos que auxiliem o trabalho com os temas por parte dos estudantes? Há indícios dessa teorização, mesmo que diferentes, como partir do interesse e convidar, contudo, pretendo efetuar uma interrogação mais radical: como partir do interesse? Como convidar? Essas são apenas centelhas de interrogação que emergem a partir desta investigação (p. 382).

Por fim, sobre a terceira pergunta auxiliar, àquela que trata dos fundamentos, “[...] foram estabelecidos 4 núcleos: 1) Sobre Modelagem Matemática; 2) Sobre Matemática e

realidade; 3) Sobre Conhecimento; 4) Sobre Ensino, Aprendizagem e Educação Matemática” (KLÜBER, 2012, p. 383).

Para tanto, o autor (2012) considera que o que se mostra “[...] mais latente é que a Modelagem Matemática na Educação Matemática, ainda está fortemente atrelada às suas origens no âmbito da Matemática Aplicada”.

Klüber (2012) destaca que a Matemática é considerada como instrumento de compreensão da realidade e, tanto Matemática como a realidade aparecem sempre relacionadas. No entanto, os entendimentos sobre as duas não são convergentes, oscilam no conjunto de textos do próprio autor e na articulação entre os demais autores. A concepção de conhecimento também oscila, neste caso:

[...] entre platonismo e realismo, ou seja, o conhecimento está num mundo separado, das ideias ou das coisas, respectivamente”. [...] O núcleo sobre Ensino, Aprendizagem e Educação Matemática, também evidencia disparidades de compreensão, porém, todos partilham, implícita ou explicitamente, de um componente que posso chamar de crítica. Há a busca de estabelecer um ensino e aprendizagem que sejam críticos, que sejam favorecedores da formação crítica dos estudantes (KLÜBER, 2012, p. 385).

A partir das contribuições de Klüber (2007 e 2012) e de Bueno (2011), percebe-se que alguns autores da Modelagem Matemática pesquisados nestes estudos são comuns, ou seja, aparecem tanto nos estudos de Klüber (2007 e 2012), como no estudo de Bueno (2011), são eles: Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa e Maria Salett Biembengut, relacionados em ordem alfabética, pelo primeiro nome. Desta forma, serão abordadas as concepções de todos eles sobre o tema. A discussão será breve porque dar-se-á maior atenção a um desses autores, já que a Modelagem Matemática neste estudo foi desenvolvida de acordo com sua perspectiva.

Burak⁷ (1992, p. 62) define Modelagem Matemática como o “conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”. Para tanto defende dois princípios básicos: o interesse do grupo e a obtenção de informações e dados no ambiente onde se encontra o interesse do grupo.

⁷ Prof. Dr. Dionísio Burak é professor titular da Universidade Estadual do Centro-Oeste e rt-20 da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1973), mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1987), doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (1992) e Pós-Doutorado (2010) pela Universidade Federal do Pará. Disponível em: <<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=N481030>>, consultado em 31/10/2016.

Burak (2004) adota cinco etapas a serem seguidas para o desenvolvimento da Modelagem Matemática: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo no contexto do tema; e 5) análise crítica das soluções.

Burak (2004) alega que é na etapa da resolução dos problemas que é possível a construção do modelo, no entanto, não considera obrigatória essa construção, por entender que o modelo pode ser uma representação, como por exemplo, a lista de compras do mercado ou a planta baixa de uma casa.

No entendimento de Barbosa⁸ (2001), “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade” (p. 31). Por ambiente de aprendizagem, o autor (2001) inspirado em Skovsmose (2000, In: Barbosa, 2001), entende que “[...] são as condições que definem a organização de um determinado trabalho escolar” (p. 31). Neste sentido, dá como exemplos de ambientes de aprendizagem, a resolução de problemas e a aula expositiva.

Barbosa (2001) defende que a “Modelagem na Educação Matemática, por vezes, não conduz à construção de modelos propriamente ditos”, nestes casos, sugere a utilização de modelos prontos, como a fórmula de cálculo do volume de uma caixa de papelão.

Para o desenvolvimento da Modelagem Matemática, Barbosa (2001) exemplifica os Casos 1, 2 e 3. No Caso 1, o professor apresenta uma situação problema aos estudantes em que “A descrição da situação, os dados (reais) e o(s) problema(s) são trazidos pelo professor, cabendo aos alunos o processo de resolução” (p. 38). No Caso 2 o professor leva para a sala de aula um problema não-matemático e os estudantes ficam responsáveis pela coleta de dados e solução. No Caso 3 a proposta “[...] é o desenvolvimento de projetos a partir de temas, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos” (p. 39). Neste caso, tanto o levantamento dos dados, como a formulação do problema e sua solução, é de responsabilidade dos estudantes.

Neste sentido, Barbosa (2001) entende que “Os casos 1, 2 e 3 não representam configurações estanques e definitivas, mas regiões de possibilidades. É possível adaptá-los para atender às demandas do contexto escolar, dos professores e dos alunos” (p. 40).

⁸ Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa é professor adjunto do Departamento II da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. É professor permanente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFBA e no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS. Possui graduação em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (1997), doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2001) e estágio pós-doutoral na London South Bank University (2008) e na University of London (2013-2014). Disponível em: <<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4707413Z4>>, consultado em 31/10/2016.

Biembengut⁹ (1999) entende que Modelagem é a forma possível de interligar a Matemática com a realidade. A autora (1999, p. 20) define Modelagem como “[...] o processo que envolve a obtenção de um modelo” e acredita, portanto, que a Modelagem Matemática permite “[...] traduzir a linguagem do mundo real para o mundo matemático” (BIEMBENGUT, 1990, p. 10).

O esquema a seguir é uma representação da Modelagem, de acordo com o entendimento da autora (1999).

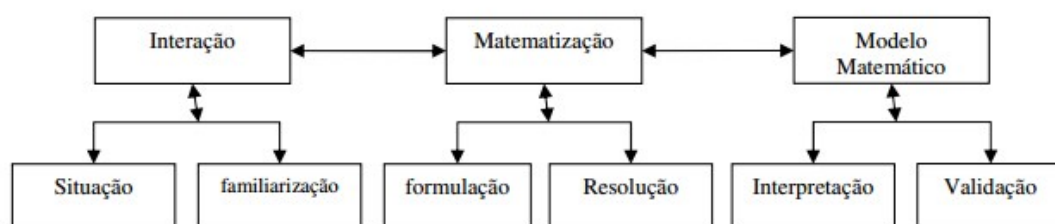


Figura 2: Etapas da Modelagem Matemática
Fonte: Biembengut (1999, p. 23)

De acordo com este esquema, a *interação* se dá após o delineamento da *situação* a ser estudada e acontece por meio de pesquisa sobre o assunto, que pode ser bibliográfica, documental ou pesquisa de campo para busca de dados empíricos, visando *familiarização* do estudante com a *situação* estudada (BIEMBENGUT, 1999).

A *matematização* se caracteriza pela *formulação do problema*, que se dá por levantamento de hipóteses, identificação de constantes, generalizações e seleção de variáveis, com o objetivo de obter fórmulas, expressões, equações que auxiliarão na *resolução* do problema formulado (BIEMBENGUT, 1999).

O *modelo matemático* deve estar estreitamente relacionado à situação problema que o representa. O que determinada esta relação é a *interpretação* da solução que se faz por meio dos dados obtidos da realidade que vai permitir a *validação* do modelo (BIEMBENGUT, 1999).

⁹ Prof. Dra. Maria Salett Biembengut atuou na Universidade Regional de Blumenau FURB de 1990 a 2010 no Departamento de Matemática e nos Programas de Pós-graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática; aposentou-se em fevereiro de 2010 e passou a atuar como professora voluntária; e na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS na Faculdade de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (2010-2015). É matemática com especialização na UNICAMP, pedagoga, mestra em Educação Matemática pela UNESP, doutora em Engenharia de Produção e Sistemas pela UFSC e pós-doutora em Educação pela USP (2003) e pela University of New Mexico USA (2009). Disponível em <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4766543T6>, consultado em 31/10/2016.

A autora também propõe que a modelagem seja realizada por meio das seguintes etapas: 1) Justificação do processo; 2) Escolha do tema; 3) Planejamento do trabalho a ser desenvolvido pelos grupos; 4) Orientação do processo; 5) Conteúdo matemático; 6) Apresentação de modelos matemáticos; e 7) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos (BIEMBENGUT, 1999).

Nos seus estudos sobre as concepções de autores que pesquisam a Modelagem Matemática, Bueno (2011), ao analisar as publicações de Biembengut, percebeu “[...] que esta autora reconhece a Modelagem Matemática próxima da Matemática Aplicada, mas considera que os objetivos são distintos” (p. 56). Bueno (2011) concluiu que Biembengut, ao se referir sobre a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, aponta que “[...] exige a criação de um modelo e deve ser trabalhado com fins no ensino do conteúdo matemático” (p. 56).

Encerradas as considerações dos três autores que são discutidos tanto na pesquisa de Klüber (2007 e 2012) como na pesquisa de Bueno (2011), serão retomadas às considerações de Burak sobre a Modelagem Matemática, uma vez que este trabalho foi desenvolvido de acordo com seu entendimento. No entanto, como este autor defende a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, julga-se necessário iniciar a discussão por este campo do conhecimento.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Burak (2010b) procura salientar a importância de a prática pedagógica estar de acordo com as concepções teóricas defendidas pelo professor, para que, de fato, sejam adotadas. No caso da Educação Matemática, o autor (2010b) alerta que:

A EM tem sofrido, ao longo dos anos, algumas críticas, infundadas é certo, no que diz respeito a alguns aspectos, entre eles o de se fazer Educação Matemática **sem Matemática**, o que é um grande equívoco, em sua consciência, nenhum Educador Matemático, aceita ou admite tal visão. [...] Entretanto tais críticas podem ser reflexos do próprio desconhecimento e da insuficiente compreensão do que vem a ser esse campo de estudo. Assim, pela responsabilidade em se assumir uma visão diferente para ensinar Matemática, que rompe com muitas concepções arraigadas em outras bases é que deve **conhecer e compreender** a Educação Matemática. [...] Consideramos que o desconhecimento, ou a omissão deliberada acerca dos fundamentos que constituem uma prática compromete todos os melhores esforços em busca de esclarecimentos, na discussão de outras perspectivas o que em nada contribui para o avanço no campo da Educação Matemática e, para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática. Ainda pode-se afirmar compromete, com alguma certeza, qualquer prática que se pretenda educativa (p. 11 e 12).

Porém, a Educação Matemática vem ganhando destaque nas pesquisas científicas e seu caráter tem sido marcado pelo dinamismo e importância de outras áreas do conhecimento, que auxiliam os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Como a Educação Matemática se apoia em estudos da Antropologia, História, Sociologia, Psicologia entre outras, Burak e Klüber (2010) defendem que deva ocorrer uma interação entre as diversas áreas. Desta forma é possível que se vislumbre grandes contribuições aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Os autores (2010) propõem a forma a seguir para representar esta relação.

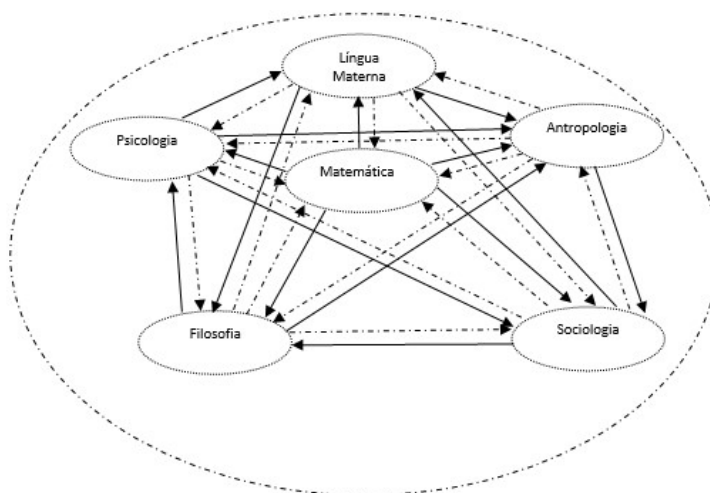


Figura 3: Educação Matemática na perspectiva das Ciências Humanas e Sociais
Fonte: BURAK; KLÜBER, (2010, p. 152)

Esta representação permite observar que tanto a Matemática como as demais áreas do conhecimento se interagem reciprocamente, sem desmerecimento de qualquer uma delas, além de possibilitar a incorporação de outras áreas, o que dá à Educação Matemática um caráter dinâmico e não estático.

Desta forma, Burak e Klüber, (2010) entendem que o objeto de estudo da Educação Matemática é tanto o ensino como a aprendizagem da Matemática, que vão se construindo pelas relações sociais que os estudantes estabelecem, por meio das quais emergem conhecimentos da Psicologia, Sociologia, Filosofia, Antropologia e de outras áreas.

Para Burak e Klüber (2010), a natureza da Educação Matemática, entendida como prática social conduz a discussões sobre o método de pesquisa, em que o quantitativo não se destaca como predominante, mas o qualitativo.

Isso remete a discussões ainda mais antigas ao se considerar os debates calorosos entre os defensores da Ciência Moderna e da Ciência Pós-Moderna. Os primeiros insistem no

rigor da racionalidade quantitativa, como único método de pesquisa, em que a Matemática ocupa lugar de destaque, enquanto os defensores das ciências sociais apontam para a necessidade de outros métodos.

Neste sentido, Santos coloca o entendimento de Ernet Nagel, sobre os obstáculos que as ciências sociais precisam enfrentar para que seus fenômenos sejam estudados como fenômenos naturais:

[...] as ciências sociais não dispõem de teorias explicativas que lhes permitam abstrair do real para depois buscar nele, de modo metodologicamente controlado, a prova adequada; as ciências sociais não podem estabelecer leis universais porque os fenômenos sociais são historicamente condicionados e culturalmente determinados; as ciências sociais não podem produzir previsões fiáveis porque os seres humanos modificam o seu comportamento em função do conhecimento que sobre ele se adquire; os fenômenos sociais são de natureza subjectiva e como tal não se deixam captar pela objectividade do comportamento; as ciências sociais não são objectivas porque o cientista social não pode libertar-se, no acto de observação, dos valores que informam a sua prática em geral e, portanto, também a sua prática de cientista (NAGEL, 1961, apud, SANTOS, 2006, p. 36).

Este brilhante entendimento esclarece sobre as razões do predomínio do método qualitativo para as pesquisas atuais em Educação Matemática. Não se quer aqui, atribuir a qualquer método de pesquisa, maior ou menor grau de importância, como será discutido no capítulo que trata da metodologia deste estudo. A discussão será trazida para que seja considerada a coerência pela escolha de um, outro ou mais de um método de pesquisa, dependendo dos dados obtidos no tema investigado.

Diante do que foi exposto, vale reforçar o alerta de Burak (2010b), ao afirmar que:

O fato de se fazer Educação Matemática exige cuidados e comprometimentos maiores do que até agora temos constatado ao assistir ou fazer leitura de Anais de eventos da área, de trabalhos apresentados sob a forma de comunicação oral ou relatos de experiências na maioria destituída de fundamentos teóricos, de articulação e discussão dos resultados na relação teoria e prática. Muitas vezes percebemos a adição de novas expressões, sinônimos e alegorias que não substituem a necessidade de se conhecer os fundamentos de um campo de estudo como consideramos a Educação Matemática (p. 11).

Pesquisas de diversas naturezas contribuem para a Educação Matemática, no entanto, como mencionado anteriormente, as pesquisas recorrentes neste campo ganham destaque e são consideradas tendências da Educação Matemática. A Modelagem Matemática¹⁰,

¹⁰ A Modelagem Matemática adotada como metodologia de ensino nesta pesquisa está embasada na Educação Matemática na perspectiva das Ciências Humanas e Sociais que já foi discutida. Ainda que esta ideia seja defendida não será reiterada para evitar repetições.

concebida no início do texto como uma dessas tendências, será qualificada também como metodologia de ensino e discutida, a partir de agora, sob o enfoque da perspectiva de Burak.

Este estudo buscou evidenciar as contribuições do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem dos estudantes, do ponto de vista cognitivo e social, tendo como viés, as considerações de Burak (1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b) sobre esta metodologia de ensino. O encaminhamento desta pesquisa adotou tais considerações por serem mais adequadas à esta proposta, como poderá ser observado a seguir. Para tanto, vale entender alguns aspectos reveladores da necessidade de trabalhar nesta perspectiva:

Consideramos inevitável sim, a própria mudança no mundo, os novos desafios, o surgimento das novas tecnologias de comunicação e da informação e, sobretudo pelos inevitáveis desafios colocados aos professores da Educação Básica na condução da formação dos nossos estudantes. Não sabemos que matemática eles usarão daqui a alguns anos, mas temos a certeza de que deverão tomar decisões, ter autonomia e ser capazes de se tornarem responsáveis por grandes transformações no âmbito da sociedade (BURAK, 2010b, p. 18).

A concepção e princípios da Modelagem Matemática defendidos pelo autor (1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b) anteriormente, norteiam seu encaminhamento por meio das etapas que já foram citadas e que serão discutidas a seguir.

Burak (2004) sugere que a Modelagem Matemática seja desenvolvida em cinco etapas:

Escolha do tema: Deve ser definido pelos estudantes a partir de algumas sugestões do professor ou independente de sugestões, sem a preocupação de que tenha relação imediata com a matemática. O professor assume o papel de mediador, cuidando para que o desejo dos estudantes seja respeitado.

Pesquisa exploratória: É o momento em que os estudantes são orientados a buscar as informações necessárias para aprofundar o conhecimento sobre o assunto, nos livros, nos sites, no campo e em outros meios.

Levantamento dos problemas: Com os dados coletados na pesquisa exploratória, os estudantes são instigados a relacionar o que pesquisaram com a matemática e outras áreas. A partir desta relação, devem elaborar problemas sobre o assunto, desde o mais simples ao mais complexo, que possam ser resolvidos por meio dos conteúdos matemáticos.

Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema: De maneira acessível, e com o auxílio da matemática busca-se resolver os problemas levantados na etapa anterior para que depois seja sistematizado. Fica estabelecido nesta etapa,

um caminho inverso do usual. Aqui, o conteúdo é trabalhado para responder os problemas levantados, sendo que, o que normalmente ocorre, é trabalhar problemas a partir dos conteúdos estudados.

Análise crítica das soluções: É o momento de apreciar as soluções encontradas para que se consiga julgar a coerência, não somente do aspecto matemático, mas da situação estudada. Oportunidade de reflexão que proporciona a compreensão do estudo e motiva a tomada de decisões que contribuam para as mudanças necessárias.

Burak (1992), no início de suas pesquisas sobre Modelagem Matemática, considerava que a construção do modelo era obrigatória. Com o passar do tempo, e tendo como foco principal a educação básica, para que houvesse maior coerência entre sua prática educativa e sua visão epistemológica, Burak (2004) se convenceu que faria uma grande diferença se os modelos fossem entendidos como uma representação, concebendo-o de forma mais ampliada. Sendo assim, o autor (2004) defende que:

No âmbito da Educação Básica, o trabalho com os modelos matemáticos, na perspectiva de Modelagem assumida não constitui prioridade. A maioria dos conteúdos trabalhados, nesse nível de escolaridade, vale-se de modelos já prontos: funções, equações lineares ou quadráticas, fórmulas das áreas de figuras planas e espaciais. Na perspectiva de Modelagem trabalhada modelo pode ser entendido como uma representação [...] (BURAK, 2010b, p. 23).

Quanto aos conteúdos que devem ser trabalhados a partir dos problemas levantados na pesquisa, Klüber e Burak (2008) salientam sobre a importância de que sejam ministrados sob a forma de *unidades de conteúdos*, evitando um trabalho pontual que priorize somente o que seja necessário para a solução do problema levantado.

Feitas as considerações sobre os fundamentos que nortearam os procedimentos metodológicos desta pesquisa, convém levar em conta mais um entendimento do autor:

A forma de conceber a Modelagem Matemática assumida, ao longo das últimas duas décadas busca tão e somente a consistência dos embasamentos e coerência das ações e procedimentos. O status de uma metodologia, significando aqui estudo de caminhos, fundamenta-se em um entendimento de Ciência e por uma visão de conhecimento que contemple e respeite as características e natureza do humano e do natural. Ainda, com a clareza de que cada objeto deve ser estudado de modo global, assistidos e subsidiado por áreas do conhecimento que promovam essa possibilidade (BURAK, 2010, p. 18).

Serão trazidas a seguir, algumas relações que podem ser estabelecidas entre as contribuições de Freire para a educação, vistas no tópico anterior, e as considerações de Burak (1992, 2004, 2010) sobre a Modelagem Matemática, que acabaram de ser discutidas.

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: APROXIMAÇÕES E DELIMITAÇÕES

As considerações de Burak (2005 e 2010a), Burak e Klüber (2013) e Klüber e Burak (2007) sobre Modelagem Matemática têm caráter de natureza transdisciplinar, curiosa e dialógica. Sendo assim, serão apontadas algumas aproximações que podem ser estabelecidas entre o entendimento destes autores e as ideias de Freire (2017a).

Quanto ao primeiro caráter, o de natureza transdisciplinar, vale ressaltar o que Gadotti (2002) pondera ao afirmar que não é possível entender a pedagogia deste último autor, sem compreender o conceito de transdisciplinaridade, já que Freire considera ser uma “[...] verdadeira exigência da própria natureza do ato pedagógico”. Alerta também que tanto a disciplina como o currículo deveriam ser ultrapassados (p. 52).

Para Freire, a natureza do ato pedagógico exige a transdisciplinaridade, a Modelagem Matemática, por partir de temas, rompe com a disciplinaridade.

Neste sentido, Moraes (2010) entende que a educação transdisciplinar é capaz de romper com as barreiras que confinam o pensamento, o sentimento e a ação do sujeito, e permite transcender as fronteiras. A educação neste viés favorece também a produção do conhecimento, numa dinâmica não linear, sujeita ao imprevisto, às emergências e ao inesperado (MORAES, 2010).

Para que isso se concretize, há que se considerar o alerta feito por Morin (2011), ao afirmar que:

O conhecimento das informações ou dos dados isolados é insuficiente. É preciso situar as informações e os dados em um contexto para que adquiram sentido. Para ter sentido, a palavra necessita do texto, que é o próprio contexto, e o texto necessita do contexto no qual se anuncia. [...] uma sociedade é mais que um contexto: é o todo organizador de que fazemos parte. O todo tem qualidades e propriedades que não são encontradas nas partes, se estas estiverem isoladas umas das outras, e certas qualidades ou propriedades das partes podem ser inibidas pelas restrições provenientes do todo. (2011, p. 34-35)

O que foi exposto vem ao encontro do que consta no Artigo de número 5 da Carta da Transdisciplinaridade, um documento que estabelece um contrato moral, acordado entre os seus defensores, que estabelece os princípios fundamentais sobre o tema.

A visão transdisciplinar é resolutamente aberta na medida em que ela ultrapassa o campo das ciências exatas devido ao seu diálogo e sua reconciliação não somente com as ciências humanas, mas também com a arte, a literatura, a poesia e a

experiência espiritual. (FREITAS, MORIN E NICOLESCU, 1994 IN: CETRANS, 1999, p. 169)

O segundo caráter da Modelagem Matemática, comentado anteriormente, aquele de natureza curiosa, permite a segunda aproximação que pode ser feita entre a Modelagem Matemática na perspectiva adotada e os pressupostos teóricos de uma educação dialógica defendida por Freire (2017a). Este último autor (2017a) sustenta que a inconclusão do ser humano inserido em um movimento permanente de busca, faz sua curiosidade ingênua e crítica tornar-se epistemológica. Mesmo que a curiosidade ingênua promova um saber do senso comum, que poderá transformá-lo em um saber elaborado, isso não acontece automaticamente. É necessário que o professor respeite tanto o senso comum como o processo de sua superação, por meio do estímulo da capacidade criadora do educando para possibilitar a promoção da ingenuidade (FREIRE, 2017a).

A curiosidade se destaca na Modelagem Matemática, uma vez que Burak (2010) defende sua provocação já na primeira etapa desta metodologia de ensino, quando os estudantes têm a oportunidade de escolher o tema que pretendem explorar. Para o autor (2010a):

A escolha de um tema para ser desenvolvido em Modelagem Matemática, [...] parte do interesse do grupo ou dos grupos de estudantes envolvidos. Esses temas são inicialmente colocados pelos estudantes, segundo o interesse que manifestam, pela curiosidade ou mesmo para a resolução de uma situação-problema (BURAK, 2010a, p. 19).

No entanto, a curiosidade manifestada nesta ocasião ainda é ingênua, de acordo com Freire (2017a). Na próxima etapa da Modelagem Matemática, na pesquisa exploratória, o estudante começa a desenvolver esta curiosidade para torná-la epistemológica. De acordo com Burak (2010a), a pesquisa exploratória acontece naturalmente, a partir do tema escolhido, pela curiosidade e desejo de conhecer mais e melhor sobre aquele assunto, que implica em buscar informações para elaborar seu conhecimento, condição fundamental para a formação de um estudante crítico. Aos olhos de Freire (2017a), este é o percurso que leva ao desenvolvimento da curiosidade epistemológica.

Burak (2005), em busca de estabelecer algumas conexões entre as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica, advindas da Lei 9394/96, e a Modelagem Matemática, aborda os Parâmetros Curriculares Nacionais e as diretrizes gerais que orientam a proposta pedagógica apontada pela UNESCO, durante a Conferência Mundial sobre Educação para Todos, que aconteceu na cidade de Jontien, na Tailândia, no ano de 1990. Para tanto, discute

quatro premissas denominadas: aprender a conhecer; aprender a fazer; aprender a viver e aprender a ser.

A curiosidade se encontra na primeira premissa, ao tratar da importância de uma educação de caráter geral que deve ter como fim

[...] aumentar os saberes que permitem não apenas compreender o mundo, mas favorecem o desenvolvimento do senso crítico, da curiosidade intelectual e o desenvolvimento da autonomia na capacidade de discernir. Aprender a conhecer pode favorecer o aprender a aprender que se constitui no caminho mais seguro para desenvolver o gosto para conhecer coisas novas, estimular a curiosidade como possibilidade para a descoberta e constituir base sólida para assegurar uma educação permanente (BURAK, 2005, [sp]).

Cabe ao professor se orientar por estas premissas e agir respaldado pelo entendimento de Freire (2017a), ao reforçar o quanto é importante saber que, sem a curiosidade que o move e o inquieta, não é possível aprender nem ensinar. A curiosidade domesticada leva à memorização mecânica do objeto e não ao aprendizado real deste objeto.

A satisfação desta curiosidade implica necessariamente na terceira aproximação entre os autores anteriormente mencionados, uma vez que, para satisfazê-la é imprescindível dialogar. É a provocação da curiosidade que determina a intensidade do diálogo. Sendo assim, o caráter dialógico, está estreitamente ligado à importância que Freire (2017a) dá a uma prática pedagógica nesta perspectiva.

Neste sentido, Freire defende

Estimular a pergunta, a reflexão crítica sobre a própria pergunta, o que se pode pretender com esta ou com aquela pergunta em lugar da passividade em face das explicações discursivas do professor, espécies de respostas a perguntas que não foram feitas. [...] A dialogicidade não nega a validade de momentos explicativos, narrativos em que o professor expõe ou fala do objeto. O fundamental é que o professor e alunos saibam que a postura deles, [...] é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos (2017a, p. 83).

Freire (2017a) sustenta que pensar certo não é característica de quem se isola e na solidão se limita ao silêncio, porque representa um ato comunicante. Pensar certo pressupõe entender e o entendimento não deve ser transferido, mas compartilhado, portanto implica em comunicabilidade do inteligido. Ao educador comprometido com a irrecusável prática de entender, cabe desafiar o educando participante da comunicação, a produzir sua compreensão daquilo que está sendo comunicado. Para o autor (2017a) não pode existir inteligibilidade se não houver comunicação e intercomunicação, porque o pensar certo é dialógico.

A Modelagem Matemática na perspectiva adotada é necessariamente dialógica em todas as suas etapas. Burak e Klüber (2013) destacam esta característica marcante e pontuam que o diálogo é fortemente observado antes mesmo da escolha do tema. Os autores (2013) se referem à importância de favorecer a discussão entre os estudantes, sobre os múltiplos aspectos que os temas sugeridos podem apresentar e afirmam que “O professor tem participação, levantando aspectos, contrapontos, solicitando argumentos, desafiando os estudantes a manifestarem suas opiniões, seus pontos de vista, de modo que se envolvam na discussão (BURAK e KLÜBER, p. 39).

Os autores (2013) colocam ainda que na etapa da resolução do problema levantado, que se dá a partir da coleta de dados obtidos na pesquisa exploratória,

A ação investigativa, ao traduzir em dados quantitativos algumas observações que em sua maioria são descritivas, confere nova conotação aos dados numéricos obtidos, possibilitando a discussão e o estabelecimento de relações que contribuem para o desenvolvimento do pensamento lógico e coerente. Os dados qualitativos permitem conhecer os processos, as características do objeto em estudo e adiciona elementos para favorecer a discussão e compreensão dos resultados (BURAK e KLÜBER, 2013, p. 41).

Acrescentam também as características que distinguem os problemas resolvidos na Modelagem Matemática daqueles encontrados na maioria dos livros textos e entre elas, apontam que “[...] incentivam a participação ativa do aluno nas discussões e elaboração” (BURAK e KLÜBER, 2013, p. 41).

A característica marcante do diálogo na Modelagem Matemática, é igualmente destacada pelos autores (2013) na etapa da análise crítica da(s) solução(ões), uma vez que consideram ser

[...] uma atividade que favorece o desenvolvimento do pensamento crítico e a argumentação lógica, discutindo, também, a coerência da solução do(s) problema(s) às situações da realidade estudada. É um momento importante para a discussão de aspectos relacionados à Matemática, à Sociedade, à Cultura, à Economia e à Política. Também nesse momento pode-se perceber implicações para a forma de conceber a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática, que leva em consideração uma natureza das Ciências Humanas e Sociais, que envolve mais do que a componente matemática, mas enseja o momento para a discussão, levando em consideração os componentes sociais, psicológicos, antropológicos e históricos, que, muitas vezes, são deixados de lado quando se procura uma visão mais convergente para a Matemática. Na perspectiva em foco, as discussões promovem momentos de interação, relativos à Matemática, método, linguagem, conteúdos, exequibilidade, não apenas matemática, mas no contexto da realidade estudada. Enriquece as discussões a partir de reflexões sobre os efeitos sociais, culturais, políticos e econômicos, entre outros, a partir dos resultados encontrados (BURAK e KLÜBER, 2013, p. 48).

Para ilustrar a presença do diálogo na Modelagem Matemática, convém considerar o trabalho de Klüber e Burak (2007) a partir da análise de duas dissertações que tratam desta metodologia desenvolvida de acordo com a concepção de Burak. A intenção dos autores (2007) era enfatizar a importância desta prática educativa, justificando sua utilização tanto no âmbito da Educação Matemática como no âmbito do Ensino. Ao analisarem as características desses trabalhos que pudessem estabelecer alguma relação com a categoria *socialização favorecida pelo trabalho em grupo*, trouxeram alguns trechos dessas das dissertações, e entre eles, observou-se a presença do diálogo nos que estão disponíveis no Quadro 1, com algumas considerações dos autores (2007).

Trechos do trabalho de Gomes (2002) discutidos em Klüber e Burak (2007)	
Igualmente na experiência de Gomes (2002) os alunos puderam socializar os conhecimentos sobre o tema a água na agricultura “cada equipe antes de entregar o artigo referente à pesquisa solicitada na aula anterior [...] deveria fazer um comentário quanto a importância do assunto selecionado” (p. 58). No momento das apresentações dos artigos e discussões em grupo, os alunos não queriam parar o debate nem mesmo após o término da aula “Terminamos a aula em função do avanço da hora, mas vários alunos reclamaram porque queriam continuar com o debate” (p. 61).	E ainda, a atitude dos alunos modificou-se, eles iniciavam as discussões acerca do tema, sem que a responsável pela turma pedisse que eles o fizessem “[...] entraram com vontade, animados, já perguntando sobre o assunto que iria ser visto e anunciando que estavam caprichando no trabalho dos seminários (idem, p. 79)”.
Trechos do trabalho de Soistak (2006) discutidos em Klüber e Burak (2007)	
A interação entre professor e aluno caracterizou-se em um processo social dialógico, no qual ambas as partes têm a possibilidade de expressarem seus pontos de vista. O ‘silêncio’ da sala de aula foi quebrado, pois ocorreram inúmeras discussões entre os alunos “[...] Durante a exposição de cada tema houve muita discussão entre os alunos, alguns defendendo o que propuseram e outros mudando de opinião, achando os outros mais interessantes” (SOISTAK, 2006, p. 67).	Os alunos depois de reunidos em grupo apresentaram sua situação-problema e o seu estudo aos demais colegas, tais apresentações geraram várias discussões e análises em relação ao conteúdo de funções, quanto à sua forma e validade com situações reais (SOISTAK, 2006).

Quadro 1: Diálogo na Modelagem Matemática
Fonte: KLÜBER e BURAK (2007)

Diante das evidências, há que se levar em consideração o caráter dialógico da Modelagem Matemática.

Muitas aproximações podem ser estabelecidas entre o aporte teórico de Freire (2017a) e a concepção de Modelagem Matemática defendida por Burak (2005 e 2010a), Burak e Klüber (2010) e Klüber e Burak (2007), uma vez que, neste viés, esta metodologia de ensino está de acordo com a Educação Matemática na perspectiva das Ciências Humanas e Sociais, porque considera os sujeitos, o meio social, cultural e outras variáveis. Além de ser entendida como uma proposta transdisciplinar que valoriza a curiosidade e a relação dialógica.

Porém, diante da importância que a professora pesquisadora dá às questões de relevância social, a Modelagem Matemática na concepção de Burak (1992, 2004), não prevê que o tema a ser escolhido pelos estudantes seja, necessariamente, sobre qualquer assunto que esteja relacionado às questões de ordem social. Assim sendo, além da inestimável relevância das contribuições de Freire (1983, 2017a, 2017b) sobre a educação dialógica para este estudo de modo geral, foram fundamentais ao suprir o anseio da autora para que a Modelagem Matemática fosse desenvolvida neste viés. Buscou-se, desta forma, que o pretendido desenvolvimento da autonomia, criatividade e criticidade dos estudantes fossem determinantes para a atuação de cada um deles em seu meio social em relação ao tema abordado e que isso reflita em suas vidas, atuando como cidadãos de bem, comprometidos com seus deveres e dignos de lutarem pelos seus direitos.

Para que o ensino supere a resistência pela mudança e promova uma educação de qualidade é urgente que sejam adotadas metodologias que contemplem estas características. As vantagens da Modelagem Matemática para o ensino não podem ser menosprezadas, no entanto é preciso que se atente para a necessidade de voltar os olhares também para o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos. Sendo assim, serão discutidos a seguir, os aspectos mais relevantes da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que embasaram a análise dos dados desta pesquisa, em relação à aprendizagem dos estudantes, do ponto de vista cognitivo.

3 UMA ANÁLISE COGNITIVA DA APRENDIZAGEM A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS

3.1 ASPECTOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS PARA A APRENDIZAGEM

O que se destaca na análise das produções dos estudantes é sua característica, ela pode ser analisada do ponto de vista matemático, definindo se está certa ou errada ou do ponto de vista cognitivo, procurando entender os motivos de compreensão ou de incompreensão possíveis de serem identificados nestas produções. Duval (2010) entende que um *sucesso em matemática*, não significa necessariamente, um *sucesso cognitivo*. É a partir deste entendimento que insiste sobre a importância de uma conscientização no mundo acadêmico, para que as pesquisas em matemática considerem a análise do ponto de vista cognitivo.

O autor alerta que a aquisição do conhecimento matemático não se dá da mesma forma que aquisição do conhecimento em outras áreas, sendo assim, há que se levar em conta suas especificidades. Neste sentido, Duval (2010) salienta que os objetos matemáticos não são acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente como em outras disciplinas, que podem se utilizar de microscópio, telescópio, aparelhos de medida e outros. Os objetos matemáticos são acessíveis somente por meio das representações semióticas.

Brandt (2005) sustenta este entendimento ao afirmar que “A necessidade de uma diversidade de representações semióticas para um objeto matemático deve-se ao fato de que eles não têm existência física e não estão diretamente acessíveis na percepção” (p. 68).

Duval (2010) afirma que a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e aquela requerida por outra área do conhecimento, deve ser procurada em duas características: a importância das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática.

Para Duval (2010) “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (p. 14). Desta forma, Duval (2012a) considera que não seja mais possível manter o impasse entre a situação epistemológica da matemática e de outras ciências.

Os registros de representações semióticas descrevem o modo de funcionamento cognitivo da atividade matemática e determinam os fenômenos de compreensão e incompreensão do aprendido (DUVAL, 2011b, *apud* DUVAL, 2012a).

Duval (2012a) entende que a atividade matemática comporta duas faces, uma que é própria da matemática e que leva à decomposição dos conteúdos matemáticos que serão ensinados e está focada nos objetos, suas propriedades, algoritmos e provas. Esta decomposição se refere aos pré-requisitos necessários para a aprendizagem de um determinado objeto matemático. A outra é cognitiva, que “[...] consiste em decompor a resolução proposta para os problemas em conversão implícita ou explícita e em tratamentos segundo os registros mobilizados” (DUVAL 2011, p. 148). A análise cognitiva oferece duas, vantagens metodológicas: 1. Permitir uma análise precisa tanto do que o estudante faz ou tenta fazer, como do que ele não faz ou não percebe naquilo que faz. 2. Comparar produções de um mesmo estudante em problemas que mobilizem conhecimentos matemáticos diferentes. (DUVAL, 2011).

Sendo assim, para que fosse possível considerar a face cognitiva da atividade matemática, neste trabalho de pesquisa, houve uma preocupação em analisar a produção dos estudantes na perspectiva da aprendizagem na dimensão cognitiva e não na dimensão matemática, como a maioria das pesquisas existentes se propõem. Duval (2012a) lamenta o fato de a atividade cognitiva não ser levada em conta nos objetivos das instituições formadoras e das atividades propostas em sala de aula. Para tanto, é necessário que a análise dessas produções seja feita de acordo com os aspectos mais relevantes da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que serão discutidos a seguir.

É necessário então, partir do princípio de que a compreensão de qualquer objeto matemático, depende da coordenação de pelo menos, dois registros de representação semiótica. (DUVAL, 2010). É nesse ponto que é importante considerar a existência de dois tipos de transformações de representações semióticas. Essas transformações são radicalmente diferentes e são denominadas de tratamentos e conversões.

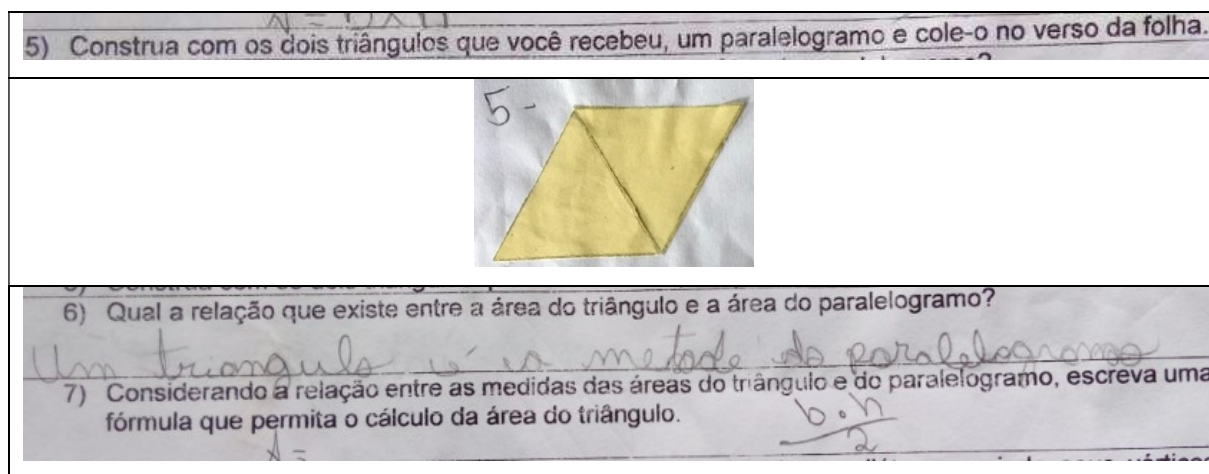
O tratamento consiste numa “... transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação” (DUVAL, 2009 p. 39).

Uma forma de transformação que ocorre no mesmo registro é a equivalência de frações. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

Quanto à conversão, o autor afirma que exige a mobilização de dois registros, uma transformação que passa de um registro para outro (DUVAL, 2009).

No presente estudo, com o objetivo de estudar os conhecimentos necessários para a solução do problema levantado, de acordo com o tema da Modelagem Matemática, os estudantes foram instigados a converter alguns registros que representam o mesmo objeto matemático. Uma das propostas feitas neste sentido foi a representação da área do triângulo, a partir da construção da área do paralelogramo, que se deu primeiramente pela conversão desta construção geométrica para a língua natural comum, ou língua materna e, em seguida, pela conversão deste último registro para a língua formal, por meio de uma expressão algébrica. Este procedimento exemplifica a transformação denominada conversão, que foi realizada pelo sujeito A13 e está disponível no Quadro 2.



Quadro 2: resposta sujeito A13 para as perguntas 5, 6 e 7 da atividade AC

Fonte: dados da pesquisa

Para Duval (2009) o sujeito só terá condição de acessar um objeto de conhecimento quando fizer a conversão espontânea de um sistema semiótico a outro. Se isso não ocorrer, o objeto é confundido com as representações, que não poderão ser reconhecidas como representações deste objeto, podendo gerar bloqueio e perda de sentido.

Para esclarecer melhor este entendimento, convém trazer outra explicação de Duval (2012b) a esse respeito.

A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado (p. 270).

De acordo com Brandt “Essa questão vai exigir duas operações cognitivas ligadas ora, à representação do objeto matemático, ora, ao próprio objeto matemático” (2005, p. 69).

Sendo assim, Duval (2009) afirma que “Não há *noésis* sem *semiósisis*, [...]” (p.18). Para o termo *semiósisis* entende-se signo, ou de acordo com Duval “[...] produção de uma representação semiótica” e ao termo *noésis* “[...] atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto” (2009, p. 15).

A particularidade da aprendizagem em matemática está, principalmente, ancorada no fato de que, qualquer atividade cognitiva nesta área, requer além da linguagem natural, sistemas variados de escrita, que possam expressar e representar os objetos matemáticos, uma vez que estes objetos não têm existência física ou real. Isso, de acordo com Duval (2012b) provoca um verdadeiro paradoxo, que ele define da seguinte forma:

[...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível (p. 267).

Para o autor (2012d) o paradoxo é maior ainda quando se considera as representações semióticas como secundárias, servindo apenas para fins de comunicação já que exteriorizam as representações mentais “[...] quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (DUVAL, 2012b, p. 268).

Desta forma, o autor (2012d) entende que as representações têm um papel fundamental: no desenvolvimento das representações mentais; na realização de diferentes funções cognitivas (objetivação, comunicação e tratamento) e para a produção de conhecimentos. Faz esta afirmação porque entende não ser possível

[...] fingir como se as representações semióticas fossem simplesmente subordinadas às representações mentais, pois o desenvolvimento da segunda depende de uma interiorização da primeira e somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais como a de tratamento. O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “noesis” a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose (DUVAL, 2012b, p. 270).

Como o autor (2012b) entende que aprendizagem da matemática é considerada um campo privilegiado de estudo, é fundamental que seja desenvolvido um método de análise que capaz de observar fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática, por meio da

mobilização de vários registros de representação semiótica e da conversão dessas representações, presentes nestas produções (DUVAL, 2010).

Motivo pelo qual a atividade de onde foram extraídos os registros do estudante disponível no quadro anterior, que objetivava a dedução da fórmula da área do círculo, assim como a atividade que objetivava a dedução da fórmula do comprimento da circunferência, e que serão descritas posteriormente, foram elaboradas. A intenção era obter mais de um registro de representação do mesmo objeto matemático para que análise fosse feita, de forma que permitisse observar os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática.

A análise cognitiva pode se respaldar também no aporte teórico das funções discursivas de uma língua, outro enfoque da Teoria dos Registros priorizado por Duval (2004), para que se possam elucidar questionamentos importantes sobre “[...]o papel da linguagem no funcionamento do pensamento e resolver os problemas de linguagem encontrados no ensino”.

Para tanto, o autor (2004) aponta para a necessidade de responder três questões fundamentais. A primeira delas, já abordada por Bresson (1987), é: “A língua consiste em algo diferente aos outros sistemas semióticos como os esquemas e as imagens?”. A segunda consiste em saber: “Em que se diferencia a língua natural das línguas formais?”. Por fim, é instigado a compreender: “Por quê a língua pode dar lugar a empregos tão diferentes como é comum na conversação, no enunciado especializado de teoremas matemáticos ou na ‘escrita’ literária?” (DUVAL, 2004, p. 85-86 – tradução nossa).

Duval (2004), embasado em Benveniste (1966), entende que a língua tem como característica permitir um discurso e que a prática deste discurso é inseparável de um certo funcionamento cognitivo. Assim, uma expressão pode ser compartilhada entre os que pretendem comunicar-se entre si e falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não podem ser compreendidos somente por meio das potencialidades significantes de uma língua, mas por meio do discurso.

Desta forma, Duval (2004) alerta que é importante fazer a distinção radical entre as funções mobilizadas no emprego de uma língua, as comuns, conhecidas como funções meta-discursivas e as específicas, chamadas de funções discursivas.

Como o escopo deste trabalho refere-se às funções específicas de uma língua, serão discutidas rapidamente, a seguir, as funções comuns.

Para Duval (2004), a comunicação é a primeira função meta-discursiva e se dá principalmente por meio do sistema semiótico mais elementar, a língua natural, seja sob a forma de conversação, interpelação, declaração, comunicado, comentário, exposição,

conferência, etc. O discurso é o modo fundamental de interação social entre os indivíduos. Existe também outros sistemas semióticos que podem cumprir esta função social de comunicação e substituir a língua natural, sendo assim, todos estes sistemas servem como linguagem sem que sejam línguas (Duval, 2004).

O tratamento, segunda função meta-discursiva, consiste na transformação da informação recebida em outras informações, por exemplo, simplificar uma grande expressão matemática, de acordo com suas regras e por etapas, para resolvê-la. Isso permite o desenvolvimento do raciocínio que deixa de ser implícito e passa a ser explícito. A função de tratamento pode ser cumprida não somente pelos sistemas linguísticos, mas também pelas notações simbólicas e escrita de números, por exemplo (Duval, 2004).

A objetivação, terceira função meta-discursiva, é a tomada de consciência daquilo que até então o sujeito desconhecia. É manifestada por meio de uma exteriorização, que não é uma simples explicitação, mas uma projeção, que pode realizar-se por meio de sistemas semióticos escritos ou figurativos como o desenho, por exemplo (Duval, 2004).

Duval (2004), entende que estas três funções são irreduzíveis entre si e alerta que um discurso produzido com fins de objetivação, não pode ter como finalidade a comunicação, para tanto, baseia-se em Lacan (1966 e 1975), ao afirmar que isso promoveria um equívoco ou uma incompreensão, além de destruir a comunicação com a que se expressa. Salienta ainda que:

No ensino da língua materna como no das matemáticas, a confusão destas três funções meta-discursivas, em relação à produção ou avaliação dos textos dos alunos, pode ter consequências desastrosas tanto na aprendizagem da expressão como no raciocínio (DUVAL, 2004, p. 88 – tradução nossa).

Cada uma dessas funções tem suas especificidades. É por meio da comunicação que a informação pode passar de um sistema a outro, ou circular no interior de um espaço social. Já o tratamento, representa a transformação da informação para que se possa extrair dela, outras informações. A objetivação é a possibilidade de o sujeito tomar consciência, do que até então, não era consciente (DUVAL, 2004).

A discussão seguinte será sobre as funções cognitivas que devem ser cumpridas por um sistema semiótico para possibilitar um discurso. São conhecidas como funções específicas e denominadas de funções discursivas que foram utilizadas para embasar a análise dos dados da pesquisa, uma vez que trazem subsídios que permitiram analisar os registros dos estudantes no sentido de poder entender suas compreensões e incompreensões.

Duval (2004) apropria-se do entendimento de Benveniste para afirmar que são quatro as funções a serem cumpridas para haver um discurso, que possa fazer referência ao mundo e ser compartilhado com seus interlocutores, a saber:

- Função referencial de designação de objetos.
- Função apofântica de expressão de enunciados completos.
- Função de expansão discursiva de um enunciado completo.
- Função de reflexividade discursiva.

Cada uma dessas funções pode mobilizar diferentes operações cognitivas para possibilitar o cumprimento destas funções. A análise de um discurso não pode ser embasada somente em critérios linguísticos, deve ser, portanto, embasada em uma análise funcional (DUVAL, 2004).

Para Duval (2004), a imensa variedade de discursos pode resultar dos diferentes empregos da língua natural, ou seja, o emprego comum ou social, especializado e literário, que requer o desenvolvimento de um modelo de análise para qualquer tipo de discurso, desde que seja priorizada a independência das funções discursivas. Duval (2004), aponta que Granger (1979) propõe distinguir duas funções para análise do discurso, a locutória, responsável pela formulação referencial e proposicional, que pode converter-se em línguas formais e a ilocutória, que correspondente aos atos de enunciação e de comunicação, correspondente às línguas naturais.

Observada a vantagem desta distinção pela necessidade de mais de uma função para análise dos discursos, Duval (2004) alerta para a fusão das funções meta-discursivas com as funções discursivas. A função ilocutória é uma função tanto da função meta-discursiva de comunicação como da função discursiva de reflexividade. Esta constatação é preocupante por admitir que a diferença entre as línguas natural e formal seja essencialmente funcional. Sendo assim, determinadas funções poderiam ser cumpridas somente pelas línguas formais e outras, somente pelas línguas naturais. Desta forma, as línguas naturais poderiam cumprir unicamente a função meta-discursiva de comunicação.

Por outro lado, Duval (2004) defende que a oposição entre a língua natural e a língua formal não se dá por uma cumprir funções discursivas que não são cumpridas por outra, mas pelas diferentes operações discursivas que cumprem. Recomenda que o emprego da língua natural não pode ficar limitado à função meta-discursiva de comunicação, uma vez que pode cumprir também função de tratamento. Assim como as línguas formais podem cumprir tanto a função de tratamento, como de objetivação e comunicação.

Daí a importância de classificar as operações por meio das quais são cumpridas as quatro funções discursivas, em que serão mencionadas “... para uma mesma função as operações possíveis com as línguas naturais e as possíveis com as línguas formais” (DUVAL, 2004, p. 94 – tradução nossa).

Serão esclarecidas a seguir as especificidades de cada uma das quatro funções discursivas de designação de objetos.

Função referencial de designação de objetos

Duval (2004) afirma que os trabalhos de Frege (1982) e Russell (1905) permitem diferenciar quatro operações cognitivas que podem cumprir a primeira função que uma língua permite, designar objetos. A discussão seguinte será sobre cada uma dessas operações.

A operação de **designação pura** é encarregada de identificar um objeto por meio de gesto, fala ou combinação de signos. Os signos utilizados nesta operação não têm significação, pois se reduzem ao emprego referencial. Nesta operação geralmente os objetos podem ser identificados na fala, já na expressão escrita é necessário recorrer a outras operações de designação, como a operação de categorização, com o emprego de substantivos e de determinação, com o emprego de artigos (DUVAL, 2004).

Para tanto, Brandt, Moretti e Bassoi (2014) exemplificam esta operação cognitiva referindo-se a P e r na frase seguinte: “Seja **P** um ponto qualquer da reta **r**...” (p. 481).

A operação de **categorização simples** identifica um objeto de acordo com uma de suas qualidades, com o uso de substantivos, verbos ou adjetivos qualificativos. No entanto, esta operação não é suficiente para identificar um objeto, deve ser combinada com a operação de determinação (DUVAL, 2004).

Neste caso, Brandt, Moretti e Bassoi (2014), usam como exemplo o MMC na frase seguinte: “Determinar o **MMC** dos números 3, 4 e 9” (p. 481).

A operação de **determinação** é encarregada de determinar a aplicação de um artigo que a operação de categorização exige (DUVAL, 2004).

Aproveitando o exemplo anterior, Brandt, Moretti e Bassoi (2014), afirmam que na frase “Determinar **o** MMC dos números 3, 4 e 9”; onde o artigo “o” está destacado, é possível perceber que a “[...] categorização simples não é suficiente por si só para designar um objeto, ela deve estar combinada com a operação de determinação.

De acordo com Duval (2004), a operação de **descrição** identifica um objeto por meio do cruzamento dos resultados de várias operações de categorização. Essas duas operações são

equivalentes, no entanto, são irredutíveis por dois motivos. O primeiro é que a operação de descrição é responsável por designar objetos cuja nomeação não é possível pela limitação do léxico que se dispõe. Esta operação é motivo de muitos problemas na aprendizagem da matemática, pela dificuldade de nomear um objeto cujo nome não é conhecido, como por exemplo, chamar pela letra *A*, um ponto qualquer. Para Duval (2004), o segundo motivo é que, de acordo com Russel (1970), a operação de descrição é responsável também por designar objetos impossíveis, que não podem ser identificados. A descrição designa somente um objeto e não um conglomerado.

Ainda de acordo com o exemplo anterior, Brandt, Moretti e Bassoi (2014) afirmam que o “[...] MMC designa o Mínimo Múltiplo Comum, e os algarismos 3, 4 e 9 designam os números. Essas duas designações são interligadas pela preposição de: “Determinar o MMC **dos** (de + os) números 3, 4 e 9” (p. 483). A preposição de, neste caso, é responsável pelo cruzamento das operações de categorização.

A operação de descrição, assim como a de categorização simples requer ser combinada com a operação de determinação, com exceção de alguns casos, já que um objeto pode ser designado somente por meio da combinação de pelo menos duas operações (DUVAL, 2004).

Será discutido a seguir sobre a importância dos léxicos para as operações de designação, mas primeiramente é necessário entender que estes léxicos compreendem um conjunto de elementos que podem ser representados por signos, símbolos ou palavras.

Para Duval (2004), não são todos os léxicos que permitem cumprir as quatro operações de designação, alguns léxicos podem cumprir apenas uma delas. A organização de um determinado léxico vai depender das propriedades das operações de designação que permite cumprir.

Duval (2004) entende que o léxico tem pouca importância quando a referência é feita unicamente por meio da operação de designação pura, com a restrição de que o mesmo signo não pode ser utilizado para designar objetos materialmente diferentes. Já quando a referência é feita pelas operações de categorização ou de determinação, torna-se necessário utilizar um léxico inicial que deve ser enriquecido com novos termos. Considerando que os modos de organização e de extensão destes léxicos devem ser diferentes, é importante distinguir dois tipos de léxicos que são denominados de sistemáticos e associativos.

Duval (2004) se embasa no entendimento de Granger (1979) para definir como se dá a constituição de um léxico sistemático. Sendo assim, considera que um conjunto composto

de objetos elementares, cuja designação acontece por meio de símbolos arbitrários, promove a designação dos objetos complexos, por meio da composição destes símbolos arbitrários.

Esta constituição pode ser elucidada com o sistema de numeração decimal, se os algarismos forem considerados como objetos elementares e tanto o “1” como o “5”, por exemplo, como símbolos arbitrários. Desta forma, pode-se inferir que os números “15” ou “51” são objetos complexos que podem ser formados com a composição destes símbolos arbitrários, que constituem o léxico inicial. Como cada algarismo de um número tem valor de acordo com a posição que ocupa, a combinação destes signos, designam infinitos números e esta é a regra que permite determinar os objetos complexos. Esta regra será discutida mais detalhadamente a seguir.

De acordo com Duval (2004), o léxico sistemático “permite somente a operação de designação pura e não as de categorização ou de determinação”. Há que se observar também as importantes restrições impostas pelos léxicos sistemáticos, uma vez que além de designar objetos pertencentes somente a um determinado domínio, podem ser insuficientes para designar todos os objetos deste domínio (2004, p. 98 – tradução nossa).

Aproveitando o exemplo anterior, pode-se afirmar que para compor com os símbolos arbitrários “1” e “5”, as seguintes notações: - 15; - 51; 1,5; 5,1; - 1,5; - 5,1; $\frac{1}{5}$; - $\frac{1}{5}$; $\sqrt{15}$ ou $\sqrt{51}$, necessita-se de outros símbolos para compô-las, como: o traço que representa o número negativo; a vírgula que separa a parte inteira da parte decimal de um número racional; a barra que representa um traço fracionário e o símbolo denominado radical utilizado na operação de radiciação.

Desta forma, Duval (2004) afirma que o traço horizontal utilizado nos números negativos, a vírgula, o traço fracionário e o radical são de acordo com Granger (s/d), símbolos incompletos chamados de sincategorimáticos e não designam por si mesmos. No entanto, modificam tanto a significação como a referência das notações anteriores, representadas por “15” e “51”. Para Duval (2004), tal modificação causa muitas dificuldades para a aprendizagem da matemática, já que de acordo com Shiffrin & Schneider (1977), pode acontecer uma automatização na utilização destes caracteres para representar números pertencentes a conjuntos numéricos diferentes.

Para Duval (2004), quando o léxico sistemático inicial precisa ser ampliado com a utilização de notações associadas, como é o caso da vírgula, obtém-se um novo léxico que pode continuar funcionando como léxico sistemático. Contudo, mostra-se insuficiente para representar todos os números pertencentes ao conjunto dos números reais, por exemplo. Esta

limitação deve ser considerada no plano conceitual, como no caso da impossibilidade de se construir um léxico sistemático que represente uma dízima periódica. Então, os números reais podem ser designados por meio da operação de designação pura, se for racional, como 5,1 ou pela operação de descrição, se for irracional, como 5,111... Os pontos, nesta última representação, indicam a repetição indefinida do algarismo 1 no número representado, ou seja, designa um objeto impossível, que é função da operação de descrição vista anteriormente (DUVAL, 2004).

De acordo com o entendimento de Duval (2004), um léxico é considerado associativo “[...] quando seu léxico de partida não remete a um conjunto de objetos teoricamente elementares, mas à diversidade de objetos e de fenômenos do ambiente físico e do entorno sócio cultural” (p. 98 - tradução nossa). Sendo assim, Duval (2004) afirma que os objetos e fenômenos geralmente podem ser designados por meio da especificidade particular que os caracteriza, sem a necessidade de defini-los, na medida que, a palavra que os designa, faz despertar a imagem destes objetos.

A palavra cachorro, por exemplo, tem especificidades particulares que caracteriza o objeto, possibilitando despertar sua imagem.

No entanto, Duval (2004) alerta que existem objetos diferentes que podem ser designados pelo mesmo nome. As seguintes situações seguintes podem ser usadas como exemplo: Seja o ponto A, o vértice de um triângulo, ou, seja o ponto A, o ponto médio de um segmento. Isso quer dizer que o ponto A por si só não diz alguma coisa. Faz-se necessário então, introduzir uma variação no emprego de palavras que já existem, promovendo uma extensão semântica. Esta variação pode acontecer de diferentes formas e em todas elas, a extensão semântica combina a operação de designação pura com a operação de categorização simples, que tem a função de qualificar o objeto.

Outro exemplo para este caso, é a palavra “raiz” que possui diversas definições. Para se referir à parte inferior da planta que se fixa ao solo, pode-se usar “raiz vegetal”. O resultado da operação de radiciação na matemática, pode ser chamado de: “raiz quadrada”, “raiz cúbica” e outras, dependendo do índice da operação.

A palavra “raiz” nestes casos, consiste em uma operação de designação pura. Já, as palavras “vegetal”, “quadrada” e “cúbica”, usadas em cada caso específico, representam uma extensão semântica, que se fez necessária por meio de uma operação de categorização.

Segundo Duval (2004), o contraste fundamental entre os léxicos sistemáticos e os associativos está embasado no plano de seus léxicos de partida respectivos. Em uma língua formal, a composição dos símbolos dos léxicos elementares é feita respeitando as regras de

formação que permitem designar os objetos complexos, logo o léxico de partida da língua formal é quase nulo. Já na língua natural, o léxico de partida é fundamental, uma vez que pode suprimir a introdução de palavras novas. Para uma palavra já existente transformar-se em um léxico associativo, faz-se necessário, muitas vezes, parafrasear por meio de uma explicação ou explicitar com uma definição, que não é o caso dos léxicos sistemáticos.

No sistema de numeração decimal que já foi discutido, utilizou-se o léxico de partida compreendido pelos algarismos para formar os números. Como o valor deste algarismo é determinado pela posição que ocupa no número, então é a regra desse sistema de numeração que permite compreender isso. Não se faz necessário explicar a regra a cada número escrito, o léxico de partida é suficiente, desde que a regra seja compreendida, portanto o léxico de partida não tem importância relevante, mas sim a regra. Esta é uma operação de designação pura que acontece por meio de um léxico sistemático na língua formal.

Na língua natural, a palavra “cachorro” por exemplo, é suficiente para a compreensão, já que a palavra pode remeter a uma imagem, independente da existência de qualquer tipo de regra, faz-se uma associação da palavra com a imagem do animal ou objeto. Desta forma, tem-se mais uma demonstração da operação de designação pura, exercida desta vez, por um léxico associativo, no entanto, na língua natural comum. Sendo assim, o léxico de partida (palavra cachorro usada como exemplo) é suficiente para compreensão, independente de regra, então, tem importância relevante.

Também na língua natural, a palavra “radical” pode ser entendida como o que é drástico ou brusco ou ainda como o símbolo utilizado para extração de raiz de determinado número na matemática, entre outros. Sendo assim, este termo precisa ser explicado com uma paráfrase ou explicitado por meio de uma definição. É o léxico inicial que determina o que deve ser acrescentado para que seja compreendido, e isso dá a ele, fundamental importância. Trata-se novamente de um léxico associativo, mas este caso, exige uma operação de categorização e/ou de determinação para designar um objeto na língua natural.

Formas associadas da função referencial

Para Duval (2004) existe múltiplas formas variadas de expressões suscetíveis ao cumprimento da função que faz referência aos objetos de um discurso. Para distinguir e analisar estas formas variadas é preciso considerar as operações que permitem o cumprimento da função. Raramente, apenas um elemento do léxico é suficiente para designar objetos, é

necessário uma proposição que associe vários elementos do léxico, tanto nas línguas formais, como nas naturais.

A passagem dos registros de uma língua natural para os registros de uma língua formal, de acordo com Duval (2004) está longe de ser simples. A razão disso está na “...diferença considerável, de tamanho e variedade, entre o conjunto das unidades suscetíveis de cumprir uma função referencial em língua natural e o conjunto de unidades suscetíveis de cumpri-la nas línguas formais” (DUVAL, 2004, p. 101 – tradução nossa). O autor (2004) entende que a diferença está embasada na ausência de léxico sistemático e principalmente associativo, que permita nominar os objetos nas línguas formais e constitui uma das características específicas destas línguas.

Duval (2004) considera que a língua natural tem dois empregos antagônicos, o emprego comum e o especializado que é comumente chamado de lógico-matemático. A análise da maneira como se efetuam as operações com a função referencial dá condições de pôr em evidência a diferença existente entre estes dois empregos. A operação de descrição é uma das características do emprego especializado da língua natural, particularmente no emprego lógico-matemático, cuja importância está no caráter recorrente que esta operação aparece. O autor afirma que neste caso, existe encadeamentos de complementos do substantivo e coloca como exemplo as seguintes proposições: ““(o ponto de (cruzamento de (duas bissetrizes de um triângulo))), ‘(o empilhamento de (esferas construídas por (superposição em desequilíbrio de (camadas de (empilhamento em nível máximo)))))...”¹¹ (2004, p. 102 – tradução nossa).

Duval (2004) se apoia no entendimento de Greise (1986) ao afirmar que inversamente do emprego especializado, a operação de descrição no emprego comum dificilmente supera uma construção simples de complemento do substantivo com uma preposição, dando como exemplo as expressões: ““(lembranças de sonhos)”” e ““(o princípio da sanidade)”” (p. 102 – tradução nossa).

Resumidamente pode-se inferir que, no emprego da língua natural comum, a operação referencial de descrição é menos recorrente do que no emprego na língua natural especializada. Logo, a operação de descrição tem maior importância no emprego especializado da língua natural.

Será visto a seguir, a segunda função de designação de objetos.

¹¹ Do segundo parênteses aberto em diante, cada abertura representa a inserção do complemento do substantivo nas proposições dadas como exemplo.

Função apofântica de expressão de enunciados completos

Para Duval (2004), tanto a língua como um sistema de signos não devem cumprir somente a função de designação de objetos, deve também dizer alguma coisa sobre os objetos que designa, cumprindo uma atividade discursiva chamada de função apofântica. Caso contrário, tanto a língua como o sistema de signos, ficam reduzido a um código apenas. De acordo com o autor (2004), Aristóteles foi o primeiro que destacou explicitamente a originalidade da função apofântica em relação à função referencial.

Duval (2004) considera equivocado o termo “enunciado completo” atribuído às expressões que cumprem esta função, porque entende que esta denominação é vaga. O autor (2004) defende esta ideia por considerar que esta qualificação geralmente se limita a sugerir “...que a diferença entre os enunciados completos e as expressões referenciais tenderia ao caráter completo, ou suficiente, do sentido dos primeiros em relação aos segundos.” (p. 104-105 – tradução nossa).

Portanto, sustenta que

Na realidade, não é na completude do conteúdo expresso [...] de onde é necessário buscar o que diferencia o sentido de um enunciado completo e o de uma expressão referencial, mas no ato da expressão mesmo. Um enunciado tem um “sentido completo” porque o ato da expressão que o produz é completo. Um ato de expressão é um ato completo do discurso quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores. Dito de outra maneira, a especificidade do sentido de um “enunciado completo” em relação à uma expressão referencial, deve buscar-se em seu valor (DUVAL, 2004, p. 105 – tradução nossa).

Mas em que se constitui este valor? Duval (2004), se apropria do entendimento de Ducrot (1972) ao afirmar que

Este valor pode ser **um valor lógico** de verdade ou de falsidade, um **valor epistêmico** de certeza, de necessidade, de verossimilitude, de possibilidade ou de absurdidade, um **valor social** de pergunta que obriga a uma resposta, de ordem para executar-se, de desejo, de promessa, etc (p. 105 – tradução nossa).

Pode-se inferir que para Duval (2004), o enunciado completo tem características mais específicas do que normalmente lhe são atribuídas, daí a necessidade de considerar mais adequado substituir “enunciado completo” por “unidade apofântica”. Isso pode ser justificado pelo fato de que a primeira denominação obscurece a diferença que tem entre uma frase e um texto, já que uma frase requer critérios de completude que correspondem ao valor social,

epistêmico ou lógico. Mesmo porque, os textos compostos por apenas uma frase, têm critérios de completude diferentes daqueles textos que contêm mais de uma frase.

A função apofântica, segundo Duval (2004), pode ser cumprida por meio de duas operações, a operação de **predicação** e o **ato ilocutório**. O autor (2004) menciona Benveniste (1966) e Granger (1979), para afirmar que o termo predicação tem origem nos estudos de Aristóteles e era usado para designar atribuição. Esta operação recorre às expressões referenciais, sendo que o enunciado que se forma por meio da predicação pode tomar tanto um valor epistêmico como um valor lógico, assim como apenas um dos dois. A segunda operação, ou seja o ato ilocutório, de acordo com Duval (2004), recebeu este nome a partir de Austin. Esta operação confere à produção do enunciado, um valor social de ato, comprometendo o locutor ou o destinatário. O autor (2004) se norteia pelos estudos de Ducrot (1980) para defender que “...é o ato ilocutório o que dá a uma expressão que provém de uma operação de predicação seu valor de afirmação (enunciado verdadeiro) ou de declaração, ou de pergunta ou de ordem, etc” (p. 106).

De maneira mais simples, entende-se que a operação de predicação, tem valor epistêmico e lógico ou apenas um deles, assim como a operação do ato ilocutório tem valor social de ato, que compromete o locutor ou o destinatário.

Para Duval (2004), as duas operações podem efetuar-se tanto de maneira independente como conjuntamente, sendo que cada maneira produz diferentes formas discursivas de unidades apofânticas. No entanto, nas línguas formais, as duas operações não podem separar-se.

Formas associadas da função apofântica

De acordo com Duval (2004), proposição é o nome dado à operação que cumpre uma função apofântica que exige a operação de predicação. No entanto, esta proposição é um enunciado completo nas línguas naturais, apenas quando resulta tanto de uma operação de predicação, como de um ato ilocutório. O autor (2004) se embasa no entendimento de Arnauld (1970) para sustentar que “É em relação à função entre a operação de determinação e o ato ilocutório particular (declaração), que a proposição se tem definido como um “julgamento” ou como uma ‘frase simples’” (p. 107 – tradução nossa).

Quanto às frases compostas, Duval (2004) afirma que a proposição pode aparecer na forma de “proposições subordinadas”, ou seja, independente do ato ilocutório, assim como um enunciado pode resultar apenas de um ato ilocutório, sem que haja qualquer operação de

predicação. Por estes motivos, nas línguas formais é impossível comparar proposição e frase, uma vez que, neste caso, a proposição origina-se de uma operação de determinação que é inseparável de um ato ilocutório particular, ou seja, de afirmação.

Para Duval (2004), apesar de as formas que dependem do ato ilocutório serem mais variadas e heterogêneas, este estudo se deterá somente às formas de expressão que dependem da operação de predicação, por serem mais importantes ao nosso propósito. Estas formas de expressão que são denominadas de proposições e de frases que resultam de uma operação de predicação, constituem unidades que podem ter a estrutura remática e a estrutura funcional, muito diferentes entre si. A estrutura remática é característica das línguas naturais e a estrutura funcional das línguas formais.

Duval (2004) entende que uma unidade apofântica de estrutura remática pode ser identificada pela combinação existente entre sujeito, verbo e predicado. Portanto, o autor (2004), embasado nos estudos de Arnauld (1970), afirma que o verbo “ser”, privilegiado no modelo de estrutura remática, vincula o sujeito a um predicado, este modelo é de origem aristotélico. Salienta também que embora toda proposição seja composta destes três elementos, pode ocorrer, neste modelo, de aparecer somente um deles, pela necessidade que o homem tem de abreviar seu discurso. Com isso, surgiram uma infinidade de palavras que representam sozinhas, uma afirmação, assim como os verbos. O autor (1970) que motivou os estudos de Duval (2004) coloca duas frases como exemplo desta economia observada no discurso: “Deus existe”, que substitui “Deus está existindo” e “Deus ama os homens”, no lugar de “Deus está amando os homens” (p. 108 – tradução nossa).

Entretanto, Duval (2004) afirma também que para não levar em consideração somente o papel lógico dos verbos, mas sua diversidade semântica, existe a proposta de outros modelos. Sendo assim, se baseia nos estudos de Fillmore (1968), e pontua o caso da gramática em que, existe uma relação estabelecida entre os objetos, que é determinada pelo verbo. Neste modelo, a relação é caracterizada pelos papéis que são atribuídos aos objetos, ou seja, papel de agente, de instrumento, de destinatário, entre outros. Coloca como exemplo o verbo “dar” que determina uma ação caracterizada pela configuração do papel de agente, de beneficiário e de objeto da ação (DUVAL, 2004).

Ainda apoiado no entendimento de Fillmore (1968), Duval (2004) salienta que o emprego de diferentes verbos determina diferentes configurações semânticas e que podem ser classificadas em casos. Salienta também que a frase pode ter uma estrutura profunda ou uma estrutura superficial. A primeira é determinada pela configuração particular estabelecida pelo verbo. Já a estrutura superficial que é a organização das línguas naturais, raramente é

congruente com a configuração semântica. Portanto, de acordo com os estudos deste autor (1968), Duval (2004) alega que isso “...tem levado a rechaçar a noção gramatical do sujeito como uma noção superficial não suficiente para modelizar a proposição” (p. 109 – tradução nossa).

No entanto, neste modelo de caso da gramática, como o verbo também pertence à estrutura superficial, é considerado essencial para reconhecer uma unidade que cumpre uma função apofântica e como responsável para identificar as extensões e os limites do enunciado (DUVAL, 2004).

Resumidamente, tanto a identificação como a análise de unidades apofânticas, em um modelo de caso da gramática, estão focados a presença de um verbo, enquanto que no modelo aristotélico, a proposição tem uma estrutura remática, ou seja, vincula o sujeito ao predicado, por meio do verbo “ser”, que é privilegiado nesta estrutura. (DUVAL, 2004).

Embasado no entendimento de Grize (1973), Duval (2004) afirma que as unidades apofânticas de estrutura remática podem cumprir tanto a função meta-discursivas de comunicação, como a de objetivação, porque correspondem às línguas naturais, que são primeiramente, línguas faladas. No entanto, o autor (2004) acredita que podem também cumprir a função meta-discursiva de tratamento. Com base nos escritos de Piaget (1967) e Vigotski (1962), o autor (2004) afirma que a língua falada é o sistema de representação que está mais vinculado à consciência, logo, entende ser indispensável ao raciocínio.

De acordo com o que foi mencionado anteriormente, a estrutura remática, que acabou de ser discutida, é característica das línguas naturais, será discutido em seguida sobre a estrutura funcional, que é característica das línguas formais.

Para Duval (2004), diferentemente da estrutura remática que pode cumprir as três funções meta-discursivas, a estrutura funcional cumpre somente uma delas, a função de tratamento. Isso permite uma função de expansão discursiva do tipo cálculo. As unidades elementares que são formadas com apenas um predicado, podem ser combinadas por meio de conectivos, às unidades apofânticas mais complexas. Estes conectivos, que tem valor de verdade e fixam uma relação de dependência entre as unidades apofânticas, articulam as unidades elementares e complexas em somente uma proposição.

Portanto, Duval (2004) entende que:

[...] as regras de tratamento podem definir-se como as que permitem passar de uma proposição complexa a outra transformando o conectivo. A forma de uma unidade de estrutura funcional complexa pode assim comportar quatro tipos diferentes de signos: um para o predicado, um para a variável associada, um para a quantificação e um para a articulação dos predicados. Assim, pode chegar a ser complexa a

identificação de um enunciado nas línguas formais. Esta identificação requer, em primeiro lugar, a identificação da ocorrência de conectivos segundo uma ordem de prioridade; e logo, a identificação dos agrupamentos em duplas predicado – variável vinculada com um quantificador (p. 110 – tradução nossa).

Isso, segundo Duval (2004) estabelece que as unidades apofânticas de estrutura remática cumprem uma função referencial e articula um nível de sentido categorial, por meio do qual permite que se identifique e designe os objetos. Articula também um nível de sentido axiológico, que expressa “... propriedades, relações, ações ou sentimentos relativos aos objetos”. Já as unidades de estrutura funcional não cumprem a função referencial (DUVAL, 2004, p. 110 – tradução nossa).

Para Duval (2004), esta é a diferença radical entre as duas unidades apofânticas, que gera um grande problema quanto à possibilidade de converter um enunciado na língua natural em uma proposição na língua formal. A conversão que normalmente é chamada equivocadamente de formalização, é um problema tanto de ordem linguística e lógica, como de “...natureza das representações internas na modelização das atividades cognitivas” (DUVAL, 2004, p. 111 – tradução nossa).

Segundo Duval (2004), a estrutura funcional é privilegiada nas teorias proposicionais para resolução dos problemas cognitivos. Trata-se de passar do registro na língua natural para uma escrita simbólica, baseado numa codificação das palavras, de acordo com uma segmentação dos enunciados em unidades morfo-sintáticas, provocando a neutralização do verbo.

No entanto, Duval (2004) alerta que este recurso ignora a segmentação de unidades discursivas que são comandadas pelas diferentes operações responsáveis por cumprir a função referencial de designação de objetos e a função apofântica de expressão de enunciados completos. Sendo que, esta segmentação é tão fundamental para a articulação de registros nas línguas natural e formal, como para a compreensão de textos na língua natural.

Baseado nisso, Duval (2004) coloca que do ponto de vista cognitivo, não é importante saber qual o modelo proposicional de estrutura funcional que melhor corresponde à atividade do pensamento humano. Faz-se necessário descobrir então se, é o modelo proposicional de estrutura remática ou o modelo proposicional de estrutura funcional, que é mais eficiente para resolver os problemas relativos à aprendizagem.

Será discutida a seguir, a próxima função discursiva.

Função de expansão discursiva de um enunciado completo

As investigações cognitivas a respeito da compreensão de textos demonstraram a necessidade relevante de separar a função de expansão discursiva de um enunciado completo das anteriores que foram descritas. Estas investigações revelam que, um dos principais problemas observados na compreensão, está no que fica implícito e no que fica explícito no discurso (DUVAL, 1981, apud DUVAL, 2004).

Para Duval (2004), paradoxalmente, a forma da relação entre o que o discurso deixa explícito e o que fica implícito, faz com que duas sentenças sucessivas que não apresentam conexões explícitas, se complementem de forma que possam ser compreendidas. Neste sentido, o autor (2004) sugere duas frases que exemplificam esta situação, a saber: “Explodiu uma tubulação de gás. A casa se queimou”. Embasado nos estudos de Kintsch (1978), Duval (2004) afirma que as duas frases que possuem descrições diversas, podem ser compreendidas se houver uma continuidade temática que estabeleça entre os dois fatos, uma relação de causa – consequência. Isso se dá por meio de dois tratamentos.

Duval (2004) afirma que o primeiro é determinado pela correspondência que pode ser feita entre duas palavras, sendo uma de cada frase, com uma terceira palavra, que não pertence a qualquer frase, mas que permite uma associação. No exemplo anterior, as palavras “tubulação de gás” da primeira frase e “queimou” da segunda frase, estabelecem uma associação comum à palavra “fogo”, que não pertence a qualquer uma destas frases. No entanto, “... este conjunto em correspondência mobiliza a mesma rede de relações semânticas para as duas frases” (DUVAL, 2004, p. 113 – tradução nossa).

Para Duval (2004), a relação causal entre o que foi enunciado em cada frase é responsável pela fundamentação do que dará continuidade ao tema que foi descrito. Isso promove a mobilização de um conhecimento a ser formulado de diferentes maneiras, que consiste no segundo tratamento. Existem vários exemplos, mas os descritos a seguir representam algumas destas maneiras.

-“A explosão de uma tubulação de gás causou um incêndio na casa”.

-“A tubulação de gás explodiu e esta explosão provocou um incêndio”.

Sendo assim, estes são alguns exemplos de uma “...relação causal entre os dois eventos enunciados por cada uma das duas frases que fundamenta a continuidade temática da descrição” (DUVAL, 2004, p. 113 – tradução nossa). A explicitação desta relação pode ter apenas o status de justificação ou de explicitação. No entanto, para o autor (2004), estes exemplos não poderiam ser considerados expansões discursivas da primeira frase, se não

houvesse a mobilização do conhecimento motivado pelas associações comuns das palavras “tubulação de gás” e “queimar”

Duval (2004) faz algumas considerações sobre os primeiros modelos de compreensão de textos. Afirmar que estes modelos se caracterizam pela expansão do discurso em linguagem natural, no qual o vínculo estabelecido representa um conhecimento evidente que está implícito, graças às omissões, reduções e pressupostos deste discurso, permitindo a explicitação.

De acordo com Duval (2004) isso se baseia em uma dupla restrição. A inferência assume o papel de modelo de toda expansão discursiva e o funcionamento da aplicação de regras implícitas bastaria para explicitar de forma exaustiva e modelizar a compreensão. Esta concepção ignora dois fatos, o primeiro é que a inferência não passa de uma forma particular de expansão discursiva, portanto não é capaz de estabelecer o que tem de diferente entre a expansão discursiva de uma descrição ou de um relato, com o próprio raciocínio. O segundo é que os problemas de compreensão da expansão discursiva não ficam reduzidos a apenas uma explicitação dos conhecimentos implícitos. Portanto, o autor alerta que os textos mais difíceis de serem compreendidos são os que se distanciam de um discurso de “prática oral” e aqueles que todas as regras de inferência são dadas explicitamente (DUVAL, 1991, apud DUVAL, 2004).

As operações da função de expansão discursiva de um enunciado completo são determinadas a partir de dois modelos de progressão do discurso, denominados de “lógico” e “natural” (DUVAL, 2004).

Para Duval (2004), a característica particular do discurso que fica restrito à produção de inferências, consiste na progressão das proposições que acontece por substituição do resultado de novas inferências sobre as proposições anteriores, estabelecendo uma ordem que não pode ser modificada. Esta é uma expansão discursiva por substituição. Sendo assim, as proposições anteriores não são levadas mais em consideração para o desenvolvimento do discurso e sua compreensão requer a necessidade de aplicação de nova regra, que pode ser indicada de forma explícita ou implícita. O autor coloca como um bom exemplo de funcionamento de uma expansão discursiva por inferência, a seguinte situação:

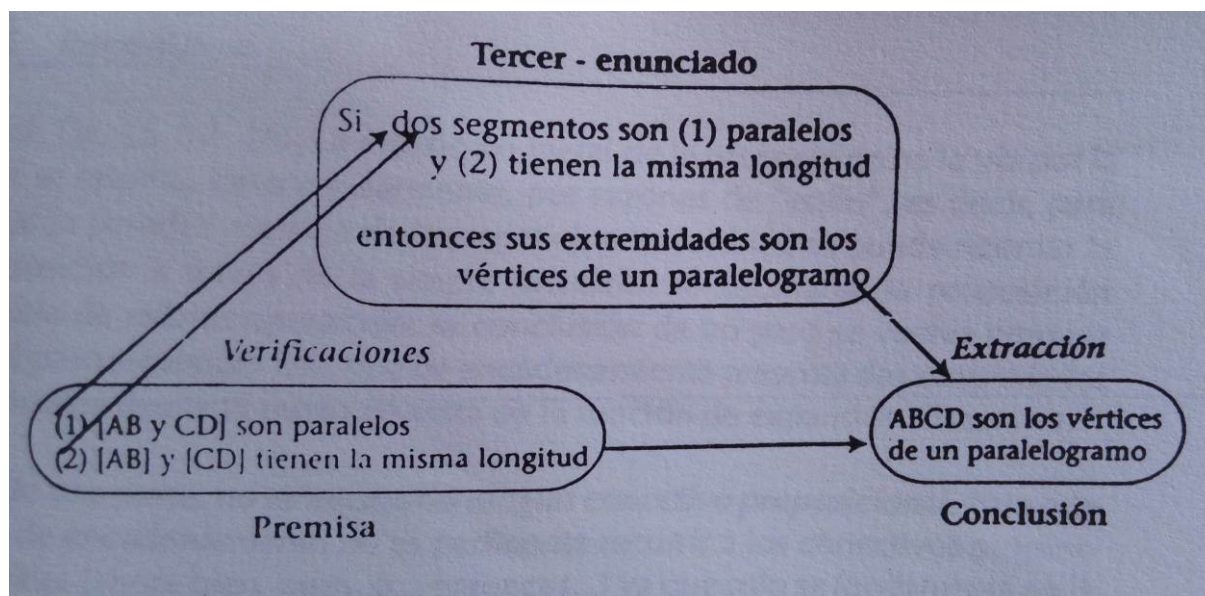


Figura 4: Funcionamento de uma expansão discursiva por inferência
 Fonte: DUVAL 2004, p. 214

Neste caso, Duval (2004) entende que a compreensão do discurso se dá pela formulação do terceiro enunciado que é resultado da composição do que contém tanto na verificação como na extração apontadas no quadro. O terceiro enunciado comporta duas partes com funções distintas. A primeira é constituída por uma ou mais proposições antecedentes, ou seja, as duas premissas do quadro, que devem verificar-se. A segunda é constituída por uma proposição consequente, que deve extrair-se. Sendo assim, o terceiro enunciado deve corresponder à articulação de duas partes, a primeira representa a operação de verificação e a segunda, a operação de extração. Para a compreensão do discurso desenvolvido de acordo com a expansão por inferência é necessário que se perceba a utilização da regra que foi utilizada, quer tenha sido indicada explicitamente ou implicitamente.

No entanto, para Duval (2004), em um relato, numa descrição ou numa explicação, não é assim que a progressão do discurso acontece. Nestas circunstâncias, Duval (2004), se apoia no entendimento de Grize (1977, 1983) ao sustentar que, como os objetos são determinados progressivamente nestes discursos, as frases se adicionam umas às outras e a expansão discursiva se dá por acumulação. Sendo assim, o autor (2004) entende que o obstáculo maior para a compreensão de texto não está situado na extensão, “[...] mas na linearidade semiótica inerente a todo discurso, em consequência a todo texto: esta linearidade impõe uma apreensão parcial e sucessiva das unidades discriminadas” (p. 303 – tradução nossa).

Para reverter este quadro, Duval (2004) defende que é no andamento do discurso, que um mesmo objeto pode ser enriquecido ou transformado. Neste caso, a compreensão do discurso requer uma apreensão sintética tanto das frases como das relações existentes entre elas. É necessário “... em primeiro lugar, aprender a segmentar um texto em unidades textuais de informação e a recontextualizar as unidades segmentadas” (DUVAL, 2004, p. 302 – tradução nossa).

Para tanto, o autor (2004) coloca que a compreensão de texto é possível mediante a troca de registros, por duas razões. A primeira delas é sair do círculo vicioso didático de querer explicar o texto por meio de um discurso oral ou escrito, parafraseando-o, comentando-o ou analisando-o. A segunda é baseada no entendimento de Wittgenstein (1983), que defende uma apresentação sinóptica do texto. Então sugere que:

Por essas duas razões, a passagem do texto que se quer compreender ao discurso que o explica ou o analisa, não pode ser direta, ou seja, não pode permanecer arraigado ao mesmo registro de representação. Esta passagem exige o rodeio explícito por uma representação não discursiva que sirva de representação intermediária entre o texto que se quer compreender e o discurso que o explica. Somente através do trabalho que exige tal rodeio é que se pode alcançar uma aprendizagem da compreensão de textos (DUVAL, 2004, p. 303).

Logo, Duval (2004) entende que a operação de recontextualização não pode ser efetuada, sem que ocorra, uma apreensão sintética da organização redacional ou cognitiva, em que as unidades que foram obtidas por meio da operação de segmentação, possam encontrar seu lugar. Esta apreensão sintética impede a apreensão de cada unidade de acordo com uma ordem linear de ocorrência, mas em contrapartida, promove a percepção das relações com outras unidades mais distantes.

A partir destas considerações sobre a expansão discursiva por substituição e por acumulação, é importante ressaltar que, de acordo com Duval (2004), estes dois modos de expansão discursiva se diferenciam de acordo com as características do conteúdo de cada unidade apofântica (proposição ou frase), ou, a partir do status que possui. Normalmente o status de uma unidade apofântica é definido pelo seu valor epistêmico, que depende do contexto em que o discurso está situado, podendo ser um marco teórico ou social. O autor (2004) acrescenta que, o marco teórico consiste em definições, axiomas e teoremas, já o marco social são as normas, opiniões e crenças. Se a expansão discursiva acontece por substituições, a passagem de um enunciado a outro depende do status deste enunciado e não do seu conteúdo. No entanto, Duval (2004) alerta que, se a expansão discursiva acontece por acumulação, a passagem de um enunciado a outro depende do seu conteúdo, seu status é

considerado somente nos casos em que os enunciados não são assumidos pelo sujeito enunciator, como no comentário ou na argumentação. Pois, geralmente todos os enunciados tem o mesmo valor epistêmico e estão relacionados com o mesmo sujeito enunciator.

Formas associadas da função de expansão discursiva

Para Duval (2004), em uma sucessão desarticulada de enunciados não é possível reconhecer um propósito, um raciocínio, um relato, uma descrição ou uma justificativa. São as formas associadas na expansão discursiva que permite reconhecer tudo isso e sua análise é feita com base nos estudos da coerência encontrada nos textos. Assim, as regras de coerência são destacadas permitindo a continuidade de um propósito numa sucessão de frases, mas estas regras enfrentam dois tipos de dificuldade.

De acordo com Duval (2004), a primeira consiste na natureza da organização de um texto, em que os critérios cognitivos têm uma importância maior do que os morfo-sintáticos. Mesmo porque, os conhecimentos particulares relacionados ao tema tratado e as exigências da atividade intelectual, são fundamentais para estabelecer as regras que permitem a passagem de uma unidade apofântica a outra. Isso pode promover a organização de uma unidade discursiva coerente de nível superior. No entanto, as regras de coerência encontradas na gramática, não dão conta disso.

Já, a segunda dificuldade, no entendimento de Duval (2004), está situada no ponto de vista cognitivo e didático, uma vez que, tanto as regras de coerência como as regras sintáticas, não são capazes de produzir o discurso. É preciso então, que haja uma relação de continuidade entre uma unidade apofântica e outra, mediante a ocorrência de uma similitude entre as duas. Esta similitude pode ser determinada de acordo com duas dimensões. Uma delas é a presença ou ausência de significantes que sejam comuns às duas unidades apofânticas. A outra dimensão representa a ocorrência ou não do rodeio que se dá por meio de uma terceira unidade apofântica. Isso dá origem às quatro formas de expansão discursiva no registro de uma língua, conhecidos como lexical, formal, natural e cognitiva.

Segundo Duval (2004), em todos os tipos de discurso é utilizada pelo menos uma das quatro formas de expansão discursiva, podendo haver a combinação de várias delas, desde que respeitadas as regras de coerência das gramáticas. Deste modo, há que se levar em consideração a capacidade de discriminação de cada forma de expansão, para que se possa promover a aprendizagem da compreensão de texto, bem como da produção escrita.

Quanto às duas dimensões de similitude vistas anteriormente, aborda-se-á primeiramente a similitude, que se dá pela presença ou ausência de significantes comuns às duas unidades apofânticas.

Para Duval (2004), o caso trivial é a similitude semiótica que se trata da repetição dos mesmos signos, palavras ou símbolos de um enunciado a outro, na língua natural que correspondem a uma unidade referencial, uma unidade predicativa ou proposição antecedente. O exemplo a seguir retrata este caso.

- “a estrela matutina” e “a estrela vespertina”, sendo que cada uma das duas expressões representam o sol.

Logo, Duval (2004) entende que o caso interessante é quando há continuidade entre dois enunciados na ausência de significantes comuns, denominado similitude semântica. Aqui, o autor (2004), se embasa no entendimento de Frege (1971) ao afirmar que a dualidade sentido/referência, constitui um elemento essencial que justifica este fato. Este caso está exemplificado a seguir:

- “ $32/8$ ”, “ $\sqrt{16}$ ”, “4” e “ $2 + 2$ ”, em que cada expressão representa o número 4.

Segundo Duval (2004), tais exemplos são constituídos de expressões referencialmente equivalentes porque estão empregadas respectivamente em enunciados diferentes e estabelecem uma invariância referencial entre os dois enunciados, favorecendo a operação de substituição. No entanto, na língua natural, diferentemente das línguas lógico-matemáticas, não há uma invariância referencial estrita, o que estabelece a ocorrência da operação de expansão discursiva por acumulação.

Para Duval (2004), nem sempre a similitude semiótica e a similitude semântica são suficientes para garantir a continuidade do discurso. É, nestes casos, portanto que se faz necessário recorrer ou não ao terceiro enunciado, ou seja, considerar a segunda dimensão. Aqui também são evidenciados dois casos, o trivial e o interessante.

De acordo com o entendimento de Duval (2004), no primeiro caso, ou seja, no trivial, o terceiro enunciado é dispensado, porque é suficiente o reconhecimento do léxico de base da língua utilizada para que se possa reconhecer tanto uma similitude semiótica como uma similitude semântica, permitindo a passagem direta do enunciado inicial ao enunciado expandido. Isso dispensa a necessidade de conhecimento prévio de definições, princípios, leis ou dados específicos de um domínio qualquer. Este caso, é denominado similitude interna.

Para o autor (2004), quando a passagem é indireta, e requer de forma implícita ou explícita o rodeio por um terceiro enunciado, trata-se do caso interessante. Para que haja uma

continuidade discursiva entre dois enunciados por intermédio de um terceiro, é necessário que duas condições sejam cumpridas, ou seja, que tenha uma similitude semiótica ou semântica com cada um dos dois enunciados. Este caso é conhecido como similitude externa (DUVAL, 2004).

De acordo com Duval (2004), as similitudes semiótica, semântica, interna e externa devidamente combinadas, são mecanismos de expansão discursiva, necessários para ocorrer as quatro formas de expansão discursiva comentados anteriormente, que serão especificadas a seguir.

Para Duval (2004), a expansão lexical consiste na recuperação de um mesmo significante fonético-auditivo ou gráfico-visual que garante a continuidade e coerência entre uma frase e outra no discurso. É de extrema importância para interpretação da linguagem do inconsciente.

A característica de expansão formal é a aplicação de regras de substituição de símbolos, para que se obtenha uma nova asserção, a partir de uma asserção de partida. Estes símbolos são utilizados para representar variáveis ou proposições, importantes para o raciocínio dedutivo (DUVAL, 2004).

De acordo com Duval (2004), na expansão cognitiva o léxico associativo fica neutralizado mediante a significação que as definições, enunciados e demonstrações estabelecem. Este léxico é uma terminologia restrita a um domínio do conhecimento. A expansão cognitiva é a forma de expansão característica do emprego especializado da língua natural.

Já a expansão natural tem como característica o emprego comum da língua natural e tem como função mobilizar tanto a rede semântica desta língua como “... os conhecimentos pragmáticos próprios da média sócio cultural dos locutores” (DUVAL, 2004, p. 120 – tradução nossa). Para o autor (2004), o exemplo da tubulação de gás analisado anteriormente representa uma expansão natural, que é a forma de expansão responsável pela análise das regras de coerência do discurso.

Como o recurso exclusivo a uma expansão lexical, cognitiva ou formal pode ser encontrado somente no emprego especializado ou no emprego literário da língua, constata-se a importância das diferentes formas de expansão discursiva para o ensino da língua materna e da matemática (DUVAL, 2004).

Outro aspecto da teoria de Duval que merece ser mencionada é o que fundamenta a construção e desconstrução geométricas, que serão úteis a este estudo.

Neste sentido, Duval (2011) coloca que “[...] para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada” (p. 86). Isto exige que sejam consideradas as dimensões das unidades figurais, ou seja, 3D para os cubos, pirâmides e esferas, 2D para os polígonos e círculos, 1D para as retas e curvas e 0D para o ponto. Além disso “[...] é preciso também distinguir as representações físicas dessas unidades figurais [...]” (DUVAL, 2011, p. 86).

Duval (2011) questiona a pertinência sobre a oposição feita entre desenho e figura ao afirmar que essa oposição “[...] ignora a complexidade da maneira matemática de ver para poder utilizar em um encaminhamento matemático o que é dado a ver” (p. 92). Sugere, portanto, duas condições para que a aprendizagem promova essa consciência.

3.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E EDUCAÇÃO DIALÓGICA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Diante de tanta ênfase que Duval (2010) dá à importância de uma análise cognitiva das produções dos estudantes, há que se considerar o entendimento de Brandt (2005) a esse respeito ao afirmar que: “Cada um dos tipos de registro possibilitados, utilizando diversas formas de representação, desde as mais visuais até as mais abstratas, carrega suas especificidades, que têm de ser levadas em conta no momento da aprendizagem” (p. 82).

Em defesa da mesma causa, encontra-se Freire quando alega que não existe inteligência da realidade sem que ela seja comunicada (2017a).

Alerta que o professor que considera possuir uma estrutura de pensamento que seja a única certa, não se permite escutar quem pensa e elabora um discurso diferente do seu, nem mesmo considera a fala ou escrita que esteja fora dos padrões da gramática dominante (FREIRE, 2017a).

É nesta fala que pode ser revelado o que de fato está compreendido e o que ainda tem que ser ensinado sobre determinado assunto.

Duval (2010) coloca que um sucesso em matemática é menos importante que um sucesso cognitivo, mesmo porque, o objeto matemático é acessível de forma diferente do objeto de conhecimento de outra área, já que não tem existência física. Então, para que houvesse elementos que permitissem uma análise das produções dos estudantes, no aspecto cognitivo, procurou-se atuar de acordo com o que defende Freire:

[...] experimentar a unidade dinâmica entre o ensino do conteúdo e o ensino de que é e de como aprender. É ensinando matemática que ensino também como aprender e

como ensinar, como exercer a curiosidade epistemológica indispensável à produção do conhecimento (2004, p. 125).

Esta análise criteriosa não se limitou em codificar os sucessos e erros observados do ponto de vista matemático, deu subsídios para estudar os problemas recorrentes de incompreensão dos encaminhamentos matemáticos para a maioria dos estudantes (Duval, 2011). Sendo assim, permitiu conhecer as implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem, uma vez que os dados foram obtidos a partir do desenvolvimento desta metodologia.

Neste sentido, Freire (1983) critica o controle de leitura, que é comumente chamado de avaliação, em oposição ao diálogo. Alega que, com o objetivo de obrigar o estudante a estudar e, portanto, aprender, os professores se utilizam deste expediente. Enfatiza que este recurso faz parte do processo de ensino que se dá por meio de aulas discursivas e retóricas, pelo fato dos professores não quererem correr o risco da aventura dialógica.

Não foi por meio de provas que o conhecimento dos estudantes foi avaliado, mas por meio de suas manifestações expressas nas atividades desenvolvidas e nos diálogos estabelecidos que se obteve registros necessários para entender suas dúvidas e procurar esclarecê-las. Sendo assim, o tratamento dos dados obtidos, também tem características dialógicas, já que, de acordo com Freire (2017a), passaram por um processo de avaliação, que é necessário, desde que não seja um método silencioso do rendimento do estudante. Pretendeu-se com isso, compreender as dúvidas e jamais silenciá-las.

Freire (2017a) defende que o professor, permitindo que o estudante comunique o que não entendeu, conhecendo suas dúvidas, receios e incompetências provisórias, ao escutá-lo, aprende a falar com ele.

Espera-se ter conseguido expressar a preocupação com a aprendizagem dos estudantes e o repúdio por uma educação com característica verticalizada, àquela feita de cima para baixo, em que somente o professor fala e o estudante escuta passivamente, sem que tenha oportunidade de se manifestar.

Entende-se que as aproximações entre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Modelagem Matemática puderam ser estabelecidas por meio da proposta de uma educação dialógica que serviu de liame entre as duas e poderão ser evidenciadas tanto no capítulo que trata da metodologia da pesquisa, como no capítulo que trata da análise e interpretação dos dados.

Concluídas as considerações sobre a fundamentação teórica será trazida a seguir, a revisão de literatura.

4 REVISÃO DE LITERATURA

4.1 LEVANTAMENTO PRELIMINAR

Para que se pudesse conhecer os trabalhos que tivessem alguma relação com o tema da pesquisa, procurou-se inicialmente os que abordavam tanto a Modelagem Matemática, como a Teoria dos Registros de Representações Semióticas e utilizou-se como base de dados, o site de busca Google, assim como os bancos de dados da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e da BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações). Desta forma, a pesquisadora deparou-se com apenas (8) oito trabalhos, sendo 1 (uma) tese, 4 (quatro) dissertações que estão localizados no Apêndice A, além de 3 (três) artigos que estão relacionados nos Apêndice B. Dada a preocupação com a possibilidade de haver outras pesquisas desta natureza que, eventualmente, não tinham sido localizadas, estabeleceu-se duas categorias de busca, para permitir uma revisão de literatura mais abrangente.

Como a Modelagem Matemática na perspectiva de Burak, é a metodologia de ensino usada nesta pesquisa, uma das categorias escolhidas foi a Modelagem Matemática que contempla alguma consideração defendida por este autor. Definiu-se como base de dados a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações), assim como os sites das áreas de educação, educação matemática e ensino, dos programas de pós-graduação. No último caso, Ritter e Veleda (2015) contribuíram significativamente, uma vez que disponibilizaram os trabalhos levantados para sua pesquisa. Para cada trabalho encontrado sobre Modelagem Matemática, foram selecionados àqueles que citavam Burak no corpo do texto, totalizando 72 (setenta e duas) publicações, que estão relacionadas no Apêndice C.

A outra categoria escolhida é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma teoria cognitivista que embasou a análise dos dados coletados nesta pesquisa. A busca por esta categoria iniciou a partir da proposta da escrita de um artigo sobre o estado da arte de teorias cognitivistas do interesse da pesquisadora, como trabalho de conclusão da disciplina Seminário Avançado II, que compõe a estrutura curricular do programa de pós-graduação desta instituição de ensino. Para tanto, estabeleceu-se, a princípio um recorte temporal de 2010 a 2014 e realizou-se uma consulta preliminar nos bancos de dados da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e da BDTD (Biblioteca

Digital Brasileira de Teses e Dissertações). A opção por este recorte temporal se deu ao fato de já existir três artigos semelhantes sobre o assunto, que contemplam recortes temporais anteriores, ou seja, os trabalhos de Colombo, Flores e Moretti (2008), de Ferreira, Santos e Curi (2013) e de Brandt e Moretti (2014).

Esta busca evidenciou o total de apenas vinte e cinco trabalhos entre dissertações e teses. Este resultado causou estranheza, principalmente, por não estarem incluídas nesta relação, as dissertações orientadas pela orientadora desta tese. No entanto, estes dados serviram de base para novas buscas, uma vez que, por meio deles, foi possível identificar os programas de pós-graduação de instituições de ensino que apareciam de forma recorrente nesta relação. Esta constatação, direcionou a busca para os bancos de dados das instituições evidenciadas, que permitiu localizar 51 (cinquenta e um) trabalhos, sendo 44 (quarenta e quatro) dissertações e 7 (sete) teses.

Dada a grande quantidade de trabalhos encontrados, o tempo se estendeu e ampliou-se o recorte temporal que compreendeu o período de 2010 a 2015. As buscas de trabalhos se estenderam também aos periódicos nacionais de Educação Matemática, e ao periódico de Educação editado nesta instituição, perfazendo quatorze artigos. Portanto, as 44 (quarenta e quatro) dissertações e 7 (sete) teses que discutem a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e que foram publicados neste período, estão relacionados no Apêndice D e os 14 (quatorze) artigos que tratam do mesmo assunto, estão relacionados no Apêndice E.

4.2 SELEÇÃO DOS TRABALHOS LEVANTADOS

Definiu-se por fazer um filtro dos 137 (cento e trinta e sete) trabalhos levantados, ou seja, os 72 (setenta e dois) que abordam a Modelagem Matemática e que contemplam alguma consideração defendida por Burak e os 65 (sessenta e cinco) que abordam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Identificou-se assim, àqueles que tratam da Modelagem Matemática de modo geral e abordam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Estes trabalhos correspondem ao levantamento final e compreendem 4 (quatro) dissertações e 3 (três) teses que estão relacionadas no Apêndice F, assim como 4 (quatro) artigos relacionados no Apêndice G, totalizando 11 (onze) publicações, que representam o corpus da investigação e serão discutidas a seguir.

Silva (2008) faz relações entre a Modelagem Matemática, a semiótica de Pierce e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica a partir de atividades de Modelagem Matemática existentes na literatura, por meio de uma análise documental dos registros

apresentados pelos autores destes trabalhos. Estas relações são estabelecidas de acordo com sua problemática de investigação, que foi motivada pelas seguintes questões:

1. De que maneira a categorização dos signos estabelecida por Peirce está associada às etapas de uma atividade de Modelagem Matemática? 2. Os modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da Modelagem Matemática? 3. O fenômeno de congruência e não-congruência (estabelecido por Duval) de conversões realizadas entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática influencia a caracterização do objeto matemático? 4. As tarefas de produção e de compreensão (caracterizadas por Duval) interferem na coordenação entre os diferentes registros que emergem em atividades de Modelagem Matemática? (SILVA, 2008, p. 22).

Esta pesquisa é teórica, portanto não foi desenvolvida na sala de aula e os objetos matemáticos analisados são: função definida por partes, volume do cilindro e equações diferenciais ordinárias.

Rosa (2009) entende que as atividades de Modelagem Matemática oferecem oportunidade de os alunos terem acesso e usarem diferentes registros de representação semiótica associados ao mesmo objeto matemático, sendo assim, norteou sua pesquisa em busca de responder as seguintes questões:

1. Como os estudantes lidam com as conversões entre diferentes registros de representação que emergem em atividades de Modelagem Matemática? 2. O fenômeno de congruência influencia na realização das conversões entre os registros pelos estudantes? (p. 17).

Durante a coleta dos dados da pesquisa, Rosa (2009) percebeu resistência dos alunos por sentirem dificuldade em realizar as atividades de Modelagem Matemática, já que fugiam do padrão das aulas tradicionais. Houve conflito para definir o tema de cada grupo, visto que os interesses eram diversos e cada aluno considerava a sua sugestão mais importante que a do colega. No entanto, a autora (2009) percebeu maior segurança dos alunos no momento da sistematização dos conteúdos, já que observou melhor compreensão ao discutirem situações que envolviam conversão dos registros que representavam o objeto matemático estudado. A análise dos dados desta pesquisa revelou que “[...] as atividades de Modelagem Matemática possibilitam a realização de conversões congruentes e não congruentes”. A análise revelou também “[...] em que medida as dificuldades para realização das conversões são decorrentes da congruência ou não-congruência das mesmas”. (ROSA, 2009. s.p.).

Vertuan (2007) em busca de evidenciar se a compreensão do problema não matemático e dos objetos matemáticos que emergem no estudo desse problema pode se dar

por meio da interação Modelagem Matemática e Teoria dos Registros de Representação Semiótica e de identificar os diferentes registros de representação semiótica que os alunos utilizam nas atividades de Modelagem Matemática, procura responder as seguintes questões:

[...] as atividades de Modelagem que tem por objetivo o estudo de um objeto matemático dão lugar à exploração de diferentes registros de representação semiótica? Estas atividades viabilizam o tratamento e a conversão destes registros? Provocam a coordenação entre os diferentes registros? (p. 16).

Para tanto, este autor (2007) conclui que a Modelagem Matemática permite tanto a utilização de diferentes registros como torna possível o tratamento, a conversão e a coordenação entre eles, que por sua vez, traz contribuições não somente dos objetos matemáticos, mas também da situação-problema que emerge nesta proposta de ensino.

Tortola (2012, p. 21) se propõe a “Investigar os usos que estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem para o desenvolvimento de modelos matemáticos”, por meio de diversas atividades de Modelagem Matemática trabalhadas de acordo com os três momentos defendidos por Almeida e Dias (2004). Desta forma, sua pesquisa revela que:

Os resultados apontam para a emergência de diversos jogos de linguagens, dos quais, segundo a forma de vida envolvida, resulta a produção de diferentes representações semióticas, que se diferem dos demais níveis de escolaridade pela linguagem utilizada, mas mantendo semelhanças de família entre eles. Os diferentes modelos matemáticos, produzidos pelos estudantes, têm características específicas neste nível de escolaridade em decorrência dos usos que eles fazem da linguagem, os quais orientam o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática (TORTOLA, 2012, s.p).

Silva (2013a) traz alguns aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em sua pesquisa na discussão que faz no tópico de seu trabalho sobre “O uso de diferentes representações em atividades de MM”. No entanto, não utiliza estes aspectos para fundamentar a metodologia e a análise dos dados coletados, uma vez que propõe “[...] uma articulação entre a tríade peirceana e ações que o aluno pode ter frente a atividades de modelagem [...]”. Para tanto, estas atividades “[...] foram desenvolvidas seguindo os momentos de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática propostos por Almeida & Dias (2004).

Em sua pesquisa bibliográfica, Silva (2013b) utiliza trabalhos de pós-graduação *strictu sensu* para analisar as analogias que podem ser encontradas entre a formação, tratamento e conversão e os signos percieanos. Desta forma, a autora (2013b) admite a

importância da atividade de conversão para os processos de ensino aprendizagem da matemática e a validade das teorias de Duval e Pierce para explicação da matemática e seu ensino, portanto sua relevância do ponto de vista didático, já que revela também a possibilidade de enxergar antecipadamente em qual signo da geometria analítica os indivíduos terão dificuldade.

Nascimento (2007) investigou a Modelagem Matemática como metodologia para a aprendizagem de funções, com o auxílio do software Modellus, em situações que utilizam a construção de simulações.

Apesar de Nascimento (2007) embasar a análise dos dados de sua pesquisa em alguns fundamentos teóricos de Duval, discute superficialmente sua teoria ao citar o autor (1993) quando se refere ao “[...] conceito de modelo como o entendimento de um fenômeno, gerado na mente, através de ‘representações semióticas’”. Para tanto, traz a classificação das representações como mentais, internas ou computacionais e semióticas (NASCIMENTO, 2007, p. 31).

Os resultados de sua pesquisa indicam

“[...] habilidades específicas para modelar, influência de regras de contrato didático, contexto utilizado nos problemas, contexto utilizado nos problemas trouxeram elementos do cotidiano como é típico em situações de modelagem e que a dificuldade da fase de validação foi minimizada com a presença do software Medellus (NASCIMENTO, 2007, s.p).

Burak e Brandt (2010) se propuseram a analisar e refletir sobre a conceituação e desenvolvimento do pensamento algébrico à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que emergiram durante a etapa da resolução de problemas da Modelagem Matemática, realizada em um curso de formação docente. Evidenciaram, portanto, que as soluções dos problemas colocados pelos temas e analisados nesta perspectiva, contribuíram para as conceituações e desenvolvimento do pensamento algébrico, já que “[...] os diferentes registros de representação mobilizam operações cognitivas de formação, tratamento e conversão, colocando em cena o fenômeno da congruência semântica, responsável por um maior ou menor sucesso para estas conceituações (p.63).

Viana e Boiago (2015) analisaram as construções geométricas dos estudantes do Ensino Médio realizadas com o auxílio do GeoGebra por meio da Modelagem Matemática, na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Estes autores (2015) identificaram as operações mereológicas de reconfiguração e desconstrução dimensional, constataram também “[...] que o software permite interpretar e

construir figuras envolvendo os diferentes tipos de apreensão em geometria e que as atividades de desenho possibilitam um melhor entendimento de alguns processos cognitivos específicos da atividade geométrica” (p. 162).

A partir de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e dos anos finais do Ensino Superior, Almeida, Tortola e Merli (2012) buscaram reflexões sobre o papel da linguagem. Para tanto, os autores (2012) se embasaram na filosofia wittgensteiniana sob o enfoque de Charles Sanders Peirce e no contexto da Educação Matemática de acordo com a perspectiva de Raymond Duval.

Os resultados desta pesquisa apontam que:

[...] diferentes modelos matemáticos parecem ser diferentes linguagens, utilizadas para representar um mesmo ‘sistema’. O uso de diferentes linguagens pode ocorrer em qualquer nível de escolaridade, desde as Séries Iniciais da Educação Básica até os anos finais do Ensino Superior. Não é a sofisticação da matemática que irá trazer à tona uma nova linguagem, mas sim, as formas de vida e o contexto em que as atividades de Modelagem Matemática são desenvolvidas (AMEIDA, TORTOLA e MERLI, 2012, s.p.).

Almeida e Vertuan (2010) desenvolvem uma atividade de Modelagem Matemática com alunos do Ensino Superior para discutir o uso de diferentes registros de representação semiótica em uma perspectiva educacional e cognitiva, desta forma, inferem que a associação dessas duas perspectivas com a coordenação dos diferentes registros contribui para a aprendizagem dos objetos matemáticos trabalhados nas atividades de Modelagem Matemática.

Ainda que exista uma grande quantidade de trabalhos que contemplem a Modelagem Matemática e outros que adotem a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, são poucos os que tratam dos dois aspectos. Esta é uma razão para que fossem destacadas a importância de cada um de acordo com suas especificidades. Faz-se necessário discutir a seguir, as especificidades desta pesquisa.

4.3 ESPECIFICIDADES DA PESQUISA QUE NÃO FORAM CONTEMPLADAS EM TRABALHOS ANTERIORES

É essencial que se considere o caráter inovador desta tese. Inovador porque a análise dos 11 (onze) trabalhos destacados anteriormente não evidenciou as implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem, considerando as dimensões cognitiva e social, por meio de uma análise embasada na Teoria

dos Registros de Representações Semióticas e nas contribuições de Paulo Freire para a educação.

Desta forma, é importante ressaltar alguns aspectos que caracterizam a relevância desta tese.

A Modelagem Matemática desenvolvida na perspectiva de Burak (1992, 2004, 2010) ofereceu ao estudante a oportunidade de estudar o tema de seu interesse considerando os vários aspectos a ele relacionados e não somente o matemático. A metodologia de ensino adotada incentivou a pesquisa, desenvolveu a autonomia, a interação, a criatividade e a criticidade. Este desenvolvimento se deu por meio da reflexão, do diálogo e de atitudes que juntamente com a aprendizagem dos conceitos matemáticos trabalhados a partir do problema levantado, trouxeram contribuições significativas relacionadas ao tema escolhido, que tem grande relevância social.

Nas aulas tradicionais é o conteúdo que determina o problema, enquanto na Modelagem Matemática foi o problema que determinou os objetos matemáticos trabalhados, isso fez com que a matemática ganhasse significado, portanto, foi valorizada, uma vez que se mostrou útil no momento que seus conceitos foram essenciais para solução do problema levantado. A solução foi analisada criticamente do ponto de vista matemático e do ponto de vista da situação estudada. Esta proposta de ensino aconteceu em um ambiente democrático, em que a voz dos estudantes foi respeitada, desta forma, a manifestação de opiniões, dúvidas e sugestões foi constante, o que facilitou o desenvolvimento da linguagem e permitiu o registro de diferentes representações semióticas.

A Modelagem Matemática que Burak (2010a) defende foi motivada pela

[...] visão de que tipo de “homem” que se pretende formar para enfrentar os desafios do século XXI é uma questão que tem a ver com a forma de se ensinar e com o que se quer com essa a forma de se ensinar. Esta questão provoca e invoca algumas respostas: desejamos um cidadão que desenvolva a autonomia, que seja: crítico, capaz de trabalhar em grupo, capaz de tomar decisões diante das situações do cotidiano, da sua vida familiar, da sua vida profissional, ou de sua condição de cidadão. Essas respostas podem ser alcançadas com a adoção de uma metodologia que leve em consideração uma nova perspectiva que contemple um novo modelo de racionalidade, mais amplo capaz de se alinhar com as mudanças que se impõem (p. 17).

A aprendizagem na dimensão cognitiva foi analisada criteriosamente por meio dos diferentes registros coletados à luz da teoria de Duval. O caráter dialógico da metodologia de ensino adotada possibilitou levar em consideração as funções discursivas desta teoria para analisar tanto a compreensão como a incompreensão dos estudantes sobre os objetos

matemáticos trabalhados. Isso porque os registros de representações semióticas descreveram o modo de funcionamento cognitivo da atividade matemática e determinaram os fenômenos de compreensão e incompreensão do aprendizado (DUVAL, 2011).

Além disso, Duval (2004) defende que as funções discursivas de uma língua permitem esclarecer a influência da linguagem tanto para o funcionamento do pensamento, como para os problemas do ensino.

Sendo assim, a análise criteriosa não se limitou em codificar os sucessos e erros observados do ponto de vista matemático, deu subsídios para estudar os problemas recorrentes de incompreensão dos encaminhamentos matemáticos para a maioria dos estudantes (DUVAL, 2011) e permitiu conhecer as implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem em uma dimensão cognitiva.

A aprendizagem na dimensão social aconteceu já a partir da primeira etapa da Modelagem Matemática que compreendeu a escolha do tema, uma vez que os estudantes foram orientados a fazer a escolha levando em consideração sua relevância social. Neste sentido respeitou-se o entendimento de Freire (2017a) ao afirmar que os ideais de uns são, sem sombra de dúvidas, diferentes dos ideais de outros, seja na natureza, seja nas características, uns almejam coisas distintas de outros, enfim são diferentes na forma de pensar, agir, de ser e de vir a ser. A professora pesquisadora discutiu o tema escolhido com segurança, expondo seu posicionamento, sem a arrogância de quem sabe tudo e com a leveza de quem ignora algo, mas sempre se mostrou disposta a saber mais. Não pode, porém, afirmar hipocritamente que foi fácil, mas, pode garantir que, de acordo com Freire (2017a), o olhar do aluno curioso, envolvido, motivado e ansioso por um futuro digno, assim como seus questionamentos e dúvidas expressos na fala ingênua que foram adquirindo corpo e robustez na busca do conhecimento são, sem sombra de dúvidas, uma recompensa que não pode ser mensurada, tamanha sua grandeza. Isso porque “ensinar exige saber escutar” (p. 113).

Desta forma, pôde confirmar que a inconclusão do ser humano inserido em um movimento permanente de busca, faz sua curiosidade ingênua e crítica tornar-se epistemológica, visto que, a curiosidade ingênua promove um saber do senso comum, que poderá tornar-se um saber elaborado, mas isso não acontece automaticamente (FREIRE, 2017a). Como já foi discutido anteriormente, o autor (2017a) defende que o professor deve respeitar tanto o senso comum como o processo de sua superação, por meio do estímulo da capacidade criadora do educando, possibilitando a promoção da ingenuidade.

5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 METODOLOGIA DA PESQUISA

Logo no início da discussão sobre a metodologia deste estudo é importante destacar a preocupação de André (2008) sobre a pesquisa qualitativa. A autora alerta sobre as críticas ou defesas relacionadas às pesquisas desta natureza, por entender que mesmo que haja literatura disponível que trate do tema, parece que seu conceito não está suficientemente discutido.

A primeira ressalva que André (2008) coloca, refere-se ao reducionismo observado na utilização do termo “pesquisa quantitativa” para identificar uma pesquisa na perspectiva positivista, fazendo uma associação rasa de quantificação com positivismo. Neste sentido, a autora (2008) defende que qualidade e quantidade não são dicotômicas e, esta última não deprecia a primeira. Os dados quantificáveis não terão necessariamente o caráter de neutralidade desde que a leitura dessas informações obedeça a um critério de análise, considerando o aporte teórico que fundamenta a pesquisa, os valores do pesquisador e sua visão de mundo, ou seja, características de um estudo de dimensão qualitativa.

Para evitar equívocos desta natureza, a autora sugere a utilização dos “[...] termos quantitativo e qualitativo para diferenciar técnicas de coleta ou, até melhor, para designar o tipo de dado obtido [...]”. Enquanto que, para determinar o tipo de pesquisa, prefere denominações mais precisas como “[...] histórica, descritiva, participante, etnográfica, fenomenológica [...]”, entre outras (ANDRÉ, 2008, p. 24 e 25).

A preocupação com esta ressalva comentada anteriormente e com o convencimento sobre o posicionamento de André (2008) quanto à necessidade de que, a pesquisa qualitativa alcance maturidade e credibilidade considera-se adequado esclarecer que o tipo desta pesquisa é de estudo de caso etnográfico, pelas razões que serão justificadas a seguir.

Entende-se que não ocorre algo mais adequado a fazer neste momento do que recorrer ao panorama geral que a autora faz sobre este tipo de pesquisa:

Se, por um lado, o estudo de caso etnográfico possibilita uma visão profunda e ao mesmo tempo ampla e integrada de uma unidade complexa, por outro lado demanda um trabalho de campo intenso e prolongado, o que requer tempo e recursos por parte do pesquisador. Se permite a descoberta de aspectos novos ou pouco conhecidos do problema estudado, exige uma base teórica consistente, bom preparo e disposição pessoal do pesquisador para enfrentar o desconhecido, para se movimentar sem regras fixas nem critérios muito definidos (ANDRÉ, 2008, p. 49 e 50).

Diante de tamanho desafio iniciam-se as justificativas por esta escolha e, ao mesmo tempo, situa-se em que circunstâncias este tipo de pesquisa é conveniente. Neste sentido, André (2008), a partir de estudos sobre o entendimento de autores como, Kenny e Grotelueschen (1980), Merrian (1988), Yin (1988) e outros, define que o estudo de caso do tipo etnográfico deve ser usado:

[...] (1) quando se está interessado numa instância em particular, isto é, numa determinada instituição, numa pessoa ou num específico programa ou currículo; (2) quando se deseja conhecer profundamente essa instância particular em sua complexidade e em sua totalidade; (3) quando se estiver mais interessado naquilo que está ocorrendo e no como está ocorrendo do que nos seus resultados; (4) quando se busca descobrir novas hipóteses teóricas, novas relações, novos conceitos sobre um determinado fenômeno; e (5) quando se quer retratar o dinamismo de uma situação numa forma muito próxima do seu acontecer natural (p. 52).

Os apontamentos deste excerto serão relacionados, com as características deste trabalho. Desta forma, cada característica do trabalho, será elencada a seguir, com o número respectivo do apontamento acima mencionado, para que se estabeleça a relação pretendida. Para tanto, esta pesquisa:

- (1) Adotou apenas uma metodologia de ensino, que é a Modelagem Matemática, em uma concepção específica (Burak, 1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b) e foi realizada em apenas uma turma de uma única escola, ou seja, mostrou interesse numa instância particular.
- (2) Buscou conhecer as implicações de uma metodologia de ensino, para a aprendizagem dos estudantes, analisada do ponto de vista cognitivo, de acordo com a teoria de Duval e do ponto de social, de acordo com as contribuições de Freire para a educação. Isso permitiu conhecer profundamente essa instância particular (Modelagem Matemática) e sua complexidade para a aprendizagem da matemática e dos aspectos sociais abordados.
- (3) Procurou evidenciar todas as implicações da Modelagem Matemática, para a aprendizagem dos estudantes, durante todas as suas etapas.
- (4) Buscou novidades conceituais e teóricas que puderam ser evidenciadas na relação desta metodologia de ensino com a aprendizagem.
- (5) Analisou criteriosamente os registros obtidos no decorrer deste longo período, já que corresponde à metade de um ano letivo, respeitando o dinamismo da situação estudada, para garantir a fidelidade dos dados coletados.

André (2008) coloca outros aspectos que devem ser levados em conta neste tipo de pesquisa. Um deles diz respeito ao fato de não exigir um esquema teórico fechado, o que limitaria as interpretações e impediria a descoberta de novas relações em áreas de escasso conhecimento. No entanto, a adoção de uma linha essencialmente descritiva promove um *vacuum* teórico e oferece o risco de acrescentar pouco ao que já se conhece.

Os dados desta pesquisa foram obtidos a partir de uma metodologia de ensino na perspectiva de um autor específico, no entanto, por se tratar de uma metodologia dinâmica e flexível, as interpretações não foram limitadas e não houve impedimento de novas descobertas. Cabe salientar que tanto a Teoria dos Registros de Representação Semiótica como as contribuições de Freire para a educação foram usadas para fundamentar a análise dos dados, impedindo que o estudo fosse considerado "ateórico".

Outro aspecto que André (2008) considera é quanto à importância do pesquisador neste processo, já que é o principal instrumento de coleta e análise de dados. Sendo assim, a autora (2008) alerta que quanto maior sua capacidade, sensibilidade, criatividade e preparo mais bem elaborado será seu trabalho e defende que a sensibilidade precisa ser usada para que o pesquisador:

- ✓ Fique atento a todos os acontecimentos.
- ✓ Compreenda o sentido de todas as manifestações e consiga se orientar por elas para definir a melhor estratégia de coleta dos dados.
- ✓ Valorize a intuição, a criatividade e a experiência pessoal no momento da análise do material coletado, tirando dele os significados, valores e sentimentos, tanto das mensagens explícitas como das implícitas.

Para André (2008), outras características importantes do pesquisador para desenvolver uma pesquisa desta natureza estão relacionadas à capacidade da comunicação, empatia e expressão escrita. A habilidade da comunicação é necessária para que as perguntas sejam elaboradas adequadamente, em busca de dados relevantes para a pesquisa. Quanto à empatia, considerada característica fundamental dos pesquisadores no trabalho de campo, a autora (2008) argumenta que é por meio dela que o pesquisador consegue organizar a melhor forma de abordar o informante e organizar sua fala para conduzir a coleta de dados. A empatia também possibilita a condição de estabelecer um clima de confiança por parte do informante, permitindo que os dados sejam obtidos com mais naturalidade. Para que haja esse ambiente acolhedor, o pesquisador precisa desenvolver a capacidade de saber ouvir, demonstrando atenção e paciência, sobretudo em relação às opiniões que divergem das suas. Além de ter habilidade para interromper o informante no momento certo, quando necessário.

De acordo com André (2008), a expressão escrita é outra habilidade essencial para a pesquisa, porque de nada adianta obter dados valiosos em um trabalho de campo bem conduzido se não for divulgado com a qualidade merecida. É adequado que seja reservado um longo período de tempo para a elaboração do relatório, que haja persistência para esta elaboração, construindo várias versões se for o caso e que haja colaboração de colegas e supervisão de pesquisadores mais experientes.

André (2008) salienta ainda alguns aspectos em relação ao tempo da pesquisa, aos métodos e aos instrumentos de coleta de dados. Neste sentido, a autora (2008) considera que o trabalho de pesquisa concentrado em determinado período de tempo, vai agravar as críticas sobre o estudo de caso quanto à validade e fidedignidade dos dados. Sendo assim, neste tipo de pesquisa, o conceito de validade e fidedignidade é visto de modo diferente do modelo científico convencional, que envolve o confronto ou relação entre os eventos e sua representação, para que diferentes pesquisadores cheguem às mesmas representações desses eventos. No estudo de caso etnográfico, é importante apresentar o posicionamento do pesquisador com base nos dados obtidos, como uma das possíveis versões do caso, abrindo a possibilidade para outras leituras e versões, de forma que o leitor desenvolva sua representação, que pode ser tão significativa quanto a do pesquisador.

Para a obtenção desses dados foi necessário garantir aos informantes o sigilo das informações relacionadas à identidade de cada um, que significa também garantia de dados mais fidedignos, de acordo com orientação de André (2008).

Para aumentar a possibilidade da validade dos dados, André (2008) se apoia no entendimento de Dawson (1982), ao sugerir que a pesquisa seja desenvolvida por um grupo de pesquisadores que atuem tanto como autores como avaliadores críticos do processo.

Para que a situação pesquisada seja retratada em suas múltiplas dimensões, André (2008) sugere também o emprego de diferentes métodos de coleta de dados, obtidos de uma variedade de informantes, em uma diversidade de situações e que sejam submetidos a uma triangulação das informações. A autora (2008) justifica esta última sugestão pela necessidade de que os princípios filosóficos, políticos e ideológicos do pesquisador sejam identificados e revelados ao leitor, entretanto, há que se ter a preocupação de controlá-los e o recurso à triangulação pode evitar que os dados sejam contaminados.

Os relatórios são provenientes da observação que, de acordo com Marconi e Lakatos (2002), é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se deseja estudar.

Ainda apoiada no entendimento de Dawson (1982), André (2008) orienta que haja uma focalização progressiva do estudo, ou seja, que a posição mais aberta no início da pesquisa seja definida e aprofundada, em aspectos mais específicos, ao longo do processo, por meio da coleta e análise dos dados.

Para a presente pesquisa, inicialmente foram estabelecidas categorias gerais em relação ao tema da pesquisa que direcionou a busca por trabalhos sobre cada uma delas separadamente, até chegar ao corpus de investigação. Para definir os dados que foram selecionados para análise, houve a necessidade da triangulação. Tanto a definição do corpus da investigação como a triangulação dos dados, caracterizam uma focalização progressiva do estudo.

Com base nestes pressupostos teóricos metodológicos, os procedimentos relativos à coleta de dados se estenderam pelo período de cinco meses, em três turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, durante o processo de ensino que foi conduzido pela metodologia da Modelagem Matemática de acordo com a concepção de Burak (1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b).

5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa foi desenvolvida em uma escola de Ensino Fundamental do município de Araucária – PR. A escola está localizada em um bairro de periferia da cidade e funciona em dois turnos. No ano que houve a coleta de dados, a escola atendia, no período da manhã 11 (onze) turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No período da tarde havia 2 (duas) turmas dos anos iniciais (quinto ano) e nove turmas dos anos finais.

A professora atuou durante este ano letivo na disciplina de matemática, lecionando para uma turma de oitavo ano (8ºA) e em duas turmas de nono ano (9º A e 9º B), com um total de 85 (oitenta e cinco) estudantes, que participaram das atividades desenvolvidas na perspectiva da Modelagem Matemática.

Os sujeitos foram identificados por letra e número, sendo que a letra representa a turma a que pertencem seguida de um número que representa o sujeito.

Para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (1992, 1994, 2004, 2006, 2010a, 2010b), optou-se primeiramente por uma conversa informal com os estudantes, que aconteceu no final do mês de abril de 2016, objetivando definir o tema que

norteou o trabalho, ou seja, primeira etapa desta metodologia de ensino. Segundo ao autor (2004)

O trabalho com a Modelagem Matemática parte de temas, propostos pelo grupo, [...] Isso confere maior significado ao contexto, permitindo e favorecendo o estabelecimento de relações matemáticas, a compreensão e o significado dessas relações (BURAK, 2004, s.p).

Esta discussão aconteceu no período aproximado de duas aulas. A professora pediu aos estudantes que pensassem a respeito de algum assunto que tivesse sendo comentado com frequência naquele período e que tivesse repercutido nos meios de comunicação de modo geral ou nas conversas com os pais, vizinhos e colegas. Esta iniciativa foi motivada pelo entendimento do autor ao defender que o interesse dos estudantes pela escolha do tema pode recair nos “[...] temas atuais que as formas de comunicação possibilitam, por exemplo, corrupção, terremotos, desabamentos entre outros” (BURAK, 2010, p. 19).

Os temas sugeridos foram: impeachment da presidente do Brasil, H1N1, internet limitada, jogos olímpicos, Aedes Aegypti, desmoronamento da ciclovias da cidade do Rio de Janeiro, Operação Lava Jato e crise econômica do Brasil.

A professora pediu que os estudantes pensassem a respeito dos temas que tivessem uma relação mais próxima com sua realidade, ou que os afetasse mais diretamente e tanto a “crise econômica” como a “dengue” ganharam destaque. A professora pensou numa possível convergência entre os temas e sugeriu que pensassem em uma relação que pudesse ser estabelecida entre eles para que pudessem encontrar uma possível solução para estes problemas.

Esta proposta causou bastante estranheza aos estudantes e houve diversos argumentos que motivaram a discussão sobre os causadores da dengue. As causas apontadas foram: vasos de plantas, pneus velhos expostos a céu aberto, falta de cuidado com piscinas e lixo jogado em locais inadequados. Este último foi o mais recorrente e a partir dele, discutiu-se como poderia evitar que isso acontecesse. As sugestões eram sobre a importância da separação do lixo, assim como sua coleta seletiva e reciclagem. Questionados sobre a possibilidade de dar outro destino para o lixo reciclável e ganhar dinheiro com isso, a sugestão apontada foi a sua reutilização.

Neste sentido, é importante ressaltar que foi uma escolha refletida e bem discutida, já que o ponto de partida foram os assuntos mais comentados na mídia e priorizou-se o tema que tivesse grande relevância social, para que o trabalho a ser desenvolvido pudesse trazer

contribuições significativas para a aprendizagem. Este encaminhamento foi reflexo da participação que a professora teve no projeto NEPSO, comentada na introdução desta pesquisa. A orientação para o desenvolvimento deste projeto é que a escolha do tema deve ser feita respeitando este critério de relevância social.

Esta proposta atendeu a dinâmica dialética defendida por Freire (2017a), uma vez que permitiu compreender a “leitura do mundo” que os estudantes fizeram sobre os problemas que os afetavam. Neste sentido, a curiosidade também motivou a busca por uma alternativa que pudesse contribuir para a solução dos dois problemas e encontrou na reutilização do lixo, uma possível saída. Ainda em conformidade com o entendimento do mesmo autor (2017a), é numa relação dialógica que a curiosidade ingênua se transforma em curiosidade epistemológica e que a “leitura da palavra” vai ganhando sentido.

Os comentários a seguir revelam as propostas dos estudantes em relação à possível solução para o problema levantado. Para tanto, a organização dos dados empíricos desta pesquisa traz a identificação do sujeito com a letra correspondente à sua turma, seguida de seu número de chamada e sua fala.

A2: Fazer artesanato com o lixo reciclável.

A8: Minha tia e meu primo usavam caixas de leite para fazer vasilhinhos de flor e vendiam para arrecadar dinheiro para a igreja.

A14: Tem pessoas que usam latas de alumínio para fazer utensílios de cozinha em miniatura como objeto de decoração.(informação verbal)¹²

Diante destas sugestões para a reutilização do lixo, a professora pediu aos estudantes que pesquisassem sobre alguém ou alguma empresa que reutilize o lixo como fonte de renda. Neste caso, deu-se início a outra etapa da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (2004) que é a pesquisa exploratória. Para este autor:

A Modelagem enseja, ainda de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos que compõem essa realidade. [...] Essas dimensões são levantadas na pesquisa de campo, na etapa que denominamos pesquisa exploratória. A coleta dos dados e a obtenção de informações oferece elementos à análise qualitativa e favorece as constatações que, por sua vez, geram necessidade de outras constatações (2004, s.p).

¹² Dados da pesquisa.

Feitas as discussões sobre as pesquisas apresentadas, a representante do grêmio estudantil propôs:

A8: Hoje foi decidido quem vai fazer parte da diretoria do grêmio e como sou do conselho escolar, sugiro organizar uma feira em um sábado de reposição de aula¹³ ou algo assim, e fazer uma feira onde as pessoas possam vir comprar objetos feitos por nós mesmos e com o dinheiro arrecadado poder comprar alguma coisa para a escola. (informação verbal)¹⁴

Muito entusiasmada com a ideia, a professora pediu que a estudante falasse sobre isso em todas as turmas e sugeriu a criação de uma oficina de reutilização do lixo nas dependências da escola, no contra turno com um encontro semanal. Alertou que iria aprender junto com eles, mas que deveriam ter o cuidado de não transformar o lixo em outro lixo.

Esse entusiasmo que contagia os estudantes também é fruto de uma aventura curiosa e vem ao encontro do que Freire (2017a) defende, para ele, a curiosidade deve estar sempre presente na prática docente, uma vez que precisa mover, inquietar e inserir o professor na busca necessária para que possa aprender e ensinar. O autor (2017a) reforça que a curiosidade *domesticada* permite alcançar somente memorização mecânica do objeto cognoscível, não seu aprendizado real.

Para que a ideia da oficina fosse colocada em prática, a professora perguntou quem tinha interesse em participar e qual seria o dia da semana da preferência de cada um. Antes do início das atividades, pediu que os estudantes pesquisassem na internet, imagens ou tutoriais de produtos feitos a partir da reutilização do lixo. As imagens contidas no Quadro 3 são de produtos pesquisados na internet por alguns estudantes, que foram encaminhadas para o contato da professora na rede social.

¹³ A reposição comentada pela estudante é referente aos dias não trabalhados por causa da greve de servidores do município.

¹⁴ Dados da pesquisa.

Sujeito A8			
			
Sujeito A1			
			
Sujeito A17			
			

Quadro 3: Sugestões de produtos feitos a partir da reutilização do lixo

Fonte: Dados da pesquisa

A partir das discussões motivadas pelo resultado da etapa da pesquisa exploratória e que tiveram a duração aproximada de quatro aulas, levantou-se o problema a ser resolvido, outra etapa da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (2004). A questão que se apresentava então era saber se a reutilização do lixo para confecção de peças artesanais pode contribuir para o combater a dengue e amenizar os problemas causados pela crise econômica.

Durante todo esse percurso procurou-se adotar a postura de professora mediadora defendida por Burak (2010a):

O papel de professor na qualidade de mediador é de importância fundamental no trabalho com a Modelagem, pois esse é o momento em que se pode contribuir de forma significativa com o estudante no desenvolvimento de sua autonomia, na formação de um espírito crítico. É uma etapa, em que a ação e a qualidade dessa ação, por parte do aluno, se fazem notar e podem se constituir em diferencial educativo (p. 21).

O encaminhamento desta metodologia de ensino não poderia prescindir da mediação necessária para seu desenvolvimento.

As fotos anteriores, mostram muitas sugestões de produtos feitos a partir do rolinho de papel higiênico. Desta forma, a professora achou conveniente explorar este material matematicamente para que tivessem subsídios que pudessem auxiliar na busca pela resolução do problema e para o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema, mais uma etapa na Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (2004). Tendo em vista que, a solução do problema levantado dependeu também do cálculo do volume de lixo que deixou de ser descartado com a confecção de peças artesanais.

Como a grande maioria do lixo reutilizado para confecção de peças artesanais tinha forma cilíndrica (garrafa PET e rolinho de papel higiênico), fazia-se necessário conhecer a fórmula do seu volume para que se pudesse calcular o volume do lixo que deixaria de ser descartado. Antes disso, explorou-se os elementos do cilindro por meio das atividades matemáticas que serão descritas adiante e que aconteceram em dois momentos. No primeiro momento os alunos foram instigados a resolvê-las após orientação, mas sem a intervenção da professora. No segundo momento as atividades foram corrigidas e as dúvidas, esclarecidas. As atividades desenvolvidas nesta etapa da Modelagem Matemática foram chamadas de fases¹⁵ e demandaram em torno de 50 (cinquenta) aulas em cada turma.

Optou-se por explorar os conceitos matemáticos dos materiais utilizados paralelamente às atividades da oficina porque seria necessário muito tempo para a conclusão da parte prática. Neste sentido, vale observar o entendimento de Burak (1994) ao afirmar que:

O método da Modelagem também propicia a oportunidade de um mesmo conteúdo repetir-se várias vezes no transcorrer das múltiplas atividades e em momentos distintos, o que permite a compreensão das idéias fundamentais, podendo contribuir, de maneira significativa para a percepção e compreensão da importância da Matemática no cotidiano da vida de cada indivíduo, seja ele ou não matemático (p. 53).

Iniciou-se, em meados do mês de maio, o trabalho em sala de aula, explorando toda a matemática envolvida no rolinho de papel higiênico. Esta primeira fase teve a duração aproximada de dez aulas. Discutiu-se sobre a forma, comprimento da circunferência, altura, base, diâmetro, raio, planificação e superfície lateral deste objeto. Verificou-se as medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro do rolinho de papel higiênico e de outros dois objetos de forma cilíndrica, fazendo as devidas anotações. Em seguida, a professora pediu que

¹⁵ Optou-se por denominar as cinco atividades que compreendem toda a etapa de resolução do(s) problema(s) de fases com a finalidade de organização, sendo que a última atividade, ou seja, a quinta fase, leva o nome específico de Resolução de Problema (RP) porque foi elaborada com o objetivo de matematizar todo o trabalho prático realizado na Oficina de Reutilização do Lixo.

os estudantes dividissem a medida do comprimento da circunferência pelo diâmetro de cada objeto analisado. No entanto, o tempo para realização desses cálculos se estendeu para além do esperado, uma vez que, os estudantes demonstraram muita dificuldade com a divisão de números decimais. Houve, portanto, necessidade de retomada deste algoritmo e da utilização da calculadora.

Esta proposta foi também, motivo de confusão e a maior dúvida apontada era sobre o lugar da vírgula no resultado da divisão, já que a maioria das calculadoras tem padrão americano, em que a parte inteira e a parte decimal do número são separadas pelo ponto, diferente do padrão brasileiro, em que a separação é feita pela vírgula. Após extensa discussão, os estudantes foram alertados para que ficassem atentos ao resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Discutiu-se em seguida que, em todos os casos, o resultado representa um número maior que 3 e menor que 4. As medidas e cálculos foram registrados de acordo com as orientações contidas no Quadro 4:

Meça o comprimento da circunferência e o diâmetro dos objetos analisados, divida o primeiro pelo segundo e preencha o seguinte quadro:			
Objeto	Comprimento da circunferência	Diâmetro	Resultado
Rolo de papel higiênico			
Boca do copo			
Fundo do copo			
Boca da taça			

Quadro 4: Atividade da primeira fase da etapa de resolução de problema.

Fonte: Dados da pesquisa

A professora explicou sobre o número π (π), proveniente do resultado preciso da divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, e pediu que resolvessem individualmente a atividade seguinte, para que pudessem deduzir a fórmula do comprimento da circunferência. Alertou que deveriam fazer de acordo com o que tivessem entendido e procurou evitar qualquer tipo intervenção, no momento da solução.

A atividade do Quadro 5 foi elaborada de forma que fosse possível obter mais de um tipo de registro do mesmo objeto matemático para viabilizar uma análise mais criteriosa dos dados da pesquisa. Isto porque, Duval (2010) recomenda que se parta do princípio de que “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas” (DUVAL, 2010).

1)	Ao dividir o comprimento das diferentes circunferências pelo diâmetro, o que você observou em relação ao resultado desta divisão.
2)	Agora, de acordo com a explicação da professora, descreva com suas palavras, como se pode obter o valor de π (π).
3)	Para escrever fórmulas, são usadas letras que substituem as grandezas, ou seja, o que pode ser medido, como foi visto nos exemplos de cálculo de áreas e perímetros de quadrados e retângulos. Sendo assim, escreva uma fórmula que permita calcular o π , usando c para comprimento da circunferência e d para diâmetro.
4)	Qual é a relação que existe entre o diâmetro e o raio?
5)	Escreva uma fórmula que represente a relação entre o diâmetro e o raio, usando d para diâmetro e r para raio.
6)	Depois de recordar a propriedade fundamental das proporções (o produto dos meios é igual ao produto dos extremos), substitua na fórmula escrita na questão 3, o diâmetro pelo seu equivalente em relação ao raio e transforme esta fórmula, para que possa escrever outra que permita calcular o comprimento da circunferência.

Quadro 5: Continuação da atividade do Quadro 4

Fonte: Dados da pesquisa

Antes da solução dos exercícios 3 e 6, houve retomada dos cálculos de área e perímetro de quadrados e retângulos, e explicação sobre a propriedade fundamental das proporções, respectivamente.

Após conclusão desta atividade, as folhas foram recolhidas e os estudantes foram orientados que não seriam devolvidas, já que faziam parte dos dados desta pesquisa, portanto, deveriam ser registradas em seus cadernos. Retomaram-se as questões da atividade com as intervenções necessárias para que as dúvidas fossem esclarecidas, concluindo assim a primeira fase da etapa de resolução de problemas da Modelagem Matemática.

Quanto à reutilização do lixo, a professora sugeriu um desafio aos estudantes como tarefa de casa, que deveria ser cumprido ao longo do prazo que seria destinado para todas as etapas da Modelagem Matemática, e assumiu o compromisso de fazer o mesmo. Quem tivesse interesse em participar, deveria decorar um cômodo, uma parede ou a casa inteira com os artesanatos que seriam produzidos. A ideia era fotografar o lugar antes e depois para fazer a comparação da transformação do ambiente e divulgar o resultado no final do ano letivo. Por trás deste desafio, encontrava-se escondida a intenção da professora de proporcionar aos estudantes, carentes na sua maioria, a oportunidade de viver em um ambiente bonito, organizado e agradável. Conseguia enxergar na reutilização do lixo, esta possibilidade e não poderia deixar de incentivar esta prática, já que além das inúmeras utilidades que o lixo reutilizado tem, é fundamental considerar a contribuição que esta atitude traz para o meio ambiente.

Sem jamais pretender a imobilização da História por meio da neutralidade da educação, neste caso específico, sem a intenção de que a destinação incorreta do lixo fosse uma prática comum, a proposta de realização da oficina de reutilização do lixo foi levada para

apreciação da direção da escola, que autorizou sem qualquer tipo de restrição. Para inscrição dos estudantes interessados em participar da oficina, foi providenciada a autorização contida no Quadro 6.

Eu, _____	responsável	pelo	aluno(a): _____
autorizo sua participação na Oficina de Reutilização de Lixo, que acontecerá nas terças-feiras das 8:00 hs às 11:00 hs, na Escola Municipal Marcelino Luiz Andrade. Nesta oportunidade, declaro que, se houver necessidade que o aluno(a) permaneça nas dependências da escola até o horário normal de aula, deverá providenciar sua refeição (almoço).			
Araucária, ____ de _____ de 2016.			
Assinatura do(a) responsável _____			
Obs.: As atividades iniciarão em 07/06/2016.			

Quadro 6: Autorização para participação na Oficina de Reutilização do Lixo

Fonte: Dados da pesquisa

Para que os estudantes não inscritos na oficina, pudessem participar das atividades de reutilização do lixo, foi proposto para todas as turmas, a confecção dos produtos feitos na oficina, com a ajuda dos estudantes inscritos.

No entanto, como o trabalho com o artesanato exigiria muito tempo e não se dispunha de tantas aulas para isso, foi sugerido aos estudantes inscritos na oficina, que se responsabilizassem para organizar juntamente com os colegas da turma que tivessem interesse, o material necessário, para que pudessem trabalhar com essas atividades nas ocasiões de falta de professor, já que este era um problema recorrente da escola. A princípio muitos estudantes demonstraram vontade de participar, porém houve dificuldade de organização pois, nesses momentos, ficariam os interessados em sala e os demais fora da sala, causando muito transtorno, o que poderia prejudicar inclusive, o andamento das aulas em outras turmas.

Lamentavelmente esta proposta não foi executada, no entanto considera-se que seria uma boa alternativa para evitar o ócio e muitos inconvenientes comuns de acontecerem nestas ocasiões. Para isso seria necessário que houvesse um profissional que conseguisse orientar os estudantes, ao menos nas primeiras atividades realizadas, para que desenvolvessem a responsabilidade pelo trabalho assumido e pudessem adquirir autonomia, habilidade de organização e espírito de liderança.

Dando continuidade à exploração do rolinho do papel higiênico, havia outros conceitos matemáticos que seriam necessários para a solução do problema levantado. Para calcular o volume do cilindro fazia-se necessário calcular a área de sua base, portanto, pensou-se na possibilidade de trabalhar a área do círculo de forma que se pudesse explorar diferentes registros de representação semiótica deste objeto matemático, que seria fundamental para o cálculo do volume do lixo que deixaria de ser descartado com a confecção

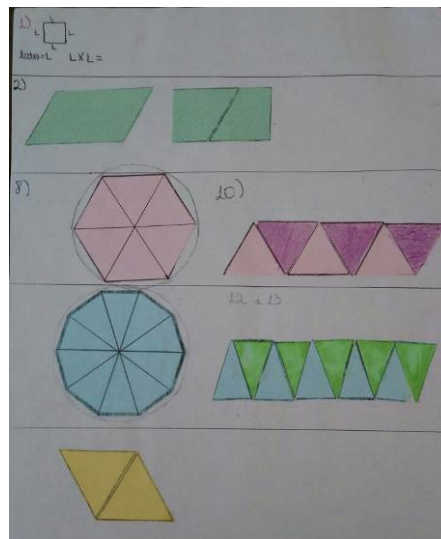
de peças artesanais. Neste sentido, Duval (2010) entende que a mobilização simultânea de dois ou mais registros de representação, assim como a possibilidade de trocar de registros de representação a todo momento, são características exclusivas da atividade matemática.

Em relação a este momento de investigação matemática, Burak (2010a) afirma que:

É um trabalho importante do professor seja no trabalho de formação dos conceitos, orientando a busca de conteúdo no livro texto, seja criando alternativas que permitam ao estudante buscar uma solução para o problema. Muitas vezes, pode-se valer das situações empíricas para os primeiros resultados e, as primeiras aproximações e mais tarde, ou mesmo, já na sequência, desenvolver o conteúdo de forma analítica, com alguma formalização matemática (p. 22).

Com o objetivo de instigar o estudante a pensar, a atividade contida no Quadro 7 representou a segunda fase da etapa da resolução do(s) problema(s) da Modelagem Matemática defendida por Burak (2004). Ainda que esta seja uma atividade com características de um estudo dirigido, que não condiz com o propósito da Modelagem Matemática, sua elaboração foi pensada de forma que se obtivesse mais de um registro de representação para o mesmo objeto matemático, como tentativa de provocar a coordenação entre os registros obtidos e possibilitar uma análise cognitiva da aprendizagem deste objeto matemático. De acordo com Duval (2011), uma análise da atividade cognitiva compreende as maneiras de ver, raciocinar, definir e mudar de uma representação a outra com os objetos matemáticos que só podem ser acessíveis pelas informações semióticas que produzem.

1) Já estudamos sobre a área do quadrado e do retângulo, sendo assim, escreva uma fórmula para cálculo da área destas figuras: Área do quadrado (lado = l) : Área do retângulo (base = b e altura = h):	
2) Cole, no verso da folha, um dos paralelogramos que você recebeu. Divida o outro paralelogramo em peças que possam ser transformadas em um retângulo, monte-o e cole-o no verso folha.	
3) Em relação à área do paralelogramo, o que você entendeu, se comparada à área do retângulo?	
4) Que fórmula deve ser usada para calcular a área do paralelogramo?	
5) Construa com os dois triângulos que você recebeu, um paralelogramo e cole-o no verso da folha.	
6) Qual a relação que existe entre a área do triângulo e a área do paralelogramo?	
7) Considerando a relação entre as medidas das áreas do triângulo e do paralelogramo, escreva uma fórmula que permita o cálculo da área do triângulo.	
8) Divida os hexágonos que você recebeu em seis triângulos equiláteros, unindo seus vértices opostos e cole um deles no verso folha.	
9) Use o compasso e coloque o hexágono colado dentro de uma circunferência com raio igual à medida do lado deste hexágono.	
10) Pinte três triângulos do outro hexágono de forma intercalada (um sim, um não). Recorte os seis triângulos, construa com todas as peças um paralelogramo, de acordo com a orientação da professora e cole-o no verso da folha.	
11) Compare a área do paralelogramo construído com a área do círculo definido pela circunferência da questão 9 e comente o que você percebeu.	
12) Divida os decágonos que você recebeu em dez triângulos isósceles, unindo seus vértices opostos e cole um deles no verso folha.	
13) Use o compasso e coloque o decágono colado dentro de uma circunferência com raio igual à medida do lado maior dos triângulos contidos neste decágono.	
14) Pinte cinco triângulos do outro decágono de forma intercalada (um sim, um não). Recorte os dez triângulos, construa com todas as peças um paralelogramo, de acordo com a orientação da professora e cole-o no verso da folha.	
15) Compare a área do paralelogramo construído com a área do círculo definido pela circunferência da questão 13 e comente o que você percebeu.	
16) Ao analisar o que foi observado nas questões 11 e 15, você concorda que, quanto maior o número de lados do polígono regular desenhado dentro do círculo, maior é a área do círculo que é coberta pelo polígono? () Sim () Não	
17) Considerando que a fórmula de cálculo do comprimento da circunferência é $2\pi r$, como podem ser representadas as medidas dos lados do paralelogramo construído, ou seja, como podemos indicar a medida da sua base e da sua altura, ao comparar suas dimensões com as dimensões do círculo. base = altura =	
18) Substitua, na fórmula de cálculo de área do paralelogramo, a base e a altura, pelo seu equivalente encontrado na questão anterior.	
19) Agora defina e escreva a fórmula de cálculo da área do círculo.	



Sujeito B44

Quadro 7: Dedução da fórmula da área do círculo

Fonte: Dados da pesquisa

Todas as questões desta atividade foram orientadas pela professora pesquisadora, no entanto, ela pediu que os estudantes resolvessem cada uma delas evitando solicitar seu auxílio. Assim como na atividade de dedução da fórmula do comprimento da circunferência, após a conclusão, o material foi recolhido e as questões foram retomadas para esclarecer eventuais dúvidas. Desta forma, foi concluída a segunda fase da etapa de resolução de problema da Modelagem Matemática que teve a duração aproximada de doze aulas.

Vale ressaltar, que neste caso, foram priorizadas a desconstrução e construção geométricas, portanto, alguns dados extraídos deste instrumento de coleta, foram analisados nesta perspectiva, considerando a teoria de Duval.

Quanto às atividades práticas que aconteceram paralelamente ao estudo dos conceitos matemáticos, assim que foram concluídas as inscrições dos estudantes inscritos na Oficina de Reutilização do Lixo, desenvolveu-se a primeira atividade, ou seja, a confecção de arranjo feito com flores e de porta guardanapo, a partir do rolinho de papel higiênico. A foto a seguir é de uma peça confeccionada.



Figura 5: Arranjo com flores de papel higiênico feito pela equipe a Oficina de Reutilização do Lixo
Fonte: Dados da pesquisa

Houve bastante interesse pela confecção do arranjo, principalmente porque a técnica utilizada para revestimento das flores foi um banho de parafina derretida, o que chamou bastante a atenção de todos, já que houve a necessidade de um fogareiro para este fim. Os trabalhos realizados neste primeiro dia da oficina foram expostos e divulgados para todos os estudantes das três turmas, que tiveram oportunidade de confeccionar o mesmo produto na sala de aula, uma semana depois. Estes trabalhos foram usados na sala de aula como peças decorativas, de acordo com as fotos da Figura 6.

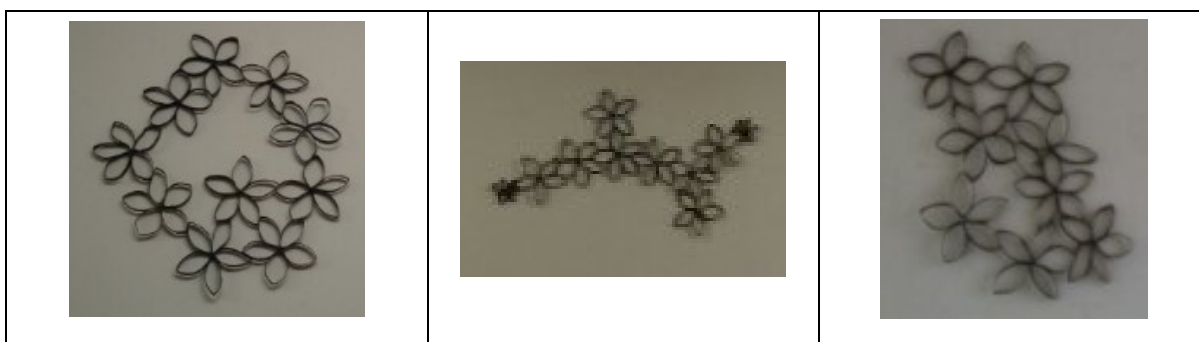


Figura 6: Decoração das salas de aula com arranjo de flores
Fonte: Dados da pesquisa

Como o rolinho de papel higiênico já havia sido trabalhado tanto para a confecção de peças artesanais como para dedução da fórmula de cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo, considerou-se que havia elementos suficientes para estabelecer uma relação mais estreita entre estes conhecimentos. A estratégia de ensino usada está em

conformidade com a metodologia adotada. Neste sentido, Burak (2010a) defende que o estudante da Educação Básica se encontra na

[...] fase em que se precisa de experiências significativas, que promovam o desenvolvimento de habilidades, que ajudem na formação da autonomia e de um espírito crítico. Uma etapa da formação em que a busca dos resultados seja com base em procedimentos e encaminhamento que favoreçam e incentivem no estudante o pensar, o conjecturar, o experimentar e o refletir e mesmo o errar (p. 25).

Para tanto, foi proposta pela professora pesquisadora, a atividade contida no Quadro 8, que faz parte da terceira fase da etapa de resolução de problemas da Modelagem Matemática.

Sabemos que a maioria dos rolinhos de papel higiênico tem altura de 10 cm, comprimento da circunferência de 14,5 cm e diâmetro de 4,5 cm. Sendo assim, resolva os seguintes exercícios, considerando essas dimensões.
a) Para fazer um porta trecos com o rolinho de papel higiênico, um artesão resolveu revesti-lo com barbante. Sabendo que a espessura do barbante é de 3 mm, verifique quantos rolinhos podem ser revestidos com 10 m de barbante.
b) Outro artesão prefere revestir o rolinho de papel higiênico com tecido, para construir o porta trecos. Considerando as dimensões deste objeto, calcule a quantidade de tecido que o artista precisará para revestir sua superfície lateral e uma de suas bases.
c) Para montar o porta trecos, um artesão preferiu a opção da foto. Desta forma, quais devem ser as dimensões de sua base, sabendo que tem uma sobra de 1 cm em toda sua volta, que tem uma distância de 4 cm entre os rolinhos maiores e os menores, que a espessura do barbante é de 3 mm e que não há espaço entre os rolinhos de mesmo tamanho? Calcule também a área da base.

d) Confeccionando 20 peças iguais às do modelo da foto e sabendo que a altura dos rolinhos menores corresponde à metade da altura dos rolinhos maiores, qual é o espaço preservado no meio ambiente ao evitar de jogar sem amassar, os rolinhos que serão utilizados?
Obs.: A foto da questão foi tirada com um dos rolinhos na posição invertida, os estudantes foram orientados em relação à isso, para que não prejudicasse a solução do problema.

Quadro 8: A matemática do rolinho de papel higiênico e a reutilização do lixo

Fonte: Dados da pesquisa

Esta fase teve a duração aproximada de nove aulas e os dados obtidos neste instrumento não foram analisados, porque esta atividade compreende uma das que ficaram fora da seleção mencionada anteriormente.

Enquanto isso, as atividades da equipe de reutilização do lixo estavam concentradas na construção de mais uma peça artesanal, ou seja, a flor confeccionada a partir da garrafa

PET. Este trabalho foi exposto e divulgado aos demais estudantes das três turmas e pode ser observado na foto a seguir.



Figura 7: Vaso de flor com garrafa PET confeccionado pela equipe da Oficina de reutilização do lixo
Fonte: Dados da tese

Com o agendamento da Festa Julina da escola, foi proposto à direção, a exposição das peças confeccionadas pela equipe da oficina, para venda à comunidade. O dinheiro arrecadado seria destinado à compra de instrumentos necessários para a realização dos trabalhos na oficina, como por exemplo, tesouras adequadas para cortar tecido. Os esforços da equipe da oficina foram intensificados para produção de peças artesanais em quantidade suficiente para venda, aproveitando um sábado letivo nesta empreitada.

Até então, a equipe já sabia fazer o arranjo de flores, porta guardanapo e porta treco com o rolinho de papel higiênico, assim como a flor com garrafa PET. Com a falta de experiência empreendedora, havia dificuldade para definir os preços dos produtos, sendo assim, foi solicitada aos estudantes uma pesquisa sobre a forma mais adequada de colocar preço no artesanato. No entanto, como já estava muito próximo o dia da Festa Julina, não houve tempo para discutir sobre isso em sala de aula e os preços foram definidos com base no valor de alguns produtos artesanais semelhantes, disponíveis na internet.

As fotos do Quadro 9 são dos produtos confeccionados na oficina e destinados à venda, no dia da Festa Julina.



Quadro 9: Produtos à venda na Festa Julina
Fonte: Dados da tese

Era grande a expectativa para o resultado das vendas, mas infelizmente, foi frustrada. A arrecadação foi equivalente a 35% do valor que poderia ser obtido com as vendas, graças à boa vontade de algumas pessoas que compraram principalmente com a intenção de ajudar a equipe envolvida. Houve muita reflexão sobre as possíveis causas deste resultado e foi descartada, de imediato, a falta de qualidade, uma vez que houve bastante capricho na confecção das peças produzidas. Aconteceram alguns problemas técnicos na confecção dos arranjos de flor, pois estavam descolando, sendo assim, a equipe decidiu que aceitaria somente encomendas deste produto para que fossem aprimorados, evitando este inconveniente. Pensou-se na possibilidade de o desinteresse da comunidade estar vinculado ao seu baixo poder aquisitivo, já que eram produtos supérfluos, no entanto esperava-se que os demais professores e funcionários da escola fossem se interessar, o que não aconteceu. A grande maioria nem sequer visitou a exposição.

Apesar do aborrecimento, não foi descartada a hipótese de ter acontecido algo errado em algum aspecto e concluiu-se que poderia ter sido por falta de propaganda. Os professores sabiam do trabalho com os estudantes da oficina mais pelo movimento que acontecia nas dependências da escola do que propriamente pela sua divulgação. Desta forma, na primeira oportunidade, a professora pediu um momento para esclarecer sobre isso e ofereceu aos colegas, os produtos que estavam disponíveis para venda. Porém, houve pouco interesse dos seus colegas.

Com o que havia sido arrecadado e com recursos da professora, providenciou-se os instrumentos e materiais necessários para que pudessem dar continuidade às atividades da

Oficina de Reutilização do Lixo. O principal objetivo da equipe era reutilizar uma grande quantidade de lixo para a confecção de produtos úteis e interessantes, de forma que todos tivessem habilidade e técnica suficiente para garantir a qualidade do que era produzido. Assim, seria possível contribuir com o meio ambiente no combate à dengue, ganhar dinheiro com a venda dos produtos, economizar e evitar o consumismo, já que as peças confeccionadas poderiam ser destinadas para uso próprio, ou seja, reduzir os problemas causados pela crise econômica.

Quanto às vendas, a equipe recebeu algumas encomendas e conseguiu vender as peças que haviam sobrado para o diretor da escola, que presenteou alguns convidados que participaram de uma roda de conversa sobre experiência de vida acadêmica e profissional com os estudantes.

A equipe da Oficina de Reutilização do Lixo, num período aproximado de oito aulas, orientou os estudantes das três turmas sobre as técnicas necessárias para confecção de um vaso de flor e um suporte para luminária feitos com garrafa PET, e um porta treco feito com rolinho de papel higiênico. Este último foi uma sugestão de presente para o dia dos pais. Algumas peças produzidas, podem ser observadas nas fotos do Quadro 10.

			
Sujeito B52	Sujeito B56	Sujeito B60	
			
Sujeito A10	Sujeito A17	Sujeito A7	Sujeito C77

Quadro 10: Produtos confeccionados pelos sujeitos da pesquisa
Fonte: Dados da pesquisa

Iniciou-se a discussão e cálculos do custo do material utilizado para confecção das peças contidas no Quadro 11. Concluiu-se que um vaso de flor feito com garrafa PET, tem um custo mínimo de matéria prima para ser produzido, tendo em vista os preços contidos no

quadro a seguir, que representa a quarta fase da etapa de resolução de problemas da Modelagem Matemática que durou aproximadamente quatro aulas.

Cotação de preços da matéria prima usada para a confecção dos vasos de flores							
Produto	Largura	Comprimento	Preço da Peça	Preço do metro	Como calcular o preço do metro		
Passa fita	1,9 cm	13,7 m	4,00				
Bordado Inglês	5 cm	13,7 m	17,50				
Bordado Inglês	8 cm	13,7 m	30,50				
Fita de cetim	10 mm (Nº 2)	10 m	2, 69				
Fita de cetim	15 mm (Nº 3)	10 m	3,39				
Juta	1 m	1 m	11,00				
Medidas dos vasos e Quantidade de material utilizado em alguns itens dos vasos de flores							
Vasos	Comprimento da circunferência		Itens/Quantidade de material		Comprimento da fita de cetim	Área	
Isopor	27 cm		Flor		30 cm		
Garrafa	20 cm		Laço		30 cm		
Pote de vidro	29 cm		Juta	Garrafa		180 cm²	
				Pote de vidro		261 cm²	
Custo de cada vaso							
Vasos/ Materiais	Passa fita	Bordado Inglês 5 m	Bordado inglês 8 cm	Fita de cetim 10mm	Fita de cetim 15 mm	Juta	Total
Isopor							
Garrafa							
Pote de vidro							

Quadro 11: Preço da matéria prima do vaso de flor

Fonte: Dados da pesquisa

A intenção era estabelecer o preço das peças confeccionadas, no entanto, esta atividade foi iniciada antes do período de recesso do mês de julho e concluída depois, prejudicando seu andamento. Desta forma, as respostas para estas questões não foram analisadas neste estudo.

Como até aqui o trabalho havia ocupado um período aproximado de três meses¹⁶ alguns estudantes do 9º A começaram a cobrar da professora o ensino dos conteúdos que normalmente são estudados neste período letivo, como equação do segundo grau, por exemplo. A pedagoga da escola chegou a chamar a professora para conversar sobre as reclamações dos estudantes e de seus pais. A maior preocupação era um eventual teste de seleção que poderiam fazer para ingressar no Ensino Médio.

Neste sentido, vale ressaltar o entendimento de Burak (1994) no início de seus estudos, em relação à organização do tempo destinado tanto para o desenvolvimento da Modelagem Matemática, quanto para o estudo dos conteúdos elencados na matriz curricular

¹⁶ O período do recesso escolar de quinze dias está computado neste tempo.

que não foram trabalhados durante o desenvolvimento desta metodologia. O autor (1994) recomendava:

[...] trabalhar parte da carga horária da disciplina de Matemática com o tema sugerido pelos alunos e o professor usar o tempo restante para tratar dos conteúdos não contemplados no tema desenvolvido. Com a realização de várias experiências, o professor vai encontrando situações em que esses conteúdos possam ser tratados (p. 53).

Porém, toda a experiência deste autor com a Modelagem Matemática, o fez manifestar mais recentemente, um pensamento que já o acompanhava há bastante tempo. Desta forma, afirma que:

Sempre em nome de que o estudante precisa de certos pré-requisitos, para a continuidade dos seus estudos e que no ano seguinte serão cobrados certos conteúdos, as experiências verdadeiramente significativas no âmbito da sala de aula são deixadas de lado. Esse é um aspecto que nada contribui para a educação de um cidadão do século XXI, muito menos com o ensino da Matemática. O lado “seguidor” que se desenvolve no estudante, subtrai-lhe a possibilidade de desenvolver sua autonomia, a iniciativa, liberdade de conjecturar e, com isso inibe o desenvolvimento de muitas competências necessárias a formação de um cidadão, tudo em nome de uma visão de currículo completamente superada, no entanto em termos teóricos apenas. Essa visão da linearidade do currículo, ainda predomina na maioria das nossas escolas, está sendo, ainda que lentamente superada com as novas perspectivas de um pensamento complexo (BURAK, 2010, p. 19).

Fatores como a lentidão de superação da linearidade do currículo, as consequências de uma formação essencialmente tradicional¹⁷ e o próprio sistema devem ser considerados. Este último exige dos estudantes, conhecimentos de conceitos que não terão utilidade dependendo da sua área de atuação e servirão apenas para ingressarem no curso de algumas instituições de ensino médio e de todas de ensino superior, no momento do exame de seleção. Esses fatores, por mais condenáveis que sejam, ainda impedem que o professor tenha a tranquilidade e segurança de promover um trabalho na perspectiva da Modelagem Matemática. Para tanto, Burak (2010a) orienta:

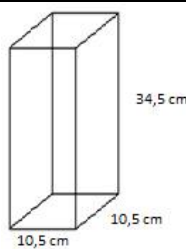
¹⁷ Neste contexto (educação, formação, ensino e aula), a presente autora adota o termo “tradicional” em referência à educação bancária, já que esta última é proveniente do ensino verticalizado, de acordo com o entendimento de Freire (2017a, 2017b). O termo não está associado à aula expositiva e nem a qualquer outro método ou metodologia de ensino que seja desenvolvido na perspectiva da educação dialógica. Uma vez que, Guérios, Gosmatti, Fernandes, Zaramela e Perine (2009) entendem que já foi evidenciado um movimento transformativo durante o desenvolvimento profissional que, de acordo com, Larossa, 1999 e Guérios (2002) ocorre quando a experiência é autêntica ao ponto de provocar o estímulo pela “[...] busca de práticas didáticas diferenciadas das que priorizam a repetição, a memorização e a aprendizagem algorítmica no ensino de Matemática” (p. 441).

[...] não podemos mais aceitar para nós professores e para nossos estudantes uma visão de educação que nos identifique com um mundo fechado. Temos que sair da condição de “seguidores” para nos tornarmos “buscadores”, que este novo século exige, torna-se mesmo imprescindível uma mudança. A adoção de uma metodologia mais aberta pode contribuir com essa perspectiva (p. 20 e 21).

Convencida de que a mudança é necessária, a professora esclareceu sobre a importância de terem trabalhado, até então, conteúdos necessários à solução do problema relacionado ao tema. Procurou acalmá-los dizendo que oportunamente, viriam os conteúdos programados para o 9º ano, mesmo que ainda não tivesse a segurança de conseguir trabalhar o que lhe era cobrado (equação do segundo grau), por meio de uma metodologia que atendesse a perspectiva defendida anteriormente.

Deu-se continuidade à etapa de resolução de problemas da Modelagem Matemática, por meio da atividade contida no Quadro 12, que compreende a quinta fase desta etapa e que teve a duração de aproximadamente dezoito aulas. A elaboração desta atividade foi pensada de forma que se pudesse matematizar todo o trabalho prático desenvolvido. Com a proposta de cálculo de volume tanto do cilindro como do paralelepípedo, estimou-se o volume do lixo que deixou de ser descartado com a confecção das peças artesanais e do valor que poderia ser arrecadado com sua venda. Estes dados permitiram uma análise da aprendizagem dos estudantes do ponto de vista cognitivo de acordo com Duval e do ponto de vista social, de acordo com Freire. A professora orientou cada questão e pediu que resolvessem evitando solicitar sua intervenção.

(continua)

1) O peso individual de 3 garrafas PET de refrigerante vazias, com capacidade para 2 litros e com formatos diferentes é 51 g, 47 g e 46 g respectivamente. Calcule o peso médio da garrafa PET e a quantidade mínima de garrafas inteiras necessárias para compor 1 Kg?	
2) A empresa CEMPRE – Compromisso Empresarial para Reciclagem, divulgou em seu site o preço do material reciclável que é praticado em algumas cidades do Brasil. Lá consta que, na cidade de Londrina – PR, o preço da tonelada da garrafa PET é de R\$ 1350,00. Considerando o peso médio da garrafa PET calculado no exercício anterior, calcule o preço da unidade.	
3) As garrafas PET com capacidade útil de 2 litros têm a forma parecida com a de um cilindro e o design dessas embalagens são muito variados. Sendo assim, ainda que sua capacidade seja essa, ao ser descartada, seu volume equivale, em média, à uma caixa retangular com dimensões de 10,5 cm de largura, 10,5 cm de comprimento e 34,5 cm de altura.	
 	
Desta forma, calcule o volume que uma garrafa PET ocupa ao ser descartada e qual a capacidade total em litros que este volume equivale.	

Quadro 12: A reutilização do lixo, a dengue e crise econômica.

Fonte: Dados da pesquisa

(continuação)

4) A equipe da Oficina de Reutilização do Lixo orientou em três turmas da escola, a confecção de uma flor e de uma luminária com a reutilização de apenas uma garrafa PET, de acordo com o modelo das fotos a seguir.



Sujeito C76



Sujeito A19

Considerando que 85 alunos participaram desta atividade e que cada um deles utilizou uma garrafa PET, calcule o volume deste material que deixou de ser descartado, a partir das informações do exercício anterior (capacidade total do material ao ser descartado e o volume equivalente).

5) Para a confecção do vaso de flor, reutilizou-se, a critério do aluno, uma embalagem qualquer. Vamos usar como exemplo a lata de creme de leite, por ser uma embalagem pequena, e imaginar que tenha sido reutilizada como vaso em todos os 85 trabalhos, para que seja possível calcular a capacidade total deste material que deixaria de ser descartado. Desta forma, considere que suas dimensões são de 7,5 cm de diâmetro e 8,2 cm de altura.

6) A flor e a luminária são vendidas pela equipe da Oficina de Reutilização do Lixo por R\$ 10,00 e R\$ 20,00 respectivamente. Sendo assim, quanto poderia ser arrecadado com a venda de todos os produtos confeccionados a partir da garrafa PET com os 85 alunos da escola.

7) Considere o volume total de todo material que poderia ser descartado, ou seja, 85 garrafas PET e 85 latas de creme de leite, considere também o valor que pode ser arrecadado com a venda de todos os produtos confeccionados, de acordo com o preço praticado pela equipe da Oficina de Reutilização do Lixo, agora calcule quanto pode ser arrecadado por litro de todo material que seria descartado.

8) O lixo reutilizado para confecção do porta treco exposto na foto a seguir, foi 1 rolinho de papel higiênico e uma parte da caixa de cereal.



Sabendo que as dimensões do rolinho são de 4,5 cm de diâmetro e 10 cm de altura e as dimensões da caixa são 5,5 cm de largura, 17,5 cm de comprimento e 26 cm de altura, calcule o volume do lixo que deixou de ser descartado, considerando que cada caixa rende 12 bases e foram confeccionados 85 porta trecos.

9) A equipe da Oficina de Reutilização do Lixo da escola, vende cada porta treco por R\$ 3,00, desta forma, quanto poderia ser arrecadado com a venda dos 85 porta trecos?

10) Considere a capacidade total do material reutilizado para a confecção do porta treco ou seja, 85 rolinhos de papel higiênico e 85 bases para o porta treco, considere também o valor arrecadado com todos os produtos confeccionados, agora calcule quanto pode ser arrecadado por litro de material reutilizado.

11) Toda a produção aconteceu em um período aproximado de 5 horas e cada um dos 85 alunos confeccionou uma flor, uma luminária e um porta treco. Quanto poderia ser arrecadado com a venda de todos os produtos, considerando o preço praticado pela equipe da Oficina de Reutilização do Lixo?

12) De acordo com o consumo mensal de refrigerante de 2 litros na sua casa e a partir dos cálculos anteriores, preencha o quadro a seguir:

Consumo mensal		
Quantidade de garrafas	Peso das garrafas consumidas	Valor que poderia ser arrecadado na venda

13) Imagine se cada garrafas de refrigerante de 2 litros consumida na sua casa mensalmente fosse reutilizada na construção de uma flor e de uma luminária. Quanto você poderia arrecadar por mês se vendesse pelo valor praticado pela equipe da Oficina de Reutilização do Lixo?

14) Em várias discussões na sala de aula, abordamos sobre a importância da reutilização do lixo para diminuir os problemas ocasionados pela dengue e pela crise econômica, que prejudicam consideravelmente a população de modo geral. De acordo com os cálculos anteriores, que análise matemática você faz sobre isso?

Quadro 12: A reutilização do lixo, a dengue e crise econômica.

Fonte: Dados da pesquisa

As folhas foram recolhidas após conclusão desta atividade e os estudantes foram informados que não seriam devolvidas por fazerem parte dos dados da tese, no entanto, retomaram-se todas as questões para que ficassem registradas nos cadernos dos estudantes, esclarecendo as dúvidas que surgiram.

A retomada, que aconteceu em todas as atividades propostas teve o objetivo de compreender as dúvidas manifestadas pelos estudantes. De acordo com Freire (2017a) o professor, permitindo que o estudante comunique o que não entendeu, conhecendo suas dúvidas, receios e incompetências provisórias, ao escutá-lo, aprende a falar com ele. Este entendimento vem ao encontro do que Duval (2011) defende ao se referir à análise cognitiva da produção dos estudantes, que não pode se limitar em codificar os sucessos e erros observados do ponto de vista matemático, mas analisar os problemas recorrentes de incompreensão dos encaminhamentos matemáticos para a maioria dos estudantes (Duval, 2011).

Todas as discussões provenientes desta última fase da etapa da resolução de problemas permitiram a análise crítica da solução, outra etapa da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (2004). Neste sentido, o autor entende que

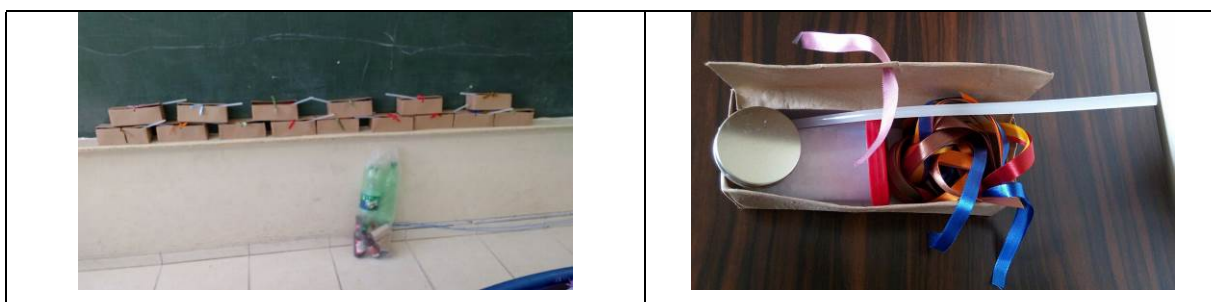
Esta etapa da Modelagem é um momento muito rico e especial para analisar e discutir a solução ou as soluções encontradas. É um momento em que se fazem as considerações e análise das hipóteses consideradas na etapa de levantamento dos problemas. Possibilita tanto o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema. Sob o aspecto da matemática pode-se analisar a coerência e a consistência lógica da solução ou das soluções encontradas (BURAK, 2010b, p. 24).

A análise foi provocada principalmente pela última questão da atividade do Quadro 12, que motivou a professora a expor uma situação que estava vivenciando e fazer uma proposta aos estudantes. Informou que desde o início das atividades sobre o tema escolhido, começou a juntar o lixo de sua casa para que pudessem trabalhar. Expôs as fotos do Quadro 13 que mostra um espaço da sua casa onde o lixo foi guardado e explicou que, apesar de ter se identificado muito com o artesanato e gostado da experiência, não tinha tempo para a reutilização de todo este material, e muito menos coragem de jogar fora.



Quadro 13: Lixo acumulado na casa da pesquisadora
Fonte: Dados da tese

Sugeri dividir o lixo com quem tivesse interesse por este tipo de trabalho que iria acompanhado de um kit contendo um copo de parafina, um refil de cola quente, uma porção de miçangas e alguns pedaços de fitas de cetim coloridas, que seriam entregues em uma caixa de leite encapada pela equipe da oficina. O lixo a ser dividido era composto de garrafas PET, garrafas de vidro, caixa de leite, rolinhos de papel higiênico e retalhos de tecido. O Quadro 14 traz as fotos dos kits entregues para os estudantes.



Quadro 14: Kit de material e lixo para os estudantes interessados
Fonte: Dados da pesquisa

Objetivando estimular os estudantes a adotarem a prática de reutilização do lixo e, quem sabe, motivá-los a investir em um empreendimento desta natureza, já que alguns sofrem com o problema do desemprego dos pais, a professora mostrou para os estudantes, um vídeo sobre a experiência profissional de uma artesã de sucesso¹⁸ que utiliza filtro de café usado, como matéria prima para confecção de luminárias, aparadores, etc.

Após exposição do vídeo, foi aplicado um questionário para obter informações sobre a opinião dos estudantes em relação ao trabalho realizado na perspectiva da Modelagem Matemática. As questões foram elaboradas com o objetivo de buscar dados que pudessem

¹⁸ História da empreendedora Rosely Ferraiol, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=M2CmOx-OZ_w>

revelar o desenvolvimento da curiosidade, da criatividade, da criticidade e da autonomia, por meio do diálogo, da interação e da motivação.

Para que o leitor possa ter uma visão geral de todo o desenvolvimento da pesquisa, o Quadro 15 sintetiza cronologicamente a organização do trabalho de Modelagem Matemática que aconteceu em cada turma. Nele consta a descrição do que foi realizado, a época que isso aconteceu e o tempo necessário para realização de cada atividade proposta.

Organização do trabalho de Modelagem Matemática desenvolvido em cada turma			
Período (2016)	Nº aproximado de aulas	Atividades realizadas	
		Matemáticas – Etapa da Resolução de Problemas	Discursivas e Práticas – Demais etapas
28/04	2		Escolha do tema
03 a 05/05	5		Pesquisa exploratória e Levantamento do problema
10 a 25/05	12	Dedução da fórmula do comprimento da circunferência a partir do rolinho de papel higiênico – 1ª fase	
24/05	1		Sugestão para trabalhar com o lixo na Festa Julina
31/05	1		Desafio para decoração da casa
De 01 a 07/06 e de 15 a 28/06	12	Dedução da fórmula da área do círculo – 2ª fase	
07/06	1		Divulgação do trabalho realizado no primeiro dia da oficina de reutilização do lixo
14/06			Confeção do arranjo de flores com o rolinho de papel higiênico
29/06 a 07/07	9	Contextualizando a matemática do rolinho do papel higiênico com a reutilização do lixo – 3ª fase	
12, 26 e 27/07	4	Custo da matéria prima usada no artesanato feito com o lixo reutilizado – 4ª fase	
28/7	2		Discussão sobre o baixo custo da matéria prima usada no artesanato feito com o lixo reutilizado e a viabilidade de um empreendimento desta natureza
02 a 10/08	8		Confeção de flor e suporte para luminária com garrafa PET e porta treco com rolinho de papel higiênico
De 16 a 31/08 e 01/09	18	Cálculo do volume do lixo utilizado na oficina de 02 a 10/08, do seu valor de venda in natura e do seu valor de venda após reutilização como peça artesanal – 5ª fase	
13/09	2		Distribuição de kit com lixo e material necessário para confecção de peças artesanais aos estudantes interessados
14 e 15/09	2	Análise crítica da solução, outra etapa da Modelagem Matemática, a partir dos resultados encontrados na atividade realizada no período de 16 a 31/08 e 01/09	
15/09	1		Vídeo sobre empreendedora de sucesso que usa o lixo como matéria prima para confecção de seus produtos
01/12	2	Aplicação do questionário	
Total de aulas aproximado para as atividades realizadas		59 aulas	26 aulas
Obs.: Há algumas coincidências de datas na realização de atividades matemáticas e de atividades práticas e discursivas, nestas ocasiões o tempo foi organizado de forma que fosse possível a realização de todas as atividades.			

Quadro 15: Trabalho em sala de aula

Fonte: Dados da pesquisa

Para finalizar esta seção, o Quadro 16 resume a organização do trabalho da equipe da Oficina de Reutilização do Lixo que acontecia no contra turno, com o objetivo de auxiliar as atividades que foram desenvolvidas com os demais estudantes das três turmas. O quadro traz informações que permitem melhor compreensão sobre o que foi realizado, época e duração.

Organização do trabalho da equipe da Oficina de Reutilização do Lixo		
Dias/Mês	Horas	Produtos confeccionados/Material utilizado e/ou atividades realizadas
07,14,21 e 28/06	12	Arranjo de flor, porta guardanapo e porta treco com rolinho de papel higiênico Vaso de flor com garrafa PET
02, 05 e 12/07	9	Venda dos produtos confeccionados na Festa Julina Porta guardanapo com rolinho de papel higiênico
02, 09, 16, 23 e 30/08	15	Suporte de luminária com garrafa PET Porta treco com rolinho de papel higiênico Marcação nas garrafas PET para confeccionar flores nas três turmas
13, 20 e 27/09	9	Porta treco com garrafa PET, filtro de café e rolinho de papel higiênico Organização dos materiais que compõem os kits dos estudantes interessados em reutilizar o lixo de casa Confeção de embalagem para o kit com caixa de leite
11/10	3	Caixa organizadora com embalagem de leite
Total de horas trabalhadas	48	

Quadro 16: Trabalho da equipe da Oficina de Reutilização do Lixo

Fonte: Dados da pesquisa

6 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Havia um total de 85 (oitenta e cinco) estudantes que participaram de cinco atividades consideradas as cinco fases que compreenderam a etapa da resolução do problema e responderam um questionário. A quantidade de questões aplicadas para cada estudante totalizava 78 (setenta e oito). Desta forma, haveria necessidade de analisar os registros provenientes das respostas de 6.630 (seis mil, seiscentos e trinta) questões, além dos dados obtidos nos relatórios das aulas disponibilizadas para o desenvolvimento de todas as etapas da Modelagem Matemática, que foram gravadas em áudio.

Portanto, ficava absolutamente inviável a análise de todos os dados coletados, fazendo-se necessário escolher apenas uma das três turmas e desconsiderar algumas atividades. Optou-se pelo 9º A pela ocorrência de situações que chamaram a atenção da pesquisadora nesta turma, como a dificuldade de aprendizagem e a resistência pela metodologia de ensino adotada. Foram selecionadas as atividades consideradas mais

relevantes, para tanto, a escolha priorizou as que foram denominadas: Comprimento da Circunferência (CC), Área do Círculo (AC) e Resolução do Problema (RP).

Ainda assim, não foi possível a análise de todos os dados desta turma, já que correspondiam aos registros de 32 (trinta e dois) estudantes, provenientes das respostas de 78 (setenta e oito) questões contidas nas três atividades e no questionário, totalizando 2.496 (dois mil, quatrocentos e noventa e seis) questões. Somado a isso, havia os dados obtidos nos relatórios de aproximadamente 83 (oitenta e três) aulas gravadas em áudio que foram destinadas para o desenvolvimento de todas as etapas da Modelagem Matemática.

Desta forma, foram selecionados os dados obtidos nas três atividades desenvolvidas, daqueles estudantes que se manifestaram durante as aulas que foram gravadas em áudios e transcritas para os relatórios. Isso possibilitou a triangulação, uma vez que buscou-se relacionar a dúvida mencionada e a orientação da professora, com o registro obtido na resolução da atividade proposta.

Todas as respostas dos estudantes do 9º A, registradas no questionário, foram analisadas também.

6.1 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

As respostas para as questões da atividade para dedução da fórmula do comprimento da circunferência, identificada como CC, foram organizadas no Quadro 17 para facilitar a análise.

(continua)

ATIVIDADE PARA DEDUÇÃO DA FÓRMULA DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA – Identificada como CC		
Questões	Respostas	Sujeitos
Informações Preliminares: Preenchimento da tabela com medidas do comprimento da circunferência, diâmetro e resultado da divisão dessas medidas	Apresentação de todas as operações de divisão	A2, A3, A4, A5, A8, A11, A12, A13, A15, A17, A 19, A 23, A24
	Apresentação de algumas operações de divisão	A6, A16
	Utilização da calculadora	A1, A 9, A10, A18, A21, A22, A 30
	Não fez	A 20

Quadro 17: Atividade para dedução da fórmula do comprimento da circunferência

Fonte: Dados da pesquisa.

(continuação)

1) O que observou em relação ao resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro?	Menores que 3 e maiores que 4 ou acima de 3 e abaixo de 4	A1, A2, A6, A8, A10, A13, A 16, A 20, A22
	Acima de 2 e abaixo de 4	A4, A11
	A parte inteira é 3	A2, A4, A 10, A11
	Todos os resultados têm número a partir de 3	A7
	Acima de 3	A12
	Resultados semelhantes	A3, A 21
	Dá aproximadamente 3,14	A5
	Os resultados são inteiros	
	Algumas contas não deram cálculo exato, pois não terminou o cálculo	A23
	Não fez	A9, A15, A18, A24
2) Descrição de como pode ser obtido o valor de π	Dividir comprimento e diâmetro	A1
	Dividir o comprimento da circunferência pelo diâmetro	A2, A3, A6, A8, A12, A16, A17, A19, A21, A23
	Uso da divisão para calcular diâmetro e circunferência para ter o π .	A4, A7, A11
	Dividindo C por D dá π .	A10
	Fazendo uma conta de divisão comprimento e perímetro	A13, A22
	Fazendo uma conta de divisão comprimento e diâmetro	A20
	Não fez	A9, A15, A18, A24, A30
3) Escreva uma fórmula que permita calcular π , para usando c para comprimento da circunferência e d para diâmetro.	$\frac{c}{d} = \pi$	A1, A2, A3, A8, A12, A13, A16, A17, A19
	$\pi = c : d$ $\pi = \frac{c}{d}$	A5, A10
	$\frac{c}{d} = \pi$ $c \text{ dividido por } d = \pi$	A21
	$\frac{d}{c} = \pi$	A22
	Não fez	A4, A7, A9, A11, A15, A18, A20, A23, A24, A30
4) Relação entre o diâmetro e o raio	O diâmetro é o dobro do raio e o raio é a metade do diâmetro	A1, A10, A12, A19
	O raio é a metade do diâmetro e o diâmetro é o dobro do raio	A2
	O raio é a metade do diâmetro	A3, A8, A13, A16, A21, A22
	O diâmetro é o dobro do raio	A6, A17
	A relação do diâmetro e o raio é que eles vão dar o mesmo resultado	A4, A7, A11
	Não fez	A9, A15, A18, A20, A23, A24, A30

Quadro 17: Atividade para dedução da fórmula do comprimento da circunferência

Fonte: Dados da pesquisa.

(continuação)

5) Escreva uma fórmula que represente a relação entre o diâmetro e o raio, usando d para diâmetro e r para raio	$r = \frac{d}{2}$ $d = 2r$	A2, A8, A13, A19
	$d = \frac{d}{2}$ $\frac{d}{2} = r$	A3, A21
	$d = 2r$	A5, A12
	$r.r = d = d: r = r$	A10
	$P = \frac{d}{2}$ $d = 2r$	A16
	$2.r = d$	A17
	$D = 10$ $R = 5$	A3
	$r = \frac{d}{r}$ $d = 2.r$	A22
	Não fez	A1, A4, A6, A7, A9, A11, A15, A18, A20, A23, A24, A30
6) Substitua na fórmula escrita na questão 3, o diâmetro pelo seu equivalente em relação ao raio e transforme esta fórmula, para que possa escrever outra que permita calcular o comprimento da circunferência	$\frac{c}{2r} = \frac{r}{1}$ $c = 1$ $r = 2r$	A1
	$\frac{c}{d} = \frac{\pi}{1}$ $\frac{c}{2r} = \frac{\pi}{1}$ $C = \pi 2r$	A2, A8, A12, A16
	$\frac{6}{7} \times \frac{28}{x}$ $cx = 2r$	A3
	$\pi = \frac{c}{d}$ $\frac{\pi}{1} = \frac{c}{2r}$ $1c = \pi 2r$	A5
	$\pi = \frac{c}{d} = \frac{c}{2r}$	A10
	$\frac{c}{d} = x$ $\frac{2r}{2r} = C = d2r$	A13, A22
	$\frac{c}{d} = \pi$ $\frac{c}{2r} = \pi$ $\frac{\pi}{1} = \frac{c}{2r}$ $C = \pi 2r$	A17
	$\frac{c}{2r} = \frac{\pi}{1}$ $C = \pi 2r$	A19
	$\frac{\pi}{1} = \frac{c}{2r}$ $C = \pi 2r$	A21
	Não fez	A4, A6, A7, A9, A11, A15, A18, A20, A23, A24, A30

Quadro 17: Atividade para dedução da fórmula do comprimento da circunferência

Fonte: Dados da pesquisa.

O desenvolvimento desta atividade teve duração aproximada de 12 (doze) aulas e iniciou com a proposta experimental de medidas de objetos com a forma circular. Os dados identificados como *informações preliminares* do Quadro 18, foram obtidos a partir das medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro dos objetos manuseados pelos estudantes, ou seja, um copo, uma taça e um rolinho de papel higiênico, de acordo com as orientações do Quadro 18.

Meça o comprimento da circunferência e o diâmetro dos objetos analisados, divida o primeiro pelo segundo e preencha o seguinte quadro:

Objeto	Comprimento da circunferência	Diâmetro	Resultado
Rolo de papel higiênico			
Boca do copo			
Fundo do copo			
Boca da taça			

Quadro 18: Medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro

Fonte: Dados da pesquisa

O mesmo objeto de conhecimento pode ser representado por mais de um registro de representação para responder às questões do Quadro 18, permitindo a análise dos dados, de acordo com o ponto de vista cognitivo defendido por Duval (2010). Para o autor é a conversão que “[...] aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, àquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (DUVAL, 2010, p. 16). Este e demais subsídios da teoria de Duval, embasaram a análise desta atividade que será discutida a seguir.

A estudante A8 realizou todas as operações necessárias para o preenchimento do Quadro 18 e solicitou ajuda à professora para realizar a divisão de 27 por 8,5, disponível na Figura 8.

$$\begin{array}{r}
 270 \overline{) 85} \\
 \underline{255} \\
 150 \\
 \underline{145} \\
 50 \\
 \underline{48} \\
 20 \\
 \underline{19} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 10
 \end{array}$$

Figura 8: Resposta sujeito A8.

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale lembrar que os léxicos utilizados para a designação das operações de divisão entre as medidas formam léxicos sistemáticos. Os léxicos podem ser representados por signos, símbolos ou palavras para cumprir as diferentes operações de designação relativas à função referencial, isto é, de designação pura, de categorização simples, de determinação e de

descrição. No caso da designação das relações solicitadas os números que caracterizam os léxicos sistemáticos são os únicos a serem utilizados.

Isso significa que existem diferentes léxicos, mas nem sempre eles podem ser utilizados para as diferentes operações de designação.

No caso da designação da operação de divisão entre as medidas solicitadas foram utilizados os léxicos sistemáticos que são constituídos segundo regras e de acordo com a língua natural para as argumentações.

A regra que estabelece o sistema de numeração decimal segue uma forma de organização decimal e posicional, que se estende para os números não inteiros, representados por números decimais. Esta formação é possível, a partir dos objetos elementares que correspondem os algarismos, e que são representados por símbolos arbitrários. A composição destes símbolos, que se dá de acordo com as regras do sistema de numeração decimal, dá origem aos objetos complexos, que compreendem o número propriamente dito.

Para a representação dos números não inteiros é preciso lançar mão de símbolos sincategoremáticos que não designam nada por si só, como por exemplo as vírgulas para separar a parte decimal da parte inteira.

A utilização desse tipo de símbolo causou dúvidas para a estudante A8 e, por essa razão ela necessitou de uma interação com a professora que ocorreu por meio do seguinte diálogo:

A8: Professora, me tira uma dúvida? Quando o número não é meio...

Professora: Quando ele é inteiro?

A8: Isso, aí eu coloco um zero na frente, e quando ele é com vírgula aí não precisa? (informação verbal)¹⁹

Essa dúvida colocou em cena a estrutura triádica de significância tendo por referência um objeto de conhecimento. Essa estrutura pode ser visualizada na Figura 9:

¹⁹ Dados da Pesquisa.



Figura 9: Estrutura diádica e triádica da significância
 Fonte: Duval (2009, p. 85, adaptado)

Nela se apresenta o significante ligado a um significado tendo a significação atribuída pelo sujeito. A estudante ficou confusa ao ter que dividir um número inteiro 27 por um número decimal 8,5. Para contornar essa dificuldade ela precisou multiplicar os dois valores por 10 para dividir dois números inteiros. É a presença desse símbolo sincategorimático que foi responsável pela dificuldade, pelo fato de não atribuição de significação pelo sujeito no momento da divisão. A multiplicação por dez resolve a dificuldade.

Essa multiplicação por dez faz entrar em cena outro tipo de conhecimento, isto é, a transformação de centímetros em milímetros, visto que ao multiplicar por dez acontece a transformação das unidades de medida: um centímetro equivale a 10 milímetros. Isso vai exigir uma significação atribuída pelo sujeito para a realização dessa transformação. Não há mudança de referência, pois 27 cm e 270 mm tem por referência o mesmo objeto, assim como 8,5 cm e 85 mm.

Por causa dessa dificuldade causada pelo léxico sincategorimático a professora teve que intervir e isso ocorreu da seguinte maneira:

Professora: Lembra quando eu expliquei pra vocês quando eu multiplico um número por 10, 100 ou 1000? Então, aqui (dividendo) ele tem uma casa decimal e aqui (divisor) também. Se você vai multiplicar por 10 você traz a vírgula pra cá (dividendo) e pra cá (divisor) e elimina as vírgulas. Já aqui (divisor = 8,5) tem uma casa decimal e aqui (dividendo = 27) nenhuma. Então, para tirar a casa decimal desse número (divisor) você vai multiplicar por 10, se você multiplicou esse número (divisor) por 10, esse também (dividendo) tem que multiplicar por 10, então você acrescenta o zero e fica 270 porque 27×10 é 270. (informação verbal)²⁰

²⁰ Dados da pesquisa.

Pode ser que tenha ocorrido “[...] uma automatização na utilização destes caracteres para representar números pertencentes a conjuntos numéricos diferentes” como alerta Duval (2004), embasado em (Shiffrin & Schneider, 1977, p. 132-133).

Este receio está fundamentado na conclusão da estudante A8 ao dizer: “Ah entendi. Então digamos que é só mesmo acrescentar daí o zero né?” (informação verbal)²¹

A análise apresentada ressalta a face oculta da matemática que pode ser levada em conta no ensino. A face oculta “[...] corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. [...] Ela se manifesta indiretamente, por meio de bloqueios ou erros recorrentes [...]” (DUVAL, FREITAS e REZENDE, 2013, p. 17 e 18).

Outra regra que entra em jogo na realização da operação solicitada pela professora é lidar com o algoritmo da divisão que, de forma arbitrária, coloca os elementos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto) em determinadas posições. O algoritmo da divisão compreende um símbolo sincategoremático que é a chave da operação. Essa chave não tem função por si só a não ser no algoritmo para separar os elementos acima mencionados. Esse algoritmo acaba por representar um léxico sistemático que funciona de acordo com suas regras e cumpre com a função de designar a operação que está sendo realizada.

Em relação ao número π , a professora teve como intenção que a identificação deste número irracional acontecesse de maneira experimental. Isto é, realizando a divisão da medida da circunferência pela medida do diâmetro de diferentes objetos com forma circular. A estudante A12 apresentou uma produção, disponível na Figura 10, revelando de que maneira ela designou essa relação que culmina em π . Na realidade a estudante utilizou o ponto de multiplicação, mas está falando de uma divisão. Ou o segundo ponto não aparece no momento do *scanner* ou ela não apertou o lápis suficientemente para indicar o símbolo da divisão “:”. Mas sabe-se que ela está se referindo a uma divisão, pois no item 3 ela representa a mesma divisão de uma outra forma: $\frac{C}{d} = \pi$.

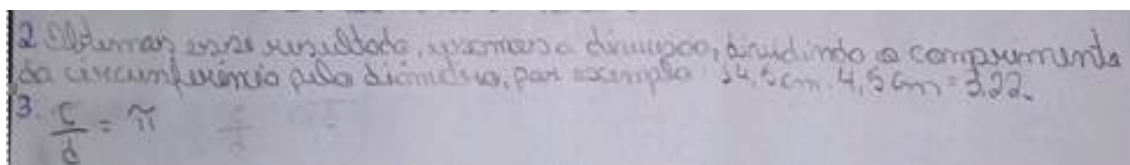


Figura 10: Resposta do sujeito A12 para a questão 2 e 3 da atividade CC
Fonte: dados da pesquisa

²¹ Dados da pesquisa.

A estudante registrou a expressão $\frac{C}{d}$ após a utilização, pela professora, das fórmulas para obtenção das áreas do retângulo e perímetro. Esse procedimento serviu de exemplo para ela generalizar para a fórmula que permite a obtenção do valor π . O procedimento da professora permitiu que a estudante visualizasse que uma relação entre medidas pode ser expressa mesmo que essas medidas não sejam conhecidas e possam ser designadas por léxicos associativos, no caso, por letras que representam as medidas do comprimento da circunferência “C” e do diâmetro da circunferência “d”. A fala de A12 registra essa forma de designação “Dá pra fazer assim, que é a mesma coisa que a divisão ou assim né? Não. Dá pra fazer assim, que é a divisão?” (informação verbal)²².

A análise desse dado empírico revela que entra em cena a operação cognitiva de conversão e a função discursiva referencial de designação de objetos, levando a estudante a representar em linguagem formal a operação de divisão.

A utilização de um símbolo sincategorimático representado pela vírgula dos números decimais presentes na operação de divisão evidencia a operação de descrição (uma das operações cognitivas da função referencial de designação dos objetos) que entra em cena para a designação dos objetos matemáticos. Isso porque os números resultantes das medições precisam ser representados com símbolos que não são arbitrários, isto é, precisam utilizar os mesmos Algarismos que representam os números inteiros, mas precisam de um símbolo sincategorimático para a representação da parte não inteira da medição.

Foi identificada também a operação cognitiva de determinação, (outra operação da função discursiva referencial de designação de objetos) pela presença de artigos definidos nas sentenças em língua natural utilizadas pelo estudante para explicar o que fez e como fez o exercício: “...*usamos a divisão, dividindo o comprimento...*”. Outra operação identificada foi a operação cognitiva de categorização simples (mais uma operação cognitiva da função discursiva referencial de designação de objetos) pela presença de substantivos, adjetivos ou verbos presentes nas sentenças em língua natural escritas pelo estudante para explicar seu raciocínio ou sua forma de resolver o problema: “... *usamos a divisão, dividindo o comprimento da circunferência pelo diâmetro, ...*”

Demais funções do discurso foram identificadas e puderam ser evidenciadas de modo a apontar a presença dos subsídios teóricos de Duval em atividades de Modelagem Matemática em uma de suas etapas, em específico, àquela em que a estudante se defronta com o objeto matemático para dar conta da solução do problema. Dentre elas ressaltou-se a função

²² Dados da pesquisa.

apofântica de enunciado completo e suas operações cognitivas de predicação e ato ilocutório. É importante destacar a manifestação dessa função e suas operações cognitivas pela sua vinculação com o diálogo que se travou entre professor e estudante. Esse diálogo é que permitiu à professora, a identificação das compreensões que os estudantes tinham dos objetos matemáticos e das significações por eles atribuídas a esses objetos. É o caso, por exemplo, em que a estudante A12 atribuiu ao π , o resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e permitiu à professora a identificação do valor lógico de verdade e epistêmico de certeza ao enunciado apresentado pelo estudante. É identificado, ao mesmo tempo o valor social do enunciado por constituir uma resposta à pergunta feita pelo professor ao responder seu questionamento.

A interação entre professora e estudante e a relação estabelecida entre esta interação e os registros apresentados permitem saber o que a estudante sabe e o que ela não sabe, para que seja possível fazer uma análise do ponto de vista cognitivo e compreender melhor o processo de aprendizagem. A Modelagem Matemática, é uma metodologia de ensino que favorece a avaliação de como se dá o conhecimento matemático, porque tem como princípio a valorização do diálogo. Neste sentido, o professor precisa assumir uma postura de instigar o estudante a pensar e fazê-lo comunicar seu pensamento, porque

A tarefa coerente do educador que pensa certo é, exercendo como ser humano a irrecusável prática de entender, desafiar o educando com quem se comunica e a quem comunica, produzir sua compreensão do que vem sendo comunicado. Não há inelegibilidade que não seja comunicação e intercomunicação e que não se funde na dialogicidade. O pensar certo por isso é dialógico e não polêmico (FREIRE, 2017a, p. 39).

Determinados aspectos de teorias cognitivistas podem não encontrar espaço numa proposta de ensino que não seja dialógica e, no caso desta investigação, a Modelagem Matemática, na perspectiva adotada, dá condições para que a teoria de Duval seja amplamente explorada.

Sendo assim, foi possível também identificar inconsistências e fragilidades no discurso da estudante A12 em relação ao objeto de conhecimento. Como no caso que ela representou a operação de divisão com uma notação errada: “... $14,5 \text{ cm} : 4,5 \text{ cm} = 3,22$ ” para explicar com o obteve o valor de π . A estudante deveria utilizar o símbolo da divisão, mas utilizou o símbolo da multiplicação.

Esse erro pode ser oriundo da alteração dos sinais utilizados para representar a divisão ao longo da escolaridade, como pode ser observado no Quadro 19. Além do mais o ponto na multiplicação também alterna para x ou * o que também causa confusão.

Símbolo	Algumas situações
$\div$	No início da escolaridade, normalmente durante os anos iniciais do ensino fundamental, quando a operação aparece na forma <i>deitada</i> , assim como em expressões numéricas.
:	Normalmente a partir dos anos finais do ensino fundamental, quando a operação aparece na forma <i>deitada</i> e nas expressões numéricas.
	Em qualquer fase da escolaridade, para <i>armar</i> o algoritmo da operação.
/	Em qualquer fase da escolaridade, para escrever frações, expressões algébricas, equações, funções, ...

Quadro 19: Símbolos usados para operação de divisão
Fonte: dados da pesquisa.

Por vezes, no diálogo que se travou entre professora e estudante, isto é, quando a estudante tenta responder às questionamentos da professora, foi possível perceber que a estudante compreendeu a relação matemática que se estabeleceu, mas não soube expressá-la. Por exemplo, as tentativas de A12 relativas à relação entre diâmetro e raio por meio de uma expressão matemática. Após a solicitação da professora para que a estudante pensasse sobre a questão, foram apresentados os registros disponíveis na Figura 11.

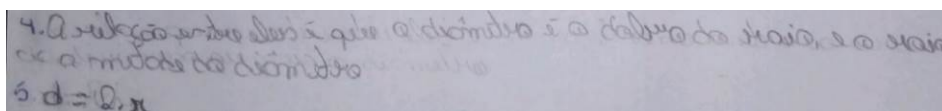


Figura 11: Resposta do sujeito A12 para as perguntas 4 e 5 da atividade CC.
Fonte: dados da pesquisa.

A operação cognitiva de conversão revelada na designação da relação tanto em língua natural como em língua formal permitiu à professora identificar a resposta ainda incompleta da estudante que designou unilateralmente: $d = 2r$, mas não designou que $r = d/2$.

Ainda, em relação à função referencial de designação de objetos manifestou-se a operação cognitiva de descrição da relação matemática identificada com a utilização de sinais específicos e próprios. O sinal de igualdade (=) e o ponto (.) representando a multiplicação, que como signos não designaram por si só e, ao mesmo tempo permitiram atribuição de sentido às letras utilizadas para representar os valores numéricos representativos das medidas do diâmetro e raio da circunferência.

Igualmente a operação cognitiva de determinação (também da função referencial de designação de objetos) pôde ser identificada na manifestação do raciocínio da estudante expresso por meio da língua natural “[...] o diâmetro é o dobro do raio, e o raio é a metade do diâmetro” (informação verbal)²³. Foi identificada também a operação de categorização na proposição “[...] o **diâmetro** é o dobro do **raio**, e o **raio** é a metade do **diâmetro**.” (informação verbal)²⁴

O valor epistêmico de verdade da sentença matemática apresentada por A12 permitiu à professora acompanhar o raciocínio da estudante relativo às relações por ela estabelecidas entre as medidas do diâmetro e raio da circunferência. E o valor social também foi uma evidência na resposta apresentada pela estudante, uma vez que respondeu ao questionamento da professora, possibilitada pelo ato ilocutório, próprio da função apofântica de um enunciado completo.

Ainda foi possível à professora, no diálogo que se travou, a identificação da atribuição de significação pelo sujeito aprendente em relação à tríade: significante (as sentenças em linguagem formal), significação (pelo sujeito aprendente) e significado (o número π) tendo por referência um objeto de conhecimento. O diálogo que se travou tornou explícita essa tríade: a professora questionou sobre o que deve ser colocado do lugar do d . O sujeito, após um breve silêncio respondeu “ $2r$ ” e fez o seguinte registro disponível na Figura 12.

²³ Dados da pesquisa.

²⁴ Dados da pesquisa.

$$6. \frac{C}{d} = \frac{\pi}{1}$$

$$\frac{C}{2r} = \frac{\pi}{1}$$

$$C = 2r\pi$$

Figura 12: Resposta do sujeito A12 para a questão 6 da atividade CC.

Fonte : Dados da pesquisa.

Esse diálogo revelou a presença da função metadiscursiva de tratamento para a transformação da medida do diâmetro com utilização da medida do raio. Essa transformação ocorreu no interior do mesmo sistema semiótico de representação: a linguagem algébrica.

Ainda se pôde identificar a manifestação da operação cognitiva de descrição, própria da função referencial de designação de objetos, na utilização do traço fracionário e do sinal de igualdade, símbolos sincategoremáticos, que deram ao número e às letras, condição de serem entendidos como elementos da equação.

Identificou-se também a manifestação da função de expansão discursiva por meio da operação cognitiva de substituição no momento em que a letra d (que representa a medida do diâmetro) foi substituída pelo termo $2r$ (que representa o dobro do raio).

Ainda sobre o esclarecimento da obtenção da fórmula do número π , será discutido a seguir, a interação da professora com o sujeito A5. Vale mencionar que, este sujeito foi atendido individualmente, durante aproximadamente dez minutos, após o encerramento da aula.

A conversão congruente observada nos registos apresentados na Figura 13 foi feita com facilidade, já que as respostas aos questionamentos da professora foram automáticas.

2 Que o comprimento dividido pelo diâmetro que é

$$3. \pi = C \div d \quad \pi = \frac{C}{d}$$

Figura 13: Resposta do sujeito A5 para as questões 2 e 3 da atividade CC

Fonte: Dados da pesquisa.

Porém, no tratamento observado na resposta da questão 3, a estudante manifestou dúvida quanto à sugestão de substituir o sinal de divisão ($\div$) por outro signo. Após alguns argumentos da professora, instigando a estudante a se lembrar da notação adequada para

representar a divisão em uma equação, houve a necessidade de revelar que a divisão deveria ser substituída por uma fração, para que ela conseguisse fazer o registro correto.

Logo, percebeu-se que a regra que convencionou a escrita de uma divisão na forma de fração combinada com os símbolos sincategoremáticos, sinal de igualdade (=) e traço fracionário (—), que dão aos símbolos arbitrários, representados pelas letras, condição de serem entendidos como equação e de fazer cumprir a operação de descrição da função referencial de designação, não é de fato, de fácil compreensão.

A conversão congruente apresentada nos registros apresentados na Figura 14 foi realizada com facilidade, no entanto, para que se pudesse estabelecer uma relação entre o diâmetro e o raio antes destes registros, houve muita dificuldade.

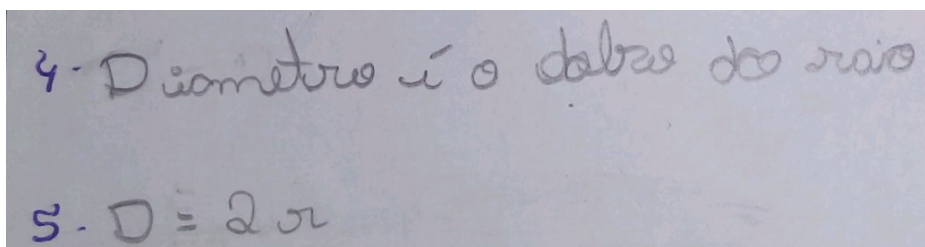


Figura 14: Resposta do sujeito A5 para as questões 4 e 5 da atividade CC
Fonte: Dados da pesquisa.

Na interação da professora com o sujeito A5, houve a necessidade de utilização de material concreto para demonstrar o diâmetro e o raio. A identificação de cada um deles era feita com facilidade, já que o sujeito A5 mostrava na base do cilindro, os dois. No entanto, ao ser questionada sobre a relação entre os dois, por diversas vezes, a estudante demonstrou dificuldade, como pode ser observado no trecho da interação a seguir.

Professora: ... então o que o diâmetro é do raio? Em termo de medida?

Sujeito A5: Metade.

Professora: O diâmetro é a metade do raio? Isso aqui (diâmetro) é metade disso (raio)?

Sujeito A5: Acho que é.

Professora: Metade [...], olha aqui ó.

Sujeito A5: Não é o ele vem até o meio.

Professora: Tudo isso aqui é o diâmetro, né? E o raio é isso aqui. Então o diâmetro é o que do raio?

Sujeito A5: Silêncio

Professora: Eu tenho é....40 anos, qual é a metade da minha idade?

Sujeito A5: 20

Professora: 20, tá. Então o diâmetro é 30, qual é o raio?

Sujeito A5: 15

Professora: Então o que o diâmetro é do raio?

Sujeito A5: É parte, é tipo, aí meu Deus.... Riso demonstrando exaustão.

Professora: Quantos raios cabem no diâmetro?

Sujeito A5: Dois?

Professora: Dois, quando você quer multiplicar um número por dois, você diz que ele é o quê?

Sujeito A5: Vezes

Professora: Vezes dois, mas quando eu multiplico por três, é o triplo, quando eu multiplico por dois é o quê?

Sujeito A5: Por dois? O dobro?

Professora: O dobro. Então o que o diâmetro é do raio?

Sujeito A5: O dobro

Professora: O dobro, então você vai escrever isso, você vai dizer que o diâmetro que é d, é igual?

Sujeito A5: O dobro? (informação verbal)²⁵

Ainda durante a intervenção com o sujeito A5, a professora orientou que a equação da questão número 3 fosse transcrita para a questão 6 e a seguir, que o d (diâmetro) fosse substituído pelo que constava em sua fórmula na questão anterior, ou seja, 2r. No primeiro momento, a estudante transferiu somente o segundo membro da equação e acrescentou o primeiro membro após orientação. Para que houvesse uma maior organização da equação para o cálculo, a professora sugeriu que fosse acrescentado denominador no primeiro membro, questionando se o sujeito percebia a falta de alguma coisa. O denominador foi acrescentado imediatamente. Assim que a professora propôs a aplicação da propriedade fundamental das proporções, a primeira dúvida da estudante era para definir se no primeiro membro ficaria c ou 1c, receando que houvesse diferença entre eles. Após orientação da professora, informando que c é igual a 1c, o sujeito optou por 1c. Para o sujeito conseguir multiplicar os extremos da proporção, para obter o segundo membro da equação, houve a necessidade de a professora exemplificar com a transformação de $\frac{b}{c} = a$, por $b = ac$.

Logo após a exemplificação, o sujeito A5 questionou “Ah, então no caso eu vou multiplicar o pi com o 2r?” (informação verbal)²⁶

Com a resposta afirmativa da professora, a estudante concluiu o registro apresentado na Figura 15.

$$6. \pi = \frac{c}{D} \quad \frac{\pi}{1} = \frac{c}{2r} \quad 1c = \pi \cdot 2r$$

Figura 15: Resposta do sujeito A5 para a questão 6 da atividade CC
Fonte: Dados da pesquisa.

²⁵ Dados da pesquisa.

²⁶ Dados da pesquisa.

A atividade cognitiva de tratamento observada nos registros anteriores demonstrou o cumprimento da operação de descrição, pela necessidade de utilização do sinal de igualdade (=) e do traço fracionário ($\frac{\quad}{\quad}$) que, combinados com a regra da propriedade fundamental das proporções, deram tanto às letras como aos números o status de elementos de uma equação.

Houve o cumprimento da função de expansão discursiva por meio da operação de substituição, já que o d (diâmetro) foi substituído por $2r$ (o dobro do raio).

O objeto foi designado também por meio da operação de predicação da função apofântica, dando ao enunciado um valor lógico de verdade e epistêmico de certeza.

Concluídas as considerações sobre análise desta atividade, serão discutidas a seguir, a análise da atividade sobre a dedução da fórmula da área do círculo.

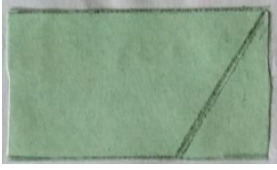
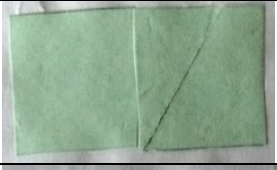
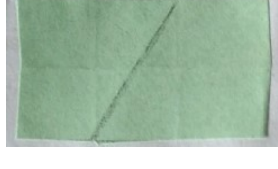
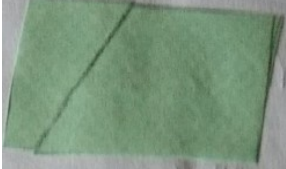
6.2 DEDUÇÃO DA FÓRMULA DA ÁREA DO CÍRCULO

As respostas para as questões da atividade para dedução da fórmula da área do círculo, identificada como AC, foram organizadas nos quadros a seguir (do Quadro 20 ao Quadro 36).

1) Fórmula para cálculo da área do quadrado e retângulo, de acordo com estudos anteriores.		
Quadrado	Retângulo	Sujeitos
$4 + 1 = 41$	$B + B + H + H = 20$	A1, A16
$1 \cdot 1$	$b \cdot h$	A2, A8
$1 \times 1 = 16$	$h + b = 18$	A4, A10, A12, A13, A15, A17, A19, A20, A21, A22, A23, A29
$1 \cdot 1 = 16$	$b \cdot h$	A5, A7, A11
$1 \cdot 16$	Não fez	A9
$4 \times 1 = 41$	$1 + 1 \quad h + h = 20$	A14
$1 \cdot 1$	SR	A25, A26
SR		A3, A6, A18, A24, A28, A30

Quadro 20 - Respostas questão 1 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

2)Desconstrução do paralelogramo para construção do retângulo.				SR
	A1, A12, A15		A5, A6, A8, A10, A14, A17, A18, A19, A20, A24, A30	A25 A26 A28
	A2		A9	
	A3		A13	
	A4, A7, A11, A21, A22, A23, A29		A16	

Quadro 21: Respostas questão 2 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

3)Comparação da área do paralelogramo desconstruído com a área do retângulo construído com as peças do paralelogramo.	
RESPOSTAS	SUJEITOS
• A mesma área, mas em posições diferentes.	A1, A16
• Áreas iguais	A2, A5, A8, A12, A13, A14, A15, A17, A20, A21, A23, A30
• Uma é maior que a outra porque o paralelogramo tem uma ponta e o retângulo não tem.	A4, A7, A11
• O paralelogramo é maior que o retângulo	A6, A24, A25, A26
• A base é maior que a altura do paralelogramo	A10
• São quase iguais	A22
• SR	A3, A9, A18, A28

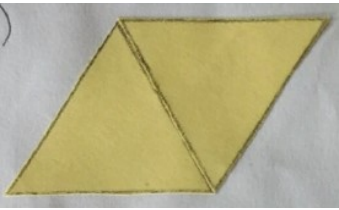
Quadro 22: Respostas questão 3 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

4)Dedução da fórmula da área do paralelogramo a partir dos procedimentos da questão anterior.	
RESPOSTAS	SUJEITOS
• $b \cdot h$	A1, A2, A4, A5, A7, A8 A10, A11, A13, A15, A16, A17, A18, A19
• $b \cdot h = 18$	A14
• $B + = h +$	A20
• Lado vezes lado	A21
• $b \cdot b$	A22
• $b \cdot h = 2$	A26
• SR	A3, A6, A9, A12, A23, A24, A25, A28, A29, A30

Quadro 23: Respostas questão 4 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

5) Construção de um paralelogramo a partir de dois triângulos equiláteros.		SR
	A1, A3, A4, A7, A8, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18, A20, A23, A29	A25 A26
	A2, A5, A6, A9, A17, A19, A21, A22, A24, A28, A30	

Quadro 24: Respostas questão 5 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

6) Relação entre a área do paralelogramo e a área do triângulo.		
RESPOSTAS	SUJEITOS	SR
• O triângulo e o paralelogramo são mais ou menos iguais, só que o triângulo é a metade do paralelogramo.	A1	A3 A6 A12 A18 A25 A26 A29
• A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo	A2, A10, A13, A15, A16, A17	
• Com dois triângulos foi formado um paralelogramo	A4, A5, A7, A11	
• Dobra de tamanho	A6	
• A área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo	A8, A14, A19	
• São iguais	A20	
• A área do triângulo é o dobro do paralelogramo	A21	
• Uma parte do triângulo é a metade do paralelogramo	A22	
• O tamanho dobra em relação ao triângulo e o paralelogramo	A24	
• Um triângulo juntado com outro, fica um paralelogramo.	A30	

Quadro 25: Respostas questão 6 da atividade AC.

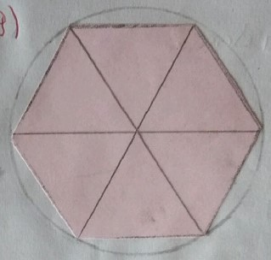
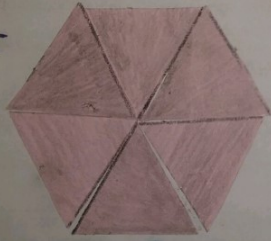
Fonte: dados da pesquisa.

7) Dedução da fórmula da área do triângulo a partir da área do paralelogramo.	
RESPOSTA	SUJEITOS
$(b.h):2$	A1, A8, A14
$\frac{b \cdot h}{2}$	A2, A13, A17
$b.h:2$	A19
Triângulo A = A paralelogramo	A29
SR	A3, A4, A5, A6, A7, A9, A10, A12, A15, A18, A20, A22, A23, A24, A25, A26, A28,

Quadro 26: Respostas questão 7 da atividade AC.

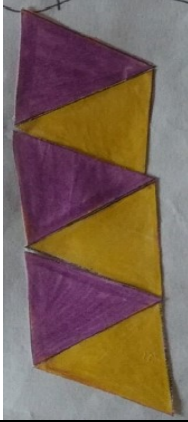
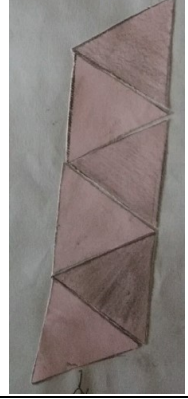
Fonte: dados da pesquisa.

8) e 9) Divisão dos hexágonos em seis triângulos equiláteros, traçando segmentos que unem seus vértices opostos e inscreva-o na circunferência.		
RESPOSTAS	SUJEITOS	SR

	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A29, A30	A26 A27
	A28	

Quadro 27: Respostas questão 8 e 9 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

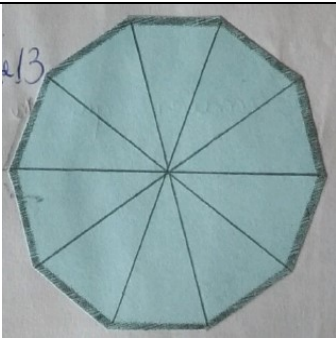
10) Divisão de um hexágono em seis triângulos equiláteros, por meio de recorte e construção de um paralelogramo com os triângulos obtidos.	
	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A22, A23, A24, A28, A29, A30
	A18, A21
	A15
	A20
SR	A25, A26

Quadro 28: Respostas questão 10 da atividade AC.
 Fonte: dados da pesquisa.

11) Comparação da área do paralelogramo construído com a área do círculo formado pela circunferência circunscrita no hexágono da questão 9.		
RESPOSTAS	SUJEITOS	SR
• É a metade	A3	A1
• São iguais	A4, A5, A7, A11, A12, A13, A15, A17, A21, A22, A23	A2
• É maior que o círculo	A6, A20	A8
• A área do decágono ficou maior por acréscimo de triângulo	A10	A9
• A área do círculo é um pouco maior que a área do paralelogramo	A14	A16
• Vai cobrindo todo o espaço	A19	A18
• É a mesma quantidade de peças, porém a área parece maior.	A24	A30
• A área do paralelogramo é maior	A25, A26	
• $Paral A > A \text{ Círcul}$	A29	

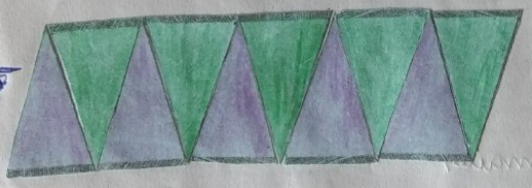
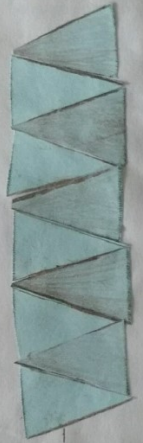
Quadro 29: Respostas questão 11 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

12) e 13) Divisão dos decágonos em dez triângulos isósceles, traçando segmentos que unem seus vértices opostos e inscrição na circunferência		
		
A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A29, A30	A6, A25, A26, A28	A17

Quadro 30: Respostas questão 12 e 13 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

14) Divisão de um decágono em dez triângulos isósceles por meio de recorte e construção de um paralelogramo com os triângulos obtidos.	
	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A22, A23, A24, A25, A26, A28, A29, A30
	A20
	A21

Quadro 31: Respostas questão 14 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

15) Comparação da área do paralelogramo construído com a área do círculo formado pela circunferência circunscrita no decágono da questão 13.	
RESPOSTAS	SUJEITOS
• Pouca coisa maior	A1, A16
• b.h Sim elas são iguais	A5, A7
• A área o círculo é um pouco maior que a área o paralelogramo	A6, A8, A14
• A área do círculo é menor que a área do decágono	A10
• São iguais, mas com formatos diferentes	A15, A17
• A área do círculo é menor do que a área do paralelogramo	A20, A25, A26
• São iguais	A21
• Do mesmo tamanho, porém parece maior	A 24
• decág $A > A$ círculo	A29
• SR	A2, A3, A4, A9, A11, A12, A13, A18, A19, A22, A23, A28, A30

Quadro 32: Respostas questão 15 da atividade AC.

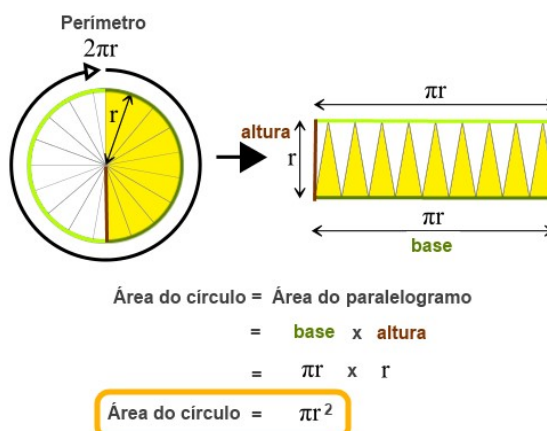
Fonte: dados da pesquisa.

16)Análise das questões 11 e 15 para definir se é verdade que, quanto maior o número de lados do polígono regular inscrito na circunferência, maior a área do círculo coberta pelo polígono.	
SIM	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A29, A30
NÃO	
SR	A9, A18, A28

Quadro 33: Respostas questão 16 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

17) Considerando a afirmação anterior verdadeira pela análise das desconstruções, construções e pela discussão da situação a seguir:



Indicar as medidas da base e altura do paralelogramo a partir da fórmula do comprimento da circunferência.

RESPOSTAS		SUJEITOS
BASE	$1\pi r$	A2, A6, A8, A10, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A20, A22
	2.3π	A25, A26
	SR	A1, A3, A4, A5, A7, A9, A11, A18, A21, A23, A24, A28, A29, A30
ALTURA	r	A2, A6, A8, A10, A13, A14, A15, A16, A17, A19, A20, A22, A25, A26
	SR	A1, A3, A4, A5, A7, A9, A11, A18, A21, A23, A24, A28, A29, A30

Quadro 34: Respostas questão 17 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

RESPOSTAS		SUJEITO
• $1\pi r$		A2, A8, A10, A15, A16, A17, A19, A22
• $1\pi r$		A14, A20
• $A = B, H = 2/2.r = 2 = 2$		A25, A26
• SR		A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A11, A12, A13, A18, A21, A23, A24, A28, A29, A30

Quadro 35: Respostas questão 18 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

RESPOSTAS		SUJEITOS
• $1\pi r$		A2, A6, A20
• $1\pi r$		A13
• SR		A1, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A21, A22, A23, A24, A25, A26, A28, A29, A30

Quadro 36: Respostas questão 19 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa.

O desenvolvimento desta atividade teve duração aproximada de 12 (doze) aulas com o objetivo principal da dedução da fórmula da área do círculo a partir da dedução da fórmula da área do paralelogramo e após a retomada da fórmula das áreas do quadrado, retângulo e triângulo. Optou-se por um trabalho desta natureza, uma vez que acontecia paralelamente, o

trabalho de pesquisa exploratória liderado pela equipe da Oficina de Reutilização do Lixo. A equipe se empenhava em pesquisar os tutoriais na internet que orientam sobre as possibilidades de confecção de peças artesanais com o rolinho de papel higiênico e se dedicava na confecção propriamente dita, fazendo seus experimentos para que fossem compartilhados posteriormente com os demais estudantes. Como este objeto tem forma cilíndrica, fazia-se necessário o cálculo da área de sua base para que fosse possível o cálculo do volume de todo material utilizado.

Ainda que esta atividade estivesse estreitamente vinculada à resolução do problema e ainda não houvesse dados suficientes nesta ocasião para resolvê-lo, tratava-se de conceitos matemáticos fundamentais para esta finalidade. Neste sentido, considerou-se, sobretudo, o que defende Burak (2010a) quando se refere às etapas da Modelagem Matemática, ao afirmar que “Cada uma das etapas [...] pode sofrer alterações, portanto não se trata de etapas rígidas” (p. 19).

Isso significa que, paralelamente às atividades relativas à pesquisa exploratória, acontecia também atividades relativas à etapa da resolução do(s) problema(s), uma vez que considerava-se importante explorar a matemática do rolinho de papel higiênico, que auxiliaria no cálculo do volume do lixo que deixou de ser descartado.

Foi necessário que a professora tivesse autonomia para conduzir seu trabalho respeitando as demandas que a Modelagem Matemática estabeleceu e que foram definidas de forma muito particular de acordo com o tema escolhido. Portanto o autor (2010a) ressalta também que

Pode acontecer que para a resolução de um problema, o conteúdo necessário à sua resolução, ainda não tenha sido trabalhado pelo aluno, então é um momento importante para que o professor, na condição de mediador favoreça ao estudante a construção desse conhecimento. [...] É um trabalho importante do professor seja no trabalho de formação dos conceitos, orientando a busca de conteúdo no livro texto, seja criando alternativas que permitam ao estudante buscar uma solução para o problema. Muitas vezes, pode-se valer das situações empíricas para os primeiros resultados e, as primeiras aproximações e mais tarde, ou mesmo, já na sequência, desenvolver o conteúdo de forma analítica, com alguma formalização matemática (BURAK, 2010a p. 22).

Optou-se neste caso, por instigar a construção do conceito matemático que define a fórmula da área do círculo por meio de sua dedução, uma vez que se considerou ser de fundamental importância compreender o significado da fórmula.

Este instrumento de coleta de dados permitiu a obtenção de mais de um registro para o mesmo objeto matemático. Desta forma, foi possível explorar melhor a análise desses dados de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Serão analisados em seguida, os registros dos estudantes que interagiram com a professora, já que os áudios destas interações foram registrados e transcritos.

O sujeito A5 solicitou ajuda da professora, mas este trecho da gravação ficou inaudível. No entanto, pelo desenvolvimento da conversa, supôs-se que tenha questionado alguma relação entre a área do quadrado e do paralelogramo, como pode ser observado na transcrição a seguir.

Sujeito A5: Trecho inaudível.

Professora: Aqui é a área do quadrado (nome do sujeito), não é retângulo. A área do retângulo é essa aqui.

Sujeito A5: Aí no caso eu faço duas vezes esse?

Professora: Porque duas vezes? Você precisou de ... (Interrompida por um questionamento do Sujeito A13) ... só um pouquinho. Você precisou de dois desses para montar esse aqui?

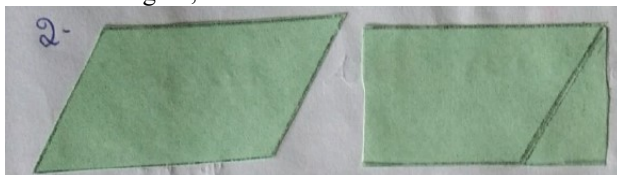
Sujeito A5: Não.

Professora: Então, ... O que você tinha me dito que elas são antes?

Sujeito A5: Iguais. (informação verbal)²⁷

No momento da interação, a professora usava como recurso a construção do retângulo, que a estudante havia feito a partir do paralelogramo, de acordo com a orientação e a figura disponíveis no Quadro 37.

2) Cole, no verso da folha, um dos paralelogramos que você recebeu. Divida o outro paralelogramo em peças que possam ser transformadas em um retângulo, monte-o e cole-o no verso folha.



Quadro 37: Resposta do sujeito A5 para a questão 2 da atividade AC.

Fonte: Dados da pesquisa.

A dúvida no questionamento “Aí no caso eu faço duas vezes esse?” (informação verbal)²⁸, pode estar relacionada ao fato de a estudante ter trabalhado, a princípio com *dois* paralelogramos, sendo que um deles foi transformado em retângulo.

Por entender que a ela havia demonstrado que tinha compreendido a igualdade das áreas dessas figuras, a professora prosseguiu, de acordo com o que segue.

²⁷ Dados da pesquisa.

²⁸ Dados da pesquisa.

Professora: Então qual é a área do paralelogramo?

Sujeito A5: Silêncio

Professora: Como você pode escrever a fórmula aqui então?

Sujeito A5: Gente, eu não sei!

Professora: Se é igual, como você faz (nome do sujeito).

Sujeito A5: Isso?

Professora: Isso, só isso, perfeito.

Sujeito A5: E eu quebrando minha cabeça. (informação verbal)²⁹

A dificuldade apresentada pela estudante foi uma revelação que demonstrou exatamente o que Duval (2009) defende sobre a complexidade da atividade cognitiva exigida na matemática. De acordo com o autor (2009)

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes (DUVAL, 2009, p. 18).

Porém, foi o exercício de mobilização de três registros de representação, geométrico, linguagem natural e linguagem algébrica, que permitiu a designação do objeto, ou seja, a fórmula da área do paralelogramo.

A partir desta interação, a estudante apresentou os registros disponíveis nas Figuras 16 e 17.

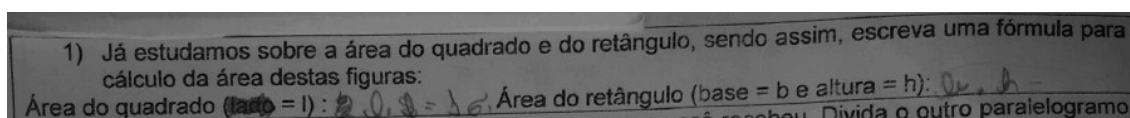


Figura 16: Resposta do sujeito A5 para a questão 1 da atividade AC.

Fonte: Dados da pesquisa.

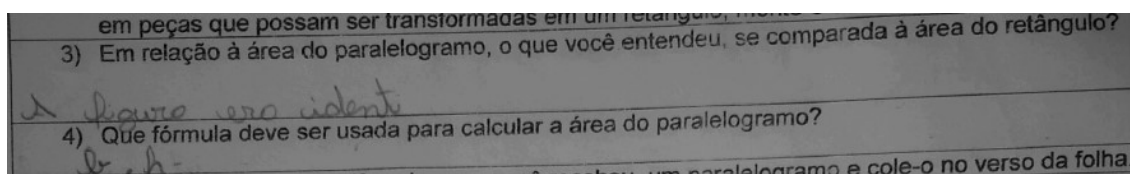


Figura 17: Resposta do sujeito A5 para as questões 3 e 4 da atividade AC.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados revelam, primeiramente, a necessidade da estudante em atribuir precipitadamente, um valor numérico em expressões algébricas ou equações, que é um dos problemas recorrentes observado na aprendizagem da álgebra. Isso pode ser percebido na

²⁹ Dados da pesquisa.

fórmula da área do quadrado, onde, além das rasuras, a estudante registrou $l \cdot l = 16$, ou seja, deu valor numérico para a área (16), o mesmo que foi usado como exemplo na explicação anterior, que se referia a um quadrado de lado igual a 4. Ainda que a professora tivesse insistido para não usar números, somente letras, a estudante não se satisfaz somente com as letras que indicariam a fórmula de cálculo desta área.

O registro *b.h* apresentado por esta estudante demonstrou o cumprimento da operação de descrição, pela utilização do ponto (.) representando a multiplicação e das letras (b e h), representando a base e a altura das figuras, respectivamente. A combinação desses caracteres com a regra que estabelece a formação de uma expressão algébrica, deram tanto às letras como ao ponto, status de elementos da fórmula de cálculo da área do retângulo e do paralelogramo. Neste sentido, ficou cumprida a função discursiva referencial, por meio da operação de descrição.

No entanto Duval (2004) alerta que tanto a língua como o sistema de símbolos, além de designar objetos, devem dizer alguma coisa sobre os objetos que designam, cumprindo a função apofântica, que tem como especificidade o valor lógico, o valor epistêmico e o valor social. O valor lógico de verdade ou falsidade e o epistêmico de certeza, necessidade, verossimilitude, possibilidade ou absurdidade são característicos da operação de predicação da função apofântica. Já o valor social de pergunta, ordem, desejo ou promessa é característico da operação do ato ilocutório da função apofântica. Se a língua e o sistema de signos apenas designassem objetos, ficariam reduzidos a um código apenas.

Neste caso, ao ser questionada sobre a relação estabelecida entre a comparação da área do paralelogramo e do retângulo, a estudante registrou: *A figura era ident* (ao escrever *ident*, entende-se que quis dizer idêntica). A função apofântica foi cumprida neste registro, por meio da operação de predicação, já que possui um valor lógico de verdade e epistêmico de certeza. A função apofântica foi cumprida também por meio da operação do ato ilocutório, já que possui um valor social estabelecido pela resposta dada a uma pergunta.

A estudante, identificada como Sujeito A13, que havia interrompido a explicação anteriormente, foi atendida em seguida requerendo orientação sobre a área do triângulo. A interação se deu da seguinte forma:

Professora: Você entendeu a área do paralelogramo, entendeu que a área do triângulo é metade da área do paralelogramo (nome do sujeito), agora você vai transformar isso aqui, numa fórmula.

Sujeito A13: (Trecho inaudível). É igual à metade.

Professora: Exatamente! Olha, você vai aproveitar essa fórmula e adaptar de acordo com isso aqui que você escreveu. (informação verbal)³⁰

A fala da professora foi baseada nas imagens da Figura 18 e nos registros da Figura 19.

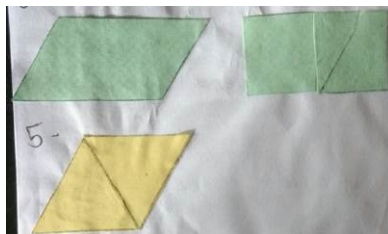


Figura 18: Resposta do sujeito A13 para as perguntas 2 e 5 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

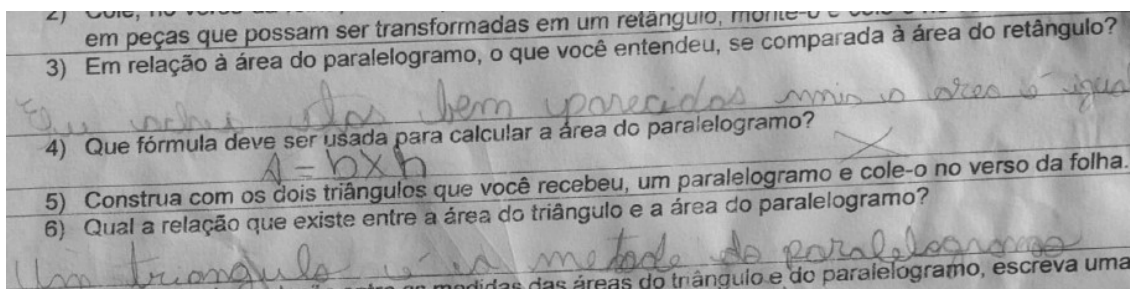


Figura 19: Resposta do sujeito A13 para as questões 3 a 6 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa

A realização da conversão do registro geométrico para o algébrico, sem o auxílio da professora, foi um indicativo de que houve compreensão da estudante e o registro da figura 20, reforçou esta ideia.

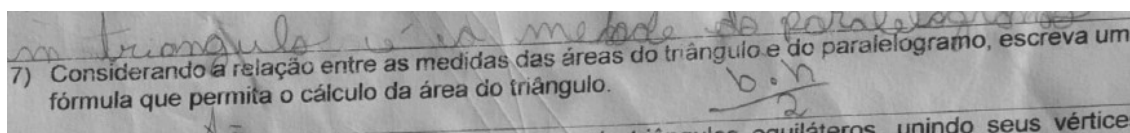


Figura 20: Resposta do sujeito A13 para a questão 7 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, é importante considerar o entendimento de Duval quanto à relação entre figuras geométricas e suas propriedades, ao afirmar que “[...] o primeiro passo na aprendizagem da geometria é a educação ao modo matemático de ver as figuras” (2013, p. 33). Tal entendimento é defendido pelo autor ao discutir sobre as vantagens dos softwares com finalidades pedagógicas, que podem permitir

³⁰ Dados da pesquisa.

[...] não somente construir figuras, mas explorar as transformações de figuras por simples deslocamento de um “objeto” (ponto, segmento, etc.). Eles não somente preenchem uma função heurística, mas permitem uma abordagem “experimental” de relações e de propriedades geométricas (DUVAL, 2013, p. 32).

Ainda que a atividade desenvolvida não tenha promovido a utilização de um software, está de acordo com o entendimento do autor, uma vez que propôs a desconstrução e construção de figuras geométricas vinculadas com a relação que pôde ser estabelecida entre a figura obtida e a fórmula de cálculo da sua área.

Sobre a mesma questão, o Sujeito A2 também demonstrou dúvida e a interação entre ele e a professora, aconteceu da seguinte maneira.

Professora: Dúvida (nome do sujeito)?

Sujeito A2: Não entendi. Ó, se eu pegar (trecho inaudível) a metade do triângulo dá uma metade do paralelogramo (informação verbal)³¹.

Aqui vale ressaltar que a professora pode não ter entendido o equívoco cometido na última afirmação do estudante, já que prosseguiu a conversa de acordo com a próxima transcrição, ou não considerou por ter observado que a resposta da questão 6 estava correta e não condizia com o que ele dizia, conforme registro da Figura 21.

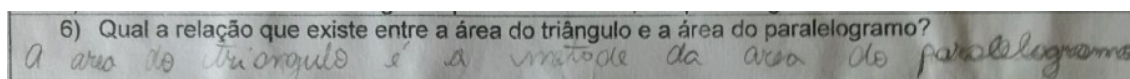


Figura 21: Resposta do sujeito A2 para a questão 6 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

E a interação continuou de acordo com a transcrição abaixo.

Professora: Tá, então como você encontra isso aqui é uma fórmula da área do paralelogramo. Como você escreve a metade dessa fórmula? O que você faz quando você quer a metade (nome do sujeito).

Sujeito A2: Divide.

Professora: Divide por quanto?

Sujeito A2: 2

Professora: Então o que você tem que fazer com isso aqui?

Sujeito A2: Dividir por 2.

Professora: Pronto, só isso. É tão fácil que acaba confundindo. Você vai dividir isso aqui, por 2, você está dividindo 2 por isso aqui.

Sujeito A2: Ah, é ao contrário?

Professora: Sim. (informação verbal)³²

³¹ Dados da pesquisa.

³² Dados da pesquisa.

Apesar de o estudante ter apagado o que havia feito, percebe-se sutilmente, à direita do próximo registro da Figura 22, a divisão de 2 por BH, na forma de fração, conforme seu comentário neste trecho da conversa.

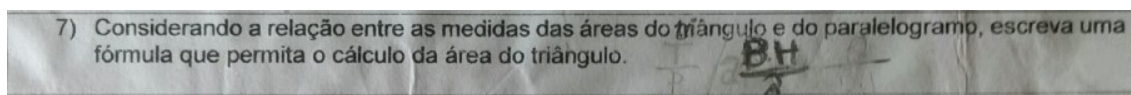


Figura 22: Resposta do sujeito A2 para a questão 7 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

A dúvida deste estudante pode ter se manifestado, uma vez que não houve uma conversão congruente da proposição “*A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo*”, que corresponde à resposta da questão 6, para a resposta da questão 7, ou seja, $\frac{B.H}{2}$. Esta conversão é não congruente porque o termo “*metade*” do primeiro registro está escrito antes da expressão “*área do paralelogramo*”, enquanto no segundo registro, o 2, que representa a metade, está escrito depois de “B.H”, que representa a área do paralelogramo. Neste caso, observa-se que, de acordo com Passoni e Campos (2010), o problema da não congruência existiu por conta de não ter havido “[...] conservação da ordem de apresentação dos dados [...]” (p. 52).

Para Duval (2012b):

Substituir uma expressão ou uma representação por outra, que lhe é referencialmente equivalente, é central na atividade matemática. Diferentemente do funcionamento natural do pensamento, este processo de substituição não se situa na semelhança entre o conteúdo da expressão ou representação dada e o conteúdo da expressão que substituímos para resolver um dado problema. Esta substituição constitui em um percalço. Passa-se de uma frase para uma expressão simbólica, de uma representação gráfica para uma expressão simbólica ou de uma figura a outra que é de toda diferente. Em certos casos, entre os conteúdos a serem substituídos, existe uma correspondência direta e fácil de ser reconhecida. Para caracterizar esta situação cognitiva, falamos de congruência semântica. Mas, na maioria dos casos, não há alguma relação de correspondência direta e os conteúdos parecem ser estranhos ou irreconhecíveis. Neste caso, falamos de não congruência semântica. É a situação cognitiva de toda atividade matemática (p. 97).

Desta forma, a situação vivenciada neste caso, parece estar de acordo em este entendimento.

Há também outro registro que foi apagado, mas dá para ser percebido do lado esquerdo da resposta da questão 7, ou seja, $\frac{T}{P}$, que deve representar a divisão da área do triângulo pela área do paralelogramo, no entanto, como não houve qualquer questionamento sobre este registro, optou-se por não discutir sobre isso.

Os próximos registros, disponíveis na Figura 23, demonstram êxito deste estudante na solução das questões 16, 17 e 18, ainda que a questão 15 não tenha sido resolvida.

15) Compare a área do paralelogramo construído com a área do círculo definido pela circunferência da questão 13 e comente o que você percebeu.

16) Ao analisar o que foi observado nas questões 11 e 15, você concorda que, quanto maior o número de lados do polígono regular desenhado dentro do círculo, maior é a área do círculo que é coberta pelo polígono? (X) Sim () Não

17) Considerando que a fórmula de cálculo do comprimento da circunferência é $2\pi r$, como podem ser representadas as medidas dos lados do paralelogramo construído, ou seja, como podemos indicar a medida da sua base e da sua altura, ao comparar suas dimensões com as dimensões do círculo?
base = $1\pi R$ altura = R

18) Substitua, na fórmula de cálculo de área do paralelogramo, a base e a altura, pelo seu equivalente encontrado na questão anterior. $B.H$ $1\pi R . R$

Figura 23: Resposta do sujeito A2 para as questões 15 a 18 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

A proposta da estratégia utilizada antes da solução das questões mencionadas, ou seja, a desconstrução e construção de figuras, vai ao encontro do que Duval (2012c) defende ao afirmar que, repartir uma figura em subfiguras, pode permitir, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas, por meio da apreensão operatória de figuras. Esta apreensão está “[...] centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações” (DUVAL, 2012c, p. 125).

A modificação que aconteceu neste caso é a mereológica, discutida por Scheifer (2017) no seu estudo ao usar como exemplo, exatamente o que foi proposto em uma das questões da atividade ora analisada, como pode ser observado na Figura 24.

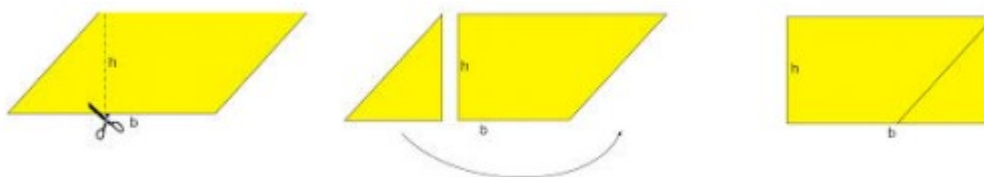


Figura 24: Modificação mereológica.
Fonte: (SHEIFER, 2017, p. 61)

Esta autora (2017) se apoia no entendimento de Duval (2011) ao afirmar que a modificação mereológica

Modifica uma figura sem modificar sua dimensão, é passível de manipulação do objeto [...]. Para uma modificação mereológica, o processo heurístico (ou seja, as operações que modificam a figura) se dá por meio de reconfigurações. Uma delas é a reconfiguração intermediária que consiste em dividir uma figura em sub-figuras,

reagrupando-as em um eventual contorno global diferente. Naturalmente, se pode aumentar o número das partes da figura por um fracionamento de suas unidades figurais elementares (SCHEIFER, 2017, p. 61).

Ainda que a metodologia esteja de acordo com uma das modificações necessárias para a apreensão operatória de figuras, o mesmo estudante solicitou ajuda da professora para definir a fórmula da área do círculo, afirmando “*Isso aqui é c vezes d* ”. Esta afirmação demonstra que apesar de o estudante ter conseguido obter as dimensões do paralelogramo a partir das dimensões do círculo, fazendo as devidas substituições na fórmula da área do paralelogramo ($b.h$), ou seja, trocando a base por $1\pi r$ e a altura por r , teve dificuldade para conseguir fazer o caminho inverso, isto é, obter a área do círculo a partir da área do paralelogramo. Sendo assim, a professora resolveu insistir na análise da construção e desconstrução das figuras feitas anteriormente, para demonstração desta área, de acordo com a Figura 25.

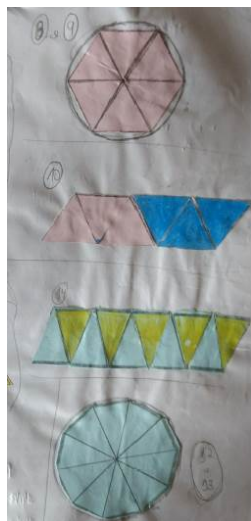


Figura 25: Resposta sujeito A2 para as questões 8 a 10 e 12 a 14 da atividade AA.
Fonte: Dados da pesquisa.

E a interação continuou, conforme a transcrição que segue.

Professora: C vezes d? Presta atenção, isso aqui é uma conclusão do que nós estávamos fazendo. Por que você chegou a essa conclusão? Porque você estava comparando a área do paralelogramo com a área do círculo. E a gente concluiu que, conforme eu aumento o polígono, ele vai ocupando mais a área do círculo. Ou seja, o paralelogramo vai virando um retângulo, e qual vai ser a área dele em relação à área do círculo?

Sujeito A2: Como?

Professora: Vai ser igual ou vai ser diferente?

Sujeito A2: Diferente

Professora: Vai ser diferente? Hora que isso aqui, virar retângulo, a área do círculo e a área do retângulo vão ser iguais ou diferentes?

Sujeito A2: Ah, iguais.

Professora: Então você entendeu que você fez esta comparação?

Sujeito A2: Ahã

Professora: Então como vai ser a fórmula de cálculo da área do círculo?

Sujeito A2: Silêncio demonstrando dúvida.

Professora: Isso aqui é a área do retângulo ou do paralelogramo que você tirou de lá. Qual vai ser a do círculo?

Sujeito A2: Dois.

Professora: Por que dois? Você não falou que são iguais?

Sujeito A2: Silêncio.

Professora: Desistiu?

Sujeito A2: Demonstração de dúvida. (informação verbal)³³

A professora pretendia que o estudante entendesse que deveria usar a mesma fórmula da questão 18 para obter a fórmula da área do círculo, no entanto, isso não foi possível durante a interação porque o estudante demonstrou que não concluiria a atividade por não ter compreendido.

Esta interação possibilitou o cumprimento da função apofântica, por meio da operação de predicação, que tem como característica o valor lógico de falsidade e o valor epistêmico de absurdidade, nos momentos que o sujeito A2 afirmou que as áreas das duas figuras (paralelogramo e círculo) são *diferentes* e que a área do círculo é *dois*. Já o valor lógico de certeza, fez cumprir a função apofântica, por meio da operação de predicação, depois que a professora insistiu na pergunta e no momento que o sujeito A2 mudou de ideia afirmando que a área das duas figuras (paralelogramo e círculo) são iguais. O valor social de pergunta, que requer uma resposta só não fez cumprir a função apofântica por meio da operação do ato ilocutório no final da interação, momento em que o sujeito A2 se silenciou diante de um questionamento. Em todo o trecho anterior do diálogo há cumprimento desta função discursiva por meio do ato ilocutório.

O discurso, proveniente do diálogo estabelecido entre a professora e o estudante foi uma oportunidade de observar as dúvidas e os avanços. Esta interação, que normalmente não acontece nas aulas tradicionais tem na Modelagem Matemática, condição necessária para o desenvolvimento da metodologia. Desta forma, o ensino é favorecido pela Modelagem Matemática, na medida que o professor consegue ter mais clareza de como se dá o processo de aprendizagem, enquanto no ensino tradicional as dúvidas normalmente são manifestadas somente por meio das avaliações formais, sem que seja possível compreender as razões que as justificam, como serão discutidas mais adiante.

Por entenderem que a interação é de fundamental importância para o ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, Klüber e Burak (2006), apoiados pelo entendimento

³³ Dados da pesquisa.

de Nicola (1999), defendem que a visão mais ampla que o professor precisa ter sobre o estudante deve ser desenvolvida durante sua formação e afirmam que:

[...] é fundamental na formação do professor a aquisição da capacidade de conhecer o sujeito que aprende, suas funções psíquicas e suas particularidades. Estas precisam ser respeitadas e percebidas, como potencialidades a serem descobertas e a partir delas, fomentar uma interação educacional (KLÜBER, BURAK, 2006, p. 9).

No mesmo viés, Freire (1983) alerta para o risco que o ensino bancário oferece e orienta sobre a essência de uma educação dialógica

[...] aquele que é “enchido” por outro de conteúdos cuja inteligência não percebe; de conteúdos que contradizem a forma própria de estar em seu mundo, sem que seja desafiado, não aprende. Para isto, é necessário que, na situação educativa, educador e educando assumam o papel de sujeitos cognoscentes, mediatizados pelo objeto cognoscível que buscam conhecer (FREIRE, 1983).

Voltando ao diálogo travado entre professora e estudante, identificado como sujeito A2 e aos seus registros, serão discutidas a seguir, as possíveis razões de suas dúvidas e de seus acertos.

Percebeu-se que a interação ocorreu fazendo a comparação entre as áreas do círculo e do paralelogramo e vice-versa, no entanto, ainda que o objetivo final dependesse dessa comparação, considerou-se que, depois do processo de desconstrução e construção de figuras, houve a necessidade de encontrar as dimensões do paralelogramo a partir das dimensões do círculo que foram necessárias para a obtenção da fórmula do comprimento da circunferência $(2\pi r)$.

Verificou-se então que, apesar desta modificação mereológica ter favorecido o êxito do estudante ao conseguir fazer estas substituições, conforme registro da resposta da questão 17, que consta na Figura 23, ele informou que a área do círculo era 2 (dois) e este equívoco pode estar relacionado ao número 2 (dois) da fórmula do comprimento da circunferência $(2\pi r)$.

Neste sentido, vale ressaltar o que Duval (2012c) entende sobre a visualização de uma figura, ao afirmar que “[...] ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra. Isto depende do papel que a figura tem na atividade matemática” (p.118).

Na tentativa de provocar a dedução da fórmula da área do círculo, desenvolveu-se toda uma dinâmica em que, para comparar a área do paralelogramo com a área do círculo, utilizou-se de uma estratégia que exigia um registro intermediário, ou seja, as dimensões do

paralelogramo a partir da fórmula do comprimento da circunferência ($2\pi r$), como mencionado anteriormente. Neste sentido, houve a necessidade de um grande esforço mental, uma vez que não existia congruência semântica nesta comparação, já que o comprimento da circunferência deveria ser dividido por dois para definir a base do paralelogramo e sua altura seria obtida a partir do raio da circunferência.

Mesmo assim, este estudante apresentou o registro da Figura 26.

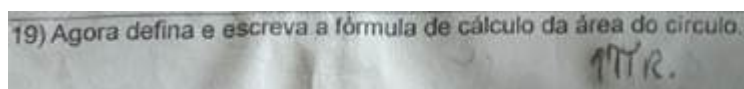


Figura 26: Resposta do sujeito A2 para a questão 19 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

A evolução deste registro para o primeiro equívoco comentado (*c vezes d*) é que, no registro, o estudante demonstra que entendeu a necessidade de multiplicar a metade do comprimento da circunferência por outra dimensão. No entanto, apareceu sutilmente do lado direito do registro, a letra D apagada, sendo assim, parece ter entendido que não seria o diâmetro, mas não sabe qual seria a outra dimensão que deveria ser multiplicada, ou seja, o raio.

Sobre a dúvida apresentada, é conveniente levar em consideração o entendimento de Duval (2012c) ao afirmar que “**A produtividade heurística de uma figura**, em um problema de geometria, **está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto** (p. 125, grifos do autor)”, no entanto alerta que, mesmo que seja sempre possível “[...] associar uma figura a uma situação geométrica descrita, as figuras não têm necessariamente, em cada situação, uma produtividade heurística.

Desta forma, o autor (2012c) coloca razões distintas para este problema. Uma delas está embasada no entendimento de Burgaurd (1983), sendo assim, afirma que “Os obstáculos encontrados por alunos na utilização de transformações em geometria plana são consequências da não congruência entre o tratamento matemático do problema e a apreensão operatória da figura” (DUVAL, 2012c, apud Burgaurd, 1983, p. 52, 53).

Outra razão, mesmo que pareça paradoxal, “[...] diz respeito aos casos em que há congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático do problema” (DUVAL, 2012c, p. 126). Isso acontece porque

Diferentes fatores podem estar presentes para facilitar ou, o contrário, para ocultar a apreensão operatória da figura que conduz à solução do problema colocado. Destes

fatores depende o fato de que os alunos "veem" rapidamente ou não veem a operação figural que sugere um tratamento matemático (DUVAL, 2012c, 126).

A análise da face oculta da matemática, fez emergir essas considerações, muitas vezes negligenciada nos trabalhos de pesquisa.

Ao questionar sobre a dimensão do círculo equivalente à altura do paralelogramo, na questão 17, o Sujeito A8 promoveu a seguinte interação com a professora.

Professora: Conforme vai aumentando a quantidade de lados do polígono, mais ele vai preenchendo o círculo, não é isso? Vai chegar o momento que ele vai virar um círculo, e essa inclinação aqui (lado do paralelogramo) vai diminuindo até chegar o momento que ele vai virar a altura de um paralelogramo, e essa medida o que é do círculo?

Sujeito A8: O raio

Professora: Como você escreve raio na fórmula? Vai virar a altura que é a mesma medida do?

Sujeito A8: Raio

Professora: O que você vai escrever no lugar da altura então?

Sujeito A8: Raio. Então h vira r.

Professora: Parabéns, exatamente. (informação verbal)³⁴

Sendo assim, a estudante apresentou o registro da Figura 27.

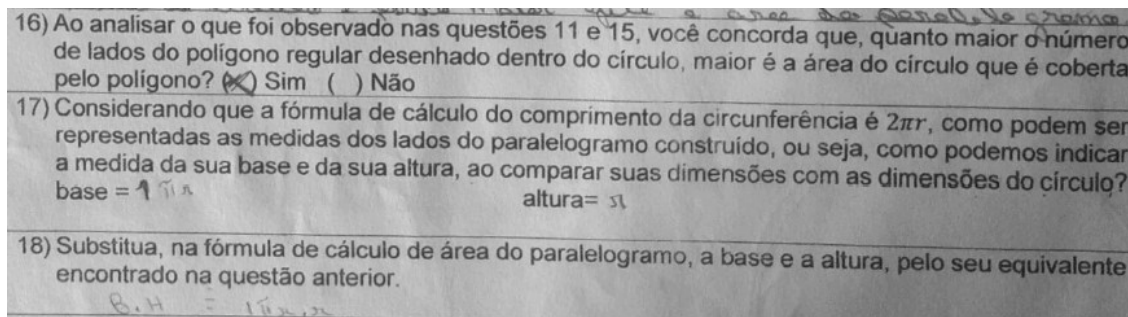


Figura 27: Resposta do sujeito A8 para as questões 16 a 18 da atividade AC.

Fonte: dados da pesquisa

Para a dedução da fórmula da área do círculo, a professora entrevistou dizendo “Então, o que você comparou? A área do paralelogramo que vai virar um círculo e chegou nisso aqui (resposta da questão 18). Qual você imagina que seja a fórmula para calcular a área do círculo?”.(informação verbal)³⁵ No entanto, a estudante não respondeu a questão 19, como pode ser observado na Figura 28.

³⁴ Dados da pesquisa.

³⁵ Dados da pesquisa.

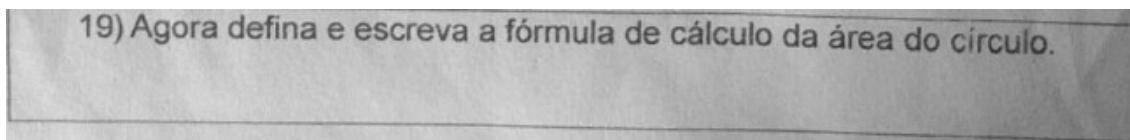


Figura 28: Resposta do sujeito A8 para a questão 19 da atividade AC.
Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda que esta estudante tenha conseguido êxito nas questões 16, 17 e 18, provavelmente pela proposta da estratégia que permitiu a relação entre a modificação mereológica na produtividade heurística da figura e os tratamentos matemáticos propostos pelos problemas, conforme recomendação de Duval (2012c), percebeu-se a ausência de resposta na questão 19. A dificuldade apresentada, pode ser mais um caso em que Duval (2012c) alerta sobre os obstáculos que os estudantes enfrentam quando utilizam do recurso de transformações em geometria plana e se deparam com a não congruência entre o tratamento matemático do problema em questão e a apreensão operatória da figura.

Concluídas as considerações sobre análise desta atividade serão discutidas a seguir, a análise da atividade sobre a resolução do problema.

6.3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Os dados das atividades anteriores, de natureza exclusivamente matemática, foram analisados em uma perspectiva cognitiva, de acordo com as manifestações dos estudantes gravadas em áudio, durante o desenvolvimento das atividades propostas. Sendo assim, foram analisados somente os registros dos estudantes que se manifestaram solicitando qualquer tipo de esclarecimento, desde que o áudio desta manifestação tivesse sido gravado. Procedeu-se desta forma para que fosse possível fazer uma relação entre a dúvida mencionada e a orientação da professora, com o registro obtido na resolução da atividade proposta, já que a intenção era fazer uma análise na perspectiva da aprendizagem, levando em consideração o aspecto cognitivo e respeitando a triangulação sugerida por André (2008).

Esta atividade, ainda que seja de natureza matemática, tem estreita relação com as atividades discursivas e práticas descritas no Quadro 15, que compreendem o trabalho que envolve a reutilização do lixo, por meio da confecção de peças artesanais. Desta forma, a análise dos dados obtidos nesta atividade será feita:

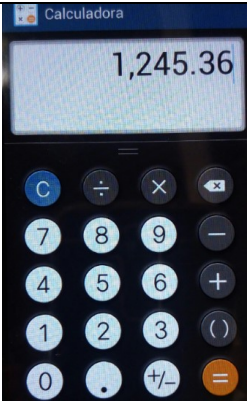
- ✓ sobre a fragilidade do ensino na perspectiva do método tradicional e a potencialidade do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática;

- ✓ sobre o ensino que acontece paralelamente à pesquisa com enfoque na resistência pela metodologia adotada e na condição do professor que assume o papel de pesquisador;
- ✓ sobre o ensino na perspectiva da aprendizagem de aspectos sociais relevantes

6.3.1 Sobre a fragilidade do ensino na perspectiva do método tradicional e a potencialidade do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática

No que se refere à fragilidade do ensino, há que se alertar sobre a grande dificuldade dos estudantes em relação ao sistema de numeração decimal, demonstrada no uso da calculadora e na escrita dos números.

A primeira dificuldade apresentada foi sobre os padrões americano e nacional de caracteres usados nas calculadoras para separação das classes dos números e para separação da sua parte inteira e decimal. Neste sentido, o padrão nacional que está disponível em algumas calculadoras, utiliza o “ponto” para separação das classes das unidades simples, milhares, milhões, etc e da vírgula para separar a parte inteira da parte decimal do número. Enquanto em outras calculadoras, prevalece o padrão americano, que de forma invertida, traz o “ponto” para separar a parte inteira da decimal, e a “vírgula” para separar as classes. O número 1.245,36 (Um mil, duzentos e quarenta e cinco inteiros e trinta e seis centésimos) foi digitado nas duas calculadoras disponíveis no Quadro 38, a título de exemplificação.

	
Padrão nacional	Padrão americano

Quadro 38: Padrões de calculadora.

Fonte: Dados da pesquisa.

Como para a solução das atividades anteriores, foi autorizado o uso da calculadora, esta discussão já havia ocorrido reiteradas vezes, no entanto, algumas dúvidas nesse sentido ainda foram manifestadas e a professora percebeu a utilização da tecla que continha a (vírgula

ou ponto) para separar as classes dos números, lembrando que, embora para este fim, os caracteres não devam ser utilizados, aparecem no visor da calculadora e podem gerar confusão.

Portanto, fez a seguinte intervenção.

Professora: Pelo que eu tenho percebido gente, uma coisa que está dificultando a compreensão dos alunos é a calculadora. A dificuldade de mexer na calculadora. Então, por exemplo, se eu tiver que colocar na calculadora esse número aqui olha (escreveu no quadro 32,43), eu vou digitar lá 32 vírgula ou ponto 43. É assim que eu digito. (informação verbal)³⁶

Já para um número inteiro que representa a classe do milhar, como o número 12.349, por exemplo, a professora registrou no quadro com o respectivo ponto que separa a classe das unidades simples da classe do milhar e questionou como deveria ser digitado na calculadora. O sujeito A2 respondeu que seria sem ponto e a professora concordou afirmando:

Professora: Sem ponto. Esse ponto aqui é para separar a classe do número das unidades, para o milhar, mas na calculadora eu não digito ponto. Eu já expliquei para vocês que muitas calculadoras têm o padrão inglês³⁷, não têm o padrão brasileiro, quando tem ponto ao invés de vírgula, significa que aquele ponto é vírgula, tá? Porque lá eles trocam, ao invés de vírgula eles usam ponto e vice-versa. Vocês têm que ter esse cuidado, gente. Então nesse número aqui (32,43) eu digito ponto ou vírgula, dependendo do que tem na calculadora, já nesse número aqui (12.349 por exemplo) eu não digito nem vírgula nem ponto. Cuidado com isso! (informação verbal)

Esperava-se que este cuidado ao escrever o número, levando em consideração os critérios que são definidos pelo sistema de numeração decimal, acontecesse de forma natural. Como se estas regras já fossem internalizadas pelos sujeitos e que, por este motivo, pudessem ser externalizadas espontaneamente. No entanto, isso não ocorreu e gerou bastante preocupação.

Ora, ao considerar as possíveis dificuldades para esta incompreensão, duas devem ser entendidas como relevantes. A primeira delas é o fato de o ponto (.) aparecer no visor da calculadora separando as classes dos números sem que seja digitado. A segunda corresponde às diferentes funções do ponto e da vírgula nas calculadoras com padrão nacional e com padrão americano.

Neste sentido, é importante ressaltar que tanto o ponto, como a vírgula, de acordo com Duval (2004), são símbolos incompletos conhecidos como sincategorimáticos e não

³⁶ Dados da pesquisa.

³⁷ O padrão é americano e não inglês.

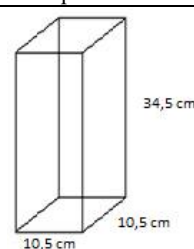
designam por si só. Para Duval (2004) a função de designação de objeto, por meio da operação de descrição é possível a partir de um léxico sistemático, que pode ser formado de acordo com determinada regra. Além disso, a formação deste léxico sistemático, depende também da combinação dos símbolos incompletos (sincategorimáticos) com os símbolos arbitrários (objetos elementares), para designar os objetos complexos. Neste caso específico, é necessário combinar o ponto ou a vírgula (símbolos sincategorimáticos) com os algarismos (objetos elementares), juntamente com as regras do sistema de numeração decimal, para designar o número (objeto complexo).

Diante desta complexidade, como considerar natural e espontânea a compreensão do ponto ou da vírgula no visor da calculadora sem sua digitação prévia? Como entender não apenas um, mas dois padrões de escrita do número para obedecer as regras do sistema de numeração decimal de acordo com orientação de cada país?

Como era de se esperar, as dúvidas apresentadas anteriormente, que revelaram a incompreensão do sistema de numeração decimal, dificultaram a solução dos problemas propostos nesta atividade.

Para resolver a questão 3 descrita no Quadro 39, houve a necessidade de transformar o volume ocupado por uma garrafa PET de 2 litros ao ser descartada, em capacidade (litros), portanto, transformar cm^3 em dm^3 .

3) As garrafas PET com capacidade útil de 2 litros têm a forma parecida com a de um cilindro e o design dessas embalagens são muito variados. Sendo assim, ainda que sua capacidade seja essa, ao ser descartada, seu volume equivale, em média, à uma caixa retangular com dimensões de 10,5 cm de largura, 10,5 cm de comprimento e 34,5 cm de altura.



Desta forma, calcule o volume que uma garrafa PET ocupa ao ser descartada e qual a capacidade total em litros que este volume equivale.

Quadro 39: Questão 3 da atividade RP.

Fonte: Dados da pesquisa.

As informações sobre as dimensões que devem ser consideradas para calcular o volume de uma garrafa PET e que estão disponíveis no enunciado da questão 3 foram obtidas no site de uma empresa, que dá também a seguinte informação: “[...] uma garrafa Pet de

refrigerantes de 2 litros irá ‘ocupar’ espaço equivalente entre 3,4 e 4 litros onde quer que seja depositada ou transportada (RECOPET, 2011, sp)”.

Para não resolver esta questão, trabalhou-se com o cálculo do volume de uma caixa com outras dimensões como exemplo e chegou-se a 6480 cm^3 . Note que neste registro, não aparece nem ponto, nem vírgula no número. Para a transformação deste volume em capacidade, os estudantes foram questionados sobre o lugar da vírgula neste número e houve a seguinte discussão.

Professora: Eu tenho que saber quantos litros isso equivale, então para saber quantos litros isso corresponde eu tenho que transformar em decímetro. É ou não é? Então eu estou aqui olha (apontando da unidade de medida na tabela de unidades de medida de volume), centímetro cúbicos, para eu ir para lá, eu tenho que fazer o que com essa minha medida aqui? Dividir por 1000. É ou não é? Então olha só, eu quero transformar em dm^3 , então onde que está a vírgula daquele número ali gente (6480)?

Sujeito A5: Ali no “coisa”, ali no 6.

Professora: A vírgula está aqui (apontou o espaço anterior ao algarismo 6)? Tem vírgula aqui gente?

Sujeito A5: Não no 4, do lado do quatro.

Professora: Aqui (apontou o espaço entre os algarismos 6 e 4)?

Sujeito A5: É

Professora: Não estou enxergando, tem?

Sujeito A5: Não tem, mas eu achei que era para colocar.

Professora: O número lá é 6480. Cadê a vírgula desse número?

Sujeito A5: Não tem

Sujeito não identificado: No meio do 4 e do 8.

Geral: Risos

Professora: Tem, tem vírgula, eu não enxergo, mas tem.

Sujeito A5: Você tira o zero?

Professora: Hã? Tira o zero?

Sujeito não identificado: Tá entre o 6 e o 4.

Professora: Aqui (entre o 6 e o 4)?

Geral: É.

Professora: Gente, aqui é o ponto que separa as classes do número, as unidades do milhar, não separa a parte inteira da parte decimal. A função da vírgula é separar a parte inteira da decimal.

Sujeito não identificado: Entre o 4 e o 8.

Professora: Não

Sujeito não identificado: Entre o 5 (quis desconstrair já que o número não tem algarismo 5).

Sujeito A5: Ah então não tem vírgula.

Sujeito não identificado: Antes do seis.

Professora: Tem vírgula, cadê a vírgula.

Geral: Risos e tumulto

Sujeito A16: Depois do zero, coloca mais dois zeros.

Professora: [Sujeito A16], o que você respondeu [Sujeito A16?]

Sujeito A16: Depois do zero, coloca mais dois zeros.

Professora: Quando o número não tem vírgula, não mostra a vírgula, a vírgula está depois do último al.... Gente presta atenção nisso! Quando o número não mostra a vírgula, ela está depois do último algarismo. A vírgula está aqui olha. É aqui, 6480 cm^3 é a mesma coisa que $6480,0$ é a mesma coisa que seis mil quatrocentos e oitenta vírgula zero, zero, zero, zero.... A vírgula está aqui.

Geral: Sim (informação verbal)³⁸

³⁸ Dados da pesquisa.

Na discussão anterior a este trecho da conversa, foram trazidas as possíveis razões que justificam a dificuldade da compreensão do léxico sistemático para designar o número. Já a interação que acabou de ser relatada, trouxe outra preocupação. Considerando o padrão brasileiro de escrita do número, ele pode ser escrito com ou sem ponto para separar as classes e a vírgula pode aparecer, mesmo que seja inteiro. No exemplo dado, a medida em cm^3 é representada pelo número 6480, que aparece sem ponto e sem vírgula. Para que seja transformado em dm^3 , precisa ser dividido por 1000. De acordo com a regra prática de divisão por potência de 10, ao invés de usar o algoritmo, é possível deslocar a vírgula a quantidade de casas decimais correspondente à quantidade de zeros que a potência de 10 possui. Neste caso, a vírgula deve ser deslocada três casas decimais para a esquerda, porque o 1000 tem três zeros. Esta explicação já havia acontecido reiteradas vezes.

Pois bem, voltando ao entendimento de Duval (2004) sobre a designação do léxico sistemático, observa-se que, no caso do número 6480, apesar de o ponto e a vírgula (símbolos incompletos ou sincategorimáticos) não aparecerem, **deveriam ser imaginados nos seus devidos lugares como se existissem no registro**, para que, combinados com os Algarismos (objetos elementares) e com a regra do sistema de numeração decimal, pudessem designar o número (objeto complexo).

Nada simples, mas ainda que estejam justificadas as dificuldades apontadas, era esperado que os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental tivessem completo domínio sobre este objeto do conhecimento matemático. No entanto, a última interação trazida entre a professora e a turma, mostrou claramente a dificuldade dos estudantes na escrita do número, proveniente da incompreensão do sistema de numeração decimal e de toda complexidade que este entendimento demanda. Mostrou também a insistência da professora, por saber sobre a importância deste pré-requisito para os cálculos solicitados, já os estudantes desta etapa do ensino demonstraram fragilidades nos conhecimentos mais elementares da matemática.

Se o ensino tivesse sido abordado por meio de aulas tradicionais, em que o conteúdo matemático é trabalhado numa aula expositiva e seguido de propostas de cálculos mecânicos sem qualquer significado para os estudantes, provavelmente estas fragilidades não teriam sido identificadas no momento da explicação. Talvez, as dúvidas observadas fossem manifestadas apenas no momento da correção das avaliações formais e a experiência mostra que, por mais que se fale em retomada do conteúdo a quantidade de trabalho necessário para o cumprimento do programa, não caberia no ano letivo na medida que houvesse necessidade de ser retomado frequentemente.

A Modelagem Matemática requer um grande esforço do professor para que os conceitos matemáticos sejam compreendidos, uma vez que, sem eles não é possível resolver o problema levantado.

Os sujeitos desta pesquisa assim como a grande maioria dos estudantes foram submetidos durante todo o período da educação básica, ou grande parte deste período, ao ensino tradicional, aquela que Freire (2017) chama de *bancário*. Os dados empíricos deste estudo revelaram grande fragilidade na aprendizagem destes estudantes, que vale lembrar, são do nono ano do Ensino Fundamental. As dificuldades apontadas são relativas ao domínio do sistema de numeração decimal e sobre esse tema têm pesquisas que revelam esta fragilidade, mas com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desta forma, as dificuldades apresentadas pelos sujeitos deste estudo, causam uma preocupação maior ainda.

Sobre as pesquisas comentadas, convém destacar a de Nogueira e Signori (2010) que compararam estudantes da antiga terceira série com os da quinta série, que hoje correspondem ao quarto e sexto ano respectivamente do Ensino Fundamental. A escolha por esta faixa etária se deu por entenderem que as crianças da terceira série já iniciaram a construção do sistema de dezenas, enquanto as crianças de quinta série “[...] encontram-se no momento de fechamento e consolidação dessa construção” (NOGUEIRA E SIGNORI, 2010, p. 271). Neste estudo, concluíram que

Os resultados da investigação realizada apontam que não houve diferença significativa nas respostas das crianças de 3ª e 5ª séries, pois as mesmas dificuldades de argumentação encontradas pelo primeiro grupo também foram observadas nas respostas do segundo. Mesmo quando conseguem resolver as “contas” de adição e de subtração com reserva, as crianças parecem apenas ter memorizado as regras mecanicamente, sem entender que os princípios e as propriedades do SND estão na base das técnicas operatórias dessas operações. A atuação das crianças indica que o SND não está consolidado, e assim, podemos constatar que o ensino da aritmética centrado nos algoritmos não possibilitou avanços significativos no que se refere à efetiva construção deste sistema (NOGUEIRA E SIGNORI, 2010, p. 272).

Entende-se que a metodologia de ensino seja fundamental para reforçar ou superar as fragilidades apontadas e que a Modelagem Matemática tem grande potencial para esta superação. É no momento da resolução do(s) problema(s) levantado(s) que as dificuldades são reveladas e que as dúvidas sobre os conceitos matemáticos necessários para a solução devem ser esclarecidas, para que se possa concluir com sucesso, esta etapa da metodologia. Portanto, é uma oportunidade de oferecer aos estudantes, condições de se apropriarem de conhecimentos relevantes para uma situação de vida real e, por consequência, desenvolverem sua autonomia.

Diante da fragilidade do ensino, fica o questionamento. Se grande parte dos estudantes investigados, que estavam concluindo os anos finais do Ensino Fundamental, não conseguiam dominar o sistema de numeração decimal, o que justifica a quantidade absurda de conteúdos matemáticos que compõem o currículo desta etapa do ensino?

O resultado da avaliação mais recente do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) revela que a situação geral do Brasil não é diferente da observada neste estudo.

De acordo com o PISA “No Brasil, 70,3% dos estudantes estão abaixo do nível 2 em matemática³⁹, patamar que a OCDE⁴⁰ estabelece como necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania” (BRASIL, 2016, p. 171).

Diante de tantos indicativos de que a aprendizagem dos conceitos matemáticos elementares ainda não está consolidada até mesmo para os estudantes que estão prestes a ingressar no Ensino Médio, é importante repensar o que de fato é prioritariamente necessário ser ensinado.

D’Ambrósio (2011) se apoia no entendimento de Hardy (2000) ao defender que existe uma grande diferença entre a matemática escolar, aquela que se ensina na escola e a matemática “verdadeira” que ele chama de acadêmica. O autor (2011) diz que a diferença está nos objetivos, métodos e conteúdos, entende que mesmo havendo algumas coincidências, como alguns conteúdos básicos que estão presentes nas duas

A matemática que se ensina na escola é, em geral, uma imitação deficiente da matemática acadêmica. Como diz Hardy, é inútil para os alunos, além de desinteressante e obsoleta. Baseada em uma listagem de conteúdos que o aluno deve receber passivamente, pode parecer objetiva, mas é abstrata e difícil de ser apreendida. Além disso, deveria ser ensinada de maneira viva, dinâmica, relacionada com o cotidiano e com a curiosidade do aluno.” (D’AMBRÓSIO, 2011, sp).

Talvez a insistência em se trabalhar a matemática escolar tenha como objetivo o evento mais temido pelos estudantes, o vestibular. Isso pode responder à pergunta anterior mesmo que os números revelem apenas a aprovação da minoria dos estudantes e a falta de preparo da maioria para lidar com situações comuns do cotidiano. Portanto percebe-se que

³⁹ No nível 2, os estudantes são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que uma inferência direta. Conseguem extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um modo simples de representação. Os estudantes situados nesse nível conseguem empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas que envolvem números inteiros. São capazes de fazer interpretações literais dos resultados (BRASIL, 2016, p. 5).

⁴⁰ Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

Há um descompasso entre a matemática escolar e a vida real. A matemática escolar é apresentada com uma dinâmica que não condiz com o ritmo de nosso dia a dia. No mundo real, tudo é mais rápido e há uma expectativa de resultados mais imediatos. A matemática escolar costuma ser apresentada sob o discurso de que vai ajudar o aluno a entender a realidade e tem um caráter propedêutico, sempre com a justificativa de que serve para estudos posteriores. No entanto, o caráter utilitário e propedêutico da matemática escolar nunca se materializa no decorrer dos estudos (D'Ambrósio, 2011).

Será mesmo adequado conduzir toda a educação formal precedente a este evento, com esta finalidade? Qual é a real efetividade do ensino com este formato, se o ensino fragilizado que afeta a grande maioria dos estudantes, mantém a exclusão e reforça a desigualdade social? Esta e tantas outras dúvidas sobre a Educação no Brasil ecoam por toda parte desde muito tempo, com os seguintes questionamentos

Porque não discutir com os alunos a realidade concreta a que se deva associar a disciplina cujo conteúdo se ensina, a realidade agressiva em que a violência é a constante e a convivência das pessoas é muito maior com a morte do que com a vida? Porque não estabelecer uma necessária "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? Porque não discutir as implicações políticas e ideológicas de um tal descaso dos dominantes pelas áreas pobres da cidade? A ética de classe embutida neste descaso? Porque, dirá um educador reacionariamente pragmático, a escola não tem nada que ver com isso. A escola não é partido. Ela tem que ensinar os conteúdos, transferi-los aos alunos. Aprendidos, estes operam por si mesmos (FREIRE, 2017a, p. 32).

Nossos estudantes teriam condições de operar por si mesmos, os conteúdos recebidos se lhes faltam comida, abrigo, afeto, cuidado e proteção? Os conteúdos que a escola reacionária se propõe a ensinar são necessários e suficientes para o desenvolvimento da autonomia do sujeito? Os sujeitos aprendem os conteúdos a eles transferidos? É por meio de muita omissão e pouca empatia que se estabelece a manutenção do *status quo*. Que se tenta, mediante um discurso que pretende a disseminação do conformismo, fazer com que se compreenda a condição do dominado como consequência de seu desinteresse e de sua incapacidade, ou seja, do seu fracasso. De acordo com Freire

É importante ter sempre claro que faz parte do poder ideológico dominante a inculcação nos dominados da responsabilidade por sua situação. Daí a culpa que sentem eles, em determinado momento de suas relações com o seu contexto e com suas classes dominantes por se acharem nesta ou naquela situação desvantajosa. [...] Pessoas assim fazem parte das legiões de ofendidos que não percebem a razão de ser de sua dor na perversidade do sistema social, econômico, político em que vivem, mas na sua incompetência. Enquanto sentirem assim, pensarem assim e agirem assim, reforçam o poder do sistema. Se tornam coniventes da ordem desumanizante (2004, sp).

Mais recentemente o discurso da ideologia dominante está elaborado com argumentos que procuram justificar a indecência da corrupção no Brasil, reforçado pelas manobras políticas que só vêm confirmar a institucionalização desta prática no país. Uma vergonha que rende ao meio artístico elementos importantes para robustecer a comédia nacional.

Pensar criticamente a Educação e acreditar que ela é capaz de mudar situações merecedoras de repúdio é refletir sobre os problemas que ela enfrenta e buscar estratégias que possam favorecer a transformação. Priorizar a discussão de assuntos de relevância social e explorar conteúdos de diversas áreas que estejam relacionados a estes problemas, pode ser um meio de elaborar o conhecimento do senso comum para transformá-lo em conhecimento científico.

Os questionamentos destacados por Freire (2017a) e discutidos anteriormente, são apenas alguns dos sem número dos que têm condições de ser levantados a partir de muitos temas relevantes que podem ser estudados por meio da Modelagem Matemática. Esta metodologia permite dar importância para atribuição de sentidos e significados aos objetos de conhecimento e, por consequência, pode promover um aprendizado mais significativo e próximo da realidade dos estudantes.

Uma visão geral do que se passa a nossa volta é suficiente para listar uma grande quantidade de temas e pode ser uma oportunidade de estudar conceitos necessários para a solução de tantos problemas sociais, de acordo com os exemplos a seguir.

Pode ser uma possibilidade de evitar o desperdício de alimento e de acabar com a fome, por meio da pesquisa sobre o cultivo de hortas comunitárias; do estudo sobre a decomposição da matéria orgânica; do ensino sobre nutrientes importantes em uma dieta saudável e do trabalho de diversos assuntos relacionados ao tema. Pode ser uma alternativa de promover a proteção do meio ambiente por meio do estudo da poluição dos rios; do saneamento básico; do desmatamento; do destino correto dos resíduos e de outros fatores que evitam a degradação dos recursos naturais. Pode ser uma oportunidade de estimular o emprego, por meio de pesquisa sobre o empreendedorismo, do estudo sobre planilhas de custo; gestão empresarial; maximização de resultados; marketing e propaganda. Pode ser o momento de fazer emergir grandes talentos para a atividade política, por meio da prática do ato solidário; da manutenção do respeito; da manifestação da empatia; do rigor ético; do exercício da honestidade; da identificação dos problemas sociais que merecem investimento de recursos públicos; enfim dos requisitos fundamentais para o exercício do mandato, porém, quase inexistentes atualmente.

Esses e tantos outros temas quando trabalhados pela metodologia da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak, possibilitam utilizar os conceitos matemáticos para solução de problemas reais.

Neste sentido, Burak (2010a) destaca um tema que teve repercussão mundial

[...] o recente terremoto no Haiti, os números de pessoas que sucumbiram, os desaparecidos, os feridos e a destruição impressionam, mas sem a ação que envolve muito mais do que somente o concurso do pensamento lógico, mas ação, solidariedade, disponibilidade, conhecimentos de logísticas, economia, administração, ciências médicas, biológicas entre outras nos dá mostras de um mundo que exige uma nova forma de ser visto – uma forma global, uma visão do todo. O todo tem qualidades ou propriedades que não são encontradas nas partes, se estas estiverem isoladas umas das outras e, certas qualidades ou propriedades das partes podem ser inibidas pelas restrições provenientes do todo (p. 23).

O diálogo por meio da interação entre professor e estudantes e dos estudantes entre si, promovido pela Modelagem Matemática a partir da discussão desses e demais temas, estimula a pesquisa, a criatividade e a criticidade. Sujeitos críticos têm condições de tomar ciência da sua realidade e nela intervir para transformá-la, como sugere Freire “Quanto mais refletir sobre a realidade, sobre sua situação concreta, mais emerge, plenamente consciente, comprometido, pronto a intervir na realidade para mudá-la (1979, sp).

A Educação nesta perspectiva, conduzida pela Modelagem Matemática, pode acrescentar muito mais na vida de nossos estudantes do que a memorização e aplicação de fórmulas para resolução de listas de exercícios ou de problemas criados para treinar o ato mecânico de calcular.

6.3.2 Sobre o ensino que acontece paralelamente à pesquisa com enfoque na resistência pela metodologia adotada e na condição do professor que assume o papel de pesquisador

Esta atividade desenvolvida com os estudantes permitiu também a análise de algumas situações que comprometem o trabalho do professor quando assume o papel de investigador.

Para Nóvoa, professor pesquisador

[...] é um professor que assume a sua própria realidade escolar como um objeto de pesquisa, como objeto de reflexão, como objeto de análise. Mas, insisto neste ponto, a experiência por si só não é formadora. John Dewey, pedagogo americano e sociólogo do princípio do século, dizia: "quando se afirma que o professor tem 10 anos de experiência, dá para dizer que ele tem 10 anos de experiência ou que ele tem um ano de experiência repetido 10 vezes". E, na verdade, há muitas vezes esta idéia. Experiência, por si só, pode ser uma mera repetição, uma mera rotina, não é ela que

é formadora. Formadora é a reflexão sobre essa experiência, ou a pesquisa sobre essa experiência (2001, s.p).

Para iniciar a discussão sobre o tema, convém reforçar que, de acordo com Freire (2017a), a pesquisa é um dos saberes indispensáveis à prática docente. O autor destaca que ensinar exige pesquisa ao afirmar que

Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (p. 29).

No entanto, há posicionamentos favoráveis e contrários ao trabalho desenvolvido pelo professor pesquisador, com discussões calorosas sobre o processo de formação docente. Santos (2008) traz esta diversidade ao abordar estudos sobre o tema. Quando se refere a Foster (1999) sobre pesquisas de docentes voltadas para a prática de sala de aula, evidencia que as duas atividades, pesquisar e ensinar, são distintas, uma vez que demandam de conhecimentos, habilidades e disposições diferentes, ainda que conduzidas por professores altamente motivados. De acordo com Santos (2008), Foster (1999) justifica que o professor que assume a tarefa de pesquisar subestima a dificuldade e a competência desta empreitada e subestima também as demandas do trabalho de ensinar.

Conciliar ensino e pesquisa realmente não é tarefa fácil. Entre os desafios, vale ressaltar a elaboração dos instrumentos de coleta de dados e sua aplicação. A atividade, ora analisada é um dos instrumentos e foi aplicada no início do segundo semestre do ano letivo, mais precisamente, na segunda quinzena do mês de agosto, sendo que o trabalho de coleta de dados iniciou no mês de abril e ainda havia mais o que fazer nesta etapa da pesquisa.

Para resolver esta atividade específica, que era composta por quatorze questões, já havia acontecido, anteriormente quatro encontros e os estudantes, ainda estavam na sétima questão. Sua solução, dependia do resultado da quinta questão, que alguns estudantes não tinham resolvido. Estimava-se então, que ainda seriam necessárias muitas aulas para a conclusão da coleta de dados. A demora se dava pelo excesso de intervenções feitas para esclarecer as dificuldades apresentadas por alguns estudantes e essa demora causava cansaço e desinteresse dos outros estudantes que estavam adiantados. Tudo isso, aliado à necessidade de cumprimento de prazo, gerou bastante preocupação para a professora e acabou comprometendo a explicação de um procedimento de cálculo.

O fato se deu da seguinte forma. Após fazer as devidas orientações a um dos sujeitos da pesquisa, sobre a dúvida em relação ao cálculo do volume do cilindro, a professora foi abordada por vários estudantes fazendo o mesmo questionamento, enquanto os demais estudantes tumultuavam a sala. Sendo assim, sentiu a necessidade de retomar mais uma vez com a turma esse assunto, alertando sobre sua preocupação em relação às dúvidas apresentadas. Fez uma breve explanação e a seguir, procurou detalhar mais o procedimento do cálculo.

Porém, a preocupação pela recorrência de retomadas e pela dificuldade em avançar com a atividade gerou um equívoco na explicação da capacidade que a lata usada como vaso, deveria ter. Como era preciso calcular primeiro o volume do objeto, que tinha as dimensões discriminadas em centímetros, fazia-se necessário transformar o volume em dm^3 para obter a capacidade em litros. Desta forma, explicou que deveriam calcular a área da base e, sem calcular o volume, ou seja, multiplicar essa medida pela altura, pediu que dividisse por 1000 para transformar em dm^3 . Concluiu a explicação já no final da aula, sem se dar conta do erro cometido e, por certo, com manifestações de dúvidas de alguns estudantes que já haviam concluído.

Esta situação pode ser observada na transcrição a seguir.

Professora: Pessoal, eu estou percebendo o seguinte aí olha, tem aluno que não terminou o exercício 5, se não terminou o exercício 5, não vai conseguir fazer o 7. Eu vou explicar, mas gente, é a última vez que eu vou explicar, presta atenção aqui. [...] O exercício 5 está perguntando qual é o volume das latas que foram usadas para os vasos. Estão lembrados disso?

Geral: Ahã.

Professora: Então olhem lá. Essas aqui são as dimensões da lata, 8,2 de altura e 7,2 (a medida correta é 7,5) de diâmetro. Certo? Então eu preciso calcular o volume de cada lata primeiro. Essa é a última vez que eu vou explicar isso. O volume de cada lata. Como eu faço para calcular o volume de cada lata? A fórmula do volume é essa aqui olha, o volume do cilindro (interrompida por risos). Eu tenho que calcular a área da base do cilindro, o que é a base do cilindro gente? A base do cilindro é o que?

Sujeito A2: Círculo.

Professora: Então eu tenho que pegar a área do círculo e multiplicar pela altura. Vocês concordam gente?

Geral: Sim.

Professora: Só que se eu não conhecer a área da base, eu não tenho como calcular o volume.

Sujeito não identificado: Lógico.

Professora: Como eu vou calcular a área do círculo? Qual é a fórmula?

Sujeito não identificado: πr^2

Professora: πr^2 . Então eu vou colocar, ... gente como eu calculo uma grandeza, usando fórmula, uma medida, usando fórmula, como esta aqui, estou substituindo as letras pelos seus valores, eu vou substituir as letras pelos seus valores, então o que eu quero? A área do círculo, π é uma letra grega, a gente sabe quanto vale o π ?

Geral: 3,14

Professora: 3,14 vezes o raio, o r é o raio. A gente não conhece o raio, mas a gente conhece o?

Geral: Diâmetro

Professora: Se o diâmetro for 7,2 (a medida correta é 7,5) raio vai ser o que gente?

Sujeito não identificado: 3,75.

Professora: 3,75 que é o quê? A metade do diâmetro. Está faltando alguma coisa aqui?

Sujeito A16: O doizinho lá de cima.

Professora: O doizinho lá em cima, o expoente, exatamente Sujeito A16, porque o raio eu tenho que elevar ao quadrado, ok? Então vocês vão calcular isso. Ah professora, então eu vou fazer 3,14 vezes 3,75? Não. Gente, tem uma multiplicação e uma potência, então resolvam primeiro a potência, se vocês fizerem, como a gente resolve o quadrado de 3,75...

Sujeito não identificado: 3,75....

Professora: Como?

Sujeito não identificado: 3,75 vezes 3,75.

Professora: 3,75 vezes 3,75, então eu vou repetir isso aqui e calculo aqui. Depois lá embaixo de novo, pego o 3,14 e multiplico pelo resultado que eu encontrei aqui. Certo? Vocês estão entendendo isso aqui gente?

Geral: Sim.

Professora: Aí o que vai acontecer? Pessoal, não terminei ainda. Matheus! Hora que vocês encontrarem o resultado, ele vai estar nessa unidade de medida, cm^3 , só que eu quero a capacidade, eu quero em litros e o litro é a mesma coisa que dm^3 , é isso que a gente viu várias vezes? Tá, então o que eu tenho que fazer com essa medida aqui para transformar em dm^3 ?

Sujeito não identificado: Dividir por 1000.

Professora: Dividir por 1000, aí esse resultado aqui gente, é o volume de uma lata, só que no trabalho que aconteceu, que foi realizado, nós usamos 85 latas, como eu descubro daí?

Sujeito não identificado: Multiplica.

Professora: Eu vou multiplicar por aquele volume que eu encontrei lá.

Sujeito não identificado: Não entendi.

Professora: Não entendeu o que que não entendeu gente? (Trecho inaudível). Diga o que você não entendeu.

Sujeito não identificado: Não.

Professora: Tá então, encerrei hein. O cinco já está explicado, aí vocês vão pegar lá. O resultado do 5 é o volume das latas, o resultado do 4 é o volume das garrafas, que vai ser o volume total que eu tinha dito lá, aí pega o valor que seria vendido, dividido pelo volume total.

Sujeito não identificado: Tá certo o que a gente tinha feito. (Informação verbal)⁴¹

No encontro seguinte, a explicação foi retomada, como era feito normalmente, mas não para reparar o equívoco cometido, mesmo porque, a professora não havia se dado conta disso, só percebeu no momento que transcrevia o áudio.

O inconveniente⁴² da demora para desenvolver a metodologia da Modelagem Matemática, provocou outros dissabores. Houve uma ocasião em que uma colega de área perguntou para a professora pesquisadora se naquele dia haveria aula de matemática, porque foi questionada por estudantes, sujeitos da pesquisa, que eram de uma de suas turmas no ano

⁴¹ Dados da pesquisa.

⁴² Este inconveniente é proveniente da necessidade de retomadas recorrentes para esclarecer as dúvidas dos estudantes sobre conceitos matemáticos elementares e da própria dinâmica do trabalho do professor pesquisador que requer habilidade para superar muitos desafios.

anterior. Os instrumentos de coleta de dados desta pesquisa mostram claramente que havia muita matemática durante as aulas, no entanto, a relação que era estabelecida entre as atividades desenvolvidas com o tema de estudo da Modelagem Matemática, pode ter passado a ideia de que apenas o tema era abordado, já que foi discutido reiteradas vezes.

Quanto à pergunta da colega, comentada anteriormente, foi informada que a matemática estava sim, sendo estudada. Percebe-se, então, que existe muita resistência pela Modelagem Matemática, demonstrada nesta ocasião, tanto pelos estudantes que procuraram a professora para questionar o trabalho desenvolvido, como pela própria professora, que não teve a iniciativa de argumentar com estes estudantes em defesa da metodologia adotada. Esta colega de área preferiu cobrar o “direito” de os estudantes aprenderem a matemática prevista no currículo e impressa nos livros didáticos, preferencialmente obedecendo uma ordem de conteúdos pré-estabelecida. Paralelamente destacavam-se as discussões das professoras de matemática de outras turmas sobre o que já havia sido cumprido do planejamento e a preocupação que manifestavam sobre a quantidade de conteúdos que ainda precisavam ser trabalhados até o final do ano letivo.

A resistência mencionada demonstra que a manutenção do *status quo* da educação bancária é latente. Sobre esta prática recorrente, vale ressaltar que

Em lugar de comunicar-se, o educador faz “comunicados” e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção “bancária” da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. Margem para serem colecionadores ou fichadores das coisas que arquivam. No fundo, porém, os grandes arquivados são os homens, nesta (na melhor das hipóteses) equivocada concepção “bancária” da educação. Arquivados, porque, fora da busca, fora da práxis, os homens não podem ser. Educador e educandos se arquivam na medida em que, nesta distorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros. Busca esperançosa também (FREIRE, 2017b, p. 80 e 81).

Por mais que este alerta já tenha sido motivo de discussão desde tanto tempo atrás, há ainda, nos dias atuais, muito o que fazer neste sentido. Em uma pesquisa com docentes que participaram de um curso sobre Modelagem Matemática, Ferreira e Burak (2011) constataram que

Durante a investigação ficou evidente a forte concepção que os professores possuem sobre o currículo linear e muitos acreditam que deve ser assim mesmo, ainda que o fracasso no ensino e aprendizagem da Matemática, estampados nos resultados alcançados, se faça fortemente presente. Então, isso nos leva a crer que estes

professores estão mais preocupados em defender a zona de conforto em que se encontram (p. 8).

Ainda que a professora pesquisadora tenha percebido esta característica marcante em seus colegas de área, principalmente por perceber que estes profissionais não nutriam admiração pela Modelagem Matemática, teve autonomia para desenvolver o trabalho nesta perspectiva. Sendo assim, a resistência manifestada não interferiu no propósito da professora pesquisadora, uma vez que estava segura sobre a coerência e consistência do aporte teórico que fundamentou sua pesquisa e por entender que se trata de uma metodologia capaz de promover a transformação. Neste sentido, a equipe pedagógica, composta por duas profissionais, manifestava opiniões divergentes sobre a metodologia. Uma delas apoiava sem qualquer ressalva, uma vez que compartilha dos mesmos ideais de educação da pesquisadora. A outra defendia o ensino tradicional, mas não interferia no trabalho desenvolvido. A direção da escola, juntamente com a vice direção que era representada por um professor de matemática, apoiaram todas as iniciativas, sem fazer qualquer restrição ou objeção.

Aconteceu também, na presente pesquisa, de alguns estudantes questionarem sobre o ensino de equação do segundo grau, assunto que seus colegas estavam estudando nas outras escolas e que não tinham visto ainda. O questionamento foi feito para a professora pesquisadora e para a equipe pedagógica da escola, que juntas, trataram do assunto, mas não houve qualquer objeção da equipe pedagógica sobre a forma como a professora pesquisadora conduzia seu trabalho.

O estudo de equação do segundo grau aconteceu após a conclusão desta atividade e desvinculado do tema da Modelagem Matemática. Neste caso, houve exatamente o que alerta Klüber e Burak (2014) ao se referir ao hiato entre a escolha do tema e o conteúdo matemático. Os autores destacam que

O desafio está em desenvolver a atividade tendo como referência o contexto inicial, durante todo o processo. Para tanto se impõe a necessidade de buscar formas de abordar o conteúdo matemático no âmbito da própria atividade de Modelagem, permitindo a superação de um hiato entre a escolha do tema e todo o processo de construção de um modelo que envolve sujeitos da aprendizagem e distintos contextos etno-sócio-culturais (KLÜBER e BURAK, 2014, p. 273)

Na ocasião do exame de qualificação desta investigação, a pesquisadora comentou o fato. Burak, ilustre componente da banca, observou que esta dificuldade é característica da pouca experiência com a Modelagem Matemática. Aproveitou inclusive para sugerir uma possibilidade de explorar o conteúdo de equação do segundo grau no contexto do tema. Este

professor, um dos principais precursores do estudo da Modelagem Matemática, foi capaz de trazer, de forma improvisada, uma estratégia que viabiliza o trabalho deste conteúdo matemático, de acordo com a proposta desta metodologia de ensino. Isso confirma seu entendimento de que, a experiência com a Modelagem Matemática, permite de fato, maior habilidade para trabalhar os objetos de estudo desta área de ensino, em conformidade com o contexto do tema. Porém, a sugestão de Burak não foi desenvolvida na sala de aula, porque aconteceu na ocasião do exame de qualificação e nesta época, o ano letivo já havia encerrado.

Agora, depois da experiência vivida, percebe-se que seria fácil propor um problema com estas características, como pode ser observado no exemplo do Quadro 40.

Para revestir um rolinho de papel higiênico, dispomos de um pedaço de papel de forma retangular com área de 186 cm². Para o acabamento é necessário deixar uma sobra no comprimento e o dobro desta sobra na largura da superfície lateral do rolinho. Determine a medida desta sobra se as dimensões do rolinho são 10 cm de altura e 14,5 cm de comprimento da circunferência.	
• Comprimento do papel (comprimento da circunferência do rolinho mais a sobra) = 14,5 + x • Largura do papel (altura do rolinho mais o dobro da sobra) = 10 cm + 2x $(14,5 + x) \cdot (10 + 2x) = 186$ $145 + 29x + 10x + 2x^2 = 186$ $2x^2 + 39x + 145 - 186 = 0$ $2x^2 + 39x - 41 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-39 \pm \sqrt{39^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-41)}}{2 \cdot 2}$ $x = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 + 328}}{4}$	$x = \frac{-39 \pm \sqrt{1849}}{4}$ $x = \frac{-39 \pm 43}{4}$ $x' = \frac{-39 + 43}{4} = 1$ $x'' = \frac{-39 - 43}{4} = -20,5$ R.: A sobra deve ser de 1 cm no comprimento e 2 cm na largura da superfície lateral do rolinho de papel higiênico.

Quadro 40: Sugestão de atividade.

Fonte: dados da pesquisa.

Esta é, portanto, uma questão que poderia ser trabalhada, envolvendo o conteúdo matemático que a turma pretendia aprender, no contexto do tema da Modelagem Matemática.

Os desafios apontados e o apoio conquistado das pedagogas e direção da escola provocaram situações adversas. A professora que assumiu o papel de pesquisadora no presente estudo sentia-se pressionada por ter o compromisso de atuar como professora da forma mais natural possível e ao mesmo tempo, ser muito cuidadosa para não correr o risco de perder seus dados e de não conseguir cumprir os prazos estabelecidos. Porém, sentia-se respaldada para trabalhar nesta perspectiva por conta da autonomia concedida pela equipe administrativa e pedagógica da escola.

Neste sentido, os inconvenientes apontados, tanto para o ensino como para a pesquisa, podem obscurecer o grande potencial da Modelagem Matemática para o ensino e para a aprendizagem.

Isso talvez tenha influenciado a dinâmica da metodologia de ensino adotada, que se tivesse sido desenvolvida em uma situação independente da pesquisa, poderia acontecer com maior naturalidade e sem preocupações extremas, como nas ocasiões que a professora teve a oportunidade de vivenciar em experiências anteriores.

Outra observação importante é o fato de a professora pesquisadora nunca ter vivenciado a experiência de observar algum colega adotar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, mesmo tendo vinte e dois anos de trabalho e de ter passado por mais de dez escolas de ensino regular. Isso não exclui a possibilidade de ter acontecido sem que tomasse conhecimento, no entanto, considera que seja pouco provável porque sempre discutiu com os colegas sobre o trabalho realizado por todos.

Como existem muitos estudos que abordam esta metodologia de ensino na prática e não se observa normalmente o trabalho docente nesta perspectiva, de forma que faça parte da realidade das escolas, levanta-se uma questão. A Modelagem Matemática é desenvolvida, mesmo que esporadicamente, de forma desvinculada da pesquisa ou esta prática acontece somente para fins de investigação?

É inegável que, todos estes aspectos observados e analisados, revelam a complexidade da atuação do professor pesquisador e podem nortear os estudos sobre a formação docente, para que se pense em estratégias que contribuam para a superação das fragilidades apontadas.

A revelação das dificuldades observadas, a compreensão dos motivos que justificam estas dificuldades, a adoção de estratégias variadas e a indicação de algumas possibilidades, tudo isso atribuído ao grande potencial da Modelagem Matemática, faz do professor reflexivo, um pesquisador capaz de promover mudanças.

Neste sentido, retoma-se o estudo de Santos (2008), agora sobre a defesa do papel do professor pesquisador. Para tanto, esta autora se apropria das ideias de Shön (1983, 1987) ao afirmar que

[...] o profissional reflexivo trabalha de forma tão rigorosa quanto o pesquisador, uma vez que procura identificar problemas e implementar alternativas de solução, registrando e analisando dados, o que faz com que a atividade profissional deixe de ser distinta da atividade de pesquisa (SANTOS, 2008, p. 16).

E diante dos posicionamentos contrários e favoráveis sobre a formação do professor pesquisador discutidos no trabalho de Santos (2008), a autora defende

[...] a ideia de que o professor deve trabalhar como pesquisador, identificando problemas de ensino, construindo propostas de solução com base na literatura e sua experiência, colocando em ação as alternativas planejadas, observando e analisando os resultados obtidos, corrigindo percursos que se mostram pouco satisfatórios. Essa ideia é defendida como forma de desenvolvimento profissional dos docentes e também como uma estratégia para a melhoria do ensino. Estas são questões que estão tanto na agenda dos que discutem os problemas da educação básica, como daqueles que estudam e pesquisam no campo da formação docente. Se os primeiros associam os investimentos na formação do professor com a melhoria do ensino, os segundos buscam compreender os processos de formação dos docentes (2008, p. 16).

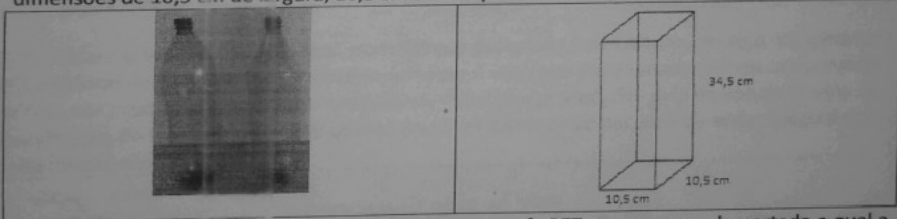
Portanto, é do professor pesquisador que se espera resultados de sua prática para contribuir com todas as demandas da educação pública, ainda muito longe de atingir a qualidade esperada, principalmente por se deparar com muitas dificuldades ao longo do seu trabalho, como está pontuado na seção final desta pesquisa.

6.3.3 Sobre o ensino na perspectiva da aprendizagem de aspectos sociais relevantes

As quatorze questões que compuseram esta atividade foram formuladas com a intenção de associar os conceitos matemáticos estudados nas atividades anteriores com as atividades práticas de reutilização do lixo para confecção de peças artesanais. Esta proposta permitiu contemplar a quarta etapa da Modelagem Matemática defendida por Burak (2004), ou seja, a resolução do problema e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema.

Para esta etapa específica, as questões das Figuras 29, 30 e 31 são mais relevantes e trazem informações que dão subsídios suficientes para a solução do problema levantado, ou seja, “Se o lixo for reutilizado para confecção de peças artesanais, pode contribuir para minimizar os problemas causados pela dengue e pela crise econômica?”

3) As garrafas PET com capacidade útil de 2 litros têm a forma parecida com a de um cilindro e o design dessas embalagens são muito variados. Sendo assim, ainda que sua capacidade seja essa, ao ser descartada, seu volume equivale, em média, à uma caixa retangular com dimensões de 10,5 cm de largura, 10,5 cm de comprimento e 34,5 cm de altura.



Desta forma, calcule o volume que uma garrafa PET ocupa ao ser descartada e qual a capacidade total em litros que este volume equivale.

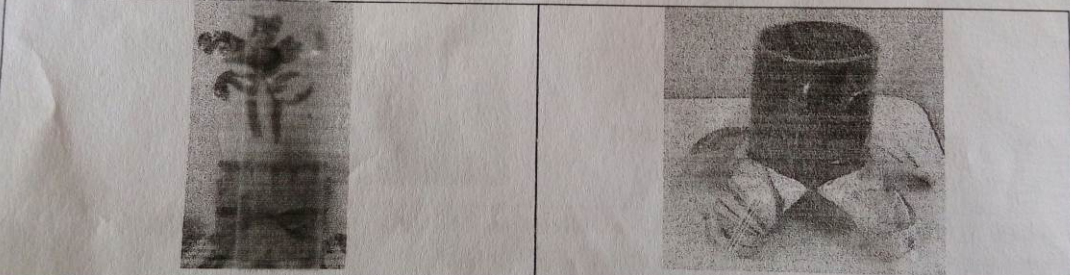
$$10,5 \times 10,5 \times 34,5 = 3804 \text{ dm}^3 = 3804 \text{ dm}^3 = 3,804 \text{ l}$$

R: A capacidade de litros é 3,804 l

Figura 29: Resposta do sujeito A2 para a questão 3 da atividade RP.

Fonte: Dados da pesquisa.

4) A equipe da Oficina de Reutilização do Lixo orientou em três turmas da escola, a confecção de uma flor e de uma luminária com a reutilização de apenas uma garrafa PET, de acordo com o modelo das fotos a seguir



Considerando que 85 alunos participaram desta atividade e que cada um deles utilizou uma garrafa PET, calcule o volume deste material que deixou de ser descartado, a partir das informações do exercício anterior (capacidade total do material ao ser descartado e o volume equivalente).

$$3804 \times 85 = 323,34$$

R= 323,34

5) Para a confecção do vaso de flor, reutilizou-se, a critério do aluno, uma embalagem qualquer. Vamos usar como exemplo a lata de creme de leite, por ser uma embalagem pequena, e imaginar que tenha sido reutilizada como vaso em todos os 85 trabalhos, para que seja possível calcular a capacidade total deste material que deixaria de ser descartado. Desta forma, considere que suas dimensões são de 7,5 cm de diâmetro e 8,2 cm de altura.

$$A = \pi R^2$$

$$3,14 \cdot 44,06 = 44,15$$

Figura 30: Resposta do sujeito A2 para as perguntas 4 e 5 da atividade RP.

Fonte: Dados da pesquisa.

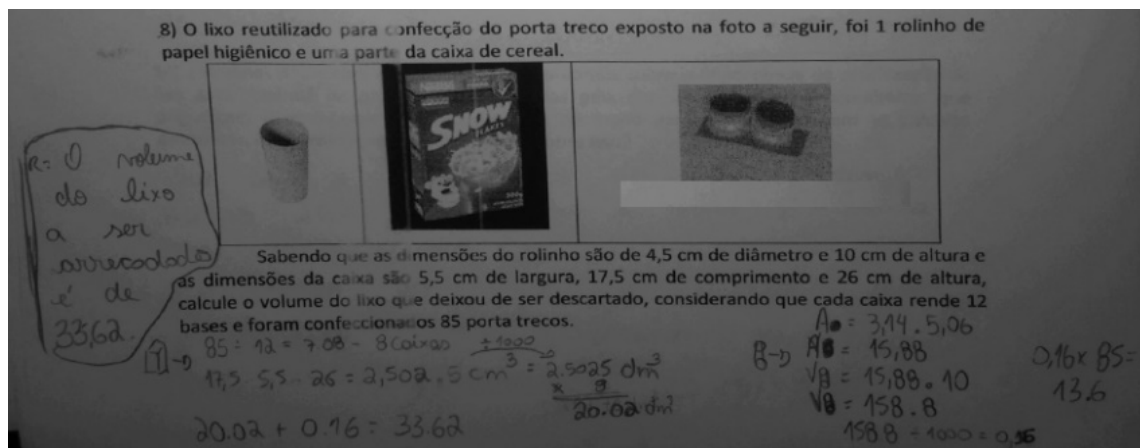


Figura 31: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 8 da atividade RP.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nota: A resposta da questão 8 contém um erro, o termo *arrecadado* deve ser substituído pelo *reutilizado*.

Os dados revelaram que as 85 (oitenta e cinco) garrafas PET utilizadas para confecção das flores e das bases para as luminárias, corresponderam à um volume equivalente a 323,34 litros. As 85 (oitenta e cinco) latas utilizadas como vasos tinham o volume equivalente a 30,77 litros. O volume do material utilizado para a confecção dos 85 (oitenta e cinco) porta trecos, ou seja, dos rolinhos de papel higiênico e das caixas de papelão, equivaliam a 33,62 litros. Isso representou um total de 387,73 litros de lixo que deixou de ser descartado no meio ambiente.

Revelaram ainda que, se todas as peças confeccionadas pelos 85 (oitenta e cinco) estudantes, ou seja, se os vasos de flor, as luminárias e os porta trecos, tivessem sido vendidos pelo preço praticado pela equipe da Oficina de Reutilização de Lixo, seria possível arrecadar o equivalente a R\$ 2.805,00 (Dois mil, oitocentos e cinco reais).

Neste sentido, as informações obtidas a partir da exploração dos conteúdos matemáticos pertinentes ao contexto do tema, permitiram confirmar a hipótese cogitada na ocasião do levantamento do problema. Supunha-se que o artesanato feito a partir da reutilização do lixo, poderia gerar fonte de renda para minimizar os problemas da crise econômica e colaborar com a prevenção da dengue. Uma ação social que tinha dois objetivos: arrecadar algum dinheiro para a escola e reutilizar o lixo como uma forma de diminuir o impacto da dengue. O fato de os cálculos validarem a hipótese, permitiu que o conteúdo matemático ganhasse significado e despertou a atenção dos estudantes como defendem Burak e Klüber (2013). Os autores afirmam que “Na Modelagem Matemática, esse momento é fundamentalmente rico, visto que favorece o trabalho com os conteúdos matemáticos que, assim, ganham importância e significado” (2013. s.p).

Para tanto, Burak (2010a) defende com muita propriedade que

[...] o índice de desenvolvimento de uma nação, sem o concurso de ações de outras áreas do conhecimento, esse número é apenas e tão somente um número, algo frio, estático. O século XXI está a exigir dos seus cidadãos mais do que apontar números, saber agir, diante das constatações (p. 23).

Para chamar ainda mais a atenção dos estudantes sobre a importância da reutilização do lixo e tentar conscientizá-los para esta prática, elaborou-se a questão da Figura 32, resolvida pelo sujeito A2.

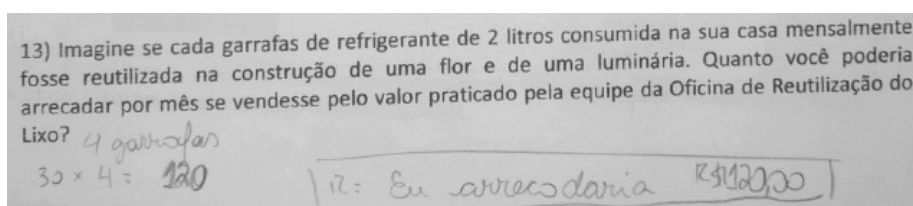


Figura 32: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 13 da atividade RP

Fonte: Dados da pesquisa.

Como o preço do vaso de flor e da luminária era de R\$ 10,00 e R\$ 20,00 respectivamente e considerando o consumo mensal de quatro garrafas PET de refrigerante na casa do sujeito A2, sua arrecadação seria de R\$ 120,00 por mês. Nesta ocasião não foi desconsiderado o fato de que o consumo de refrigerante faz mal à saúde e alertou-se para este problema.

A última questão, portanto, direcionou o trabalho para a quinta etapa da Modelagem Matemática. Sendo assim, buscou-se argumentos para a análise crítica(s) da(s) solução(ões). Seu conteúdo, trazia as informações da Figura 33.

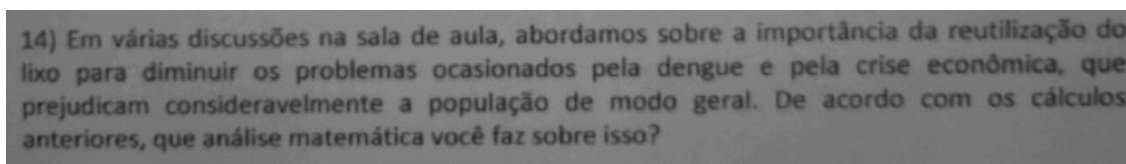


Figura 33: Pergunta 14 da atividade RP.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com exceção do sujeito A15, que afirmou “*Não sou capaz de opinar!*”, os demais sujeitos que responderam a questão, demonstraram entender sobre a importância da reutilização do lixo na confecção de peças artesanais para prevenção da dengue e geração de renda. A estudante identificada como sujeito A15 foi uma das que procurou a colega da

professora pesquisadora para questionar sobre as aulas de matemática, alegando que não estava estudando os conteúdos matemáticos.

No entanto, serão destacadas as respostas de alguns estudantes, com a respectiva transcrição para facilitar o entendimento. O sujeito A11 informou que

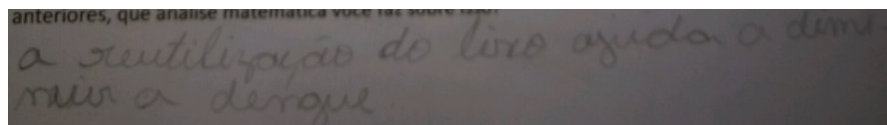


Figura 34: Resposta do sujeito A11 para a pergunta 14 da atividade RP.

Fonte: dados da pesquisa.

Nota: “A reutilização do lixo ajuda a diminuir a dengue”

O sujeito A13 se manifestou de acordo com o que consta na Figura 35.

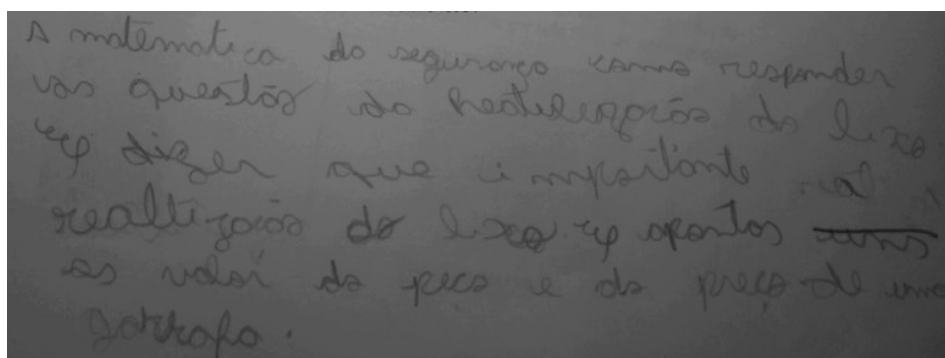


Figura 35: Resposta do sujeito A13 para a pergunta 14 da atividade RP

Fonte: dados da pesquisa

Nota: “A matemática dá segurança como responder as questões da reutilização do lixo. E dizer que é importante a reutilização do lixo. E apontar o valor da peça e do preço de uma garrafa.”

Já o sujeito A12 chegou à conclusão descrita na Figura 36.

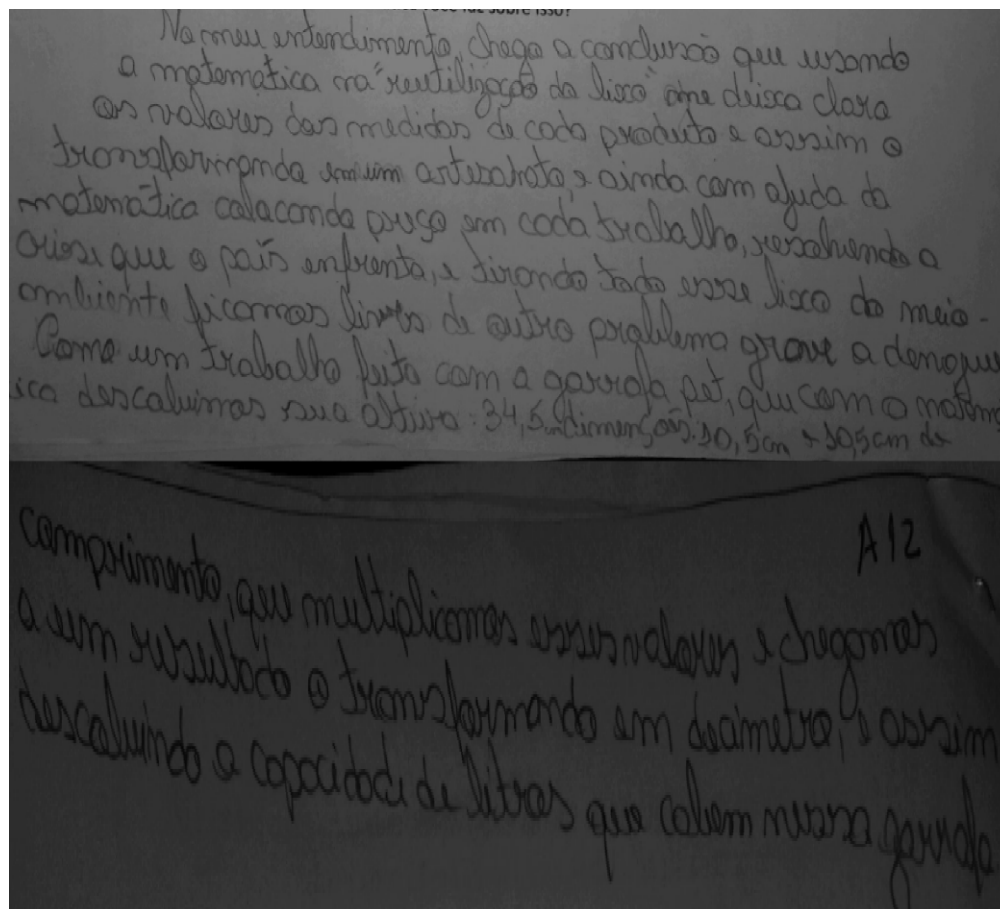


Figura 36: Resposta do sujeito A 12 para a pergunta 14 da atividade RT

Fonte: dados da pesquisa

Nota: "No meu entendimento, chego a conclusão que usando a matemática na "reutilização do lixo" me deixa claro os valores das medidas de cada produto e assim o transformando em um artesanato, e ainda com a ajuda da matemática colocando preço em cada trabalho, resolvendo a crise que o país enfrenta, e tirando todo esse lixo do meio ambiente ficamos livres de outro problema grave a dengue. Como um trabalho feito com a garrafa PET, que com a matemática descobrimos sua altura: 34,5 cm dimensões: 10,5 cm e 10,5 cm de comprimento, que multiplicamos esses valores e chegamos a um resultado o transformando em decímetro, e assim descobrindo a capacidade de litros que cabem nessa garrafa".

A opinião do sujeito A2 está descrita na Figura 37.

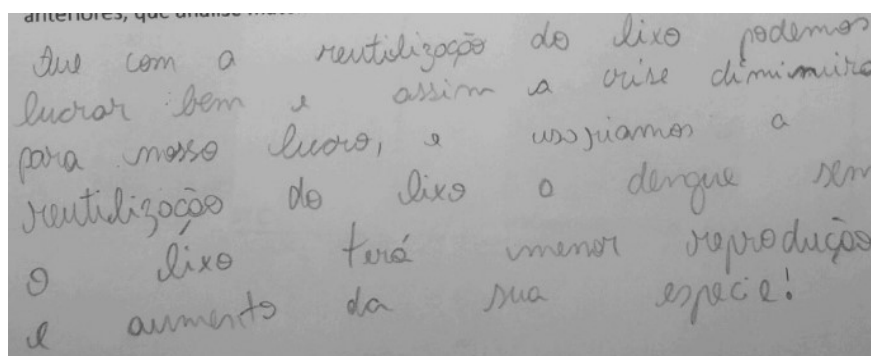


Figura 37: Resposta do sujeito A2 para a pergunta 14 da atividade RP

Fonte: dados da pesquisa

Nota: "Que com a reutilização do lixo podemos lucrar bem e assim a crise diminuiria para nosso lucro, e usariamos a reutilização do lixo a dengue sem o lixo terá menor reprodução e aumento da sua espécie."

O sujeito A21 conseguiu sintetizar bem o resultado do trabalho realizado, com a afirmação disponível na Figura 38.

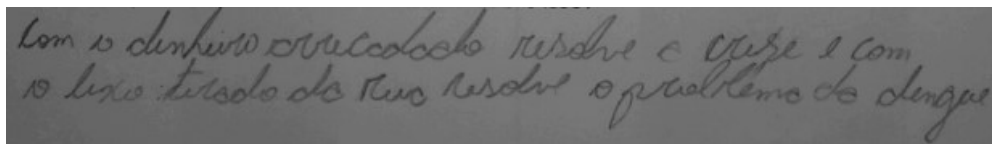


Figura 38: Resposta sujeito A21

Fonte: dados da pesquisa

Nota: “Com o dinheiro arrecadado resolve a crise e com o lixo tirado da rua resolve o problema da dengue.”

Estas respostas revelaram que alguns estudantes não fizeram uma relação direta da matemática com o problema levantado, no entanto conseguiram manifestar esta associação por meio de alguns termos: *lucrar*, *diminuir*, *valor*, *preço*, *menor* e *aumento*. Nota-se que as expressões relacionaram os conceitos matemáticos trabalhados na atividade proposta com o problema levantado. Portanto, ainda que estes estudantes tivessem se manifestado de forma bastante simples, entendeu-se que a contextualização dos conceitos matemáticos foi efetiva. A associação feita pelos estudantes possibilitou atribuir também à Matemática, papel de grande importância para resolver o problema levantado. Por meio da utilização dos conceitos matemáticos estudados e com o envolvimento de tantas outras questões que afetam diretamente a vida de cada um, vislumbrou-se a solução deste e demais infortúnios.

Neste sentido Burak (2010a), aponta outras adversidades que necessitam ser discutidas e aposta na Modelagem Matemática como uma metodologia capaz de colocar em pauta assuntos que são relevantes e merecem destaque na educação.

Um exemplo é o alto índice de poluição, isto é indicado por forma numérica ou gráfica, no entanto o número ou o gráfico não resolvem a situação da poluição que precisa dos conhecimentos de outras ciências para dar significado, favorecer a compreensão e os encaminhamentos de soluções. Soluções essas que nem sempre são matemáticas, mas de atitudes, de posturas, de ações solidárias e que a matemática sozinha não dá conta (p. 23).

A proposta de selecionar o lixo possível de ser reutilizado, pesquisar diversas possibilidades de reutilização, desenvolver estas técnicas e confeccionar peças artesanais que possam gerar lucro, encontrou na matemática a oportunidade de mensurar a quantidade de lixo que deixa de ser descartado e condições de estipular o valor que pode ser arrecadado com a venda das peças produzidas. Isso pôde prevenir a proliferação da dengue e tem grandes

chances de contribuir com a geração de renda. Logo, permitiu uma análise crítica da situação estudada que envolveu conhecimentos sobre a área da saúde, meio ambiente e economia.

Foi este conjunto de atitudes que deu à Matemática, importância e significado merecidos na sala de aula. Esta análise criteriosa é fundamental para que o currículo linear seja repensado, ou ao menos, para que o professor, diante de um currículo neste formato, tenha, de acordo com Ferreira (2016), uma postura não linear.

O entendimento deste autor (2016) foi manifestado quando uma professora, sujeito da sua pesquisa, questionou como poderia trabalhar números decimais com estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, no início do ano letivo, se esse conteúdo deve, de acordo com o currículo, ser trabalhado no final deste período. A necessidade de trabalhar este objeto de ensino, se deu, nesta ocasião, por conta do preço dos ingredientes necessários para a *Salada de Frutas*, tema da Modelagem Matemática desenvolvida nesta turma.

Portanto, constatou-se que é realmente grande a resistência por um trabalho que foge da ordem estabelecida pelo currículo linear.

A professora pesquisadora, após conclusão desta atividade, informou aos estudantes que durante o período que trabalharam com este tema, teve o cuidado de não deixar de descartar os lixos que pudessem ser reutilizados. Inclusive, solicitou que seus colegas contribuíssem para que tivesse material suficiente para trabalhar na sala de aula, como por exemplo, rolinhos de papel higiênico e garrafas PET. Como forma de incentivo para que a reutilização do lixo fizesse parte da rotina dos estudantes, a professora ofereceu a quem tivesse interesse, o lixo que havia sobrado juntamente com um kit de materiais necessários para o trabalho de reutilização. Neste kit, que era embalado por uma caixa de leite encapada pela equipe da Oficina de Reutilização de Lixo, continha um copo de parafina, um refil de cola quente, uma porção de miçangas e alguns pedaços de fitas de cetim coloridas.

Preocupada com a situação de desemprego vivida pelos pais de alguns estudantes e enxergando nesta proposta de reutilização do lixo, uma real possibilidade de geração de fonte de renda, a professora apresentou um vídeo, que já foi comentado anteriormente, sobre o sucesso de uma empreendedora que ganha dinheiro com produção de luminárias, pendentes, biombos, aparadores e jogos americanos artesanais, feitos a partir de filtro de café usado. Esta empresa atende vários clientes do ramo hoteleiro e para que possa suprir a demanda, depende do trabalho de oito funcionários. A empresária presta um grande serviço social nas escolas das comunidades onde a matéria prima é recolhida, por meio de palestras para conscientização sobre a importância da reutilização do lixo.

Como o tema da Modelagem Matemática desenvolvida no presente estudo tem grande relevância social, percebeu-se pelos dados apresentados, que houve aprendizagem dos estudantes no aspecto social, uma vez que, esta metodologia promove uma interação entre várias áreas de conhecimento para possibilitar maior entendimento sobre o assunto. Isso fez com que a escola promovesse conhecimentos que ultrapassam àqueles elencados no currículo visto de forma linear. Este último atende os anseios de uma sociedade focada na educação que prepara para o ingresso na universidade, por meio do vestibular, ou para os exames de seleção que priorizam conhecimentos, muitas vezes desnecessários para a finalidade da vaga concorrida. O currículo seguido de acordo com a linearidade dos conteúdos, suprime o espaço para o tratamento de questões mais amplas. Esta incongruência merece ser superada e as escolas precisam ter autonomia para promover uma educação que seja crítica.

O professor preocupado em atender as demandas de uma sociedade injusta e cruel, priorizando o cálculo mecânico por meio de utilização de fórmulas desprovidas de significado, não oferece ao estudante, a oportunidade de pensar e de compreender o que está fazendo. Não permite que seja estabelecida uma relação entre o mundo real e o objeto cognoscível, negligencia situações merecedoras de atenção, de debates, de investigação, de encaminhamentos e de solução. Não pode

[...] vir a tornar-se um professor crítico se, mecanicamente memorizador, é muito mais um repetidor cadenciado de frases e de idéias inertes do que um desafiador. O intelectual memorizador, que lê horas a fio, domesticando-se ao texto, temeroso de arriscar-se, fala de suas leituras quase como se estivesse recitando-as de memória - não percebe, quando realmente existe, nenhuma relação entre o que leu e o que vem ocorrendo no país, na sua cidade, no seu bairro FREIRE, 2017a, p. 29).

Para que a Modelagem chegue à escola é preciso uma articulação ampla que vença a educação bancária, de tal modo que esta metodologia e outras encontrem espaço, acolhimento e ressonância na escola.

6.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Para que fosse possível conhecer as implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem nos aspectos cognitivo e social, a partir dos argumentos dos estudantes sobre a metodologia adotada, foi aplicado também o questionário do Quadro 41, depois que o trabalho foi concluído, no final do ano letivo. Para evitar qualquer risco de influência da

professora pesquisadora na resposta dos estudantes, a aplicação foi feita pela pedagoga da escola, que foi orientada a não fazer qualquer interferência.

As questões seguintes estão relacionadas ao trabalho desenvolvido durante as aulas de Matemática sobre a reutilização do lixo como alternativa de solução para os problemas da dengue e da crise econômica.					
1) Descreva o trabalho desenvolvido em etapas.					
2) Durante todo o desenvolvimento do trabalho houve:		() muito diálogo () pouco diálogo		Justifique.	
3) Qual ou quais o(s) assunto(s) discutido(s) nestes diálogos?					
4) O diálogo ocorrido nas aulas	() facilitou muito a aprendizagem	() Facilitou a aprendizagem	() facilitou pouco a aprendizagem	() não facilitou a aprendizagem	Justifique.
5) A professora provocou sua curiosidade sobre os problemas sociais que sofremos?					() Sim () Não
Por quê?					
6) A maneira como a professora conduziu as atividades matemáticas envolvidas no trabalho realizado, foi:	Atenção! Você pode marcar mais de uma alternativa. Observe que as alternativas <i>a e b</i> ; <i>c e d</i> , <i>e e f</i> , são contraditórias. a - () Ensinou e depois pediu que resolvessem b - () Pediu que resolvessem como entendiam e depois ensinou c - () Ensinou as fórmulas prontas d - () Orientou que descobrissem as fórmulas por meio de atividades preliminares e - () Houve somente aulas expositivas (explicação oral) f - () Além de aulas expositivas (explicação oral), utilizou outros recursos (materiais diversificados)				Comente, resumidamente como isso aconteceu.
7) O trabalho realizado contribuiu para mudanças em sua vida?		() Nada () Pouco () Muito		Por quê?	
8) Houve momentos em que você preferiu outras formas de trabalhar?		() Sim () Não		Por quê?	
9) Durante o trabalho realizado, você teve oportunidade de tomar suas próprias decisões?				() Sim () Não	Por quê?
10) O trabalho desenvolvido contribuiu para sua atuação no mundo como cidadão?				() Sim () Não	Por quê?
11) A forma como o trabalho foi desenvolvido contribuiu para desenvolver sua criatividade?				() Sim () Não	Por quê?
12) Você ficou motivado a participar das atividades propostas durante o desenvolvimento do trabalho?				() Sim () Não	Por quê?
13) O desempenho da professora na condução do trabalho realizado foi:		() Muito satisfatório	() Satisfatório	() Pouco satisfatório	() Nada satisfatório
14) A professora teve bom senso na condução do trabalho realizado?			() Sim () Não		
15) A professora incentivou a turma para participar das atividades proposta?			() Sim () Não		
Justifique as alternativas escolhidas para as questões 13, 14 e 15.					
16) Durante o desenvolvimento do trabalho, houve a necessidade de realização de pesquisa. Você considera a		Importante? () Sim () Não	Por	Interessante? () Sim () Não	Por quê?
17) Você tem acesso à Internet?		() Sim () Não			
18) Os conteúdos matemáticos que você aprendeu ajudaram a compreender o tema estudado e contribuem para a solução dos problemas levantados?		() Sim () Não	Por quê?		
19) O entendimento que você tinha sobre os conteúdos matemáticos trabalhados foi aprimorado?		() Sim () Não	Justifique.		
20) Você acha que já aprendeu tudo sobre os conteúdos matemáticos que foram trabalhados?		() Sim () Não	Justifique.		
21) Você prefere estudar matemática:		() da forma como foi proposto () por meio de aulas tradicionais		Por quê?	
22) Faça um resumo com sua opinião sobre o trabalho realizado, considerando:	☒ O diálogo ☒ A importância do tema ☒ A aprendizagem da matemática ☒ A relação do trabalho desenvolvido com sua vida pessoal ☒ A metodologia de ensino utilizada ☒ O desenvolvimento da criatividade ☒ A postura da professora quanto à: provocação da sua curiosidade; incentivo e forma de ensinar				

Quadro 41: Questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Os subsídios teóricos que embasaram a pesquisa delinearam a análise desta atividade de forma que fosse possível estabelecer como categorias: a autonomia, a metodologia de ensino, o diálogo, a criatividade, a criticidade, a motivação, a interação professor/estudante e estudante/estudante e a interação estudante/objeto do conhecimento.

Antes de iniciar as discussões sobre as análises, considerou-se importante trazer os trechos da interação que se deu entre professora e estudantes sobre a escolha do tema, a pesquisa exploratória a o levantamento do problema, provenientes da transcrição dos áudios gravados durante o período aproximado de três aulas, que foram destinadas para esta

finalidade. Ainda que estes trechos sejam extensos, preferiu-se trazê-lo praticamente na íntegra, já que contém informações relevantes que auxiliarão esta análise.

Professora: Dá para fazer alguma relação entre a crise e o Aedes?

Sujeito A2: Para tratar os problemas causados pelo mosquito é preciso de dinheiro e em momentos de crise fica difícil arcar com este gasto.

Sujeito A2: Os problemas causados pelo mosquito são muitos, isso causa uma má imagem do Brasil no exterior que deixa de investir no Brasil.

Sujeito A8: Tem gente que não quer vir para as olimpíadas porque tem medo do Aedes.

Professora: O que provoca a crise?

Sujeito Reclassificado⁴³: O desvio de dinheiro.

Professora: O que provoca o Aedes?

Sujeito A8: Doença.

Sujeito A2: Falta de cuidado com a limpeza, falta de orientação.

Professora: O que é falta de cuidado com a limpeza?

Sujeito Reclassificado: Jogar o lixo no quintal e não limpar, deixar jogado.

Sujeito A17: Deixar água parada.

Professora: A principal causa do mosquito é o quê?

Geral: Deixar água parada.

Professora: Como essa água fica parada?

Geral: Vasos, pneus, garrafas, ...

Professora: O que é isso?

Sujeito A8: Lixo

Professora: Então o lixo provoca o Aedes? O lixo é o grande vilão do Aedes?

Geral: Sim

Sujeito reclassificado: É porque eles vêm ali e vão criar mais.

Sujeito A2: Mas eles se criam mais na água.

Sujeito A13: Ué, mas o lixo que fica ali, qualquer sacolinha,

Professora: Estamos falando da água que é acumulada no lixo Sujeito A2.

Sujeito A2: Mas, as vezes pode ser de planta, lá em casa acumula água em planta, caixa de água.

Professora: Conseguimos estabelecer algumas relações entre a crise e o Aedes. (informação verbal)⁴⁴

Já no final da aula, a professora pediu que os estudantes pensassem a respeito do que haviam discutido para poderem continuar a conversa na aula seguinte. Ao retomar o assunto, a sugestão apresentada pelo sujeito A12 foi “A prefeitura poderia oferecer emprego aos que sofreram os efeitos da crise e ficaram desempregados, para a limpeza, o que poderia evitar o mosquito.” (informação verbal)⁴⁵

No entanto, a professora alertou que o problema da crise normalmente causa desemprego, logo, a oferta de vagas se tornaria inviável pela necessidade de corte de gastos, sendo pouco provável a contratação de funcionários nesta circunstância e colocou que.

⁴³ Este estudante foi reclassificado para o 1º ano do Ensino Médio por estar fora da faixa etária para o 9º ano do Ensino Fundamental e por ter os requisitos necessários para a promoção, portanto participou somente das etapas: escolha do tema e levantamento do problema relacionado ao tema da Modelagem Matemática.

⁴⁴ Dados da pesquisa.

⁴⁵ Dados da pesquisa.

Professora: Pensem assim, seria necessário a limpeza se não tivesse a sujeira?

A20: Não né.

Professora: Quando falamos sobre o lixo, nos referimos àqueles que são jogados nos rios, nas ruas, enfim, em lugares inadequados. Se isso não acontecesse, seria necessário a limpeza? Eu preciso necessariamente jogar meu lixo na rua, no pátio, na calçada, na valeta?

Geral: Não

Professora: O que eu posso fazer com meu lixo?

Geral: Reciclar

Professora: O que é reciclar?

Sujeito A8: Separar o orgânico do reciclável.

Professora: Eu separo e o que acontece?

Sujeito não identificado: Limpeza. (informação verbal)⁴⁶

A professora pediu então que se reunissem em grupos para discutirem sobre o assunto e conversou com cada grupo pedindo que pensassem sobre o *vilão* da dengue e que fizessem a relação deste *vilão* com a crise. Seguiu a conversa perguntando:

Professora: Então, qual o vilão principal da dengue que vocês sugeriram?

Geral: Sujeira, lixo

Professora: Você quer dizer a solução que você encontrou? (Referindo-se ao sujeito A8)

Sujeito A8: O lixo que causa a dengue pode ser usado para fazer artesanato para gente usar.

Professora: Se eu estou precisando de alguma coisa, eu procuro construir aquilo com o lixo. Eu evito de comprar aquilo que estou precisando e economizo, o meu problema da crise diminui. Além disso, este artesanato pode ser usado para outra coisa?

Sujeito A8: Vender.

Professora: Dá pra vender gente?

Sujeito A2: Não! Como vai vender se as pessoas estão em crise?

Professora: Esta é uma colocação bem interessante. Como vai vender se as pessoas estão, de modo geral, em crise, não vai ter quem compre. Mas será que a crise se apresenta na mesma intensidade para todas as pessoas?

Geral: Não

Professora: Não né! Eu acho que uma das situações piores da crise é perder o emprego, mas tem muitas outras pessoas que estão empregadas e que não se afetaram tanto quanto as outras, e de repente eles têm poder de compra, ainda. Mas, aquelas pessoas, que perderam o emprego, poderiam usar desse recurso para conseguir dinheiro e resolver o problema da crise? Vocês já ouviram falar de pessoas e empresas que conseguem aproveitar a situação de crise para se darem bem? Porque o que acontece? Elas acabam desenvolvendo uma criatividade maior, e nessa situação de desespero, digamos assim, elas acabam inovando, fazendo coisas diferentes e isso acaba que, aquela pessoa que perdeu o emprego, pode passar a ter uma renda ainda maior do que aquela que tinha. Porque é obrigada a se virar, dar seus pulos. Como que vai sobreviver se não tem trabalho, não tem renda? Perdeu o emprego, não tem renda, aí vai ter que pensar num jeito.

Sujeito A20: Virar bandido.

Professora: Eu entendo que não seja a solução. O que vocês acham? Vale à pena continuar a discussão sobre essa sugestão de virar bandido?

Geral: Não.

Sujeito A8: A pessoas deveriam fazer empréstimo para abrir seu próprio negócio e depois iam melhorando, conforme o tempo.

⁴⁶ Dados da pesquisa.

Professora: Eu acho que o empréstimo não seria o mais indicado, porque normalmente, o valor a ser pago é muito maior do que o emprestado, ele aumenta demais. Normalmente quando a pessoa perde o emprego, tem um acerto a ser feito e a pessoa recebe um valor até razoável.

Sujeito reclassificado: Seguro desemprego.

Professora: Isso, esse valor poderia ser investido no seu negócio. Mas, porque o lixo poderia ser uma boa opção?

Sujeito A2: Para fazer artesanato com o lixo reciclável.

Professora: Tá. Mas, porque o lixo?

Sujeito A19: Porque causa mais a dengue.

Professora: Em relação ao custo para o novo negócio, o lixo custa alguma coisa?

Geral: Não

Professora: A gente produz lixo. Estamos falando de reaproveitamento. Geralmente quando a pessoa abre um negócio, ela precisa de investimento com matéria prima, água, energia, enfim, dependendo do negócio que ela vai fazer, ela precisa investir em tudo isso. No caso do lixo, será que diminui o custo dela de investimento? Vamos supor, se a pessoa tem uma fábrica de roupa, precisa comprar tecido, fio, zíper, acessório, máquinas, mão de obra. No caso do artesanato com o lixo, a despesa vai ser tão alta quanto essa que vai investir numa confecção de roupa?

Sujeito A8: Não porque é menos coisas para comprar no artesanato, por exemplo, cola, ... esses tipos de coisas que custam menos.

Professora: Custam menos e é o lixo em si que vai ser reutilizado. Não vou dizer sempre né, mas pelo menos para um começo de negócio, eu acho que a pessoa pode conseguir isso sem precisar investir. Vocês entendem desta forma? Ao invés de comprar o tecido para confeccionar roupa, ela vai usar o pote de margarina para construir alguma coisa. Quanto custou o pote de margarina? Depois de usado vai jogar fora.

Sujeito A8: É a mesma coisa do presente para o dia das mães que estamos fazendo com o inspetor, com pregador de roupa e copinho descartável.

Professora: Então gente, é a reutilização do lixo para fazer artesanato e ganhar dinheiro. Vocês conhecem alguém que ganha dinheiro com o lixo? Que utiliza o lixo como matéria prima para ganhar dinheiro?

Sujeito A8: Minha tia e meu primo usavam caixas de leite para fazer vasinhos de flor.

Professora: Mas eles ganhavam dinheiro com isso ou não?

Sujeito A8: Vendiam para arrecadar dinheiro para igreja. Encapavam a caixa com retalho de tecido.

Sujeito A14: Tem pessoas que usam latas de cerveja, de alumínio para fazer utensílios de cozinha em miniatura como objeto de decoração.

Professora: [...] preciso que vocês tragam depoimentos, reportagens, notícia ou artigo sobre alguém que consiga ganhar dinheiro com o lixo. Pode copiar e colar, se não tiver como imprimir, pode mandar no meu email ou facebook que vou deixar anotado aqui no quadro. É para amanhã. (informação verbal)⁴⁷

No dia seguinte o assunto foi retomado de acordo com o que segue

Professora: Ontem, hora que eu estava saindo da turma, o sujeito A8 deu uma sugestão de reutilização do lixo para artesanato e ela vai explicar para vocês a ideia que teve. Preciso que ouçam a sugestão dela.

Sujeito A8: Bom, então, agora que está mais organizado com os representantes do grêmio estudantil, acho que seria legal a gente fazer uma feira, que a gente chamaria os pais, a comunidade e a gente faria trabalhos artesanais. Como o vaso que a gente está fazendo para os dias das mães, que seria vendido e então, com o dinheiro arrecadado poderia fazer algo para os alunos e para escola.

Geral: Aplausos e manifestações de apoio.

⁴⁷ Dados da pesquisa.

Professora: O que vocês acham da ideia?

Sujeito não identificado: Tá ótimo.

Professora: Vocês acham que a tentativa de solução da crise e da dengue com a reutilização do lixo é interessante? Vocês têm interesse em trabalhar um projeto neste sentido?

Geral: Sim.

Professora: Quem tem disponibilidade de vir para escola algum dia da semana, no período da manhã?

Oito levantaram a mão.

Professora: Tem algum aluno que não tem interesse em participar desta atividade?

Geral: Não.

Professora: Eu posso contar com a colaboração de todo mundo no horário de aula?

Geral: Sim. (informação verbal)⁴⁸

Foi questionando sobre a opinião dos estudantes e discutindo cada uma delas para que pudesse instigá-los a pensar sobre diversos aspectos sociais, que a professora conduziu suas aulas. Desta forma, conseguiram definir juntos sobre o tema da Modelagem Matemática, encaminharam a pesquisa preliminar e levantaram o problema relacionado ao tema.

Para a análise do questionário apresentado no início desta seção, foram selecionadas uma ou mais perguntas que têm relação com uma das categorias elencadas anteriormente. Antes de discutir sobre cada categoria será apresentado um quadro que contém as respostas dos estudantes para as questões selecionadas com a respectiva justificativa. Porém têm alguns estudantes que responderam à questão, mas não justificaram, nestes casos sua identificação está acompanhada da sigla SJ (sem justificativa). Outros trouxeram uma justificativa incompreensível por ser ilegível ou por não ser possível a interpretação, desta forma, sua identificação está acompanhada da sigla INC (incompreensível). Há também os estudantes que não responderam à questão, assim, sua identificação está localizada em uma coluna ou linha do quadro que contém a sigla SR (sem resposta).

Os formatos dos quadros não foram padronizados por motivo de espaçamento que comprometeria a estética do texto.

6.4.1 Autonomia

O Quadro 42 traz a transcrição das respostas dos sujeitos das pesquisas para a pergunta do questionário apresentado no início desta seção, que tem relação com a categoria autonomia.

⁴⁸ Dados da pesquisa.

9) Durante o trabalho realizado você teve a oportunidade de tomar suas próprias decisões?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Porque pude decidir o que eu ia fazer, sem a opinião de ninguém. • A2 - Alguns faziam obrigados, porém a maioria estava escolhendo. • A4 - Para escolher as cores dos negócios. • A5 - Porque eu me senti mais independente. • A8 - Quando eu fazia artesanato. • A9 - Porque eu podia ter feito, mas não fiz. • A10 - Ela nos dava um exemplo depois pedia para fazer em casa. • A12 - Montar contas de outras maneiras, tem outras ideias sobre a crise. • A13 - Porque ela deu os negócios para nós fazermos do nosso jeito. • A16 - Porque a professora dava liberdade. • A17 - Porque a professora respeitava nossas opiniões. • A20 - Cada um podia fazer o que quisesse. • A22 - Porque a professora sempre perguntava se era isso mesmo que a gente queria. • A23 - Porque eu podia ajudar com algumas decisões minhas. • A26 - Porque fiz o que quis. • A3 - A14 - A21 - A29 - A31 – (SJ)	• A7 - Eu só decoro minha casa com as coisas que aprendi na oficina e não consigo jogar nada no lixo. • A15 - Porque assim quem fazia parte da oficina do lixo dava as ideias e ela só “ouvira” elas (es). • A18 - Prefiro ver quem sabe pra <i>mim</i> aprender. • A30 - Não lembro.	A6 A19 A28

Quadro 42: Respostas da questão 9 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

As justificativas das respostas afirmativas dos sujeitos da pesquisa para esta questão revelaram que os estudantes foram capazes de tomar decisões, uma vez que tiveram liberdade para dar opiniões que foram respeitadas, logo, puderam escolher o que queriam fazer. As justificativas evidenciaram também que a sensação de independência para opinar sobre as possíveis soluções dos problemas da realidade, aliada à oportunidade de aprenderem matemática de maneira diferente, possibilitou condições de os estudantes trabalharem sozinhos. Estas evidências juntamente com o conteúdo dos trechos da discussão trazidos anteriormente, demonstraram que o desenvolvimento do trabalho alicerçado pelo respeito à autonomia permitiu que se vislumbrasse uma possibilidade de contribuir para a solução do problema da dengue e da crise econômica por meio da reutilização do lixo para confecção de peças artesanais.

E partindo do zero, sem qualquer ideia de como o trabalho seria desenvolvido, as opiniões foram ouvidas, as sugestões acatadas, os materiais foram separados, a oficina foi formalizada, as técnicas de artesanato foram pesquisadas, as peças artesanais foram confeccionadas e os conteúdos de matemática foram trabalhados.

Um trabalho nesta perspectiva estimula o desenvolvimento da autonomia e está de acordo com o entendimento de Burak (2010) em defesa da Modelagem Matemática, ao afirmar que a formação deve estar alicerçada por uma metodologia de ensino que tenha o propósito de desenvolver um cidadão autônomo no sentido da criticidade, do trabalho em grupo, da capacidade de tomar decisões na vida cotidiana, familiar e profissional, para que possa enfrentar os desafios impostos pelo século XXI.

Este trabalho também atende ao propósito de Freire (2017), quando se refere à autonomia, ao afirmar que

Saber que devo respeito à autonomia, à dignidade e à identidade do educando e, na prática, procurar a coerência com este saber, me leva inapelavelmente à criação de algumas virtudes ou qualidades sem as quais aquele saber vira inautêntico, palavreado vazio e inoperante. De nada serve, a não ser para irritar o educando e desmoralizar o discurso hipócrita do educador, falar em democracia e liberdade, mas impor ao educando a vontade arrogante do mestre (2017, p. 61).

O alerta da professora na transcrição do áudio exposta anteriormente, sobre a importância de saber enfrentar uma situação difícil como o desemprego e encontrar neste caso, possibilidades melhores de trabalho por meio de atitudes criativas e empreendedoras, talvez tenha reforçado a ideia de que o artesanato feito com o lixo seja uma possibilidade capaz de contribuir com o combate da dengue e reduzir os problemas causados pela crise econômica. A proposta acatada do sujeito A8 de vender para a comunidade escolar, peças artesanais que pudessem confeccionar a partir do lixo, para arrecadar dinheiro para atender algumas necessidades dos estudantes e da escola, é um indicativo de que a mediação da professora pode ter sido importante para a autonomia deste sujeito. Para Freire

A autonomia, enquanto amadurecimento do ser para si, é processo, é vir a ser. Não ocorre em data marcada. É neste sentido que uma pedagogia da autonomia tem de estar centrada em experiências estimuladoras da decisão e da responsabilidade, vale dizer, em experiências respeitadas da liberdade (2017a, p. 105).

Já a afirmação de que virar bandido seria uma alternativa para sobreviver diante do desemprego, sugerida pelo sujeito A20 no trecho do diálogo trazido anteriormente, poderia ser amplamente discutida. No entanto, ao serem questionados pela professora sobre o interesse que tinham em dar sequência na discussão, os estudantes encerram o assunto, muito provavelmente por se tratar de uma afirmação feita por um colega que gosta de brincar durante as aulas, fazendo algumas piadinhas. Caso contrário, esta afirmação seria relevante para discorrer sobre as causas da violência que afeta a sociedade de modo geral. A

vulnerabilidade social de muitos adolescentes, por exemplo, costuma motivar atitudes violentas que podem ser uma reprodução da situação de miséria que enfrentam. A educação envolve sujeitos e é potencialmente responsável pelas suas decisões.

De acordo com Freire, perceber o homem e a mulher

[...] como seres “programados, mas para aprender” e, portanto, para ensinar, para conhecer, para intervir, que me faz entender a prática educativa como um exercício constante em favor da produção e do desenvolvimento da autonomia de educadores e educandos. Como prática estritamente humana jamais pude entender a educação como uma experiência fria, sem alma, em que os sentimentos e as emoções, os desejos, os sonhos devessem ser reprimidos por uma espécie de ditadura racionalista. Nem tampouco compreendi a prática educativa como uma experiência a que faltasse o rigor em que se gera a necessária disciplina intelectual (FREIRE, 2017a, p. 142).

A frieza dos números não predomina nas aulas conduzidas pela Modelagem Matemática na perspectiva adotada, mas sim a análise do contexto que dá sentido e significado à situação estudada. No entanto, o método tradicional de ensinar prioriza o modo certo de calcular e o resultado preciso dos exercícios de fixação, em detrimento do significado da solução de um problema concreto vivido por sujeitos reais.

Para Burak,

O desenvolvimento da autonomia do estudante perpassa pela liberdade de conjecturar, construir hipóteses, analisar as situações e tomar decisões. O erro deve ser entendido como uma aproximação da verdade, pois é mais educativo e preferível o erro resultante de um processo de pensamento, do que uma resposta correta emitida ao acaso, quando o estudante não é capaz de justificar o porquê da resposta dada. O levantamento de problemas é ainda, uma ação cognitiva por excelência, porque é resultado de um encadeamento que promove a intuição e lógica (2010, p. 22).

Neste sentido, a Modelagem Matemática pode favorecer a autonomia do estudante.

Sobre as respostas negativas dos estudantes para a questão do quadro anterior, o sujeito A7 demonstrou não ter entendido a pergunta em vista de seus argumentos, pois revelou que a partir da realização das atividades, mudou sua forma de agir em casa em relação ao lixo e isso significa tomar decisões. Talvez tenha considerado que “só” decorar a casa seja pouco em relação ao grande potencial de reutilização que o lixo oferece. O sujeito A15 afirmou que apenas as ideias dos estudantes que participavam da oficina eram ouvidas, o que não condiz com os fatos, uma vez que, a opinião de todos os sujeitos que se manifestaram no diálogo transcrito anteriormente foi ouvida e respeitada e nesta ocasião a oficina não havia sido efetivada ainda.

Já o sujeito A18 demonstrou que precisa seguir modelos e nesse caso percebe-se que ainda há quem resista a procedimentos mais autônomos preferindo condutas mais heterônomas. Uma postura natural de quem provavelmente foi submetido, durante grande parte de sua vida escolar, aos malefícios proporcionados pelo ensino pautado na racionalidade e se comportou apenas como executor e não como protagonista do processo de aprendizagem. Neste caso, há que se levar em consideração o entendimento de Freire (2017a) ao afirmar que “Sei que ignoro e sei que sei. Por isso, tanto posso saber o que ainda não sei como posso saber melhor o que já sei. E saberei tão melhor e mais autenticamente quanto mais eficazmente construa minha autonomia em respeito à dos outros (p. 92).

De modo geral, a grande maioria dos estudantes demonstrou que teve oportunidade de agir com autonomia durante o trabalho realizado.

6.4.2 Metodologia de ensino

Os Quadros 43 e 44 trazem as respostas dos sujeitos das pesquisas, para as perguntas do questionário que têm relação com a categoria metodologia de ensino.

8) Houve momentos em que você preferiu outras formas de trabalhar?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Teve horas que o jeito que trabalhamos dificultou mais minha aprendizagem. • A2 - Gosto de trabalhar matemática de forma tradicional. • A3 - Não consegui entender muito essas atividades. • A4 - Porque eu ouvi falar que vai passar um pouco da matéria do 9º ano, eu não sei nada. • A8 - Teve momentos que não conseguia entender. • A9 - Porque eu não estava interessado. • A14 - Quando tínhamos que me dir os materiais eu não conseguia entender muito bem. • A17 - Porque só ficava em uma coisa muito tempo. • A18 - Pode ser usado se preciso como uma forma de arrumar alguma coisa que está atrapalhando em casa. • A15 - Porque é muito complicado isso. • A22 - Chegou um tempo que todo esse trabalho repetitivo enjoou. • A27 - Porque prefiro as aulas com os conteúdos normais. • A30 - Porque sim. • A16 - (SJ)	• A5 - Porque aprendia, mas também se divertia e descontraia conversando sobre a matemática. • A10 - A forma que ela conseguia atender bem. • A12 - Concordei em quase tudo e achei super satisfatório. • A20 - Foi divertido. • A21 - Porque não estou acostumado desta forma. • A23 - Pois com esse modo aprendi bem mais fácil. • A26 - Porque estava bom daquele jeito. • A29 - Por causa que gosto do que nós estamos aprendendo. • A32 - Porque aprendia e se divertia. • A7 - Gostei de trabalhar com o lixo e ajudar o meio ambiente.	A6 A13 A19 A28 A31

Quadro 43: Respostas pergunta 8 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

21) Você prefere estudar matemática:		
Por meio de aulas tradicionais?	Da forma como foi proposto?	SR
• A2 - Consigo aprender melhor. • A3 - Mais fácil de compreender. • A4 - Porque eu já não sou boa aprendendo o ano todo imagina em menos de um mês. • A7 - Além de trabalhar com o lixo eu prefiro aulas tradicionais, mas gosto de trabalhar com o lixo. • A8 - Tenho um pouco mais de facilidade. • A9 - Porque é mais fácil apesar do outro ser divertido. • A13 - Porque eu demoro para entender. • A14 - Acho que entendo melhor. • A15 - Porque é mais fácil para aprender. • A16 - Mais fácil. • A17 - Pelos dois porque não fica só em uma coisa chata, sempre é bom mudar um pouco. • A18 - Os dois modos são ótimos de se aprender. • A19 - Porque estou mais acostumado. • A22 - Porque é mais fácil de pegar o conteúdo. • A27 - Porque estou mais acostumada com as aulas tradicionais. • A30 - Mais fácil. • A21 - Prefiro as aulas tradicionais.	• A1 - A aula fica mais divertida. • A5 - Porque era um jeito diferente de ser explicado e ser divertido. • A10 - Acho mais interessante. • A17 - Pelos dois porque não fica só em uma coisa chata, sempre é bom mudar um pouco. • A18 - Os dois modos são ótimos de se aprender. • A20 - Da forma que foi proposto é mais divertido. • A23 - Pois assim podemos aprender melhor. • A26 - Porque é mais legal. • A32 - Porque era um jeito diferente de ser explicado e de ser aprendido.	A6 A12 A27 A28 A29 A31

Quadro 44: Respostas pergunta 21 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes que afirmaram ter havido momentos em que preferiram outra forma de trabalhar, justificaram afirmando que tiveram pouca ou muitas dúvidas porque acharam difícil. As manifestações revelam também que os estudantes se preocuparam com a matéria do 9º ano que não tinham estudado, portanto preferiam aulas tradicionais. Estes dados evidenciaram, ainda que os estudantes não tinham interesse e que havia muita demora para concluir as atividades que eram repetitivas.

Não há como negar que as atividades que envolviam todo o desenvolvimento da Modelagem Matemática levaram um longo período de tempo para serem realizadas, no entanto não dá para desprezar a riqueza das discussões que a metodologia proporcionou. Convém retomar também a preocupação das colegas de área da professora pesquisadora, ao discutirem sobre os conteúdos que ainda precisavam trabalhar até o final do ano letivo, um indicativo de que a falta de tempo necessário para o cumprimento do programa, pode ser vivenciada no ensino que aborda metodologias de ensino diferentes da Modelagem Matemática. Além disso, é importante questionar se a qualidade do ensino está focada apenas no cumprimento do programa, que muitas vezes, aborda conteúdos essenciais para uma área específica, que não é necessariamente, àquela a ser escolhida pela grande maioria dos estudantes para exercer sua atividade profissional.

Neste sentido, merecem ser destacadas algumas considerações sobre os depoimentos de estudantes do ensino médio em relação ao trabalho de Modelagem Matemática que participaram.

O fato de alguns alunos acharem as aulas demoradas e pouco produtivas tem o viés imediatista, onde eles acostumados a receberem informações como se fossem um depósito bancário, Freire (1997). Pensam que é pelo acúmulo de informações que se “sairão bem”, pois a maioria pretendia prestar vestibular no ano seguinte e queria “ver” a maior quantidade de conteúdos possíveis. Ressaltamos, que tais alunos são em grande parte aqueles considerados os melhores da turma e que com toda certeza entendiam a Matemática pela própria Matemática (KLÜBER e BURAK, 2006, sp).

Trata-se de depoimentos parecidos com os obtidos neste estudo e que indicam pensamentos característicos de quem considera o ensino verticalizado como única possibilidade de educação. Ideias que contrariam o entendimento de quem vem sustentando o presente estudo, está referenciado no excerto anterior e afirma reiteradas vezes que ensinar não significa transferir conhecimento, mas saber instigar o educando, que é um sujeito cognoscente, a desenvolver a capacidade de entender e poder comunicar o entendido (FREIRE, 2017a).

Já os estudantes que alegaram não ter havido momentos em que preferiram outra forma de trabalhar, informaram que aprendiam e se divertiam ao mesmo tempo por causa da descontração das conversas, o que facilitava o entendimento. Os estudantes revelaram também que ficaram satisfeitos porque gostavam do que estavam aprendendo e podiam ajudar o meio ambiente.

As justificativas apresentadas para as respostas dos sujeitos da pesquisa que preferiram estudar matemática da forma como foi proposto, ou seja, por meio da Modelagem Matemática, revelaram que as aulas foram mais divertidas e legais uma vez que a matemática era explicada de forma diferente, portanto era mais interessante para aprender. As justificativas evidenciaram ainda que a Modelagem Matemática é uma maneira de diversificar o tipo da aula e de oferecer mais possibilidade para aprender. Nesse caso pressupõe-se que as vantagens atribuídas às aulas conduzidas por esta metodologia estão diretamente relacionadas à diferença de abordagem e ao significado atribuído à aprendizagem.

Enquanto na prática “bancária” da educação, anti-dialógica por essência, por isto, não comunicativa, o educador deposita no educando o conteúdo programático da educação, que ele mesmo elabora ou elaboram para ele, na prática problematizadora, dialógica por excelência, este conteúdo, que jamais é “depositado”, se organiza e se constitui na visão do mundo dos educandos, em que se encontram seus “temas geradores” (FREIRE, 2017b, p. 142).

Por outro lado, as justificativas apresentadas pelos estudantes ao responderem que preferiam estudar matemática por meio de aulas tradicionais, revelaram que é mais fácil de aprender porque estão mais acostumados, portanto, consideram que tem menor dificuldade por ser uma metodologia que oferece maior clareza na forma de ensinar. As inferências possíveis de ser estabelecidas a partir dos argumentos dos estudantes se caracterizam principalmente pela facilidade na aprendizagem, logo, pela preferência por uma educação bancária. Percebe-se que há uma quantidade maior de estudantes que prefere este método de ensino, porém a justificativa está baseada quase que exclusivamente na alegação de que o ensino na perspectiva da aula tradicional é mais fácil. Diferente da variedade de argumentos usados para justificar a preferência dos estudantes pela Modelagem Matemática, visto anteriormente. Os estudantes talvez não percebam que a aprendizagem “promovida” pelo ensino nos moldes de uma educação bancária está condicionada a seguir modelos propostos pelo professor e não à uma verdadeira aprendizagem que lhes permita evocar esses conhecimentos na resolução de problemas de outras áreas. Trata-se de estudantes mais resistentes à autonomia que significa pensar, refletir, tomar decisões, escolher e resolver os

problemas que se apresentam. Seguir modelos propostos pelo professor para passar de ano ou realizar provas parece ser o significado atribuído à aprendizagem.

Se o ensino for pensado como de fato é oferecido desde o princípio da vida escolar dos estudantes, de forma verticalizada, do professor para o estudante, sem que haja possibilidade de debates e discussões, é esperado que haja resistência por uma abordagem diferenciada. Principalmente se for considerado que na metodologia adotada, houve muitas situações em que os estudantes foram instigados a construir o conhecimento matemático, como no caso da dedução das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo. Nestas ocasiões, havia muitas manifestações de dúvidas que já foram comentadas nas análises anteriores, mas vale retomar uma delas. Antes de deduzirem a fórmula do comprimento da circunferência, os estudantes concluíram por meio de atividades práticas, que o número π é proveniente da divisão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro e registraram na língua natural este entendimento. Ao pedir que o π fosse escrito por meio de fórmula, apesar de terem sido retomadas as fórmulas das áreas e perímetros do quadrado e do retângulo como exemplos, e de insistir nesta explicação, a professora precisou disponibilizar aproximadamente duas aulas, para que os estudantes conseguissem registrar a fórmula do número π , ou seja, $\pi = \frac{C}{d}$.

Infere-se, portanto, que muito da dificuldade alegada pelos estudantes para aprenderem por meio da metodologia adotada, pode ser em virtude de terem se deparado com situações em que precisavam pensar, provavelmente em decorrência de estarem acostumados ao ensino fragmentado, meramente técnico. Como isso pode ser fácil? O que normalmente acontece nas aulas tradicionais que abordam este conteúdo é o professor informar a fórmula do comprimento da circunferência, que era o objetivo final da atividade descrita anteriormente, e pedir que os estudantes resolvam os exercícios propostos no livro didático para que possa cobrar este assunto na prova, confiante de que tenham decorado a fórmula.

Não é de estranhar, pois, que nesta visão “bancária” da educação, os homens sejam vistos como seres da adaptação, do ajustamento. Quanto mais se exercitem os educandos no arquivamento dos depósitos que lhes são feitos, tanto menos desenvolverão em si a consciência crítica de que resultaria a sua inserção no mundo, como transformadores dele. Como sujeitos (FREIRE, 2017b, p. 83).

Essa postura do professor, adepto de fórmulas e exercícios prontos é muito comum de ser observada na prática de sala de aula. É difícil sair da zona de conforto e inovar ou fazer diferente, mesmo porque é necessário adotar mudanças radicais, isso toma tempo e requer

maior esforço. Esse comodismo é normalmente justificado pela formação que o professor recebeu, com características de uma educação bancária; pelas condições de trabalho que não condizem com uma prática diferente da habitual; pelo excesso de carga horária de trabalho assumida, enfim, por diversos fatores, que não deixam de refletir a realidade. Romper com o paradigma da educação bancária não é simples. No entanto, em que pese todas as dificuldades apontadas, somente a mudança é capaz de reverter a heteronomia em autonomia.

Acreditando que a mudança é necessária, considera-se essencial que aconteça em caráter de urgência em todos os níveis de escolaridade, ainda que haja resistência como a que foi observada neste estudo. No entanto, seria um absurdo estabelecer um cronograma que iniciasse na educação infantil e acontecesse obedecendo a uma ordem cronológica por etapa de ensino. Isso porque a grande maioria dos estudantes, ou seja, todos os que estão matriculados hoje a partir do primeiro ano do Fundamental não seriam contemplados com a mudança e mais uma geração seria absorvida pelos ideais de um sistema político e econômico dominante, uma vez que

Na medida em que esta visão “bancária” anula o poder criador dos educandos ou o minimiza, estimulando sua ingenuidade e não sua criticidade, satisfaz aos interesses dos opressores: para estes, o fundamental não é o desnudamento do mundo, a sua transformação. O seu “humanitarismo”, e não humanismo, está em preservar a situação de que são beneficiários e que lhes possibilita a manutenção de sua falsa generosidade [...]. Por isto mesmo é que reagem, até instintivamente, contra qualquer tentativa de uma educação estimulante do pensar autêntico, que não se deixa emaranhar pelas visões parciais da realidade, buscando sempre os nexos que prendem um ponto a outro, ou um problema a outro (FREIRE, 2017b, p. 83 e 84).

Ao defender o paradigma do conhecimento complexo de Edgar Morin, Burak (2010) alerta que a mudança é imprescindível e que uma metodologia de ensino que seja mais aberta contribui para que professores e estudantes não aceitem para si uma visão de educação que os identifique com um mundo fechado. Isso permite que saiam da condição de “seguidores” para assumir a condição de “buscadores”.

6.4.3 Diálogo

Os Quadros 45 e 46 contêm as respostas dos sujeitos das pesquisas, para as perguntas que têm alguma relação com a categoria diálogo.

2) Durante todo o desenvolvimento do trabalho houve:
Muito diálogo?
• A1 - Houve bastante diálogo, pois a professora tirou nossas dúvidas, nos ensinou tudo certo. • A2 - Teve bastante diálogo, porém algumas pessoas só ficaram dialogando e não fizeram nada. • A3 - Todos deram suas opiniões, todos conversaram. • A4 - Não sei porque eu não sei o que é diálogo. • A5 - Para ver qual seria o melhor de fazer o que nós iríamos fazer nas próximas etapas. • A7 - Na oficina a gente aprendeu muita coisa com o lixo, é muito legal trabalhar com o lixo e aprender coisas novas. • A8 - Teve bastante conversa em sala. • A9 - A professora explicou bastante e muito diálogo. • A10 - A professora, dando ideias e melhorias do que podia ser feito, explicações do aluno e professora. • A12 - Várias conversas sobre o que a dengue causa, o porquê da dengue, ideias de soluções, como a reutilização pode ajudar, onde a matemática entra. • A13 - Porque todos discutiram bastante sobre o assunto. • A14 - Em muitas aulas debatemos como seria todo esse trabalho, desde os assuntos como dengue a como seriam feitos os trabalhos. • A17 - Ela ficou o tempo todo falando sobre o assunto e tirando as dúvidas. • A18 - Podemos entender mais os trabalhos e exercícios que eram passados. • A20 - Discutimos bastante os fatos da reutilização, como estamos colaborando com o meio ambiente e nós interagimos mais. • A22 - Pois a professora sempre explicava e tirava as dúvidas. • A23 - Porque tivemos que pensar juntos como poderíamos reverter o problema da dengue e da crise. • A26 - Porque nós falávamos em todas as aulas. • A27 - Para chegarmos em uma solução para os dois problemas. • A29 - Porque a professora nos explicava, para que nós entendêssemos. • A32 - Foi conversado bastante sobre os assuntos para depois começarem os trabalhos. • A21 - A31 – (SJ) • A16 – (INC)
Pouco diálogo?
• A4 - Não sei porque eu não sei o que é diálogo. • A6 - A professora passou e depois explicava tudo e nós fazíamos. • A15 - Porque a professora se preocupou muito com o artesanato e falou pouco. • A19 - A professora passava o trabalho e deixava os alunos fazendo não teve muito diálogo.
SR: A28 - A30

Quadro 45: Respostas pergunta 2 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

4) O diálogo ocorrido nas aulas.
Facilitou muito a aprendizagem
• A12 - Tendo um diálogo, conversamos e assim juntamos várias ideias, buscando soluções que realmente funcionam. • A14 - Porque com os exemplos de materiais recicláveis ficou muito mais fácil entender.
Facilitou a aprendizagem
• A1 - Passamos a entender mais o assunto. • A2 - Alguns conseguiram aprender bastante nos diálogos. • A6 - Porque aprendi muita coisa que eu não sabia. • A7 - Aprendemos muita coisa com o lixo, isso nos ajudou com a crise, dengue e a crise econômica. • A9 - Deu para entender mais um pouco sobre os assuntos. • A10 - Ensinou não só um modo para se calcular. • A16 - Porque usamos como modelo para as aulas. • A18 - Porque lembramos dela e conseguimos resolver os exercícios e as provas. • A20 - Conseguimos assimilar mais as questões de matemática. • A22 - Porque era bem explicado e sempre dava para fazer certinho. • A23 - Pois além de aprender a matemática, resolvemos o problema da crise e a dengue. • A29 - Por causa do diálogo agora nós vemos que facilita mais pararmos de jogar lixo na rua para não termos mais a dengue no nosso bairro. • A27 – (SJ)
Facilitou pouco a aprendizagem
• A3 - Não entendi muita coisa. • A5 - Porque era um jeito novo de se aprender e se divertir ao mesmo tempo. • A8 - Não tive muita facilidade para aprender. • A17 - Porque ficou muito tempo só numa coisa. • A19 - Facilitou só um pouco, não ajudou tanto. • A26 - Porque não refleti muito. • A32 - Porque foi mais fácil para entender.
Não facilitou a aprendizagem
• A4 - Porque eu não entendia nada dos assuntos. • A13 - Porque eu não entendia quase nada. • A15 - Eu perdi muito conteúdo e depois não consegui entender o resto da matéria. • A21 - Porque em minha opinião foi mais complicado. • A30 – Não sei. • A31 – (SJ)
SR: A28

Quadro 46: Respostas pergunta 4 do questionário
 Fonte: Dados da pesquisa.

Os sujeitos que alegaram que o diálogo facilitou muito a aprendizagem manifestaram que puderam juntar as ideias e buscar soluções eficientes para o problema levantado, consideraram também que ficou mais fácil de entender com os exemplos de materiais recicláveis.

Ao alegarem que durante o desenvolvimento do trabalho houve muito diálogo os sujeitos manifestaram a possibilidade de tirar dúvidas, dar opiniões, conversar antes de iniciar os trabalhos, definir o que fazer dar ideias, discutir sobre o assunto, falar, debater, interagir, facilitar o entendimento, aprender, pensar juntos sobre o problema e encontrar a solução.

Manifestaram também que o diálogo permitiu que a professora ensinasse de maneira correta para facilitar o entendimento.

Estes argumentos revelaram o lado positivo do diálogo na sala de aula, porque demonstraram a importância desta abertura para o desenvolvimento do estudante e o aprimoramento do ensino.

Freire (1983) entende que “se a educação é dialógica, é óbvio que o papel do professor, em qualquer situação, é importante”.

Ele precisa provocá-lo a manifestar suas opiniões, tirar suas dúvidas, expor seus anseios, revelar seus desejos, expressar suas inquietudes e numa postura mediada pela amorosidade e pela vontade de promover a problematização do objeto cognoscível, instiga-lo a buscar as respostas para seus questionamentos que certamente indicarão o caminho para amenizar suas angústias. Para Freire (2017a) esta relação de proximidade permite que tanto professor como estudantes aprendam, sem que haja a prepotência daquele que se imagina conhecedor da verdade, nem a humilhação de quem pensa ignorá-la. O autor (2017a) afirma que uma postura dialógica tanto de professor como de alunos deve ser entendida como aberta, portanto, curiosa, indagadora e não apassivada enquanto se comunicam. Assim, professor e alunos devem se assumir epistemologicamente curiosos.

Os dados trazidos revelam que a voz dos estudantes foi ouvida, que houve respeito pela manifestação de cada um e que todas elas, postas em discussão, puderam direcionar o encaminhamento das atividades. Sendo assim, Freire (2017a) afirma que

[...] quem tem o que dizer deve assumir o dever de motivar, de desafiar quem escuta, no sentido de que, quem escuta diga, fale, *responda*. É intolerável o direito que se dá a si mesmo o educador autoritário de comportar-se como proprietário da verdade de que se apossa e do tempo para discorrer sobre ela. Para ele, quem escuta sequer tem tempo próprio, pois o tempo de quem escuta é o seu, o tempo de sua fala. Sua fala, por isso mesmo, se dá num espaço *silenciado* e não num espaço *com* ou *em* silêncio. Ao contrário, o espaço do educador democrático, que aprende a falar escutando, é “cortado” pelo silêncio intermitente de quem, falando, cala para escutar a quem, *silencioso*, e não *silenciado*, fala (p. 114 e 115, grifos do autor).

No entanto, há os sujeitos que entenderam que o diálogo facilitou pouco a aprendizagem. Porém trouxeram justificativas dicotômicas porque alguns alegaram que não entenderam muita coisa, não tiveram facilidade para aprender, não ajudou tanto, não refletiram muito e que ficou muito tempo apenas numa coisa. Enquanto outros justificaram que era um jeito novo de aprender se divertindo e que foi mais fácil para entender. Talvez estes últimos sujeitos não tenham compreendido o questionamento feito.

Quanto aos sujeitos que afirmaram que o diálogo não facilitou a aprendizagem justificaram que não entendiam nada, perderam conteúdos e foi mais complicado. Portanto, infere-se que foi a falta de diálogo que prejudicou a compreensão destes sujeitos, porque, a transcrição dos áudios que foram gravados revelou que estes estudantes não interagiram com a professora durante o trabalho realizado. Por mais que tivessem sido provocados a falar, questionar e emitir opiniões, não se manifestaram em qualquer momento, logo, não houve diálogo com estes estudantes porque eles não se dispuseram a isso.

Saber escutar é fundamental em uma educação dialógica, no entanto, não significa emudecer. É preciso ouvir para discordar e manifestar esta discordância. Calar-se diante do que não lhe agrada, silenciar a dúvida e se eximir do direito de opinar é negligenciar a oportunidade de expor o que sente, é omitir o que desconhece, é deixar de compartilhar o que conhece, é se fechar na individualidade e egoísmo de suas verdades, portanto

Escutar é obviamente algo que vai mais além da possibilidade auditiva de cada um. Escutar, no sentido aqui discutido, significa a disponibilidade permanente por parte do sujeito que escuta para a abertura à fala do outro, ao gesto do outro, às diferenças do outro. Isto não quer dizer, evidentemente, que escutar exija de quem realmente escuta sua redução ao outro que fala. Isto não seria *escuta*, mas autoanulação. A verdadeira escuta não diminui em mim, em nada, a capacidade de exercer o direito de discordar, de me opor, de me posicionar. Pelo contrário, é escutando bem que me preparo para melhor me colocar ou melhor me situar do ponto de vista das ideias. Como sujeito que se dá ao discurso do outro, sem preconceitos, o bom escutador fala e diz de sua posição com desenvoltura. Precisamente porque *escuta*, sua fala discordante, em sendo afirmativa, porque escuta, jamais é autoritária (FREIRE, 2017, p.117, grifos do autor).

Ainda que este excerto seja direcionado ao professor que deve saber ouvir, não deixa de ser adequado ao estudante que silenciado, não aproveita com intensidade a oportunidade do diálogo. O posicionamento destes estudantes de preferirem se limitar a ouvir, pode ser proveniente da resistência às mudanças por estarem absorvidos pelo estigmatizado ensino tradicional, por não terem percebido que na Modelagem Matemática o diálogo deve prevalecer. Burak e Klüber (2013) defendem a importância de favorecer a discussão entre os estudantes sobre variados aspectos relacionados ao tema sugerido nesta metodologia de ensino, com a participação do professor que deve assumir o papel de mediador, sempre desafiando os estudantes a se envolverem na discussão. Desta forma, evita-se que

Sempre em nome de que o estudante precisa de certos pré-requisitos, para a continuidade dos seus estudos e que no ano seguinte serão cobrados certos conteúdos, as experiências verdadeiramente significativas no âmbito da sala de aula são deixadas de lado (BURAK, 2010, p.19).

Para que estas experiências sejam exploradas ao ponto de que possam promover uma educação dialógica, não se pode prescindir de suas condições elementares, saber ouvir e saber falar.

6.4.4 Criticidade

As respostas dos sujeitos da pesquisa para as perguntas do questionário que estão relacionadas com a categoria criticidade encontram-se transcritas nos Quadros 47, 48 e 49.

7) O trabalho realizado contribuiu para mudanças em sua vida?
Muito
• A1 - Porque passei a reciclar mais, a reutilizar o lixo, em vez de pegar e jogar tudo fora. • A12 - Passei a reutilizar mais e economizar também. • A23 - Porque eu passe a reciclar mais o lixo e transformá-lo em algo para vender, e até mesmo enfeitar a própria a casa.
Pouco
• A2 - Entendi o porquê reutilizar lixo, mas não pratico. • A5 - Os lixos “poderá” se feitas coisas boas e ajudando o meio ambiente. • A7 - Decoro muito pouco meu quarto com as coisas que aprendi na oficina. • A8 - Consigo organizar melhor as coisas. • A10 - Penso que ao invés de jogar uma garrafa PET no lixo, poderia fazer algo para torná-la ainda reutilizável. • A13 - Porque eu usei algumas coisas que aprendi para fazer um porta treco de vidro para guardar minhas maquiagens. • A14 - Não consegui participar de todas as aulas, mas as que participei aprendi a reciclar mais o lixo. • A16 - Não coloco muito em prática em casa. • A17 - Porque eu já reutilizava algumas coisas em casa. • A18 - Eu não tenho tanto tempo de poder usar ele na minha casa e fora. • A22 - Porque lá em casa não somos muito acostumados a reutilizar o lixo. Mas, porém me fez enxergar o lixo de uma forma diferente que posso reutilizá-lo e coisas assim. • A29 - Por causa que menos lixo na rua é igual a nada de dengue. • A32 - Porque o lixo pode ser usado para coisas boas.
Nada
• A3 - Nem participei. • A4 - Porque eu não estou usando isso e porque já esqueci tudo. • A9 - Porque não fiz. • A15 - Eu não reutilizo lixo. • A20 - Porque não gosto de artesanato. • A21 - Porque não tenho o costume de usar essa prática. • A26 - Porque não mudou nada em minha vida. • A30 - Não lembro. • A31 - (SJ)
SR: A6 - A19 - A27 - A28

Quadro 47: Respostas pergunta 7 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

10) O trabalho desenvolvido contribuiu para sua atuação no mundo como cidadão?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Antes eu não ligava muito, jogava lixo na rua, agora eu cuido muito mais e procuro jogar lixo no lixo. • A2 - Eu entendi como cidadão que devo me preocupar, porém não gosto da reutilização do lixo. • A5 - Porque todos nós fazendo a nossa parte para ter um mundo melhor. • A7 - Hoje não jogo mais nada no lixo, reutilizo e decoro minha casa e meu quarto. • A8 - Reciclo mais ainda. • A10 - Fazemos cálculo até para saber quanto iremos ganhar. • A12 - Reutilizei mais o lixo, se vejo objetos que possam acumular água ou que estejam com água retiro na hora. • A13 - Para separar o lixo. • A14 - Aprendi que tem coisas que são desnecessárias jogarmos, pois podemos fazer enfeites, contribuindo assim muito com o meio ambiente. • A16 - Para cuidar mais. • A18 - Pode me ajudar os outros quando precisa. • A20 - Reciclar é vida. • A21 - Porque muita gente aprendeu coisas novas. • A22 - Porque aprendi que com poucas coisas dá para melhorar as coisas. • A23 - Assim podemos mudar o mundo e deixa-lo um lugar melhor para os habitantes. • A29 - Porque temos que cuidar do mundo para o mundo ser mais limpo. • A32 - Porque fazendo a minha parte posso deixar o mundo melhor. • A17 - A31 – (SJ)	• A3 - Não ajudou. • A9 - Porque não fiz. • A15 - Porque eu não ajudo as pessoas, se elas jogam papel no chão eu deixo. • A30 – Porque não. • A4 - A26 - (INC)	A6 A18 A27 A28

Quadro 48: Respostas pergunta 8 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

18) Os conteúdos matemáticos que você aprendeu ajudaram a compreender o tema estudado e contribuem para a solução dos problemas levantados.		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Porque com os temas matemáticos você pode calcular melhor, na hora de você fazer o trabalho. • A2 - Uma coisa leva a outra, os conteúdos ajudavam para a realização. • A3 - Me ajudou. • A5 - Porque ela mostrava o desenho e você tinha que descobrir a fórmula dele. • A8 - Porque são coisas simples que conseguimos fazer. • A14 - Porque eu aprendi bastante. • A15 - Porque é importante os temas. • A16 - Porque usamos as medidas. • A18 - Os dois utilizam contas curiosas e difíceis. • A22 - Porque era sempre explicado e depois vinham os trabalhos para ajudar. • A23 - Assim nós ajudamos mais todos, e aprendemos a matemática. • A26 - Porque aprendemos a contar os problemas. • A32 - Porque mostrava o desenho e tinha que descobrir a fórmula dele. • A7 - Matemática tem um pouco com o lixo a gente faz cálculos para fazermos decorações. • A17 – (SJ)	• A4 - Porque eu não entendia nada. • A9 - Porque quase aprendi nada. • A13 - Porque eu não entendi quase nada. • A15 - Porque eu não aprendi. • A20 - Duas coisas completamente diferentes. • A21 – (SJ)	• A6 • A12 • A18 • A27 • A28 • A29 • A30 • A31

Quadro 49: Respostas pergunta 18 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados revelaram que o trabalho desenvolvido contribuiu muito para mudanças na vida dos estudantes, no sentido de favorecer a reciclagem e reutilizar o lixo para transformá-lo em peças que possam ser vendidas e utilizadas para a decoração da casa. Os estudantes mudaram de atitude também deixando de jogar tudo fora e economizando com a reutilização do lixo.

As manifestações dos estudantes afirmando que o trabalho desenvolvido contribuiu pouco para mudanças em sua vida, evidenciaram que apesar de entenderem porque o lixo deve ser reutilizado, não adotaram esta prática por falta de interesse ou falta de tempo. Evidenciaram também que têm estudantes que já reutilizavam o lixo, mas a maior parte deles passou a decorar e organizar os ambientes com o lixo reutilizado, a partir do que aprenderam nas aulas.

Mesmo que ainda não seja uma prática recorrente, estes estudantes demonstraram ter entendido sobre a importância desta prática, uma vez que afirmaram conseguir enxergar o lixo de forma diferente e por defenderem que menos lixo na rua, significa nada de dengue. Estas

manifestações representaram a justificativa dos estudantes ao defender a pouca contribuição do trabalho desenvolvido para mudança em sua vida. No entanto, entende-se que grande parte destas justificativas representaram uma mudança considerável. Infere-se, portanto, que as alternativas oferecidas para responder esta pergunta do questionário não representavam o que, de fato, pretendiam responder, já que, ao se referir às mudanças que o trabalho desenvolvido pôde proporcionar à vida deles, podiam optar por muita, pouca ou nada. Percebe-se que há uma distância entre as alternativas muita e pouca, portanto, faltou uma opção intermediária. Neste sentido, houve falha na elaboração do questionário.

Os estudantes que responderam não ter havido qualquer contribuição para mudança em sua vida que pudesse ser promovida pelo trabalho desenvolvido, justificaram que não participaram das atividades e que não reutilizavam o lixo porque não tinham este hábito, por não gostarem de artesanato ou porque já tinham esquecido como faz.

As respostas afirmativas para a questão “O trabalho desenvolvido contribuiu para sua atuação no mundo como cidadão?”, revelaram a mudança de atitude dos estudantes em relação ao lixo no sentido de: deixarem de jogar na rua e passarem a jogar na lixeira; de retirarem do meio ambiente evitando acúmulo de água; de separarem e de deixarem de jogar fora. As respostas mostraram também a preocupação de alguns estudantes com o lixo, ainda que não gostassem da reutilização, por entenderem que é necessário contribuir com o meio ambiente por meio dos cuidados necessários com o lixo. Já os estudantes que demonstraram ter gostado da proposta de reutilização, informaram que depois de terem aprendido coisas novas, passaram a: reutilizar; decorar; calcular quanto podem ganhar com as peças confeccionadas; ajudar quem precisa e mudar o mundo para melhor.

Já as respostas negativas para a mesma questão, evidenciaram o posicionamento dos estudantes no sentido de: não ajudar; não fazer e não orientar quem joga lixo no chão.

Sobre os dados obtidos a partir destas duas questões, faz-se importante trazer o entendimento de Ferreira e Burak (2011) sobre a etapa da análise crítica das soluções da Modelagem Matemática ao afirmarem que a análise não se resume apenas ao modelo matemático, mas aos conteúdos, aos

[...] significados e no que os alunos podem contribuir para a melhoria das ações e decisões enquanto pessoas integrantes da sociedade e da comunidade em que participam. A análise crítica das soluções pode passar por discussões de problemas não matemáticos, mas sociais, humanos, culturais e econômicos ou ambientais. Vale ressaltar que essa criticidade deve permear todo o processo de Modelagem e pensar a Educação em um contexto mais amplo” (p. 7 e 8).

Os dados revelaram também que por mais que houvesse disposição da professora em trabalhar no sentido de despertar o interesse dos estudantes por questões sociais tão relevantes, não foi possível atingir a todos.

As respostas afirmativas para a questão “Os conteúdos matemáticos que você aprendeu ajudaram a compreender o tema estudado e contribuem para a solução dos problemas levantados?”, revelaram que os estudantes resolveram os problemas por conseguirem calcular melhor, facilitando a realização das atividades, portanto, aprenderam bastante. As respostas também evidenciaram que a matemática ajudou a descobrir a importância do tema, uma vez que puderam relacionar o conhecimento matemático com o lixo, fazendo cálculos para decoração e utilizando medidas. Além disso, os dados mostraram que os estudantes conseguiram descobrir a fórmula a partir do desenho e apesar de alguns estudantes considerarem que esta estratégia de cálculo é difícil, acharam curioso.

Os estudantes que se manifestaram negando a ajuda dos conteúdos matemáticos para a compreensão do tema e para a solução do problema levantado, justificaram que não entenderam ou não aprenderam nada e que são coisas completamente diferentes.

Este entendimento pode, de acordo com Freire (2017b), ser proveniente do condicionamento proporcionado por uma visão mecanicista que impede a percepção da visão do mundo, que por consequência, impede suas atitudes e seu enfrentamento, fazendo-os entender que a transformação da realidade pode ser feita em termos mecânicos, ou seja, “[...] sem a problematização desta falsa consciência do mundo” (p. 175).

Mesmo que estes últimos estudantes tenham alegado que os conteúdos matemáticos não contribuíram para a compreensão do tema e solução do problema levantado, percebe-se que representam a minoria, uma vez que a grande maioria se posicionou de forma contrária. Vale ressaltar que o resultado foi positivo e está de acordo com o entendimento de Soistak e Burak (2005) sobre a análise crítica da solução da Modelagem Matemática, ao defenderem que esta etapa “[...] permite aos alunos o desenvolvimento de sua criticidade, reflexão, coerência, enfim a relação e adequação dos resultados com a realidade, adequabilidade, coerência e exequibilidade do resultado (p. 2 e 3).

Diante dos dados apresentados infere-se que o ensino, na perspectiva da Modelagem Matemática teve grande influência para o desenvolvimento da criticidade dos estudantes, observado na etapa de análise crítica das soluções, situação em que os estudantes manifestaram ter adotado mudanças de comportamento importantes para sua vida pessoal com atitudes responsáveis que refletem na vida social.

Neste sentido, vale trazer primeiro o entendimento que Freire (1979) tem sobre a conscientização. O autor (1979) defende que

A conscientização implica, pois, que ultrapássemos a esfera espontânea de apreensão da realidade, para chegarmos a uma esfera crítica na qual a realidade se dá como objeto cognoscível e na qual o homem assume uma posição epistemológica. [...] A conscientização não pode existir fora da “práxis”, ou melhor, sem o ato ação – reflexão. Esta unidade dialética constitui, de maneira permanente, o modo de ser ou de transformar o mundo que caracteriza os homens (FREIRE, 1979, sp).

A realidade que acaba de ser transformada pelo processo de conscientização, logo, de reflexão e ação, já requer outras mudanças, que a demanda da sociedade em constante evolução, determina. São novos anseios, outros objetivos que requerem uma mudança contínua, uma busca incessante. Não pode haver espaço para a estagnação. Portanto

A conscientização, como atitude crítica dos homens na história, não terminará jamais. Se os homens, como seres que atuam, continuam aderindo a um mundo “feito”, ver-se-ão submersos numa nova obscuridade. A conscientização, que se apresenta como um processo num determinado momento, deve continuar sendo processo no momento seguinte, durante o qual a realidade transformada mostra um novo perfil (FREIRE, 1979, sp).

E é esse ritmo frenético que a educação deve seguir, inovando o tempo todo, enquanto o que se observa é uma inércia que paralisa o processo de ensino. Um engessamento tal, que requer uma obediência cega ao cumprimento do programa. O rigor estabelecido por alguns professores pela necessidade de esgotar todo o conteúdo delineado para um período letivo, não permite sequer justificar esta submissão, muito provavelmente por não haver argumentos razoáveis que possam esclarecer tamanha resignação. Ainda que isso pareça absurdo para a educação do século XXI, representa o retrato da educação no Brasil.

Tentando romper com a educação bancária e procurando promover uma educação dialógica, portanto libertadora, trabalhou-se na perspectiva da Modelagem Matemática, para que o estudante tivesse voz e vez. Para que ele pudesse, segundo Freire (1979, sp) tomar o distanciamento necessário da realidade que vive para poder admirá-la, objetivando-a e assim agir para transformá-la de forma consciente, ou seja, exercitar a práxis humana, que representa “[...] a unidade indissolúvel entre minha ação e minha reflexão sobre o mundo” (FREIRE, 1979, sp).

Foi observando as mazelas que a crise econômica provoca e o sofrimento que a dengue produz que se objetivou um cenário preocupante, mas em condições de ser revertido. Logo, a conscientização deste infortúnio se deu pela reflexão e ação. Foi refletindo sobre as

possibilidades de contribuir para a redução dos problemas apontados, que surgiu a ideia da reutilização do lixo para confecção de peças artesanais. Esta prática fez emergir a necessidade do estudo de conteúdos matemáticos para esclarecer que, deixando de jogar um volume de lixo equivalente a 387,83 litros, poderia ser arrecadado R\$ 2.805,00 (Dois mil, oitocentos e cinco reais). Neste caso, as fórmulas, as propriedades matemáticas e os cálculos estudados ganharam significado por terem sido úteis à solução do problema levantado.

Foi esta constatação que provocou a curiosidade em conhecer trabalhadores que ganham dinheiro com atividades desta natureza e descobrir que este tipo de empreendimento, pode vir a ser uma opção de fonte de renda promissora.

Foi este motivo também que despertou a preocupação e o interesse pela reutilização do lixo como possibilidade de economia e de combate ao consumismo.

A educação tradicional, ainda dominante nos dias de hoje, promoveria esta conscientização?

Ainda que haja resistência pela Modelagem Matemática, seja por professores, pais ou até mesmo pelos estudantes, é preciso pensar na abrangência e possibilidades desta metodologia no sentido de poder promover uma educação integral, defendida pelo Ministério da Educação ao recomendar que as instituições educacionais devem

[...] repensar suas práticas e procedimentos, a construir novas organizações curriculares voltadas para concepções de aprendizagens como um conjunto de práticas e significados multirreferenciados, inter-relacionais e contextualizados, nos quais a ação educativa tenha como meta tentar compreender e modificar situações concretas do mundo (BRASIL, 2009, p. 36).

Não basta que estas orientações estejam apenas referenciadas em documentos oficiais, é necessário que sejam estabelecidas no âmbito da escola, que na sua grande maioria, mantém a forma de organização, burocratização e ensino com características semelhantes às do século passado.

Neste sentido, Freire alerta que

A desconsideração total pela *formação* integral do ser humano e a sua redução a puro *treino* fortalecem a maneira autoritária de falar de cima para baixo. Nesse caso, *falar a*, que, na perspectiva democrática é um possível momento do *falar com*, nem sequer é ensaiado. (2017a, p. 113, grifos do autor).

Enquanto o ensino verticalizado, tão criticado pelo autor (2017a) não sair de cena, mais distante ficará a possibilidade de se viver em um país que seja, de fato, democrático.

6.4.5 Criatividade

O Quadro 50 traz as respostas dos sujeitos das pesquisas, para as perguntas do questionário que têm alguma relação com a categoria criatividade.

11) A forma como o trabalho foi desenvolvido contribuiu para desenvolver sua criatividade?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Com o lixo reciclável eu enfeitei muito meu quarto, inventei muitas coisas. • A5 - Porque nos ensinava inventar as coisas e ser mais criativa. • A9 - Porque eu pude pensar mais um pouco o que fazer. • A10 - Além de pesquisar, tenho minhas próprias ideias. • A12 - Ao passar do tempo tive ideias de como fazer objetos de decoração. • A13 - Porque você começa a criar as coisas. • A14 - Porque tínhamos que pensar em como enfeitar alguns trabalhos como flores, achar vasos. • A16 - Porque fazíamos e criávamos coisas que não imaginava. • A20 - Dá para fazer várias coisas com o artesanato. • A22 - Porque eu aprendi a fazer coisas legais com materiais tão simples e fácil de achar. • A23 - Assim eu pude pensar em modos de transformar o lixo. • A26 - Porque tive muitas ideias. • A32 - Tive mais imaginação para inventar outras coisas. • A29 - A31 – (SJ) • A7 – (INC)	• A2 - Para mim não foi desenvolvido isso. • A3 - Não gostei muito das atividades. • A4 - Porque eu tenho uma imaginação muito ruim. • A8 - Não sou boa nessas coisas. • A15 - Porque eu não fazia as atividades pedidas. • A17 - Porque eu não tenho muita criatividade. • A21 - Porque não tenho boa criatividade. • A30 - Nem um pouco.	A6 A19 A27 A28

Quadro 50: Respostas pergunta 11 do questionário
Fonte: Dados da pesquisa.

Para esta categoria, selecionou-se a pergunta que trata da contribuição do trabalho realizado para desenvolver a criatividade dos estudantes. As respostas afirmativas para esta questão evidenciaram que os estudantes entenderam que a professora ensinava a fazer coisas criativas e a partir daí conseguiam pesquisar, ter as próprias ideias e pensar no que poderiam fazer para então, confeccionar peças que antes não imaginavam ser possível. Os estudantes revelaram também ter descoberto no lixo várias possibilidades de reutilização e transformação, que fizeram desenvolver a imaginação e a criação de objetos diversificados de decoração, com o uso de matéria prima simples e acessível a todos.

Quanto às manifestações destes estudantes, infere-se por meio de seus argumentos que a professora conseguiu incitar sua curiosidade porque tiveram liberdade para pensar, expressar e agir. Neste sentido, convém ressaltar que, de acordo com Freire (2017a), é a curiosidade que provoca a criatividade. Para este autor

A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere e alerta faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos (FREIRE, 2017a, p. 33).

Entende-se, que a criatividade ganha destaque na Modelagem Matemática, uma vez que esta metodologia oferece condições de poder desenvolvê-la. Ao comentar sobre a construção de maquetes em um trabalho de Modelagem Matemática, Burak e Klüber (2007) observaram manifestações criativas, portanto entendem que

Ao relacionar aspectos da criatividade com o método da Modelagem Matemática, percebeu-se algumas variáveis que podem influenciar esse tipo de comportamento dos grupos envolvidos; a mudança de postura do professor, o tema que é de interesse do grupo, o papel que o professor passa a desempenhar no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, a liberdade, como síntese de todas essas variáveis, parece constituir-se no fator determinante da criatividade (p. 13).

No entanto, ainda que o ensino nesta perspectiva dê liberdade para o desenvolvimento da criatividade dos estudantes, têm aqueles que, condicionados à obediência, sentem a necessidade de instruções e orientações pré-estabelecidas para que possam fazer o que é objetivamente determinado, reforçando a heteronomia. Ao serem desafiados a trabalhar de forma autônoma, os estudantes mais resistentes a esta proposta, acomodam-se e preferem se omitir.

A omissão, neste caso, trouxe justificativas incoerentes, como as apresentadas pelos estudantes ao responderem que o trabalho realizado não contribuiu para desenvolver sua criatividade. Suas manifestações revelaram que não fizeram as atividades propostas porque não gostavam, porque não tinham habilidade com o artesanato ou porque não eram criativos.

Portanto, infere-se que o trabalho realizado não teria qualquer possibilidade de desenvolver a criatividade de quem deixou de participar e esses estudantes não poderiam afirmar desgosto pelo que foi proposto sem experimentarem fazer o que era solicitado. Entende-se também que é infundado alguém afirmar que não tem criatividade, uma vez que a criatividade precisa ser desenvolvida.

Confiante de que a Modelagem Matemática oferece condições para o desenvolvimento da criatividade, Burak e Klüber (2007) a destacaram em um dos pontos que subsidiou a análise e discussão dos estudos do primeiro autor sobre esta metodologia de ensino. De acordo com os autores

[...] as discussões, as manifestações e as reflexões em relação ao emprego da Modelagem Matemática no ensino de Matemática possibilitaram a análise e a discussão de alguns pontos que subsidiaram, [...], o trabalho de doutorado. São eles: 1) O respeito às diferenças dos participantes; 2) A liberdade como uma condição para desenvolver a criatividade; 3) Como avaliar o trabalho na Modelagem Matemática; 4) A contribuição das discussões e das reflexões com os professores; 5) Avaliação do curso (BURAK e KLÜBER, 2007, p. 5)

Ao pontuar alguns aspectos positivos e significativos da Modelagem Matemática para os estudantes, Burak (2010a) refere-se à etapa da resolução dos problemas, diferenciando-a da forma encontrada na maioria dos livros textos, uma vez que está inserida no contexto da situação estudada. Sendo assim, entende que um dos contornos e significados diferentes que esta etapa promove em relação à maneira usual de trabalhar a Matemática, é favorecer a criatividade.

Em outro estudo Burak (2006) mostra o entendimento de professores que atribuem o fracasso da Matemática ao ensino, com o seguinte depoimento “a falta de se trabalhar a Matemática de acordo com o interesse e a criatividade dos alunos”. O trabalho nesta perspectiva reforça o ensino bancário que, de acordo com Freire (2017a, p. 27) “[...] deforma a necessária criatividade do educando e do educador [...]”.

Os argumentos apontados anteriormente sobre a Modelagem Matemática, evidenciam que se trata de uma metodologia com grande potencial para desenvolver a criatividade dos estudantes. Por ser uma metodologia capaz de promover a educação dialógica, está na contramão do ensino verticalizado. Neste sentido, há que se considerar o alerta de Freire ao afirmar que

A autoridade docente mandonista, rígida, não conta com nenhuma criatividade do educando. Não faz parte de sua forma de ser, esperar, sequer, que o educando revele o gosto de aventurar-se. [...] Há um sinal dos tempos, entre outros, que me assusta: a insistência com que, em nome da democracia, da liberdade e da eficácia, se vem asfixiando a própria liberdade e, por extensão a criatividade e o gosto da aventura do espírito. A liberdade de mover-nos, de arriscar-nos vem sendo submetida a uma certa padronização de fórmulas, de maneiras de ser, em relação às quais somos avaliados (FREIRE, 2017a, p. 90 e 111).

Como, em uma educação dialógica, aprende tanto estudantes como professor, não dá para desconsiderar a experiência vivida pela professora pesquisadora, que antes do levantamento do problema relacionado ao tema da Modelagem Matemática trabalhada no presente estudo, não tinha qualquer experiência com atividades artesanais desta natureza. No entanto, além de se identificar muito com a proposta, que até então era desconhecida, a professora se envolveu ao ponto de ser responsável pelo curso ReutilizArte: Preservar, Transformar e Empreender, criado no ano seguinte da coleta de dados, conforme discussão mais detalhada trazida na parte final desta pesquisa. Sendo assim, a experiência mostra que a professora não consegue sequer mensurar o tanto que conseguiu desenvolver sua criatividade com esta prática, o que lhe proporciona grande satisfação.

6.4.6 Motivação

A categoria motivação foi analisada por meio das respostas dos sujeitos para a pergunta do questionário, que foram transcritas e estão disponíveis no Quadro 51.

12) Você ficou motivado a participar das atividades propostas durante o desenvolvimento do trabalho?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Porque gostei muito do assunto e gostei muito de participar. • A2 - Nem todas, mas a maioria das atividades eu participei. • A3 - Comecei a achar legal. • A5 - A32 - Porque era um jeito novo de aprender. • A8 - Achei interessante. • A10 - Curiosidade de algo novo. • A12 - Foi uma forma de trabalho novo, um jeito divertido de aprender. • A13 - Um pouco. • A14 - Porque achei legal. • A16 - Porque é muito interessante e acaba nos ajudando. • A17 - Porque o trabalho era bem legal e fazia a turma interagir mais. • A18 - É uma coisa legal e podemos nos comunicar mais. • A22 - Pois achei interessante. • A23 - Porque chegamos a vários temas e dois que chamaram a nossa atenção. • A26 - Porque gostei do trabalho. • A29 - Porque eu gostei da ideia de reutilizar o lixo.	• A4 - Porque não. • A7 - É difícil levantar cedo, mas é legal aprender coisas novas com o lixo. • A9 - Preguiça. • A13 - Um pouco. • A15 - Porque não gosto dos alunos da minha turma. • A21 - A31 - (SJ)	• A6 • A19 • A20 • A27 • A28 • A30

Quadro 51: Respostas pergunta 12 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

A questão que trata da motivação para participar das atividades propostas durante o desenvolvimento do trabalho, trouxe como justificativa das respostas afirmativas, o interesse dos estudantes pelo assunto. Outras justificativas estão relacionadas à natureza das atividades desenvolvidas que foram consideradas pelos estudantes um jeito novo, legal, interessante e divertido de aprender, despertando a curiosidade e promovendo a interação entre os colegas. Os estudantes revelaram ainda que gostaram de reutilizar o lixo, que o trabalho tratou de temas que chamaram sua atenção e que pode ajudá-los.

Percebe-se que a maior parte destes argumentos está relacionada ao entusiasmo, que, pode ter sido confundido com o real significado de motivação. Neste sentido, é importante primeiro definir o significado dessas palavras. De acordo com o dicionário online Priberam, motivação significa ato de motivar ou de se motivar, que quer dizer “Expôr os motivos de [...] fundamentar [...] dar motivo a. Já, segundo o mesmo dicionário, entusiasmo significa “Estado de espírito impellido a manifestar a admiração que o assoberba [...] Força, veemência; transporte, arrebatamento [...] Paixão viva; inspiração” (PRIBERAM, 2013).

Os argumentos revelando que o trabalho ajudou os estudantes a aproveitarem mais o lixo por meio da sua reutilização, estão mais próximos do real significado da palavra motivação, uma vez que estabelece uma relação entre os motivos que fundamentam a ação.

Neste sentido, vale esclarecer algumas considerações de Burak e Klüber (2013) a esse respeito. Os autores (2013, p. 4) defendem dois princípios para a adoção da Modelagem Matemática como metodologia de ensino que já foram discutidos anteriormente, ou seja, “1) partir do interesse do grupo de pessoas envolvidas; e 2) obter as informações e os dados no ambiente onde se localiza o interesse do grupo” e afirmam que

Esses princípios buscam consolidar as ações a partir do interesse dos estudantes envolvidos em uma atividade de Modelagem. Intuitivamente, mostramos, algumas vezes, interesse por coisas ou fatos que são benéficos, vantajosas ou nos são agradáveis e outras vezes por aquilo que nos inquieta, nos causa transtorno e temos o desejo de resolver. [...] O interesse pela atividade está diretamente relacionado à motivação intrínseca e ganha força também no contexto que nutre tanto o interesse como a motivação (BURAK e KLÜBER, 2013, p. 36).

Paralelo a isso, Freire alerta que

Tenho o direito de ter raiva, de manifestá-la, de tê-la como motivação para minha briga tal qual tenho o direito de amar, de expressar meu amor ao mundo, de tê-lo como motivação de minha briga porque, histórico, vivo a História como tempo de possibilidade não de determinação. Se a realidade fosse assim porque estivesse dito que assim teria de ser não haveria sequer por que ter raiva. Meu direito à raiva pressupõe que, na experiência histórica da qual participo, o amanhã não é algo “prê-dado”, mas um desafio, um problema. A minha raiva, minha justa ira, se funda na

minha revolta em face da negação do direito de “ser mais” inscrito na natureza dos seres humanos (2017a, p. 73).

Ainda assim, houve quem não se sentisse motivado diante do problema levantado no trabalho de Modelagem Matemático desenvolvido neste estudo, ainda que seja de grande relevância social. Mesmo que se trate de uma minoria dos estudantes, as justificativas pela falta de motivação em participar das atividades propostas, foram manifestadas por sentirem preguiça ou por dificuldade de interação com os colegas da turma. Mais uma vez, percebe-se a omissão, àquela comentada anteriormente que revela uma característica de quem é acomodado, muito provavelmente pelo costume de “receber” um ensino na perspectiva da verticalização do saber. Sendo assim, inflamado pelo sentimento de inconformidade com o sistema dominante, Freire (2017a), prossegue sua fala, alertando ainda que

Não posso, por isso, cruzar os braços fatalistamente diante da miséria, esvaziando, desta maneira, minha responsabilidade no discurso cínico e “morno”, que fala da impossibilidade de mudar porque a realidade é mesmo assim. O discurso da acomodação ou de sua defesa, o discurso da exaltação do silêncio imposto de que resulta a imobilidade dos silenciados, o discurso do elogio da adaptação tomada como fado ou sina é um discurso negador da humanização de cuja responsabilidade não podemos nos eximir (p. 74).

Contextualizando a brilhante demonstração de inconformismo do autor (2017a) para o presente estudo, considera-se que o silêncio e o comodismo manifestado pela omissão dos estudantes que não se sentiram motivados a participar das atividades propostas, carecem de superação. Neste sentido, entende-se que mais oportunidades de ensino na perspectiva adotada, podem favorecer o entendimento sobre os motivos que fundamentam a ação. Neste caso específico, as dificuldades causadas pela crise econômica que o país enfrenta e os sérios problemas que assolam a saúde pública por conta da dengue são motivos razoáveis que fundamentam a reutilização do lixo para confecção de peças artesanais, como possibilidade de fonte de renda, que representa uma ação. E para além disso, há que se considerar a relevância desta prática para conscientização sobre a importância da preservação do meio ambiente. Este é, portanto, um esboço da relação que se fazia necessária para que fosse estabelecida a motivação almejada no trabalho de Modelagem Matemática realizado neste estudo. Porém, alguns casos isolados, que correspondem à minoria dos estudantes, ainda que mereçam ser analisados, não obscurecem a motivação e o entusiasmo observados nas manifestações da grande maioria vista anteriormente.

6.4.7 Interação professor/estudante e estudante/estudante

A análise seguinte se refere à categoria interação professor/estudante e estudante/estudante que foi realizada a partir da transcrição das respostas dos sujeitos das pesquisas, para as perguntas do questionário que têm alguma relação com esta categoria e que estão disponíveis nos Quadros 52, 53, 54 e 55.

5) A professora provocou sua curiosidade sobre os problemas sociais que sofremos?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Não sabia nada sobre o assunto e fiquei curiosa. • A3 - É legal o diálogo que ela usa. • A5 - Porque era um jeito mais interessante de aprender. • A8 - Porque achei interessante. • A9 - Porque é uma verdade sobre a reciclagem. • A10 - Deu vontade de tentar ajudar em que puder. • A12 - Mostrou-se preocupada com tantas pessoas morrendo por dengue, tendo a solução em mãos. • A14 - Porque vimos que com tanta coisa que jogamos dá para fazer várias coisas legais para enfeites e que poluimos muitos lugares jogando esses materiais, provocando dengue entre outras doenças. • A18 - Podemos saber mais sobre os problemas sociais e as crises que passamos, mas podemos tentar dar um jeito. • A19 - Porque ela explicou coisas que muita gente não sabia. • A20 - Temos que dar mais valor às coisas que temos e não jogar tudo fora. • A22 - Porque é uma coisa que afeta a todos. • A23 - Podemos resolver os problemas nós mesmos e assim não sofreríamos com esses problemas. • A29 - Por causa da dengue, do lixo e dos impostos. • A32 - Porque era um jeito interessante de aprender. • A16 – (SJ)	• A2 - Eu não vi nenhum aluno realmente preocupado com problemas sociais. • A4 - Não entendi nada do assunto. • A15 - Eu não me importo com essas coisas. • A17 - Eu já sabia sobre os problemas sociais que sofremos. • A26 - Porque mesmo se provocasse curiosidade não posso ajudar. • A30 - Só me fez odiar matemática que antes eu gostava. • A21 - A31 – (SJ)	A6 A7 A13 A27 A28

Quadro 52: Respostas pergunta 5 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

13) O desempenho da professora na condução do trabalho foi:
Muito satisfatório
• A5 – A13 - Porque tinha paciência para ensinar os alunos. • A7 - Além da professora gostar de trabalhar com o lixo, o desempenho dela foi muito satisfatório. • A8 - Foi muito responsável e dedicada. • A14 - Porque ela veio até a escola de manhã por vários dias e também disponibilizou materiais para nós. • A20 - A professora se mostrou bem disposta a ajudar todos e isso é bem legal. • A23 - Ela ajudou em vários modos para ajudar esse problema. • A3 - A12 - A16 – A18 - A26 - A31 – (SJ)
Satisfatório
• A1 - Eu e muitos alunos ficamos satisfeitos com o trabalho realizado. • A2 - Conseguiu puxar algumas pessoas. • A10 - A professor se empenhou e entusiasmou a atividade. • A15 - Não muito bom, foi médio. • A22 - Ela sempre corria atrás das coisas para a gente poder fazer. • A9 - A13 - A17 – (SJ)
Pouco satisfatório
• A4 - Não achei legal. • A21 – (SJ)
Nada satisfatório
• A30 – Não lembro
SR: A6 - A19 - A28

Quadro 53: Respostas pergunta 13 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

14) A professora teve bom senso na condução do trabalho realizado?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - A professora teve muito bom senso no trabalho. • A2 - Incentivou, porém não cooperaram. • A4 – Porque sim • A5 - Porque todos colaboravam com a professora. • A7 – Ela teve um bom senso com o trabalho. • A8 - Teve paciência e responsabilidade. • A10 - Ela fazia uma boa pesquisa antes de mostrar aos alunos. • A14 - Ouvia a opinião de todos, críticas construtivas e não construtivas. • A15 - Porque ela escolheu as atividades com sabedoria. • A20 - Conseguiu trabalhar bem. • A22 - Ela sempre muito paciente com a gente. • A23 - Ela teve muita paciência para ensinar todos nós e ajudou em nossas escolhas. • A29 - Porque ajudou nisso. • A30 – Não lembro • A32 - Porque todo mundo colaborava. • A3 - A9 - A12 - A13 - A16 - A17 - A18 - A21 - A26 - A31 – (SJ)		A6 A19 A27 A28

Quadro 54: Respostas pergunta 14 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

15) A professora incentivou a turma para participar das atividades propostas?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - A professora incentivou muito a turma reciclar e cuidar mais das coisas. • A4 - Ela ficava incentivando fazer. • A5 - A32 - Porque é trabalho dela. • A7 - Incentivou os alunos a trabalhar com o lixo, e cuidar do meio ambiente. • A8 - Sempre conversava com os alunos. • A9 - Foi porque ela insistia a reciclar. • A10 - Sempre apresentou ideias novas para ajudar a cativar a curiosidade dos alunos. • A14 - Poucos participaram, mas ela incentivou sim. • A15 - Porque ela fez até um kit para os alunos reutilizarem lixo em casa. • A18 - Ela queria que todos ajudassem o mundo, a crise, si próprios e aos outros com novos jeitos de aproveitar a vida. • A20 - Todos nós tivemos oportunidade. • A21 - Porque ela usou bons argumentos. • A22 - Ela sempre ficava falando que nossos trabalhos estavam lindos, mesmo não estando tudo isso. • A23 - Ela estava sempre pedindo para nós reutilizarmos, até fez uma oficina onde quem quisesse entrar, entrava e transformava o lixo em obra de arte. • A29 - Para ajudar a economizar mais tempo. • A30 - Não lembro • A3 - A12 - A13 - A16 - A17 - A26 - A31 - (SJ)		A6 A19 A27 A28

Quadro 55: Respostas pergunta 15 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao responderem afirmativamente a questão: “A professora provocou sua curiosidade sobre os problemas sociais que sofremos?”, os estudantes justificaram alegando que a professora usava um diálogo legal e mostrou-se preocupada com as mortes causadas pela dengue que poderiam ser evitadas com a ajuda de todos, tratando de assuntos desconhecidos pela maioria. Com isso, os estudantes informaram que a professora provocou: o interesse por aprender; a preocupação com os problemas sociais discutidos; a vontade ajudar e o desejo de reutilizar o lixo a partir da valorização de coisas simples.

Desta forma, vale ressaltar o entendimento de Burak, sobre a prática docente nesta perspectiva.

O papel de professor na qualidade de mediador é de importância fundamental no trabalho com a Modelagem, pois esse é o momento em que se pode contribuir de forma significativa com o estudante no desenvolvimento de sua autonomia, na formação de um espírito crítico (BURAK, 2010, p. 22).

Este desenvolvimento faz parte do processo de transformação da curiosidade ingênua em curiosidade epistemológica defendida por Freire (2017a) e discutida reiteradas vezes nesse estudo. Para o autor “[...] a curiosidade ingênua que, ‘desarmada’, está associada ao saber do senso comum, é a mesma curiosidade que, criticizando-se, aproximando-se de forma cada vez

mais metodicamente rigorosa do objeto cognoscível, se torna curiosidade epistemológica (FREIRE, 2017a, p. 33).

Quando a interação na sala de aula se dá de forma que há disponibilidade para o diálogo, ao contrário do que normalmente se vê em uma educação bancária, as ideias dos estudantes são respeitadas, para que, a partir delas, o trabalho seja conduzido em busca de resolver o problema levantado, que em muitos casos, reflete os anseios e necessidades do grupo.

É importante observar que o trabalho com a Modelagem Matemática não requer rigidez, como àquela que amordaça muitos professores ao adotarem o ensino usual da Matemática, baseado quase exclusivamente às orientações contidas no livro didático. A Modelagem Matemática é mais aberta e está sujeita a imprevistos. Este dinamismo foi observado por Burak (2006) ao trabalhar com a formação de professores dispostos a desenvolver esta metodologia com seus estudantes da educação básica. O estudo revelou que

O transcorrer do trabalho foi apontando outras perspectivas para os professores na medida que se rompia com a concepção usual de ensinar Matemática. O encaminhamento do trabalho, sempre na defesa do interesse do grupo, ensejava constante atenção do pesquisador em mediar o trabalho, não se tornando o centro do processo, entretanto, muitas vezes, valendo-se da formulação de questões norteadoras ou a proposição de novas hipóteses para uma determinada situação ajudava a reconduzir o processo à forma concebida (BURAK, 2006, sp).

No mesmo estudo, Burak (2006) discute sobre o contato com a realidade e traz as impressões dos estudantes que tiveram oportunidade de conhecer uma comunidade carente durante o trabalho com Modelagem Matemática, evidenciando que

Os depoimentos dos alunos mostraram um aspecto muito interessante: o contato com a realidade. A participação efetiva em um projeto, vivenciando todas as suas etapas revelou uma tomada de consciência; dos alunos participantes, da condição de extrema dificuldade vivida por uma população carente de todas as condições básicas para a dignidade humana. A falta de água, de emprego, de atendimento médico, de melhores condições de moradia enfim, de acesso às condições mínimas que promovam a dignidade humana (2006, sp).

Porém, há os estudantes que, habituados àquele ensino usual da Matemática comentado anteriormente, não entendem que podem aprender em situações que não sejam as convencionais.

Neste sentido, os dados trazidos no Quadro 52 revelaram que os estudantes que responderam negativamente à questão: “A professora provocou sua curiosidade sobre os problemas sociais que sofremos?”, alegaram que não perceberam a preocupação dos colegas

com os problemas sociais, que não se importavam com isso ou que já sabiam sobre estes problemas. Alegaram também que não entenderam sobre o assunto, que não poderiam ajudar, ainda que tivessem curiosidade sobre o assunto e que passaram a odiar a matemática, por conta do trabalho desenvolvido.

Percebe-se que estes estudantes resistiram a outra proposta de ensino e entendem os encaminhamentos adotados na Modelagem Matemática, desvinculados da Matemática. Não conseguiram fazer um liame dos problemas da vida real com os conhecimentos matemáticos, enxergando estes últimos como úteis à solução dos primeiros.

Dificuldades semelhantes foram observadas na pesquisa de Klüber e Burak (2006) ao revelarem a visão dos estudantes sobre a Matemática que havia sido estudada por meio da Modelagem Matemática, desenvolvida na perspectiva de Burak. Ancorados na base teórica de Platão (1986), os autores (2006) evidenciaram que as manifestações dos estudantes

[...] são frutos de uma construção histórica de longa data. Pois esta disciplina tem procedimentos lógicos e formais desde Platão, passando por Descartes e Leibniz. Para esses pensadores as idéias matemáticas eram vistas apenas como construção da razão e a mais confiável de todas. Essas construções teóricas perduram por séculos e ainda hoje permeiam praticamente toda construção científica da civilização ocidental. [...] identificou-se que os alunos estão sendo simplesmente informados e não formados, pois a repetição de fórmulas não conduz para um aprendizado significativo. Isso ficou claro porque a maioria dos alunos afirmou que na Matemática é preciso memorizar fórmulas e outros procedimentos exaustivos (KLÜBER e BURAK, 2006, p. 5 e 6).

É importante deixar claro que os autores (2006) não desconsideram a importância desses pensadores, responsáveis por prodigiosos feitos da nossa civilização, no entanto alertam que

[...] as idéias fragmentárias e particionadas que corroboram para a exclusão da interação entre sujeito e objeto, se voltando apenas para este último (conteúdo matemático), prejudicam e muito o desenvolvimento escolar. E diante disso, entendemos que as idéias matemáticas se tornaram estranhas e, por conseguinte, parecendo tão difíceis e sem conexão com a realidade. Com isso, reforçando a incoerência de se dar mais importância para um falso objeto da Educação, que seria apenas a (Matemática), do que para o sujeito (educando), na interação (KLÜBER e BURAK, 2006, p. 6).

Neste sentido, é importante reiterar o entendimento de Freire (1983) ao afirmar que, por maior que seja sua tradição, existe um lamentável equívoco quando a busca do conhecimento se dá numa relação reduzida entre sujeito cognoscente e objeto cognoscível, uma vez que provoca o rompimento de uma estrutura dialógica do conhecimento.

Sobre a questão que trata do desempenho da professora na condução das atividades propostas, os estudantes que responderam ter sido muito satisfatório justificaram que a professora: teve paciência para ensinar; gostava de trabalhar com o lixo; foi responsável e dedicada; se disponibilizou a trabalhar no contra turno com a oficina de reutilização do lixo; providenciou os materiais necessários para a realização dos trabalhos e se mostrou disposta a ajudar.

Já as respostas dos estudantes que afirmaram ter sido satisfatório o desempenho da professora na condução das atividades propostas, alegaram que a professora: providenciava o que era preciso para a realização do trabalho; conseguiu conquistar os estudantes e se empenhou com entusiasmo. Desta forma, os estudantes ficaram satisfeitos de modo geral, já que tem um estudante que não considerou o desempenho da professora muito bom.

Apenas um estudante respondeu que o desempenho da professora foi pouco satisfatório justificando que não achou legal. Não houve qualquer estudante que tenha considerado o desempenho da professora nada satisfatório.

Percebe-se pelas manifestações dos estudantes que o trabalho com a Modelagem Matemática evidenciou encaminhamentos diversos, que foram muito além do que normalmente é observado no ensino tradicional. Esta prática não se limitou a preparar aula, explicar o conteúdo, propor algumas atividades e avaliar o que foi ensinado. De acordo com Burak e Klüber (2013)

No trabalho com a Modelagem, o papel do professor fica redefinido, pois este passa a ser o mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo; o problematizador, ao promover e articular situações decorrentes do processo; o orientador, no sentido dos possíveis encaminhamentos a serem adotados. Essas atitudes se diferenciam das do ensino usual, em que, na maioria das vezes, o professor é o centro do processo. O fato de compartilhar o processo de ensino denota uma nova postura do professor. (p. 48 e 49).

Um trabalho dinâmico desta natureza requer um envolvimento tanto de professor como de estudantes, em busca do conhecimento e da descoberta sem a preocupação de que o ensino se limita no dever do professor ensinar e do estudante aprender. Todos aprendem sem que haja preconceito porque

Educador-educando e educando-educador, no processo educativo libertador, são ambos sujeitos cognoscentes diante de objetos cognoscíveis, que os mediatizam. Poder-se-á dizer, e não têm sido poucas as vezes que temos escutado: “Como é possível pôr o educador e o educando num mesmo nível de busca do conhecimento, se o primeiro já sabe? Como admitir no educando uma atitude cognoscente, se seu papel é o de quem aprende do educador?” Tais indagações, no fundo, objeções, não podem esconder os preconceitos de quem as faz. Partem sempre dos que se julgam

possuidores do saber frente a educandos considerados como ignorantes absolutos. De quem, por equívoco, erro ou ideologia, vê na educação dialógica e comunicativa uma ameaça. Ameaça, na melhor das hipóteses, a seu falso saber (FREIRE, 1983).

Aberta aos imprevistos, a Modelagem Matemática provoca a curiosidade, respeita o interesse, aceita sugestões, busca informações, estimula a criatividade, esclarece dúvidas, resolve problemas e desenvolve a criticidade.

As respostas afirmativas para o questionamento sobre o bom senso da professora na condução do trabalho realizado foram justificadas pelos estudantes alegando que a professora: teve paciência e responsabilidade para ensinar; incentivou e ajudou os estudantes; soube ouvir as críticas construtivas e não construtivas; conseguiu fazer um bom trabalho e soube escolher as atividades com sabedoria porque fazia uma boa pesquisa antes da realização das atividades. Com isso alguns estudantes alegaram que houve colaboração de todos e outros consideraram que não foram todos que cooperaram. Não houve respostas negativas para esta questão.

Durante todas as etapas da Modelagem Matemática é possível instigar os estudantes a participarem ativamente do trabalho, desde a primeira etapa, como defendem Burak e Brandt (2010) ao se referirem à variedade de temas a serem escolhidos partindo do interesse dos estudantes

[...] que podem envolver brincadeiras, esportes, atividades industriais, comerciais, econômicas, agrícolas, prestação de serviços e outros. Esse procedimento exigirá outra postura por parte do professor, ao compartilhar com os alunos o processo de ensino, que geralmente é prerrogativa do professor, e também um novo papel, o de mediador entre o conhecimento do aluno e o conhecimento já estabelecido. Este conjunto de ações produz consequências positivas no processo de aprendizagem, pois envolve os alunos de maneira ativa no processo de ensino (BURAK e BRANDT, 2010, p. 3).

Uma proposta de ensino nesta perspectiva busca superar a educação verticalizada, que tem como finalidade rejeitar a problematização dialógica, como visto anteriormente e insistir em uma prática de depósito de conhecimento, considerado um falso saber que anestesia a criticidade e favorece a “domesticação” dos homens (FREIRE, 1983).

A Modelagem Matemática na perspectiva assumida, se alinha à educação dialógica, podendo romper com a educação bancária.

As justificativas para as respostas afirmativas da pergunta: “A professora incentivou a turma para participar das atividades propostas?”, revelaram que os estudantes entenderam que a professora insistia na ideia de reutilização do lixo, usando bons argumentos ao se referir aos problemas sociais que foram discutidos. Entenderam também que a professora apresentava ideias novas para estimular a curiosidade dos estudantes e mostrou interesse em

desenvolver nos estudantes o espírito de solidariedade. As manifestações revelaram ainda que a professora deu oportunidade a todos os estudantes tanto na sala de aula como fora da sala por meio das oficinas e oferecendo um kit de materiais a quem demonstrasse interesse por trabalhar em casa com a reutilização do lixo, procurando sempre elogiar as peças confeccionadas. Não houve resposta negativa para esta questão.

O envolvimento dos estudantes nas atividades da Modelagem Matemática requer incentivo por parte do professor que precisa se preocupar principalmente com a forma de conduzir o diálogo, enfatizando a relevância do trabalho a ser realizado. Portanto

É importante favorecer entre os estudantes a discussão sobre os múltiplos aspectos dos temas sugeridos. O professor tem participação, levantando aspectos, contrapontos, solicitando argumentos, desafiando os estudantes a manifestarem suas opiniões, seus pontos de vista, de modo que se envolvam na discussão (BURAK e KLÜBER, 2013, 39).

Discussões como essas podem evoluir para diversos aprendizados, como o que aconteceu no estudo de Burak e Brandt (2010) durante um curso para formação de professores. Ao proporem algumas possibilidades para o desenvolvimento algébrico, na etapa de resolução do problema da Modelagem Matemática. Os autores (2010) conduziram parte do trabalho em busca de saber se o salário mínimo era suficiente para suprir as necessidades básicas de uma família composta por quatro pessoas. Para tanto, era preciso analisar, entre outras despesas, o custo das cestas básicas disponíveis nos supermercados. Neste sentido, Burak e Brandt (2010) entendem que “Essas situações podem ser construídas com os próprios alunos ou apresentadas pelo professor, como desafio. A situação proposta foge das questões apresentadas em livros textos, pois é real e faz parte do contexto do tema” (p. 32).

Os professores que enxergam o livro didático como principal recurso pedagógico

Em verdade, não querem correr o risco da aventura dialógica, o risco da problematização, e se refugiam em suas aulas discursivas, retóricas, que funcionam como se fôssem “canções de ninar”. Deleitando-se narcisisticamente com o eco de suas “palavras”, adormecem a capacidade crítica do educando (FREIRE, 1983)

Provavelmente estes docentes não sabem conduzir suas aulas de outra forma ou consideram que os estudantes aprendem Matemática somente quando conseguem resolver uma expressão numérica, uma equação, ou um sistema de equações, por exemplo, ainda que sua solução aconteça de forma mecânica e que não esteja vinculada a qualquer contexto.

6.4.8 Interação estudante/objeto do conhecimento

Os Quadros 56, 57, 58, 59 e 60 trazem as respostas dos sujeitos das pesquisas, para as perguntas do questionário que têm alguma relação com a categoria interação estudante/objeto do conhecimento.

3) Qual ou quais o(s) assunto(s) discutido(s) nestes diálogos?	SR
• A1 - A10 - Sobre o lixo, economia e a dengue. • A2 - A6 - A17 - Dengue, crise, reutilização do lixo. • A3 - Soma, produto, peso, preço. • A4 - A13 - Dengue, crise e lixo. • A5 - Sobre o que era relacionado ao assunto que foi escolhido, a dengue e reciclável. • A7 - Dengue e crise econômica. • A8 - Artesanato. • A9 - Matemática e oficina. • A12 - Crise, dengue, solução dos dois problemas. • A14 - Dengue, lixo, maneiras de reutilizar e como fazer artesanato. • A15 - Lixo, dengue e artesanato. • A16 - A23 - A27 - Sobre a dengue e a crise. • A18 - Raio, diâmetro, comprimento, valor do pi, equação do 1º e 2º graus. • A19 - Reutilização do lixo, crise, como a reutilização pode te ajudar. • A20 - Sobre a reutilização do lixo, sobre artesanato, como podemos transformar o lixo em algo bom, etc. • A22 - Quase sempre sobre rolinho de papel higiênico e como ele poderia ser usado para arrecadar dinheiro. • A26 - A31 - Reutilização do lixo. • A29 - Dengue e lixo, com menos lixo na rua não haverá dengue na cidade. • A30 - Não sei. • A32 - Rolo de papel higiênico e garrafa PET.	A21 A28

Quadro 56: Respostas pergunta 3 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

16) Durante o desenvolvimento das atividades, houve a necessidade de realização de pesquisa. Você considera a pesquisa:		
IMPORTANTE		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Pesquisando nós aprendemos mais. • A2 - Para aumentar o conhecimento. • A3 - Para soluções óbvias. • A4 - Por causa da dengue. • A5 - Porque era um jeito mais seu de fazer. • A6 - Porque precisamos pesquisar o que não sabemos, não podemos fazer sem saber. • A7 - É da internet que surgem coisas novas. • A8 - Tive mais conhecimento sobre. • A9 - Porque é um jeito simples, ecológico e barato. • A10 - Pois descobrimos coisas novas. • A14 - Porque precisamos aprender novas coisas. • A15 - Porque é importante demais essas coisas. • A16 - Para aprofundar mais na utilização. • A17 - Porque nem todas nossas dúvidas são respondidas na aula. • A18 - Para ajudar a resolver as coisas pedidas pela professora. • A19 - Porque ensina a algumas pessoas o que não sabiam. • A22 - Porque assim ficamos informados. • A23 - Pois assim podemos ter uma ideia sobre o que podemos fazer. • A26 - Para sabermos mais. • A27 - Porque com o trabalho realizado em sala ajudou a fazer a reciclagem do lixo. • A29 - Para poder ajudar nós. • A21 – (SJ) • A32 – (INC)	• A30 - Não tinha net.	A12 A13 A20 A28 A31

Quadro 57: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 1)

Fonte: Dados da pesquisa.

16) Durante o desenvolvimento das atividades, houve a necessidade de realização de pesquisa. Você considera a pesquisa:		
INTERESSANTE?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Porque podemos usar na prática. • A3 - É bacana. • A5 - Porque era um jeito de você aprender, é divertido. • A7 - Gosto de pesquisar isso. • A8 - Foi algo novo. • A9 - Porque ensinou a reciclar. • A10 - Atiça a curiosidade. • A13 - Porque você aprende a fazer coisas legais. • A14 - Porque eu gosto de aprender sobre problemas sociais, para sempre melhorar. • A15 - É legal. • A18 - Pode se descobrir mais coisas. • A20 - Apreendi coisas novas. • A22 - Pois depois ajudava a gente a fazer mais fácil. • A23 - Claro, as pesquisas nos ajudam muito. • A26 - Porque entendemos mais. • A27 - Porque aprendemos a fazer enfeites com coisas que poderíamos jogar fora. • A29 - Porque é bom pesquisar as coisas. • A17 - A19 – (SJ) • A32 – (INC)	• A2 - O assunto não me agrada. • A4 - Porque não acho legal. • A15 - Mas enjoou. • A16 - Aprendemos mais. • A21 - Não é minha praia esse tipo de coisa. • A30 – Porque não.	A6 A28 A31

Quadro 58: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 2).

Fonte: Dados da pesquisa.

16) Durante o desenvolvimento das atividades, houve a necessidade de realização de pesquisa. Você considera a pesquisa:		
FÁCIL DE FAZER?		
SIM	NÃO	SR
• A2 - Para mim foi fácil de ser realizado. • A4 - Foi fácil porque tinha umas gurias que ajudavam a professora e ajudavam nós. • A7 - É só pesquisar e aprender fazer. • A8 - Pesquisamos coisas fáceis de achar na internet. • A9 - Porque é simples. • A14 - É super fácil de achar essas coisas na internet. • A21 - Não é complicado. • A22 - Sempre era fácil de achar. • A26 - Porque é só pesquisar. • A29 - Porque sem pesquisa nós não conseguimos saber a resposta. • A3 - (INC) • A17 - (SJ)	• A1 - Não achei tão fácil de fazer porque no começo não entendi nada. • A5 - Porque não pegar qualquer pesquisa e sim ler ela. • A10 - As vezes não temos internet em casa. • A15 - Muito difícil. • A16 - Senão acha qualquer coisa que não faz sentido. • A18 - É matéria que sempre nós temos. • A19 - Não é tão fácil quanto parece, precisa de um pouco de dedicação. • A23 - Foi difícil chegar em um tema e como podemos mudar esses problemas. • A30 - Difícil. • A32 - Porque não apenas escolhe uma resposta tem que ver várias. • A27 - (SJ)	A6 A20 A28 A31

Quadro 59: Respostas pergunta 16 do questionário (parte 3)

Fonte: Dados da pesquisa.

19) O entendimento que você tinha sobre os conteúdos matemáticos trabalhados foi aprimorado?		
SIM	NÃO	SR
• A1 - Aprendi mais, passei a entender mais. • A2 - Aprendi coisas novas. • A5 - Porque mesmo tendo dificuldade a professora voltava ajudar novamente. • A8 - Porque foi melhor para entender. • A9 - Porque aprendi outros níveis que não conhecia. • A14 - Um pouco, não participei muito. • A15 - É importante os temas. • A17 - Mais ou menos. • A18 - São novas coisas que aprendemos. • A20 - Consigo entender bem mais. • A22 - Pois com o tempo fica bem mais fácil de fazer as coisas. • A23 - Assim eu pude aprender mais e mudar a crise e a dengue. • A27 - Porque me ajudou a desenvolver meu conhecimento. • A32 - Porque mesmo tendo dificuldade, a professora ia e explicava novamente o conteúdo. • A16 - (SJ)	• A3 - Continuo me embolando nas contas. • A4 - Não sei o que é aprimoram. • A9 - Porque uns não entendi e outros são difíceis. • A10 - Não me interessei muito. • A15 - Não aprendi • A17 - Mais ou menos. • A26 - Porque continuo sem entender nada. • A30 - Não entendi. • A7 - Porque sei pouca coisa do conteúdo do 9º ano. • A21 - (SJ)	A6 A12 A13 A19 A28 A29

Quadro 60: Respostas pergunta 19 do questionário

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao serem questionados sobre os assuntos discutidos nos diálogos, os estudantes apontaram o lixo, a economia, a dengue, a crise econômica, a reutilização do lixo, o artesanato, a solução de problemas, o rolo de papel higiênico, a garrafa PET, a matemática, a

oficina, a soma, o produto, o peso, o preço, o raio, o diâmetro, o comprimento, o valor do pi, as equações do primeiro e segundo graus e o fato de ganhar dinheiro.

Percebe-se que entre os assuntos apontados, encontram-se alguns relacionados à Matemática, no entanto, este questionário foi aplicado ao final do trabalho. No início das atividades que foram desenvolvidas, os conteúdos matemáticos não foram sequer mencionados, ainda que os estudantes questionassem desconfiados, sobre a relação que poderia ser estabelecida entre o tema escolhido e a Matemática. Se essa forma de conduzir a Modelagem Matemática costuma causar estranheza para os estudantes, pode causar muita preocupação para os professores. Portanto Burak (2010a) alerta que

O fato de um tema inicialmente não ter aparentemente muito a ver com a Matemática pode, despertar no professor alguma “ansiedade”, algum temor por suscitar dúvida se há matemática no tema e ainda, qual matemática poderá ser desenvolvida? Essas questões realmente fazem parte do cotidiano escolar, principalmente nas escolas que têm como meta o cumprimento de um programa com determinados conteúdos matemáticos (p. 19).

Isso pode inclusive gerar insegurança para quem normalmente, está acostumado a trabalhar de forma tradicional, como foi observado por Burak e Klüber (2007) nos depoimentos e entrevistas dos professores que inicialmente resistiram à proposta da Modelagem Matemática, uma vez que as “[...] iniciativas fugiam à forma usual de se trabalhar o ensino de Matemática na escola” (p. 10).

Por outro lado, percebe-se que, no rol de assuntos apontados pelos estudantes neste estudo, ao responderem à questão em análise, existe uma riqueza de conhecimentos a serem explorados.

Para Freire

[...] meu papel como professor, ao ensinar o conteúdo a ou b, não é apenas o de me esforçar para, com clareza máxima, descrever a substantividade do conteúdo para que o aluno o fixe. Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim (2017a, p. 116).

Os estudantes foram questionados se as pesquisas realizadas durante o desenvolvimento das atividades, foram importantes, interessantes e fáceis de fazer. Para as respostas afirmativas sobre a importância das pesquisas, os estudantes argumentaram que a pesquisa permite mais aprendizagem porque aumenta o conhecimento aprendendo coisas novas. Os estudantes revelaram que a pesquisa ajuda a esclarecer dúvidas que não são respondidas nas aulas e ajuda resolver o que a professora pede porque não se pode fazer sem

saber. As respostas dos estudantes evidenciaram também que a internet é uma boa fonte de pesquisa porque mostra novidades sobre a reutilização do lixo de um jeito simples, ecológico e barato, além de trazer informações sobre os assuntos discutidos em sala. A única resposta negativa para esta questão foi justificada com a afirmação de que o estudante identificado como Sujeito A30, não tinha acesso à internet.

Os estudantes que afirmaram que as pesquisas foram interessantes justificaram alegando que usaram o que aprenderam na prática para fazer enfeites, coisas novas, legais, bacanas e divertidas com o que poderiam jogar fora. Os estudantes alegaram também que gostaram de pesquisar, porque estimula a curiosidade e ajuda a entender mais sobre os problemas sociais para que possam melhorar.

A Modelagem Matemática na perspectiva adotada prioriza a pesquisa como uma das etapas para seu desenvolvimento, neste sentido, Ferreira e Burak (2011) afirmam que

Na *pesquisa exploratória*, com o tema a ser pesquisado já escolhido, orienta-se e discute-se com os alunos formas de conhecer mais e melhor sobre o assunto. Aspectos teóricos, curiosidades, conteúdos técnicos, materiais dos mais diversos, que contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar, favorecem a formação de atitudes de investigação. Os *sites*, a pesquisa bibliográfica e as pesquisas de campo sobre o assunto são fontes ricas de informações e estímulo, bem como, se constituem como meios de se conhecer o objeto de estudo (FERREIRA e BURAK, 2011, p. 7, grifos dos autores).

Percebe-se, portanto, a importância desta etapa para a continuidade do trabalho, já que é neste momento que os dados são colhidos para subsidiarem a discussão sobre os encaminhamentos a serem adotados e para darem suporte à solução do problema levantado. Todo esse processo auxilia no aprimoramento do conhecimento sobre o tema escolhido e envolve um conjunto de estratégias definidas tanto pelo professor como pelos estudantes, o que mostra mais uma vez, a dinâmica da metodologia adotada.

Desta forma, entende-se que

[...] ensinar não é transferir conteúdo a ninguém, assim como aprender não é memorizar o perfil do conteúdo transferido no discurso vertical do professor. Ensinar e aprender têm que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno de ir *entrando* como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor ou professora deve deflagrar (FREIRE, 2017a, p. 116, grifos do autor).

Já, os estudantes que afirmaram que as pesquisas não foram interessantes, revelaram que se tratava de um assunto que não os agradava por não acharem legal ou por terem enjoado de trabalhar sobre isso.

A justificativa de que o trabalho não foi legal, pode estar vinculada ao entendimento de que o ensino é possível somente por meio de uma educação “bancária”, àquela que estimula a ingenuidade, sufoca a criticidade e não pretende a transformação, garantindo a manutenção do poder nas mãos dos opressores (FREIRE, 2017b). Esses estudantes manifestaram indiferença perante problemas sociais relevantes que afetam as pessoas de modo geral, o meio ambiente e, por consequência, as condições de vida no futuro próximo. Talvez estes estudantes tenham se sentido desconfortáveis com esta proposta de ensino por terem sido instigados a pensar e discutir sobre situações com as quais não tinham sido confrontados anteriormente.

Quanto à justificativa de que alguns estudantes ficaram enjoados de trabalhar sobre o tema, entende-se que, como já foi discutido anteriormente, seja pela demora em concluir as etapas da Modelagem Matemática. A demora foi provocada, em grande medida, pelas dificuldades que os estudantes manifestaram para resolver as atividades propostas durante a solução do problema levantado, fazendo-se necessário, reiteradas explicações sobre o conteúdo matemático que seria usado para a solução do problema.

Durante todas as etapas da Modelagem Matemática, cada retomada realizada fazia emergir o diálogo que permitia à professora identificar as dificuldades e superações dos estudantes em relação às significações que atribuíam aos objetos matemáticos trabalhados. A interação para esta finalidade, normalmente estabelecida na etapa da resolução do problema da Modelagem Matemática, permitia evidenciar a ocorrência de funções do discurso e de suas operações cognitivas. O ato ilocutório, uma operação discursiva da função apofântica de enunciado completo, já discutido em outros momentos neste estudo, está vinculado ao diálogo entre professor e estudante, permitindo a identificação do valor lógico, epistêmico ou social do enunciado. Este último, é o que desencadeia os demais, uma vez que é cumprido quando existe uma resposta à pergunta realizada durante o diálogo.

Os estudantes que afirmaram que as pesquisas foram fáceis de fazer, justificaram alegando que tinha alguns estudantes que ajudavam a professora e os colegas ou alegando que entendiam ser simples de encontrar os temas pesquisados na internet.

Já os estudantes que acharam ter sido difícil a pesquisa, alegaram que as vezes não tinham internet disponível, ou que era difícil por entenderem que não poderia ser qualquer pesquisa. Era necessário ler antes já que poderiam encontrar alguma coisa que não fizesse sentido, desta forma, era preciso dedicação. Outros alegaram ter sido difícil a pesquisa por não terem entendido o que deveria ser feito no começo do trabalho ou porque consideraram difícil definir o tema e definir também como o problema poderia ser resolvido.

Os esclarecimentos eram feitos durante as aulas assim como na rede social para facilitar o envio dos trabalhos solicitados, que consistiam em orientações sobre alguns tutoriais disponíveis na internet e encaminhamento de fotos das peças artesanais confeccionadas.

Foi motivo de grande espanto as dificuldades manifestadas pelos estudantes em relação ao manuseio do computador. Esses tipos de dúvidas foram uma revelação importante porque a princípio imaginava-se que os estudantes tinham bastante habilidade com os recursos tecnológicos. No entanto, eles têm acesso maior aos aparelhos de telefone celular, já os computadores não deviam ser usados com frequência, uma vez que não dominavam os comandos básicos utilizados para o manuseio desta ferramenta. Como houve muita interação presencial e virtual para os esclarecimentos que se faziam necessários, vale ressaltar então o entendimento de Freire (2017) ao afirmar que “É nesse sentido que se impõe a mim *escutar* o educando em suas dúvidas, em seus receios, em sua incompetência provisória. E ao escutá-lo, aprendo a falar *com* ele” (p. 117, grifos do autor).

As respostas afirmativas para a questão: “O entendimento que você tinha sobre os conteúdos matemáticos trabalhados foi aprimorado?”, trouxeram justificativas revelando que os estudantes aprenderam coisas novas, passaram a entender melhor e tiveram mais facilidade para fazer o que era pedido com o passar do tempo, porque a professora explicava novamente para esclarecer as dúvidas. As justificativas evidenciaram também que os conteúdos matemáticos ajudaram a desenvolver o conhecimento dos estudantes pela importância de estarem relacionado aos temas trabalhados, permitindo que contribuíssem para mudanças sobre os problemas causados pela dengue e pela crise econômica. As manifestações dos estudantes revelam ainda que houve quem considerasse que o aprimoramento foi pouco por não ter participado das atividades, o que representa uma tomada de consciência de sua participação e empenho.

A maioria dos estudantes manifestou aspectos positivos sobre o aprimoramento dos conteúdos matemáticos estudados, que parece ter acontecido pela disposição que demonstraram em trabalhar com a nova proposta de ensino. Alguns tiveram também o discernimento em associar os conteúdos matemáticos estudados com o tema levantado, já que este último determinou os primeiros. Esta é uma das características da Modelagem Matemática, considerada uma das grandes potencialidades desta metodologia, uma vez que a Matemática fica “[...] em plena interação com outras áreas do conhecimento que constituem a educação geral, visando o ensino e a aprendizagem num contexto mais amplo” (BURAK e KLÜBER, 2013, p. 49).

Há também um indicativo de que houve desenvolvimento da criticidade, principalmente por ter ficado evidente a colocação dos estudantes sobre as possíveis mudanças que o trabalho desenvolvido pode promover em relação aos problemas causados pela dengue e pela crise econômica. Neste sentido, há que se considerar o entendimento de Burak e Klüber (2013) ao se referirem à Modelagem Matemática, afirmando que

[...] as discussões promovem momentos de interação, relativos à Matemática, método, linguagem, conteúdos, exequibilidade, não apenas matemática, mas no contexto da realidade estudada. Enriquece as discussões a partir de reflexões sobre os efeitos sociais, culturais, políticos e econômicos, entre outros, a partir dos resultados encontrados (p. 48).

Já, as respostas negativas para a questão ora analisada trouxeram justificativas evidenciado que os estudantes continuavam se confundindo com os cálculos porque não entenderam, porque são difíceis, ou por falta de interesse. As justificativas revelaram também que havia estudante que não sabia o que significa “aprimoram”, termo que faz parte da pergunta em análise, e outro que considera saber pouco dos conteúdos do nono ano.

Percebe-se por estas manifestações que o papel de ensinar é realmente muito complexo. Várias discussões neste sentido já foram levantadas neste estudo que puderam ser consideradas para analisar os anseios manifestados pelos estudantes e que são suficientes para uma reflexão sobre estas questões, não havendo necessidade de reiterá-las. Resta ponderar que há ainda um longo caminho a ser percorrido para que estas e tantas outras dificuldades sejam superadas. Evidenciar os problemas vividos em sala de aula e discutir as bases teóricas que fundamentam esta realidade, não é suficiente para garantir êxito no percurso de quem, disposto a seguir a aventura da docência, seja corajoso o suficiente para enfrentá-la. No entanto, pode ser útil para que esta coragem seja sustentada pela certeza de que é preciso disponibilidade, dedicação, amorosidade e humildade para entender que se o conhecimento não é absoluto, não pode ser transferido, sendo assim, o estudante precisa

[...] se apropriar da inteligência do conteúdo para que a verdadeira relação de comunicação entre mim, como professor, e ele, como aluno se estabeleça. [...] Isso não tem nada que ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade mas, ao mesmo tempo, da boniteza da docência e da discência. Não é difícil compreender, assim, como uma de minhas tarefas centrais como educador progressista seja apoiar o educando para que ele mesmo vença suas dificuldades na compreensão ou na inteligência do objeto e para sua curiosidade, compensada e gratificada pelo êxito da compreensão alcançada, seja mantida e, assim, estimulada a continuar a busca permanente que o processo de conhecer implica (FREIRE, 2017a, p. 116).

Portanto, a experiência vivida e as manifestações apontadas confirmam que a qualidade do trabalho docente está baseada, sobretudo, no estímulo da curiosidade do estudante, que tende a deixar de ser ingênua para se transformar em epistemológica, produzindo a inteligência do objeto ou conteúdo cognoscível (FREIRE, 2017a).

7 CONSIDERAÇÕES

É chegado o momento de analisar se o objetivo delineado no início deste estudo foi atingido, por isso torna-se necessário retomá-lo antes de tecer qualquer comentário sobre a pesquisa. Objetivou-se evidenciar as implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem, por meio de uma análise cognitiva, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, e por meio de uma análise social, fundamentada nas contribuições de Freire para a educação dialógica.

Entende-se que seja conveniente iniciar esta seção com as considerações provenientes do arcabouço teórico que ancorou a metodologia da investigação.

Os pressupostos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas e as contribuições de Freire para a educação, combinados com a metodologia de ensino adotada e com a experiência pessoal, auxiliaram o processo de análise dos dados que foram coletados nesta pesquisa, para que fosse possível revelar tanto o que o estudante sabe como o que ele não sabe dos conceitos matemáticos, assim como seu progresso ou retrocesso nos aspectos sociais trabalhados. A curiosidade, interação, dialogicidade, criatividade e criticidade, características marcantes da Modelagem Matemática na perspectiva de Burak (1992, 2004), tiveram como pré-requisitos: a sensibilidade, a comunicação e a empatia, habilidades defendidas por André (2008) como pré-requisitos para a pesquisa de caso etnográfico.

Para discutir as implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem do ponto de vista cognitivo e social, não foi desprezada a importância que André (2008) dá a expressão escrita, que teve valor relevante, tanto para a elaboração dos instrumentos de coleta de dados, como para o seu tratamento. Foi por meio dela que se procurou esclarecer ao leitor, cada etapa do percurso em busca de responder à pergunta que norteou esta trajetória.

Neste sentido, o presente estudo foi possível pelo empenho da professora pesquisadora, juntamente com a contribuição da sua orientadora e dos professores componentes da banca do exame de qualificação. Este grupo de pesquisadores representou os avaliadores críticos do processo, de acordo com o que recomenda André (2008) para a metodologia da pesquisa adotada.

Para a obtenção dos dados foi necessário garantir aos informantes o sigilo das informações relacionadas à identidade de cada um, que significa também garantia de dados mais fidedignos, de acordo com o que defende André (2008).

A garantia de privacidade da identidade dos sujeitos da pesquisa, de acordo com a recomendação da autora (2008), permitiu que os dados retratassem a situação real em todas as manifestações dos estudantes, uma vez que não correram o risco da exposição de suas dificuldades na aprendizagem e eventuais fragilidades.

Entende-se que estes dados foram úteis para responder à questão que norteou a pesquisa já que evidenciaram:

- A habilidade da professora na condução de todas as etapas da Modelagem Matemática.
- O interesse de alguns estudantes pela Modelagem Matemática.
- A interação entre professor e estudantes e dos estudantes entre si nesta proposta de ensino.
- A interação entre os estudantes e os objetos de conhecimento matemático.
- A aprendizagem dos estudantes sobre os conteúdos matemáticos ensinados e sobre os aspectos sociais trabalhados.
- O desenvolvimento da autonomia, da criatividade, da criticidade e da motivação dos estudantes durante as etapas da Modelagem Matemática.

Compreende-se que esses dados são informações essenciais que possibilitaram a compreensão do objeto investigado, já que foram coletados, organizados e analisados adequadamente e com o rigor que a pesquisa científica exige.

Os primeiros dados analisados trouxeram um enfoque quase exclusivamente cognitivo e compreendem os registros dos estudantes para solução das atividades relacionadas ao comprimento da circunferência, à área do círculo e à resolução do problema levantado na Modelagem Matemática. As manifestações dos estudantes e da professora, transcritas nos relatórios obtidos com os áudios gravados durante as aulas, são outros dados que foram analisados de forma concomitante com os registros dos estudantes.

Estes dados deixam claro que o ensino tradicional, vivenciado pelos estudantes anteriormente, revelaram muitas lacunas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, da forma como foi conduzida nesta investigação, permitiu desvelar problemas que comprometem a aprendizagem dos estudantes.

As análises evidenciaram que, no aspecto cognitivo, a aprendizagem dos estudantes fica comprometida, muitas vezes, por falta de domínio de conhecimentos básicos da

matemática, como o sistema de numeração decimal. Isto foi evidenciado com clareza a partir de elementos que muitas vezes passam despercebidos ao professor. Por mais que se perceba as incompreensões dos estudantes, é comum diagnosticá-las apenas avaliando os registros obtidos como certos ou errados. Não se observa como se dá ou como não se dá a designação de um objeto matemático, que depende das operações cognitivas das funções discursivas. Estas funções permitem entender a significação que é dada aos léxicos sistemáticos a partir dos símbolos sincategorimáticos⁴⁹, que não designam por si só.

Os diferentes léxicos e as diferentes operações cognitivas associados à função referencial foram evidenciados nas atividades desenvolvidas na etapa da resolução do(s) problema(s) matemático(s) da Modelagem Matemática, tanto por meio dos registros dos estudantes como pelo diálogo travado entre professora pesquisadora e estudantes, que permitiram a análise de diferentes formas para designar os objetos, de relações matemáticas que foram estabelecidas e das fragilidades ou inconsistências do pensamento.

Essa análise é importante para poder mediar as atividades junto aos estudantes e destacar que muito se pode aprender a respeito dessas compreensões que devem ser compartilhadas no grupo, evidenciando um outro lado do aprender, diferente da repetição e da memorização e de acordo com a educação dialógica.

É importante ressaltar também que tanto as produções dos estudantes como o diálogo podem revelar a preferência do estudante por uma ou outra forma de designar um objeto matemático, já que algumas vezes ele precisa da língua natural por não conseguir estabelecer as relações matemáticas por meio da linguagem aritmética ou algébrica. Assim, o professor consegue entender que o sentido atribuído pelo estudante a um tipo de representação é que determinará a sua forma, e o que precisa ser garantido é a referência ao mesmo objeto.

Outro aspecto da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que merece ser destacado é a progressão do discurso por meio da expansão discursiva que pode acontecer por substituição ou acumulação, que são de naturezas diferentes e precisam ser conhecidas pelo professor, para que possa valorizar diferentes tipos de linguagens. Neste sentido, o professor precisa ter a sensibilidade e o conhecimento para entender as formas diferenciadas de resolução dos problemas matemáticos pelos estudantes e o tipo de linguagem por eles privilegiada.

⁴⁹ O ponto, a vírgula, os sinais que representam as operações (+, -, x, :) e que dependendo do caso, são substituídos por outro (o ponto ao invés do x na multiplicação).

Foram estes e outros subsídios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que contribuíram para viabilizar a compreensão dos motivos dos erros, permitindo não apenas uma análise matemática, mas uma análise cognitiva.

Aliada à importância da contribuição da teoria de Duval para esta finalidade, está a metodologia adotada, sem a qual as dúvidas dos estudantes provavelmente seriam desprezadas. Isso não significa que em uma aula tradicional o professor não possa identificá-las, mas para resolver o problema levantado na Modelagem Matemática é imprescindível a utilização de determinados conhecimentos matemáticos, sem os quais não é possível encontrar a solução. Neste momento, as dúvidas emergem com mais intensidade, porque o professor precisa assumir o papel de mediador, procurando motivar constantemente o estudante a dialogar com ele sobre suas dificuldades. Por consequência, acontece um envolvimento maior do estudante no sentido de buscar os esclarecimentos necessários para o desfecho do trabalho. Diferente do que se observa nas aulas tradicionais ao resolver, por exemplo, um problema fora do contexto da sala de aula.

A Modelagem Matemática permitiu a identificação das dificuldades, lacunas de conceitos e conteúdos, além de outros aspectos favorecidos pelo diálogo. Sua natureza e método são potencializadoras de uma dinâmica em sala de aula, onde o estudante é protagonista desde a escolha do tema, na busca dos dados, na organização dos dados, na proposição dos problemas a partir dos dados, e outros no contexto do tema em estudo. Protagonista, também, na reflexão das soluções desses mesmos problemas, numa perspectiva mais ampla, não apenas dos conteúdos matemáticos, mas levando em consideração outras áreas do conhecimento que permitem uma análise mais profunda sob o ponto de vista sócio-cultural, ambiental, econômico, ético, entre outros.

Isso impõe desafios ao professor e aos estudantes em busca da superação, uma vez que esta metodologia está centrada em bases teóricas capazes de promover uma educação realmente transformadora.

Também foi possível analisar outra característica interessante da Modelagem Matemática na forma como foi desenvolvida. Os estudantes foram desafiados a pensar mais do que normalmente pensam em aulas tradicionais. As duas primeiras atividades os instigavam a construir as expressões matemáticas que permitem o cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo.

A estratégia para a dedução da fórmula da área do círculo (registro algébrico) se deu por meio da operação cognitiva de conversão proposta quando as figuras variavam de forma (registro figural) e provocavam variação nas fórmulas. Houve necessidade de mobilização

desta operação cognitiva, uma vez que Duval (2010) entende que a aquisição do conhecimento matemático se dá de forma diferente da aquisição do conhecimento de outras áreas, já que os objetos matemáticos não têm existência física e só podem ser acessíveis por meio das representações semióticas.

Porém, de modo geral, os estudantes informaram que acharam difícil e que não estão acostumados a trabalhar desta forma, permitindo inferir que a construção dos conceitos matemáticos é uma estratégia raramente adotada no ensino, que normalmente prioriza cálculos mecânicos e sem significado. Parece haver um equívoco observado nesse estudo, sobre o entendimento dos estudantes, quanto ao aprendizado ser mais fácil quando é direcionado em busca de resolver exercícios do livro didático, o que é mais comum acontecer. Neste sentido, levanta-se duas questões: Há de fato aprendizagem quando se resolve exercícios mecanicamente? Qual das duas propostas de ensino têm maior potencial para promover a aprendizagem: a aula tradicional ou a Modelagem Matemática?

Não foram estes os problemas levantados para a presente pesquisa. Buscou-se conhecer as implicações do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem nos aspectos cognitivo e social. Mesmo que seja possível elencar muitas destas implicações, os dados obtidos neste estudo não são suficientes para responder o questionamento anterior.

Algumas implicações observadas neste sentido estão ancoradas na tradição da aula meramente expositiva, denominada aqui reiteradas vezes como aula tradicional e na cultura da educação direcionada aos exames de seleção para ingresso em instituições de ensino com vagas disputadas. Isso pode fazer com que os estudantes tenham, inicialmente, alguma resistência à Modelagem Matemática, por ser uma metodologia que prioriza a construção do conceito matemático e por terem receio de que não consigam estudar os conteúdos disponíveis no programa para aquele ano letivo.

Talvez aqui seja conveniente imaginar um adendo ao problema da pesquisa e pensar sobre algumas implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para *a aprendizagem cognitiva e seus reflexos sociais*. Para tanto, os argumentos do parágrafo anterior podem direcionar as respostas das próximas perguntas.

Observa-se que muitas pesquisas têm como tema a Modelagem Matemática desenvolvida em sala de aula, no entanto a experiência mostra que os professores não costumam adotar esta metodologia na sua prática docente. Sendo assim, de forma reiterada, questiona-se: A Modelagem Matemática é desenvolvida, mesmo que esporadicamente, de forma desvinculada da pesquisa ou esta prática acontece somente para fins de investigação?

Suspeitando-se que a metodologia da Modelagem Matemática seja desenvolvida principalmente para fins de pesquisa e que o ensino tradicional seja dominante, diante das dificuldades dos estudantes sobre conceitos elementares da matemática, retoma-se mais um questionamento: Se grande parte dos estudantes investigados, que estão concluindo os anos finais do Ensino Fundamental, não conseguem dominar o sistema de numeração decimal, o que justifica a quantidade absurda de conteúdos matemáticos que compõem o currículo desta etapa do ensino?

A última pergunta foi discutida anteriormente com base nos resultados mais recentes do PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e no descompasso entre a matemática escolar e a vida real discutido por D'Ambrósio (2011). Enquanto a aula tradicional continuar sendo a metodologia de ensino dominante, não há como vislumbrar a possibilidade de reverter o quadro lastimável da dificuldade de aprendizagem dos nossos estudantes que, sem sombra de dúvidas, traz negativos reflexos sociais. Portanto, é preciso que a Modelagem Matemática seja de fato adotada no sistema de ensino para que se possa discutir com mais clareza e robustez sobre suas implicações para a *aprendizagem cognitiva e seus reflexos sociais*.

De volta ao problema da pesquisa, especificamente sobre as implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem no aspecto social, optou-se neste estudo, na oportunidade da escolha do tema, por discutir primeiramente sobre problemas sociais relevantes e fazer a escolha a partir desta discussão. Entende-se que o professor assume nesta ocasião o papel fundamental de mediador e pode contribuir significativamente para alertar os estudantes sobre temas diversos e as possíveis repercussões de cada um, oferecendo subsídios suficientes que permitam definir por aquele que realmente é importante e merece ser estudado. Nesta investigação, na ocasião da escolha do tema, a mediação se deu pela sugestão da professora pesquisadora de os estudantes levantarem alguns temas discutidos de forma recorrente nos meios de comunicação e pelo questionamento sobre qual tema levantado, afetava-os diretamente.

Neste sentido, é possível promover uma educação realmente transformadora, fundamentada no entendimento de Freire ao defender o desenvolvimento da criticidade dos estudantes, que passam a ter condições de refletir sobre a realidade de forma consciente e comprometida, podendo intervir para transformá-la (1979, sp).

No presente estudo, a intervenção de alguns estudantes na sua realidade, visando a transformação, se caracteriza pela mudança de atitude ao adotarem o hábito da reutilização do lixo para decoração da casa, o que representa uma economia e revela uma conscientização em

relação ao consumismo. Outros manifestaram que deixaram de jogar o lixo em lugar indevido e adquiriram o hábito da separação porque entenderam sobre os cuidados que o lixo requer e revelaram sua preocupação com os problemas causados ao meio ambiente. Houve também estudante interessado em reforçar a renda empreendendo na confecção de peças artesanais a partir da reutilização do lixo. Esta transformação foi possível, uma vez que a metodologia adotada, por meio do diálogo, da motivação e da interação, pôde desenvolver a autonomia, a criatividade e a criticidade dos estudantes.

Têm-se, portanto, indícios suficientes para inferir que a Modelagem Matemática, na perspectiva adotada, promoveu também a aprendizagem dos estudantes no aspecto social.

Como um dos sujeitos da pesquisa é a professora, afirma-se com muita satisfação que este estudo provocou uma transformação radical em sua vida pessoal e profissional. Em ambos os casos, as mudanças de atitude trouxeram e trarão grande contribuição em várias dimensões. A educação financeira, com redução drástica do consumismo, é uma delas. É interessante pontuar o quanto é possível economizar por conta da conscientização desenvolvida durante o trabalho de reutilização do lixo, principalmente considerando que seu perfil de consumo anterior não era exagerado para os seus padrões, mas mesmo assim a redução foi muito significativa.

A criatividade é outra dimensão que merece destaque. Para surpresa da professora, o lixo se mostrou extremamente versátil e possível de ser reutilizado, uma vez que conseguiu transformá-lo em peças jamais imaginadas. É como se a confecção de uma peça fosse o combustível para a criação de outras tantas que já foram produzidas e que ainda serão. Uma atividade terapêutica e estimulante, digna de conseguir aliviar a tensão e ansiedade provocados pelo trabalho intelectual intenso exigido neste estudo, por exemplo.

Estas dimensões estão estreitamente relacionadas à proteção do meio ambiente, educação financeira e saúde mental, portanto, além de representar uma aprendizagem significativa no aspecto social, repercutiram e repercutirão na sua vida profissional. Ainda que o trabalho realizado não tenha atingido todos os estudantes como era esperado, a contribuição efetiva para a professora pesquisadora certamente refletirá em sua trajetória e alcançará outros estudantes que cruzarem seu caminho.

Um pouco mais sobre as mudanças em sua carreira docente, inspiradas neste estudo, pode ser visto na próxima e última parte deste texto, que corresponde às ideias preliminares de novas investigações.

Delineados os objetivos alcançados neste estudo e apontados os questionamentos que surgiram ao longo da pesquisa, faz-se necessário esclarecer, com base nos trabalhos

discutidos na revisão de literatura, as considerações sobre esta investigação quanto à sua originalidade.

Para isso, é importante, primeiramente, retomar o entendimento de Duval (2012a) sobre as duas faces da atividade matemática. A primeira é da própria matemática e está focada nos objetos, suas propriedades, algoritmos e provas. A segunda é cognitiva, que segundo Duval (2010), permite uma análise tanto do que o estudante faz ou tenta fazer, como do que ele não faz ou não percebe naquilo que faz.

A partir dessa ideia é possível explicar que os conteúdos matemáticos trabalhados neste estudo e os procedimentos metodológicos adotados para obtenção da fórmula de cálculo do comprimento da circunferência, das áreas e volumes das figuras e objetos tridimensionais, compreendem a face da atividade matemática. A outra face, a cognitiva, permite explicar os diálogos e as análises das produções dos estudantes para entender o que eles fizeram, da forma como fizeram, suas compreensões ou incompreensões, suas inconsistências lógicas (do ponto de vista lógico ou epistêmico), tanto individual como no coletivo quando se travavam as discussões. Esse aspecto cognitivo, assim considerado, evidencia o que Freire coloca a respeito da educação, em todos os seus aspectos, e também o que aponta Burak sobre a metodologia adotada. Isso porque o trabalho volta-se para uma aprendizagem significativa dos objetos matemáticos que não ocorre de qualquer maneira.

O que se defende como tese é que a Modelagem Matemática precisa se amparar por outras teorias de naturezas diferentes. As que evidenciam os aspectos de natureza social e as que evidenciam os aspectos de natureza cognitiva.

De volta à revisão de literatura, após a definição do corpus de investigação deste estudo que corresponde aos 11 (onze) trabalhos selecionados, discutiu-se as especificidades de cada um, assim como as especificidades desta pesquisa. Portanto, esta tese traz alguns aspectos que garantem sua originalidade e que serão pontuados a seguir, levando em consideração o conteúdo das publicações que representam o corpus de investigação.

- Desenvolve a Modelagem Matemática na perspectiva de Burak, tendo como sujeitos da pesquisa estudantes da escola básica. Somente um dos onze trabalhos desenvolve a Modelagem Matemática na perspectiva de Burak, mas tem como sujeitos da pesquisa, professores em curso de formação.
- Propõe que a escolha do tema trabalhado na Modelagem Matemática seja feita de acordo com sua relevância social.
- Utiliza, como metodologia da pesquisa, o estudo de caso etnográfico.

- Traz um arcabouço teórico robusto em relação à metodologia da pesquisa, o que dá subsídios para discorrer sobre o ensino que acontece paralelamente à pesquisa, com enfoque na resistência pela Modelagem Matemática e na condição do professor que assume o papel de pesquisador.
- Evidencia as implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem em duas dimensões, tanto no aspecto cognitivo como no aspecto social.
- Fundamenta a análise dos dados de acordo com as funções discursivas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que contribui significativamente para a análise das implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem, na perspectiva cognitiva.
- Embasa a metodologia de ensino adotada e a análise dos dados nos pressupostos teóricos da educação dialógica defendida por Freire, que traz relevantes contribuições para conhecer as implicações que decorrem do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem, na perspectiva social.
- Mobiliza diferentes registros de representação semiótica (linguagem algébrica, linguagem geométrica e linguagem natural) e propõe a conversão dessas representações, para possibilitar uma análise que permitiu observar os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática proposta. A mobilização destes registros permitiu também a análise desses fenômenos cognitivos por meio das ideias de Duval sobre a Geometria (olhares, apreensões e desconstrução dimensional), além daqueles evidenciados por meio das operações cognitivas discursivas presentes nas funções discursivas.
- Traz as implicações do trabalho realizado para a carreira docente da professora pesquisadora, que é sujeito da pesquisa, representando um grande aprendizado na perspectiva social.

Concluídas as argumentações defendidas nesta tese, que tiveram a pretensão de trazer uma parcela de contribuição para o avanço da pesquisa em educação, reitera-se o entendimento de Freire (2017a) sobre a capacidade que a educação tem de transformar, podendo provocar mudanças radicais na sociedade, já que tem grande influência nos anseios e ideais dos educandos.

E como ainda resta disposição para algumas reflexões, para além do objeto estudado, desafia-se o leitor a conhecer cada uma delas e aceitar o convite formalizado a seguir.

OS BASTIDORES DA DOCÊNCIA E DA PESQUISA: UM DESABAFO, ALGUMAS PROVOCAÇÕES

Orienta-se chamar o momento final da pesquisa científica apenas de *considerações* e não de *considerações finais*, já que em muitas vezes traz alguns questionamentos sem respostas. Esta ocasião é, em determinados casos, caracterizada por situações contraditórias, que talvez possam ser chamadas de bizarras. Uma delas é a sensação de que não existe mais inspiração para redigir o texto, um sentimento de exaustão pode tomar conta do pesquisador, causando a impressão de que não há mais o que dizer. A outra consiste na sensação de que ainda têm muito que ser dito e a euforia causada pela finalização do trabalho, pode trazer motivação suficiente para inclusão de mais um capítulo.

Em que pese a contradição entre as duas situações, o maior obstáculo de cada uma delas é o cumprimento de prazo. Ainda que não haja inspiração, ela tem que ser arrancada do fundo da alma, custe o que custar, para que o trabalho seja entregue em tempo hábil e possa ser defendido. Por outro lado, mesmo que, ainda tenha muito o que ser dito e disposição para isso, o avançado da hora não permite que se prolongue.

Pode acontecer também de surgirem muitos questionamentos no meio do caminho que fogem do objeto estudado, inviabilizando a discussão. Apesar disto, estes questionamentos costumam causar no pesquisador, uma ansiedade pela busca de suas respostas que, dada sua relevância, certamente motivarão outras pesquisas. No entanto, até que outros estudos aconteçam, é possível provocar no leitor a mesma curiosidade que inquieta o pesquisador, para, ao menos, aliviar sua angústia, originada, muitas vezes, pelo solitário trabalho de investigação. Os questionamentos são decorrentes da experiência vivida que também merece ser compartilhada.

No caso deste estudo específico, mesmo diante do sentimento de exaustão neste momento final, a euforia toma conta da pesquisadora, que tem a necessidade de, talvez por meio de um relato ou de um desabafo, expor o que considera importante nesta trajetória.

Neste sentido, há que se levar em conta, primeiramente, o envolvimento do pesquisador com seu trabalho, independente da metodologia adotada. A responsabilidade é

grande, a exigência é muita, o prazo é curto e a dedicação exclusiva para a pesquisa, ainda que seja o ideal, nem sempre é possível.

A presente investigação, que tem como metodologia o estudo de caso etnográfico, fez da investigadora um sujeito de sua pesquisa. Foi realizada por professora da escola básica, que trabalha quarenta horas semanais e teve o benefício da licença para fins de estudo em um dos padrões durante dois anos. A licença precisou ser usufruída antes do período pretendido por incompatibilidade de horário do trabalho com as aulas das disciplinas que compõem os créditos do programa de pós-graduação. Seu compromisso com as outras vinte horas de trabalho semanal impediu a concessão de bolsa para incentivo à pesquisa.

As dificuldades assinaladas são semelhantes às destacadas por Lüdke (2008) ao revelar os problemas enfrentados por professores de quatro escolas públicas de Ensino Médio da cidade do Rio de Janeiro, que desenvolvem pesquisa em paralelo às suas atividades docentes. Neste sentido, quando discute as condições para esta prática, a autora (2008) comenta sobre a exiguidade

[...] sobretudo, de tempo e de ambientes para que os professores pudessem de fato se dedicar; em grupo ou individualmente, à prática da pesquisa. Embora alguns dispunham de bolsa, todos parecem, em três das quatro escolas, muito absorvidos pelo número de aulas e de reuniões; o pouco tempo restante revelando-se insuficiente para a dedicação que o trabalho de pesquisa exige (p. 47).

Os inconvenientes semelhantes a esses no presente estudo trouxeram grandes desafios, mas a determinação pelo enfrentamento de todos eles sempre esteve presente. Para tanto, fez-se necessário, abdicar de projetos pessoais, recusar compromissos sociais, utilizar períodos de férias e recesso para os estudos e até mesmo, sacrificar a relação familiar. Não houve em qualquer momento, intenção de subestimar tanto a dificuldade e competência da tarefa de pesquisar, como as demandas do trabalho de ensinar, apontadas por Santos (2008) ao se referir ao posicionamento de Foster (1999) sobre pesquisas de docentes voltadas para sala de aula, que já foi discutido anteriormente.

Para colocar em pauta a formação docente, é necessário pensar, principalmente, nas condições estruturais desta formação, que também já foram discutidas neste estudo. A experiência mostra que, com a mesma preocupação desta pesquisadora, estão tantos outros professores interessados em investigar seus problemas de sala de aula. No entanto, a academia, com vagas limitadas, privilegia os candidatos sem vínculo empregatício que possam se dedicar exclusivamente à pesquisa.

Para prosseguir a discussão, o texto seguirá na primeira pessoa do singular. Esta escolha foi feita porque serão abordadas questões que dizem respeito à educação de modo geral, mas foram vividas intensamente por esta pesquisadora de forma muito particular.

Ora, quais são as chances dos meus colegas? Terão eles que enfrentar a mesma peregrinação que enfrentei por uma vaga nos programas de pós-graduação *strictu sensu* em instituições distintas, como me propus a fazer por treze vezes? Serão estes candidatos sem vínculo empregatício, ou seja, com pouca ou nenhuma experiência docente, os mais qualificados para discutir os problemas da educação básica?

Por maior que seja a preocupação dos meus colegas com os problemas experimentados na sala de aula, a disposição por enfrentar a crueldade⁵⁰ imposta na disputa da vaga pode não ser suficiente para garantir que excelentes profissionais insistam nesta busca.

Há também o dilema vivido por outros colegas que conseguiram garantir a vaga e não vislumbram a possibilidade de qualquer benefício que incentive a pesquisa, obrigando-os a assumir uma carga horária de trabalho incompatível com o tempo necessário para a investigação.

Negar que me sinto orgulhosa por conseguir chegar até aqui apesar dos problemas enfrentados, não posso. Assim como não desejo que meus colegas sofram os mesmos enfrentamentos, mas sinto-me no direito de alertar para os fatos e no dever de traçar algumas possibilidades. Isto porque compartilho da ideia de Freire que alerta

Uma das condições necessárias para que nos tornemos um intelectual que não teme a mudança é a percepção e a aceitação de que não há vida na imobilidade. De que não há progresso na estagnação. De que, se sou, na verdade, social e politicamente responsável, não posso me acomodar às estruturas injustas da sociedade. Não posso, traindo a vida, bendizê-las. Ninguém nasce feito. Vamos nos fazendo aos poucos na prática social de que tornamos parte (2001, sp).

E as possibilidades que serão traçadas podem atender o anseio de Lisita, Rosa, Lipovetsky (2008) pela autonomia dos professores, que inspiradas pelo entendimento de Nóvoa (1992) defendem uma postura reflexiva e crítica deste profissional sobre o ensino como prática social, em busca de esclarecer os questionamentos do seu trabalho a partir de referenciais teóricos que permitam transformações, tanto no seu pensamento como na sua prática docente. As autoras afirmam que

⁵⁰ Refiro-me a este processo como cruel por conta da experiência vivida, que está relatada na parte introdutória desta pesquisa.

É por este motivo que defendemos as articulações entre pesquisa e formação, valorizando, nessa articulação, as pesquisas realizadas em diferentes abordagens, mas destacando como primordial as pesquisas feitas pelos próprios professores, o que implica incluir nos programas de formação (inicial e continuada) objetivos e condições para formar professores que produzem conhecimentos acerca do trabalho docente. Esse posicionamento implica uma postura contrária à divisão entre pesquisadores e professores na produção do conhecimento educacional e uma defesa explícita da potencialidade que a pesquisa tem para auxiliar os professores a participarem da produção do conhecimento educacional e do debate sobre os rumos de seu trabalho (Lisita, Rosa, Lipovetsky, 2008, p. 118).

Para viabilizar as pesquisas feitas pelos próprios professores, é relevante considerar as seguintes possibilidades.

Quanto ao processo seletivo dos programas de pós-graduação *strictu sensu*, é importante que as universidades acolham professores engajados na causa do magistério, lá no chão da escola pública. Conhecer sua trajetória profissional de forma mais subjetiva, não apenas pela objetividade do currículo, e certificar-se de que o relato é verdadeiro, é fundamental. Pode ser uma maneira de fazer uma avaliação tanto sobre sua vida profissional como sobre sua sensibilidade para o exercício da função, logo, uma oportunidade de investir em quem possa realmente contribuir com a educação. Um professor precisa ser apaixonado pelo que faz, e esta paixão deve ser um importante pré-requisito para o processo de seleção. De acordo com Freire

É preciso que saibamos que, sem certas qualidades ou virtudes como amorosidade, respeito aos outros, tolerância, humildade, gosto pela alegria, gosto pela vida, abertura ao novo, disponibilidade à mudança, persistência na luta, recusa aos fatalismos, identificação com a esperança, abertura à justiça, não é possível a prática pedagógico-progressista, que não se faz apenas com ciência e técnica (2017, p. 117 e 118).

Reformular o processo de seleção para o recrutamento de profissionais realmente capazes de contribuir com a pesquisa nesta área é responsabilidade do departamento de educação e de ensino dos programas de pós-graduação *strictu sensu* das instituições de ensino superior.

Sobre o excesso de carga horária de trabalho docente, que é incompatível com a pesquisa, deve-se pensar em incentivos que viabilizem estas atividades. Não entendo como razoável que este tipo de professor se limite à pesquisa, mesmo já tendo vivenciado em tempos anteriores a realidade de sala de aula, que tenha dados e argumentos para discutir a respeito, ou que faça sua investigação em conjunto com outro professor. Isso descaracteriza a metodologia a ser adotada pelo professor pesquisador. É ele, professor pesquisador, que deve ter o compromisso e a responsabilidade de assumir, de fato, os dois papéis.

No entanto, uma turma de alunos é suficiente para desenvolver seu trabalho. Assim, consegue se debruçar no seu propósito e explorar tanto sua atividade profissional que requer a interação entre professor, estudantes e objeto do conhecimento, como seu objeto de estudo, que envolve pesquisador, sujeitos, teoria, dados coletados, publicações e o cumprimento dos créditos exigidos pela academia.

Para tanto, as redes de ensino da educação básica, seja nas esferas municipal, estadual ou federal devem assumir o compromisso legal de atribuir ao professor pesquisador somente o número de horas aula correspondente à turma investigada, dando-lhe o direito de destinar o tempo restante da sua carga horária de trabalho para as atividades de pesquisa. Neste caso, vale ressaltar que, este tempo, não precisa, necessariamente, ser cumprido nas dependências da escola, por algumas razões.

Normalmente o espaço escolar não oferece estrutura e material adequados para este tipo de atividade, como a ausência de espaço para estudo sem interferência de barulhos e com acesso à internet, o que inviabiliza a leitura, a escrita, a elaboração de instrumentos de coleta de dados e sua análise. A própria locomoção do professor até o local de trabalho, que muitas vezes acontece entre municípios diferentes, como é o meu caso, ocupa um tempo excessivo e desnecessário quando destinado somente ao cumprimento de hora atividade, por exemplo. Este tempo seria melhor otimizado se o professor pudesse aproveitá-lo no seu próprio espaço de estudo.

Na possibilidade de o professor pesquisador possuir mais de um vínculo de trabalho, deve ter o direito de se afastar, sem qualquer prejuízo na sua carreira e com a manutenção dos vencimentos, daquele que não contemple a turma que será investigada.

Na impossibilidade da manutenção dos vencimentos comentada acima, a licença sem vencimentos deve ser garantida ao professor pesquisador, com o benefício da bolsa de incentivo à pesquisa.

O plano de carreira do professor deve contemplar os avanços merecidos pelo tempo de serviço e pela formação continuada, seja por cursos de curta duração, como pela pós-graduação, de forma que este direito seja inviolado, evitando que aconteça o congelamento da carreira tão comum nos dias de hoje.

A estagnação da carreira no meu padrão vinculado ao município onde a pesquisa foi realizada é um exemplo. Neste caso, durante nove anos o nível de escolaridade descrito na minha ficha funcional ficou engessado como graduada. Ainda que na ocasião da nomeação já fosse especialista, para o espanto de qualquer pessoa de bom senso, o título não foi considerado para esta finalidade, por ter sido obtido antes do ingresso no município. Já os

avanços pela outra especialização e pelo mestrado foram concedidos na mesma ocasião, o primeiro depois de transcorridos aproximadamente seis anos de seu deferimento, e o segundo após, aproximadamente, três anos de seu requerimento.

Já no padrão do outro município, após muita luta dos servidores do magistério para que o plano de carreira fosse reformulado, em vias de que fosse totalmente cumprido, a câmara de vereadores votou pelo seu congelamento até o ano de 2020.

Estas medidas são justificadas pela falta de recurso das duas prefeituras, que têm o destaque de primeiro e terceiro lugar em arrecadação de ICMS – Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços, no estado do Paraná. Ainda que esta justificativa seja motivo para discussões calorosas, exigindo mais tempo do que o disponível para este estudo, esta questão é digna de menção como um fator relevante de desestímulo profissional, o que não foi impedimento para a realização desta pesquisa.

Os apontamentos levantados podem ser úteis para provocar debates sobre a qualidade da escola pública, já que a discussão pela defesa de condições dignas de trabalho para o professor pesquisador está alicerçada no entendimento de Santos (2008) ao afirmar que

É importante considerar também que outras propostas de integração entre ensino e pesquisa na formação de docentes poderão ser frutíferas. Para tanto, deverão estar baseadas em trabalho voltado para a formação de um profissional capaz de não apenas atuar com competência em sala de aula, mas também para a formação de um profissional capaz de reconhecer as relações existentes entre seu trabalho, as políticas públicas na área educacional e as complexas relações existentes entre sua atividade profissional e a realidade sociocultural na qual se insere (p. 24).

Apesar das condições em que a presente pesquisa foi realizada, convém destacar um dos principais frutos colhidos depois do árduo, mas gratificante, trabalho. O tema da Modelagem Matemática escolhido para que a metodologia fosse desenvolvida, ou seja, a reutilização do lixo para confecção de peças artesanais como possibilidade de contribuir à solução do problema da dengue e da crise econômica, foi inspirador para que minha carreira tomasse outro rumo no ano seguinte. Como já mencionado em outra ocasião, a direção da escola onde aconteceu a pesquisa nunca se opôs a qualquer atividade que tenha acontecido relacionada ao estudo e, na medida do possível, procurava ajudar no que era preciso.

Hoje, o diretor da escola ocupa o cargo de Secretário da Educação do município e disponibiliza uma escola de ensino multidisciplinar para atender os estudantes da rede pública de ensino no contra turno de várias regiões, uma vez que o(s) curso(s) acontece(m) em locais diferentes. Os estudantes têm a opção de estudar Violão, Teatro, Inglês Básico, Decoupage, Amo Pano, Jogos e Maquetes, Desenho, Repórter Cidadão, Mecatrônica, Gravura, Confecção

de Gibi, Papo Partilhado para Adolescentes, Experimentos Científicos, Práticas Biológicas e outros.

Na ocasião do início do ano letivo do ano de 2017, propus ao Secretário da Educação a oferta de um curso na escola de ensino multidisciplinar que fosse inspirado na Oficina de Reutilização do Lixo, realizada com os sujeitos da presente pesquisa que ele teve oportunidade de acompanhar de perto. A proposta foi aceita imediatamente e o curso ReutilizArte: Preservar, Transformar e Empreender atende estudantes e seus responsáveis que têm interesse em aprender diversas técnicas de reutilização do lixo para confecção de peças artesanais, que podem ser usadas para decorar, organizar e até mobiliar ambientes.

Com duração de um semestre, o curso explora uma grande variedade de lixo (rolinho de papel higiênico, garrafa PET, latas, embalagens diversas, caixas de papelão, garrafas e potes de vidro, retalhos de tecido, retalhos de MDF⁵¹, mobiliários escolar danificados, etc.) e conta com a doação de retalhos de MDF e de tecidos, oferecidos por empresas do município do ramo de artesanato e de estofados, respectivamente.

O curso iniciou o segundo semestre de 2017 com duas modalidades: o inicial e o avançado. O inicial priorizou a confecção de peças de decoração e de acessórios femininos. Já o avançado foi destinado a decorar, organizar e mobiliar um espaço das casas dos estudantes que era analisado, discutido e transformado com a colaboração de todos. As fotos dos Quadros 61 e 62 trazem uma amostra de peças que podem ser confeccionadas.

⁵¹ **MDF** (Medium Density Fiberboard), que **significa** placa de fibra de média densidade. É um material proveniente da madeira, fabricado com resinas sintéticas.



Quadro 61: Trabalhos do curso inicial
Fonte: Dados da pesquisa



Quadro 62: Trabalhos curso avançado
Fonte: dados da pesquisa.

Os resultados mais significativos do curso ReutilizArte: Preservar, Transformar e Empreender são o envolvimento dos estudantes ao demonstrarem interesse e satisfação pela proposta, a mudança de atitude em relação aos cuidados com o lixo e o investimento em um empreendimento desta natureza para fins lucrativos, que serão discutidos detalhadamente em outra pesquisa.

Estas são as considerações mais relevantes que fogem do objeto de estudo desta pesquisa, no entanto trazem resultados surpreendentes e aspectos preocupantes sobre a condição do professor que assume o papel de pesquisador.

Considero, portanto, que para a pesquisa científica se aproximar mais da realidade da sala de aula, faz-se necessário que as possibilidades sugeridas estejam na pauta das principais discussões da academia e do poder público.

Venho então humildemente convidar, os que se sentiram provocados, a dialogar comigo para, quem sabe, aliviar minhas angústias.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenal, v. 1, n. 1, p. 28-42, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W. de; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v.14, n.2, p. 215-239, 2012.
- ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas: Papirus, 2008.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.
- BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática como Método de Ensino Aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990.
- _____. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Blumenau: FURB, 1999.
- BRANDT, C. F. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectiva da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014.
- BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; BASSOI, T. S. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Brasil no PISA 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. Brasília, 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf>. Acesso em: 10/11/2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Educação Integral: Texto Referência para o Debate Nacional**. Série Mais Educação. Brasília, 2009. Disponível em:

<http://educacaointegral.mec.gov.br/images/pdf/biblioteca/cadfinal_educ_integral.pdf>.
Acesso em: 05/02/2017.

BUENO, C. B. **Concepções de modelagem matemática e subsídios para a educação matemática**: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BURAK, D. **Modelagem Matemática**: Ações e Interações no Processo de Ensino e Aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

_____. Critérios Norteadores para a adoção da Modelagem Matemática no Ensino Fundamental e Secundário. **Zetetike** (UNICAMP), v. 2, n.2, p. 47-60, 1994.

_____. A modelagem matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: [S.I.]

_____. As Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática e a Modelagem Matemática. **Perspectiva**, Erechim, v. 29, n.107, p. 153-161, 2005. Disponível em: <<http://www.dionisioburak.com.br/artigosperiodicos>>. Acesso em: 03/01/2017.

_____. Modelagem Matemática: avanços, problemas e desafios. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2006, Apucarana. **Anais...** Apucarana: 2006. p. 1-9.

_____. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, vol. 1, n. 1, 10-27, 2010a.

_____. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática**: uma perspectiva para a Educação Básica, Ponta Grossa, 2010b.

BURAK, D., BRANDT, C. F. Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké – Revista de Educação Matemática**, Campinas, v. 10, n. 1, p. 162-182, 2010.

BURAK, D; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática na Educação Básica: uma trajetória. In: IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007, p 1-19. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 03/01/2017.

_____. Modelagem matemática na educação básica numa perspectiva de educação matemática. In: BURAK, D. *et al* (org.) **Educação Matemática: Reflexões e Ações**. Curitiba: CRV, 2010.

_____. Considerações sobre a modelagem matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. **Margens** (UFPA). v. 6 . p. 33-50, 2013.

CAMPARI 150 ANOS: Só ele é assim. Direção: Sérgio Stefano e Danilo Corci. Produção: Gabriela Franco, Priscila Pires e Julia Soares Ramos. [S.I.]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=M2CmOx-OZ_w> Acesso em: 01/09/2016.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática: pontuando tendências. **Zetetiké – Revista de Educação Matemática**, Campinas, v. 16, n. 29, p. 41-72, jan./jun. 2008.

D'AMBRÓSIO, U. A matemática escolar, longe de se resumir a um amontoado de números e nomes e de regras impostas, deve ser uma prática cultural que possibilite ao aluno atingir criatividade e manter sua dignidade. **Pátio**. n. 57. Ano XV. Fev. Abr. 2011. Disponível em: <<http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/6302/matematica-e-cultura.aspx>>. Acesso em: 18/11/2017.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Tradução de M. V. Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática, 2004.

_____. **Semiósio e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (Fascículo I). Tradução de L. F. Levy e M.R.A. Silveira. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2010.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. Tradução de M. A. Dias. São Paulo: PROEM Editora, 2011.

_____. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, 2012a.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revmat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012b.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revmat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis. v. 7, n. 1, p. 118 - 138, 2012c.

DUVAL, R.; FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, p. 10-34, 2013.

FERREIRA, C. R. **A Modelagem Matemática na Educação Matemática como Eixo Metodológico da Prática do Professor de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, UEPG. Ponta Grossa, 2016. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1224/1/Carlos%20R%20Ferreira.pdf>>. Acesso em 04/11/2017.

FERREIRA, C. R.; BURAK, D. Modelagem Matemática na sala de aula: a questão do currículo. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2011, Apucarana, **Anais...** Apucarana: EPREM, 2011. p. 1-12. Disponível em: <<http://www.epremonline.com.br/anais/CC/07CC03.pdf>>. Acesso em: 27/10/2017.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 4, n. 2, p. 1-14. 2013.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em Educação Matemática: Disciplina na Modalidade à Distância – Livro Didático**. Palhoça: Unisul Virtual, 2005. Disponível em: <http://busca.unisul.br/pdf/89279_Diva.pdf>. Acesso em: 04/02/2015.

FREIRE, P. **Conscientização: teoria e prática da libertação uma introdução ao pensamento de Paulo Freire**. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979. Disponível em: <http://www.dhnet.org.br/direitos/militantes/paulofreire/paulo_freire_conscientizacao.pdf> Acesso em: 10/11/2017.

_____. **Extensão ou Comunicação?** Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 1983. Disponível em: <<http://teiaufmg.com.br/wp-content/uploads/2014/07/FREIRE-Paulo-Extens%C3%A3o-ou-comunica%C3%A7%C3%A3o.pdf>>. Acesso em: 04/02/2015.

_____. **Política e Educação**. 5ª ed. São Paulo, Cortez, 2001. Disponível em: <<http://forumeja.org.br/files/PoliticaeEducacao.pdf>>. Acesso em: 10/11/2017.

_____. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. 55.ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2017a.

_____. **Pedagogia do Oprimido**. 64.ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2017b.

FREITAS, L.; MORIN, E. NICOLESCU, B. Carta de Transdisciplinaridade. In: ENCONTRO CATALISADOR DO CETRANS, 1., 1999, Itatiba, **Carta...** Convento de Arrábida, 1994. p. 167-161. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001275/127511por.pdf>>. Acesso em: 06/02/2015.

GADOTTI, M.. Los aportes de Paulo Freire a la pedagogía crítica. **Revista Educación**. Vol. 26, nº 2, 2002, p. 51-60. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/pdf/440/44026207.pdf>>. Acesso em: 05/02/2015.

GUÉRIOS, E., GOSMATTI, A., FERNANDES, A. C., ZARAMELA, D. C. B., PERINE, G. L.. Estudo de elementos componentes da prática didática e metodológica de professores que ensinam matemática. In. X EPREM – ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009. Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: UNICENTRO, 2009, p. 431-443. Disponível em: <<http://www.unicentro.br/editora/ANAIS/xeprem/>>. Acesso em: 19/03/2018.

KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática e Etnomatemática no contexto da Educação Matemática**: aspectos filosóficos e epistemológicos. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2007.

_____. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KLÜBER, T. E., BURAK, D. A Matemática, os Alunos e a Matemática: Algumas Visões Epistemológicas Evidenciadas a Partir de Depoimentos de Alunos. In. SIPEMAT - SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2006, Recife. **Anais...** Recife, 2006. p. 1-11.. Disponível em: <<http://www.dionisioburak.com.br/artigos-eventos>>. Acesso em: 18/11/2017.

_____. Modelagem Matemática: pontos que justificam a sua utilização no ensino. In: IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007, p. 1-15. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 03/01/2017.

_____. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educ. Mat. Pesqui.** São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

_____. Uma metacompreensão da modelagem e da etnomatemática na educação matemática. **Currículo sem Fronteiras**. Cascavel, v. 14, n. 1, p. 260-278, jan./abr. 2014. Disponível em: <<http://www.curriculosemfronteiras.org/vol14iss1articles/kluber-burak.pdf>>. Acesso em: 26/10/2017.

LISITA, V.; ROSA, D.; LIPOVESTSKY, N. Formação de Professores e Pesquisa: Uma Relação Possível? In: ANDRÉ, M. (Org). **O Papel da Pesquisa na Formação e na Prática dos Professores**. Campinas: Papirus Editora, 2008.

LÜDKE, M. A Complexa Relação entre o Professor e a Pesquisa. In: ANDRÉ, M. (Org). **O Papel da Pesquisa a Formação e na Prática dos Professores**. Campinas: Papirus Editora, 2008.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E.M. **Técnicas de Pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

MORAES, M. C. Transdisciplinaridade e Educação. **Rizoma Freireano**, Sevilha, v. 6, 2010. Disponível em: <<http://www.rizoma-freireano.org/index.php/transdisciplinaridade-e-educacao--maria-candida-moraes>>. Acesso em: 06/02/2015.

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. Tradução de C. E. F. da Silva e J. Sawaya. 2. ed. São Paulo: Cortez; Brasília, DF:UNESCO, 2011.

NASCIMENTO, R. A. do. **Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

NOGUEIRA, C. M. I.; SIGNORINI, M. B. Crianças, algoritmos e o sistema de numeração decimal. **Investigações em Ensino de Ciências** (UFRG), v15(2). p. 259-274, 2010.

NÓVOA, A. **Matrizes Curriculares**. Entrevista. Salto para o Futuro, 2001. Disponível em: <<https://tvescola.mec.gov.br/tve/salto-acervo/interview?idInterview=8283&jsessionid=641363D1E2E29D965447040FE84A10E2>>. Acesso em: 11/10/2017.

RECOPET. **Coleta Regular e Aterro**. [S.I.], 2012. Disponível em: <<http://www.recopet.com.br/pet-no-lixo-domestico-em-2012/coleta-regular-e-aterro/>>. Acesso em: 18/11/2017.

OLIVEIRA, E. C. Prefácio. In: FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa**. 55.ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2017a.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação do Paraná. Departamento da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 24/09/2013.

PASSONI, J. C., CAMPOS, T. M. M. Revisitando os Problemas Aditivos de Vergnaud de 1976. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2010.

PONTES, H. M. S. **A Educação Matemática à luz de princípios da Aprendizagem Significativa e suas implicações na interação professor-aluno-conhecimento matemático em aula.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2011.

PRIBERAM INFORMÁTICA, S.A. **Priberam Dicionário.** [S.I.], 2013. Disponível em <<https://www.priberam.pt/dlpo>>. Acesso em 19 dez. 2017.

RITTER, C.; VELEDA, G. G. Um estudo sobre as produções de Modelagem Matemática na Educação Matemática nos cursos stricto sensu paranaenses. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2015, Ponta Grossa. **Anais...** Ponta grossa: EPREM, 2015. p. 141-141.

ROSA, C. C. da. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

SANTOS, B. S. **Um discurso sobre as Ciências.** São Paulo: Cortez Editora, 2006.

SANTOS, L. L. C. P. Dilemas e Perspectivas na Relação entre Ensino e Pesquisa. In: ANDRÉ, M. (Org). **O Papel da Pesquisa a Formação e na Prática dos Professores.** Campinas: Papirus, 2008.

SCHEIFER, C. **Design Metodológico para Análise de Atividades de Geometria Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

SILVA, K. A. P. da. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008.

_____. **Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática: implicações para a atribuição de significado.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013a.

SILVA, C. R. da. **Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2013b.

SOISTAK, A. V. F.; BURAK, D. Modelagem Matemática: uma alternativa de ensino aprendizagem da matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2005, Feira de Santana. **Anais...** Feira de Santana: UEFS, 2005.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciência e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciência e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2007.

VIANA, O. A.; BOIAGO, C. E. P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 162-182, 2015.

APÊNDICE A – Levantamento preliminar de dissertações e teses

Identificação/(Instituição ou periódico)/Natureza e Ano				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
01	Tese	UFPE	2007	Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções	Ross Alves do Nascimento	Verônica Gitirana Gomes Ferreira
http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/4113/arquivo5517_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
02	Dissertação	UEL	2012	Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental	Emerson Tortola	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000181740						
03	Dissertação	UEL	2009	Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no ensino médio	Cláudia Carreira da Rosa	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/claudia_rosa_texto_completo.pdf						
04	Dissertação	UEL	2008	Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações	Karina Alessandra Pessoa da Silva	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/karina_silva_texto.pdf						
05	Dissertação	UEL	2007	Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica	Rodolfo Eduardo Vertuan	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/rodolfo_vertuan.pdf						

Quadro 63: Levantamento Preliminar de dissertações e teses

Fonte: Dados da pesquisa.

APÊNDICE B - Levantamento preliminar de artigos

Identificação/Periódico e ISSN/Volume, número e páginas/Ano de publicação				Título do trabalho	Autor(es)
Endereço eletrônico					
06	Zetetiké – Revista de Educação Matemática ISSN: 2176-1744	v. 18, n. 33, p.(63-102)	2010	Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico	Dionísio Burak, Célia Finck Brandt
https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2800/2464					
07	Revista de Modelagem na Educação Matemática	v.1, n.1 p. (28-42)	2010	Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas	Lourdes Maria Werle de Almeida; Rodolfo Eduardo Vertuan
http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2014/1361					
08	Acta Scientiae,	v.14, n.2 p. (215-239)	2012	Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes?	Lourdes Maria Werle de Almeida, Emerson Tortola, Renato Francisco Merli
http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230/226					

Quadro 64: Levantamento preliminar de artigos

Fonte: Dados da pesquisa.

APÊNDICE C - Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continua)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
1	UEL	Tese	2013	Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática	Rodolfo Eduardo Vertuan	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000183563						
2	UEL	Dissertação	2013	Números complexos : uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos	Liliam Aparecida Alves Paes	Paulo Laerte Natti
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000183647						
3	UEL	Dissertação	2011	Interações discursivas e aprendizagem em modelagem matemática	Elaine Cristina Ferruzzi	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000162847						
4	UEL	Dissertação	2007	Modelagem matemática X aprendizagem significativa : uma investigação usando mapas conceituais	Maria Lúcia de Carvalho Fontanini	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000123412						
5	Dissertação	UEL	2011	Modelagem matemática do crescimento populacional : um olhar à luz da socioepistemologia	Camila Fogaça de Oliveira	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000166409						
6	Dissertação	UEL	2012	Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental	Emerson Tortola	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000181740						
7	Tese	UEL	2013	Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias : articulações em diferentes contextos educacionais	Adriana Helena Borssoi	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000187807						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
8	Dissertação	UEPG	2006	Modelagem matemática: uma metodologia alternativa de ensino	Patrícia Abdanur	Dionisio burak
http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=30						
9	Dissertação	UEPG	2006	Modelagem matemática no contexto do ensino médio: possibilidade de relação da matemática com o cotidiano	Alzenir Virginia Ferreira Soistak	Dionisio burak
http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=57						
10	Dissertação	UEPG	2007	Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática: aspectos filosóficos e epistemológicos	Tiago Klüber	Dionisio burak
http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=139						
11	Dissertação	UEPG	2008	A modelagem matemática e suas implicações para o desenvolvimento da criatividade	Emanuelli Pereira	Dionísio Burak
http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=306						
12	Dissertação	UEPG	2010	Modelagem matemática na Educação Matemática: contribuições e desafios à Formação Continuada de professores	Carlos Roberto Ferreira	Dionisio Burak
http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=640						
13	Dissertação	UEPG	2012	A modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nos anos iniciais do ensino fundamental	Marines avila de chaves kaviatkovski	Dionisio Burak
http://www.bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=796						
14	Dissertação	UEPG	2014	Modelagem no ensino da matemática: um viés na ação e interação do processo de ensino e aprendizagem	Derli Kaczmarek	Dionísio Burak
http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?Codarquivo=1124						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
15	Dissertação	UEM	2010	Aprendizagem significativa de função do 1º grau : uma investigação por meio da modelagem matemática e dos mapas conceituais	Silas Venâncio da Luz	Lilian Akemi Kato
http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?View=vtls000181059						
16	Dissertação	UEM	2011	A perspectiva sociocrítica da modelagem matemática e a aprendizagem significativa crítica: possíveis aproximações	Cintia da Silva	Lilian Akemi Kato
http://www.pcm.uem.br/uploads/cintia-da-silva-2011_1434678277.pdf						
17	Dissertação	UEM	2013	Uma proposta de avaliação de aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática na sala de aula	Denise Fabiana Figueiredo	Lilian Akemi Kato
http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?View=vtls000203043						
18	Dissertação	UFPR	2012	Modelagem Matemática: relatos de professores	Angela Afonsina de Souza Barbosa	Ademir Donizete Caldeira
http://www.ppgecm.ufpr.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es/015_angelaafonsinadesouzabarbosa.pdf						
19	Dissertação	UFPR	2013	Modelagem matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações	Everaldo Silveira	Ademir Donizete Caldeira
http://www.ppge.ufpr.br/teses/M07_silveira.pdf						
20	Dissertação	UFPR	2013	Uma análise dos esquemas do processo de modelagem matemática	Henrique Cristiano Thomas de Souza	Carlos Roberto Vianna
http://www.ppgecm.ufpr.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es/029_henriquecristianothomasdesouza.pdf						
21	Dissertação	UNESP	2002	Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio	Catharina de Oliveira Corcoll Spina	Rodney Carlos Bassanesy
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91141/spina_coc_me_rcla.pdf?Sequence=1&isallowed=y						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática.

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
22	Tese	UNESP	2003	O Tratamento de questões ambientais através da modelagem matemática: um trabalho com alunos do ensino fundamental e médio	Denise Helena Lombardo Ferreira	Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102168/ferreira_dhl_dr_rcla_prot.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
23	Dissertação	UNESP	2004	A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem	Ana Paula dos Santos Malheiros	Marcelo de Carvalho Borba
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91000/malheiros_aps_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
24	Tese	UNESP	2004	A Modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula	Otávio Roberto Jacobini	Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102078/jacobini_or_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
25	Dissertação	UNESP	2008	Ensino e aprendizagem de estatística por meio da modelagem matemática: uma investigação com o ensino médio	Mirian Maria Andrade	Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91104/andrade_mm_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
26	Dissertação	UNESP	2009	O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática	Maria Helena Garcia Barbosa Herminio	Marcelo de Carvalho Borba
http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91074/herminio_mhgb_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
27	Dissertação	PUC – SP	2008	Explorar e investigar para aprender matemática por meio da modelagem matemática	William Kfour	Ubiratan D'Ambrosio
http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp056382.pdf						
28	Dissertação	PUC – SP	2009	Modelagem matemática na formação continuada: análise das concepções de professores em um curso de especialização	Marcelo Navarro da Silva	Ubiratan D'Ambrosio
http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp099317.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
29	Dissertação	PUC – SP	2011	Modelagem matemática e o ensino de funções do 1º grau	Luiz Gonçalves Filho	Antônio Carlos Brolezzi
https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10893/1/Luiz%20Goncalves%20Filho.pdf						
30	Dissertação	PUC – SP	2011	O uso de modelagem no ensino de função exponencial	Cristina Maria Brucki	Sônia Barbosa Camargo Iglioni
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/13/TDE-2012-01-31T07:02:06Z-						
31	Dissertação	PUC - SP	2012	Ensino e aprendizagem de função: uma metanálise de dissertações brasileiras sobre modelagem matemática produzidas entre 1987 e 2010	João Pereira Viana Filho	Bárbara Lutaif Bianchini
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=14610						
32	Tese	PUC - SP	2013	Introdução ao conceito de integral de funções polinomiais em um curso de Engenharia de Produção por meio de tarefas fundamentais em princípios da Modelagem Matemática	Carlos Antônio da Silva	Benedito Antônio da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=15730						
33	Dissertação	UFSCAR	2009	Modelagem matemática nas atividades de estágio: saberes revelados por futuros professores	Rafael Neves Almeida	Cármem Lúcia Brancaglion Passos
http://www.bdt.d.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2880						
34	Dissertação	UFRGS	2009	Modelagem matemática na iniciação científica : contribuições para o ensino médio técnico	Morgana Scheller	Marilaine de Fraga Sant' Ana
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17711/000723556.pdf?sequence=1						
35	Tese	UFRGS	2009	A aplicação de modelos matemáticos em situações-problema empresariais, com uso do software LINDO	Márcia Jussara Hepp Rehfeldt	Milton Antônio Zaro
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17255/000713767.pdf?sequence=1						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
36	Dissertação	UFRGS	2011	Modelagem Matemática e introdução da função afim no ensino fundamental	Belissa Schonardie	Marilaine de Fraga Sant'Ana
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/32422/000786646.pdf?sequence=1						
37	Dissertação	UFRGS	2012	Modelagem Matemática no projeto de um ginásio escolar	Rafael Zanoni Bossle	Marilaine de Fraga San'Ana
https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/56617/000861542.pdf?sequence=1						
38	Dissertação	UFRGS	2013	Modelagem matemática com fotografias	Josy Rocha	Marilaine de Fraga San'Ana
http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/75810						
39	Dissertação	UFRGS	2013	Modelagem matemática e sensores de temperatura em uma escola técnica do Rio Grande do Sul	Israel Matté	Marilaine de Fraga San'Ana
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/76231/000893734.pdf?sequence=1						
40	Dissertação	UFRN	2004	A modelagem matemática como alternativa de ensino e aprendizagem da geometria na educação de jovens e adultos	Rosalba Lopes de Oliveira	Cláudia Helena Dezotti
http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16031/1/RosalbaLO.pdf						
41	Dissertação	UFRN	2005	Modelagem Matemática e Ensino Profissionalizante	Rejane Maria de Lucena	Cláudia Helena Dezoti
http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp045274.pdf						
42	Dissertação	UFRN	2012	Linguagem matemática: uma proposta de ensino e avaliação da compreensão leitora dos objetos da matemática	Pablo Jovellianos dos Santos Lima	Claudianny Amorim Noronha
http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/16087/1/PabloJSL_DISSERT.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
43	Dissertação	UFOP	2011	A prática de modelagem matemática como um cenário de investigação na formação continuada de professores de matemática	Glauco Ottone Cardoso Abreu	Frederico da Silva Reis
http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2547/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Pr%C3%A1ticaModelagemMatem%C3%A1tica.pdf						
44	Dissertação	UFOP	2011	Concepções de modelagem matemática e subsídios para a educação matemática: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro	Vilma Candida Bueno	Dale William Bean
http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2439/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Concep%C3%A7%C3%A3oModelagemMatem%C3%A1tica.pdf						
45	Dissertação	UNESC	2011	Etnomatemática e modelagem matemática: estudo dos motivos e fins que influenciam a atividade do educador	Vanessa de Fátima Custódio Dambros	Ademir Damazio
http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000051/00005148.pdf						
46	Dissertação	UFSC	2010	Percepções da modelagem matemática nos anos iniciais	Simone Raquel Casarin Machado	Ademir Donizete Caldeira
http://www.tede.ufsc.br/teses/PECT0129-D.pdf						
47	Tese	UFSC	2012	Uma meta compreensão da modelagem matemática na educação matemática	Tiago Emanuel Kluber	Irlan Von Linsingen
https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96465/303855.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
48	Dissertação	UFSC	2012	Modelagem matemática em sala de aula: principais obstáculos e dificuldades em sua implementação	Maria Carolina Machado Magnus	Ademir Donizete Caldeira
http://www.tede.ufsc.br/teses/PECT0163-D.pdf						
49	Dissertação	UFPA	2004	Matemática e cartografia: Como a Cartografia pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem da Matemática?	Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha	Oliveira do Espírito Santo
http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3223/1/Dissertacao_MatematicaCartografia.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática.

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
50	Dissertação	UFPA	2007	Modelagem Matemática e os temas transversais na educação de jovens e adultos	Edilene Farias Rozal	Adilson Oliveira do Espírito Santo
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/dissertacao_edilene_farias_rozal.pdf						
51	Dissertação	UFPA	2010	Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática	Marcelo de Sousa Oliveira	Adilson Oliveira do Espírito Santo
http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/2707/1/Dissertacao InterpretacaoComunicacaoAmbientes.pdf						
52	Dissertação	UFPA	2010	A inserção do uso do computador no processo de modelagem matemática contribuindo para o aprendizado de conhecimentos matemáticos	Mário José Siqueira da Silva	Adilson Oliveira do Espírito Santo
http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/2678/1/Dissertacao InsercaoUsoComputador.pdf						
53	Tese	UFPA	2012	Percepções de professores sobre repercussões de suas experiências com modelagem matemática	Maria Isaura de Albuquerque Chaves	Adilson de Oliveira do Espírito Santo
http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3781/1/Tese PercepcoesProfessoresRepercussoes.pdf						
54	Dissertação	UFPA	2013	Modelagem com etnomatemática: uma situação a-didática para ensino	Markus Benedito Santos Dias	Adilson Oliveira do Espírito Santo
file:///C:/Users/Helaine/Downloads/2013 Dissertacao Markus.Benedito.Santos.Dias.pdf						
55	Dissertação	UCB	2009	Modelagem matemática: uma proposta metodológica para tornar a aula espaço de problematização, pesquisa e construção.	Eliane Aparecida Martins	Jacira da Silva Câmara
http://www.bdttd.uceb.br/tede/tede_busca/arquivo.php?codArquivo=1211						
56	Dissertação	FURB	2011	Tendências de modelagem matemática para o ensino de matemática	Leila Maria Lessa Padilha	Ernesto Jacob Keim
http://www.bc.furb.br/docs/DS/2011/349152_1_1.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
57	Dissertação	PUC – RS	2005	Modelagem matemática e novas tecnologias : uma alternativa para a mudança de concepções em matemática	Clarissa Trojack Della Nina	Helena Noronha Cury
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3130/1/000330252-Texto%2BCompleto-0.pdf						
58	Dissertação	PUC – RS	2006	Modelagem matemática e resolução de problemas	Elisa Spode Machado	Helena Noronha Cury
file:///C:/Users/Helaine/Downloads/000342435-Texto+Completo-0.pdf						
59	Dissertação	PUC – RS	2012	Modelação matemática no ensino fundamental : motivação dos estudantes em aprender geometria	Nara Silvia Tramontina Zukauskas	Maria Salett Biembengut
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3125/1/000438484-Texto%2bCompleto-0.pdf						
60	Dissertação	PUC – RS	2012	A interação da modelação com as TIC : uma análise no interesse dos estudantes em aprender matemática	Alexandre Leiria Machado	Maria Salett Biembengut
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3091/1/000442332-Texto%2bCompleto-0.pdf						
61	Dissertação	PUC – RS	2013	Modelagem matemática: percepção e concepção de licenciandos e professores	Fabio Espindola Cozza	Isabel Cristina Machado de Lara
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2970/1/000446488-Texto%2bCompleto-0.pdf						
62	Dissertação	PUC – RS	2013	Modelação matemática e alfabetização científica da educação básica	Lisiane Milan Selong	Maria Salett Biembengut
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/5470/1/000450464-Texto%2bCompleto-0.pdf						
63	Dissertação	PUC – RS	2014	Modelação matemática : competência científica de uma licenciatura em matemática	Alessandra Fabian Sostisso	Maria Salett Biembengut
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/6852/1/000461943-Texto%2bCompleto-0.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática.

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
64	Dissertação	UNIFRA	2006	Modelagem matemática e o uso do álcool e do cigarro: uma forma de contextualizar a matemática	Cristina Medianeira de Souza Chaves	Eleni Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7						
65	Dissertação	UNIFRA	2006	Compreensão de conceitos de matemática e estatística na perspectiva da modelagem matemática: caminhos para uma aprendizagem significativa e contextualizada no ensino superior	Marinez Cargnin Stieler	Vanilde Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=18						
66	Dissertação	UNIFRA	2006	A aprendizagem de conteúdos de funções e estatística por meio da modelagem matemática: “alimentação, questões sobre obesidade e desnutrição”	Karla Jaqueline Souza Tatsch	Vanilde Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=10						
67	Dissertação	UNIFRA	2008	Contribuições da teoria da aprendizagem significativa e da modelagem matemática para o estudo de funções	Clessi Fátima Iaronka	Vanilde Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=34						
68	Dissertação	UNIFRA	2009	A modelagem matemática para o estudo de funções no contexto da educação ambiental	Kátia Luciane Souza da Rocha	Eleni Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=67						
69	Dissertação	UNIFRA	2009	A modelagem matemática como estratégia de ensino/ aprendizagem da matemática financeira no ensino superior	Rodrigo Fioravanti Pereira	Márcio Violante Ferreira e Sílvia Maria de Aguiar
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=54						
70	Dissertação	UNIFRA	2012	Modelagem matemática: contribuições para a formação inicial de professores de matemática	Larissa Rosa dos Santos	Vanilde Bisognin
http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=134						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

(conclusão)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
71	Dissertação	UNIVATES	2011	O uso da modelagem matemática no ensino da geometria estudo de caso: EJA	Jeison Rodrigo Reinheimer	Maria Madelena Dullius
https://www.univates.br/bdu/handle/10737/244						
72	Dissertação	UNIVATES	2012	A modelagem como ferramenta para construção de conhecimentos matemáticos	Fabiana Mattei	Maria Madelena Dullius
https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/272/1/FabianaMattei.pdf						

Quadro 65: Trabalhos que tratam da Modelagem Matemática

Fonte: Dados da pesquisa.

**APÊNDICE D - Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação
Semiótica**

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
01	UFPR – PR	MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA	2015	Materiais didáticos manipuláveis e registros de representações: a compreensão matemática dos estudantes	Viviane Ferreira	Leônia Gabardo Negrelli
http://dspace.c3sl.ufpr.br:8080/dspace/handle/1884/40498						
02	UTFPR – PONTA GROSSA – PR	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA	2013	Ensino de geometrias não-euclidianas usando arte e matemática	Simone Semmer	Sani de Carvalho Rutz da Silva
http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1312/1/PG_PPGECT_M_Semmer%2c%20Simone_2013.pdf						
03	UEPG – PONTA GROSSA – PR	MESTRADO EM EDUCAÇÃO	2010	Letramento para a docência em matemática nos anos iniciais	Annaly Schewtzhik Tozzeto	Celia Finck Brandt
http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=578						
04	UEPG – PONTA GROSSA – PR	MESTRADO EM EDUCAÇÃO	2012	Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval	Gabriela Teixeira Kluppel	Celia Finck Brandt
http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=732						
05	UEPG – PONTA GROSSA – PR	MESTRADO EM EDUCAÇÃO	2013	Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática	Fátima Aparecida Queiroz Dionizio	Celia Finck Brandt
http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=944						
06	UEL – PR	MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2011	Como estudante do Ensino Médio lidam com registros de representação semiótica de funções	Nilton Cesar Garcia Salgueiro	Ângela Marta Pereira das Dores Savioli
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000162437						
07	UEL – LONDRINA – PR	MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2012	Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental	Emerson Tortola	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000181740						

(continua)

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
08	UEL – LONDRINA – PR	DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2013	Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática : implicações para a atribuição de significado	Karina Alessandra Pessoa da Silva	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000182899						
09	UEL – PR	MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2014	Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem	Anágela Cristina Morete Felix	Rosana Figueiredo Salvi
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000191248						
10	UEL – LONDRINA – PR	MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2014	Invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental em tarefas não-rotineiras	Keila Tatiana Boni	Angela Marta Pereira das Dores Savioli
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000198985						
11	UEM – PR	DOUTORADO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E MATEMÁTICA	2013	Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de mapas conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas.	Claudete Cargin	Rui Marcos de Oliveira Barros
http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/642/1/UEM_PPGCM_D_Cargin%2c%20Claudete_2013.pdf						
12	UEM – MARINGÁ – PR	DOUTORADO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA	2014	Estudo dos registros de Representação Semiótica: implicações no ensino e aprendizagem da álgebra para alunos surdos fluente em língua de sinais	Silvia Teresinha Frizzarini	Clélia Maria Ignatius Nogueira
http://www.pcm.uem.br/uploads/silvia-teresinha-frizzarini--17022014.compressed_1434860412.pdf						
13	UEM – MARINGÁ – PR	MESTRADO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E A MATEMÁTICA	2015	Contribuições dos registros de representação semiótica para a compreensão dos números decimais: um estudo com alunos do 6º ano	Flávia Cheroni da Silva Brita	Valdeni Soliani Franco
http://www.pcm.uem.br/uploads/flavia-cheroni-da-silva-brita--23042015_1436982877.pdf						
14	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2010	Registros de representação semiótica e o geogebra: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas	José Roque Damasco Neto	Méricles Thadeu Moretti
http://www.tede.ufsc.br/teses/PECT0124-D.pdf						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica.

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
15	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2010	Esboço de curvas no ensino superior	Learcino dos Santos Luiz	Méricles Thadeu Moretti
http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFSC_6077335f7a9422fd04e0de17eb099ff1 (Trabalho não está disponível)						
16	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2012	Aprendizagem em geometria trfnas séries iniciais: Uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual	Daiani Lodete Pirola	Méricles Thadeu Moretti
https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96199/310076.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
17	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2012	Registros de representação semiótica e análise de dados em ambiente informático	Nicélio José Gesser	Méricles Thadeu Moretti
http://www.tede.ufsc.br/teses/PECT0170-D.pdf						
18	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2013	Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais	Selma Felisbino Hillesheim	Méricles Thadeu Moretti
http://tede.ufsc.br/teses/PECT0183-D.pdf						
19	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2013	Registros semióticos em porcentagem: análise da produção de alunos na resolução de problemas triparticionados	Suelen Maggi Scheffer Vieira	Méricles Thadeu Moretti
http://tede.ufsc.br/teses/PECT0192-D.pdf						
20	UFSC – SC	DOUTORADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2013	Práticas matemáticas no plano cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação	Afrânio Austregésilo Thiel	Méricles Thadeu Moretti
http://tede.ufsc.br/teses/PECT0207-T.pdf						
21	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2013	A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior	Adriano Luiz dos Santos Né	Méricles Thadeu Moretti
https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/101091/317384.pdf?sequence=1&isAllowed=y						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
22	UFSC – SC	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2015	Da tinta ao Braille : estudo de diferenças semióticas e didáticas dessa transformação no âmbito do Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa - CMU e do livro didático em braille	Daiana Zanelato dos Anjos	Mérciles Thadeu Moretti
http://tede.ufsc.br/teses/PECT0249-D.pdf						
23	UFRS – RS	MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2012	Uma sequência didática para o ensino de estatística a alunos do Ensino Médio na modalidade PROEJA	Maurício Ramos Lutz	João Feliz Duarte de Moraes
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/49625/000850523.pdf?sequence=1						
24	UFRS – RS	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2014	Introdução às expressões algébricas na escola básica : variáveis & células de planilhas eletrônicas	Anderson de Abreu Bortoletti	Alvino Alves Sant’Ana
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/107253/000945624.pdf?sequence=1						
25	UFRS – RS	MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2014	Matemática dinâmica : uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas	Eliana Bevilacqua Salin	Maria Alice Gravina
http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/108425/000948600.pdf?sequence=1						
26	PUC – RS	MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	2014	Aprendizagem de estatística na EJA com tecnologia: uma sequência didática com base nos registros de representação semiótica	Reinaldo Feio Lima	Lori Viali
http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/6895/1/000462336-Texto%2bCompleto-0.pdf						
27	PUC – SP	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2010	Relações entre mobilização dos registros de representação semiótica e os níveis de letramento estatístico com duas professoras	Eliana Maria Bauschert de Freitas	Cileida de Queiroz e Silva Coutinho
http://livros01.livrosgratis.com.br/cp137881.pdf						
28	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica	Lígia Maria Silva	Benedito Antônio da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11633						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
29	PUC – SP	MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento	Talita Carvalho Silva de Almeida	Maria José Ferreira da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=10963						
30	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	Funções monotônicas: alunos da 3ª série do ensino médio frente às Olimpíadas de Matemática das escolas públicas	José Zucco	Sônia Barbosa Camargo Iglioni
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11490						
31	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional	Marcelo Cardoso Ferraz	Maria José Ferreira da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11493						
32	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	Representações gráficas: conhecimentos mobilizados por alunos do Ensino Médio na compreensão e análise contidas em gráficos	Marcelo Dugan Dell'Orti	Benedito Antônio da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11964						
33	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2010	As funções seno e cosseno: diagnóstico de dificuldades de aprendizagem através de sequências didáticas com diferentes mídias	Edílson Paiva de Souza	Gerson Pastre de Oliveira
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12314						
34	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2011	Um estudo sobre a função algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio	Ana Lúcia Infantozzi Jordão	Barbara Lutaif Bianchini
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12901						
35	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2011	Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no Ensino Médio	Fernando da Silva Conceição Junior	Barbara Lutaif Bianchini
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12905						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
36	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2011	Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio	Adinilson Marques Reis	Gerson Pastre de Oliveira
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12969						
37	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2011	Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do Ensino Fundamental	Edson Eduardo Castro	Barbara Lutaif Bianchini
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12983						
38	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2013	Sistemas de equações lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registros de representação semiótica	Nilza Aparecida de Freitas	Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=16654						
39	PUC – SP	DOCTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2013	Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?	Cintia Rosa da Silva	Saddo Ag Almouloud
https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10982/1/Cintia%20Rosa%20da%20Silva.pdf						
40	PUC – SP	MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA	2014	Estudo da reta em geometria analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software GeoGebra	Raquel Santos Silva	Bárbara Lutaif Bianchini
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=17020						
41	PUC – SP	DOCTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	2014	As transformações geométricas em um jogo interativo entre quadros: um estudo teórico	Ediedete Pinheiro Lino	Maria José Ferreira da Silva
http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=17825						
42	UFSCAR – SOROCABA – SP	MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS	2013	O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP	Leila Canaveze	Paulo César Oliveira
http://www.bdt.d.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=7013						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continuação)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
43	UFSCAR – SOROCABA – SP	MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	2014	O estudo dos números complexos no Ensino Médio: uma abordagem com a utilização do geogebra	Tânia Mara Amorim	Paulo César Oliveira
http://www.bdttd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=8383						
44	UNESP – MARÍLIA – SP	DOCTORADO EM EDUCAÇÃO	2010	Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem da matemática: um estudo com alunos do sexto ano do ensino fundamental	Raimundo Luna Neres	Raul Aragão Martins
https://www.marilia.unesp.br/Home/Pos-Graduacao/Educacao/Dissertacoes/neres_rl_do_mar.pdf						
45	UNESP – PRESIDENTE PRUDENTE – SP	MESTRADO EM EDUCAÇÃO	2010	(Res)significando a educação estatística no ensino fundamental: análise de uma sequência didática apoiada nas tecnologias de informação e comunicação	Everton José Goldoni Estevam	Monica Fürkotter
http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/bpp/33004129044P6/2010/estevam_ejg_me_prud.pdf						
46	UFPA- PA	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA	2012	As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica	Rafael Silveira Patrício	Marisa Rosâni Abreu da Silva
http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/2680/1/Dissertacao_DificuldadesRelacionadasAprendizagem.pdf						
47	UFPE – PE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	2010	Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações do primeiro grau	Wagner Rodrigues Costa	Marcelo Câmara dos Santos
http://repositorio.ufpe.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/3808/arquivo48_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
48	UFPE – PE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	2010	Vetores: interação à distância para a aprendizagem de álgebra linear	Juliana Pereira Gonçalves de Andrade	Franck Bellemain
http://repositorio.ufpe.br:8080/bitstream/handle/123456789/4038/arquivo85_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
49	UFPE – PE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	2011	Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais	Rosivaldo Severino dos Santos	Marcelo Câmara dos Santos
http://repositorio.ufpe.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/3742/arquivo2882_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(conclusão)

Identificação/Instituição/Nível e Ano de defesa				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
50	UFPE – PE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	2011	Investigando estratégias mobilizadas pelos alunos no equacionamento de problemas de primeiro grau	Marcelo Leonardo Leôncio da Silva	Marcelo Câmara dos Santos
http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/3980/arquivo6777_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						
51	UFPE – PE	MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA	2014	Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica	Amanda Barbosa da Silva	Paulo Figueiredo Lima
http://repositorio.ufpe.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/12557/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20Amanda%20Barbosa%20da%20Silva.pdf?sequence=1&isAllowed=y						

Quadro 66: Dissertações e teses que tratam dos Registros de Representação Semiótica

Fonte: Dados da pesquisa.

APÊNDICE E - Artigos que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(continua)

Identificação/Periódico e ISSN/Volume, número de páginas/Ano de publicação				Título do trabalho	Autor(es)
Endereço eletrônico					
52	Zetetiké – Revista de Educação Matemática ISSN: 2176-1744	v. 18, n. 33, p.(63-102)	2010	Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico	Dionísio Burak, Célia Finck Brandt
https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2800/2464					
53	EMP – Educação Matemática Pesquisa – ISSN: 1983-3156	2014. V. 16, n. 2 p. (369-383)	2015	O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica	Edrei Henrique Lourenço, Paulo César Oliveira
http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17380/pdf					
54	EMP – Educação Matemática Pesquisa – ISSN: 1983-3156	V. 17, n. 3 p. (597-616)	2015	Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras	Mérciles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt
http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25673/pdf					
55	Educação Matemática em Revista – ISSN: 2317-904X	n. 41 p. (19-27)	2014	Funções Trigonométricas Seno e Cosseno: Das Representações Semióticas à Formação dos Conceitos	Neiva Ignês Grando, Roberto Preussler
http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/329/pdf					
56	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	v. 5, n. 1, p. (38-47)	2010	Registros da Representação Semiótica da Função Afim: Análise de livros didáticos de matemática do ensino médio	Deise Pedroso Maggio, Maria Arlita Silveira Soares, Cátia Maria Nehring
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2010v5n1p38/21140					
57	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	V 7, n. 2, p. (56-68)	2012	A transformabilidade dos registros de representação semiótica no ensino de equações de reta	Rogério Rodrigues de Faria, Cintia Aparecida Bento dos Santos, Edda Curi
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p53/23453					
58	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	V. 7, n. 2, p. (266-297)	2012	Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento	Raymond Duval, Trad. Mérciles Thadeu Moretti
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465					

Quadro 67: Artigos que tratam dos Registros de Representação Semiótica

(conclusão)

Identificação/Periódico e ISSN/Volume, número de páginas/Ano de publicação				Título do trabalho	Autor(es)
Endereço eletrônico					
59	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	V. 8, n. 2 – p. (177-193)	2013	Uma reflexão teórica acerca do papel dos registros de representação semiótica em atividades de demonstrações matemáticas em Geometria Euclidiana	Fernanda Aparecida Ferreira, Cintia Aparecida Bento dos Santos
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n2p177/26027					
60	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	v. 10, n. 1, p. (162-182)	2015	Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra	Odalea Aparecida Viana, Carlos Eduardo Petronillo Boiago
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p162/30048					
61	ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática – ISSN: 2178-7727	V. 13, n. 2, p. (55-70)	2011	Registros de representação semiótica: um estudo sobre a parábola	Cristina Aparecida de Melo Piza, Angela Marta Pereira das Dores Savioli
http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/13/11					
62	Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – ISSN: 2177-9309	V. 2, n. 3, p. (1-26)	2011	Articulando as representações algébricas e a geométrica das equações quadráticas a partir da noção de registros de representações semióticas de Duval	José Edeson Melo Siqueira, Franck Bellemain
http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/24/34					
63	Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – ISSN: 2177-9309	V. 4, n. 2, p. (1-14)	2013	Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica	Fernanda Aparecida Ferreira, Cintia Aparecida Bento dos Santos, Edda Curi
http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/160/pdf_22					
64	Práxis Educativa ISSN: 1809-4031 e-ISSN:1809-4309	V. 7, n. 2, p. (379-396)	2012	O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica	Méricles Thadeu Moretti, Afrânio Austregésilo Thiel
http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/4144/3214					
65	Práxis Educativa ISSN: 1809-4031 e-ISSN:1809-4309	V. 7, n. 2, p. (305-330)	2012	Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática?	Raymound Duval
http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/4694/3209					

Quadro 67: Artigos que tratam dos Registros de Representação Semiótica

Fonte: Dados da pesquisa.

APÊNDICE F - Dissertações e Teses do levantamento final

Identificação/(Instituição ou periódico)/Natureza e Ano				Título do trabalho	Autor	Orientador
Endereço eletrônico						
1	Dissertação	UEL	2008	Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações	Karina Alessandra Pessoa da Silva	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/karina_silva_texto.pdf						
2	Dissertação	UEL	2009	Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no ensino médio	Cláudia Carreira da Rosa	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/claudia_rosa_texto_completo.pdf						
3	Dissertação	UEL	2007	Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica	Rodolfo Eduardo Vertuan	Lourdes Maria Werle da Almeida
http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/rodolfo_vertuan.pdf						
4	Dissertação	UEL	2012	Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental	Emerson Tortola	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000181740						
05	Tese	UEL	2013	Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática : implicações para a atribuição de significado	Karina Alessandra Pessoa da Silva	Lourdes Maria Werle de Almeida
http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?view=vtls000182899						
06	Tese	PUC - SP	2013	Os signos peirceanos e os registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e seu ensino?	Cintia Rosa da Silva	Saddo Ag Almouloud
https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10982/1/Cintia%20Rosa%20da%20Silva.pdf						
07	Tese	UFPE	2007	Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções	Ross Alves do Nascimento	Verônica Gitirana Gomes Ferreira
http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/4113/arquivo5517_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y						

Quadro 68: Dissertações e Teses do levantamento final.

Fonte: Dados da pesquisa

APÊNDICE G - Artigos do levantamento final

Identificação/Periódico e ISSN/Volume, número e páginas/Ano de publicação				Título do trabalho	Autor(es)
Endereço eletrônico					
08	Zetetiké – Revista de Educação Matemática ISSN: 2176-1744	v. 18, n. 33, p.(63-102)	2010	Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico	Dionísio Burak, Célia Finck Brandt
https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2800/2464					
09	REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática – ISSN: 1981 – 1322	v. 10, n. 1, p. (162-182)	2015	Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra	Odalea Aparecida Viana, Carlos Eduardo Petronilho Boiago
https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p162/30048					
10	Acta Scientiae,	v.14, n.2 p. (215-239)	2012	Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes?	Lourdes Maria Werle de Almeida, Emerson Tortola, Renato Francisco Merli
http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230/226					
11	Revista de Modelagem na Educação Matemática	v.1, n.1 p. (28-42)	2010	Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas	Lourdes Maria Werle de Almeida; Rodolfo Eduardo Vertuan
http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2014/1361					

Quadro 69: Artigos do levantamento final

Fonte: Dados da pesquisa.