UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DANRLLEY ALEXANDRE OLIVEIRA BARBOSA

O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH: VERSÕES E APLICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA
2023

DANRLLEY ALEXANDRE OLIVEIRA BARBOSA

O PRINCÍPIO DA CONTRAÇÃO DE BANACH: VERSÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado(a) como requisito para obtenção do título(grau) de Bacharel em Matemática Aplicada, do Departamento de Matemática e Estatística, da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA

2023

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por estar sempre comigo em todos os momentos e ter dado as condições de realizar este trabalho.

Aos meus pais, irmãs, irmãos e amigos, pelo carinho, incentivo e total apoio em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marciano Pereira, pela oportunidade de aprendizado, pelo tempo que dedicou a me orientar, por sua paciência e dedicação, pela confiança depositada em mim e amizade desenvolvida durante os últimos anos.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Enfim, a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

"Lógica é a base da certeza de todo o

conhecimento que adquirimos."

(Leonhard Euler).

RESUMO

BARBOSA, Danrlley Alexandre Oliveira. **O Princípio da Contração de Banach: versões e aplicações**. Orientador: Marciano Pereira. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2023.

Em Matemática, resultados de existência e unicidade de soluções para um determinado problema são considerados muito importantes do ponto de vista teórico. Por outro lado, encontrar uma aproximação para essa solução também é valiosa do ponto de vista prático. O Princípio da Contração de Banach, também conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach, é um resultado dessa natureza, ou seja, fornece condições que garantem a existência e unicidade de ponto fixo para uma aplicação. Além disso, sua demonstração fornece um processo iterativo, cujo ponto fixo é o limite dessa sequência de iterações, e estimativas de erro para aproximações desse ponto fixo. Este trabalho tem como objetivo, por meio da metodologia de revisão de literatura, enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, algumas versões e sua recíproca, não tão conhecida na literatura, e aplicá-lo para demonstrar importantes teoremas de existência e unicidade de soluções para sistemas de equações lineares e para equações diferencias e integrais, além do método de Newton para encontrar zeros de funções. Com este trabalho pudemos perceber a importância do Princípio da Contração de Banach, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista prático, e como uma fonte de teoremas de existência e unicidade, com muitas consequências.

Palavras-chave: Ponto Fixo. Teorema do Ponto Fixo de Banach. Espaços Métricos. Contração.

ABSTRACT

BARBOSA, Danrlley Alexandre Oliveira. **O Princípio da Contração de Banach: versões e aplicações**. Orientador: Marciano Pereira. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado in Matemática Aplicada) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2023.

In Mathematics, results of existence and uniqueness of solutions for a given problem are considered very important from a theoretical point of view. On the other hand, finding an approximation to this solution is also valuable from a practical point of view. The Banach Contraction Principle, also known as the Banach Fixed Point Theorem, is a result of this nature, that is, it gives conditions that guarantee the existence and uniqueness of a fixed point for an application. Furthermore, its proof provides an iterative process, whose fixed point is the limit of this sequence of iterations, and error estimates for approximations of this fixed point. This work aims, through a literature review methodology, to enunciate and to demonstrate Banach's Fixed Point Theorem, some versions and its converse, not so well known in the literature, and apply it to demonstrate important existence and uniqueness theorems of solutions for systems of linear equations and for differential and integral equations, in addition to Newton's method for finding zeros of functions. Based on this work we could realize the importance of Banach's Principle of Contraction, both from a theoretical and practical point of view, and as a source of existence and uniqueness theorems, with many consequences.

Keywords: Fixed Point. Banach Fixed Point Theorem. Metric Spaces. Contraction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Análise Funcional é um ramo abstrato da Matemática que se originou da análise clássica. Seu desenvolvimento começou há cerca de 125 anos, e hoje em dia os métodos analíticos funcionais e seus resultados são importantes em vários campos da Matemática e suas aplicações.

Em Cálculo estudamos funções definidas na reta real $\mathbb{R}$. Um pouco de reflexão mostra que em processos de limite, convergência e em muitas outras considerações usamos o fato de que em $\mathbb{R}$ temos disponível uma função, em geral denotada por d, que associa uma distância $d(x,\ y) = |x - y|$ a cada par de pontos $x,\ y \in \mathbb{R}$. Com o avanço da matemática, os matemáticos perceberam a importância de generalizar a noção de distância para espaços abstratos e mais gerais. Esse avanço produziu as noções de métrica, espaços métricos e, aliados com a noção de convergência, os espaços métricos completos.

A teoria sobre pontos fixos é de vasta aplicação em Matemática e existem diversos teoremas de ponto fixo. Muitos problemas em Matemática se reduzem a encontrar pontos fixos de alguma aplicação e, assim, torna-se importante dar condições que garantam sua existência e em alguns casos unicidade. Por exemplo, um resultado bem conhecido é que toda função contínua $f : [0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$ possui pelo menos um ponto fixo; isto é uma consequência do Teorema do Valor Intermediário.

Neste trabalho nos concentraremos no Princípio da Contração de Banach, também denominado Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é um dos teoremas mais importantes desse tipo e com muitas consequências. Esse teorema garante que uma aplicação contração, cujo domínio e contradomínio são o mesmo espaço métrico completo, tem um único ponto fixo. Além disso, fornece um processo iterativo para encontrar uma aproximação desse ponto fixo a partir de qualquer ponto do espaço, inclusive dando estimativas de erro para essa aproximação.

Os objetivos deste trabalho são: enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach; obter versões, variações e um resultado que pode ser chamado de recíproca desse teorema; e por fim, fazer algumas aplicações desse teorema.

Para tal, o trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos a teoria dos Espaços Métricos, alguns exemplos clássicos de Espaços Métricos, assim como a convergência nesses espaços e finalizamos apresentando os conceitos de sequência de Cauchy e Espaços Métricos Completos.

No Capítulo 3, definimos ponto fixo e aplicação contração, em seguida enunciamos e demonstramos o resultado principal, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, e finalizamos com algumas versões e variações e com a chamada recíproca do Teorema.

No Capítulo 4 apresentamos algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, sendo que a primeira aplicação diz respeito ao famoso método de Newton para encontrar zeros de funções. Em seguida, uma aplicação do Teorema para sistemas de equações lineares. Também usamos o teorema para provar o famoso teorema de Picard para equações diferenciais ordinárias e encerramos com uma aplicação às conhecidas equações integrais de Volterra e de Fredholm, que garante a existência e unicidade de soluções para essas equações integrais.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos as Considerações Finais.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos a respeito de espaços métricos, conjunto aberto, cojunto fechado, sequências em espaços métricos, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. Tais conceitos são necessários para compreender, da melhor forma possível, o restante do trabalho. Para isso, todos os resultados desse capítulo podem ser encontrados em Kreyszig (1991), Lima (2004), Lima (1983) e Domingues (1982).

2.1 ESPAÇO MÉTRICO

Nesta seção, enunciaremos definições e apresentaremos alguns exemplos sobre espaços métricos para a compreensão do trabalho, que serão utilizados mais adiante.

Definição 2.1.1 (Espaço Métrico). *Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica** em X é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, que associa a cada par de elementos $x,\ y \in X$ um número real não negativo $d(x,\ y)$, denominado distância em X, tal que para todo $x,\ y,\ z\ \in X$, temos:*

(M1) $d(x,\ y) = 0$ *se, e somente se* $x = y$.

(M2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)$ ***(Simetria)**.*

(M3) $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)$ ***(Desigualdade triangular)**.*

O par $(X,\, d)$ é chamado **Espaço Métrico**. Podemos denotar o espaço métrico $(X,\, d)$ apenas por X, quando não houver confusão concernente à métrica definida em X.

Observação 2.1.1. *De $(M3)$ podemos obter por indução a desigualdade triangular generalizada*

$$d(x_1,\ x_n) \leq d(x_1,\ x_2) + d(x_2,\ x_3) + \ldots + d(x_{n-1},\ x_n).$$

Exemplo 2.1.1 (Métrica Usual da Reta). *Seja $X = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e seja $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $d(x,\ y) = |x - y|$. Verifiquemos que d é uma métrica em $\mathbb{R}$. De fato, temos que d está bem definida, pois $|\ ,\ | : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e se $(x,\ y) = (w,\, z)$ então $|x - y| = |w - z|$. Agora, sejam $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.*

(M1) Temos que

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Portanto, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(M2) Temos que

$$d(x,\ y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = d(y,\ x).$$

Portanto, $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) Temos que

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z).$$

Portanto, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *donde* d *é uma métrica em* $\mathbb{R}$ *e* $(\mathbb{R}, d)$ *é um espaço métrico.*

Exemplo 2.1.2 (Espaço Euclidiano). *Dados* $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, *em que* $x = (\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_n)$ *e* $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. *As funções* $d,\ d',\ d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definidas por*

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d'(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + \cdots + |\xi_n - \eta_n| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| \ e$$

$$d''(x, y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|, \ldots, |\xi_n - \eta_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|$$

são métricas em $\mathbb{R}^n$. *Como as métricas* $d,\ d'$ *e* d'' *são usuais, não apresentaremos as demonstrações.*

Exemplo 2.1.3 (Métrica zero-um). *Seja* X *um cojunto qualquer não vazio e consideremos a função* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *definida por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & se\ x = y, \\ 1, & se\ x \neq y. \end{cases}$$

É imediata a verificação de que d *é uma métrica; o espaço* (X, d) *é chamado de* ***espaço métrico discreto***.

Exemplo 2.1.4 (Espaço das Funções). *Seja* $X = C[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ *é contínua em* $[a, b]\}$. *As funções* $d,\ d' : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *definidas por*

$$d(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \ e$$

$$d'(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt, \qquad \forall\ f,\ g \in X,$$

são métricas em $C[a,\, b]$*. Assim, obtemos os espaços métricos* $(X,\, d)$ *e* $(X,\, d')$*, respectivamente. Mostremos que* d *é uma métrica. De fato, temos que* d *está bem definida, pois* $|\ ,\ | : C[a,\, b] \times C[a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *e se* $(f,\, g) = (h,\, u)$ *então* $\max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in[a,\, b]} |h(t) - u(t)|$*. Agora, sejam* $f,\ g$ *e* $h \in C[a,\, b]$*.*

(M1) Temos que

$$d(f,\, g) = 0 \Leftrightarrow \max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - g(t)| = 0 \Leftrightarrow f(t) - g(t) = 0, \qquad \forall\, t \in [a,\, b]$$
$$\Leftrightarrow f(t) = g(t), \qquad \forall\, t \in [a,\, b].$$

Portanto, $d(f,\, g) = 0$ *se, e somente se,* $f = g$*.*

(M2) Temos que

$$d(f,\, g) = \max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - g(t)| = \max_{t\in[a,\, b]} |g(t) - f(t)| = d(g,\, f).$$

Portanto, $d(f,\, g) = d(g,\, f)$*.*

(M3) Para a desigualdade triangular, notemos que

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &= |f(t) - g(t) + g(t) - h(t)| \\ &\leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \\ &\leq \max_{t\in[a,\, b]} \{|f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|\} \\ &= \max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,\, b]} |g(t) - h(t)|. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - h(t)| \leq \max_{t\in[a,\, b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,\, b]} |g(t) - h(t)|,$$

ou seja, $d(f,\, h) \leq d(f,\, g) + d(g,\, h)$*. Portanto,* d *é uma métrica em* $C[a,\, b]$ *donde* $C[a,\, b]$ *é um espaço métrico.*

Definição 2.1.2 (Métricas Equivalentes). *Duas métricas* d_1 *e* d_2 *em um espaço métrico* X *são equivalentes quando existem constantes reais* $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *tais que:*

$$\alpha d_1(x,\, y) \leq d_2(x,\, y) \leq \beta d_1(x,\, y), \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Observação 2.1.2. *Pela definição acima, temos que as métricas Euclidianas definidas no Exemplo 2.1.2 são equivalentes em* $\mathbb{R}^n$*, em que para* $n \in \mathbb{N}$*, temos as relações*

$$d''(x,\, y) \leq d(x,\, y) \leq d'(x,\, y) \leq nd''(x,\, y) \leq nd(x,\, y), \qquad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Para mais detalhes, veja Domingues (1982).

2.2 CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

Nesta seção, apresentaremos uma importante estrutura matemática subjacente aos espaços métricos, estrutura essa que ocorre nas propriedades básicas dos chamados "conjuntos abertos" do espaço. Primeiro, enunciemos o conceito de bolas e esferas em um espaço métrico.

Definição 2.2.1 (Bolas e Esferas). *Sejam (X, d) um espaço métrico, $x_0 \in X$ e um número real $r > 0$. Definimos:*

(a) $B(x_0;\ r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ (***Bola aberta***)

(b) $B[x_0;\ r] = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ (***Bola fechada)***

(c) $S(x_0;\ r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$ (***Esfera***)

em que x_0 é denominado ***centro*** *e r* ***raio****.*

Exemplo 2.2.1. *Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ com as métricas do Exemplo 2.1.2. Sejam $x = (\xi_1,\ \xi_2)$ e $y = (\eta_1, \eta_2)$; temos:*

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2},$$
$$d'(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2| \ e$$
$$d''(x, y) = \max\{|\xi_1 - \eta_1|,|\xi_2 - \eta_2|\}.$$

Verifiquemos como é a estrutura da bola fechada $B[0;\ 1]$ em diferentes métricas no espaço $\mathbb{R}^2$. Em $(\mathbb{R}^2, d)$, temos que, se $u = (x, y) \in S(0;\ 1)$, então $d(u, 0) = 1$, ou seja,

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = 1.$$

Logo,

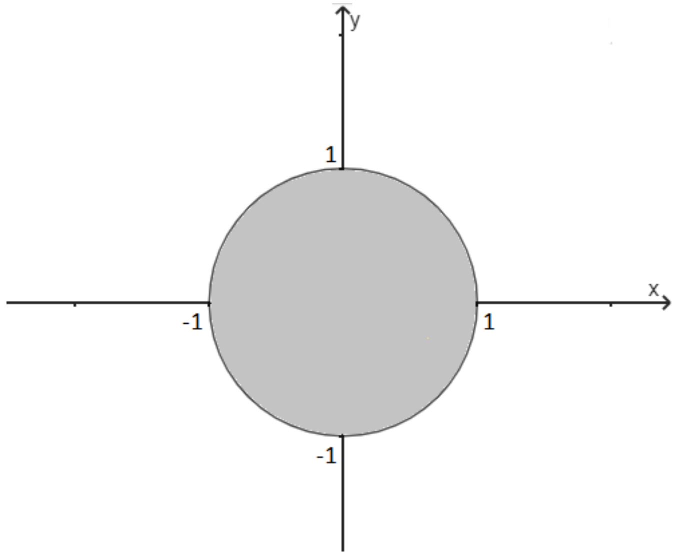
$$(x, y) \in S(0;\ 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Também, para $u \in B(0;\ 1)$, temos que $d(u, 0) < 1$, ou seja,

$$x^2 + y^2 < 1.$$

Desse modo, $B(0;\ 1)$ em $(\mathbb{R}^2, d)$ é o interior do círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1. A esfera $S(0;\ 1)$ é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 e $S(0;\ 1) \cup B(0;\ 1) = B[0;\ 1]$, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – $B[0;\ 1]$ **com a métrica** d



Fonte: Autoria própria.

Agora, em $(\mathbb{R}^2, d')$*, temos que, se* $u \in S(0;\ 1)$*, então* $d'(u, 0) = 1$*, ou seja,*

$$|x| + |y| = 1.$$

Portanto, segue-se que $|x| < 1$ *e* $|y| < 1$*, neste caso. Também, temos que*

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow |y| = 1 - |x|.$$

Então,

$$y = 1 - |x|, \quad se \quad y \geq 0 \qquad ou \qquad y = -1 + |x|, \quad se \quad y < 0.$$

Para $u \in B(0;\ 1)$*, temos que* $|y| < 1 - |x|$*. Então, temos que a bola* $B(0;\ 1)$ *é o interior do quadrado de vértices*

$$A = (0, 1),\ B = (-1, 0),\ C = (0,\ -1)\ e\ D = (1, 0).$$

A esfera $S(0;\ 1)$ *são os lados desse quadrado e* $B[0;\ 1] = S(0;\ 1) \cup B(0;\ 1)$*, como mostra a Figura 2.*

Enfim, em $(\mathbb{R}^2, d'')$*, temos que, se* $u \in S(0;\ 1)$*, então* $d''(u, 0) = 1$*, ou seja,*

$$\max\{|x|,|y|\} = 1.$$

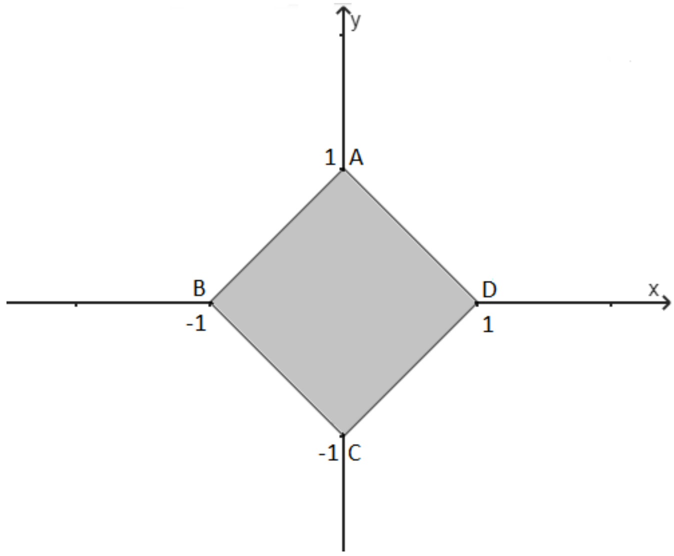
Logo,

$$|x| = 1 \quad e \quad |y| \leq 1 \qquad ou \qquad |y| = 1 \quad e \quad |x| \leq 1.$$

Então, temos que a bola $B(0;\ 1)$ *em* $(\mathbb{R}^2, d'')$ *é o quadrado de vértices*

$$A = (1, 1),\ B = (-1, 1),\ C = (-1,\ -1)\ e\ D = (1,\ -1).$$

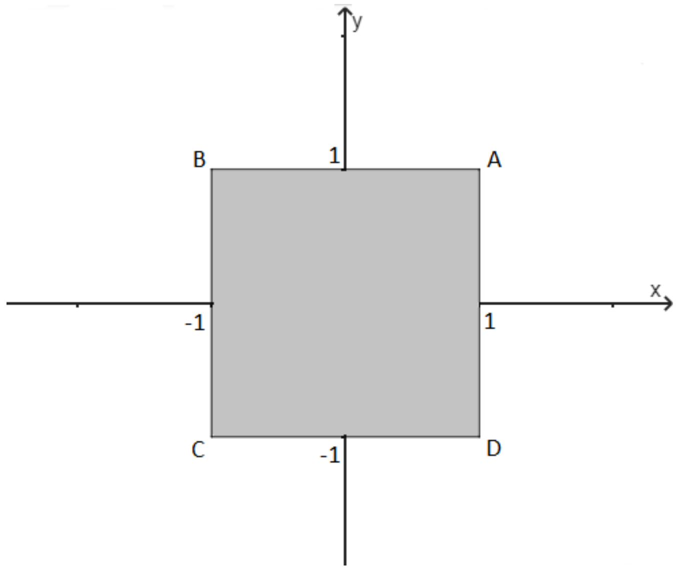
Figura 2 – $B[0;\ 1]$ **com a métrica** d'



Fonte: Autoria própria.

A esfera $S(0;\ 1)$ *são os lados desse quadrado e* $B[0;\ 1] = S(0;\ 1) \cup B(0;\ 1)$. *Como mostra a Figura 3.*

Figura 3 – $B[0;\ 1]$ **com a métrica** d''



Fonte: Autoria própria.

Com esse exemplo, podemos ver que em um espaço métrico, a estrutura de uma bola depende da métrica que está sendo utilizada nesse espaço. Enunciemos agora o conceito de conjuntos abertos e fechados em um espaço métrico.

Definição 2.2.2 (Conjunto Aberto, Conjunto Fechado). *Um subconjunto M de um espaço métrico X é* ***aberto*** *se contiver uma bola aberta em torno de cada um de seus pontos. Um* *subconjunto K de X é **fechado** se o seu conjunto complementar (em X) é aberto, isto é, $K^c = X - K$ é aberto.*

Da definição acima, podemos perceber que uma bola aberta é um conjunto aberto e uma bola fechada é um conjunto fechado.

Uma bola aberta $B(x_0;\ \epsilon)$ de raio ϵ é frequentemente chamada de vizinhança ϵ de x_0. (Aqui, $\epsilon > 0$, pela Definição 2.2.1.) Por vizinhança de x_0, queremos dizer qualquer subconjunto de X que contém uma ϵ-vizinhança de x_0. Apresentemos agora a definição de ponto interior e o interior de um conjunto em um espaço métrico.

Definição 2.2.3. *Sejam X um espaço métrico e M um subconjunto de X. Um ponto $x_0 \in M$ é um **ponto interior** a M quando é centro de uma bola aberta totalmente contida em M, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(x_0;\ r) \subset M$. O **interior** de M em X, denotado por $int(M)$, é o conjunto formado por todos os pontos interiores a M.*

Da definição acima, temos que o $int(M)$ é aberto e é o maior conjunto aberto contido em M. Definamos agora o conceito de ponto de acumulação e fecho de um conjunto.

Definição 2.2.4. *Sejam X um espaço métrico e M um subconjunto de X. Um ponto $x_0 \in X$ (que pode ou não ser um ponto de M) é chamado de **ponto de acumulação** de M (ou ponto limite de M) se cada vizinhança de x_0 contém ao menos um ponto $y \in M$ distinto de x_0, ou seja, para qualquer $r > 0$, temos $B(x_0;\ r) \cap (M - \{x_0\}) \neq \emptyset$. O conjunto formado pelos pontos de M e os pontos de acumulação de M é chamado de **fecho** de M e é denotado por $\overline{M}$.*

Dessa definição, podemos perceber que $\overline{M}$ é fechado e é o menor conjunto fechado contendo M.

Considerando que em $\mathbb{R}^3$ o fecho $\overline{B(x_0;\ r)}$ de uma bola aberta $B(x_0;\ r)$ é a bola fechada $B[x_0;\ r]$, isso pode não ser válido em um espaço métrico geral. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.2 (Métrica discreta). *Considere o espaço métrico (X, d), em que X contém mais do que 1 elemento e d a métrica discreta definida no Exemplo 2.1.3. Seja $x_0 \in X$ e a bola aberta*

$$B(x_0;\ 1) = \{x \in X | d(x, x_0) < 1\}.$$

Temos que o único ponto que está a uma distância menor que 1 de x_0, é o próprio x_0. De fato,

$$B(x_0;\ 1) = \{x \in X | d(x, x_0) < 1\} = \{x \in X | d(x, x_0) = 0\} = \{x_0\}.$$

Sabemos que o fecho de $B(x_0;\ 1)$ é simplesmente:

$$\overline{B(x_0;\ 1)} = \{x_0\}.$$

Agora, considere a bola fechada

$$B[x_0;\ 1] = \{x \in X | d(x_0, x) \leq 1\}.$$

Então, como qualquer ponto diferente de x_0 tem uma distância de exatamente um ou zero de x_0. Logo,

$$B[x_0;\ 1] = X.$$

Como X é um conjunto com mais de um elemento, temos que $\overline{B(x_0;\ 1)} \neq B[x_0;\ 1]$.

Apresentemos agora o conceito de continuidade em espaços métricos, na qual veremos que conjuntos abertos desempenham um papel em conexão com aplicações contínuas, em que a continuidade é uma generalização natural da continuidade conhecida do Cálculo e é definida como segue.

Definição 2.2.5 (Aplicações Contínuas). *Sejam $X = (X, d)$ e $Y = (Y, d')$ espaços métricos. Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é dita **contínua** em um ponto x_0 se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d'(Tx, Tx_0) < \epsilon \quad \textit{para todo } x \textit{ satisfazendo} \quad d(x, x_0) < \delta.$$

*T é dita **contínua** em X se ela é contínua em todo ponto de X. Veja uma ilustração na Figura 4.*

Um resultado direto da definição acima, onde será útil para a demonstração do Teorema 3.3.1, Capítulo 3, é que a própria métrica d é uma aplicação contínua. De fato, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.3. *A métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma aplicação contínua. De fato, consideremos em $X \times X$ a métrica*

$$d_1((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y').$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $(x_0, y_0) \in X \times X$. Suponha que $(x, y) \in X \times X$ e $d_1((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon$. Então, da desigualdade que é consequência da desigualdade triangular

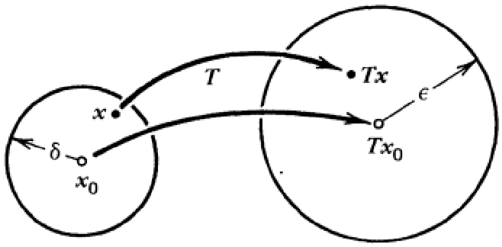
$$|d(x,\ z) - d(y,\ z)| \leq d(x,\ y) \qquad \forall\ x,\ y,\ z \in X,$$

temos

$$
\begin{aligned}
|d(x, y) - d(x_0, y_0)| &= |d(x, y) - d(x_0, y) + d(x_0, y) - d(x_0, y_0)| \\
&\leq |d(x, y) - d(x_0, y)| + |d(x_0, y) - d(x_0, y_0)| \\
&\leq d(x, x_0) + d(y, y_0) = d_1((x, y), d(x_0, y_0)) < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, como (x_0, y_0) foi arbitrário, segue da definição, que d é uma aplicação contínua.

Figura 4 – Desigualdades da Definição 2.2.5 ilustradas no caso de planos euclidianos $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}^2$



Fonte: Kreyszig (1991).

É importante e interessante que aplicações contínuas possam ser caracterizadas em termos de conjuntos abertos como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 (Aplicações Contínuas). *Uma aplicação T de um espaço métrico X sobre um espaço métrico Y é contínua se, e somente se, a imagem inversa de qualquer subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que T seja contínua. Seja $S \subset Y$ aberto e $S_0 = T^{-1}(S)$. Se $S_0 = \emptyset$, ele é aberto. Seja $S_0 \neq \emptyset$. Para qualquer $x_0 \in S_0$, seja $y_0 = Tx_0 \in S$. Como S é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(y_0;\ \epsilon) \subset S.$$

Para $\epsilon > 0$, como T é contínua então, existe $\delta > 0$ tal que

$$T(B(x_0;\ \delta)) \subset B(y_0;\ \epsilon).$$

Mas como $B(y_0;\ \epsilon) \subset S$, então

$$B(x_0;\ \delta) \subset T^{-1}(S) = S_0,$$

ou seja, S_0 é aberto.

$(\Leftarrow)$ Suponha que a imagem inversa de qualquer aberto de Y é um conjunto aberto em X. Então, para qualquer $x_0 \in X$ e dado uma bola aberta $B(Tx_0;\ \epsilon)$ em Y, temos que $T^{-1}(B(Tx_0;\ \epsilon))$ é um aberto de X que contém x_0. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0;\ \delta) \subset T^{-1}(B(Tx_0;\ \epsilon))$ e portanto $T(B(x_0;\ \delta)) \subset B(Tx_0;\ \epsilon)$, ou seja, T é contínua em x_0. Como $x_0 \in X$ foi arbitrário, T é contínua. $\square$

A convergência de sequências em um espaço métrico arbitrário $X = (X, d)$ é bastante semelhante ao conceito básico de convergência de sequências em Cálculo, ou seja, podemos considerar uma sequência (x_n) de elementos $x_1,\ x_2, \ldots$ de X e usar a métrica d para definir convergência de forma análoga à do Cálculo. Vamos então definir o conceito de convergência em espaços métricos.

Definição 2.2.6 (Convergência de Sequência). *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita **convergente** se existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Nesse caso, x é chamado o limite de (x_n), e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{ou, simplesmente,} \quad x_n \longrightarrow x.$$

*Dizemos que (x_n) **converge** para x ou tem limite x. Se (x_n) não é convergente, dizemos que (x_n) é **divergente**.*

Da definição acima, vemos que d produz a sequência de números reais $a_n = d(x_n,\ x)$ cuja convergência define (x_n). Portanto, se $x_n \longrightarrow x$, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x;\ \epsilon)$ para $n > N$. Vejamos agora um resultado importante de sequência convergente em um espaço métrico.

Lema 2.2.1. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Então:*

(a) Uma sequência convergente em X é limitada e seu limite é único.

(b) Se $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em X, então $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$.

Demonstração: (a) Suponha que $x_n \longrightarrow x$. Então, tomado $\epsilon = 1$, podemos encontrar um N tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Consequentemente, pela desigualdade triangular $(M3)$ (Definição 2.1.1), para todo n temos $d(x_n, x) < L$ em que

$$L = \max\{1, d(x_1, x), \ldots, d(x_N, x)\}.$$

Portanto, (x_n) é limitada. Assumindo que $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow z$, para $z \in X$, obtemos de $(M3)$

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, x_n) + d(x_n, z) \longrightarrow 0 + 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$, ou seja, $d(x, z) = 0$, e de $(M1)$, temos a unicidade do limite, $x = z$.
(b) Da Observação 2.1.1, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Logo,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y). \tag{2.1}$$

Similarmente,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y),$$

ou seja

$$-(d(x, x_n) + d(y_n, y)) \leq d(x_n, y_n) - d(x, y). \tag{2.2}$$

Assim, de (2.1) e (2.2), temos

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$. □

A seguir, apresentemos o importante conceito de conjunto compacto em espaços métricos, em que a definição de conjunto compacto abaixo, é a definição na qual chamamos de compacidade sequencial.

Definição 2.2.7 (Conjunto Compacto). *Um espaço métrico X é dito* ***compacto*** *se toda sequência em X possui uma subsequência convergente em X. Um subconjunto $K \subset X$ é compacto se toda sequência em K possui uma subsequência que converge em X para algum elemento de K.*

O próximo resultado é um teorema sobre o fecho de um subconjunto de um espaço métrico X, que nos mostra outra maneira de dizer que um subconjunto de X é fechado.

Teorema 2.2.2 (Fecho, Conjunto Fechado). *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) e $\overline{M}$ seu fecho, conforme definido na seção anterior. Então:*

(a) $x \in \overline{M}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \longrightarrow x$.

(b) M é fechado se, e somente se, para todo $x_n \in M$, com $x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.

Demonstração: (a) $(\Rightarrow)$ Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, considere a sequência $(x_n) = (x, x, \ldots)$, constante. É claro que $x_n \longrightarrow x \in M$. Por outro lado, se $x \notin M$, sabemos que x é um ponto de acumulação de M. Daí, $\forall\ n \in N,\ \exists\ x_n \in B(x;\ 1/n) \cap M$; ou seja, $x_n \in M$ e $d(x_n, x) < 1/n, \forall\, n \in N$. Portanto, $x_n \longrightarrow x$, quando $n \longrightarrow \infty$ e $(x_n) \subset M$.
$(\Leftarrow)$ Se $(x_n) \subset M$ e $x_n \longrightarrow x$, então $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x) < \epsilon,\ \forall\, n > n_0$. Então, x é um ponto de acumulação de M, ou seja, $\forall\ \epsilon > 0,\ B(x;\ \epsilon) \cap (M - \{x\}) \neq \emptyset$. Poranto, $x \in \overline{M}$.

(b) Sabemos que M é fechado se, e somente se, $M = \overline{M}$, assim (b) segue diretamente de (a). $\square$

Os conjuntos compactos possuem algumas propriedades importantes. O último resultado dessa seção é um resultado clássico envolvendo conjuntos compactos.

Proposição 2.2.1. *Seja X um espaço métrico, se $K \subset X$ é compacto, então K é fechado e limitado em X.*

Demonstração: Sabemos que, pelo Teorema 2.2.2, para todo $x \in \overline{K}$ existe uma sequência (x_n) em K tal que $x_n \longrightarrow x$. Como K é compacto, $x \in K$. Logo, K é fechado, pois $x \in \overline{K}$ era arbitrário. Agora, mostremos que K é limitado. Se K fosse ilimitado, conteria uma sequência ilimitada (y_n) tal que $d(y_n, b) > n$, em que b é qualquer elemento fixo. Essa sequência não poderia ter uma subsequência convergente, pois uma subsequência convergente deve ser limitada, pelo Lema 2.2.1. Portanto, K é limitado. $\square$

2.3 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY E ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Como veremos no Capítulo 3, o Teorema do Ponto Fixo de Banach é válido em espaços métricos completos. Nesta seção, entenderemos melhor como são esses espaços. Para isso, vamos precisar do conceito de sequência de Cauchy.

Definição 2.3.1 (Sequência de Cauchy). *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico $X = (X, d)$ é dita ser de **Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \qquad \forall\, m,\ n > N. \tag{2.3}$$

Em outras palavras, uma sequência é de Cauchy quando seus termos se tornam cada vez mais próximos à medida que n cresce. Observe também que uma sequência $(x_n) \subset Y \subset X$

num subconjunto Y não fechado de um espaço métrico (X, d) poderia ser convergente em X mas não em Y. Por outro lado, se (x_n) é de Cauchy em X, também é de Cauchy em Y.

Notemos que o conceito de convergência não é uma propriedade intrínseca da própria sequência, mas também depende do espaço em que a sequência se encontra. Em outras palavras, uma sequência convergente não é convergente "por si só", mas deve convergir para algum ponto no espaço.

Embora a condição (2.3) não seja suficiente para a convergência, vale ressaltar que ela continua sendo necessária para a convergência. De fato, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.1 (Sequência convergente). *Toda sequência convergente (x_n) em um espaço métrico (X, d) é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Se $x_n \longrightarrow x$, então para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, n > N.$$

Logo, pela desigualdade triangular, obtemos, para $m,\ n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim, $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Isso mostra que (x_n) é de Cauchy. □

Observemos que a recíproca da proposição acima não é válida. Por exemplo, seja a sequência $(x_n) \in \mathbb{Q}$ em $(\mathbb{R}, d)$, convergindo para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então, (x_n) é de Cauchy, mas não converge para $(\mathbb{Q}, d)$.

Os Teoremas 2.3.2 e 2.3.3 a seguir, são de vital importância para mostrar que a reta real é um espaço métrico completo, como veremos adiante.

Teorema 2.3.2. *Toda sequência de Cauchy em $(X,\ d)$ é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(X,\ d)$. Então, para $\epsilon = 1$, existe N, tal que

$$d(x_n,\ x_m) < 1, \qquad \forall\, m,\ n > N.$$

Logo, o conjunto $A = \{x_{N+1},\ x_{N+2}, \ldots\}$ é limitado, pois está contido numa bola cujo diâmetro é menor do que 1. Por outro lado, o conjunto restante $B = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_N\}$ é finito e, portanto, limitado. Segue-se que a sequência (x_n) é limitada, uma vez que é a união de dois conjuntos limitados A e B. $\square$

Repare que a recíproca desse Teorema não é válida. Por exemplo, a sequência $(x_n) = ((-1)^n)$ em $(\mathbb{R}, d)$ é limitada mas não é de Cauchy.

Teorema 2.3.3. *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (X, d) e (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Se (x_{n_k}) é convergente, então (x_n) também é convergente e converge para o mesmo limite.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n), tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$, com $x \in X$. Seja $\epsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, para $\epsilon/2$, existe N_1, tal que

$$d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, m,\ n > N_1. \tag{2.4}$$

Como $x_{n_k} \longrightarrow x$, existe N_2, tal que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, n_k > N_2. \tag{2.5}$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, por (2.4), (2.5) e pela desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $x_n \longrightarrow x$. Ou seja, (x_n) é convergente. $\square$

Do Teorema 2.3.3, podemos concluir que uma sequência de Cauchy não converge num espaço somente quando "faltam pontos no espaço". Quando esses pontos não faltam chamamos o espaço de completo. Como segue a definição.

Definição 2.3.2 (Espaço Métrico Completo). *Um espaço métrico $X = (X, d)$ é dito ser **completo** se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X (isto é, tem um limite que é um elemento de X).*

De forma mais geral, nota-se da definição que os espaços métricos completos são precisamente aqueles em que a condição de Cauchy (2.3) é necessária e suficiente para a convergência. A seguir, mostremos que a reta real é um espaço métrico completo.

Teorema 2.3.4 (Reta real). *A reta real é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.2, toda sequência de Cauchy é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Ver Apêndice A, Teorema A.1), toda sequência limitada de números reais, possui subsequência convergente. Daí, pelo Teorema 2.3.3, toda sequência de Cauchy que possui subsequência convergente também é convergente. Portanto, $(\mathbb{R}, d)$ é completo. $\square$

Grande número de resultados básicos dependem da completude dos espaços correspondentes. Por exemplo, a completude da reta real $\mathbb{R}$ também é a principal razão pela qual em Cálculo usamos $\mathbb{R}$ em vez dos racionais $\mathbb{Q}$ (o conjunto de todos os números racionais com a métrica induzida de $\mathbb{R}$).

Vamos continuar e terminar esta seção com dois teoremas relacionados à convergência e completude.

Teorema 2.3.5 (Subconjunto Completo). *Um subconjunto M de um espaço métrico completo X é completo se, e somente se, M é fechado em X.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que M é completo. Pelo Teorema $2.2.2(a)$, para todo $x \in \overline{M}$ existe uma sequência (x_n) em M que converge para x. Como (x_n) é de Cauchy, pelo Teorema 2.3.1 e do fato de M ser completo, (x_n) converge em M. Logo, $x \in M$. Portanto, M é fechado em X.
$(\Leftarrow)$ Suponha que M é fechado em X e seja (x_n) de Cauchy em M. Então, (x_n) converge para $x \in X$, implicando que $x \in \overline{M}$ pelo Teorema $2.2.2(a)$ e, portanto, x "pertence a" M, pois $M = \overline{M}$, por hipótese. Portanto, a sequência arbitrária de Cauchy (x_n) converge em M, ou seja, M é completo. $\square$

O último resultado dessa seção mostra a importância da convergência de sequências em conexão com a continuidade de uma aplicação.

Teorema 2.3.6 (Aplicação Contínua). *Uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ de um espaço métrico (X, d) em um espaço métrico (Y, d') é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, e somente se,*

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \textit{implica} \quad Tx_n \longrightarrow Tx_0.$$

Demonstração: Suponha que T seja contínua em x_0, pela Definição 2.2.5, para um dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{implica} \quad d'(Tx, Tx_0) < \epsilon.$$

Seja $x_n \longrightarrow x_0$. Então, existe N tal que para todo $n > N$, temos

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

Consequentemente, para todo $n > N$,

$$d'(Tx_n, Tx_0) < \epsilon.$$

Portanto, por definição, $Tx_n \longrightarrow Tx_0$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \text{implica} \quad Tx_n \longrightarrow Tx_0$$

e provemos que T é contínua am x_0. Suponha, por absurdo, que T não fosse contínua em x_0. Então, existe $\epsilon > 0$, tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \neq x_0$, satisfazendo

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{mas} \quad d'(Tx, Tx_0) \geq \epsilon.$$

Em particular, para $\delta = 1/n$ existe x_n satisfazendo

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{mas} \quad d'(Tx_n, Tx_0) \geq \epsilon.$$

Logo, $x_n \longrightarrow x_0$, mas (Tx_n) não converge para Tx_0. Contradição, pois $Tx_n \longrightarrow Tx_0$, por hipótese. Portanto, T é contínua em x_0, □

2.4 EXEMPLOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Nesta seção, apresentaremos três exemplos de espaços métricos completos. Para mais exemplos de espaços métricos completos, ver Kreyszig (1991).

Vimos anteriormente, no Teorema 2.3.4, que $\mathbb{R}$ é completo. Nosso primeiro exemplo, vamos generalizar esse resultado mostrando que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo. Vejamos a seguir.

Exemplo 2.4.1. *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração: Como visto no Exemplo 2.1.2, sabemos que a métrica em $\mathbb{R}^n$ (a métrica Euclidiana) é definida por

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

em que $x = (\xi_i)$ e $y = (\eta_i)$. Consideremos qualquer sequência de Cauchy (x_m) em $\mathbb{R}^n$, escrevendo $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$. Como (x_m) é Cauchy, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que

$$d(x_m, x_r) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2\right]^{\frac{1}{2}} < \epsilon, \qquad \forall\, m,\ r > N. \tag{2.6}$$

Elevando ao quadrado em ambos os lados, temos para $m,\ r > N$ e $i = 1, \ldots, n$

$$(\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(r)})^2 < \epsilon^2 \qquad \text{e} \qquad |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{r}| < \epsilon.$$

Isso mostra que para cada i fixado, $(1 \leq i \leq n)$, a sequência $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Ela converge pelo Teorema 2.3.4, digamos, $\xi_i^{(m)} \longrightarrow \xi_i$ quando $m \longrightarrow \infty$. Usando esses n limites, definimos $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Claramente, $x \in \mathbb{R}^n$. De (2.6), com $r \longrightarrow \infty$,

$$d(x_m, x) \leq \epsilon, \qquad \forall\, m > N.$$

Isso mostra que x é o limite de (x_m). Como (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária, temos que toda sequência de Cauchy é convergente em $\mathbb{R}^n$. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é completo. □

O Exemplo 2.4.2 a seguir, será útil para a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach em equações lineares (Capítulo 4).

Exemplo 2.4.2. *O espaço X de todas as n-uplas ordenadas $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de números reais com a métrica*

$$d(x, y) = \max_j |\xi_j - \eta_j|$$

onde $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, é um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja (x_m) uma sequência de Cauchy em X; escrevendo $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$. Como (x_m) é Cauchy, para todo $\epsilon > 0$, existe N tal que

$$d(x_m, x_r) = \max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall\, m,\ r > N.$$

Como (x_m) é uma sequência de Cauchy e $\xi_j^{(m)} \in \mathbb{R}$, para $j = 1,\ 2, \ldots, n$. Então, $(\xi_j^{(m)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é completo. Então $(\xi_j^{(m)})$ é convergente em $\mathbb{R}$. Digamos $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ em $\mathbb{R}$, quando $m \longrightarrow \infty$, com $j = 1,\ 2, \ldots, n$. Então,

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad j = 1,\ 2, \ldots, n.$$

Logo,

$$\max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $x = (\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$, com $\xi_j \in \mathbb{R}$. Então, $x \in X$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \\ &= \max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)} + \xi_j^{(r)} - \xi_j| \\ &\leq \max_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| + \max_j |\xi_j^{(r)} - \xi_j| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(x_m, x) < \epsilon$, como (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária, temos que toda sequência de Cauchy é convergente em X. Portanto, (X, d) é completo. □

Da Observação 2.1.2, vimos que a métrica d definida no exemplo acima é equivalente à métrica Euclidiana e, portanto, $\mathbb{R}^n$ é completo segundo essa métrica também.

O próximo exemplo será de grande importância para demonstrarmos o teorema de existência e unicidade de solução para o problema de equações diferenciais ordinárias e para equações integrais (Capítulo 4).

Exemplo 2.4.3. *O espaço das funções $C[a, b]$ é completo, segundo a métrica do máximo.*

Demonstração: Seja (f_m) uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$. Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe N tal que para todo $m,\ n > N$ temos

$$d(f_m, f_n) = \max_{t \in J} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon \tag{2.7}$$

em que $J = [a, b]$. Logo, para qualquer $t = t_0 \in J$ fixado,

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \epsilon, \qquad \forall\, m,\ n > N.$$

Isso mostra que $(f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo (Teorema 2.3.4), a sequência converge, digamos $f_m(t_0) \longrightarrow f(t_0)$ quando $m \longrightarrow \infty$. Dessa maneira, podemos associar com cada $t \in J$ um único número real $f(t)$. Isso define (pontualmente) uma função f em J, e mostremos que $f \in C[a, b]$ e $f_m \longrightarrow f$. De (2.7) com $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\max_{t \in J} |f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \qquad \forall\, m > N.$$

Logo, para todo $t \in J$,

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \epsilon, \qquad \forall\, m > N.$$

Isso mostra que $(f_m(t))$ converge para $f(t)$ uniformimente em J. Como as $f_m{}'s$ são contínuas em J e a convergência é uniforme, a função limite f é contínua em J, como é bem conhecido da Análise. Logo, $f \in C[a, b]$. Também, $f_m \longrightarrow f$. Portanto, $C[a, b]$ é completo. $\square$

3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E VERSÕES

Neste capítulo, iremos enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach ou Teorema das Contrações, no qual se apresenta em espaços métricos completos, e exibiremos algumas de suas versões.

3.1 PONTO FIXO E CONTRAÇÃO

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é importante como fonte de teoremas de existência e unicidade em diferentes ramos de análise. Dessa forma, o teorema fornece uma ilustração impressionante do poder unificador dos métodos analíticos funcionais e da utilidade dos teoremas de ponto fixo na análise. Os resultados dessa seção são baseados na referência Kreyszig (1991).

Para que possamos apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, precisamos entender o conceito de ponto fixo. Para isso, cosideremos a seguinte definição.

Definição 3.1.1 (Ponto Fixo). *Sejam $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação e $x \in X$. Dizemos que x é um* ***ponto fixo*** *de T quando $Tx = x$, ou seja, a imagem Tx coincide com x.*

Nesse trabalho, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Porém, existem outros dois Teoremas de Ponto Fixo que valem serem mencionados. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que assegura, sob certas condições, a existência de ao menos um ponto fixo para uma função, esse tipo de teorema é denominado "teoremas de existência". Também, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, que afirma que, em um dado subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach, toda função contínua nesse subconjunto, tem um ponto fixo, não necessariamente único. Para mais aprofundamento, ver Castelli (2016).

Vejamos alguns exemplos de ponto fixo.

Exemplo 3.1.1. *Uma translação não tem pontos fixos. De fato, considere a aplicação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $Tx = x + 1$. Se T tem um ponto fixo, então*

$$Tx = x \Rightarrow x + 1 = x \Rightarrow 1 = 0.$$

Um absurdo, então T não tem pontos fixos.

Exemplo 3.1.2. *A aplicação $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $Tx = x^2$, tem dois pontos fixos. De fato, temos que:*

$$Tx = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0.$$

Assim, $x = 0$ e $x = 1$ são os pontos fixos de T.

Exemplo 3.1.3. *A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $Tx = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tem infinitos pontos fixos. De fato, temos que:*

$$Tx = x \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, qualquer ponto tal que $\xi_2 = 0$ é um ponto fixo da aplicação T, ou seja, infinitos pontos fixos (todos os pontos do eixo-ξ_1).

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, que enunciaremos mais adiante, fornece condições suficientes para a existência (e unicidade) de um ponto fixo para uma classe de aplicações, chamadas de contrações. A definição é a seguinte.

Definição 3.1.2 (Contração). *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ é denominada **contração** em X se existe um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x,\ y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1.4. *Considere $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ com a métrica usual em $\mathbb{R}$. Seja a aplicação $T : X \longrightarrow X$, dada por $Tx = x/2 + x^{-1}$. T é uma contração. De fato, temos que*

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(x-y) - \frac{1}{xy}(x-y) \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right)(x-y) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| |x-y|. \end{aligned}$$

Mas, $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{xy} \leq \dfrac{1}{2}$ para $x,\ y \geq 1$. Logo,

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} d(x, y).$$

Portanto, T é uma contração com constante de contração $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 3.1.5 (Aplicação Lipschitziana). *Sejam X e Y espaços méricos, uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é dita **Lipschitziana** em X, se existe $k > 0$ real tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Daí temos que uma contração é um caso particular de uma aplicação Lipschitziana, em que $X = Y$ e $k < 1$.

Observação 3.1.1. *Do Exemplo 3.1.5, podemos concluir que toda contração é uma aplicação Lipschitziana, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.*

Alguns autores enunciam o Teorema do Ponto Fixo de Banach usando a aplicação contração como uma consequência da aplicação de Lipschitz, com algumas condições, assim como na Observação 3.1.1. Para mais detalhes ver Trindade (2019) e Brooks e Schmitt (2009).

Como vimos nos Exemplos 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, os pontos fixos de uma dada aplicação T não precisam necessariamente ser únicos, mas é do nosso interesse que o ponto fixo seja único. Assim, temos o seguinte lema.

Lema 3.1.1 (Unicidade do Ponto Fixo). *Seja $(X,\, d)$ um espaço métrico. Se a aplicação $T : X \longrightarrow X$ é uma contração e T tem um ponto fixo, então esse ponto fixo é único.*

Demonstração: Suponha por absurdo que x e $\bar{x}$ são pontos fixos de T com $x \neq \bar{x}$, ou seja, $Tx = x$ e $T\bar{x} = \bar{x}$. De (3.1), temos

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x}).$$

Como $\alpha < 1$, então $d(x, \bar{x}) < d(x, \bar{x})$. Um absurdo. Logo, $x = \bar{x}$, ou seja, o ponto fixo de T é único. □

A seguir apresentaremos um resultado que diz respeito à continuidade da contração T.

Lema 3.1.2 (Continuidade). *Uma contração T em um espaço métrico X é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Seja $T : X \longrightarrow X$ uma contração no espaço métrico $(X,\, d)$, com $0 < \alpha < 1$ e $\bar{x} \in X$. Seja $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon/\alpha$, de modo que $d(x, \bar{x}) < \delta$. Então,

$$d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x}) < \alpha \cdot \delta = \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon.$$

Logo, T é contínua em $\bar{x}$. Como $\bar{x}$ era arbitrário, T é contínua em X. □

3.2 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será enunciado e demonstrado abaixo, é um teorema de existência e unicidade para pontos fixos de aplicações que são contrações, e também fornece um procedimento construtivo para obter aproximações cada vez melhores do ponto fixo (a solução do problema prático). Esse procedimento é chamado de **iteração**. Por definição, este é um método tal que escolhemos um x_0 arbitrário em um determinado conjunto e calculamos recursivamente uma sequência $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots$ a partir da expressão

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

isto é, escolhemos um x_0 arbitrário e determinamos sucessivamente $x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \cdots$.

Com os resultados da seção anterior podemos então enunciar e demonstrar o importante Teorema do Ponto Fixo de Banach, que garante a existência e a unicidade de pontos fixos por uma contração em um espaço métrico completo.

Teorema 3.2.1 (Ponto fixo de Banach). *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$ em que $X \neq \emptyset$. Suponha que X seja completo e seja $T : X \longrightarrow X$ uma contração em X. Então T tem precisamente um ponto fixo.*

Demonstração: Iremos construir uma sequência (x_n) em X e mostraremos que essa sequência é uma sequência de Cauchy, de modo que converge no espaço completo X, e então provaremos que seu limite x é um ponto fixo de T e, pelo Lema 3.1.1, concluiremos a unicidade de x. Esta é a ideia da demonstração.

Seja $x_0 \in X$ e definimos a sequência iterativa (x_n) por

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \quad \ldots, \quad x_n = T^nx_0, \quad \ldots, \tag{3.2}$$

na qual podemos observar que é a sequência das imagens de x_0 por repetidas aplicações de T. Mostremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por (3.1) e (3.2), temos que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) &= d(Tx_{m-1}, Tx_m) \\ &\leq \alpha d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \alpha d(Tx_{m-2}, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-2}, x_{m-1}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Assim, da desigualdade triangular e a fórmula da soma de uma progressão geométrica, para $n > m$, obtemos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \ldots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$ e no numerador temos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Logo,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \qquad \forall\, n > m. \tag{3.4}$$

Do lado direito de (3.4), $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ é constante, de modo que podemos tornar o lado direito tão pequeno quanto quisermos tomando m suficientemente grande $(n > m)$. De fato, tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, temos

$$\lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m}{1-\alpha}.$$

Como $0 < \alpha < 1$, $\alpha^m \longrightarrow 0$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m}{1-\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0,$$

para $n > m$. Isso prova que (x_m) é de Cauchy. Como X é completo, (x_m) converge para algum $x \in X$, digamos, $x_m \longrightarrow x$. Mostremos que este limite x é um ponto fixo da aplicação T. Da desigualdade triangular e (3.1), temos

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

e podemos tornar a soma na terceira linha menor do que qualquer $\epsilon > 0$ pré-atribuído, pois $x_m \longrightarrow x$. Portanto, tomando o limite para $m \longrightarrow \infty$, temos, $d(x, Tx) \leq 0$. Logo, $d(x, Tx) = 0$, então $x = Tx$, pela definição de espaço métrico. Isso mostra que x é um ponto fixo de T. A unicidade de x é garantida pelo Lema 3.1.1. Portanto, a aplicação T tem precisamente um ponto fixo. $\square$

O próximo resultado diz respeito às estimativas de erro que a sequência iterativa (3.2) possui ao convergir para o único ponto fixo de T.

Corolário 3.2.1 (Iteração, limites de erro). *Nas condições do Teorema 3.2.1 a sequência iterativa (3.2) com $x_0 \in X$ arbitrário converge para o único ponto fixo x de T, com as estimativas de erro dadas pelas expressões*

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \tag{3.5}$$

e

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m), \tag{3.6}$$

*chamadas de **estimativas a priori e a posteriori**, respectivamente.*

Demonstração: A primeira afirmação é óbvia, pois vimos na demostração do Teorema 3.2.1 que a sequência iterativa converge para o único ponto fixo de T, isto é, $x_n \longrightarrow x$, com $x_0 \in X$ arbitrário. Usando esse resultado de que $x_n \longrightarrow x$, a desigualdade (3.5) segue diretamente de (3.4), fazendo $n \longrightarrow \infty$. Resta-nos, verificar a desigualdade (3.6). Tomemos $m = 1$ e escrevemos y_0 para x_0 e y_1 para x_1, daí, segue de (3.5) que:

$$d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

Agora, fazendo $y_0 = x_{m-1}$, temos $y_1 = Ty_0 = Tx_{m-1} = x_m$ e, dessa forma, obtemos a desigualdade (3.6) e concluímos a demonstração. □

O limite de erro a priori (3.5) pode ser usado no início de um cálculo para estimar o número de etapas necessárias para obter uma determinada precisão. O limite de erro a posteriori (3.6) pode ser usado em estágios intermediários para verificar se estamos possivelmente convergindo mais rápido do que o sugerido por (3.5). Percebe-se que se duas iterações sucessivas x_m e $x_{m+1} = T(x_m)$ forem quase iguais, isso garante proximidade do verdadeiro ponto fixo x.

Uma versão do teorema do ponto fixo útil em alguns contextos é o teorema abaixo.

Teorema 3.2.2 (Contração em uma bola). *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico completo e a aplicação $T : X \longrightarrow X$. Suponha que T é uma contração, com constante de contração α, com $0 < \alpha < 1$, em uma bola fechada centrada em x_0 $Y = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$, isto é, T satisfaz (3.1) para todo $x,\ y \in Y$. Além disso, assuma que*

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r. \tag{3.7}$$

Então a sequência iterativa (3.2) converge para algum $x \in Y$. Esse x é um ponto fixo de T e é o único ponto fixo de T em Y.

Demonstração: Nós apenas temos que mostrar que, todas $x_m{}'$s, bem como x, estão em Y. Fazendo $m = 0$ em (3.4), mudando n para m e usando (3.7), obtemos:

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, Tx_0) < \frac{1}{1-\alpha} \cdot (1-\alpha) r = r.$$

Ou seja, $d(x_m, x_0) \leq r$. Logo, todos $x_m{}'$s estão em Y. Também, temos que $x \in Y$ pois $x_m \longrightarrow x$ e Y é fechado. Então, pelo Teorema 2.3.5, Y é completo. Daí, segue do Teorema 3.2.1, que x é o único ponto fixo de T. $\square$

A seguir, apresentaremos um resultado importante que será útil mais à frente no Capítulo 4, que diz respeito a aplicação T^m ser uma contração para algum m, a qual também pode ser considerada uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Lema 3.2.1 (Ponto Fixo). *Seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação em um espaço métrico completo $X = (X, d)$ e suponha que T^m seja uma contração em X, para algum inteiro positivo m. Então T tem um único ponto fixo.*

Demonstração: Como T^m é uma contração em X, segue do Teorema 3.2.1 que T^m tem um único ponto fixo $x \in X$, ou seja,

$$x = T^m x.$$

Então, aplicando T na equação acima, temos que

$$Tx = TT^m x = T^m(Tx).$$

Logo, Tx é um ponto fixo de T^m. Mas, x também é ponto fixo de T^m. Consequentemente, pela unicidade de tal ponto fixo, $Tx = x$. Portanto, T tem um único ponto fixo, a saber, o mesmo ponto fixo de T^m. $\square$

3.3 CONTRAÇÕES FRACAS

Nesta seção apresentaremos versões ou extensões do Teorema do Ponto Fixo de Banach. A extensão que apresentaremos agora é devida ao matemático M. Edelstein, que diz respeito a uma subsequência da sequência das iteradas (x_n), sendo que aqui $\alpha = 1$. Os resultados dessa seção são baseados na referência Brooks e Schmitt (2009).

Antes, consideremos o seguinte: dizemos que uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ é dita uma **contração fraca** se

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \qquad \forall\, x,\; y \in X.$$

O exemplo a seguir mostra que uma contração fraca pode não ter ponto fixo.

Exemplo 3.3.1. *Seja* $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ *com a métrica usual*

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad \forall\, x,\; y \in X,$$

e seja $T : X \longrightarrow X$*, dada por*

$$Tx = x + \frac{1}{x}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| (x - y) - \frac{1}{xy}(x - y) \right| \\ &= \left| \left(1 - \frac{1}{xy}\right)(x - y) \right| \\ &= \left(1 - \frac{1}{xy}\right)|x - y|. \end{aligned}$$

Mas, $1 - \dfrac{1}{xy} < 1$ *para* $x,\; y \geq 1$*. Logo,*

$$d(Tx, Ty) < |x - y| = d(x, y).$$

Portanto, T *é uma contração fraca. Por outro lado, repare que não existe uma constante* α*,* $0 \leq \alpha < 1$*, tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\, x,\; y \in X.$$

De fato, dado qualquer α*,* $0 < \alpha < 1$*. Tome* $\epsilon = 1 - \alpha > 0$ *e escolha* $x_0 = 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$ *e* $y_0 = 1$*. Então, segue-se que* $x_0, y_0 \in X$ *e* $d(Tx_0,\; Ty_0) > \alpha d(x_0,\; y_0)$ *(verifique!). Além disso,* T *não tem pontos fixos em* X*. De fato, se* $Tx = x$*, teríamos*

$$x + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0,$$

o que não é possível.

O exemplo acima nos diz que se substituirmos a hipótese no teorema do ponto fixo de que T é uma contração pela hipótese menos restritiva de que T é uma contração fraca, então T não necessariamente tem um ponto fixo. Contudo, temos o seguinte resultado devido a Edelstein (1961), que garante a existência e unicidade de ponto fixo para uma contração fraca.

Teorema 3.3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico e seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação tal que*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \qquad \forall\, x,\ y \in X,\ x \neq y.$$

Além disso, assuma que exista $z \in X$ tal que a sequência das iteradas (x_n), dada por

$$x_0 = z,$$

$$x_n = Tx_{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

tem a propriedade de que existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n), com

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = y \in X.$$

Então, y é o único ponto fixo de T.

Demonstração: Lembrando que $x_n = T^n x_0$, podemos escrever $y_j = T^{n_j} x_0 = T^{n_j} z$, em que a sequência (n_j) é a dada na hipótese do teorema. Suponhamos por absurdo que T não tenha pontos fixos, ou seja, $Tx \neq x, \forall\, x \in X$. Então, a função $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ definida por

$$f(x) = \frac{d(T^2x, Tx)}{d(Tx, x)},$$

é uma função contínua em X, pois é composta e quociente de funções contínuas, desde que a métrica d é contínua pelo Exemplo 2.2.3 e a contração T é contínua pelo Lema 3.1.2. Também, por hipótese T não tem pontos fixos, ou seja $Tx \neq x, \forall\, x \in X$, e como o contradomínio da métrica d é $[0, \infty)$, temos que T está bem definida.

Como a sequência (y_j) converge para y, pela Definição 2.2.7, o conjunto K, dado por

$$K = \{y_1, y_2, \ldots\} \cup \{y\}$$

é compacto e, portanto, sua imagem por f é compacto (Ver Apêndice A).

Por outro lado, como

$$f(x)d(Tx, x) = \frac{d(T^2x, Tx)}{d(Tx, x)} d(Tx, x) = d(T^2x, x) = d(T(Tx), Tx) < d(Tx, x), \qquad \forall\, x \in X,$$

segue que $f(x) < 1, \forall\, x \in X$, e, como K é compacto, existe uma constante positiva $c < 1$, tal que

$$f(x) \leq c, \qquad \forall\, x \in K.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} d(T^2z, Tz) &= \frac{d(T^2z, Tz)}{d(Tz, z)} d(Tz, z) \\ &= f(z)d(Tz, z) \\ &= f(T^0z)d(Tz, z), \end{aligned}$$

também,

$$\begin{aligned} d(T^3z, T^2z) &= \frac{d(T^2z, Tz)}{d(Tz, z)}\frac{d(T^3z, T^2z)}{d(T^2z, Tz)}d(Tz, z) \\ &= f(z)f(Tz)d(Tz, z) \\ &= f(T^0z)f(Tz)d(Tz, z). \end{aligned}$$

Generalizando, para qualquer inteiro positivo m, temos que

$$d(T^{m+1}z, T^mz) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} f(T^iz)\right) d(Tz, z).$$

Logo, para $m = n_j$, temos

$$d(T^{n_j+1}z, T^{n_j}z) = d(T(T^{n_j}z), T^{n_j}z) = \left(\prod_{i=0}^{n_j-1} f(T^iz)\right) d(Tz, z),$$

e, como $f(T^iz) \leq c < 1$, obtemos que

$$d(Ty_j, y_j) = d(T(T^{n_j}z), T^{n_j}z) \leq c^{n_j-1}d(Tz, z). \tag{3.8}$$

Por outro lado, quando $j \longrightarrow \infty$, $y_j \longrightarrow y$ e pela continuidade de T (Teorema 2.3.6)

$$Ty_j \longrightarrow Ty,$$

e, também

$$c^{n_j-1} \longrightarrow 0,$$

pois $0 \leq c < 1$. Assim, como $d(Tz, z)$ é constante, de (3.8) obtemos que

$$\lim_{j\to\infty} d(Ty_j, y_j) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d(Ty, y) = 0.$$

Um absurdo, pois $Ty \neq y$. Portanto, temos que $x_{n_j} \longrightarrow x \in X$ implica em $Tx = x$, ou seja, x é um ponto fixo de T. □

Para finalizar essa seção apresentaremos um teorema, que é consequência do resultado acima, o qual envolve um subconjunto compacto de X.

Teorema 3.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico e seja $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação tal que*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \qquad \forall\, x,\ y \in X,\ x \neq y.$$

Suponha ainda que

$$T : X \longrightarrow K,$$

em que K é um subconjunto compacto de X. Então T tem um único ponto fixo em X.

Demonstração: Como K é compacto, segue que para todo $z \in X$ a sequência $(T^n z)$ tem uma subsequência convergente. Logo, o Teorema 3.3.1 pode ser aplicado. Portanto, T tem um único ponto fixo em X.

Alternativamente, uma maneira direta de ver o que foi dito acima é a seguinte. Por hipótese, temos a restrição $T : K \longrightarrow K$, e a função $g : K \longrightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$g(x) = d(Tx, x)$$

é uma função contínua em K e deve assumir seu mínimo, digamos, em um ponto $y \in K$. Se $Ty \neq y$, então

$$g(Ty) = d(T^2y, Ty) = d(T(Ty), Ty) < d(Ty, y) = g(y),$$

ou seja, existe um $w = d(T^2y, Ty) < d(Ty, y) = y$ contradizendo o fato de que $g(y) = d(Ty, y)$ é o valor mínimo. Portanto, $Ty = y$. $\square$

3.4 DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DO PARÂMETRO

Nesta seção apresentaremos um resultado no qual a aplicação contração também depende de outra variável (parâmetro), no qual se a dependência for contínua, então o ponto fixo também dependerá continuamente desse parâmetro. Mais precisamente, temos o seguinte resultado. Os resultados desta seção são baseados na referência Brooks e Schmitt (2009).

Teorema 3.4.1. *Sejam (Λ, d') um espaço métrico, (X, d) um espaço métrico completo e*

$$T : \Lambda \times X \longrightarrow X$$

uma família de contrações com constante de contração uniforme α, $0 \leq \alpha < 1$, isto é,

$$d(T(\lambda, x), T(\lambda, y)) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\, \lambda \in \Lambda,\ \forall\, x,\ y \in X.$$

Além disso, suponha que para cada $x \in X$, x fixo, a aplicação

$$\lambda \mapsto T(\lambda, x)$$

é uma aplicação contínua de Λ para X. Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, $T(\lambda, \cdot)$ tem um único ponto fixo $x(\lambda) \in X$, e a aplicação

$$\lambda \mapsto x(\lambda),$$

é uma aplicação contínua de Λ para X.

Demonstração: O Teorema do Ponto Fixo de Banach pode ser aplicado para cada $\lambda \in \Lambda$ e, portanto, a aplicação $\lambda \mapsto x(\lambda)$ está bem definida. Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, temos que

$$\begin{aligned} d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) &= d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_2))) \\ &\leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_1))) + d(T(\lambda_2, x(\lambda_1)), T(\lambda_2,x(\lambda_2))) \\ &\leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_1))) + \alpha d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1-\alpha)d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) \leq d(T(\lambda_1, x(\lambda_1)), T(\lambda_2, x(\lambda_2))).$$

Assim, pela continuidade de T em relação a λ para cada x fixo, o resultado está provado. □

3.5 APLICAÇÕES DE LIPSCHITZ MONÓTONAS

Nesta seção apresentaremos um resultado que fornece a existência e unicidade de ponto fixo para aplicações que são perturbações da identidade por aplicações de Lipschitz monótonas, sem a hipótese da contração.

Para isso, vamos assumir que X seja um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, o qual também é um espaço de Hilbert. Primeiramente, relembremos e consideremos algumas definições.

Definição 3.5.1 (Espaço Normado). *Seja X um espaço vetorial sobre os números reais ou complexos. Uma aplicação $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada de **norma** se as seguintes condições são satisfeitas:*

(N1) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

(N2) $\|\beta x\| = |\beta|\|x\|$*;*

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$*;*

*em que x e y são vetores arbitrários em X e β é um escalar. Se X é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em X, então o par $(X, \|\cdot\|)$ é denominado **espaço vetorial normado**.*

Definição 3.5.2 (Espaço de Banach). *Se X é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em X, então X torna-se um espaço métrico se definirmos a métrica d por*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

Um espaço vetorial normado que é um espaço métrico completo em relação à métrica d definida anteriormente, é denominado ***espaço de Banach****.*

Definição 3.5.3 (Espaço com produto interno, Espaço de Hilbert). *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X munido de um produto interno definido em X. Um* ***espaço de Hilbert*** *é um espaço com produto interno que é completo (ou seja, completo segundo a métrica definida pelo produto interno). Aqui, um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ no mesmo corpo K sobre o qual X é considerado um espaço vetorial; ou seja, a cada par de vetores x e y está associado um escalar que se escreve*

$$\langle x, y \rangle,$$

denominado o ***produto interno*** *de x e y, tal que para todos os vetores x, y, z e todo escalar β, valem*

(PI1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(PI2) $\langle \beta x, y \rangle = \beta \langle x, y \rangle$

(PI3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(PI4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

Um produto interno em X define uma norma em X dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

e uma métrica em X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Portanto, os espaços com produto interno são espaços normados e os espaços de Hilbert são espaços de Banach.

Seja X um espaço de Banach, que também é um espaço de Hilbert, isto é, X é um espaço com produto interno (sobre o corpo dos números complexos) completo, cujo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, está relacionado com a norma por

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \qquad \forall\, u \in X.$$

Para que possamos apresentar o resultado desta seção, precisaremos que T seja uma aplicação **monótona**, ou seja, a aplicação $T : X \longrightarrow X$ é dita monótona se

$$Re(\langle Tu - Tv, u - v\rangle) \geq 0, \qquad \forall\, u,\ v \in X,$$

em que $Re(c)$ denota a parte real de número complexo c.

Agora estamos em condições de enunciar o teorema a seguir, devido a Zarantonello, (ver Saaty (2012)) que dá a existência de pontos fixos únicos de aplicações que são perturbações da aplicação identidade por aplicações de Lipschitz monótonas, sem a suposição de que sejam contrações. Os resultados dessa seção são baseados na referência Brooks e Schmitt (2009).

Teorema 3.5.1. *Seja X um espaço de Hilbert e seja $T : X \longrightarrow X$, uma aplicação monótona tal que para alguma constante $\beta > 0$*

$$\|Tu - Tv\| \leq \beta\|u - v\| \qquad \forall\, u,\ v \in X.$$

Então, para qualquer $w \in X$, a equação

$$u + Tu = w \tag{3.9}$$

tem uma única solução $u = u(w)$, e a aplicação $w \mapsto u(w)$ é contínua.

Demonstração: Se $\beta < 1$, então a aplicação

$$u \mapsto w - Tu,$$

é uma contração e o resultado segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Agora, consideremos o caso em que $\beta \geq 1$. Notemos que para $\lambda \neq 0$, u é uma solução de

$$u = (1 - \lambda)u - \lambda Tu + \lambda w, \tag{3.10}$$

se, e somente se, u satisfaz (3.9). De fato, se u satisfaz (3.10), temos que

$$\begin{aligned} u = (1-\lambda)u - \lambda Tu + \lambda w &\Leftrightarrow u = u - \lambda u - \lambda Tu + \lambda w \\ &\Leftrightarrow -\lambda u - \lambda Tu + \lambda w = 0 \Leftrightarrow -u - Tu + w = 0 \Leftrightarrow w = u + Tu. \end{aligned}$$

Assim, u satisfaz (3.9). Agora, se u satisfaz (3.9), temos que

$$\begin{aligned} u &= w - Tu = w - Tu - \lambda w + \lambda w + \lambda Tu - \lambda Tu \\ &= (1-\lambda)(w - Tu) - \lambda Tu + \lambda w = (1-\lambda)u - \lambda Tu + \lambda w. \end{aligned}$$

Logo, u satisfaz (3.10). Denotemos por

$$T_\lambda u = (1-\lambda)u - \lambda Tu + \lambda w.$$

Disso, segue que

$$T_\lambda u - T_\lambda v = (1-\lambda)(u-v) - \lambda(Tu - Tv).$$

Logo, usando propriedades do produto interno e a hipótese sobre T, temos que

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda u - T_\lambda v\|^2 &= \|(1-\lambda)(u-v) - \lambda(Tu-Tv)\|^2 \\
&= \langle (1-\lambda)(u-v) - \lambda(Tu-Tv), (1-\lambda)(u-v) - \lambda(Tu-Tv)\rangle \\
&= \|(1-\lambda)(u-v)\|^2 - 2Re(\langle (1-\lambda)(u-v), \lambda(Tu-Tv)\rangle) + \|\lambda(Tu-Tv)\|^2 \\
&= (1-\lambda)^2\|u-v\|^2 - 2Re(\lambda(1-\lambda)\langle Tu-Tv, u-v\rangle) + \lambda^2\|Tu-Tv\|^2 \\
&\leq (1-\lambda)^2\|u-v\|^2 - 2Re(\lambda(1-\lambda)\langle Tu-Tv, u-v\rangle) + \lambda^2\beta^2\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, se $0<\lambda<1$, a monotonicidade de T implica que

$$\|T_\lambda u - T_\lambda v\|^2 \leq ((1-\lambda)^2 + \lambda^2\beta^2)\|u-v\|^2, \tag{3.11}$$

pois

$$-2Re(\lambda(1-\lambda)\langle Tu-Tv, u-v\rangle) \leq 0.$$

Se $\lambda = 1/(\beta^2+1)$, temos $0<\lambda<1$ e

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)^2 + \lambda^2\beta^2 &= \left(1 - \frac{1}{\beta^2+1}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2+1}\beta^2 \\
&= 1 - \frac{2}{\beta^2+1} + \frac{1}{(\beta^2+1)^2} + \frac{1}{\beta^2+1}\beta^2 \\
&= 1 - \frac{2}{\beta^2+1} + (\beta^2+1)\left(\frac{1}{(\beta^2+1)^2}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{\beta^2+1} + \frac{1}{\beta^2+1} \\
&= \frac{\beta^2+1-2+1}{\beta^2+1} = \frac{\beta^2}{\beta^2+1}
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo

$$\lambda = \frac{1}{\beta^2+1},$$

de (3.11), obtemos

$$\|T_\lambda u - T_\lambda v\| \leq \alpha\|u-v\|,$$

sendo

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2+1}}.$$

Logo, T_λ é uma contração. O resultado, portanto, segue por uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Por outro lado, se u e v resolvem (3.9), ou seja, $u + Tu = w_1$ e $v + Tv = w_2$, então

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|^2 &= \|u + Tu - v - Tv\|^2 = \|(u - v) + (Tu - Tv)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 + 2Re(\langle Tu - Tv, u - v\rangle) + \|Tu - Tv\|^2. \end{aligned}$$

A monotonicidade de T, portanto, implica que

$$\|u - v\|^2 + \|Tu - Tv\|^2 \leq \|w_1 - w_2\|^2,$$

da qual, a continuidade da aplicação $w \mapsto u(w)$ segue, uma vez que

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - v\|^2 + \|Tu - Tv\|^2.$$

$\square$

3.6 RECÍPROCA DO TEOREMA

Nesta seção apresentaremos um resultado de Bessaga (1959) que fornece uma recíproca ao Teorema do Ponto Fixo de Banach. Nos baseamos principalmente nas referências Brooks e Schmitt (2009) e Jachymski (2000). Seguimos o tratamento dado em Jachymski (2000); veja também Deimling (2010).

Mais precisamente, o enunciado da recíproca é dado no seguinte teorema.

Teorema 3.6.1. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto, $\alpha \in (0, 1)$ e seja $T : X \longrightarrow X$. Então:*

(1) Se T^n tiver no máximo um ponto fixo para cada $n = 1,\ 2, \ldots$, então existe uma métrica d tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\ x,\ y \in X.$$

(2) Se, além disso, alguma T^n tem um ponto fixo, então existe uma métrica d tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\ x,\ y \in X,$$

e (X,d) é um espaço métrico completo.

Apresentaremos agora o seguinte lema, que será importante na demonstração do Teorema 3.6.1.

Lema 3.6.1. *Seja $T : X \longrightarrow X$ e $\alpha \in (0, 1)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma métrica d, a qual torna X um espaço métrico completo e tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \qquad \forall\, x,\ y \in X.$$

(ii) Existe uma função $\phi : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $\phi^{-1}(\{0\})$ é um conjunto unitário e

$$\phi(Tx) \leq \alpha\phi(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Demonstração: (i)⇒(ii) Suponha que a primeira afirmação seja verdadeira. Então, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que T tem um único ponto fixo, digamos $z \in X$. Definamos

$$\phi(x) = d(x, z), \qquad \forall\, x \in X.$$

Como d é uma métrica em X, $\phi : X \longrightarrow [0, \infty)$ está bem definida. Além disso, temos que

$$\phi(z) = d(z, z) = 0 \Rightarrow z = \phi^{-1}(\{0\}).$$

Pela unicidade de z, segue que $\phi^{-1}(\{0\})$ é um conjunto unitário. Resta verificar que

$$\phi(Tx) \leq \alpha\phi(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Temos que

$$\phi(Tx) = d(Tx, z) = d(Tx, Tz) \leq \alpha d(x, z) = \alpha\phi(x).$$

Portanto, $\phi(Tx) \leq \alpha\phi(x), \forall\, x \in X$.

(ii)⇒(i) Suponha que a segunda afirmação seja verdadeira. Definamos

$$d(x, y) = \begin{cases} \phi(x) + \phi(y), & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Então, d é uma métrica em X. De fato, temos que d está bem definida, pois $\phi : X \longrightarrow [0, \infty)$ e se $(x, y) = (z, w)$ então $d(x, y) = d(z, w)$. Sejam $x,\ y,\ w \in X$. Verifiquemos (M1), (M2) e (M3):

(M1) Temos que

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) + \phi(y) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = -\phi(y).$$

Como $\phi(x) \geq 0, \forall\, x \in X$, temos

$$\phi(x) = -\phi(y) \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y) = 0.$$

Logo, $x,\ y \in \phi^{-1}(\{0\})$. Como $\phi^{-1}(\{0\})$ é um conjunto unitário, então $x = y$. Portanto, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(M2) Temos que

$$d(x, y) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(y) + \phi(x) = d(y, x).$$

Portanto, $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) Temos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \phi(x) + \phi(y) \\ &\leq \phi(x) + \phi(w) + \phi(w) + \phi(y) \\ &= (\phi(x) + \phi(w)) + (\phi(w) + \phi(y)) = d(x, w) + d(w, y). \end{aligned}$$

Portanto, $d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$. Agora, verifiquemos que T é uma contração. Temos que

$$d(Tx, Ty) = \phi(Tx) + \phi(Ty) \leq \alpha\phi(x) + \alpha\phi(y) = \alpha(\phi(x) + \phi(y)) = \alpha d(x, y).$$

Logo, $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$. Portanto, T é uma contração com constante α. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Se tal sequência tiver apenas um número finito de termos distintos, ela converge. Portanto, podemos assumir que contém infinitos termos distintos. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) de elementos distintos e, portanto, como

$$d(x_{n_k}, x_{n_m}) = \phi(x_{n_k}) + \phi(x_{n_m}),$$

e uma vez que a sequência (x_n) é de Cauchy, segue que

$$\phi(x_{n_k}) \longrightarrow 0.$$

Como por hipótese existe único $z \in X$ tal que $\phi(z) = 0$, segue que

$$d(x_{n_k}, z) \longrightarrow 0,$$

e, portanto, pelo Teorema 2.3.3, $x_n \longrightarrow z$. Ou seja, (x_n) converge para um elemento de X. Portanto, X é um espaço métrico completo. $\square$

Agora vamos dar a demonstração do Teorema 3.6.1, sendo suficiente produzir uma função ϕ do Lema 3.6.1. Para tal, vamos fazer uso do Lema de Zorn (Ver Apêndice A, Lema A.1).

Agora daremos uma prova da parte (2) do Teorema 3.6.1.

Demonstração do Teorema 3.6.1: Seja $z \in X$ um ponto fixo de T^n, conforme garantido pela parte (2) do teorema. A unicidade então implica que

$$z = Tz,$$

e pela parte (1) z é um único ponto fixo de cada iterada de T.
Para uma dada função ϕ definida em um subconjunto de X, denotemos por D_ϕ seu domínio de definição e seja o conjunto

$$\Omega = \{\phi : D_\phi \longrightarrow [0, \infty) | z \in D_\phi \subset X, \phi^{-1}(\{0\}) = z, T(D_\phi) \subset D_\phi \; e \; \phi(Tx) \leq \alpha\phi(x), \; \forall\, x \in D_\phi\}.$$

Notemos que, para o dado z, se definimos

$$D_{\phi^*} = \{z\}, \qquad \phi^*(z) = 0,$$

então, $\phi^* \in \Omega$. Logo, a coleção Ω é não vazia. Agora, definamos uma relação de ordem parcial no conjunto Ω da seguinte forma:

$$\phi_1 \preceq \phi_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad D_{\phi_1} \subset D_{\phi_2} \qquad e \qquad \phi_2|_{D_{\phi_1}} = \phi_1.$$

Se Ω_0 é uma cadeia, ou seja, um conjunto totalmente ordenado, em $(\Omega, \preceq)$, então o conjunto

$$D = \bigcup_{\phi \in \Omega_0} D_\phi$$

é um conjunto T-invariante, ele contém z e se definirmos

$$\psi : D \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$\psi(x) = \phi(x), \qquad x \in D_\phi,$$

então ψ é um limitante superior para Ω_0 com domínio $D_\psi = D$. Consequentemente, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal

$$\phi_0 : D_0 = D_{\phi_0} \longrightarrow [0, \infty)$$

em $(\Omega, \preceq)$. Mostremos agora que $D_0 = X$, completando assim a demonstração da parte (2) do Teorema. Suponha por absurdo que $D_0 \neq X$. Seja $x_0 \in X \setminus D_0$ e considere o conjunto

$$O = \{T^n x_0 | n = 0,\ 1,\ 2, \ldots\}.$$

Se

$$O \cap D_0 = \emptyset,$$

então os elementos $T^n x_0$, com $n = 0,\ 1,\ 2, \dots$, devem ser distintos, caso contrário $z \in O$. Definamos

$$D_\phi = O \cup D_0,\ \phi|_{D_0} = \phi_0,\ \phi(T^n x_0) = \alpha^n,\ n = 0,\ 1,\ 2, \dots.$$

Então,

$$\phi \in \Omega, \qquad \phi \neq \phi_0 \qquad \phi_0 \preceq \phi,$$

um absurdo, pois ϕ_0 é o elemento maximal. Portanto,

$$O \cap D_0 \neq \emptyset.$$

Agora, tomamos

$$m = \min\{n | T^n x_0 \in D_0\},$$

então $T^{m-1}x_0 \notin D_0$. Defina

$$D_\phi = \{T^{m-1}x_0\} \cup D_0.$$

Então,

$$T(D_\phi) = \{T^m x_0\} \cup T(D_0) \subset D_0 \subset D_\phi.$$

Logo, D_ϕ é T-invariante e contém z. Defina $\phi : D_\phi \longrightarrow [0, \infty)$, como segue:

- $\phi|_{D_0} = \phi_0$.
- Se $T^m x_0 = z$, definimos $\phi(T^{m-1}x_0) = 1$.
- Se $T^m x_0 \neq z$, definimos $\phi(T^{m-1}x_0) = \dfrac{\phi_0(T^m x_0)}{\alpha}$.

Em ambos os casos $\phi \in \Omega$, $\phi \neq \phi_0$ e $\phi_0 \preceq \phi$, o que gera uma contradição com a maximalidade de ϕ_0. Portanto, podemos inferir que $D_0 = X$. Aplicando o Lema 3.6.1 completa a prova da parte (2) do Teorema 3.6.1. $\square$

O nosso objetivo nesta seção era apresentar o resultado de Bessaga, que em 1959 provou a parte (2) do Teorema 3.6.1, aqui não apresentamos a demonstração da parte (1) do Teorema 3.6.1, mas ela pode ser consultada em Deimling (2010).

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Nesta primeira seção, apresentaremos o método de Newton. Para as outras três seções, consideramos três campos importantes de aplicação do teorema, a saber, equações algébricas lineares, em que apresentaremos a Iteração de Jacobi e a iteração de Gauss-Seidel (Seção 4.2), equações diferenciais ordinárias, em que apresentaremos o Teorema de Existência e Unicidade de Picard (Seção 4.3) e equações integrais, em que apresentaremos os Teoremas de Fredholm e Volterra (Seção 4.4). Existem outras aplicações (por exemplo, em equações diferenciais parciais) cuja discussão exigiria mais pré-requisitos.

4.1 MÉTODO DE NEWTON

Nesta primeira seção iremos apresentar, sob a visão do Teorema do Ponto Fixo de Banach, o **Método de Newton** ou como também é conhecido **Método de Newton-Raphson**. É um método em que utiliza derivadas para estimar as raízes de uma função, ou seja, soluções aproximadas de zeros de uma função. Os resultados desta seção são baseados na referência Trindade (2019).

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função da qual desejamos encontrar os zeros, ou seja, encontrar soluções da equação $f(\hat{x}) = 0$. A Figura 5 mostra a representação gráfica do método de Newton para uma função f qualquer, em que temos a reta tangente à função f passando pelo ponto $(x_n, f(x_n))$, com inclinação $f'(x_n)$.

O Método de Newton é um método iterativo, que, para ser iniciado, necessitamos da aproximação inicial x_n e cuja próxima iteração x_{n+1} é obtida tomando o ponto de interseção dessa reta tangente com o eixo x. Sabemos que a equação desta reta tangente é dada por

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

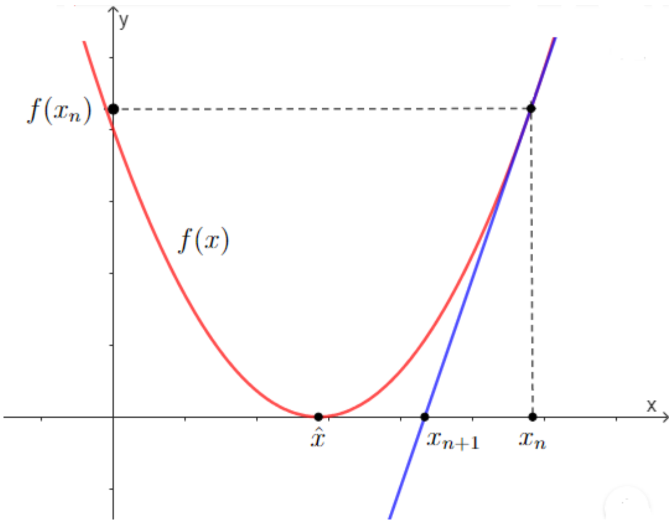
então, se $y = 0$ e $f'(x_n) \neq 0$, temos

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Obtemos assim o método de Newton que fornece x_{n+1} como uma aproximação para a raiz $\hat{x}$, dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

Figura 5 – Método iterativo de Newton



Fonte: Autoria própria.

em que a cada iteração, esperamos nos aproximar cada vez mais do zero da função f. Com isso, temos que, encontrar soluções para $f(\hat{x}) = 0$ é equivalente a encontrar soluções para

$$\hat{x} = \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})},$$

com $f'(\hat{x}) \neq 0$. De tal maneira, que se torna um problema de ponto fixo para o problema de encontrar zeros de funções. Para isso, seja $T : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação dada por

$$Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

com $f' \neq 0$ em $[a, b]$. Para que seja possível aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, precisaremos estabelecer algumas condições sobre a aplicação T, que serão apresentadas em três lemas. Mostremos primeiro a contratividade de T.

Lema 4.1.1. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e $f' \neq 0$ em $[a, b]$. Se existir α, com $0 \leq \alpha < 1$, tal que*

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \alpha, \qquad \forall\, x \in [a, b], \tag{4.1}$$

então a aplicação T, dada acima, é contração.

Demonstração: Sejam $x,\ y \in [a,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
Ty - Tx = y - \frac{f(y)}{f'(y)} - x + \frac{f(x)}{f'(x)} &\overset{\text{(T.F.C.)}}{=} \int_x^y \frac{d}{dt}\left[t - \frac{f(t)}{f'(t)}\right]\, dt \\
&= \int_x^y \left[1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\right]\, dt = \int_x^y \left[1 - \frac{(f'(t))^2 - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\right]\, dt \\
&= \int_x^y \left[1 - 1 + \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\right]\, dt \\
&= \int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Daí, de (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
|Ty - Tx| &= \left|\int_x^y \frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\, dt\right| \leq \int_x^y \left|\frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\right|\, dt \\
&\leq \int_x^y \alpha\, dt = \alpha(y - x) \\
&\leq \alpha|y - x|.
\end{aligned}$$

Portanto, T é uma contração. $\square$

Assim, temos uma contração. Mas, para que o Teorema do Ponto Fixo de Banach possa ser aplicado, precisamos garantir que T esteja bem definida, ou seja, que T leva pontos do intervalo $[a,\ b]$ para $[a,\ b]$. Para este resultado, apresentaremos dois lemas para os quais consideremos, apenas para simplificação de notação,

$$\overline{x} = \frac{b+a}{2} \qquad e \qquad \lambda = \frac{b-a}{2}.$$

Lema 4.1.2. $y \in [a,\ b]$ *se, e somente se,* $|y - \overline{x}| \leq \lambda$.

Demonstração: Sejam $y \in \mathbb{R}$ e $[a,\ b]$ um intervalo. Então,

$$\begin{aligned}
a \leq y \leq b \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} \leq y \leq \frac{b+b}{2} &\Leftrightarrow \frac{a-b+a+b}{2} \leq y \leq \frac{b-a+b+a}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} + \overline{x} \leq y \leq \frac{b-a}{2} + \overline{x} \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \leq y - \overline{x} \leq \frac{b-a}{2} \\
&\Leftrightarrow -\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq y - \overline{x} \leq \frac{b-a}{2} \\
&\Leftrightarrow |y - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2} = \lambda.
\end{aligned}$$

$\square$

O Lema 4.1.2 é um resultado simples, contudo será útil para a demonstração do Lema 4.1.3, que garantirá que T está bem definida, ou seja, $|Tx - \overline{x}| \leq \lambda$, para todo $x \in [a,\ b]$.

Lema 4.1.3. *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável, com* $f' \neq 0$ *em* $[a, b]$*. Se existir* α*, com* $0 \leq \alpha < 1$*, tal que*

$$\left|\frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| \leq (1-\alpha)\lambda, \tag{4.2}$$

então, $T([a, b]) \subset [a, b]$*.*

Demonstração: Seja $x \in [a, b]$, aplicando T em $\overline{x}$, temos

$$T\overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{x} = T\overline{x} + \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}.$$

Daí, dos Lemas 4.1.1, 4.1.2 e por (4.2), temos que

$$\begin{aligned} |Tx - \overline{x}| = \left|Tx - T\overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| &\leq |Tx - T\overline{x}| + \left|\frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| \\ &\leq \alpha|x - \overline{x}| + \left|\frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| \leq \alpha|x-\overline{x}| + (1-\alpha)\lambda \\ &\leq \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda, \end{aligned}$$

em que na segunda desigualdade foi usado o Lema 4.1.1. Assim, temos que $|Tx - \overline{x}| \leq \lambda$. Daí, novamente pelo Lema 4.1.2, temos que $Tx \in [a, b]$. Portanto, T leva pontos de $[a, b]$ em $[a, b]$.

□

Os Lemas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 fornecem as condições suficientes para que a aplicação T seja uma contração e esteja bem definida, e assim podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que nos fornece o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1 (Método de Newton). *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é, pelo menos, duas vezes diferenciável, com* $f'(x) \neq 0$ *e* $f(a)f(b) < 0$*, então* f *possuirá um zero* $\hat{x}$*, único, num dado intervalo* $[a, b]$ *se existir* α*, com* $0 \leq \alpha < 1$ *tal que*

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leq \alpha, \qquad \forall\, x \in [a, b], \tag{4.3}$$

e, se

$$\left|\frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| \leq (1-\alpha)\lambda, \tag{4.4}$$

Neste caso, tem-se $\hat{x} = \lim_{n\to\infty}(x_n)$*, com* $x_n \in [a, b]$*, determinada iterativamente por*

$$x_{n+1} = Tx_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \forall\, n \geq 0,$$

com $x_0 \in [a, b]$ *fixado.*

Finalizamos essa seção com um exemplo do Método de Newton para encontrar o valor aproximado da raiz quadrada de 2.

Exemplo 4.1.1 (Raiz quadrada). *Usando o Método de Newton, vamos determinar um valor aproximado para $\sqrt{2}$ calculando o zero positivo da função $f(x) = x^2 - 2$. Mas, para usarmos o Teorema 4.1.1 devemos encontrar um intervalo $[a, b]$ e um número real α, com $0 \leq \alpha < 1$, de forma que a função f cumpra as condições (4.3) e (4.4) do teorema. Para isso, calculando suas derivadas, temos $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Agora, precisamos determinar um intervalo em que f se anule. Vejamos que*

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0 \quad e \quad f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0.$$

Pela continuidade de f, entre 1 e 2 temos uma raíz positiva[1] *de f. Dessa forma, tomando $[a, b] = [1, 2]$ e $\alpha = 1/2$ as condições (4.3) e (4.4) são satisfeitas. De fato,*

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)\cdot 2}{4x^2}\right| = \left|\frac{x^2-2}{2x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Também,

$$\left|\frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\right| = \left|\frac{f(\frac{3}{2})}{f'(\frac{3}{2})}\right| = \left|\frac{\frac{1}{4}}{3}\right| = \frac{1}{12} \quad e \quad (1-\alpha)\lambda = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2-1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Portanto, podemos aplicar o método de Newton. Usando a sequência iterativa

$$x_{n+1} = Tx_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

começando de $x_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1{,}5;\\
x_2 &= 1{,}5 - \frac{(1{,}5)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{17}{12} = 1{,}4166666667;\\
x_3 &= 1{,}4166666667 - \frac{(1{,}4166666667)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}4166666667} = \frac{557}{408} = 1{,}4142568628;\\
x_4 &= 1{,}4142568628 - \frac{(1{,}4142568628)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}4142568628} = 1{,}41421356303;\\
x_5 &= 1{,}41421356303 - \frac{(1{,}41421356303)^2 - 2}{2 \cdot 1{,}41421356303} = 1{,}41421356237;
\end{aligned}$$

Percebemos que na quinta iteração já conseguimos uma aproximação para $\sqrt{2}$ com erro 0.03125 dada pela estimativa a posteriori (3.6).

[1] Veja o Apêndice A, Teorema A.2

4.2 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BANACH ÀS EQUAÇÕES LINEARES

O Teorema do Ponto Fixo de Banach tem aplicações importantes para métodos de iteração para resolver sistemas de equações algébricas lineares e produz condições suficientes para convergência e limites de erro.

Sabemos que existem vários métodos diretos para resolver esses sistemas lineares; um exemplo bem familiar é o método de eliminação de Gauss (aproximadamente, uma versão sistemática da eliminação ensinada na escola). No entanto, uma iteração, ou método indireto, pode ser mais eficiente se o sistema for especial, por exemplo, se for esparso.

Como vimos no Capítulo 3, para que o Teorema do Ponto Fixo de Banach possa ser aplicado, precisamos de um espaço métrico completo e uma contração definida nesse espaço. Consideremos o conjunto X de todas as n-uplas ordenadas de números reais, da forma

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad y = (\eta_1, \ldots, \eta_n), \qquad z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \qquad \cdots .$$

Agora, definimos em X uma métrica d dada por

$$d(x, z) = \max_j |\xi_j - \zeta_j|. \tag{4.5}$$

Sabemos, pelo Exemplo 2.4.2, que $X = (X, d)$ é completo. Agora, definimos em X a aplicação $T : X \longrightarrow X$, dada por

$$y = Tx = Cx + b, \tag{4.6}$$

em que $C = (c_{jk})$ é uma matriz $n \times n$ real, fixa, e $b \in X$ um vetor fixo.

Queremos saber sobre quais condições a aplicação T é uma contração, para que o Teorema do Ponto Fixo de Banach possa ser aplicado. Para isso, escrevendo (4.6) em suas componentes, temos que

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j,$$

para $j = 1, \ldots,\ n$, sendo $b = (\beta_j)$. Tomemos agora outra n-upla $w = (\omega_j) = Tz$, em que

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\zeta_k + \beta_j,$$

para $j = 1, \ldots,\ n$. Daí, das equações (4.5) e (4.6), temos que

$$\begin{aligned} d(y,\,w) = d(Tx,\,Tz) = \max_j |\eta_j - \omega_j| &= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j - \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\zeta_k + \beta_j \right) \right| \\ &= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k - \zeta_k) \right| \leq \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}||(\xi_k - \zeta_k)| \\ &\leq \max_i |(\xi_i - \zeta_i)| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \\ &= d(x,\,z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \end{aligned}$$

Portanto, $d(y,\,w) = d(Tx,\,Tz) \leq \alpha d(x,\,z)$, onde

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \tag{4.7}$$

Agora que temos o espaço métrico completo X e a aplicação contração T definida em X, podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para obter o seguinte resultado para sistemas de equações lineares, com a notação já indicada acima.

Teorema 4.2.1 (Equações Lineares). *Seja um sistema*

$$x = Cx + b \tag{4.8}$$

com $C = (c_{jk})$ e b dados, de n equações lineares em n incógnitas $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (as coordenadas de x) que satisfaz

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.9}$$

Então, este sistema tem precisamente uma solução x. Esta solução pode ser obtida como o limite da sequênica iterativa $(x^{(0)},\ x^{(1)},\ x^{(2)}, \ldots)$, em que $x^{(0)}$ é arbitrário e

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \qquad m = 0, 1, \ldots. \tag{4.10}$$

As estimativas de erro são dadas por

$$d(x^{(m)},\,x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)},\,x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)},\,x^{(1)}). \tag{4.11}$$

Obtemos (4.10) a partir da sequência iterativa, na qual temos que $x^{(m)} = Tx^{(m-1)}$, e (4.11) é consequência do Corolário (3.2.1), onde a primeira desigualdade é a estimativa a posteriori e a segunda desigualdade é a estimativa a priori.

A condição (4.9) é suficiente para a convergência. Essa condição é chamada de **critério de soma de linhas**.

Vejamos agora, como que o Teorema 4.2.1 está relacionado aos métodos usados na prática. Um sistema de n equações lineares em n incógnitas é geralmente escrito na forma

$$Ax = c, \tag{4.12}$$

em que A é uma matriz quadrada $n \times n$ com $A = (a_{jk})$. Muitos métodos iterativos para (4.12) com $detA \neq 0$ são tais que se escreve $A = B - G$ com uma matriz não singular adequada B. Então, substituindo em (4.12), temos que

$$Bx = Gx + c$$

ou

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

Isso sugere a forma da iteração (4.10), onde

$$C = B^{-1}G, \qquad b = B^{-1}c. \tag{4.13}$$

Vamos ilustrar isso com dois métodos padrões, a iteração de Jacobi e a iteração de Gauss-Seidel, amplamente usada em Matemática Aplicada.

4.2.1 Iteração de Jacobi

Este método de iteração é definido por

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} \xi_k^{(m)} \right), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.14}$$

em que $c = (\gamma_j)$ descrita na equação (4.12) e assumimos $a_{jj} \neq 0$ para $j = 1, \ldots, n$. A expressão (4.14) pode ser escrita na forma (4.10) com

$$C = -D^{-1}(A - D) \quad e \quad b = D^{-1}c, \tag{4.15}$$

em que $D = diag(a_{jj})$ donde existe a inversa D^{-1}. De fato, se $Ax = c$, queremos obter C e b tal que $x = Cx + b$. Assim, fazemos

$$\begin{aligned} x &= Ix - D^{-1}c + D^{-1}c = Ix - D^{-1}(Ax) + D^{-1}c \\ &= -D^{-1}(Ax) + Ix + D^{-1}c = -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}c = Cx + b, \end{aligned}$$

em que $C = -D^{-1}(A - D)$ e $b = D^{-1}c$.

A condição (4.9) aplicada a C em (4.15) é suficiente para a convergência da iteração de Jacobi. Como C em (4.15) é relativamente simples, podemos expressar (4.9) diretamente em termos dos elementos de A. O resultado é o critério de soma de linhas para a iteração de Jacobi

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{jk}}{a_{jj}} \right| < 1, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.16}$$

ou ainda

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}|, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

4.2.2 Iteração de Gauss-Seidel

A iteração de Gauss-Seidel é um método de correções sucessivas, em que a cada instante são utilizadas todas as últimas componentes conhecidas. O método é definido por

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} \xi_k^{(m)} \right), \tag{4.17}$$

com $j = 1, \ldots, n$ e novamente assumimos que $a_{jj} \neq 0$ para todo j.

Obtemos uma forma matricial de (4.17) escrevendo

$$A = -L + D - U,$$

em que $D = diag(a_{jj})$, como na iteração de Jacobi, L e U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com os elementos das diagonais principais todos iguais a zero e os demais elementos respectivos são as entradas $-a_{jk}$, lembrando que $A = (a_{jk})$, e os sinais de menos apenas por uma questão de convenção e conveniência. Assim, de (4.12), obtemos

$$(-L + D - U)x = c \Rightarrow Dx = c + Lx + Ux.$$

Agora imaginamos que cada equação em (4.17) é multiplicada por a_{jj}. Então podemos escrever o sistema resultante na forma

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)},$$

ou

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{m}.$$

Multiplicando por $(D-L)^{-1}$, obtemos (4.10) com

$$C = (D-L)^{-1}U, \qquad b = (D-L)^{-1}c. \tag{4.18}$$

Como C é complicada para obtermos a condição que garante a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, apenas mencionamos que a condição (4.9) aplicada à C em (4.18) é suficiente para a convergência da iteração de Gauss-Seidel, de tal maneira que a condição (4.16) é suficiente para que a iteração de Gauss-Seidel seja aplicada. Mais detalhes e referências podem ser encontrados em Kreyszig (1991). Contudo, ao final dessa seção esperamos ter dado uma ideia da importância e aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach nessa área.

4.3 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BANACH ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As aplicações mais interessantes do Teorema do Ponto Fixo de Banach surgem em conexão com espaços de funções. Nesta seção, iremos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrar o Teorema Picard, que garante existência e unicidade de solução para equações diferenciais ordinárias. Os resultados dessa seção são baseados na referência Kreyszig (1991).

De fato, consideramos o problema de valor inicial, dado por

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.19}$$

aqui, x' é a derivada de primeira ordem e $x(t_0) = x_0$ é a condição inicial, onde t_0 e x_0 são números reais dados.

A ideia aqui é transformar o problema de valor inicial acima em algo equivalente de modo que possamos encaixar nas hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach para poder aplicá-lo. Mais precisamente, a (4.19) será convertida em uma equação integral, que define uma aplicação T, e as condições do teorema implicarão que T é uma contração, tal que seu ponto fixo torna-se a solução do nosso problema.

Primeiramente, vamos transformar o problema (4.19) em um problema de resolução de equação integral. Vejamos o lema a seguir.

Lema 4.3.1. *Todo problema do tipo (4.19), com $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no aberto U, tem uma equação integral correspondente, isto é, uma função continuamente diferenciável $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é* *solução do PVI (4.19) se, e somente se, é solução da equação*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad \forall\, t \in I. \tag{4.20}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que u é solução do problema (4.19), ou seja, u satisfaz

$$\begin{cases} u' = f(t, x), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Como f é contínua em I, pelo T.F.C. (Ver Apêndice A, Teorema A.5), temos

$$\int_{t_0}^{t} u'(\tau)\, d\tau = u(t) - u(t_0) \Rightarrow u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(\tau)\, d\tau \qquad \forall\, t \in I.$$

Mas, u é solução de (4.19), então

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz (4.20), então

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau.$$

Logo,

$$u(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(\tau, u(\tau))\, d\tau = x_0 + 0 = x_0.$$

Derivando u em $t \in I$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(u(t)) = \frac{d}{dt}(x_0) + \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\right).$$

Pelo T.F.C. (Ver Apêndice A, Teorema A.4), temos que

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

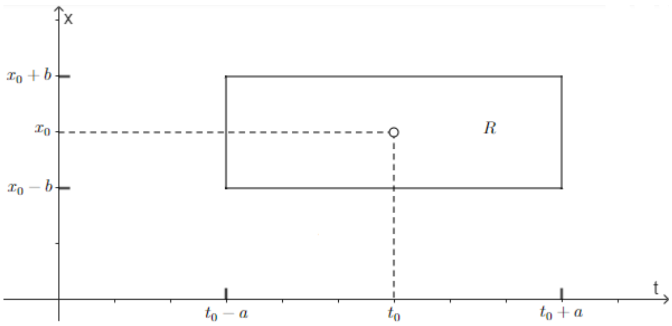
Portanto, u é solução de (4.19). □

O Lema 4.3.1 nos diz que resolver a equação integral (4.20) é equivalente à resolver o PVI (4.19). Este resultado, nos será útil para a demonstração do Teorema de Picard que enunciaremos a seguir.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Existência e Unicidade de Picard). *Seja f uma função contínua no retângulo (Figura 6)*

$$R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\},$$

Figura 6 – O retângulo R



Fonte: Autoria própria.

e assim, limitada em R, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|f(t, x)| \leq c \qquad \forall\, (t, x) \in R. \tag{4.21}$$

Suponha que f satisfaça uma condição de Lipschitz em R com relação ao seu segundo argumento, ou seja, existe uma constante k (constante de Lipschitz) tal que para quaisquer $(t, x),\ (t, v) \in R$ vale

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v|. \tag{4.22}$$

Então, o problema de valor inicial (4.19) tem solução única. Essa solução existe em um intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, em que

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{4.23}$$

Demonstração: Seja $C(J)$ o espaço métrico de todas as funções contínuas a valores reais definidas no intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ com a métrica d definida por

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

$C(J)$ é completo, como sabemos do Exemplo 2.4.3. Seja $\tilde{C}$ o subespaço de $C(J)$ consistindo de todas aquelas funções $x \in C(J)$ que satisfazem

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta, \qquad \forall\, t \in J. \tag{4.24}$$

Temos que, $\tilde{C}$ é fechado em $C(J)$. De fato, seja x_n em C e suponha que $x_n \longrightarrow x$. Como $x_n,\ x_0 \in \tilde{C}$, então $|x_n(t) - x_0| \leq c\beta,\ \forall\, t \in J$. Tomando o limite $n \longrightarrow \infty$, temos $|x(t) - x_0| \leq c\beta,\ \forall\, t \in J$. Portanto, $x \in \tilde{C}$ e $\tilde{C}$ é fechado em C pelo Teorema 2.2.2, de modo que $\tilde{C}$ é completo pelo Teorema 2.3.5. Construiremos agora a aplicação T. Por integração, (4.19) pode ser escrita por $x = Tx$, sendo $T : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}$ definida por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad \forall\, t \in J. \tag{4.25}$$

Observe que, pelo Lema 4.3.1, os pontos fixos de T são soluções para o problema (4.19). Agora, temos que, para todo $x \in \tilde{C}$, T está bem definida, pois $c\beta < b$ por (4.23), de modo que se $x \in \tilde{C}$, então $\tau \in J$ e $(\tau, x(\tau)) \in R$, e a integral em (4.25) existe, pois f é contínua em R. Além disso, podemos usar (4.25) e (4.21), obtendo

$$\begin{aligned} |Tx(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau))|\, d\tau \\ &\leq c \int_{t_0}^{t} d\tau \leq c|t - t_0| \leq c\beta. \end{aligned}$$

Logo, $Tx \in \tilde{C}$. Ou seja, $T : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}$ está bem definida.

Agora, mostremos que T é uma contração em $\tilde{C}$. Pela condição de Lipschitz (4.22), para $x,\ v \in \tilde{C}$, temos

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))\, d\tau \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]\, d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))|\, d\tau \leq k \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - v(\tau)|\, d\tau \\ &\leq k \max_{\tau \in J} |x(\tau) - v(\tau)| \int_{t_0}^{t} d\tau \leq k \max_{\tau \in J} |x(\tau) - v(\tau)||t - t_0| \\ &= k|t - t_0| d(x, v) \leq k\beta d(x, v). \end{aligned}$$

Como a última desigualdade não depende de t, podemos tomar o máximo no lado esquerdo com $t \in J$. Assim, obtemos

$$d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v),$$

sendo $\alpha = k\beta$. De (4.23), sabemos que $\alpha = k\beta < 1$, ou seja, T é de fato uma contração em $\tilde{C}$. Logo, pelo Teorema 3.2.1, T tem um único ponto fixo $x \in \tilde{C}$, isto é, uma função contínua x em J satisfazendo $x = Tx$. Escrevendo $x = Tx$, temos por (4.25), que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad \forall\, t \in J. \tag{4.26}$$

Como $(\tau, x(\tau)) \in R$ e f é contínua em R, (4.26) pode ser diferenciada (T.F.C.). Portanto, x é ainda diferenciável e satisfaz (4.19). Reciprocamente, toda solução de (4.19) satisfaz (4.26). Isso equivale a existência de uma única solução para o problema (4.19). □

O Teorema do Ponto Fixo de Banach também implica que a solução x de (4.19) é o limite da sequência $(x_0,\ x_1, \ldots)$ obtida pela iteração de Picard

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau, \tag{4.27}$$

em que $n = 0,\ 1, \ldots$.

Finalizamos essa seção com um exemplo, onde usaremos o Teorema de Picard 4.3.1 para garantir existência e unicidade de solução e através da iteração de Picard (4.27), encontraremos a única solução para o problema de valor inicial dado.

Exemplo 4.3.1. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = 2(x(t)+1) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $[-a,\, a] \times [-b,\, b] \subset U$. Seja a função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t,\, y) = 2(y+1)$. Temos que f é contínua, limitada e Lipschitziana em relação à segunda variável. Então, pelo Teorema de Picard 4.3.1, (4.28) *tem uma única solução num intervalo $J = [t_0 - \beta,\, t_0 + \beta]$ e podemos usar a iteração de Picard* (4.27) *para encontrar esta solução. Pelo Lema 4.3.1 obtemos que a equação integral equivalente a* (4.28) *é:*

$$x(t) = \int_0^t 2(x(\tau)+1)\, d\tau.$$

Usando o método iterativo,

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t 2(x_n(\tau)+1)\, d\tau.$$

Analisemos algumas de suas iteradas, começando de $x_0(t) \equiv 0$, temos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t 2(x_0(\tau)+1)\, d\tau = \int_0^t 2\, d\tau = 2t; \\ x_2(t) &= \int_0^t 2(x_1(\tau)+1)\, d\tau = \int_0^t 2(2\tau+1)\, d\tau = \frac{(2t)^2}{2!} + 2t; \\ x_3(t) &= \int_0^t 2(x_2(\tau)+1)\, d\tau = \int_0^t 2\left(\frac{(2\tau)^2}{2!} + 2\tau + 1\right)\, d\tau = \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^2}{2!} + 2t. \end{aligned}$$

Prosseguindo dessa forma obtemos uma sequência $(x_n(t))$, dada por

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}.$$

Logo, a solução exata é dada por

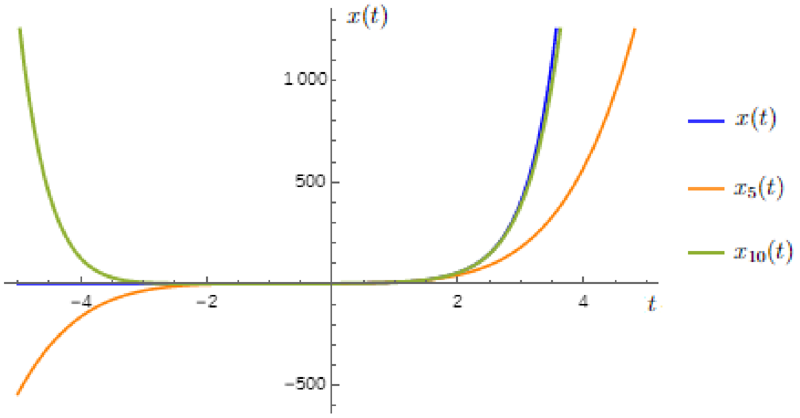
$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 1 = e^{2t} - 1.$$

Portanto, a solução do PVI (4.28) *é:*

$$x(t) = e^{2t} - 1. \qquad \forall\, t \in J.$$

A Figura 7 mostra o gráfico de $x_5(t)$, $x_{10}(t)$ e $x(t)$, a solução exata.

Figura 7 – Gráfico de $x_5(t)$, $x_{10}(t)$ e $x(t)$



Fonte: Autoria própria.

4.4 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BANACH ÀS EQUAÇÕES INTEGRAIS

O Teorema do Ponto Fixo de Banach também é uma fonte de teoremas de existência e unicidade para equações integrais. Nesta seção, aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para encontrar soluções de dois tipos de equações integrais, as chamadas equações integrais de Fredholm do segundo tipo e as equações integrais de Volterra do segundo tipo. Os resultados dessa seção são baseados na referência Kreyszig (1991).

Uma equação integral da forma

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau = v(t) \tag{4.29}$$

é chamada de **equação de Fredholm** do segundo tipo[2]. Aqui, $[a, b]$ é um intervalo dado, x é uma

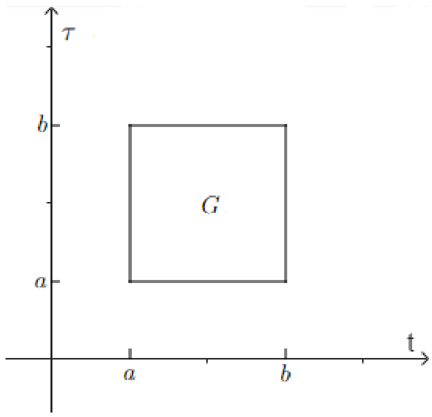
[2] A presença do termo $x(t)$ nos permite aplicar a iteração, como mostra o Teorema 4.4.1. Uma equação sem esse termo é da forma

$$\int_a^b k(t, \tau)x(t)\, d\tau = v(t)$$

e é dita ser do primeiro tipo.

função em $[a,\, b]$ que é desconhecida e μ é um parâmetro. O **núcleo** k da equação é uma função dada no quadrado $G = [a,\, b] \times [a,\, b]$ (Figura 8) e v é uma função dada em $[a,\, b]$.

Figura 8 – Domínio da definição G do núcleo k na equação integral (4.29) em que a e b são positivos



Fonte: Autoria própria.

A ideia é encontrar uma aplicação T que seja uma contração num espaço métrico completo e aplicar o teorema, de modo que o ponto fixo seja a solução da equação integral.

As equações integrais podem ser consideradas em vários espaços de funções. Nesta seção consideramos (4.29) em $C[a,\, b]$, o espaço de todas as funções contínuas definidas no intervalo $J = [a,\, b]$ com a métrica d dada por

$$d(x,\, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|. \tag{4.30}$$

Sabemos que $C[a,\, b]$ é completo (Exemplo 2.4.3). Assumimos que $v \in C[a,\, b]$ e k é contínua em G. Então k é uma função limitada em G, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|k(t,\, \tau)| \leq c, \qquad \forall (t,\, \tau) \in G. \tag{4.31}$$

Temos que (4.29) pode ser escrita como $x = Tx$, sendo T dada por

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\, \tau) x(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\, t \in J. \tag{4.32}$$

Como v e k são contínuas, (4.32) define um operador $T : C[a,\, b] \longrightarrow C[a,\, b]$. De fato, seja $t_0 \in [a,\, b]$ e $t_n \longrightarrow t_0$ em $[a,\, b]$. Como k é contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\mu,\ x \neq 0$, temos

$$|t_n - t_0| < \delta \;\Rightarrow\; |k(t_n,\, \tau) - k(t_0,\, \tau)| < \frac{\epsilon}{2|\mu|\|x\||b-a|}, \qquad \forall\, \tau \in [a,\, b].$$

Assim, como v é contínua, se n é suficientemente grande, temos $|v(t_n) - v(t_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e

$$\begin{aligned}
|Tx(t_n) - Tx(t_0)| &= \left| v(t_n) - v(t_0) + \mu \int_a b[k(t_n, \tau) - k(t_0, \tau)]x(\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq |v(t_n) - v(t_0)| + |\mu| \int_a^b |k(t_n, \tau) - k(t_0, \tau)||x(\tau)|\, d\tau \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + |\mu|\|x\| \int_a^b \frac{\epsilon}{2|\mu|\|x\||b-a|}\, d\tau \\
&= \frac{\epsilon}{2} + |\mu|\|x\||b-a| \cdot \frac{\epsilon}{2|\mu|\|x\||b-a|} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, Tx é contínua em $[a, b]$, ou seja, T leva pontos de $C[a, b]$ em $C[a, b]$. Assim, a aplicação T está bem definida. Agora, iremos impor uma condição em μ para que T seja uma contração. Para $x,\ y \in C[a, b]$ e de (4.30), (4.31) e (4.32), temos

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \max_{t\in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&= \max_{t\in J} \left| v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)y(\tau)\, d\tau \right) \right| \\
&= |\mu| \max_{t\in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \leq |\mu| \max_{t\in J} \int_a^b |k(t, \tau)||x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \\
&\leq |\mu| \int_a^b c|x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \leq |\mu| c \int_a^b \max_{\sigma\in J} |x(\sigma) - y(\sigma)|\, d\tau \\
&= |\mu| c \max_{\sigma\in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau = |\mu| c d(x, y)(b-a).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$, em que $\alpha = |\mu|c(b-a)$. Assim, T torna-se uma contração se $\alpha < 1$, ou seja,

$$|\mu| < \frac{1}{c(b-a)}. \tag{4.33}$$

Com isso, estamos em condições de aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual fornece o resultado a seguir.

Teorema 4.4.1 (Equação Integral de Fredholm). *Suponha que k e v em (4.29) sejam contínuas em $J \times J$ e $J = [a, b]$, respectivamente, e assuma que μ satisfaz (4.33) com c definido em (4.31). Então (4.29) tem uma única solução x em J. Essa função x é o limite da sequência iterativa $(x_0,\ x_1, \ldots)$, em que x_0 é qualquer função contínua em J e para $n = 0,\ 1, \ldots,$*

$$x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x_n(\tau)\, d\tau. \tag{4.34}$$

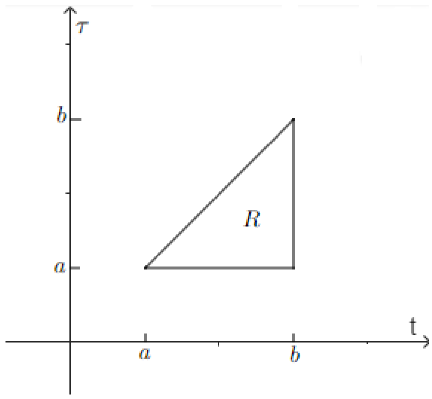
Agora, consideremos a **equação integral de Volterra**,

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau = v(t). \tag{4.35}$$

A diferença entre (4.29) e (4.35) é que em (4.29) o limite superior da integração b é constante, enquanto aqui em (4.35) é variável. Isso é essencial no sentido que agora, sem qualquer restrição em μ, obtemos um novo teorema de existência e unicidade.

Teorema 4.4.2 (**Equação Integral de Volterra**). *Suponha que v em (4.35) seja contínua em $[a, b]$ e o núcleo k é contínua na região triangular R no plano-$t\tau$ dado por $a \leq \tau \leq t$, $a \leq t \leq b$ (Figura 9). Então, (4.35) tem uma única solução x em $[a, b]$ para todo μ.*

Figura 9 – Região triangular R do Teorema 4.4.2 no caso de a e b positivos



Fonte: Autoria própria.

Demonstração: Vimos que a equação (4.35) pode ser escrita como $x = Tx$, com $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ definida por

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau, \qquad \forall\, t \in [a, b]. \tag{4.36}$$

Como k é contínua em R e R é fechado e limitado, então k é uma função limitada em R, ou seja, existe $c > 0$ tal que

$$|k(t, \tau)| \leq c, \qquad \forall\, (t, \tau) \in R.$$

Utilizando-se (4.30), segue-se que para todo $x,\ y \in C[a, b]$

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau)y(\tau)\, d\tau \right) \right| \\ &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \leq |\mu| \int_a^t |k(t, \tau)||x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \\ &\leq |\mu| c d(x, y) \int_a^t d\tau = |\mu| c(t - a) d(x, y). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Observamos que esse resultado é similiar ao encontrado para a equação de Fredholm, mas repare que nesse caso aparece a dependência na variável t no lado direito. Agora, mostremos, por indução, que para todo inteiro $m \geq 1$,

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y). \tag{4.38}$$

De fato, para $m = 1$ segue de (4.37). Suponhamos que (4.38) valha para algum $m \geq 1$. De (4.36) e (4.38), obtemos

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)| &= |T(T^m x(t)) - T(T^m y(t))| \\
&= \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau) T^m x(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau) T^m y(\tau)\, d\tau \right) \right| \\
&= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)]\, d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \int_a^t |k(t, \tau)| |T^m x(\tau) - T^m y(\tau)|\, d\tau \\
&\leq |\mu| \int_a^t c|\mu|^m c^m \frac{(\tau - a)^m}{m!} d(x, y)\, d\tau \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{d(x, y)}{m!} \int_a^t (\tau - a)^m\, d\tau \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{d(x, y)}{m!} \frac{(t-a)^{m+1}}{m+1} \\
&= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y).
\end{aligned}$$

Logo, por indução, a desigualdade (4.38) é válida para $m \geq 1$.
Usando o fato de que $t - a \leq b - a$ no lado direito de (4.38) e então tomando o máximo sobre $t \in J$ no lado esquerdo, obtemos de (4.38) que

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x, y),$$

sendo

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

Para qualquer μ fixo e m suficientemente grande, temos $\alpha_m < 1$, uma vez que

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|\mu|^m c^m (b-a)^m}{m!} = 0,$$

ou seja, existe um $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{|\mu|^m c^m (b-a)^m}{m!} < 1.$$

Logo, T^m é uma contração em $C[a, b]$ e, pelo Lema 3.2.1, T tem um único ponto fixo. $\square$

Repare que nesse caso não usamos exatamente o Teorema do Ponto Fixo de Banach e sim uma versão desse teorema.

Finalizamos essa seção com um exemplo, onde usaremos o Teorema de Volterra 4.4.2 para garantir existência e unicidade de solução para uma equação integral e através da iteração (4.34), encontraremos a única solução para o problema.

Exemplo 4.4.1. *Dada a equação integral de Volterra como segue:*

$$x(t) = sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau x(\tau)\, d\tau, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos que a equação acima satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4.2, ou seja: $sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi}$ *é uma função contínua em* $[0, 1]$, *o núcleo* $k(t, \tau)$ *é contínuo em* $R = \{(t, \tau),\ 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq t \leq 1\}$. *A solução será determinada a partir da equação acima pelo método de iteração de ponto fixo*

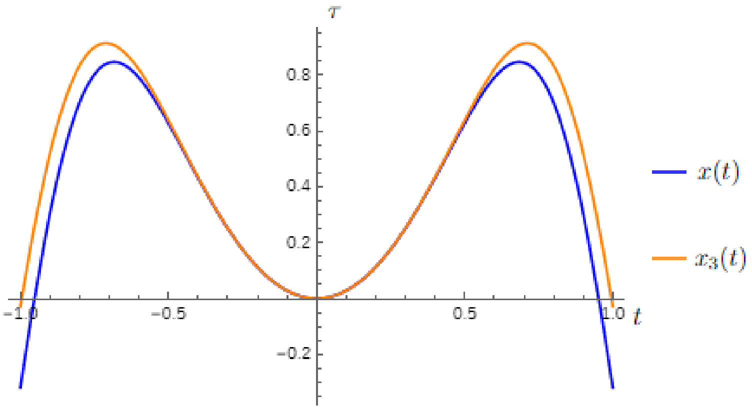
$$x_{n+1}(t) = sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau x_n(\tau)\, d\tau.$$

Analisemos algumas de suas iteradas, começando de $x_0(t) \equiv sen(\pi t^2)$*, temos:*

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau x_0(\tau)\, d\tau = sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau sen(\pi \tau^2)\, d\tau \\
&= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + t^2 \frac{1}{2\pi}(1 - cos(\pi t^2)); \\
x_2(t) &= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau x_1(\tau)\, d\tau \\
&= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau \left(sen(\pi \tau^2) - \frac{\tau^2}{\pi} + \tau^2 \frac{1}{2\pi}(1 - cos(\pi \tau^2)) \right) d\tau \\
&= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \frac{t^2}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 + 4\pi^2 cos(\pi t^2) + t^4 \pi^2 + 2t^2 \pi sen(\pi t^2) \\
&+ 2cos(\pi t^2))t^2 \frac{1}{2\pi}(1 - cos(\pi t^2)); \\
x_3(t) &= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau x_2(\tau)\, d\tau \\
&= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + \int_0^t t^2 \tau \bigg(sen(\pi \tau^2) - \frac{\tau^2}{\pi} + \frac{\tau^2}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 + 4\pi^2 cos(\pi \tau^2) + \tau^4 \pi^2 \\
&+ 2\tau^2 \pi sen(\pi \tau^2) + 2cos(\pi \tau^2)) \bigg) d\tau \\
&= sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi} + t^2 \bigg\{ -\frac{1}{64\pi^6} \bigg(-32\pi^5 - 16\pi^3 - 24\pi + 32\pi^5 cos(\pi t^2) + 8t^4 \pi^5 - 4t^4 \pi^3 \\
&+ 16t^2 \pi^4 \big(sen(\pi t^2) + 16\pi^3 cos(\pi t^2) + t^8 \pi^5 - 8t^4 \pi^3 cos(\pi t^2) + 24t^2 \pi^2 (sen(\pi t^2)) \\
&+ 24\pi cos(\pi t^2)) \bigg) \bigg\}.
\end{aligned}$$

Considere que para $|t| \leq 1$*, a sequência* $(x_n(t))$ *irá convergir para* $x(t) = sen(\pi t^2) - \frac{t^2}{\pi}$*. A Figura 10 mostra a comparação do resultado numérico com o resultado analítico.*

Figura 10 – Gráfico de $x_3(t)$ **e** $x(t)$



Fonte: Autoria própria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de conclusão de curso teve como principal objetivo enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas versões, assim como algumas de suas aplicações para obter existência e unicidade de soluções. Este teorema é um importante resultado da teoria dos espaços métricos, que garante condições para a existência e unicidade de pontos fixos para aplicações que são contrações em espaços métricos completos.

Primeiro apresentamos o conceito de espaços métricos e a suas principais propriedades, em que mostramos que os espaços $\mathbb{R}^n$ e $C[a, b]$ são espaços métricos completos, resultados esses que foram de vital importância para o desenvolvimento do trabalho.

Seguimos o trabalho exibindo o Teorema do Ponto Fixo de Banach, sobre o qual podemos dizer que é um resultado bastante simples de ser aplicado para obter a existência e unicidade de pontos fixos para contrações, os quais são soluções para diversas equações que podem ser transformadas em um problema de ponto fixo.

Na sequência, apresentamos algumas das aplicações do Teorema de Ponto Fixo de Banach, em que vimos o método de Newton, importante para encontrar os zeros de funções, e outra para encontrar a única solução para sistemas de equações lineares, sendo essa solução o limite da sequência iterativa. Também, mostramos que é uma importante ferramenta para problemas de existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, mais precisamente, para demonstrar o Teorema de Picard. Além disso, vimos que o teorema garante a existência e unicidade de soluções para equações integrais, mais precisamente, para as equações integrais de Volterra e Fredholm.

Assim sendo, concluímos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach tem uma grande importância para a área da análise matemática, pois permite resolver uma variedade de problemas, em que as condições do teorema implicam que o ponto fixo é a única solução do problema em questão. Além das aplicações que foram apresentadas aqui, esse teorema produz outras diversas aplicações em diferentes áreas da matemática (ver, por exemplo, Brooks e Schmitt (2009)).

Por fim, tendo em vista todo o conteúdo apresentado aqui, espera-se que este trabalho sirva como base ou inspiração para estudos mais aprofundados do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

REFERÊNCIAS

BESSAGA, C. On the converse of banach "fixed-point principle". **Colloquium Mathematicae**, v. 7, n. 1, p. 41–43, 1959. Disponível em: http://eudml.org/doc/210681.

BROOKS, M. Robert; SCHMITT, Klaus. The contraction mapping principle and some applications. **Electronic Journal of Differential Equations**, 2009. Disponível em: https://ejde.math.txstate.edu/Monographs/09/abstr.html.

CASTELLI, Marcos. **Teoremas de ponto fixo**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

DEIMLING, Klaus. **Nonlinear functional analysis**. *[S.l.]*: Courier Corporation, 2010.

DOMINGUES, Hygino Huguero. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. *[S.l.]*: São Paulo: Editora Atual, 1982.

EDELSTEIN, Michael. An extension of banach's contraction principle. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 12, n. 1, p. 7–10, 1961.

JACHYMSKI, Jacek. A short proof of the converse to the contraction principle and some related results. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, Nicolaus Copernicus University in Toruń, Juliusz Schauder Center for Nonlinear Studies, v. 15, n. 1, p. 179 – 186, 2000. Disponível em: https://projecteuclid.org/journals/topological-methods-in-nonlinear-analysis/volume-15/issue-1/A-short-proof-of-the-converse-to-the-contraction-principle/tmna/1471873916.full.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. *[S.l.]*: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. *[S.l.]*: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. *[S.l.]*: Impa Rio de Janeiro, 2004. v. 1.

ROYDEN, Halsey Lawrence; FITZPATRICK, Patrick. **Real analysis**. *[S.l.]*: Macmillan New York, 1988. v. 32.

SAATY, Thomas L. **Modern nonlinear equations**. *[S.l.]*: Courier Corporation, 2012.

TRINDADE, A. K. S. da. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações**. 2019 — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RESULTADOS UTILIZADOS

Neste apêndice compilamos os resultados que foram citados ao longo do trabalho, os quais podem ser encontrados nas seguintes referências Lima (2004) e Royden e Fitzpatrick (1988)

Teorema A.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Seja* (x_n) *uma sequência limitada de números reais. Então,* (x_n) *possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.2 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$ *então existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = d$

Teorema A.3. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação continua é um conjunto compacto.*

Teorema A.4 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 1)**.** *Seja* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, contínua em* I*, então a função* $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é contínua e diferenciável em I *e* $F'(x) = f(x)$*, isto é,*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x), \qquad x \in I.$$

Teorema A.5 (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte 2)**.** *Seja* $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, contínua em* I*, então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

sendo F *é qualquer primitiva de* f*, isto é, uma função tal que* $F' = f$*.*

Lema A.1 (Lema de Zorn)**.** *Seja* X *um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em* X *é limitada superiormente. Então* X *possui pelo menos um elemento maximal.*