

ANÁLISE MATRICIAL PRELIMINAR DE ESTRUTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS POR MEIO DO MÉTODO DA FLEXIBILIDADE: UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO DUAS VIGAS HIPERESTÁTICAS E A DETERMINAÇÃO COMPLETA DOS SEUS DESLOCAMENTOS, ROTAÇÕES E COEFICIENTES DE FLEXIBILIDADE.

Alexandre Manoel dos Santos, M.Sc. - alexandre.manoel.dos.santos@gmail.com

Fundação Centro Universitário da Cidade de União da Vitória – **UNIUV**

LEXCIA – Laboratório Experimental de Computação e Informática, União da Vitória/PR

Cursos de Engenharia Civil, de Engenharia Industrial Madeireira e de Informática de Gestão.

Universidade do Contestado – **UnC** – Campus Canoinhas

NAPI – Núcleo de Apoio à Prática de Informática, Canoinhas/SC

Cursos de Engenharia Florestal, de Design e de Sistemas de Informação

Sérgio Scheer, Dr. Eng. – scheer@ufpr.pr

Universidade Federal do Paraná – UFPT – Setor de Tecnologia

Centro Politécnico – Departamento de Desenho – Jardim das Américas, Curitiba/PR

Adilandri Mércio Lobeiro, M.Sc. - adilandri@gmail.com

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Lucas Máximo Alves, M.Sc. - lucasmaximoalves@gmail.com

Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG

***Abstract.** The aim of this paper is to describe the use of the Flexibility Method to solve two classical problems pertained by structural analysis knowledge area, in engineering context: the matrix analysis of framed structures. Two beams statically indeterminated are solved. There are three specific motivations to make a presentation of a complete solution for those problems, by this method. The first one is its pedagogic fashion. At graduation level in engineering, it is important to encourage the students to acquire perceptions about the relation existent between actions and deformations of a given framed structure under a given pattern loading. The deflections can be determined precisely and the redundant actions are known by hand work, spite to access directly the set of data localized at suitable tables of reference textbooks. We think that, in academic terms and for academic problems, the analyst must know the complete process to calculate them, precisely, without computers and reference tables. The second one is about the characteristic of Flexibility Method. With it, the analyst can choose alternative paths to implement the compatibility equations associated with the supports configurations. Then, he uses the superposition principle to calculate de deflections and rotations. The third one is that this method represents a good opportunity for the students to learn the basis for the Force Method, another one, so important in analysis of framed structures.*

***Keywords:** Matrix Analysis, Framed Structures, Flexibility Method, Force Method.*

1. INTRODUÇÃO

De acordo com James M. Gere e William M. Weaver, em [GERE_1980], os conceitos básicos do Método da Flexibilidade, também conhecido como "Método da Força", descrevem uma generalização organizada e sistematizada de um outro método, cuja origem é mais antiga, denominado "Método de Maxwell-Mohr", desenvolvido por J.C. Maxwell em 1864 e estendido por Otto C. Mohr em 1874.

Na abordagem do Método da Flexibilidade as estruturas estaticamente indeterminadas são preliminarmente analisadas de tal maneira que as suas indeterminações são resolvidas por meio de considerações específicas sobre o comportamento elástico da estrutura quando submetidas a um determinado padrão de carregamento, e de considerações sobre as suas configurações de suporte. Tais considerações fornecem as condições necessárias para a formulação das equações de compatibilidade das deformações causadas pelas cargas aplicadas e também pelas ações redundantes sobre a estrutura, com as suas configurações de suporte, geralmente hiperestáticos, em termos de coeficientes de flexibilidade. As ações redundantes são reações incógnitas do sistema indeterminado convenientemente escolhidas pelo engenheiro analista para tornar a estrutura original em uma estrutura estaticamente determinável.

Em outras palavras, no Método da Flexibilidade é preciso descrever analiticamente quais são as influências individuais que as ações atuantes exercem, incluindo as ações redundantes, em termos de deslocamentos e rotações (denominadas também de "deformações"), sobre a estrutura como um todo. Então, por meio do conhecimento que o analista tem sobre as condições de compatibilidade das deformações da estrutura, causadas pelas cargas atuantes, com as suas configurações de suporte, que a definem como uma estrutura hiperestática, juntamente com o conhecimento que ele deve ter sobre a equação diferencial da linha da curva elástica em seu caso específico, e do uso adequado do Método da Flexibilidade, a estrutura original passa a ser estaticamente determinável.

Nas equações de compatibilidade estão envolvidos os deslocamentos calculados para uma versão modificada da estrutura original, estaticamente determinada, denominada "estrutura aliviada", com os suportes retirados da configuração original. As reações desses suportes serão consideradas no cálculo das deformações que causam na estrutura aliviada, em seus próprios pontos de aplicação.

Para permitir a generalização do uso deste método sobre estruturas mais complicadas, a sua abordagem é apresentada na forma matricial. A notação matricial tem a vantagem de permitir que o processo de obtenção da solução do problema seja organizado e sistematizado, independente da sua complexidade, de tal forma a evitar erros durante a execução de cada um dos passos do referido processo.

Como o Método da Flexibilidade depende de interações e decisões humanas em seu processo de execução, diz-se que ele não é mais conducente, ou mais proveitoso, à resolução numérica por meio de programação de computadores, que o Método da Rigidez. No primeiro, as interações são necessárias para decidir quais reações, entre aquelas que fazem parte da configuração de suporte da estrutura original, serão escolhidas como "ações redundantes", de modo que, por serem retiradas, a estrutura aliviada passe a assumir uma configuração estaticamente determinada. Porém, mesmo não sendo mais conducente, o Método da Flexibilidade deve ser aprendido por todo engenheiro seriamente envolvido com a atividade de análise estrutural, uma vez que fornece as bases para o entendimento do Método da Rigidez que, por sua vez, é matematicamente similar ao primeiro método e mais adequado ao uso de resolvidores numéricos.

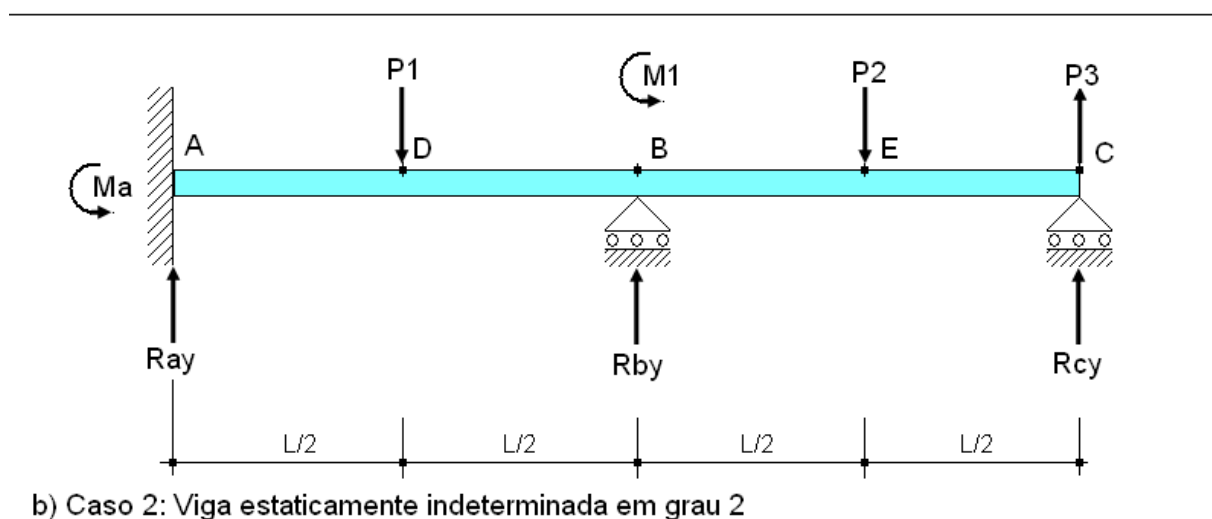
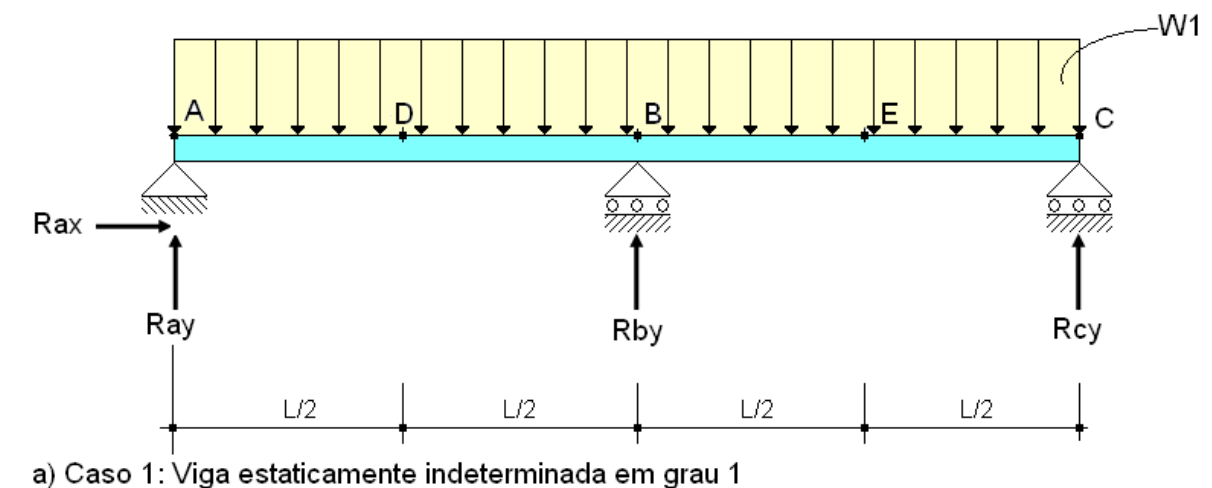
Neste artigo, o Método da Flexibilidade é utilizado para realizar a análise preliminar de duas estruturas estaticamente indeterminadas. Considera-se como análise preliminar a obtenção dos valores das reações incógnitas de tal forma que a estrutura se torne estaticamente determinável. A operacionalização do método para a resolução destes dois problemas requer uso freqüente às tabelas, que resumem o cálculo dos deslocamentos e das rotações causadas na estrutura devido às ações das cargas e redundantes envolvidas. Esses cálculos são apresentados em seções imediatamente subsequentes àquelas que apresentam a solução de cada problema.

2. O MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

Com o objetivo de ilustrar a aplicação do método da flexibilidade serão considerados dois casos simples de vigas estaticamente indeterminadas. Nestes dois casos, tirados de [GERE_80], utilizar-se-á o Método da Flexibilidade para identificar o valor das reações que são as incógnitas do problema.

No primeiro caso, denominado “Caso 1”, a viga é estaticamente indeterminada em primeiro grau, conforme a Figura 1a., já que existem quatro reações (duas no ponto “A”, uma em “B” e outra em “C”) e apenas três equações de equilíbrio estático para as ações atuantes no plano. Neste caso, a reação “ R_{by} ” será escolhida como ação redundante, isto é, aquela que será retirada da configuração inicial para depois fazer parte da equação de compatibilidade.

Figura 1: Apresentação de duas estruturas originais, estaticamente indeterminadas, dos casos 1 e 2



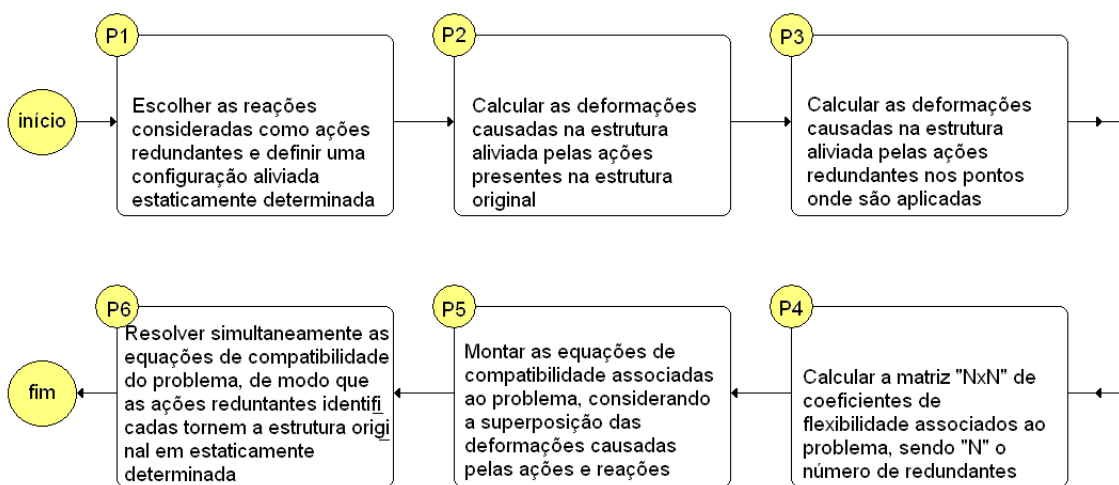
Fonte: Adaptação de James Gere (1980)

No segundo caso, denominado “Caso 2”, um problema mais geral é apresentado por meio de uma viga engastada à esquerda, em “A”, com dois apoios simples, sendo um no centro “B” e o outro na extremidade direita “C”. Tal viga, com grau 2 de indeterminação estática, possui dois tramos, conforme a Figura 1b. Neste caso, as reações “Rby” e “Rcy” serão escolhidas como ações redundantes e, de acordo com os processos do método de solução, suas participações como ações sobre a estrutura aliviada permitirão identificar a matriz de coeficientes de flexibilidade da estrutura original. Um tratamento matricial é importante na organização e sistematização dos passos do processo de solução do problema.

2.1 PROCESSO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DA FLEXIBILIDADE

Numa visão sistêmica, o Método da Flexibilidade pode ser entendido como um processo constituído por seis passos, conforme a Figura 2.

Figura 2: Os seis passos do Método da Flexibilidade



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

No passo “P1”, o engenheiro analista escolhe arbitrariamente uma configuração aliviada da estrutura, que é originalmente estaticamente indeterminada, e, por meio desta escolha, transforma a configuração inicial em uma estrutura estaticamente determinada. À essa nova estrutura dá-se o nome de “estrutura aliviada” do problema. Assim, um conjunto de uma ou mais ações redundantes assume o papel de conjunto de incógnitas do problema a ser resolvido. O objetivo da aplicação do Método da Flexibilidade é identificar o valor destas incógnitas.

No passo “P2”, calculam-se as deformações causadas pelas demais ações na estrutura aliviada, que são as cargas atuantes sobre a estrutura original, com exceção das ações redundantes. As referidas deformações devem ser calculadas exatamente nos pontos de aplicação das ações redundantes. Então, cada uma das cargas atuantes exerce influência própria sobre a deformação total nestes pontos. A deformação total em cada ponto é, portanto, a soma das deformações nestes pontos causadas por cada uma das cargas atuantes. Tal somatório representa a aplicação do princípio da superposição.

No passo “P3”, calculam-se as deformações causadas na estrutura aliviada pelas ações redundantes em cada um dos pontos onde estas ações são aplicadas. Então, o procedimento deste passo é similar ao procedimento do passo anterior, com a diferença de que neste é possível identificar as influências de cada ação redundante na deformação da estrutura

aliviada em seus pontos de aplicação. Isso é importante para que se possa obter o coeficiente de flexibilidade a ser calculada no passo seguinte.

No passo “P4”, identificam-se os coeficientes de flexibilidade associados ao problema. Em outras palavras, cada coeficiente de flexibilidade fornece a capacidade que a estrutura tem de se deformar por unidade de força das ações redundantes presentes, em cada um de seus pontos de aplicação. Uma matriz “NxN” de coeficientes é montada, onde “N” representa o número de ações redundantes consideradas no problema.

No passo “P5”, um sistema de equações de compatibilidade associadas ao problema que se quer resolver é montado. De praxe, assume-se que nos suportes as deformações da estrutura original são nulas. Isto é, descreve-se analiticamente um conjunto de “N” equações de compatibilidade propondo que nos pontos de aplicação das ações redundantes as deformações causadas pelas cargas atuantes somadas com as deformações causadas pelas próprias redundantes resultam em um deslocamento nulo. Então, estes dois tipos de deformações, obtidas nos passos “P2” e “P3”, são iguais em valor e possuem sentidos opostos.

No passo “P6”, último do processo de aplicação do Método da Flexibilidade, resolve-se simultaneamente o sistema formado pelas equações de compatibilidade, pela identificação da intensidade e do sentido das ações redundantes. Assim, a estrutura original que era estaticamente indeterminada passa a ser estaticamente determinável pela simples aplicação das equações do equilíbrio estático, já considerando as incógnitas resolvidas. Todas as reações da estrutura original são determináveis e os deslocamentos, em qualquer ponto da estrutura original, podem agora ser calculados sem dificuldade.

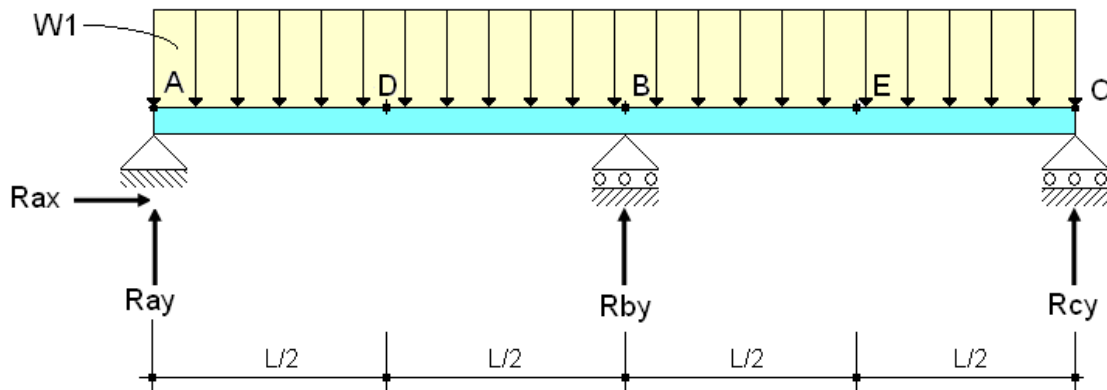
Então, uma vez realizado os passos do processo de aplicação do método, considera-se o problema de análise preliminar da estrutura original resolvido. Neste artigo, está-se limitando o significado do termo “análise preliminar” de uma estrutura estaticamente indeterminada, considerando o seu escopo limitado à fase de identificação dos valores das incógnitas do problema hiperestático apresentado em seus dois estudos de caso, descritos a seguir.

2.2 PROBLEMA DO CASO 1: VIGA SIMPLES TRI-APOIADA

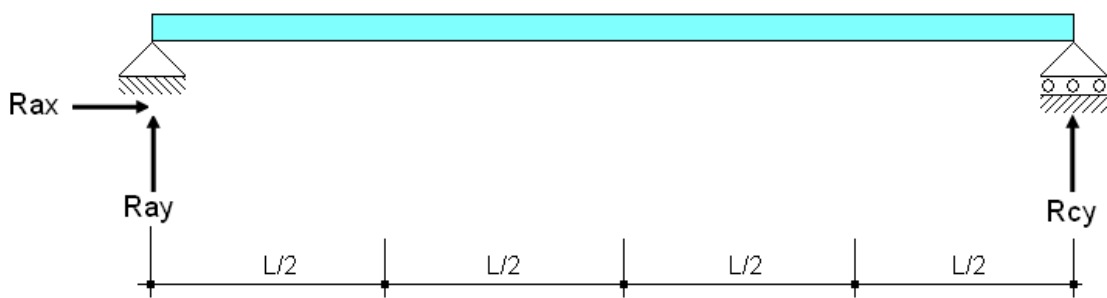
A viga a seguir é um caso típico de viga estaticamente indeterminada, muito utilizada para descrever didaticamente a aplicação do Método da Flexibilidade. Vários autores a utilizam, entre eles [GERE_1980], [POPOV_1980], [GHALI_1990] e [GERE_1990]. Trata-se de uma viga com dois tramos, apoiada em três suportes simples, com grau 1 de indeterminação estática, conforme a Figura 3. O problema se resume em uma simples pergunta: Qual é o valor da reação “R_b”?

Para resolver o problema por meio do método da flexibilidade, o engenheiro analista deve aliviar a estrutura original, que é estaticamente indeterminada, conforme a Fig.3a, transformando-a em uma estrutura estaticamente determinada, conforme a Fig.3b. Tal transformação, entre outras transformações possíveis, ocorreu pela retirada do suporte da estrutura original no ponto “B”. Então, a reação “R_b” deixou de ser uma reação e passou a assumir o papel de ação redundante, atuante no mesmo ponto “B” da estrutura aliviada. Isto significa que agora o sistema é estaticamente determinável, e as deformações no ponto “B” causadas tanto pela carga distribuída “W₁”, denominada “DW_{1B}”, descrita na Figura 3c, como pela ação redundante “R_b”, denominada “DR_bB”, descrita na Figura 3d, podem agora ser identificadas por meio do conhecimento sobre a equação diferencial da linha da curva elástica da estrutura aliviada, considerando as influências de cada uma delas isoladamente. É o que será mostrado na resolução do problema.

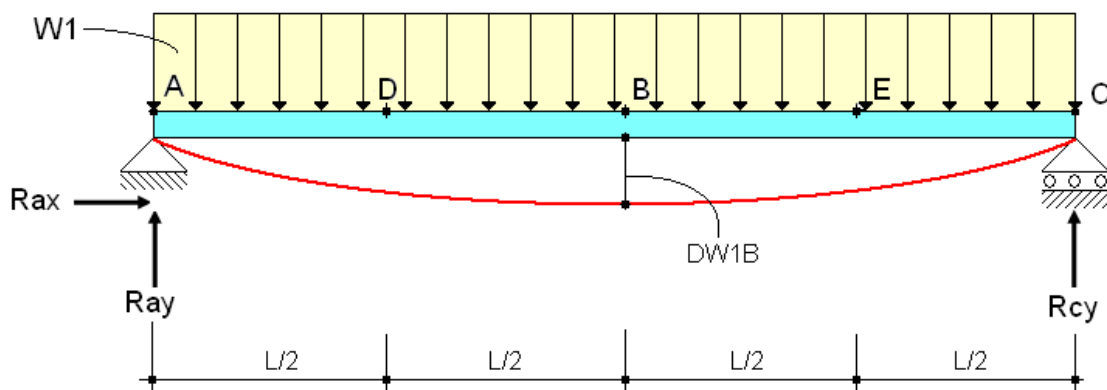
Figura 3: A estrutura do Caso 1 sob análise e aplicação do Método da Flexibilidade



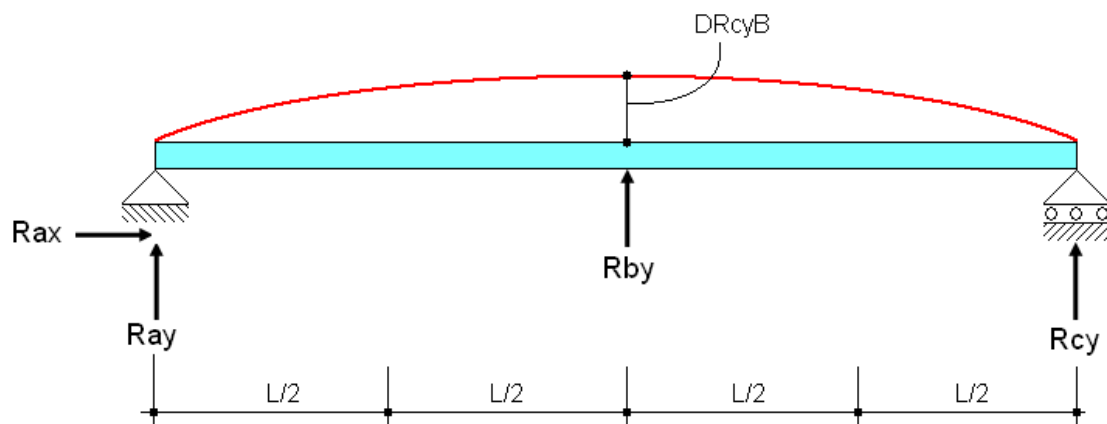
a) Estrutura original estaticamente indeterminada, com grau 1



b) Estrutura aliviada, estaticamente determinada, sem as cargas originais atuantes



c) Estrutura aliviada, sob atuação da carga distribuída "W1" presente na estrutura original



d) Estrutura aliviada, sob a atuação da ação redundante "Rby", presente no suporte "B" da estrutura original

Fonte: Adaptação de James M. Gere, 1980.

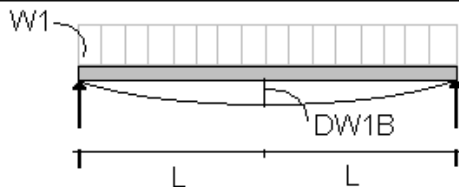
O cálculo do deslocamento “DW1B”, no ponto “B” da estrutura aliviada, causada pela carga distribuída “W1”, está descrito na expressão (1). Essa expressão foi obtida diretamente da Figura 4a, cujos valores, por sua vez, estão baseados em diversas tabelas presentes em [GERE_1980], [POPOV_1980], [GHALI_1990], [GERE_1990]. Nessa figura, as deformações estão significativamente exageradas para uma melhor visualização. O cálculo de “DW1B” representa o passo “P2” do processo de solução via Método da Flexibilidade.

$$DW1B = \left[\frac{-5}{384} \cdot \frac{W_1 \cdot L^4}{E \cdot I} \right] \quad (1)$$

O cálculo do deslocamento “DRbyB”, no ponto “B” da estrutura aliviada, causada pela ação redundante “Rby”, está descrito na expressão (2). Essa expressão também foi obtida diretamente da Figura 4b, cujos valores são baseados nas referências bibliográficas citadas anteriormente. O cálculo de “DRbyB” representa o passo “P3” do processo de solução via Método da Flexibilidade.

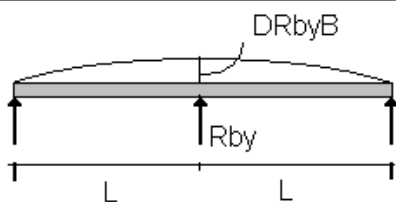
$$DRbyB = \left[\frac{+1}{48} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E \cdot I} \right] \quad (2)$$

Figura 4: Apresentação dos deslocamentos causados na viga aliviada pela carga “W1”



$$DW1B = \left[\frac{-5}{384} \cdot \frac{W_1 \cdot L^4}{E \cdot I} \right]$$

a) Deslocamento no centro do vão de uma viga bi-apoiada, causado por carga distribuída



$$DRbyB = \left[\frac{+1}{48} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E \cdot I} \right]$$

b) Deslocamento no centro do vão de uma viga bi-apoiada, causada por uma carga concentrada

Fonte: Adaptado de James G. Gere, 2003.

Um aspecto importante sobre os deslocamentos na estrutura aliviada causados pelas ações redundantes é que eles fornecem os coeficientes de flexibilidade da estrutura, por unidade de força da ação redundante aplicada. Assim, o coeficiente de flexibilidade “δRbyB” da estrutura sob ação de “Rby” no ponto “B” é derivado de (2) e pode ser descrito pela expressão (3).

$$Rby \cdot \partial_{Rby} = \left[\frac{+1}{48} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E \cdot I} \right] \rightarrow \partial_{Rby} = \left[\frac{+1}{48} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I} \right] \quad (3)$$

O valor de “δRbyB” representa a influência que a ação redundante “Rby” exerce sobre a estrutura aliviada por unidade de força. O conhecimento a respeito dos coeficientes de flexibilidade é muito importante na resolução de problemas estaticamente indeterminados com grau de indeterminação maior que 1, e representa o quarto passo, “P4”, do processo de solução do Método da Flexibilidade.

O próximo passo na resolução deste problema, equivalente ao passo “P5” do Método da Flexibilidade, é a montagem das equações de compatibilidade associadas ao problema. Como neste caso existe apenas uma ação redundante, que é “Rby”, então, existirá somente uma equação de compatibilidade. Tal equação deve ser compatível com o fato de que a estrutura original, estaticamente indeterminada, não pode ter deslocamentos verticais no suporte

posicionado no ponto “B”, causados pela carga distribuída “W1” e pela ação redundante “Rby”. Uma maneira elegante de descrever este fato é, usando a configuração aliviada e praticando o princípio da superposição, pela realização da soma das deformações causadas por cada uma das ações envolvidas na configuração aliviada e exigir que esta soma seja zero. Isto é, o deslocamento total, resultante da adição de todos os deslocamentos provocados pelas ações atuantes na configuração aliviada, deve ser zero. Por isso o termo “equação de compatibilidade”, pois a expressão analítica dos deslocamentos totais deve ser compatível com a configuração de suporte nos pontos considerados. Então, a expressão (4) descreve a equação de compatibilidade associada ao problema.

$$DW1B + DRbyB = 0$$

$$\left[\frac{-5}{384} \cdot \frac{W_1 \cdot L^4}{E \cdot I} \right] + \left[\frac{+1}{48} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E \cdot I} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\left[\frac{1}{48} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E \cdot I} \right] = \left[\frac{5}{384} \cdot \frac{W_1 \cdot L^4}{E \cdot I} \right]$$

$$Rby = \left[\frac{5}{8} \cdot \frac{W_1 \cdot L}{E \cdot I} \right] \quad (5)$$

O valor obtido em (5) representa o final do passo “P6” do Método da Flexibilidade sobre a estrutura original. Pode-se dizer que 62,5 % da carga distribuída “W1” sobre a viga é absorvida pela reação “Rby”. O complemento da carga considerada é rateada igualmente, por questões de simetria, entre as reações “Ray” e “Rcy”, conforme a expressão (6). Esses valores podem ser confirmados por meio da aplicação das equações do equilíbrio estático.

$$Ray = Rcy = \left[\frac{3}{16} \cdot \frac{W_1 \cdot L}{E \cdot I} \right] \quad (6)$$

Neste momento, o problema encontra-se resolvido e considera-se que a análise preliminar do caso “Caso 1” está encerrada. A seção seguinte descreve a solução de uma estrutura estaticamente indeterminada com grau de indeterminação dois, caso importante para destacar a abordagem matricial de resolução por meio do Método da Flexibilidade.

2.3 PROBLEMA DO CASO 2: VIGA ENGASTADA À ESQUERDA E BI-APOIADA

Nesta seção o Método da Flexibilidade é utilizado para resolver o problema da indeterminação estática de uma viga engastada à esquerda, com dois apoios simples, um no centro e o outro localizado na extremidade direita. Tal estrutura está descrita na Figura 5a.

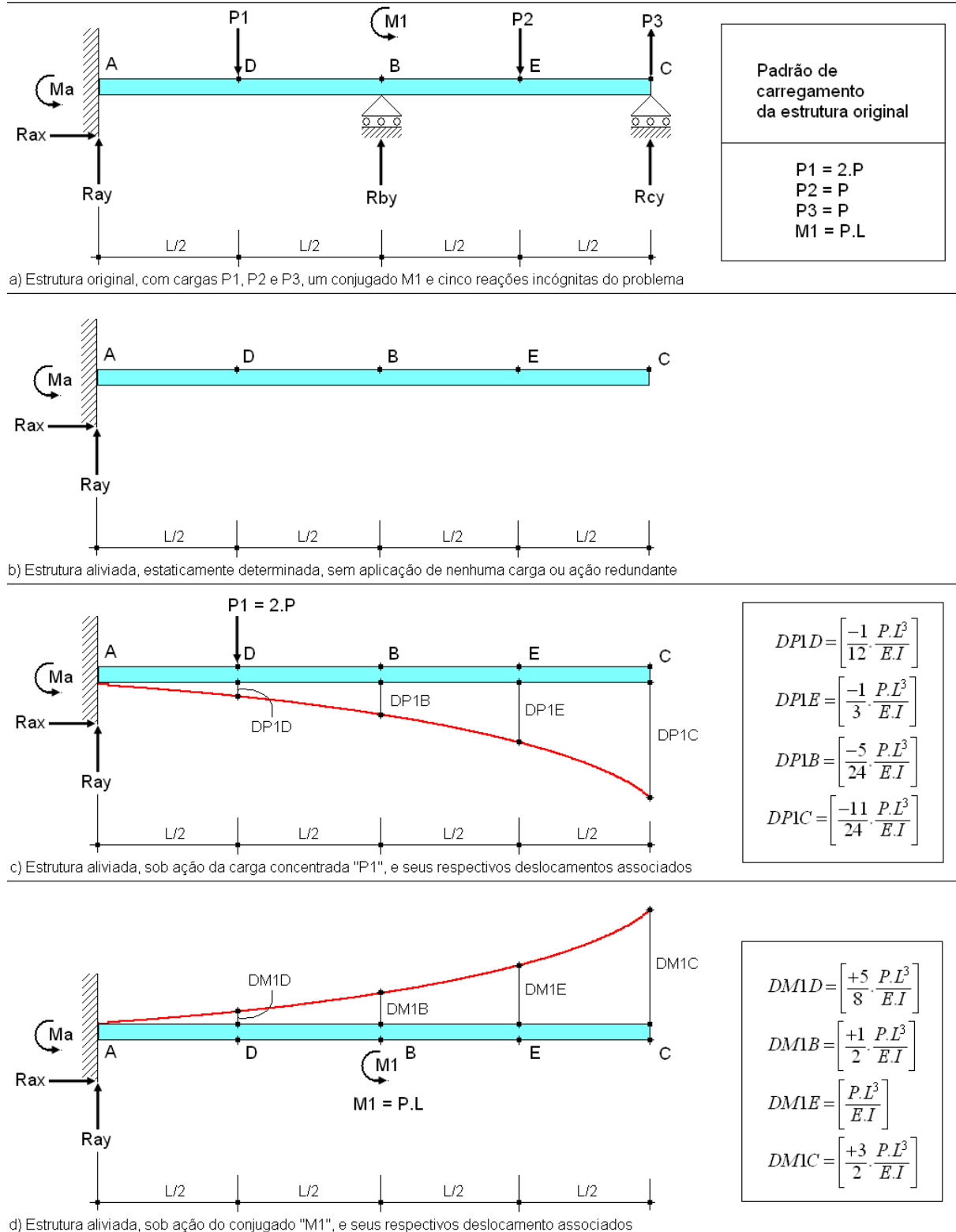
Observando a estrutura original na Figura 5a, percebe-se a indeterminação estática da viga, pois existem cinco reações e apenas três equações de equilíbrio estático no plano. A forma aliviada da viga do caso “Caso 2” está descrita na Figura 5b. Nessa figura, nenhuma ação e nenhuma deformação associada estão diagramadas.

Nas figuras 5c a 6d, as quatro ações {“P1”, “M1”, “P2”, “P3”}, atuando respectivamente nos pontos {“D”, “B”, “E”, “C”}, produzem deformações específicas. As deformações negativas, causadas por “P1” e “P2”, ocorrem com sentido para baixo. As deformações positivas, causadas pelo conjugado “M1” e pela ação “P3”, ocorrem com sentido para cima.

As ações redundantes “Rby” e “Rcy”, provenientes das reações nos suportes nos pontos “B” e “C”, estão descritas, respectivamente, nas figuras 6c e 6d. Suas direções foram convenientemente definidas como sendo orientadas. Por isso, no processo de resolução do problema, assume-se que as deformações por elas provocadas sejam positivas. Então, quando

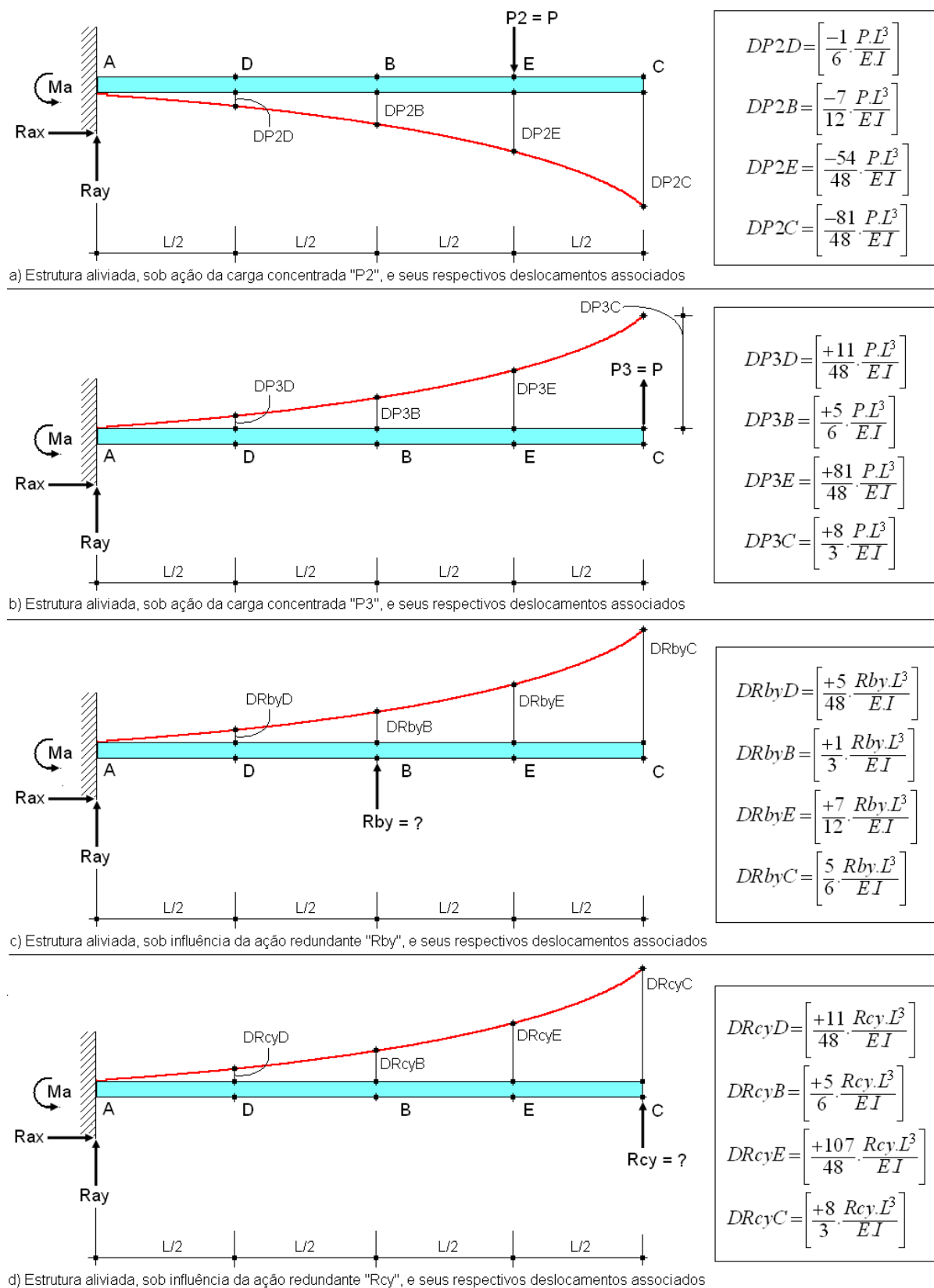
o problema estiver resolvido, o sinal do resultado definirá o real sentido de cada uma dessas ações redundantes. Se for positivo, tem-se que o sentido adotado permanece. Se for negativo, deve-se entender como sendo de direção oposta.

Figura 5: A estrutura do Caso 2 sob análise e aplicação do Método da Flexibilidade



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

Figura 6: A estrutura do Caso 2 sob análise e aplicação do Método da Flexibilidade (**continuação**).



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

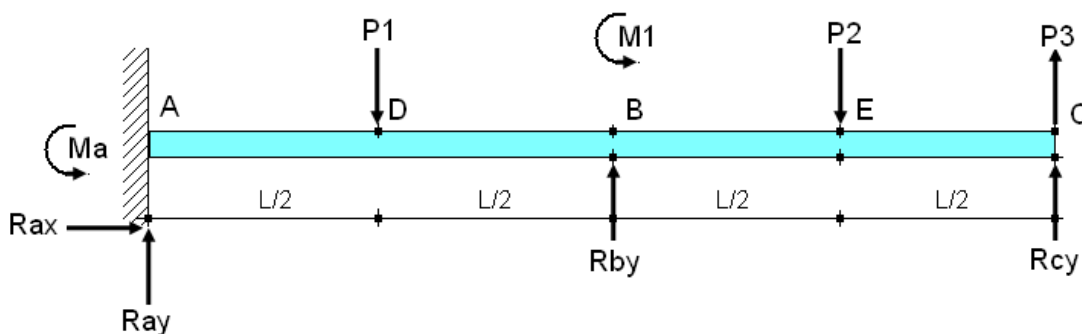
O problema do caso "Caso 2" é caracterizado pela seguinte pergunta: Qual o valor das reações nos apoios simples "Rby" e "Rcy"?

A solução do problema do caso “Caso 2”, de acordo com o passo “P1”, começa com a escolha das reações da estrutura que serão retiradas para transformar a configuração original, que é estaticamente indeterminada, em uma configuração estaticamente determinável. Então, uma nova configuração de suporte é obtida, denominada estrutura aliviada. Entre várias opções possíveis, desde que estaticamente determinadas, a remoção das reações “Rby” e “Rcy” é uma opção didática e intuitiva. A configuração aliviada da estrutura encontra-se diagramada na Figura 5b. Tem-se uma viga engastada à esquerda, sem os suportes em “B” e em “C”.

Os demais elementos da Figura 5 e da Figura 6 descrevem todas as ações atuando isoladamente sobre a estrutura aliviada, de forma que, associados à elas estão os seus respectivos deslocamentos, causados na estrutura aliviada, em cada um de seus pontos de aplicação. Os valores desses deslocamentos também estão resumidos nas duas figuras.

Na configuração aliviada estão presentes todas as ações atuantes na configuração original. A diferença é que, como foram retirados os suportes em “B” e em “C”, a viga engastada passou a ser estaticamente determinável, com a atuação de duas ações denominadas redundantes, “Rby” e “Rcy”, aplicados nos próprios pontos dos suportes retirados. Essa situação está descrita na Figura 7.

Figura 7: A configuração aliviada, com todas as ações originais atuantes.



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

Da observação da Figura 7, percebe-se que se a estrutura aliviada é estaticamente determinada, então ela deve possuir um número igual de incógnitas (ações desconhecidas) e de equações envolvendo-as de forma linearmente independente. Então, tem-se o seguinte sistema de equações:

- Incógnitas do problema:
 - “**Rax**”: componente horizontal da reação no engaste, em “A”;
 - “**Ray**”: componente vertical da reação no engaste, em “A”;
 - “**Ma**”: momento reativo em “A”, sentido adotado como anti-horário;
 - “**Rby**”: componente vertical da reação no suporte em “B”, tomado como ação redundante em “B”, sentido adotado para cima;
 - “**Rcy**”: componente vertical da reação no suporte em “C”, tomado como ação redundante em “C”, sentido adotado para cima;
- Equações associadas:
 - Do **Equilíbrio Estático**:
 - $\sum F_x = 0$: A soma das forças na direção horizontal deve ser zero;
 - $\sum F_y = 0$: A soma das forças na direção vertical deve ser zero;
 - $\sum M_a = 0$: A soma dos momentos em relação ao ponto “A” deve ser zero;

- De **Compatibilidade** com a configuração de suporte da estrutura original:
 - $\sum DB = 0$: No ponto “B”, onde existe um suporte simples na estrutura original, a soma dos deslocamentos causados por todas as ações atuantes na estrutura aliviada, neste ponto “B”, deve ser zero;
 - $\sum DC = 0$: No ponto “C”, onde existe um suporte simples na estrutura original, a soma dos deslocamentos causados por todas as ações atuantes na estrutura aliviada, neste ponto “C”, deve ser zero;

Então, por meio do Método da Flexibilidade, do conhecimento sobre as equações de compatibilidade e da equação diferencial da linha da curva elástica da configuração aliviada, os valores de “Rby” e de “Rcy” são primeiramente obtidos. Os valores das demais incógnitas são obtidos posteriormente pela simples aplicação das equações do equilíbrio estático.

Assim, as equações de compatibilidade da estrutura aliviada, que é estaticamente determinada, com as configurações de suporte da estrutura original estão apresentadas na expressão (7).

$$\begin{aligned} DB &= DQLB + DAB \\ DC &= DQLC + DAC \end{aligned} \quad (7)$$

Onde:

- DB: deslocamento total ocorrido no ponto “B”;
- DC: deslocamento total ocorrido no ponto “C”;
- DQLB: deslocamento, em “B”, causado por todas as cargas atuantes;
- DQLC: deslocamento, em “C”, causado por todas as cargas atuantes;
- DAB: deslocamento, em “B”, causado por todas as ações redundantes;
- DAC: deslocamento, em “C”, causado por todas as ações redundantes;

As expressões em (8) descrevem os deslocamentos, nos pontos “B” e “C”, causados pelas cargas atuantes, {“P1”, “M1”, “P2”, “P3”}, na estrutura aliviada. Observe-os nas Figuras 5 e Figura 6, tanto as cargas como os respectivos deslocamentos por elas causados.

$$\begin{aligned} DQLB &= DP1B + DM1B + DP2B + DP3B \\ DQLC &= DP1C + DM1C + DP2C + DP3C \end{aligned} \quad (8)$$

Onde:

- DP1B: deslocamento, em “B”, causado pela carga “P1”;
- DM1B: deslocamento, em “B”, causado pelo conjugado “M1”;
- DP2B: deslocamento, em “B”, causado pela carga “P2”;
- DP3B: deslocamento, em “B”, causado pela carga “P3”;

e

- DP1C: deslocamento, em “C”, causado pela carga “P1”;
- DM1C: deslocamento, em “C”, causado pelo conjugado “M1”;
- DP2C: deslocamento, em “C”, causado pela carga “P2”;
- DP3C: deslocamento, em “C”, causado pela carga “P3”;

Os elementos do lado direito das expressões em (7), dado por “DAB” e “DAC” são considerados os deslocamentos causados, respectivamente, em “B” e “C”, pelas ações redundantes “Rby” e “Rcy”, e podem ser descritos conforme a expressão (9). Esses deslocamentos e suas respectivas ações estão descritas na Figura 6.

$$\begin{aligned}
DAB &= DRbyB + DRcyB \\
DAC &= DRbyC + DRcyC
\end{aligned}
\tag{9}$$

Onde:

- DRbyB: deslocamento, em “B”, causado por “Rby”;
- DRcyB: deslocamento, em “B”, causado por “Rcy”;
- DRbyC: deslocamento, em “C”, causado por “Rby”;
- DRcyC: deslocamento, em “C”, causado por “Rcy”;

Por meio da simples observação sobre as figuras Fig. 5 e Fig. 6, tem-se os valores dos deslocamentos participantes na expressão (9). Eles estão resumidos abaixo:

$$\begin{aligned}
DRbyB &= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{Rby.L^3}{E.I} \right] \\
DRbyC &= \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rby.L^3}{E.I} \right] \\
DRcyB &= \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rcy.L^3}{E.I} \right] \\
DRcyC &= \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{Rcy.L^3}{E.I} \right]
\end{aligned}
\tag{10}$$

Os deslocamentos acima fornecem os coeficientes de flexibilidade associados às ações redundantes unitárias da estrutura aliviada, caso análogo ao da expressão (3). Em outras palavras, tanto a ação redundante “Rby” como “Rcy”, aplicadas nos pontos “B” e “C”, quando consideradas forças unitárias aplicadas sobre da viga aliviada, indicam os coeficientes de flexibilidade da estrutura nos referidos pontos de aplicação, descritos na expressão (11). Essa consideração é importante porque neste problema o tratamento matricial deverá ser utilizado, uma vez que cada ponto sofre dupla influência. Então, as ações redundantes devem ser separadas dos coeficientes de flexibilidade da estrutura, nos seus pontos de aplicação.

$$\begin{aligned}
DRbyB &= Rby \cdot \partial_{bRby} = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{Rby.L^3}{E.I} \right] \rightarrow \partial_{bRby} = F11 = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{E.I} \right] \\
DRbyC &= Rby \cdot \partial_{cRby} = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rby.L^3}{E.I} \right] \rightarrow \partial_{cRby} = F21 = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{L^3}{E.I} \right] \\
DRcyB &= Rcy \cdot \partial_{bRcy} = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rcy.L^3}{E.I} \right] \rightarrow \partial_{bRcy} = F12 = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{L^3}{E.I} \right] \\
DRcyC &= Rcy \cdot \partial_{cRcy} = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{Rcy.L^3}{E.I} \right] \rightarrow \partial_{cRcy} = F22 = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{L^3}{E.I} \right]
\end{aligned}
\tag{11}$$

Onde:

- $\delta bRby$: deslocamento causado pela ação “Rby”, no ponto “B”, quando essa ação assume um valor unitário. Trata-se do coeficiente de flexibilidade F11 do sistema de equações de compatibilidade associado ao problema do Caso 2.
- $\delta cRby$: deslocamento causado pela ação “Rby”, no ponto “C”, quando essa ação assume um valor unitário. Trata-se do coeficiente de flexibilidade F21 do sistema de equações de compatibilidade associado ao problema do Caso 2.
- $\delta bRcy$: deslocamento causado pela ação “Rcy”, no ponto “B”, quando essa ação assume um valor unitário. Trata-se do coeficiente de flexibilidade F12 do sistema de equações de compatibilidade associado ao problema do Caso 2.

- $\delta cRcy$: deslocamento causado pela ação “Rcy”, no ponto “C”, quando essa ação assume um valor unitário. Trata-se do coeficiente de flexibilidade F22 do sistema de equações de compatibilidade associado ao problema do Caso 2.

É importante observar que o coeficiente de flexibilidade possui dois índices. O primeiro designa o ponto de aplicação da força unitária e o segundo designa a própria força unitária. Então, “Fij” é o coeficiente de flexibilidade da estrutura, que representa o seu deslocamento causado por uma ação unitária “j” aplicada no ponto “i”.

Com esses valores definidos, a expressão (7) pode ser reescrita na forma tradicional e também na forma matricial, conforme as expressões (12) e (13). Essas expressões representam a montagem final das equações de compatibilidade do problema.

$$\begin{aligned} DB &= DQLB + F11.Rby + F21.Rcy \\ DB &= DQLC + F21.Rby + F22.Rcy \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} DB \\ DC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DQLB \\ DQLC \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F11 & F12 \\ F21 & F22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Rby \\ Rcy \end{bmatrix} \quad (13)$$

A atriz à esquerda da igualdade representa os deslocamentos reais da viga aliviada nos pontos “B” e “C”. Sabendo que, devido às configurações de suportes nestes pontos, os deslocamentos reais nesses pontos são nulos e isolando a matriz das ações redundantes, tem-se o seguinte sistema de equações em termos de suas incógnitas a serem resolvidas:

$$\begin{bmatrix} Rby \\ Rcy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F11 & F12 \\ F21 & F22 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(-1 \cdot \begin{bmatrix} DQLB \\ DQLC \end{bmatrix} \right) \quad (14)$$

O problema é considerado resolvido quando os valores dos coeficientes de flexibilidade e dos deslocamentos à direita da expressão (14) são calculados e adequadamente substituídos.

Da expressão (8) e da observação dos deslocamentos descritos nas figuras Fig.5 e Fig. 6, somando-os, tem-se os deslocamentos totais causados pelas cargas atuantes, conforme (15).

$$DQLB = \left[\frac{13}{24} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad e \quad DQLC = \left[\frac{97}{48} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (15)$$

A matriz de flexibilidade associada ao problema e sua respectiva inversa da viga aliviada são dadas abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{L^3}{E.I} & \frac{5}{6} \cdot \frac{L^3}{E.I} \\ \frac{5}{6} \cdot \frac{L^3}{E.I} & \frac{8}{3} \cdot \frac{L^3}{E.I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{96}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} & -\frac{30}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} \\ -\frac{30}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} & +\frac{12}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Agora, o sistema de equações de compatibilidade descrito em (14) pode ser montado completamente na forma matricial, conforme a expressão (17). A solução do problema está descrita na expressão (18).

$$\begin{bmatrix} Rby \\ Rcy \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} +\frac{96}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} & -\frac{30}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} \\ -\frac{30}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} & +\frac{12}{7} \cdot \frac{E.I}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{24} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \\ \frac{97}{48} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} R_{by} \\ R_{cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{69}{56} \cdot P \\ -\frac{8}{7} \cdot P \end{bmatrix} \quad (18)$$

O valor negativo de “Rcy” significa que ela está apontada para baixo. Ela reage contra um movimento de levantamento da extremidade direita da viga engastada. Desta forma, o problema de análise preliminar está resolvido. Os valores das demais incógnitas, dadas por {“Rax”, “Ray”, “Ma”} são determinados pela aplicação das equações de equilíbrio estático.

A seção seguinte descreve os procedimentos de obtenção de cada um dos valores dos deslocamentos causados pelas cargas atuantes na estrutura aliviada e também pelas ações redundantes aplicadas nas posições de suporte da estrutura original. O processo de inversão da matriz de flexibilidade também é descrito.

3. PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS DO CASO 2

Nesta seção são apresentados os procedimentos de análise preliminar para a determinação de todos os valores de deslocamentos e de rotações da estrutura aliviada do Caso 2, que são utilizados nas expressões (7) a (18). Trata-se de uma seção importante para alunos do curso de Engenharia que possuem especial interesse na disciplina de Análise de Estruturas, pois nela os valores especificados nas figuras que dão suporte ao presente artigo são completamente calculados e demonstrados. Assim, os interessados passam a entender a origem destes valores, uma vez que, na maioria dos livros, eles estão apenas referenciados por meio de tabelas padrões.

3.1 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “P1”

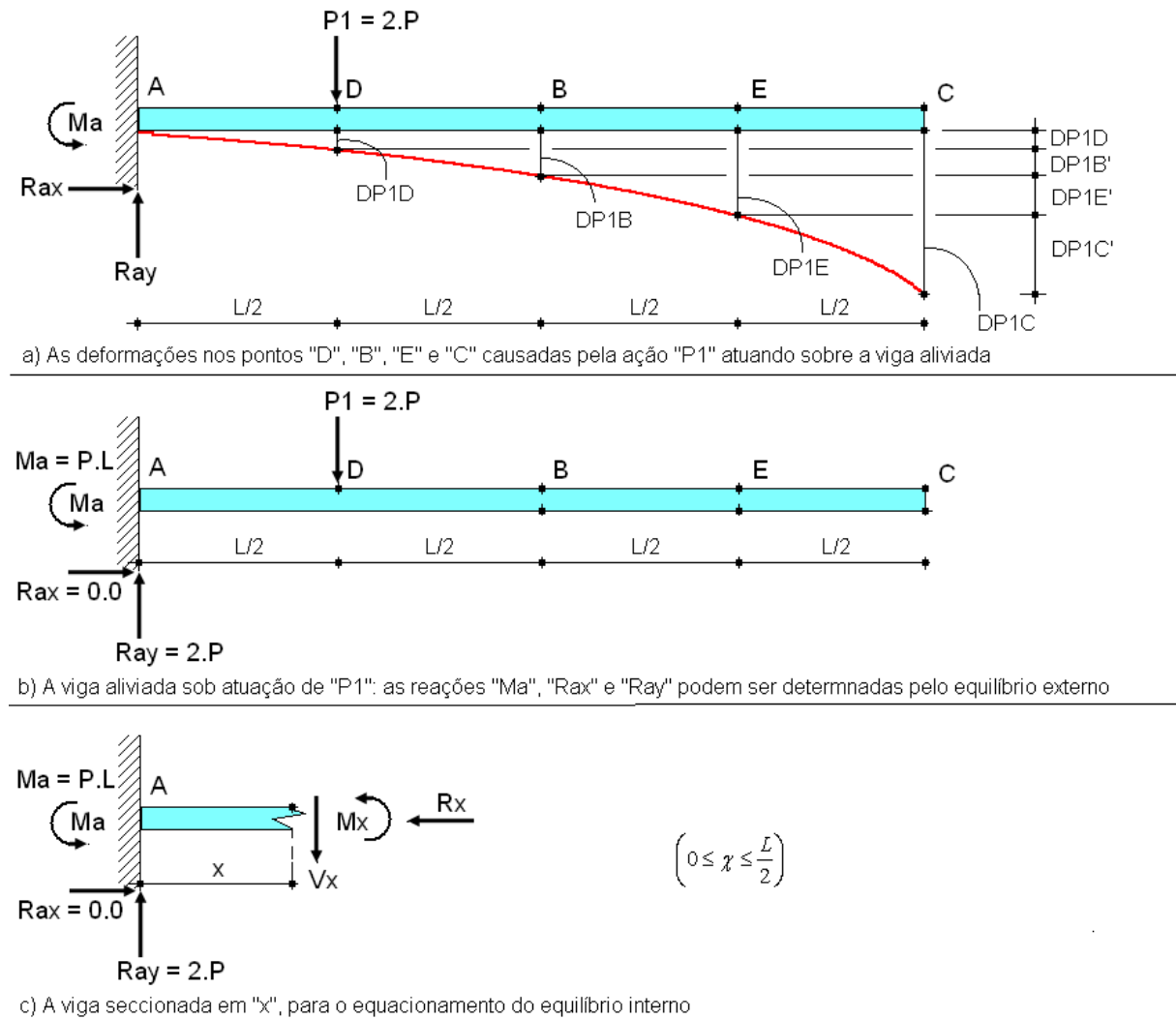
Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pela ação “P1”, descritos na Figura 8b, é necessário realizar um processo constituído por quatro passos distintos, que são:

- **Passo 1:** Identificar antecipadamente o valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”}. As condições de determinação estática desta configuração de carregamento estão descritas na Figura 8b. Esse passo está descrito em 3.1.1;
- **Passo 2:** Calcular as forças internas {“Rx”, “Vx”, “Mx”} no intervalo (0,L/2), respectivamente as denominações para a força interna axial, a força cortante interna e o momento fletor interno, conforme a Figura 8c e a seção 3.1.2;
- **Passo 3:** Calcular as rotações “v'(x)” da estrutura aliviada, nos pontos {“D”, “B”, “E”, “C”}, causadas por “P1”. Esse passo está descrito na seção 3.1.3;
- **Passo 4:** Calcular os deslocamentos “v(x)” da estrutura aliviada, nos pontos {“D”, “B”, “E”, “C”}, causadas por “P1”. Esse passo está descrito na seção 3.1.4;

3.1.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “P1”

O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação da carga “P1”, conforme as expressões em (19).

Figura 8: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por "P1"



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

As reações estão caracterizadas na Figura 8b.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} = 0 \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - P_1 = 0 \rightarrow P_1 \rightarrow R_{ay} = 2.P \\
 \sum M_a = 0 &\rightarrow -M_a + P_1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \rightarrow M_a = P_1 \cdot \frac{L}{2} \rightarrow M_a = P.L
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

3.1.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, L/2)

O valor das forças internas {"Rx", "Vx", "Mx"}, na posição "x" dentro do intervalo estabelecido, está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (20). As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão caracterizadas na Figura 8c.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} - R_x = 0 \rightarrow R_x = R_{ax} \rightarrow R_x = 0 \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - V_x = 0 \rightarrow V_x = R_{ay} \rightarrow V_x = 2.P \\
 \sum M_x = 0 &\rightarrow -M_a + R_{ay} \cdot x - M_x = 0 \rightarrow M_x = R_{ay} \cdot x - M_a \rightarrow M_x = 2.P \cdot x - P.L
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

3.1.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “P1”

Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, o engenheiro analista faz uso da equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) \quad (21)$$

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação da carga “P1”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq L/2$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação de “P1”. Essa rotação está descrita em (22) e em (24).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) &= 2.P.x - P.L \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E.I} \cdot \int 2.P.x - P.L \cdot \partial x \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot [P.x^2 - P.L.x + C_1] \end{aligned} \quad (22)$$

A equação diferencial acima deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (22) deve ser tal que o valor desta derivada seja nula neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração “C1” deve ser zero, conforme a expressão em (23).

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot [P \cdot 0^2 - P.L \cdot 0 + C_1] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (23)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada “v'(x)” sob ação da carga concentrada “P1”, em sua forma geral, é dada pela expressão (24), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot [P.x^2 - P.L.x] \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (24)$$

O valor da rotação na viga, causada por “P1”, no ponto $x = L/2$ é dado pela expressão final em (25). O sinal negativo desta tangente indica que a deformação ocorre para baixo.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[P \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 - P.L \cdot \left(\frac{L}{2} \right) \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \quad (25)$$

3.1.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por “P1”

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por “P1”, é obtida pela integração da expressão (24), no intervalo considerado.

$$\begin{aligned} v \Big|_x &= \frac{1}{E.I} \cdot \int [P.x^2 - P.L.x] \cdot \partial x \\ v \Big|_x &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.x^3}{3} - \frac{P.L.x^2}{2} + C_2 \right] \end{aligned} \quad (26)$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a linha da curva elástica não se deforma no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (26) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração “C2” deve ser zero.

$$v_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot 0^3}{3} - \frac{P.L \cdot 0^2}{2} + C_2 \right] = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (27)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada “ $v(x)$ ” sob ação da carga concentrada “P1” é dada pela expressão (28), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada.

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot x^3}{3} - \frac{P.L \cdot x^2}{2} \right] \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (28)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {“A”, “D”, “B”, “E”, “C”} da viga aliviada. Como alguns desses pontos estão fora do intervalo de validade da expressão (28), considerações geométricas devem ser realizadas para calcular esses deslocamentos. Tais considerações estão baseadas nas geometrias descritas para cada deslocamento em função do deslocamento calculado no ponto “D” e no valor da rotação da viga nesta posição. Por exemplo, o valor do deslocamento da viga aliviada no ponto “B” é igual ao valor do deslocamento da viga no ponto “D” somado ao produto da tangente à linha da curva elástica nesse mesmo ponto com a distância entre “D” e “B”, que vale $L/2$. Esses elementos podem ser observados na Figura 8a e as considerações geométricas necessárias para calcular os deslocamentos nos pontos da viga aliviada, sujeita à ação da carga concentrada “P1”, são apresentadas pelas expressões em (29).

$$DP1D = v\left(x = \frac{L}{2}\right) \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x}\left(x = \frac{L}{2}\right) = \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right]$$

$$DP1B = DP1D + DP1B' \quad como \quad DP1B' = Tan(\theta) \cdot \overline{DB} \quad e \quad \overline{DB} = \frac{L}{2} \quad (29)$$

$$DP1E = DP1D + DP1E' \quad como \quad DP1E' = Tan(\theta) \cdot \overline{DE} \quad e \quad \overline{DE} = L$$

$$DP1C = DP1D + DP1C' \quad como \quad DP1C' = Tan(\theta) \cdot \overline{DC} \quad e \quad \overline{DC} = \frac{3.L}{2}$$

O deslocamento “DP1D” é calculado em (30), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 8c. Seu valor negativo indica a direção do deslocamento, para baixo, idêntica à direção da carga concentrada “P1”. Novamente, é importante perceber essa associação, pois esse deslocamento é causado exclusivamente por “P1”.

$$DP1D = v\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} - \frac{P.L \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow DP1D = \left[\frac{-1}{12} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (30)$$

O deslocamento “DP1B” é calculado em (31), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 5c. Seu valor negativo indica a direção do deslocamento, para baixo, idêntica à direção da carga concentrada “P1”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto “B” é causado exclusivamente por “P1”.

$$DP1B = \left[\frac{-1}{12} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right] \cdot \left[\frac{L}{2} \right] \rightarrow DP1B = \left[\frac{-5}{24} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (31)$$

Analogamente, o deslocamento no ponto “E”, denominado “DP1E” é calculado em (32), abaixo.

$$DP1E = \left[\frac{-1}{12} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right] \cdot L \rightarrow DP1E = \left[\frac{-1}{3} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (32)$$

Finalmente, o deslocamento no ponto “C”, denominado “DP1C” é calculado em (33).

$$DP1C = \left[\frac{-1}{12} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right] \cdot \left[\frac{3.L}{2} \right] \rightarrow DP1B = \left[\frac{-11}{24} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (33)$$

Os deslocamentos descritos pelas expressões (30) a (33) estão resumidos numa tabela presente na Figura 5c. Espera-se que todo engenheiro analista saiba como obtê-los, independentemente do fato de eles estarem, ou não, disponíveis em tabelas-resumo em livros e artigos didáticos. Eles representam os deslocamentos e rotações da viga aliviada causados exclusivamente por “P1”.

3.2 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “M1”

Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pelo conjugado “M1”, descritos na Figura 9b, é necessário realizar um processo constituído pelos mesmos quatro passos definidos na seção 3.1 Neste caso, a ação “M1” é um binário aplicado na posição “B” da viga aliviada, cujo sentido é anti-horário.

3.2.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “M1”

O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação “M1”.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} = 0 \rightarrow R_{ay} = 0 \\ \sum M_a = 0 &\rightarrow +M_a - M_1 = 0 \rightarrow M_a = M_1 \rightarrow M_a = P.L \end{aligned} \quad (34)$$

3.2.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, L)

O valor das forças internas {“Rx”, “Vx”, “Mx”}, na posição “x” dentro do intervalo estabelecido, está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (35). As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão caracterizadas na Figura 9c.

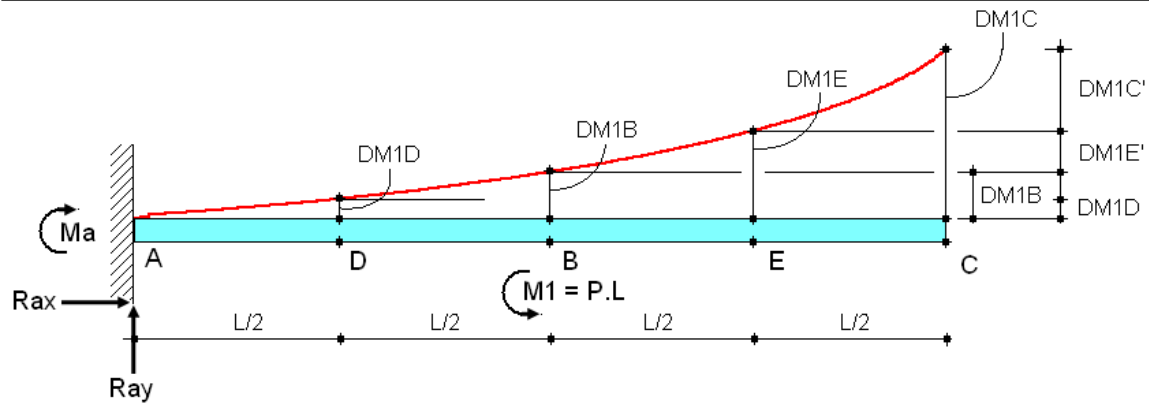
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} - R_x = 0 \rightarrow R_x = R_{ax} \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - V_x = 0 \rightarrow V_x = R_{ay} \rightarrow V_x = 0 \\ \sum M_x = 0 &\rightarrow M_a + R_{ay} \cdot x - M_x = 0 \rightarrow M_x = R_{ay} \cdot x - M_a \rightarrow M_x = P.L \end{aligned} \quad (35)$$

3.2.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “M1”

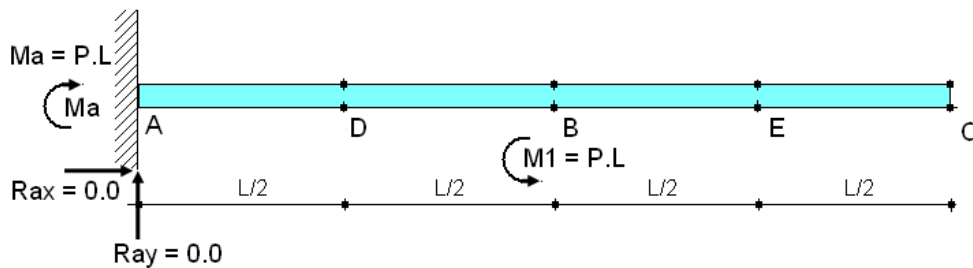
Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, o engenheiro analista faz uso da equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21) e repetida abaixo.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) \quad (\text{repetida de 21})$$

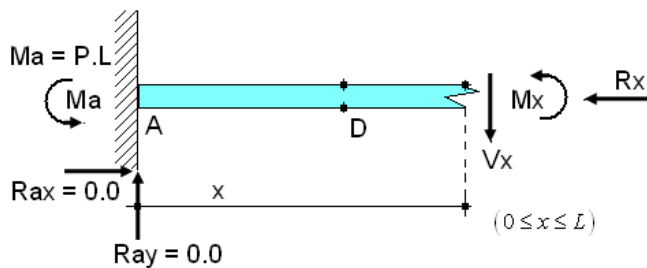
Figura 9: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por “M1”



a) As deformações nos pontos "D", "B", "E" e "C" causadas pelo conjugado "M1" atuando sobre a viga aliviada



b) A viga aliviada sob atuação de "M1": as reações "Ma", "Ra" e "Ra'" podem ser determinadas pelo equilíbrio externo



c) A viga seccionada em "x", para o equacionamento do equilíbrio interno

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação da carga “M1”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq L$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação do binário “M1”. Essa rotação está descrita em (36) e em (38).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) = P.L \quad (36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \int P.L \cdot dx \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot P.L \cdot x + C_1$$

O processo de análise é similar à seção anterior. A equação diferencial acima deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (36) deve ser tal que o valor desta derivada seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração “C1” deve ser zero. Tem-se (37).

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot [P.L \cdot 0 + C_1] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (37)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada “v'(x)” sob ação do conjugado “M1” é dada pela expressão (38), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} x = \frac{1}{E.I} \cdot P.L.x \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad (38)$$

Os valores das rotações na viga, causada por “M1”, no ponto $x = L/2$ e no ponto $x = L$ são dados por meio da expressão (39). O sinal positivo destas tangentes indica que as deformações nestes pontos ocorrem para cima, coerentemente com a ação “M1”, anti-horária.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[P.L. \left(\frac{L}{2} \right) \right] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{+1}{2} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \quad (39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} x = L = \frac{1}{E.I} \cdot [P.L. L] \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} x = L = + \frac{P.L^2}{E.I} \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq L$$

3.2.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por “M1”

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por “M1”, é obtida pela integração da expressão (38), no intervalo considerado.

$$v x = \frac{1}{E.I} \cdot \int P.L.x \cdot dx \quad (40)$$

$$v x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.L.x^2}{2} + C_2 \right]$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a linha da curva elástica não se deforma no ponto $x = 0 = \text{”A”}$. Então, a equação (40) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração “C2” deve ser zero.

$$v x = 0 = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.L. 0^2}{2} + C_2 \right] = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (41)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada “v(x)” sob ação da carga concentrada “M1” é dada pela expressão (42), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada.

$$v x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.L.x^2}{2} \right] \quad 0 \leq x \leq L \quad (42)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {“A”, “D”, “B”, “E”, “C”} da viga aliviada. Como alguns desses pontos estão fora do intervalo de validade da expressão (42), considerações geométricas devem ser realizadas para calcular esses deslocamentos.

$$DM1D = v \left(x = \frac{L}{2} \right) \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} x = L = \left[+ \frac{P.L^2}{E.I} \right]$$

$$DM1B = v x = L \quad (43)$$

$$DM1E = DM1B + DM1E' \quad \text{como} \quad DM1E' = Tan(\theta) \cdot \overline{BE} \quad e \quad \overline{BE} = \frac{L}{2}$$

$$DM1C = DM1D + DM1C' \quad \text{como} \quad DM1C' = Tan(\theta) \cdot \overline{BC} \quad e \quad \overline{BC} = L$$

Tais considerações estão baseadas nas geometrias descritas para cada deslocamento em função do deslocamento calculado no ponto “B” e no valor da rotação da viga nesta posição.

Por exemplo, o valor do deslocamento da viga aliviada no ponto “E” é igual ao valor do deslocamento da viga no ponto “B” somado ao produto da tangente à linha da curva elástica nesse mesmo ponto com a distância entre “B” e “E”, que vale $L/2$. Esses elementos podem ser observados na Figura 9a e as considerações geométricas necessárias para calcular os deslocamentos nos pontos da viga aliviada, sujeita à ação da carga concentrada “M1”, são apresentadas pelas expressões em (43).

O deslocamento “DM1D” é calculado em (44), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 5d. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, produzido pela ação do conjugado “M1”.

$$DM1D = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} \right] \rightarrow DP1D = \left[\frac{+1}{8} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (44)$$

O deslocamento “DM1B” é calculado em (45), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 5d. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, produzido pela ação “M1”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto “B” é causado exclusivamente por “M1”.

$$DM1B = v_{x=L} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P.L \cdot L^2}{2} \right] \rightarrow DM1B = \left[\frac{+1}{2} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \quad (45)$$

O deslocamento no ponto “E”, denominado “DM1E” é calculado em (46), como sendo a soma de “DM1B” com o produto de $\tan(\theta)$ pela distância entre “B” e “E”. O deslocamento no ponto “C”, denominado “DM1C” também está apresentado nesta expressão.

$$\begin{aligned} DP1E &= \left[\frac{+1}{2} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{P.L^2}{E.I} \right] \cdot \left[\frac{L}{2} \right] \rightarrow DP1E = \left[\frac{P.L^3}{E.I} \right] \\ DM1C &= \left[\frac{+1}{2} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{P.L^2}{E.I} \right] \cdot L \rightarrow DM1C = \left[\frac{+3}{2} \cdot \frac{P.L^3}{E.I} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

3.3 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “P2”

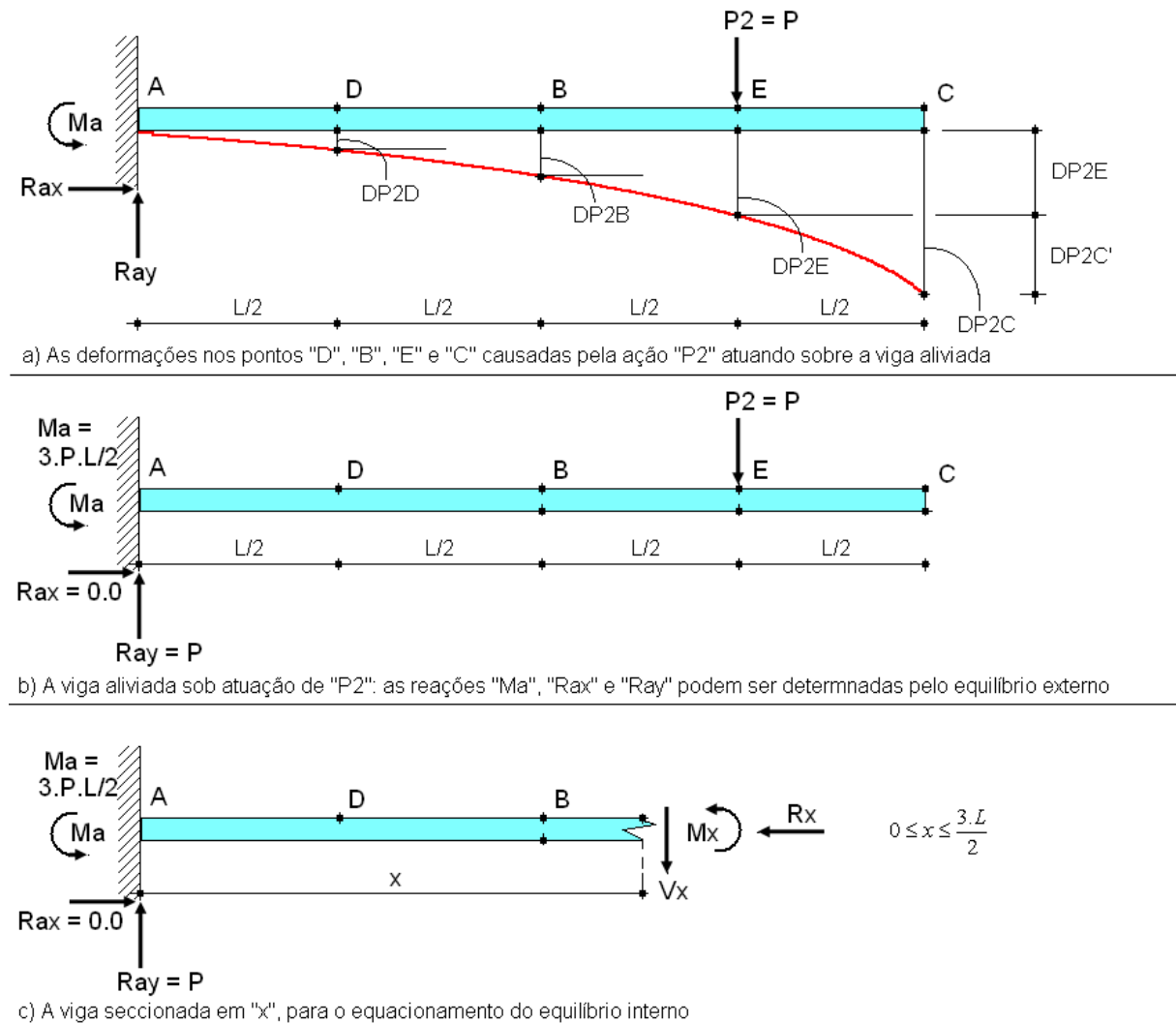
Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pela ação “P2”, descritos na Figura 10b, é necessário realizar os mesmos quatro passos do processo descrito nas seções anteriores. A carga concentrada “P2” atua sobre o ponto “E”.

3.3.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “P2”

O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação da carga “P2”, conforme as expressões em (47). As reações estão caracterizadas na Figura 10b.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \rightarrow R_{ax} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow R_{ay} - P_2 = 0 \rightarrow R_{ay} = P_2 \rightarrow R_{ay} = P \\ \sum M_a &= 0 \rightarrow -M_a + P_2 \cdot \frac{3L}{2} = 0 \rightarrow M_a = P_2 \cdot \frac{3L}{2} \rightarrow M_a = P \cdot \frac{3L}{2} \end{aligned} \quad (47)$$

Figura 10: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por “P2”



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

3.3.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, 3.L/2)

O valor das forças internas {"Rx", "Vx", "Mx"}, na posição "x" dentro do intervalo estabelecido, está demonstrado a seguir.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} - R_x = 0 \rightarrow R_x = R_{ax} \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - V_x = 0 \rightarrow V_x = R_{ay} \rightarrow V_x = P \quad (48) \\ \sum M_x = 0 &\rightarrow -M_a + R_{ay}.x - M_x = 0 \rightarrow M_x = P.x - P.\frac{3L}{2} \end{aligned}$$

Essas forças internas são calculadas aplicando as equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (48). As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão caracterizadas na Figura 10c.

3.3.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “P2”

Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, usa-se a equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) \quad (\text{repetida de 21})$$

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação da carga “P2”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq 3L/2$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação de “P2”. Essa rotação está descrita em (49) e em (51).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) &= P \cdot x - P \cdot \frac{3L}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E.I} \cdot \int \left[P \cdot x - P \cdot \frac{3L}{2} \right] \cdot dx \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot x^2}{2} - \frac{3P \cdot L}{2} \cdot x + C_1 \right] \end{aligned} \quad (49)$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = \text{”A”}$. Então, a equação (49) deve ser tal que o valor desta derivada seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração “C1” deve ser zero.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot 0^2}{2} - \frac{3P \cdot L}{2} \cdot 0 + C_1 \right] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (50)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada “v'(x)” sob ação da carga concentrada “P2” é dada pela expressão (51), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot x^2}{2} - \frac{3P \cdot L \cdot x}{2} \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{3L}{2} \quad (51)$$

Os valores das rotações na viga, causadas por “P2”, nos pontos $x = L/2$, $x = L$ e $x = 3L/2$, são dados pela expressão final em (52). Os sinais negativos destas tangentes indicam que as deformações ocorrem para baixo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} - \frac{3P \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \left[\frac{-5}{8} \cdot \frac{P \cdot L^2}{E.I} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot L^2}{2} - \frac{3P \cdot L \cdot L}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \left[-\frac{P \cdot L^2}{E.I} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{3L}{2} \right) &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot \left(\frac{3L}{2} \right)^2}{2} - \frac{3P \cdot L \cdot \left(\frac{3L}{2} \right)}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{3L}{2} \right) = \left[\frac{-9}{8} \cdot \frac{P \cdot L^2}{E.I} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

3.3.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por “P2”

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por “P2”, é obtida pela integração da expressão (51), no intervalo considerado. Obtém-se (53).

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \int \left[\frac{P \cdot x^2}{2} - \frac{3P \cdot L \cdot x}{2} \right] \cdot dx \quad (53)$$

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot x^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot x^2}{4} + C_2 \right]$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a linha da curva elástica não se deforma no ponto $x = 0 = \text{”A”}$. Então, a equação (53) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração “C2” deve ser zero.

$$v_x=0 = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot 0^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot 0^2}{4} + C_2 \right] = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (54)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada “v(x)” sob ação da carga concentrada “P2” é dada pela expressão (55), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada.

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot x^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot x^2}{4} \right] \quad 0 \leq x \leq \frac{3L}{2} \quad (55)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {“A”, “D”, “B”, “E”, “C”} da viga aliviada. Como o ponto “C” encontra-se fora do intervalo de validade da expressão (55), algumas considerações geométricas devem ser realizadas para calcular o deslocamento “DP2C”. Tais considerações estão baseadas nas geometrias descritas para esse deslocamento em função do deslocamento calculado no ponto “E” e no valor da rotação da viga nesta posição. Assim, o valor de “DP2C” é igual ao valor do deslocamento da viga no ponto “E” somado ao produto da tangente à linha da curva elástica nesse mesmo ponto com a distância entre “E” e “C”, que vale L/2. Esses elementos podem ser visualizados na Figura 10a e as considerações geométricas necessárias para calcular os deslocamentos nos pontos da viga aliviada, sujeita à ação da carga concentrada “P2”, são apresentadas pelas expressões em (56).

$$DP2D = v \left(x = \frac{L}{2} \right) \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} \left(x = \frac{3L}{2} \right) = \left[\frac{-9}{8} \cdot \frac{P \cdot L^2}{E.I} \right]$$

$$DP2B = v_x = L$$

$$DP2E = v \left(x = \frac{3L}{2} \right) \quad (56)$$

$$DP2C = DP2E + DP2C' \quad onde \quad DP2C' = Tan(\theta) \cdot \overline{EC} \quad e \quad \overline{EC} = \frac{L}{2}$$

O deslocamento “DP2D” é calculado em (57), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6a. Seu valor negativo indica a direção do deslocamento, para baixo, idêntica à direção da carga concentrada “P2”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento é causado exclusivamente por “P2”.

$$DP2D = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{P \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2}{4} \right] \rightarrow DP2D = \left[\frac{-1}{6} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E.I} \right] \quad (57)$$

O deslocamento “DP2B” é calculado em (58), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6a. Seu valor negativo indica a direção do deslocamento, para baixo, idêntica à direção da carga concentrada “P2”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto “B” é causado exclusivamente por “P2”.

$$DP2B = v_{x=L} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{P \cdot L^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot L^2}{4} \right] \rightarrow DP2B = \left[\frac{-7}{12} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI} \right] \quad (58)$$

Analogamente, o deslocamento no ponto “E”, denominado “DP2E” é calculado em (59).

$$DP2E = v\left(x = \frac{3 \cdot L}{2}\right) = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{P \cdot \left(\frac{3 \cdot L}{2}\right)^3}{6} - \frac{3P \cdot L \cdot \left(\frac{3 \cdot L}{2}\right)^2}{4} \right] \rightarrow DP2E = \left[\frac{-27}{24} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI} \right] \quad (59)$$

Finalmente, o deslocamento no ponto “C”, denominado “DP2C” é calculado em (60).

$$DP2C = \left[\frac{-27}{24} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI} \right] + \left[\frac{-9}{8} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \right] \cdot \left[\frac{L}{2} \right] \rightarrow DP2C = \left[\frac{-81}{48} \cdot \frac{P \cdot L^3}{EI} \right] \quad (60)$$

3.4 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “P3”

Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pela ação “P3”, descritos na Figura 11b, quatro passos são necessários. Os referidos passos são apresentados a seguir. A carga concentrada “P3” atua sobre o ponto “C”.

3.4.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “P3”

O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} está demonstrado a seguir e também é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação da carga “P3”, conforme as expressões em (61). As reações estão caracterizadas na Figura 11b.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} + P_3 = 0 \rightarrow R_{ay} = -P_3 \rightarrow R_{ay} = -P \\ \sum M_a = 0 &\rightarrow +M_a - P_3 \cdot 2L = 0 \rightarrow M_a = P_3 \cdot 2L \rightarrow M_a = 2 \cdot P \cdot L \end{aligned} \quad (61)$$

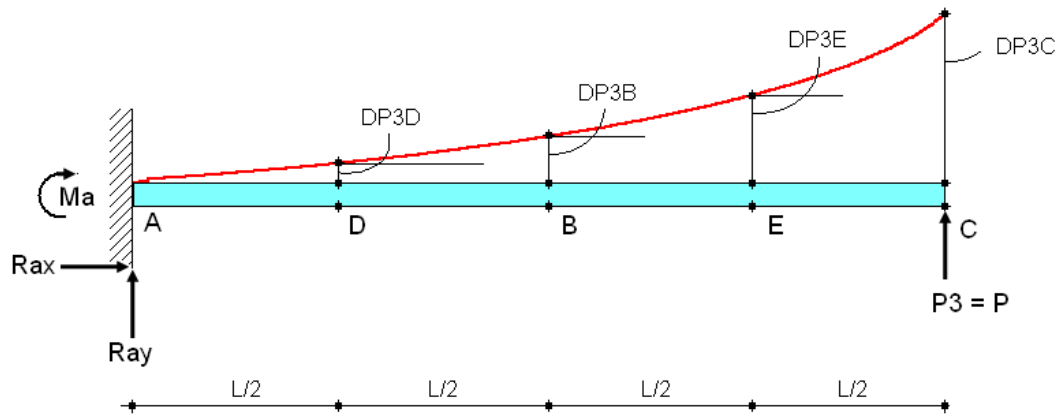
3.4.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, 2L)

O valor das forças internas {“Rx”, “Vx”, “Mx”}, na posição “x” dentro do intervalo estabelecido, é calculado por meio das equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (62). As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão caracterizadas na Figura 11c.

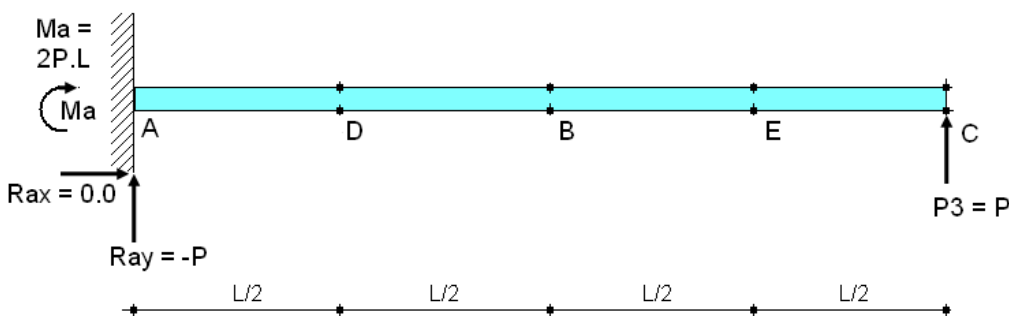
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} - R_x = 0 \rightarrow R_x = R_{ax} \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - V_x = 0 \rightarrow V_x = R_{ay} \rightarrow V_x = -P \\ \sum M_x = 0 &\rightarrow M_a - R_{ay} \cdot x - M_x = 0 \rightarrow M_x = 2 \cdot P \cdot L - P \cdot x \end{aligned} \quad (62)$$

Os sinais negativos de “Ray”, em (61) e da força cortante “Vx”, em (62) indicam que a primeira está apontada para baixo e a segunda está apontada para cima, uma vez que representam sentidos opostos aos sentidos adotados na Figura 11.

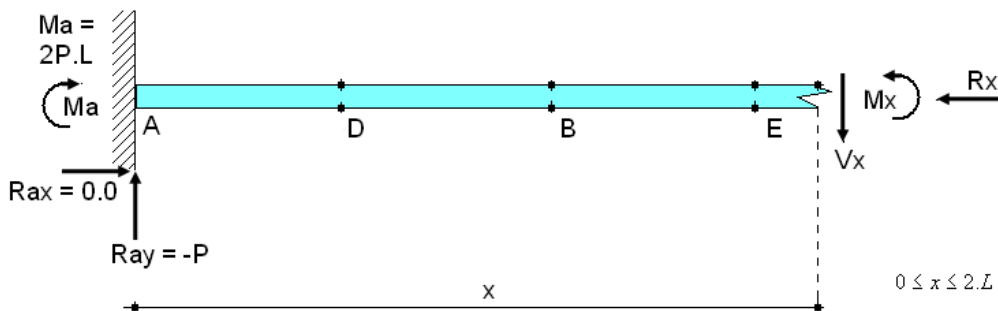
Figura 11: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por “P3”



a) As deformações nos pontos "D", "B", "E" e "C" causadas pela ação "P3" atuando sobre a viga aliviada



b) A viga aliviada sob atuação de "P3": as reações "Ma", "Rax", "Ray" podem ser determinadas pelo equilíbrio externo



c) A viga seccionada em "x", para o equacionamento do equilíbrio interno

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

3.4.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “P3”

Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, o engenheiro analista faz uso da equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} . E . I = M(x) \quad (\text{repetida de 21})$$

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação da carga “P3”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq 2L$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação de “P3”. Essa rotação está descrita em (63) e em (65).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) = 2.P.L - P.x \quad (63)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \int 2.P.L - P.x \cdot \partial x \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L.x - \frac{P.x^2}{2} + C_1 \right]$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto "A", equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (63) deve ser tal que o valor desta derivada seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração "C1" deve ser zero.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L \cdot 0 - \frac{P \cdot 0^2}{2} + C_1 \right] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (64)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada "v'(x)" sob ação da carga concentrada "P3" é dada pela expressão (65), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L.x - \frac{P.x^2}{2} \right], \quad 0 \leq x \leq 2.L \quad (65)$$

Os valores das rotações na viga, causadas por "P3", nos pontos $x = L/2$, $x = L$, $x = 3L/2$ e $x = 2L$, são dados pela expressão final em (66). Os sinais positivos destas tangentes indicam que as deformações ocorrem para cima.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{P \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = \left[\frac{7}{8} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L \cdot L - \frac{P \cdot L^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right] \quad (66)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=3L/2} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L \cdot \left(\frac{3L}{2}\right) - \frac{P \cdot \left(\frac{3L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=3L/2} = \left[\frac{15}{8} \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=2L} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[2.P.L \cdot (2L) - \frac{P \cdot (2L)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=2L} = \left[2 \cdot \frac{P.L^2}{E.I} \right]$$

3.4.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por "P3"

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por "P3", é obtida pela integração da expressão (66), no intervalo considerado. Obtém-se (67).

$$v \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \int \left[2.P.L.x - \frac{P.x^2}{2} \right] \cdot \partial x \quad (67)$$

$$v \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[P.L.x^2 - \frac{P.x^3}{6} + C_2 \right] \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq 2.L$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$ = ”A”. Então, a equação (67) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração “C2” deve ser zero.

$$v_{x=0} = \frac{1}{EI} \cdot \left[P \cdot L \cdot 0^2 - \frac{P \cdot 0^3}{6} + C_2 \right] = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (68)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada “ $v(x)$ ” sob ação da carga concentrada “P3” é dada pela expressão (69), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada, sob a ação de “P3”.

$$v_x = \frac{1}{EI} \cdot \left[P \cdot L \cdot x^2 - \frac{P \cdot x^3}{6} \right] \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (69)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {“A”, “D”, “B”, “E”, “C”} da viga aliviada. Como todos os pontos encontram-se dentro do intervalo de validade da expressão (69), os deslocamentos podem ser obtidos diretamente, sem a necessidade de considerações geométricas adicionais. Esses elementos podem ser visualizados na Figura 11a e descritos pelas expressões em (70). São os deslocamentos causados por “P3”.

$$\begin{aligned} DP3D &= v \left(x = \frac{L}{2} \right) \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad x = 2.L = \left[2 \cdot \frac{P.L^2}{EI} \right] \\ DP3B &= v \quad x = L \\ DP3E &= v \left(x = \frac{3L}{2} \right) \\ DP3C &= v \quad x = 2.L \end{aligned} \quad (70)$$

O deslocamento “DP3D” é calculado em (71), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 5c. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da carga concentrada “P3”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento é causado exclusivamente por “P3”.

$$DP3D = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI} \cdot \left[P \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{P \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3}{6} \right] \rightarrow DP3D = \left[\frac{11}{48} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right] \quad (71)$$

O deslocamento “DP3B” é calculado em (72), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6b. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da carga concentrada “P3”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto “B” é causado exclusivamente por “P3”.

$$DP3B = v \quad x = L = \frac{1}{EI} \cdot \left[P \cdot L \cdot L^2 - \frac{P \cdot L^3}{6} \right] \rightarrow DP3B = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right] \quad (72)$$

Analogamente, o deslocamento no ponto “E”, denominado “DP3E” é calculado em (73), abaixo.

$$DP3E = v \left(x = \frac{3L}{2} \right) = \frac{1}{EI} \cdot \left[P.L. \left(\frac{3L}{2} \right)^2 - \frac{P. \left(\frac{3L}{2} \right)^3}{6} \right] \rightarrow DP3E = \left[\frac{81}{48} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right] \quad (73)$$

Finalmente, o deslocamento no ponto “C”, denominado “DP3C” é calculado em (74).

$$DP3C = v \quad x = 2.L = \frac{1}{EI} \cdot \left[P.L. \cdot 2.L^2 - \frac{P. \cdot 2.L^3}{6} \right] \rightarrow DP3C = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right] \quad (74)$$

3.5 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS TOTAIS DEVIDO ÀS CARGAS

Nesta seção são apresentados os cálculos dos deslocamentos totais devidos às cargas atuantes na viga aliviada nos pontos “B” e “C”, localizações das respectivas ações redundantes “Rby” e “Rcy”. A expressão (75), cuja origem é baseada na expressão (8), descreve os valores totais. Note-se que são positivos, indicando que o conjugado “M1” e a ação “P3” exercem maior influência sobre a estrutura aliviada que as ações “P1” e “P2”.

$$DQLB = DP1B + DM1B + DP2B + DP3B$$

$$DQLB = \frac{P.L^3}{EI} \left[\left(\frac{-5}{24} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{-7}{12} \right) + \left(\frac{5}{6} \right) \right] \rightarrow DQLB = \left[\frac{13}{24} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right] \quad (75)$$

$$DQLC = DP1C + DM1C + DP2C + DP3C$$

$$DQLC = \frac{P.L^3}{EI} \left[\left(\frac{-11}{24} \right) + \left(\frac{3}{2} \right) + \left(\frac{-81}{48} \right) + \left(\frac{8}{3} \right) \right] \rightarrow DQLC = \left[\frac{97}{48} \cdot \frac{P.L^3}{EI} \right]$$

3.6 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “Rby”

Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pela ação redundante “Rby”, descritos na Figura 12b, quatro passos são necessários. Os referidos passos são apresentados a seguir. A carga concentrada “Rby” atua sobre o ponto “B”, seu valor é desconhecido. Trata-se de uma incógnita do problema.

3.6.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “Rby”

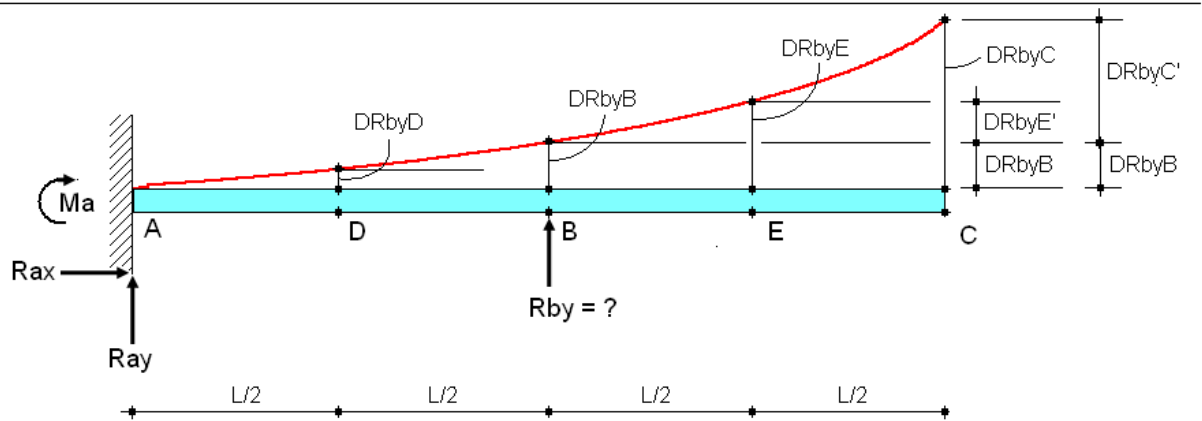
O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação redundante “Rby”, conforme as expressões em (76). As reações estão caracterizadas na Figura 12b.

$$\sum Fx = 0 \rightarrow Rax = 0$$

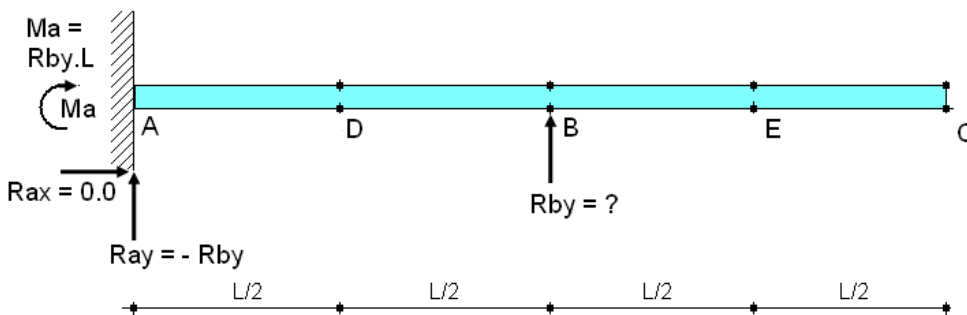
$$\sum Fy = 0 \rightarrow Ray + Rby = 0 \rightarrow Ray = -Rby \quad (76)$$

$$\sum Ma = 0 \rightarrow Ma - Rby \cdot L = 0 \rightarrow Ma = Rby \cdot L$$

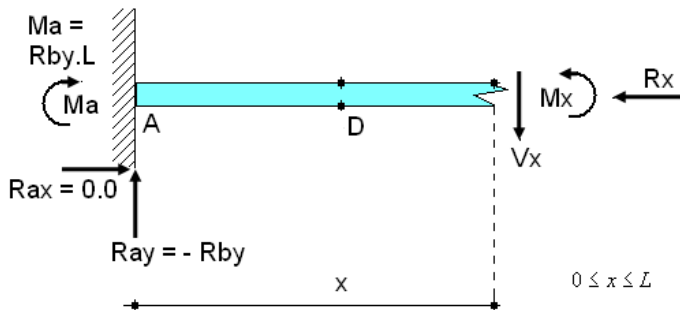
Figura 12: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por “Rby”



a) As deformações nos pontos "D", "B", "E" e "C" causadas pela ação redundante "Rby" atuando sobre a viga aliviada



b) A viga aliviada sob atuação de "Rby": as reações "Ma", "Rax", "Ray" podem ser determinadas pelo equilíbrio externo



c) A viga seccionada em "x", para o equacionamento do equilíbrio interno

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

3.6.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, L)

O valor das forças internas {"Rx", "Vx", "Mx"}, na posição "x" dentro do intervalo estabelecido, está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (77). As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão caracterizadas na Figura 12c.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{ax} - R_x = 0 \rightarrow R_x = R_{ax} \rightarrow R_x = 0 \\
 \sum F_y = 0 &\rightarrow R_{ay} - V_x = 0 \rightarrow V_x = R_{ay} \rightarrow V_x = -R_{by} \\
 \sum M_x = 0 &\rightarrow M_a - R_{ay} \cdot x - M_x = 0 \rightarrow M_x = R_{by} \cdot L - R_{by} \cdot x
 \end{aligned} \tag{77}$$

Os sinais negativos de “Ray”, em (76) e da força cortante “Vx”, em (77), indicam que a primeira está apontada para baixo e a segunda está apontada para cima, formas opostas ao adotado na Figura 12.

3.6.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “Rby”

Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, o engenheiro analista faz uso da equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) \quad (\text{repetida de 21})$$

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação redundante “Rby”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq L$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação de “Rby”. Essa rotação está descrita em (78) e em (80).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) &= Rby \cdot L - Rby \cdot x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{E.I} \cdot \int Rby \cdot L - Rby \cdot x \cdot dx \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot x - \frac{Rby \cdot x^2}{2} + C_1 \right] \end{aligned} \quad (78)$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = \text{”A”}$. Então, a equação (78) deve ser tal que o valor desta derivada seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração “C1” deve ser zero.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot 0 - \frac{Rby \cdot 0^2}{2} + C_1 \right] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (79)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada “v'(x)” sob ação redundante “Rby” é dada pela expressão (80), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot x - \frac{Rby \cdot x^2}{2} \right], \quad 0 \leq x \leq L \quad (80)$$

Os valores das rotações na viga, causadas por “Rby”, nos pontos $x = L/2$ e em $x = L$ são dados pela expressão final em (81). Os sinais positivos destas tangentes indicam que as deformações ocorrem para cima.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{Rby \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{Rby \cdot L^2}{E.I} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot L - \frac{Rby \cdot L^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Rby \cdot L^2}{E.I} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

3.6.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por “Rby”

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por “Rby”, é obtida pela integração da expressão (80), no intervalo considerado. Obtém-se (82).

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \int \left[Rby.L.x - \frac{Rby.x^2}{2} \right] \cdot dx \quad (82)$$

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{Rby.L.x^2}{2} - \frac{Rby.x^3}{6} + C_2 \right] \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq L$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto "A", equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a linha da curva elástica não se deforma no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (82) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração "C2" deve ser zero.

$$v_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{Rby.L \cdot 0^2}{2} - \frac{Rby \cdot 0^3}{6} + C_2 \right] = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (83)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada " $v(x)$ " sob influência da ação redundante "Rby" é dada pela expressão (84), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada.

$$v_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{Rby.L.x^2}{2} - \frac{Rby.x^3}{6} \right] \quad 0 \leq x \leq L \quad (84)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {"A", "D", "B", "E", "C"} da viga aliviada. Como alguns desses pontos estão fora do intervalo de validade da expressão (84), considerações geométricas devem ser realizadas para calcular esses deslocamentos. Tais considerações estão baseadas nas geometrias descritas para cada deslocamento em função do deslocamento calculado no ponto "B" e no valor da rotação da viga nesta posição. Por exemplo, o valor do deslocamento da viga aliviada no ponto "E" é igual ao valor do deslocamento da viga no ponto "B" somado ao produto da tangente à linha da curva elástica nesse mesmo ponto com a distância entre "B" e "E", que vale $L/2$. Esses elementos podem ser observados na Figura 12a e as considerações geométricas necessárias para calcular os deslocamentos nos pontos da viga aliviada, sujeita à influência da ação redundante "Rby", são apresentadas pelas expressões em (85).

$$DRbyD = v \left(x = \frac{L}{2} \right)$$

$$DRbyB = v_{x=L} \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Rby.L^2}{E.I} \right] \quad (85)$$

$$DRbyE = DRbyD + DRbyE' \quad \text{como} \quad DRbyE' = Tan(\theta) \cdot \overline{BE} \quad e \quad \overline{BE} = \frac{L}{2}$$

$$DRbyC = DRbyD + DRbyC' \quad \text{como} \quad DRbyC' = Tan(\theta) \cdot \overline{BC} \quad e \quad \overline{BC} = L$$

O deslocamento "DRbyD" é calculado em (86), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6c. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da ação redundante "Rby". É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento é causado exclusivamente por "Rby".

$$DRbyD = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{Rby \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} - \frac{Rby.L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3}{6} \right] \rightarrow DRbyD = \left[\frac{5}{48} \cdot \frac{Rcy.L^3}{E.I} \right] \quad (86)$$

O deslocamento “DRbyB” é calculado em (87), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6c. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da ação redundante “Rby”. É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto “B” é causado exclusivamente por “Rby”.

$$DRbyB = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[\frac{Rby \cdot L^3}{6} - \frac{Rby \cdot L \cdot L^2}{2} \right] \rightarrow DRbyB = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E.I} \right] \quad (87)$$

Analogamente, o deslocamento no ponto “E”, denominado “DRbyE” é calculado em (88), abaixo.

$$DRbyE = v_{x=L} + \text{Tan}(\theta) \cdot \overline{BE} = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Rby \cdot L^2}{E.I} \right] \cdot \left[\frac{L}{2} \right] \quad (88)$$

$$DRbyE = \left[\frac{7}{12} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E.I} \right]$$

Finalmente, o deslocamento no ponto “C”, denominado “DRbyC” é calculado em (89).

$$DRbyC = v_{x=L} + \text{Tan}(\theta) \cdot \overline{BC} = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E.I} \right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{Rby \cdot L^2}{E.I} \right] \cdot L \quad (89)$$

$$DRbyC = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rby \cdot L^3}{E.I} \right]$$

3.7 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS E ROTAÇÕES CAUSADOS POR “Rcy”

Para a determinação dos deslocamentos e das rotações da estrutura aliviada causados pela ação redundante “Rcy”, descritos na Figura 13b, quatro passos são também necessários. Os referidos passos são apresentados a seguir. A carga concentrada “Rcy” atua sobre o ponto “C”, seu valor é desconhecido. Trata-se da segunda, e última, incógnita do problema.

3.7.1 Passo 1: Processo de cálculo das reações externas no engaste devido à ação “Rcy”

O valor das reações externas no engaste {“Rax”, “Ray”, “Ma”} está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático externo sobre a estrutura aliviada que suporta a ação redundante “Rby”, conforme as expressões em (90).

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow Rax = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow Ray + Rcy = 0 \rightarrow Ray = -Rcy \\ \sum Ma = 0 &\rightarrow Ma - Rcy \cdot 2.L = 0 \rightarrow Ma = Rcy \cdot 2.L \end{aligned} \quad (90)$$

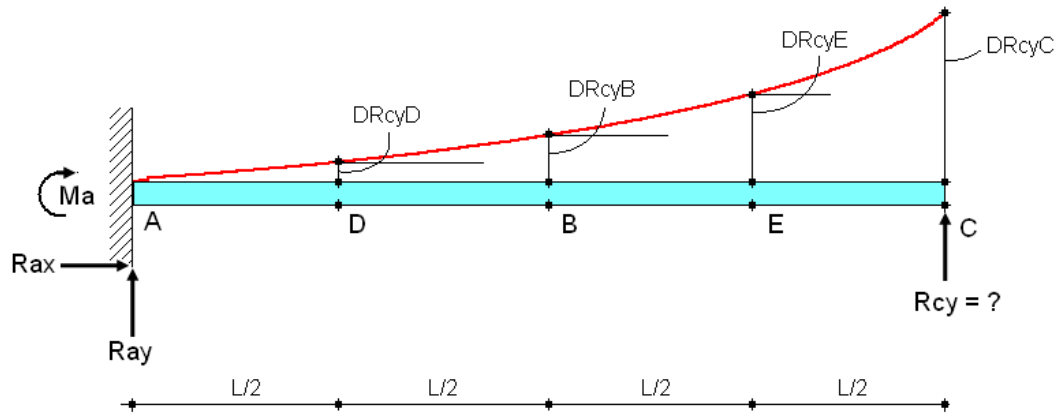
3.7.2 Passo 2: Processo de cálculo das forças internas no intervalo (0, 2L)

O valor das forças internas {“Rx”, “Vx”, “Mx”}, na posição “x” dentro do intervalo estabelecido, está demonstrado a seguir e é calculado aplicando as equações do equilíbrio estático interno sobre a parte seccionada à esquerda da estrutura aliviada, conforme as expressões em (91).

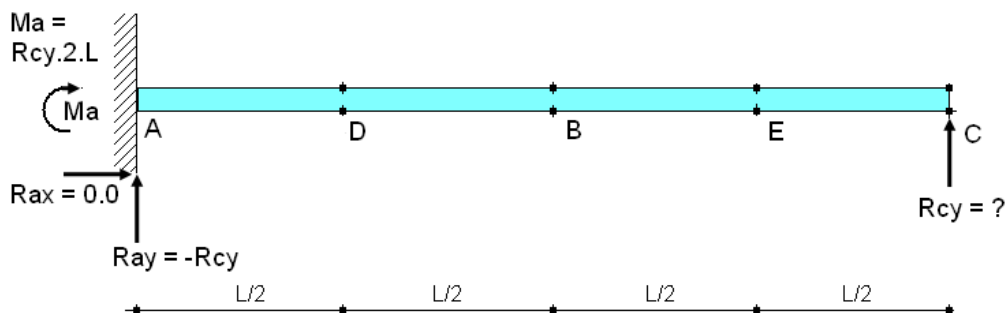
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow Rax - Rx = 0 \rightarrow Rx = Rax \rightarrow Rx = 0 \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow Ray - Vx = 0 \rightarrow Vx = Ray \rightarrow Vx = -Rcy \\ \sum M_x = 0 &\rightarrow +Ma - Rcy \cdot x - Mx = 0 \rightarrow Mx = Rcy \cdot 2.L - Rcy \cdot x \end{aligned} \quad (91)$$

As reações no engaste e as forças internas na seção de corte estão descritas na Figura 13c. Os sinais negativos de “Ray” e da força cortante “Vx” indicam que a primeira está apontada para baixo e a segunda está apontada para cima, sentidos opostos ao adotado na Figura 13.

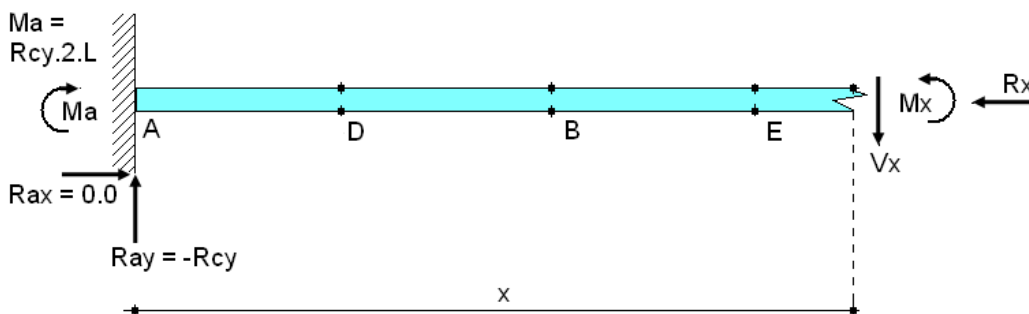
Figura 13: Elementos necessários para a determinação dos deslocamentos causados por “Rcy”



a) As deformações nos pontos "D", "B", "E" e "C" causadas pela ação redundante "Rcy" atuando sobre a viga aliviada



b) A viga aliviada sob atuação de "Rcy": as reações "Ma", "Rax", "Ray" podem ser determinadas pelo equilíbrio externo



c) A viga seccionada em "x", para o equacionamento do equilíbrio interno

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos, 2008.

3.7.3 Passo 3: Processo de cálculo das rotações da estrutura causadas por “Rcy”

Para o cálculo das deformações (rotações e deslocamentos) na viga aliviada, o engenheiro analista faz uso da equação diferencial da linha da curva elástica, descrita pela expressão (21).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) \quad (\text{repetida de 21})$$

Aplicando a equação diferencial acima para o caso específico da viga aliviada sob a ação redundante “Rcy”, e integrando apenas uma vez, tem-se a equação diferencial que descreve as

rotações dessa estrutura no intervalo $0 \leq x \leq 2L$. O limite superior deste intervalo representa o ponto de aplicação de “Rcy”. Essa rotação está descrita em (92) e em (94).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot E.I = M(x) = Rcy \cdot 2L - Rcy \cdot x \quad (92)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \int [Rcy \cdot 2L - Rcy \cdot x] \cdot dx \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot x - \frac{Rcy \cdot x^2}{2} + C_1 \right]$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cuja deformação de rotação é nula no ponto “A”, equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a derivada da linha da curva elástica é horizontal no ponto $x = 0 = \text{”A”}$. Então, a equação (92) deve ser tal que o valor desta derivada seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da primeira constante de integração “C1” deve ser zero.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot 0 - \frac{Rcy \cdot 0^2}{2} + C_1 \right] = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (93)$$

Assim, a rotação da estrutura aliviada “v'(x)” sob ação redundante “Rcy” é dada pela expressão (94), dentro do intervalo considerado.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_x = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot x - \frac{Rcy \cdot x^2}{2} \right], \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (94)$$

Os valores das rotações na viga, causadas por “Rcy”, nos pontos $x = L/2$, $x = L$, $x = 3L/2$ e $x = 2L$ são dados pela expressão final em (95). Os sinais positivos destas tangentes indicam que as deformações ocorrem para cima.

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{Rcy \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L/2} = \left[\frac{7}{8} \cdot \frac{Rcy \cdot L^2}{E.I} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot L - \frac{Rcy \cdot L^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{Rcy \cdot L^2}{E.I} \right] \quad (95)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=3L/2} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot \left(\frac{3L}{2}\right) - \frac{Rcy \cdot \left(\frac{3L}{2}\right)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=3L/2} = \left[\frac{15}{8} \cdot \frac{Rcy \cdot L^2}{E.I} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=2L} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[Rcy \cdot 2L \cdot 2L - \frac{Rcy \cdot (2L)^2}{2} \right] \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=2L} = \left[2 \cdot \frac{Rcy \cdot L^2}{E.I} \right]$$

3.7.4 Passo 4: Processo de cálculo dos deslocamentos da estrutura causados por “Rcy”

A expressão geral que descreve os deslocamentos na estrutura aliviada, causados por “Rcy”, é obtida pela integração da expressão (94), no intervalo considerado. Obtém-se (96).

$$v_x = \frac{1}{EI} \cdot \int \left[Rcy \cdot 2L \cdot x - \frac{Rcy \cdot x^2}{2} \right] \cdot dx \quad (96)$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \cdot \left[Rcy \cdot L \cdot x^2 - \frac{Rcy \cdot x^3}{6} + C_2 \right] \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq 2L$$

A equação diferencial acima também deve ser compatível com a configuração de suporte. Neste caso, o suporte é um engaste cujo deslocamento é nulo no ponto "A", equivalente ao ponto localizado em $x = 0$. Isto quer dizer que a linha da curva elástica não se deforma no ponto $x = 0 = "A"$. Então, a equação (96) deve ser tal que o valor deste deslocamento seja nulo neste ponto. Para tanto, o valor da segunda constante de integração "C2" deve ser zero.

$$v_{x=0} = \frac{1}{EI} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot 0^2 - \frac{Rcy \cdot 0^3}{6} + C_2 \right] = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (97)$$

Assim, o deslocamento da estrutura aliviada " $v(x)$ " sob influência da ação redundante "Rcy" é dada pela expressão (84), dentro do intervalo considerado. Essa expressão descreve a linha da curva elástica da estrutura considerada.

$$v_x = \frac{1}{EI} \cdot \left[Rcy \cdot L \cdot x^2 - \frac{Rcy \cdot x^3}{6} \right] \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (98)$$

A partir da equação acima, pode-se determinar os deslocamentos em todos os pontos {"A", "D", "B", "E", "C"} da viga aliviada. Como nenhum desses pontos está fora do intervalo de validade da expressão (98), não há necessidade de considerações geométricas adicionais. Os valores podem ser obtidos diretamente por meio de (98). Esses elementos podem ser observados na Figura 13a e calculados em (99).

$$DRcyD = v \left(x = \frac{L}{2} \right)$$

$$DRcyB = v_{x=L}$$

$$DRcyE = v \left(x = \frac{3L}{2} \right) \quad (99)$$

$$DRcyC = v_{x=2L} \quad e \quad Tan(\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=2L} = \left[2 \cdot \frac{Rcy \cdot L^2}{EI} \right]$$

O deslocamento "DRcyD" é calculado em (100), abaixo. Esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6d. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da ação redundante "Rcy". É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento é causado exclusivamente por "Rcy".

$$DRcyD = v \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{Rcy \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3}{6} \right] \rightarrow DRcyD = \left[\frac{11}{48} \cdot \frac{Rcy \cdot L^3}{EI} \right] \quad (100)$$

O deslocamento "DRcyB" é calculado em (101), abaixo. Da mesma forma, esse cálculo é a base do valor tabelado na Figura 6d. Seu valor positivo indica a direção do deslocamento, para cima, idêntica à direção da ação redundante "Rcy". É importante perceber essa associação, pois esse deslocamento no ponto "B" é causado exclusivamente por "Rcy".

$$DRcyB = v_{x=L} = \frac{1}{EI} \cdot \left[Rby \cdot L \cdot L^2 - \frac{Rby \cdot L^3}{6} \right] \rightarrow DRcyB = \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{Rcy \cdot L^3}{EI} \right] \quad (101).$$

Analogamente, o deslocamento no ponto “E”, denominado “DRcyE” é calculado em (102), abaixo.

$$DR_{cyE} = v \left(x = \frac{3L}{2} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left[R_{by}.L. \left(\frac{3L}{2} \right)^2 - \frac{R_{cy}.L. \left(\frac{3L}{2} \right)^3}{6} \right] \rightarrow DR_{cyE} = \left[\frac{107}{48} \cdot \frac{R_{cy}.L^3}{E.I} \right] \quad (102)$$

Finalmente, o deslocamento no ponto “C”, denominado “DRbyC” é calculado em (103).

$$DR_{cyC} = v \quad x = 2L = \frac{1}{E.I} \cdot \left[R_{by}.L. \cdot 2L^2 - \frac{R_{by} \cdot 2L^3}{6} \right] \rightarrow DR_{cyC} = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{R_{cy}.L^3}{E.I} \right] \quad (103)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem várias razões para justificar a importância do Método da Flexibilidade na resolução de sistemas estruturais hiperestáticos. Entre elas, deseja-se citar três: (i) a formação dos estudantes nos cursos de Engenharia, pois ele conduz ao entendimento das relações existentes entre deslocamentos causados por ações aplicadas na estrutura deformada; (ii) a caracterização pedagógica do processo de análise de estruturas hiperestáticas, na qual são exigidos o entendimento dos princípios da superposição e da compatibilidade das deformações de uma estrutura com as suas configurações de suporte, quando sujeita a um padrão de carregamento. Neste quesito, o método se sobressai dos demais pela possibilidade de se analisar múltiplos caminhos alternativos para a solução do problema; (iii) pelo fato de que o aprendizado desse método é de fundamental importância para o entendimento de outro método, igualmente importante em Engenharia, denominado “Método da Rigidez”.

Entretanto, a aplicação do Método da Flexibilidade, por ser um método de resolução de problemas em Engenharia, exige um esforço considerável para obter a solução do problema. Várias abordagens são empregadas no seu ensinamento, por meio de livros textos. Duas delas, básicas, muito eficientes: (i) pelo uso freqüente de tabelas-padrão contendo valores dos deslocamentos específicos associados a um conjunto de carregamentos e tipos de suporte em estruturas aliviadas. Trata-se de uma abordagem prática, de fácil aplicação. A solução do problema é quase direta; (ii) pela resolução completa do problema, sem o uso de tabelas-padrão. Essa abordagem é mais demorada, porém o aluno passa a entender de onde vieram todos os valores utilizados no processo de resolução do problema. Geralmente, os valores de tabelas padrão, contidas em livros textos, são obtidos pela aplicação dessa segunda abordagem. É o que se faz nesse artigo para resolver os dois problemas. Apostamos na maneira mais detalhada para encorajar os alunos no seu processo de percepção de problemas estruturais e de análise na busca de suas soluções.

REFERÊNCIAS

- Freitas Neto**, José de Almendra; Sperandio Junior, Ernesto. Exercícios de estática e resistência dos materiais. Curitiba, Imprensa da Universidade Federal do Paraná, 1971.
- Gere**, James M.; Weaver Jr., William. Matrix analysis of framed structures. New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1965.
- Gere**, James M. Mecânica dos Materiais. São Paulo: Pioneira Thomsom, 2003.
- Timoshenko**, Stephen P. History of strength of materials. New York, Dover Publications, 1983.
- Popov**, Egor Paul. Introdução à Mecânica dos Sólidos. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1978.