

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS**

DANILO DELLA TORRES

**DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA DA LINHA DE VISADA EM OBSERVAÇÕES
HELIOSISMOLÓGICAS DO LIMBO SOLAR COM DADOS DO HMI/SDO**

**PONTA GROSSA
2026**

DANILO DELLA TORRES

**DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA DA LINHA DE VISADA EM OBSERVAÇÕES
HELIOSISMOLÓGICAS DO LIMBO SOLAR COM DADOS DO HMI/SDO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências/Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Emilio

PONTA GROSSA

2026

D357 Della Torres, Danilo
Determinação da geometria da linha de visada em observações
heliosismológicas do limbo solar com dados do HMI/SDO / Danilo Della Torres.
Ponta Grossa, 2026.
91 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Emilio.

1. Heliosismologia. 2. Limbo solar. 3. Rotação solar. 4. Astrofísica. 5.
Satélites artificiais - Astronomia. I. Emilio, Marcelo. II. Universidade Estadual de
Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 523.1

TERMO DE APROVAÇÃO

DANILO DELLA TORRES

DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA DA LINHA DE VISADA EM OBSERVAÇÕES HELIOSISMOLÓGICAS DO LIMBO SOLAR COM DADOS DO HMI/SDO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física Teórica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador -

Documento assinado digitalmente
 MARCELO EMILIO
Data: 10/04/2026 15:39:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcelo Emilio – UEPG/PR – Presidente

Documento assinado digitalmente
 JOSE DANILO SZEZECH JUNIOR
Data: 10/04/2026 16:23:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Danilo Szezech Júnior – UEPG/PR – Titularr



Profa. Dra. Maria Cristina de Assis Rabello Soares – Stanford University – Titular

Ponta Grossa, 10 de abril de 2026

AGRADECIMENTOS

Aos colegas do Observatório Astronômico da UEPG, pelo auxílio e companheirismo. Em especial a Luciano Negrello Correa, Matheus Leal Castanheira e Raylan Ari Prestes Martins por suas contribuições.

À Profa. Dra. Maria Cristina de Assis Rabello Soares, por suas sugestões nos resultados do trabalho, e Gabriel de Gois, por seu suporte na fase inicial do projeto.

Aos amigos que estiveram ao meu lado nesse período, em especial aos que me deram suporte no fim desta jornada.

Ao Prof. Dr. Marcelo Emilio, por sua paciência e por me dar a oportunidade de trabalhar nesta área.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho, sem o qual o mesmo não seria possível.

Nosso coração traz tanto pranto
Pranto tanto, tanto canto pra saldar
Renascer na velha história
Abraçando o mundo na ternura e na dor
Nos ensina a escrever a canção do Sol

– Milton Nascimento; Tavinho Moura; Túlio Mourão,
A Primeira Estrela

RESUMO

A heliosismologia é o estudo das oscilações naturais e ressonantes no Sol, permitindo investigar sua estrutura interna e propriedades físicas. Esse tipo de análise é realizada, comumente, a partir de medidas de efeito Doppler no disco solar completo ou em regiões restritas do disco. Neste trabalho, explorou-se a heliosismologia no limbo solar, uma abordagem complementar à de efeito Doppler que analisa variações de intensidade na borda do disco solar. Foram utilizados dados do instrumento Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) a bordo do satélite Solar Dynamics Observatory (SDO), que forneceu séries temporais ao longo de seis anos de observação para 256 posições igualmente espaçadas ao longo do limbo. O objetivo do trabalho é descrever geometricamente como o movimento aparente ao longo do ano da inclinação do eixo de rotação solar (ângulo B_0) afeta a perturbação das frequências das oscilações observadas. A partir da análise de Fourier bidimensional dos dados, diagramas de potência do tipo $l - \nu$ revelam as cristas que determinam as frequências dos modos acústicos de oscilação na região de 3000–3500 μHz , com período de aproximadamente 5 minutos. Foram encontradas as expressões analíticas dos ângulos $\varphi(\gamma, \theta)$ e $\psi(\gamma, \theta)$, que relacionam a separação do vetor de onda angular e do campo de velocidade linear de rotação do Sol; e a latitude da análise angular no limbo, respectivamente. Os resultados mostram que a contribuição da geometria da linha de visada do instrumento para a perturbação de frequências, dada pelo produto $\cos \varphi \times \cos \psi$, é de até 30% quando a inclinação é máxima ($\gamma = \pm 7,25^\circ$) e tem média de 25% para a modulação anual. As regiões de maior contribuição estão localizadas em aproximadamente $58,0^\circ$, $122,2^\circ$, $237,8^\circ$ e $302,0^\circ$ ao longo do limbo, com início da medida no limbo oeste. Trabalhos futuros devem desenvolver métodos que verifiquem os resultados teóricos com os dados observacionais. O trabalho estabelece uma base para o uso dos resultados em futuros estudos de heliosismologia no limbo.

Palavras-chave: Heliosismologia; Limbo solar; Rotação solar; HMI/SDO.

ABSTRACT

Helioseismology is the study of the Sun's natural and resonant oscillations, allowing the investigation of its internal structure and physical properties. These analyses are done, in general, by using Doppler effect measurements on the full solar disk or in restricted regions of the disk. In this work, we explore helioseismology at the solar limb as a complementary approach to the Doppler measurement that analyzes intensity variations at the edge of the disk. We use data from the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) onboard the Solar Dynamics Observatory (SDO) satellite, which provides time series covering six years of observation for 256 equally spaced positions along the limb. The objective of the work is to describe geometrically how the apparent movement throughout the year of the tilt of the solar rotation axis (B_0 angle) affects the observed oscillation frequency perturbations. Through two-dimensional Fourier analysis of the data, $l - \nu$ power spectrum reveals the ridges of the acoustic modes of oscillation in the 3000–3500 μHz frequency region, with an approximate 5-minute period. Analytical expressions for the angles $\varphi(\gamma, \theta)$ and $\psi(\gamma, \theta)$ have been found, which relate the separation of the angular wave vector from the linear velocity field vector of the solar rotation and latitude limb analysis, respectively. The results show that the geometric contribution of the line of sight of the instrument to the frequency perturbation, given by the product $\cos \varphi \times \cos \psi$, reaches up to 30% when the inclination is at its maximum ($\gamma = \pm 7.25^\circ$) and has an average of 25% for the annual modulation. The regions of greatest contribution are located approximately at 58.0° , 122.2° , 237.8° , and 302.0° along the limb, with initial value on the west limb. Future work should focus on developing methods to verify these theoretical predictions against observational data. This work establishes a foundation for future helioseismic studies at the limb using its results.

Keywords: Helioseismology; Solar limb; Solar rotation; HMI/SDO.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Primeiras imagens das oscilações solares de 5 minutos. a) Efeito global de rotação e b) campos de velocidade locais.	17
Figura 1.2 Diagrama de potência realizado para as oscilações observadas na fotosfera solar. As curvas de nível indicam as maiores concentrações de sinal e as linhas paralelas apontam os diferentes modos radiais.	17
Figura 2.1 Esquema representando o interior solar.	23
Figura 2.2 Temperatura (linha sólida) e pressão (linha tracejada) no interior solar em função do raio.	24
Figura 2.3 Perfil de densidade (linha sólida) e acúmulo de massa (linha tracejada) no interior solar em função do raio.	24
Figura 2.4 Produção de luminosidade (linha sólida) e sua derivada (linha tracejada) no interior solar em função do raio.	25
Figura 2.5 Inverso do gradiente de transporte de energia em função do raio. A linha tracejada horizontal representa o limite de estabilidade de um gás ideal monoatômico ($\nabla = 0,4$). A linha pontilhada vertical mostra quando o gradiente sobe e cruza a linha de estabilidade, dando início ao transporte convectivo. Próximo a $r/R_{\odot} = 1,0$, o gráfico dispara ao atingir uma região superadiabática, associada ao drástico decaimento da densidade do plasma.	26
Figura 2.6 Efeito de escurecimento de limbo. a) Imagem do Sol, em que se observa uma diminuição do brilho do centro para as bordas. b) Função de escurecimento de limbo Γ para comprimentos de onda variando de 306 a 950 nm em função do raio solar, a linha tracejada mostra a função sem considerar o efeito.	27
Figura 2.7 Sistema de coordenadas esféricas polares.	33
Figura 2.8 Curvas de nível da parte real dos harmônicos esféricos Y_l^m com o termo $(-1)^m$ suprimido, por simplicidade. Curvas positivas são indicadas por linhas contínuas e curvas negativas por linhas pontilhadas. O eixo polar está inclinado a 45° e o equador está indicado com o sinal “+”. Os casos ilustrados são: a) $l = 1, m = 0$; b) $l = 1, m = 1$; c) $l = 2, m = 0$; d) $l = 2, m = 1$; e) $l = 2, m = 2$; f) $l = 3, m = 0$; g) $l = 3, m = 1$; h) $l = 3, m = 2$; i) $l = 3, m = 3$; j) $l = 5, m = 5$; k) $l = 10, m = 5$; l) $l = 10, m = 10$	36

Figura 2.9	Frequência de fluatibilidade N (linha contínua) e frequência acústica característica S_l (linha pontilhada) em função da fração de raio solar para um modelo do Sol. As linhas de frequência acústica estão rotuladas com o valor do grau l . As linhas horizontais indicam as regiões de confinamento para um modo g de frequência $\nu = 100 \mu\text{Hz}$ e para um modo p de grau $l = 20$ e frequência $\nu = 2000 \mu\text{Hz}$	42
Figura 2.10	Diagrama da propagação das ondas para uma seção transversal do interior solar. a) Ondas acústicas dos modos p com pontos de retorno indicados pelos círculos pontilhados. Os raios correspondem a modos de frequência de $3000 \mu\text{Hz}$ para os graus $l = 0$ (raio passando pelo centro), 2, 20, 25, e 75 (raio refletido mais próximo do limite do diagrama). b) Caminhos das ondas de gravidade do modo g de frequência $190 \mu\text{Hz}$ e $l = 5$	43
Figura 2.11	Frequências cíclicas $\nu = \omega/2\pi$ calculadas em função do grau l para um modelo solar comum, ajustado para obter a luminosidade e o raio solares na idade solar. Valores da ordem radial n estão indicados à direita e no topo da figura.	45
Figura 2.12	a) Definição das coordenadas heliográficas para um ponto X no Sol de acordo com definições esféricas. b) Posição do eixo de rotação do Sol em relação ao eixo de rotação da Terra e a linha norte-sul da projeção do disco solar.	46
Figura 2.13	Espectro de frequências ν das oscilações superficiais do Sol em função da ordem azimutal m para $l = 20$. Cada fileira de picos é produzida por um modo p de $n = 15$	48
Figura 2.14	Perfil da rotação diferencial interna do Sol a partir de medidas de heliosismologia global. a) e b) mostram resultados obtidos pelo GONG e pelo HMI, respectivamente, em função do raio solar relativo e c) mostra as frequências de rotação em função do raio solar relativo para latitudes selecionadas, com regiões acinzentadas destacando regiões de grande cisalhamento.	48
Figura 3.1	Caminho de integração da intensidade emergente. P é o ponto variável, z é a variável de integração, Z^* é o eixo de rotação e o eixo que aponta ao observador é Z	54
Figura 3.2	Esquema de uma estrela oscilante. Quando a estrela é perturbada, cada elemento localizado na linha de visada é repostado por outro elemento localizado na mesma casca esférica. Aqui, os elementos M_0 e N_0 do equilíbrio são substituídos por M e N	55

Figura 3.3	Posição média do limbo “ β ” em quilômetros em diferentes filtros do HMI, medidos em relação à linha central. Como comparação, são mostrados os valores para o contínuo e os trânsitos de Vênus e Mercúrio.	56
Figura 3.4	Ajuste senoidal à variação temporal da rotação do limbo $\Psi(t)$, obtido a partir dos dados do filtro do núcleo da linha espectral. O resíduo é mostrado no gráfico inserido para os dados observados e o modelo senoidal.	57
Figura 3.5	Taxa de rotação solar em função da profundidade e da latitude medidas no limbo em comparação com medidas de heliosismologia tradicional. Pontos em cruz indicam as medidas feitas no limbo e pontos em estrela indicam a média angular da rotação feita por efeito Doppler.	58
Figura 3.6	Déficit de rotação a partir de uma tendência linear no raio para a camada de cisalhamento próxima à superfície para as latitudes 0, 30 e 60 graus.	58
Figura 3.7	Espectro de potências do limbo $ \alpha(k, \nu) ^2$. Círculos abertos sobrepostos indicam dados de frequências globais em que $m = 0$. Cruzes cinzas indicam valores de modos do disco completo em que $m \neq 0$ para l e n indicados.	59
Figura 4.1	Telescópio espacial SDO com seus instrumentos, antenas e painéis solares em destaque.	61
Figura 4.2	Exemplo de perfis das linhas obtidas pelo HMI. São mostradas as seis posições em relação à linha solar de absorção do Fe I 6173 Å em preto no centro.	62
Figura 4.3	Esquema exagerado do elemento E1 do filtro de Lyot do HMI. A luz entra pelo polarizador e sai pela placa de quarto de onda.	63
Figura 4.4	Esquema exagerado do interferômetro de Michelson de banda larga presente no HMI.	64
Figura 4.5	Exemplo de imagem de velocidade Doppler feita pelo HMI em 15 de janeiro de 2026.	66
Figura 5.1	a) Esquema fora de escala do ajuste de LDF em um anel estreito de 200 pixels ao longo do limbo solar feito pelo <i>pipeline limbfit</i> . O círculo alaranjado representa a imagem do Sol e os dois aros em preto representam o início e o fim do ajuste. b) Exemplo de LDF (linha sólida) para uma posição do limbo e sua derivada (linha pontilhada). A linha vertical mostra a posição de máximo da derivada da LDF.	68

Figura 5.2 Dados de α e β para a) as 256 posições em $t = 2592000$ segundos após o início da coleta de dados e para b) cerca de seis anos de medidas de intensidade relativa média do limbo “ α ” (acima) e do deslocamento do limbo “ β ” (abaixo) na posição 30.	69
Figura 5.3 Esquema das coordenadas usadas na determinação das componentes do vetor de onda horizontal k_h e do vetor de onda angular k_a	70
Figura 6.1 Diagrama $l - \nu$ do logaritmo do valor absoluto do espectro de potências da parte real da transformada de Fourier bidimensional realizada para $\alpha(\theta, t)$. . .	73
Figura 6.2 Simulação da taxa de rotação aparente Ψ para os valores de velocidade angular obtidos por Cunyningham et al. (2017).	74
Figura 6.3 Diagrama do Sol mostrando as coordenadas heliocêntricas radiais com linhas indicando valores constantes do parâmetro de impacto ρ e do ângulo de posição ψ'	75
Figura 6.4 Variação do ângulo $\varphi(\gamma, \theta)$ ao longo de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$. As curvas em laranja e vermelho indicam valores negativos de $\gamma(t)$, enquanto as curvas azul e verde indicam valores positivos. A reta em roxo representa $\gamma(t) = 0$	78
Figura 6.5 Variação do ângulo $\psi(\gamma, \theta)$ ao longo de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$	79
Figura 6.6 Comportamento do produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$. As linhas verticais pretas traço-ponto indicam posições de destaque em que $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$	80
Figura 6.7 a) Produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para valores positivos de $\gamma(t)$ e b) valor médio do mesmo produto para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ em função de $\gamma(t)$ para $\gamma(t) > 0$	81
Figura 6.8 a) Produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para valores negativos de $\gamma(t)$ e b) valor médio do mesmo produto para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ em função de $\gamma(t)$ para $\gamma(t) < 0$	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Largura à meia altura da linha ao passar pelos filtros que compõem o caminho óptico do HMI.	65
Tabela 6.1	Valores de $\varphi(\gamma, \theta)$ para diferentes γ e θ	76
Tabela 6.2	Valores de $\psi(\gamma, \theta)$ para diferentes γ e θ	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SDO	Solar Dynamics Observatory
HMI	Helioseismic and Magnetic Imager
MDI	Michelson Doppler Imager
GONG	Global Oscillation Network Group
FID	<i>Frame Definition Block ID</i>
LDF	<i>Limb Darkening Function</i>
SP	Sequência Principal
NSSL	<i>Near-Surface Shear Layer</i>
mas	milissegundo de arco
UA	Unidade Astronômica
rad	radiano
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>
ADP	di-hidrogenofosfato de amônio
KDP	di-hidrogenofosfato de potássio
JSOC	HMI/AIA Joint Science Operations Center

LISTA DE SÍMBOLOS

$\odot$	Referente ao Sol.
α	Variação de brilho do limbo.
β	Variação da posição do limbo.
γ	Ângulo de inclinação do eixo de rotação solar em relação à eclíptica.
Γ_1	Primeiro expoente adiabático.
Γ_3	Terceiro expoente adiabático.
δ	Variação lagrangiana; coeficiente termodinâmico (somente Seção 2.1.1).
ε	Taxa de geração de energia nuclear.
η	Espessura óptica.
θ	Colatitude; coordenada angular ao longo do limbo.
κ	Opacidade.
λ	Longitude (somente Seção 2.2.1).
μ	Peso molecular médio.
ν	Frequência cíclica.
ξ	Deslocamento da parcela de fluido.
ρ	Densidade; parâmetro de impacto (somente Capítulo 6).
σ	Constante de Stefan-Boltzmann.
τ	Profundidade óptica.
φ	Ângulo entre vetores $\vec{k}_a$ e $\vec{U}_x$.
ϕ	Longitude.
Φ	Potencial gravitacional.
ψ	Latitude solar.
ψ'	Colatitude heliocêntrica radial.
ω	Frequência angular.
Ω	Velocidade angular de rotação.
a	Constante de densidade de radiação.
A	Área.
B	Coordenada heliográfica latitudinal de um ponto no disco solar.
B_0	Coordenada heliográfica latitudinal do centro do disco solar.
c	Velocidade do som adiabática.
c_P	Calor específico a pressão constante.
e	Espessura do cristal birrefringente.
E	Energia interna por unidade de massa.
g	Aceleração da gravidade.
G	Constante gravitacional.
i	Inclinação do eixo e rotação solar.
I	Intensidade específica.

k	Número de onda; módulo do vetor de onda.
k_B	Constante de Boltzmann.
K	Constante politrópica.
l	Grau angular do harmônico esférico.
L	Número de comprimentos de onda ao longo da circunferência solar; luminosidade; coordenada heliográfica longitudinal de um ponto no disco solar.
L_0	Coordenada heliográfica longitudinal do centro do disco solar.
m	Ordem azimutal do harmônico esférico; massa.
$M_\odot$	Massa solar.
n	Ordem radial do modo de oscilação.
N	Frequência de Brunt-Väisälä.
P	Ângulo do eixo de rotação solar; pressão.
q	Calor por unidade de massa.
r	Coordenada radial; raio.
$R_\odot$	Raio solar.
S	Frequência acústica característica.
t	Tempo.
T	Temperatura.
U	Campo de velocidades.
v	Velocidade.
V	Volume específico.
X	Fração de massa do hidrogênio.
Y	Fração de massa do hélio; harmônico esférico.
Z	Fração de massa de elementos pesados.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 MODOS DE OSCILAÇÃO ACÚSTICOS SOLARES	20
2.1 O SOL	20
2.1.1 Estrutura interna	21
2.1.2 Equilíbrio hidrostático	27
2.1.3 Perturbações e ondas acústicas	29
2.1.4 Separação de variáveis em harmônicos esféricos	33
2.1.5 Aproximação de Cowling e modos de oscilação	40
2.2 ROTAÇÃO	44
2.2.1 Coordenadas heliográficas	45
2.2.2 Velocidade angular	47
2.2.3 Perturbação das frequências	49
3 HELIOSISMOLOGIA NO LIMBO	52
3.1 MODELOS	52
4 HELIOSEISMIC AND MAGNETIC IMAGER (HMI)	60
4.1 PACOTE ÓPTICO	61
4.2 OBTENÇÃO DOS DADOS	64
5 ANÁLISE DE DADOS	67
6 RESULTADOS	72
7 CONCLUSÕES	83
REFERÊNCIAS	89

1 INTRODUÇÃO

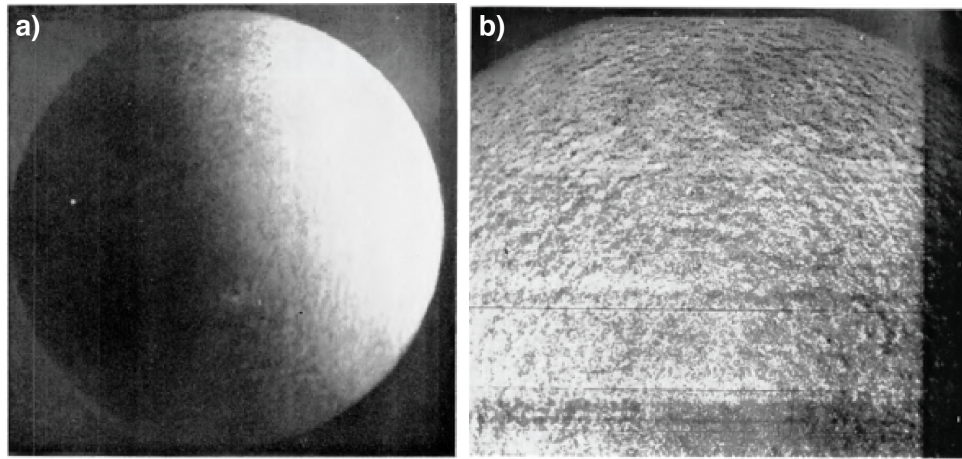
A heliosismologia é a área da astrofísica que estuda as oscilações naturais e ressonantes do Sol. Essas oscilações se propagam pelo interior solar e são detectadas nas camadas superficiais, semelhante ao estudo das ondas sísmicas no globo terrestre, geralmente a partir do deslocamento Doppler das linhas espectrais ou variações de intensidade. A partir desse estudo, é possível inferir as propriedades internas do Sol indiretamente, como sua estrutura, rotação, temperatura, densidade e composição, dado que, ao atuar como uma cavidade ressonante acústica, o Sol possui modos de oscilação que representam ondas estacionárias aprisionadas em cascas esféricas (Gough; Toomre, 1991). As frequências dos modos dependem diretamente da estrutura e dinâmica da região por onde elas viajam e, portanto, medi-las nos permite observar o que antes se imaginava irrealizável.

Por grande parte da história da humanidade, o Sol foi cultuado como uma divindade. Essa é uma atitude perfeitamente legítima, dado que nossa estrela é responsável pela dinâmica da vida na Terra. Na Grécia Antiga, a afirmação do filósofo Anaxágoras de que o Sol seria uma pedra incandescente maior que o Peloponeso foi usada contra ele para determinar seu exílio (Russell, 1961).

A observação do Sol como objeto físico, sujeito ao estudo, data de milhares de anos, com a detecção de manchas solares por astrônomos chineses (Chaplin, 2006). A partir da descoberta de sua rotação, diversos estudos contribuíram para nossa compreensão atual do Sol, como a descoberta das linhas espectrais escuras por Joseph von Fraunhofer (Fraunhofer, 1817), a caracterização da atividade solar, rotação diferencial e coordenadas heliográficas por Richard Carrington (Carrington, 1863) e sua composição com a tese de Cecilia Payne-Gaposchkin (Payne-Gaposchkin, 1925).

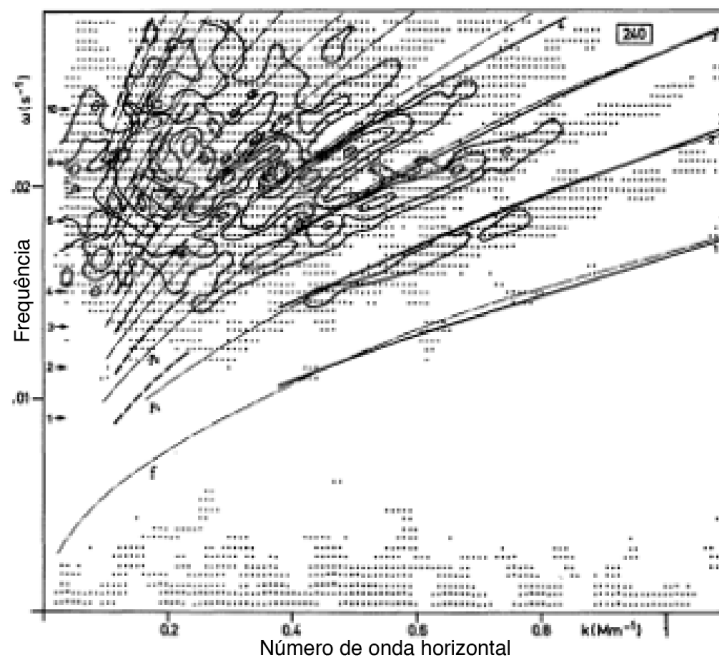
A descoberta da presença de oscilações na fotosfera do Sol ocorreu na década de 60 a partir do trabalho de Leighton, Noyes e Simon (1962), apesar de acreditarem, na época, que o fenômeno observado vinha da atmosfera solar. Os pesquisadores usaram um espectroheliógrafo para subtrair imagens feitas na asa azul e na asa vermelha do espectro solar ao longo do tempo, criando um mapa de velocidades em um diagrama de efeito Doppler. Esse foi o primeiro achado das oscilações de cinco minutos, visto na Figura 1.1. Foi somente com os trabalhos de Ulrich (1970) e Leibacher e Stein (1971) que se propôs que as observações correspondiam a ondas acústicas globais geradas na zona convectiva aprisionadas no interior do Sol entre as camadas superficiais, que as refletem para baixo, e camadas internas profundas, que as refletem para cima devido ao aumento da velocidade do som, associado ao aumento da temperatura. A partir de observações com alta resolução, Deubner (1975) conseguiu produzir diagramas de potência que mostravam padrões de cristas discretas (Figura 1.2), coincidindo com as previsões teóricas. Esse foi o início da heliosismologia como é hoje conhecida, permitindo usar as ondas acústicas para investigar regiões profundas do interior solar.

Figura 1.1: Primeiras imagens das oscilações solares de 5 minutos. a) Efeito global de rotação e b) campos de velocidade locais.



Fonte: Leighton, Noyes e Simon (1962).

Figura 1.2: Diagrama de potência realizado para as oscilações observadas na fotosfera solar. As curvas de nível indicam as maiores concentrações de sinal e as linhas paralelas apontam os diferentes modos radiais.



Fonte: adaptado de Deubner (1975).

Fisicamente, as propriedades do interior solar são obtidas a partir das oscilações por meio do cálculo da velocidade do som das ondas acústicas, que está intimamente ligada às mudanças de densidade e temperatura do meio. A frequência dos modos de oscilação depende da velocidade do som ao longo do seu caminho em diferentes camadas. Diferentes modos de oscilação penetram diferentes camadas e, ao mapear os modos, é possível criar um mapa da velocidade do som dentro da estrela e inferir suas propriedades. Os modos de oscilação acústicos, objetos deste trabalho, têm a pressão como força restauradora. Outro modo de oscilação, observado em outras estrelas com estrutura interna diferente da solar, possui a gravidade como força restauradora.

Ao longo dos anos, diversos projetos foram desenvolvidos para realizar medidas contínuas do Sol, necessário para a análise de frequências com a precisão requerida pela heliosismologia. Destacam-se os projetos *Global Oscillation Network Group* (GONG), iniciado em 1995, que consiste em uma rede de seis estações de observação ao longo do globo, permitindo a coleta de dados do Sol continuamente (Harvey et al., 1996); e *Solar and Heliospheric Observatory* (SOHO), uma missão espacial lançada em 1995 com o objetivo de estudar diversos aspectos do Sol com diversos instrumentos, sendo um deles o *Michelson Doppler Imager* (MDI), que gera imagens de velocidade Doppler de alta resolução (Domingo; Fleck; Poland, 1995). Como sucessor direto do MDI, em 2010 a comunidade científica passou a contar com o *Helioseismic and Magnetic Imager* (HMI), a bordo do *Solar Dynamics Observatory* (SDO), que possui maior resolução espacial e temporal.

Tradicionalmente, a heliosismologia se utiliza de medidas de efeito Doppler realizadas no disco solar. O uso do disco completo é conhecido como heliosismologia global, enquanto que o uso de regiões do disco é denominado heliosismologia local. Para identificar os modos na heliosismologia global, são realizadas decomposições em harmônicos esféricos e transformadas de Fourier no tempo para construir diagramas de potência em duas dimensões em que se localizam as cristas características. Para heliosismologia local, em três dimensões, constroem-se diagramas em formato de cone, em que é possível discernir a direção da frente de onda (Hill, 1988).

Um método alternativo, que exploramos nesse trabalho, é a heliosismologia do limbo solar. Em vez de medidas de efeito Doppler, são analisadas variações de intensidade do limbo, graças à alta resolução proporcionada pelos dados do HMI. Apesar de menos usada, a heliosismologia no limbo possibilita que se investiguem as propriedades das camadas superficiais e internas do Sol por outra perspectiva. De particular interesse é a chamada “camada de cisalhamento próxima à superfície” (NSSL, do inglês *Near-Surface Shear Layer*), objeto de estudo desse método em trabalhos recentes (Cunyngham et al., 2017).

Este trabalho dá prosseguimento à análise das oscilações solares no limbo iniciadas por Mehret (2015) e Gois (2020). No último, procurou-se desenvolver uma correção para o ângulo B_0 proveniente do movimento do eixo de rotação solar em relação à eclíptica conforme a Terra translada ao redor do Sol, sendo fonte de incerteza nas medidas no limbo. Aqui, devido

à falta de compreensão de como a análise ao redor do limbo observa partes específicas dessa região, foi feito um estudo teórico de como a análise angular se relaciona com as coordenadas solares e como isso contribui para a perturbação das frequências de oscilação observadas.

Além disso, desenvolveram-se as equações que explicam o comportamento das oscilações e uma revisão da bibliografia pertinente à investigação das oscilações solares a partir do limbo, buscando compreender como se desenvolveu esse método e como ele contribui para conclusões feitas por heliosismologia do disco solar.

O Capítulo 2 aborda os conceitos fundamentais necessários para compreender a física solar e o estudo de suas oscilações. São discutidas as principais propriedades do Sol, as equações fundamentais da estrutura estelar com desenvolvimento das perturbações ressonantes considerando o equilíbrio adiabático, a descrição dos modos com uso de harmônicos esféricos, a caracterização dos diferentes modos de oscilação e as equações básicas da rotação solar pertinentes ao estudo da perturbação das frequências de oscilação.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão da bibliografia acerca dos estudos de heliosismologia realizados no limbo solar e sua contribuição para essa ciência. Neste capítulo, são exibidas as equações usadas para o desenvolvimento da descrição geométrica da observação do limbo.

O Capítulo 4 descreve o instrumento HMI usado para a coleta de dados do projeto. Uma visão geral do satélite SDO é apresentada junto com seus outros instrumentos, alguns dos principais componentes do HMI são descritos para a compreensão de seu funcionamento e da natureza dos dados coletados, além de como obtê-los.

O Capítulo 5 mostra como foi realizada a análise dos dados coletados para gerar os diagramas de potências e quais são as bases teóricas usadas para o desenvolvimento da geometria da linha de visada de observação do limbo. É dada a descrição dos códigos em Python usados para o tratamento de dados.

O Capítulo 6 apresenta os resultados encontrados para as expressões que descrevem a geometria do limbo solar e sua contribuição para a perturbação das frequências observadas.

O Capítulo 7 dá as conclusões finais e perspectivas futuras necessárias para a continuidade do trabalho.

2 MODOS DE OSCILAÇÃO ACÚSTICOS SOLARES

A heliosismologia é o estudo das oscilações do Sol como ferramenta para investigar seu interior e suas propriedades dinâmicas. Para compreender como funciona, é necessário entender a estrutura básica do Sol e as equações que o governam.

2.1 O SOL

O Sol é uma estrela anã típica na Sequência Principal (SP) de tipo espectral G2V e magnitude absoluta +4,83. Sua proximidade com a Terra faz dele a principal estrela no céu e a principal fonte de energia para ciclos biológicos e processos climáticos. Por conta disso, é a estrela mais bem conhecida entre todas as que podem ser observadas, sendo responsável pela compreensão de diversos processos da astrofísica. Modelos solares e testes de datação radioativa de meteoritos e rochas lunares estimam que o Sol nasceu de uma nuvem de gás interestelar que se contraiu há aproximadamente $4,6 \times 10^9$ anos (Priest, 2020; Carroll; Ostlie, 2017), quando seu núcleo ficou quente o suficiente para converter hidrogênio em hélio. O Sol está na metade de sua fase de queima de hidrogênio na SP, quando ao final se expandirá em uma gigante vermelha, eventualmente se tornando uma nebulosa planetária com uma anã branca como núcleo.

A composição química do Sol é obtida, principalmente, através de análise espectroscópica de sua fotosfera. Como em outras estrelas, devido às altas temperaturas, não há compostos químicos em seu interior e os átomos estão quase completamente ionizados, sendo o Sol constituído principalmente de hidrogênio e hélio. As abundâncias relativas são comumente caracterizadas pela massa X , Y e Z de hidrogênio, hélio e elementos pesados¹, respectivamente. A partir de modelos solares, pode-se inferir sua composição interna, como as calculadas pelo Modelo S: $X = 0,7373$, $Y = 0,2447$ e $Z = 0,0181$ (Gough, 2013).

Entre as principais características, temos a massa, cujo valor é conhecido com alta precisão graças ao produto $GM_{\odot}$, onde G é a constante gravitacional, como $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$ kg (Christensen-Dalsgaard, 2002). Devido ao vento solar, existe uma perda de massa de 10^9 kg/s (Priest, 2020); o raio definido pela *International Astronomical Union* (IAU) como $R_{\odot} = 6,957 \times 10^8$ m (Mamajek et al., 2015) e com medida precisa de $R_{\odot} = 695\,946 \pm 15$ km a partir do trânsito de Vênus de 2012 (Emilio et al., 2014), possui pequena oblatividade, com uma diferença entre o raio equatorial e o raio polar de somente $7,20 \pm 0,49$ mas (Kuhn; Bush; Emilio; Scholl, 2012); a luminosidade radiativa solar média, dada como $L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26}$ W (Mamajek et al., 2015); a temperatura efetiva, obtida diretamente da luminosidade para a fotosfera, com o

¹Ou metais, como são denominados todos os outros elementos em Astrofísica que não são hidrogênio e hélio. A abundância desses elementos é: $Z \equiv 1 - X - Y$.

valor de $T_{eff\odot} = 5772$ K; a irradiância, que correspondente à energia eletromagnética total média integrada sob todos os comprimentos de onda incidentes por unidade de área e tempo à distância de 1 Unidade Astronômica (UA) da Terra, tem valor definido de $S_{\odot} = 1361$ W m⁻² (Mamajek et al., 2015). É também conhecido como constante solar, mas não é uma constante, dado que a luminosidade do Sol varia dentro de dias e até minutos (Stix, 2012). A rotação superficial do Sol pode ser determinada a partir do deslocamento aparente de estruturas na fotosfera, como manchas solares. O Sol possui rotação diferencial e não gira como um corpo rígido; sua rotação equatorial tem um período de aproximadamente 26 dias, enquanto o período nos polos é de cerca de 35 dias (Priest, 2020); seu eixo de rotação está inclinado em $i = 7,25^\circ$ em relação à normal à eclíptica.

As grandezas acima estão relacionadas por

$$S_{\odot} = L_{\odot}/4\pi A^2 \quad (2.1)$$

e

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{eff}^4, \quad (2.2)$$

onde $\sigma = 5,67051 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Sabendo a massa e o raio, é possível calcular a densidade média solar como $\bar{\rho} = 1,408$ g/cm³, isto é, pouco maior que a da água.

2.1.1 Estrutura interna

A descrição da estrutura interna de qualquer estrela baseia-se em um conjunto de equações fundamentais que relacionam as variáveis físicas em seu interior e que constituem a base para o cálculo dos modelos estelares. Esse conjunto só é válido para o equilíbrio hidrostático, que será definido na próxima seção, e para outras simplificações necessárias, como desprezar os efeitos eletromagnéticos e de rotação. São elas:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \varepsilon_n - \varepsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.7)$$

onde r é o raio da estrela, m é a massa, ρ é a densidade, P é a pressão, ε representa a energia liberada por unidade de massa por segundo, ε_n é a taxa de geração de energia nuclear e ε_ν é a

energia perdida carregada por neutrinos, c_P é o calor específico à pressão constante, definido como

$$c_P := \left(\frac{dq}{dT} \right)_P, \quad (2.8)$$

sendo dq a variação de calor com a temperatura T , t é o tempo, δ é um coeficiente termodinâmico da equação de estado, dado por

$$\delta := - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P, \quad (2.9)$$

∇ é o gradiente logarítmico de temperatura, definido como

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P}, \quad (2.10)$$

X_i é a fração de unidade de massa do núcleo químico de tipo i , r_{ji} é a taxa de reação que produz o núcleo i a partir do núcleo j e r_{ik} é a taxa que consome o núcleo i para formar o núcleo k (Kippenhahn; Weigert; Weiss, 2012).

As equações (2.3) a (2.7) representam a descrição lagrangiana do interior estelar, que usa a massa como elemento de variação e representa um observador que acompanha o movimento do plasma, em oposição à descrição euleriana, que usa o raio como coordenada independente e representa um observador estacionário. A equação (2.3) está relacionada à distribuição de massa da estrela, associando o diferencial de cascas esféricas ao quanto há de massa acumulada. A equação (2.4) representa o equilíbrio hidrostático, relacionando a força gravitacional por unidade de área à variação de pressão na massa presente. Essa é a equação fundamental da estabilidade da estrela, dado que a pressão interna deve se equilibrar à força gravitacional que impulsiona o material para dentro.

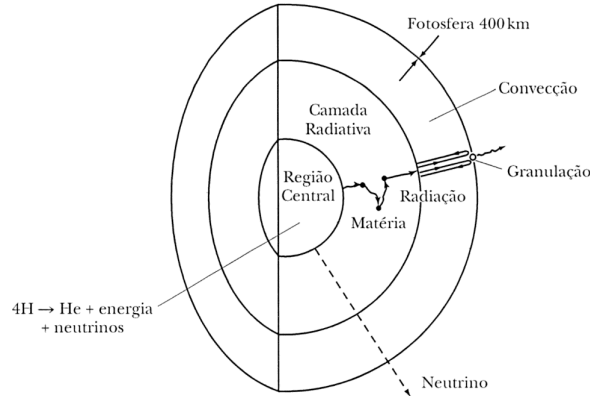
A equação (2.5) mostra a conservação de energia, balanceando as contribuições de ganhos e perdas da energia interna da estrela. O transporte de energia é definido pela equação (2.6), que associa como a temperatura varia dependendo do mecanismo de transporte de energia, dado pela natureza do gradiente de temperatura da equação (2.10).

Finalmente, a evolução das abundâncias químicas é dada pelo conjunto de equações (2.7), que mostra como cada elemento químico muda com o tempo devido às reações nucleares.

Ao se assumir conhecidas as funções de pressão, temperatura e composição química, é possível construir uma equação de estado do plasma $\rho = \rho(P, T, X_i)$ e encontrar, da mesma forma, as outras propriedades termodinâmicas, de produção e perda de energia e de opacidade, esta última definida na equação (2.12). Com essas relações em mãos e assumindo-se algumas condições simplificadoras, como simetria esférica, massa total constante (sem ganhos ou perdas de massa²) e desconsiderando efeitos de rotação e campo magnético, é possível construir modelos estelares, como se faz para o Sol.

²A perda de massa no Sol devido ao vento solar pode ser negligenciada nesse caso, pois representa uma fração muito pequena de sua massa total.

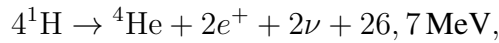
Figura 2.1: Esquema representando o interior solar.



Fonte: Friaça, Pino, Sodre e Jatenco-Pereira (2003).

A estrutura interna do Sol é inferida a partir de estudos heliosismológicos, pois as oscilações solares são sensíveis às condições internas. A organização em camadas é bem definida, cada uma caracterizada por diferentes mecanismos de transporte de energia e propriedades físicas. Conforme pode ser visto no esquema da Figura 2.1, a divisão consiste em três regiões: o núcleo, a zona radiativa e a zona convectiva.

O núcleo solar atua como um reator termonuclear convertendo hidrogênio em hélio através da cadeia próton-próton (cadeia pp)



responsável pela maior parte da produção de sua energia.

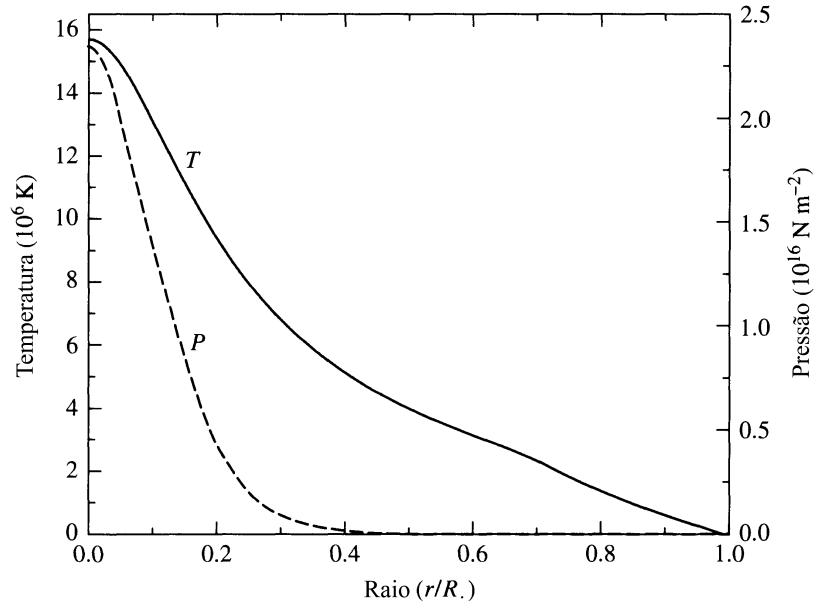
Metade da massa solar está presente no núcleo, que abrange $0,25R_{\odot}$, possui temperatura de aproximadamente 15 milhões de Kelvin e densidade de $1,6 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$. As Figuras 2.2 e 2.3 evidenciam as variações de temperatura, pressão e densidade em função do raio solar. É possível observar que os valores diminuem consideravelmente após $r/R_{\odot} = 0,3$. A Figura 2.4 mostra como a maior parte da luminosidade produzida no interior solar ocorre no núcleo, a derivada da curva (linha pontilhada) mostra o local com a maior contribuição de energia.

Acima do núcleo até aproximadamente $0,7R_{\odot}$ tem-se a camada radiativa, em que a energia gerada abaixo viaja gradualmente para fora do Sol. Essa região é tão opaca que os fótons são absorvidos e reemitidos após percorrerem apenas alguns centímetros, fazendo com que a viagem do núcleo às camadas superficiais leve muito tempo, o suficiente para a energia gerada na cadeia pp na forma de raios gama aumentar em comprimento de onda até a luz visível. Nessa camada, o gradiente de temperatura da equação (2.6) é substituído por um gradiente radiativo ∇_{rad} , dado por

$$\nabla = \nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa LP}{mT^4}, \quad (2.11)$$

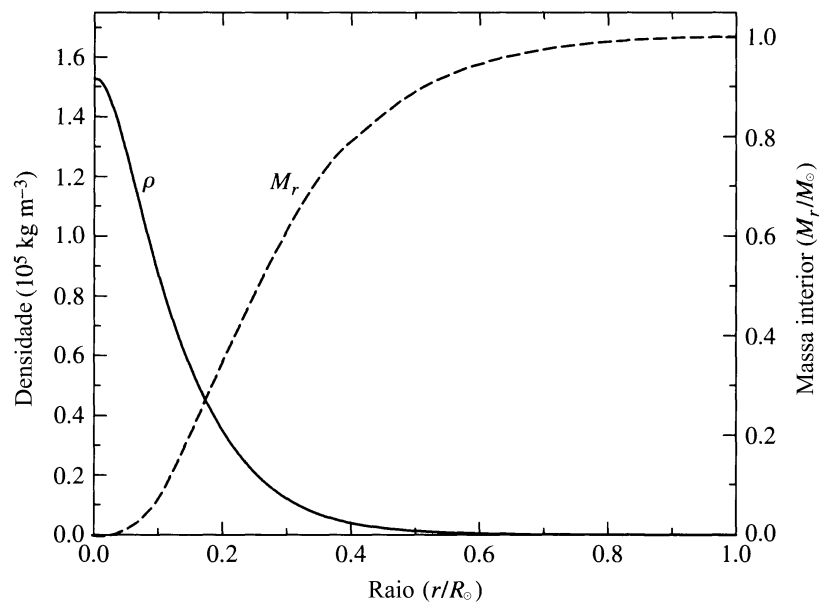
com fluxo líquido para fora devido ao fato de a temperatura decrescer de dentro para fora. Na equação (2.11), a é a constante de densidade de radiação $a = 7,57 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$, c é a

Figura 2.2: Temperatura (linha sólida) e pressão (linha tracejada) no interior solar em função do raio.



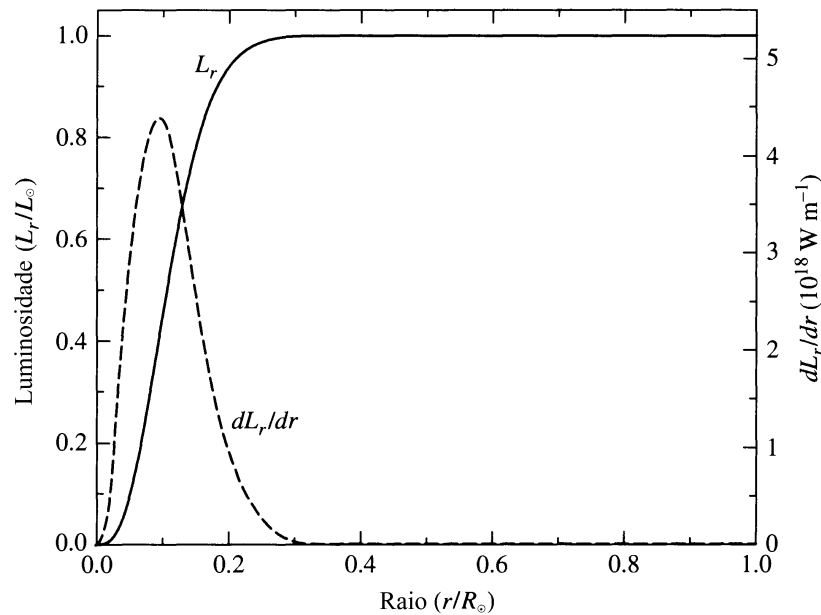
Fonte: adaptado de Carroll e Ostlie (2017).

Figura 2.3: Perfil de densidade (linha sólida) e acúmulo de massa (linha tracejada) no interior solar em função do raio.



Fonte: adaptado de Carroll e Ostlie (2017).

Figura 2.4: Produção de luminosidade (linha sólida) e sua derivada (linha tracejada) no interior solar em função do raio.



Fonte: adaptado de Carroll e Ostlie (2017).

velocidade da luz e κ é a opacidade.

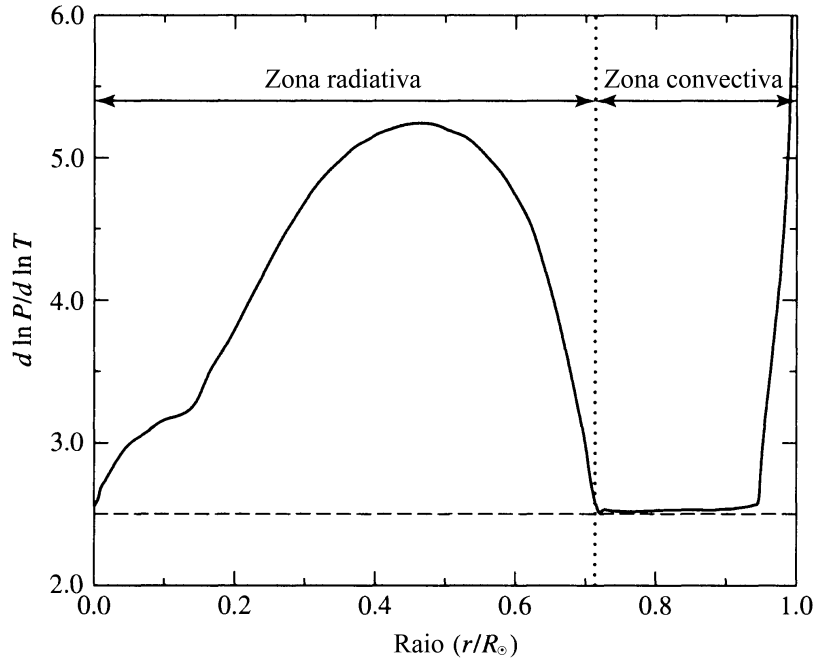
Os últimos $0,3R_\odot$ do interior solar são dominados por uma zona convectiva, onde o gradiente de temperatura fica muito grande e o plasma se torna instável, fazendo com que a difusão radiativa dê lugar ao transporte convectivo de energia (Figura 2.5). Nessa camada, bolhas de plasma flutuam para fora devido à sua temperatura maior que as camadas imediatamente abaixo. A turbulência da zona convectiva é a fonte principal de excitação dos modos de oscilação acústica (modos p). Na base da zona convectiva, em transição com a camada radiativa, temos uma região de grande cisalhamento radial denominada tacoclina (Spiegel; Zahn, 1992), importante na geração do campo magnético solar e na origem do ciclo de atividade.

Por fim, conforme a Figura 2.1, a fotosfera constitui a camada visível do Sol e marca a transição entre o seu interior e sua atmosfera, dado que o plasma passa de opaco para transparente, indo para fora. Essa mudança ocorre quando a profundidade óptica atinge o valor de aproximadamente $\tau \approx 2/3$, onde se define o raio solar (Mamajek et al., 2015). A profundidade óptica é definida por

$$\tau(r) = \int_r^\infty \kappa \rho dr', \quad (2.12)$$

que integra o caminho percorrido pela luz ao longo da linha de visada multiplicado pelo produto da opacidade e da densidade, equivalente a um coeficiente de absorção volumétrico. A opacidade mede o quanto o meio absorve ou espalha a radiação que o atravessa. Ela pode se dar na forma de processos como o espalhamento de elétrons livres, transições livre-livre, ligado-livre e ligado-ligado e a absorção do íon de hidrogênio negativo. Esses processos são fortemente

Figura 2.5: Inverso do gradiente de transporte de energia em função do raio. A linha tracejada horizontal representa o limite de estabilidade de um gás ideal monoatômico ($\nabla = 0,4$). A linha pontilhada vertical mostra quando o gradiente sobe e cruza a linha de estabilidade, dando início ao transporte convectivo. Próximo a $r/R_\odot = 1,0$, o gráfico dispara ao atingir uma região superadiabática, associada ao drástico decaimento da densidade do plasma.



Fonte: adaptado de Carroll e Ostlie (2017).

dependentes do comprimento de onda e, portanto, a opacidade varia para diferentes regiões observadas do espectro (Mullan, 2009).

Para camadas superiores da fotosfera, a temperatura diminui, formando um gradiente que pode ser observado por meio do efeito de escurecimento de limbo. Próximo ao centro, o disco solar parece mais brilhante e quente do que próximo ao limbo, pois vemos camadas mais profundas ao observar na direção normal à superfície e camadas mais superficiais quando a linha de visada é tangencial (Stix, 2012). Ao observar no centro do disco, a linha de visada penetra no gás solar até onde $\tau \approx 1$, enquanto a observação no limbo penetra apenas até $\tau \approx 0,1$. Essa diferença equivale a uma profundidade entre 100 e 200 km (Mullan, 2009) na fotosfera, o gás mais profundo é mais quente.

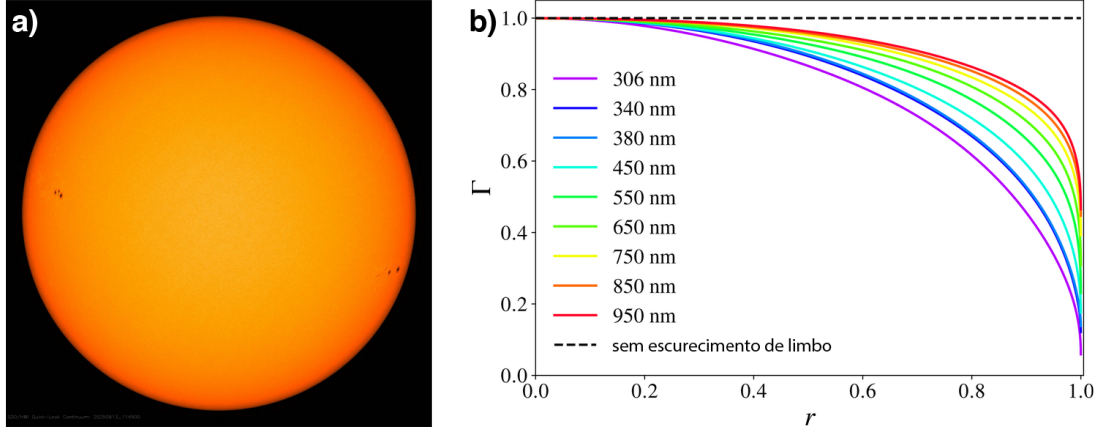
A variação na intensidade dI_λ de um raio de luz de comprimento de onda λ é proporcional a sua intensidade I_λ por

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda dr. \quad (2.13)$$

O sinal negativo mostra que a intensidade decresce com a distância percorrida devido à absorção de fótons. Portanto, ao observarmos o Sol em cores diferentes, vemos diferentes altitudes da fotosfera.

A Figura 2.6 mostra o efeito do escurecimento de limbo para uma imagem do Sol

Figura 2.6: Efeito de escurecimento de limbo. a) Imagem do Sol, em que se observa uma diminuição do brilho do centro para as bordas. b) Função de escurecimento de limbo Γ para comprimentos de onda variando de 306 a 950 nm em função do raio solar, a linha tracejada mostra a função sem considerar o efeito.



Fonte: a) NASA e b) adaptado de Trees, Wang e Stammes (2021).

e para diferentes comprimentos de onda. O escurecimento na região do vermelho é menor porque o principal processo é o íon negativo de hidrogênio, enquanto para comprimentos de onda menores a absorção aumenta com transições ligado-livre.

2.1.2 Equilíbrio hidrostático

Como mencionado na seção anterior, a equação (2.4) mostra como a estrela mantém seu equilíbrio hidrostático, compensando a força de contração proveniente da gravidade da matéria com a pressão de expansão gerada no núcleo. O Sol, por estar em sua fase estável dentro da SP, não mostra grandes variações de temperatura ou acelerações de massa e, portanto, as forças atuando em um elemento de massa são balanceadas. Esse cenário ideal não leva em conta efeitos de rotação, campos magnéticos ou atividade atmosférica.

Pode-se assumir o plasma no Sol como um contínuo com configuração esfericamente simétrica e suas propriedades podem ser especificadas com funções da posição $\vec{r}$ e do tempo t , na descrição euleriana. A função de massa $m = m(\vec{r}, t)$ varia em relação à posição e ao tempo de acordo com

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho \vec{v} dt, \quad (2.14)$$

onde introduzimos a densidade local $\rho(\vec{r}, t)$ e a velocidade local instantânea $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz, as derivadas parciais de segunda ordem da equação (2.14) são iguais independentemente da ordem de diferenciação, dada a continuidade estabelecida, portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m}{\partial t \partial r} &= \frac{\partial^2 m}{\partial r \partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (4\pi r^2 \rho) &= \frac{\partial}{\partial r} (-4\pi r^2 \rho \vec{v}), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho \vec{v}),$$

em que temos, do lado direito da equação, a componente radial do operador divergente em coordenadas esféricas. Como o sistema é considerado esfericamente simétrico, não há contribuição nas direções angulares. Assim sendo, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.15)$$

que é a equação de continuidade hidrodinâmica. O termo nulo do lado direito da equação informa que não há fontes ou sumidouros de massa.

A equação do movimento do plasma, considerando apenas a força de aceleração da gravidade $\vec{g}$ e a pressão local termodinâmica $P(\vec{r}, t)$, é escrita como

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{g}, \quad (2.16)$$

em que a força gravitacional é dada pelo potencial gravitacional

$$\vec{g} = -\nabla \Phi, \quad (2.17)$$

que satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.18)$$

Ao realizar a derivada total d/dt na equação (2.16), vemos como varia a velocidade de uma porção do plasma acompanhando o movimento. É interessante definir a equação a partir da derivada parcial em relação ao tempo, obtendo uma derivada temporal em um local fixo. Para isso, considerando uma quantidade α , usamos a seguinte relação:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + \nabla \alpha \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \alpha. \quad (2.19)$$

Aplicando na equação (2.16), temos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \rho \vec{g}. \quad (2.20)$$

Por fim, pode-se encontrar a relação entre ρ e P a partir da primeira lei da termodinâmica,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt}, \quad (2.21)$$

que deve ser satisfeita. Na relação, E é a energia interna por unidade de massa e $V = 1/\rho$ é o volume específico. Usando a relação (2.19) na equação de continuidade (2.15), obtemos

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.22)$$

que dá a taxa de mudança da densidade acompanhando o movimento. Podemos formular em função de V , com

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.23)$$

que denota a taxa de expansão de um dado volume do gás, acompanhando o movimento, com o divergente da velocidade. Dadas as duas últimas equações, temos

$$\frac{dV}{dt} = V \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt},$$

que, substituindo na equação (2.21), resulta em

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v}. \quad (2.24)$$

Para o cálculo de frequências de oscilações solares, os termos de calor e transferência de energia na equação (2.24) podem ser negligenciados, assumindo que as oscilações ocorrem adiabaticamente (Stix, 2012). Isso pode ser feito porque os tempos característicos de transferência de calor e mudança de temperatura são muito maiores que os períodos das oscilações (Christensen-Dalsgaard, 2014) e, portanto, não há troca de calor significativa durante uma oscilação. Pode-se representar a equação (2.24) com o uso de expoentes adiabáticos:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left(\frac{dP}{dt} - \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right), \quad (2.25)$$

onde os expoentes adiabáticos são definidos por

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}}, \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}}. \quad (2.26)$$

Ignorando o termo do calor na equação (2.25), temos a relação da pressão com a densidade,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.27)$$

que, junto das equações de continuidade (2.15), da equação de Poisson (2.18) e do movimento (2.20), formam um conjunto de equações usadas para o movimento adiabático.

2.1.3 Perturbações e ondas acústicas

A descrição hidrodinâmica do Sol, ou de uma estrela qualquer, com o uso das equações da seção anterior é muito complexa, até mesmo para modelos numéricos. Algumas simplificações são necessárias e podem ser feitas, dado que as oscilações solares observadas têm amplitudes muito menores que as escalas características do Sol e podem ser tratadas como pequenas perturbações em volta do estado de equilíbrio, assumido como estático (Toutain; Berthomieu; Provost, 1999). O método de simplificação aqui usado é o mesmo desenvolvido por

Christensen-Dalsgaard (2014).

Um dado elemento do plasma pode ser especificado por sua posição inicial $\vec{r}_0$ e o movimento por sua posição $\vec{r}(t, \vec{r}_0)$ em função do tempo. Da mesma forma, todas as quantidades em equilíbrio podem ser diferenciadas pelo subscrito zero (0). A descrição euleriana da perturbação do meio dá a variação das quantidades em um ponto do espaço como função do tempo e é denotada pelo apóstrofo ('), enquanto a formulação lagrangiana dá a mesma variação para um dado elemento em função do tempo e é identificada pelo delta (δ).

Uma pequena perturbação da estrutura de equilíbrio faz a pressão ser escrita como

$$P(\vec{r}, t) = P_0(\vec{r}) + P'(\vec{r}, t), \quad (2.28)$$

onde P é a pressão perturbada no ponto $\vec{r}$ e no tempo t , P_0 é a pressão de equilíbrio e P' é a perturbação da pressão inserida naquele ponto, dada a descrição euleriana. No referencial que acompanha o movimento perturbado, a descrição lagrangiana considera um elemento de plasma que se move de $\vec{r}_0$ para $\vec{r}_0 + \delta\vec{r}$ devido à perturbação. A pressão é então dada por

$$\begin{aligned} \delta P(\vec{r}) &= P(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) - P_0(\vec{r}_0) \approx P(\vec{r}_0) + \delta\vec{r} \cdot \nabla P_0 - P_0(\vec{r}_0) \\ &= P'(\vec{r}_0) + \delta\vec{r} \cdot \nabla P_0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

O modelo hidrostático assume que não há velocidades. Para as perturbações, a velocidade é dada como a variação temporal do deslocamento,

$$\vec{v} = \frac{\partial \delta\vec{r}}{\partial t}. \quad (2.30)$$

Com uso das equações (2.28) e (2.29), podemos obter o conjunto de equações do movimento adiabático estabelecido na seção anterior para o movimento perturbado. A equação da continuidade (2.15) se torna, descartando os termos de equilíbrio e de ordem superior,

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0, \quad (2.31)$$

ou, integrando em relação ao tempo com uso da equação (2.30),

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \delta\vec{r}) = 0. \quad (2.32)$$

De forma similar, temos para a equação do movimento (2.16)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P' + \rho_0 \vec{g}' + \rho' \vec{g}_0, \quad (2.33)$$

onde $\vec{g}' = -\nabla \Phi'$, que representa a perturbação do potencial gravitacional e satisfaz a equação

de Poisson perturbada,

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (2.34)$$

Por fim, para adquirir a perturbação do movimento adiabático da equação (2.27), partimos da equação (2.25) para obter

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left(\frac{\partial \delta P}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right) \quad (2.35)$$

e, como feito anteriormente, eliminamos o termo do calor para a forma lagrangiana,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial t} &= \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t}, \\ \delta P &= \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \delta \rho, \end{aligned} \quad (2.36)$$

na qual foi feita a integração em relação ao tempo. A equação mostra que, quando o fluido é comprimido ($\delta \rho > 0$), a pressão aumenta proporcionalmente, gerando uma força restauradora. A partir desta, pode-se obter a forma euleriana

$$P' + \vec{\delta r} \cdot \nabla P_0 = \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \left(\rho' + \vec{\delta r} \cdot \nabla \rho_0 \right), \quad (2.37)$$

que mostra a pressão perturbada num ponto fixo com o elemento de plasma deslocado de uma região de pressão de equilíbrio, equivalente à densidade.

As perturbações definidas podem ser modeladas como ondas simples de movimento, como é o caso aproximado das oscilações solares. Para isso, podemos considerar a situação de equilíbrio estático em que todas as derivadas temporais são descartadas e não há transporte de plasma, isto é, $\vec{v} = 0$ na equação do movimento (2.20) e ela se torna

$$\nabla P_0 = \rho_0 \vec{g}_0 = -\rho_0 \nabla \Phi_0, \quad (2.38)$$

enquanto a equação de Poisson (2.18) se mantém inalterada,

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (2.39)$$

Podemos considerar o caso espacialmente homogêneo, em que todas as derivadas do equilíbrio somem e a gravidade na equação (2.38) é insignificante, o que é uma aproximação razoável quando a estrutura de equilíbrio varia mais lentamente que as oscilações. Da equação do movimento perturbado (2.33), temos

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\delta r}}{\partial t^2} = -\nabla P', \quad (2.40)$$

em que, aplicando o divergente, resulta em

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \vec{\delta r}) = -\nabla^2 P'. \quad (2.41)$$

Ao eliminar o divergente com o uso da equação (2.32) e substituindo a pressão perturbada pela densidade perturbada da relação adiabática (2.37), obtemos

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho' = c_0^2 \nabla^2 \rho', \quad (2.42)$$

em que

$$c_0^2 \equiv \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \quad (2.43)$$

tem dimensão de velocidade ao quadrado. A equação (2.42) tem o formato de uma equação de onda com soluções na forma de ondas planas,

$$\rho' = A \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right]. \quad (2.44)$$

Substituindo em (2.42), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= -\omega^2 \rho', \\ c_0^2 \nabla^2 \rho' &= c_0^2 \nabla \cdot (i \vec{k} \rho') = -c_0^2 |\vec{k}|^2 \rho', \end{aligned}$$

isto é,

$$\omega^2 = c_0^2 |\vec{k}|^2, \quad (2.45)$$

que, quando satisfeita por ω , é a relação de dispersão para ondas sonoras planas. A velocidade de propagação dessas ondas é a velocidade adiabática do som c_0 . Se considerarmos a equação de estado pela lei dos gases ideais, em que aproximamos para um gás completamente ionizado e desconsideramos efeitos de degenerescência e pressão de radiação, como

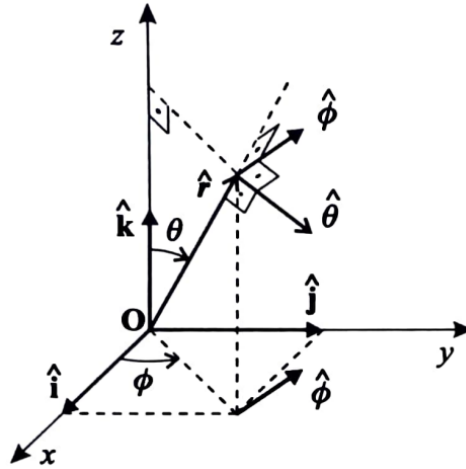
$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu m_u}, \quad (2.46)$$

em que k_B é a constante de Boltzmann, m_u é a unidade de massa atômica e μ é o peso molecular médio, a velocidade do som é dada por

$$c_0^2 = \frac{\Gamma_{1,0} k_B T_0}{\mu m_u}. \quad (2.47)$$

Dessa equação, podemos ver que a velocidade do som ao quadrado, isto é, a velocidade de propagação das ondas acústicas ao quadrado, tem relação direta com a temperatura do meio, que acompanha as mudanças de pressão e densidade. A velocidade do som adiabática c_0 é essen-

Figura 2.7: Sistema de coordenadas esféricas polares.



Fonte: Machado (2012).

cialmente determinada por T_0/μ dado que, se a temperatura é maior, as partículas se movem mais rapidamente e colidem com mais frequência, aumentando a velocidade; enquanto, a uma determinada temperatura de equilíbrio, elementos mais leves se movem mais rapidamente e colidem com mais frequência, resultando em uma velocidade do som maior do que a observada para elementos mais pesados.

Podemos ainda mostrar, com a seguinte solução real,

$$\vec{\delta r} = \frac{c_0^2}{\rho_0 \omega^2} A \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \vec{k}, \quad (2.48)$$

que o deslocamento, e, portanto, a velocidade, está na direção do vetor de onda $\vec{k}$.

2.1.4 Separação de variáveis em harmônicos esféricos

Assumindo um sistema com simetria esférica no estado de equilíbrio, podemos encontrar as equações que descrevem pequenas oscilações não radiais, nas quais as perturbações não preservam essa simetria. Serão usadas coordenadas esféricas polares (Figura 2.7), em que r é a distância do centro, θ é a colatitude (ângulo a partir do eixo polar), ϕ é a longitude e $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\theta$ e $\hat{a}_\phi$ são seus respectivos versores. Dado que os coeficientes das equações lineares listadas até aqui dependem apenas da profundidade, as variáveis angulares podem ser separadas. Para isso, o deslocamento $\vec{\delta r}$ e o vetor de onda $\vec{k}$ são separados em componentes radiais e horizontais,

$$\vec{\delta r} = \xi_r \hat{a}_r + \vec{\xi}_h, \quad (2.49)$$

$$\vec{k} = k_r \hat{a}_r + \vec{k}_h, \quad (2.50)$$

e é possível encontrar o conjunto de equações do movimento oscilatório para essas componentes. O subscrito “h” das equações acima representa a componente tangencial do vetor, dado

por

$$\vec{\xi}_h = \xi_\theta \hat{a}_\theta + \xi_\phi \hat{a}_\phi. \quad (2.51)$$

O mesmo é considerado para outros vetores com o subscrito. Convém também definir as componentes horizontais do gradiente, divergente e laplaciano com ∇_h , que retorna apenas as componentes angulares.

A equação de continuidade (2.32) é, portanto, escrita como

$$\rho' = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 r^2 \xi_r) - \rho_0 \nabla_h \cdot \vec{\xi}_h, \quad (2.52)$$

no qual, como exemplo, temos

$$\nabla_h \cdot \vec{\xi}_h = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \xi_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi}.$$

A componente horizontal da equação do movimento perturbado (2.33) é

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}_h}{\partial t^2} = -\nabla_h P' + \rho_0 \vec{g}' = -\nabla_h P' - \rho_0 \nabla_h \Phi', \quad (2.53)$$

em que é possível aplicar o divergente horizontal, uma vez que o gradiente horizontal das quantidades em equilíbrio é nulo,

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_h \cdot \vec{\xi}_h = -\nabla_h^2 P' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi'. \quad (2.54)$$

Podemos eliminar o divergente com o uso da equação (2.52) e obter

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] = -\nabla_h^2 P' - \rho_0 \nabla_h^2 \Phi'. \quad (2.55)$$

A componente radial da equação (2.33) é

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial r} + \rho' \frac{\partial \vec{g}_0}{\partial r} + \rho_0 \frac{\partial \vec{g}'}{\partial r} = -\frac{\partial P'}{\partial r} - \rho' g_0 - \rho_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial r}, \quad (2.56)$$

na qual a derivação na aceleração da gravidade no equilíbrio foi feita considerando que $\vec{g}_0 = g_0 \hat{a}_r$. A equação de Poisson com perturbação (2.34) é escrita como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_h^2 \Phi' = 4\pi G \rho'. \quad (2.57)$$

Podemos agora separar a variação das perturbações em θ e ϕ em função de harmônicos esféricos Y_l^m representados por

$$Y_l^m = (-1)^m c_{lm} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi), \quad (2.58)$$

em que $P_l^m(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre, dado por

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d \cos^{l+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^l, \quad (2.59)$$

e c_{lm} é a constante de normalização determinada por

$$c_{lm}^2 = \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}, \quad (2.60)$$

tal que a integral de $|Y_l^m|^2$ sobre a esfera unitária seja igual a 1. O harmônico esférico (2.58) é caracterizado pelo grau l e índice azimutal m , sendo que l mede o número de onda horizontal total na superfície por

$$k_h = \frac{L}{R_\odot}, \quad (2.61)$$

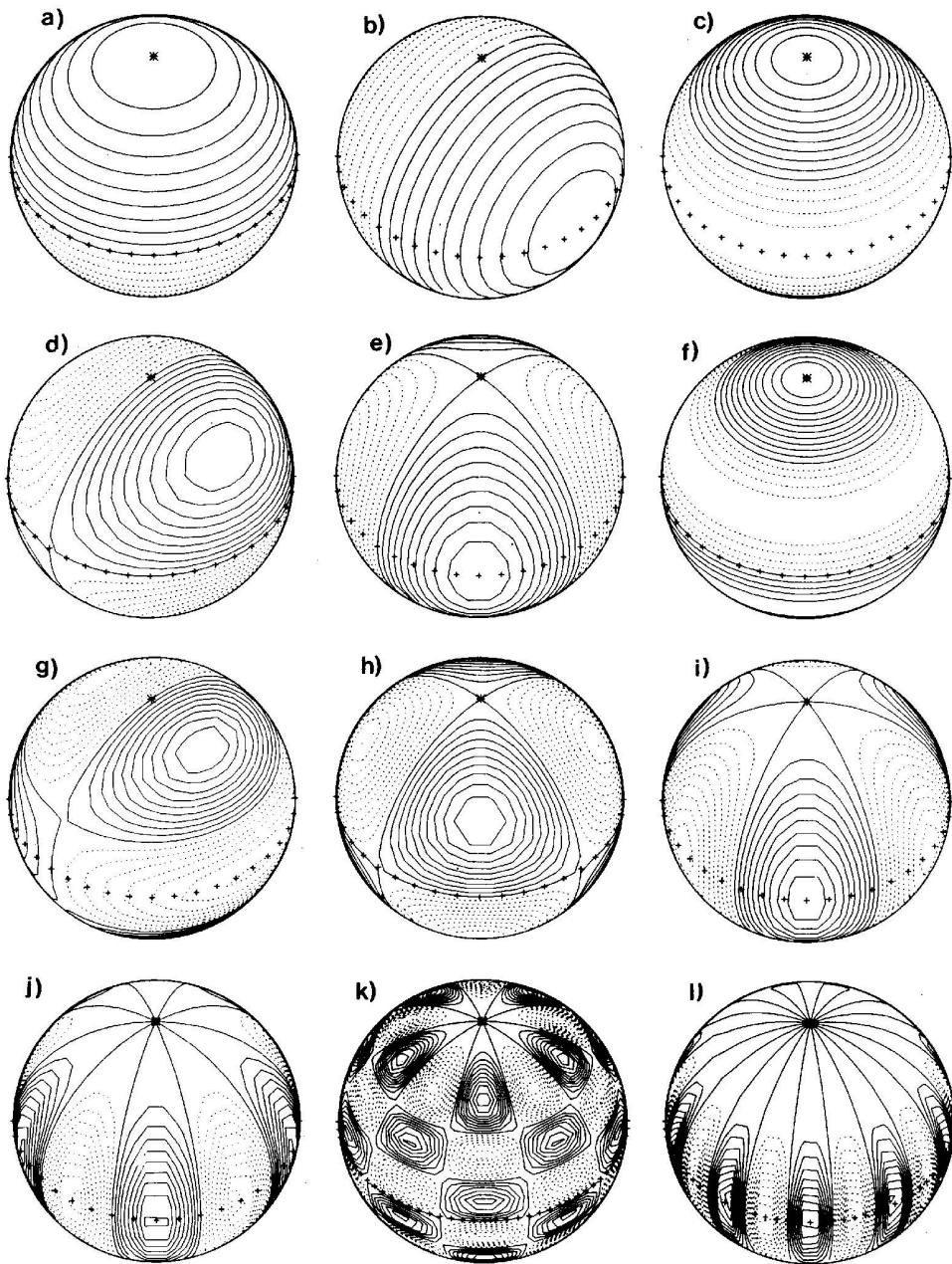
em que $L = \sqrt{l(l+1)}$ está relacionado com o comprimento da onda,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_h} = \frac{2\pi R_\odot}{L}. \quad (2.62)$$

L representa, aproximadamente, o número de comprimentos de onda ao longo da circunferência solar, enquanto o grau l mostra o número de nodos presentes na fotosfera solar (ou camada atmosférica observada) e o módulo do índice azimutal $|m|$ especifica quantos desses modos são linhas de longitude, isto é, passam pelos polos. Para as oscilações solares e para a maior parte das estrelas pulsantes, o eixo de pulsação coincide com o eixo de rotação (Aerts; Christensen-Dalsgaard; Kurtz, 2010). O número de nodos correspondentes a linhas de colatitude é igual a $l - |m|$ e os valores de m variam de $-l$ para l , existindo $2l + 1$ modos para cada grau l .

A Figura 2.8 ilustra alguns harmônicos esféricos. Nela, podemos discernir alguns modos de oscilação individuais. Entre eles, os modos zonais ($m = 0$), vistos em a), c) e f), apresentam somente linhas nodais de colatitude e, para $l \gtrsim 10$, possuem maior amplitude no limbo solar (Toutain; Berthomieu; Provost, 1999; Cunnyngham et al., 2017). Quando $m = l$, como em b), e), i), j) e l), têm-se os chamados modos setoriais, que para alto l se propagam com maior amplitude somente pelo equador (Christensen-Dalsgaard; Gough; Toomre, 1985). Os modos mais comuns são os intermediários, chamados modos tesserais, como em d), g), h) e k). Na realidade, as oscilações observadas são uma superposição de todos esses modos, com graus que variam entre 0 e mais de 1500 (Christensen-Dalsgaard, 2014). A forma como é feita a medida determina quais serão melhor identificados. Por exemplo, ao se realizar uma medida do Sol como um todo, serão observados os modos com baixo grau ($l \leq 4$), dado que as contribuições positivas e negativas dos outros modos tendem a se cancelar. Portanto, mede-se como o Sol oscila como um todo, método conhecido como heliosismologia global. Ao considerar regiões restritas da fotosfera solar, os modos de maior grau são mais facilmente identificados, dado que as oscilações globais têm um efeito homogêneo e são dificilmente diferenciadas. Essa

Figura 2.8: Curvas de nível da parte real dos harmônicos esféricos Y_l^m com o termo $(-1)^m$ suprimido, por simplicidade. Curvas positivas são indicadas por linhas contínuas e curvas negativas por linhas pontilhadas. O eixo polar está inclinado a 45° e o equador está indicado com o sinal “+”. Os casos ilustrados são: a) $l = 1, m = 0$; b) $l = 1, m = 1$; c) $l = 2, m = 0$; d) $l = 2, m = 1$; e) $l = 2, m = 2$; f) $l = 3, m = 0$; g) $l = 3, m = 1$; h) $l = 3, m = 2$; i) $l = 3, m = 3$; j) $l = 5, m = 5$; k) $l = 10, m = 5$; l) $l = 10, m = 10$.



Fonte: Christensen-Dalsgaard (2014).

última análise é determinada por heliosismologia local.

É característico do harmônico esférico que

$$\nabla_h^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.63)$$

E as variáveis das equações (2.55) a (2.57) são expressas na seguinte forma:

$$\xi_r(r, \theta, \phi, t) = \sqrt{4\pi} \tilde{\xi}_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t), \quad (2.64)$$

na qual $\tilde{\xi}_r$ representa a amplitude. Da equação (2.29), vemos que quando as perturbações eulerianas são dadas por essa forma, as perturbações lagrangianas também o são, portanto, podemos dividi-las por $Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t)$ como fator comum. As equações de amplitude se tornam

$$\omega^2 \left[\tilde{\rho}' + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r \right) \right] = \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\tilde{P}' + \rho_0 \tilde{\Phi}' \right), \quad (2.65)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r = -\frac{d\tilde{P}'}{dr} - \tilde{\rho}' g_0 - \rho_0 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr}, \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \tilde{\Phi}' = 4\pi G \tilde{\rho}', \quad (2.67)$$

$$\left(\delta\tilde{P} - \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \delta\tilde{\rho} \right) = \rho_0 (\Gamma_{3,0} - 1) \delta\tilde{q}, \quad (2.68)$$

e, assumindo oscilações adiabáticas, $\delta q = 0$, a equação (2.68) torna-se

$$\tilde{\rho}' = \frac{\rho_0}{\Gamma_{1,0} P_0} \tilde{P}' + \rho_0 \tilde{\xi}_r \left(\frac{1}{\Gamma_{1,0} P_0} \frac{dP_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (2.69)$$

Como consequência da simetria esférica assumida, as equações acima não dependem do índice azimutal m .

Para oscilações radiais, com $l = 0$, podemos eliminar a perturbação do campo gravitacional aplicando a equação (2.52), sem considerar a parte horizontal, na equação (2.67), obtendo

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho_0 \tilde{\xi}_r \right), \quad (2.70)$$

ou, considerando que a força gravitacional deve ser finita em $r = 0$,

$$\frac{d\tilde{\Phi}'}{dr} = -4\pi G \rho_0 \tilde{\xi}_r. \quad (2.71)$$

Da equação (2.53), temos que a componente horizontal do deslocamento é dada por

$$\vec{\xi}_h = \sqrt{4\pi}\tilde{\xi}_h(r) \left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{a}_\phi \right) \exp(-i\omega t), \quad (2.72)$$

em que

$$\tilde{\xi}_h(r) = \frac{1}{r\omega^2} \left(\frac{1}{\rho_0} \tilde{P}' + \tilde{\Phi}' \right). \quad (2.73)$$

Assim, o vetor de deslocamento físico é escrito como

$$\vec{\delta r} = \sqrt{4\pi}\Re \left\{ \left[\tilde{\xi}_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) \hat{a}_r + \tilde{\xi}_h(r) \left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \hat{a}_\phi \right) \right] \exp(-i\omega t) \right\}. \quad (2.74)$$

Por fim, podemos usar a equação (2.69) para eliminar $\tilde{\rho}'$ das equações (2.65) – (2.67). Como trataremos somente das amplitudes de oscilações adiabáticas em relação à posição de equilíbrio com descrição euleriana, pode-se suprimir, a partir deste ponto, o til das amplitudes e o subscrito zero (0) das quantidades de equilíbrio, para simplicidade. Ao começar pela equação (2.65), obtemos

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho} \left[\frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} - \frac{1}{c^2} \right] P' + \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi', \quad (2.75)$$

em que se fez uso da velocidade do som adiabática (2.43). Introdz-se a frequência acústica característica S_l como

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} = k_h^2 c^2. \quad (2.76)$$

A equação (2.75) é simplificada para

$$\frac{d\xi_r}{dr} = - \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} \right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1 \right) P' + \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \Phi'. \quad (2.77)$$

Para a equação (2.66), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dP'}{dr} &= \rho \left[\omega^2 - g \left(\frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) \right] \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} P' - \rho \frac{d\Phi'}{dr} \\ &= \rho (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} P' - \rho \frac{d\Phi'}{dr}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

em que se introduziu a frequência de Brunt-Väisälä N , tal que

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (2.79)$$

A frequência de Brunt-Väisälä N , ou frequência de flutuabilidade, representa a estabilidade convectiva de um elemento do plasma. Como exemplo, se um elemento de fluido é deslocado para cima (no sentido positivo de $\vec{r}$) adiabaticamente, seu comportamento dependerá

da densidade do meio para onde ele foi deslocado. Se $N^2 > 0$, o elemento é mais pesado que o novo ambiente e a força de empuxo o leva de volta à sua posição original, fazendo com que o elemento execute um movimento oscilatório ao redor de sua posição de equilíbrio. Se $N^2 < 0$, o elemento é então mais leve que seu ambiente e o empuxo o leva para mais longe de sua posição de equilíbrio, na mesma direção, correspondendo a uma instabilidade convectiva.

Para a equação (2.67), temos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = 4\pi G \left(\frac{P'}{c^2} + \frac{\rho \xi_r}{g} N^2 \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi'. \quad (2.80)$$

As equações (2.77), (2.78) e (2.80) constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias para as quatro variáveis dependentes ξ_r , P' , Φ' e $d\Phi'/dr$. Para oscilações radiais, os termos de Φ' podem ser eliminados com uso da equação (2.71), reduzindo o sistema para as duas variáveis ξ_r e P' . Além disso, todos os coeficientes das equações são reais e pode-se esperar que a frequência ω^2 seja também real, caracterizando o caso oscilatório para $\omega^2 > 0$.

Condições de contorno devem ser estabelecidas para encontrar as soluções das equações. No centro do Sol, em $r = 0$, pode-se tanto assumir que o deslocamento deve sumir quanto que as perturbações permaneçam finitas (Stix, 2012). Para as condições de superfície, existem diversas abordagens que podem ser tomadas, dado que o Sol não possui uma superfície definida. Ao invés disso, possui uma extensa atmosfera em que as oscilações podem se propagar até evanescer. Dependendo do que se busca calcular, é possível estabelecer limites para a evanescência das oscilações ou um limite de raio solar para considerar onde certas frequências serão refletidas para o centro. Portanto, a escolha é feita para o tipo de modelo solar escolhido.

Como exemplo, pode-se considerar as camadas externas obedecendo a relações politrópicas, útil para estrelas com camadas convectivas exteriores, como o Sol. A relação de um politropo associa a pressão e a densidade de acordo com

$$P = K \rho^{1+1/n}, \quad (2.81)$$

em que K é a constante politrópica e n o índice politrópico. Ambos os termos variam dependendo da relação que se deseja estabelecer e que descreva melhor a estrela em questão. Este modelo relaciona a pressão e a densidade sem precisar considerar a equação de energia e seu transporte, facilitando o estudo das oscilações. Para cada índice n , existe um conjunto único de frequências de oscilações adiabáticas permissíveis (Aerts; Christensen-Dalsgaard; Kurtz, 2010).

Junto com as equações de contorno, as equações devem ser resolvidas numericamente para encontrar as autofrequências de ω que permitem soluções não triviais. Cada autofrequência corresponde a um modo de oscilação.

2.1.5 Aproximação de Cowling e modos de oscilação

Para tratar das equações (2.77), (2.78) e (2.80) analiticamente, a perturbação do potencial gravitacional pode ser descartada a partir da aproximação feita por Cowling (1941) quando o grau l e o índice radial $|n|$ são grandes. A razão da aproximação de Cowling está no fato de que o grande número de mudanças do sinal do potencial, calculadas pela equação de Poisson, faz com que as contribuições se anulem e o efeito total do potencial seja muito pequeno. A validade da aproximação foi confirmada numericamente por Robe (1968) e Christensen-Dalsgaard (1991), com diferença de menos de 1% nas autofunções calculadas.

Podemos, portanto, descartar a equação (2.80) e as equações (2.77) e (2.78) tornam-se

$$\frac{d\xi_r}{dr} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr}\right) \xi_r + \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) P', \quad (2.82)$$

$$\frac{dP'}{dr} = \rho (\omega^2 - N^2) \xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} P'. \quad (2.83)$$

Para oscilações de alto índice radial, as funções perturbadas variam muito mais rapidamente que as funções do equilíbrio e podemos descartar os termos com derivadas de quantidades em equilíbrio:

$$\frac{d\xi_r}{dr} = \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) P', \quad (2.84)$$

$$\frac{dP'}{dr} = \rho (\omega^2 - N^2) \xi_r. \quad (2.85)$$

Essas equações podem ser combinadas em uma única equação diferencial de segunda ordem para ξ_r na forma de

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) \xi_r, \quad (2.86)$$

em que se descartaram novamente as derivadas de quantidades em equilíbrio. A equação (2.86) nos dá uma boa aproximação das equações de oscilações não radiais, permitindo descrever as propriedades dos modos de oscilação.

Observa-se que as frequências características definidas por (2.76) e (2.79) têm um papel importante em determinar o comportamento das oscilações. Isso se torna mais visível assumindo

$$K(r) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right), \quad (2.87)$$

tal que

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = -K(r) \xi_r. \quad (2.88)$$

Dessa forma, fica claro que a função de ξ_r solução da equação diferencial é uma função harmônica quando $K(r)$ é positivo e uma função exponencial para $K(r)$ negativo. Como as variáveis dependem de r , que muda consideravelmente as quantidades dependentes conforme a oscilação

viaja pelo interior solar, podemos apenas afirmar que a função será localmente oscilatória ou localmente exponencial.

A solução é oscilatória quando

$$\text{i. } |\omega| > |N| \quad \text{e} \quad |\omega| > S_l$$

ou

$$\text{ii. } |\omega| < |N| \quad \text{e} \quad |\omega| < S_l$$

e é exponencial quando

$$\text{iii. } |N| < |\omega| < S_l$$

ou

$$\text{iv. } S_l < |\omega| < |N|.$$

O que define quais serão as frequências observadas é a estrutura interna do Sol. Para uma certa região, a solução oscilante pode ser dominante, decaindo a uma solução exponencial conforme a onda se afasta. A solução oscilatória é dita confinada nessa região e o espectro de frequências oscilatórias é discreto para essas frequências confinadas. O limite de uma região de solução oscilatória para uma solução exponencial é chamado de ponto de retorno daquela frequência, onde $K(r) = 0$. As soluções exponenciais representam regiões com ondas evanescentes.

Das soluções oscilatórias, classificam-se como modos p os modos de alta frequência que satisfazem a solução (i) e modos g as soluções que satisfazem (ii), com baixa frequência. As regiões de confinamento dos modos p e g para um modelo solar podem ser vistas na Figura 2.9. A frequência acústica característica S_l tende ao infinito no núcleo do modelo solar, quando $r \rightarrow 0$, e decresce próximo a $r = R_\odot$, devido à diminuição do valor de c (2.43). Como foi esclarecido na seção anterior, para a equação (2.79), $N^2 > 0$ representa um movimento oscilatório para regiões convectivamente estáveis. Como visto na Seção 2.1.1, a região dos últimos $0,3R_\odot$ do interior solar é reconhecida como sendo uma zona convectiva e $N^2 < 0$, assim sendo, não existem frequências observáveis dos modos g nessa região, conforme se observa na figura.

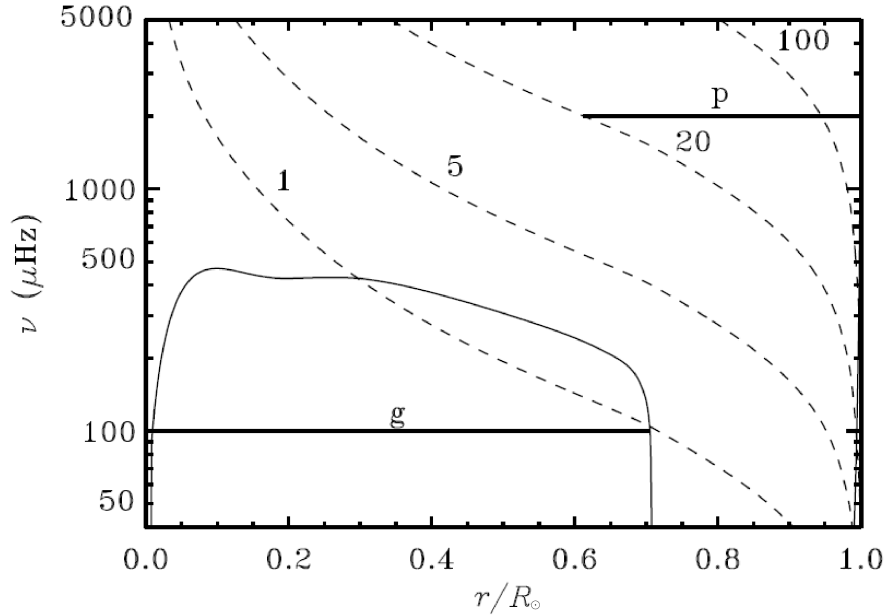
Os modos p estão confinados entre as camadas superficiais e um ponto de retorno r_t localizado onde se satisfaz $S_l^2(r_t) = \omega^2$, que é dado por

$$r_t = \frac{\sqrt{l(l+1)}c(r_t)}{\omega}, \quad (2.89)$$

que mostra que o ponto de retorno depende do grau l e da frequência ω . Os modos p solares observados na região de 5 minutos possuem $\omega \gg N$ e K pode ser aproximado por

$$K(r) \simeq \frac{1}{c^2} (\omega^2 - S_l^2). \quad (2.90)$$

Figura 2.9: Frequência de fluabilidade N (linha contínua) e frequência acústica característica S_l (linha pontilhada) em função da fração de raio solar para um modelo do Sol. As linhas de frequência acústica estão rotuladas com o valor do grau l . As linhas horizontais indicam as regiões de confinamento para um modo g de frequência $\nu = 100 \mu\text{Hz}$ e para um modo p de grau $l = 20$ e frequência $\nu = 2000 \mu\text{Hz}$.



Fonte: modificado de Christensen-Dalsgaard (2014).

Em vista disso, a dinâmica dos modos p é determinada somente pela variação da velocidade do som com o raio e eles nada mais são que ondas acústicas estacionárias com a pressão como força restauradora³. A equação (2.90) pode ser obtida da relação de dispersão (2.45) já estabelecida para ondas sonoras planas com uso do quadrado do comprimento do vetor de onda (2.50),

$$|\vec{k}|^2 = k_r^2 + k_h^2, \quad (2.91)$$

com a componente horizontal k_h definida em (2.61), para um raio qualquer, e a definição da frequência acústica característica (2.76). A relação torna-se

$$\omega^2 = c^2 \left[k_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right],$$

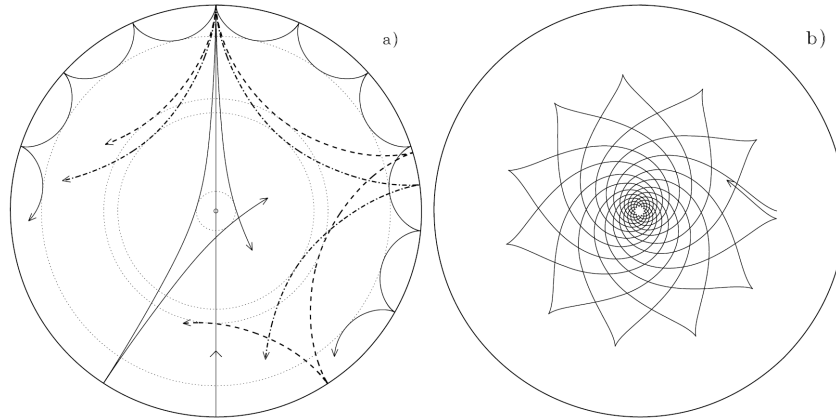
$$k_r^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - S_l^2), \quad (2.92)$$

onde k_r^2 é identificado como sendo K nas equações (2.90) e (2.88).

Um modo é considerado como uma superposição de ondas sonoras em propagação e a reflexão interior dos modos p pode ser entendida pela teoria de raios luminosos (Gough, 1984). A Figura 2.10a mostra uma representação dos raios de propagação das ondas sonoras. À me-

³Por isso o nome, de *pressure modes*.

Figura 2.10: Diagrama da propagação das ondas para uma seção transversal do interior solar. a) Ondas acústicas dos modos p com pontos de retorno indicados pelos círculos pontilhados. Os raios correspondem a modos de frequência de $3000 \mu\text{Hz}$ para os graus $l = 0$ (raio passando pelo centro), 2, 20, 25, e 75 (raio refletido mais próximo do limite do diagrama). b) Caminhos das ondas de gravidade do modo g de frequência $190 \mu\text{Hz}$ e $l = 5$.



Fonte: Cunha et al. (2007).

didada que as ondas se propagam para o interior do Sol, as partes mais profundas da frente de onda estarão em um ambiente mais quente e com velocidade do som maior. Como consequência, as ondas viajam mais rapidamente e a direção de propagação é desviada da direção radial, conforme pode ser visto da relação inversa da componente radial na equação (2.92). No ponto de retorno (casca pontilhada da figura), a onda viaja horizontalmente e é refletida. Nas camadas superficiais, as ondas são refletidas em diferentes alturas, dependendo da sua frequência, devido ao rápido declínio da densidade. Da equação (2.89), quando l é pequeno, o ponto de retorno é próximo do centro, enquanto que para l grande as ondas ficam confinadas às camadas superficiais.

Para $l \gtrsim 40$, os modos estão presos na camada convectiva (Christensen-Dalsgaard, 2014).

Para os modos g, os pontos de retorno são determinados pela condição $N = \omega$. Pode-se observar na Figura 2.9 que essa condição impõe que deva existir um ponto de retorno próximo ao centro do Sol e outro na base da zona convectiva, para frequências próximas ao máximo permitido pelo modelo, os modos ficam confinados no interior solar (Figura 2.10b).

Modos g de alta ordem devem obedecer $\omega^2 \ll S_l^2$ e K pode ser aproximado por

$$K(r) \simeq \frac{1}{\omega^2} (N^2 - \omega^2) \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (2.93)$$

A dinâmica dos modos g é dominada pela frequência de flutuabilidade N em função de r e a gravidade atua como força restauradora dominante para a perturbação de densidade⁴. Os modos

⁴Modos g são assim definidos pelo termo *gravity modes*, não relacionado com ondas gravitacionais do espaço-tempo.

são ondas de gravidade confinadas com a seguinte relação de dispersão:

$$\omega^2 = \frac{N^2}{1 + k_r^2/k_h^2}, \quad (2.94)$$

na qual se pode obter a componente radial do número de onda, como foi feito anteriormente para os modos p, como

$$k_r^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad (2.95)$$

e que está de acordo com (2.93).

A possível medição dos modos g solares poderia nos dar informações sobre seu núcleo, algo valioso para o refinamento dos modelos de estruturas solares e estelares em geral. Infelizmente, estes modos nunca foram observados no Sol (Appourchaux et al., 2000; Appourchaux; Pallé, 2013; Fossat et al., 2017).

Na Figura 2.11, pode-se observar curvas que representam as diferentes frequências de oscilação calculadas em função do grau angular l classificadas pela ordem radial n , que representa o número de nodos na direção radial da oscilação, isto é, o número de zeros em ξ_r . O zero em $r = 0$ só é contabilizado para o modo radial, onde $l = 0$. Para $n > 0$, temos os modos p, em que a pressão atua como força restauradora. A frequência desses modos aumenta conforme os índices l e n , em que este último está indicado para as diferentes curvas à direita e no topo da figura. Para $n < 0$, temos os modos g, em que a gravidade atua como força restauradora. Para esses modos, a frequência diminui com o aumento do número de nodos. Para $n = 0$, temos um modo fisicamente distinto dos modos p, denominado modo f⁵. Ele se comporta como uma onda de superfície em água profunda (Stix, 2012) e sua relação de dispersão é

$$\omega^2 = gk_h, \quad (2.96)$$

que depende somente da gravidade e do comprimento de onda e não da estrutura interna da camada, de forma análoga ao comportamento de um pêndulo.

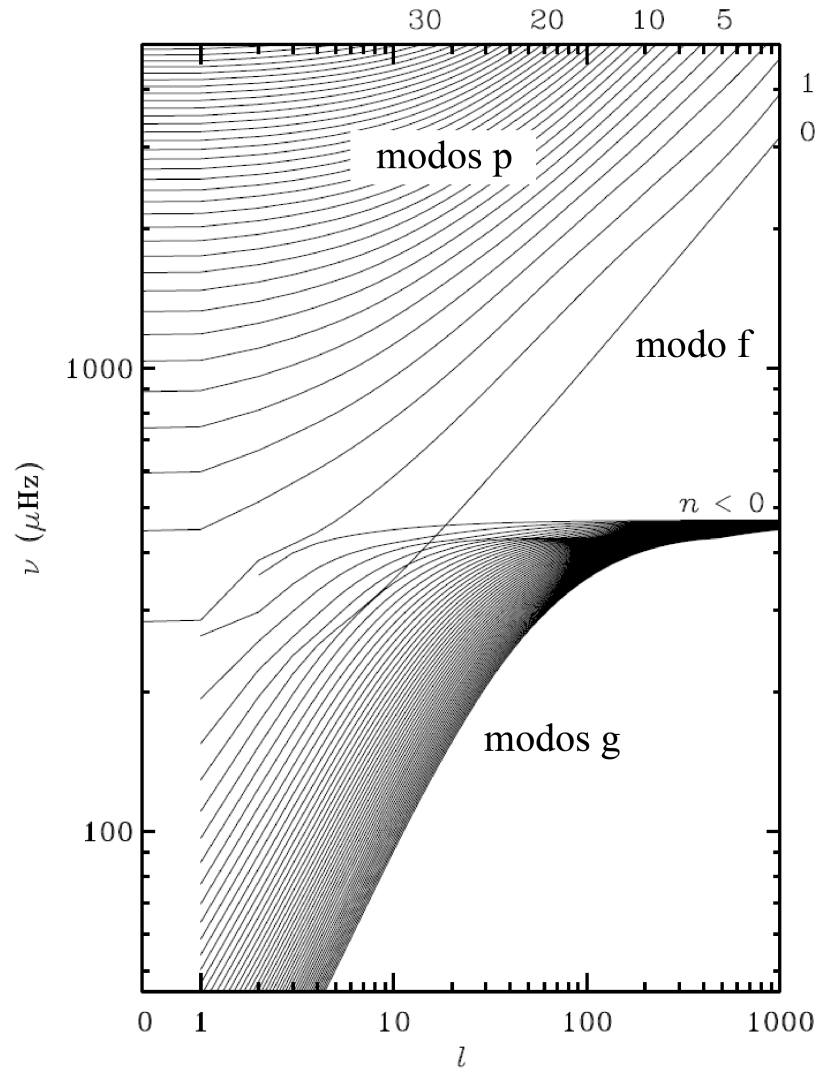
As oscilações predominantes na fotosfera solar, com período de 5 minutos, correspondem às frequências próximas do valor de $\nu = 3,3 \text{ mHz} = 3300 \mu\text{Hz}$ e $\omega = 0,021 \text{ s}^{-1}$.

2.2 ROTAÇÃO

Logo após a observação do céu com uso do telescópio, descobriu-se que o Sol possui um movimento de rotação em torno de seu próprio eixo devido a diversas observações feitas por Galileu Galilei, Johannes Fabricius, Christoph Scheiner e Thomas Harriot nos anos 1610. Em seu trabalho de 1626 intitulado *Rosa Ursina*, Scheiner estuda manchas solares com critério e apresenta evidências da variação dos caminhos dessas manchas devido à rotação associada à inclinação do eixo solar em relação à eclíptica e de que a passagem das manchas era mais demo-

⁵De *fundamental*.

Figura 2.11: Frequências cíclicas $\nu = \omega/2\pi$ calculadas em função do grau l para um modelo solar comum, ajustado para obter a luminosidade e o raio solares na idade solar. Valores da ordem radial n estão indicados à direita e no topo da figura.



Fonte: modificado de Aerts, Christensen-Dalsgaard e Kurtz (2010).

rada em latitudes solares maiores (Curtis, 1912; Carrasco; Muñoz-Jaramillo; Gallego; Vaquero, 2022). A explicação desse fato está associada à rotação diferencial das camadas superficiais do Sol que hoje são conhecidas.

2.2.1 Coordenadas heliográficas

A direção do eixo de rotação solar no espaço, como é conhecida hoje, foi estabelecida por Carrington (1863) a partir do movimento próprio de manchas solares. Essa direção é determinada a partir de dois elementos rotacionais, ou elementos de Carrington, dados por i , o ângulo de inclinação entre o plano da eclíptica e o plano equatorial do Sol (já mencionado na Seção 2.1 como $i = 7,25^\circ$) e Ω , a longitude eclíptica do nodo ascendente do equador solar, isto é, o ângulo entre o ponto de interseção do equador solar e a eclíptica e o equinócio vernal

em 09 de novembro de 1853 e na data de começo de cada nova rotação, após o período acima, a longitude do centro do disco solar é 0. Um ponto X qualquer no disco solar é definido por suas coordenadas (L, B) .

2.2.2 Velocidade angular

A velocidade angular $\Omega(r, \psi)$ ⁶ do Sol é uma função variável com o raio r e a latitude ψ , ou seja, diferentes partes do Sol giram em velocidades diferentes, caracterizando seu fenômeno de rotação diferencial. O estudo da variação da velocidade interna é determinante para a compreensão da evolução e das propriedades gerais do Sol.

Diversos estudos, como os de Brown et al. (1989), Schou et al. (1998), Howe (2009), fazem uso dos modos p para inferir a velocidade angular em camadas internas do Sol. Isso se faz possível porque, em uma estrela esfericamente simétrica e não rotativa, as frequências de todos os modos com diferentes valores de ordem azimutal m , totalizando $2l + 1$ valores possíveis, com mesmo grau l e ordem radial n seriam idênticas ou degeneradas (Gough; Tomre, 1991; Aerts; Christensen-Dalsgaard; Kurtz, 2010), dado que as equações e condições de contorno não dependem do índice azimutal m . A rotação solar remove a degenerescência ao definir um eixo particular, criando múltiplos de frequências separados em $(2l + 1)$ componentes (Christensen-Dalsgaard, 2002), conforme pode ser visto na Figura 2.13, em que a rotação solar cria a inclinação das faixas de picos no espectro de potências. A esse efeito é dado o nome de desdobramento rotacional (do inglês, *rotational splitting*), que permite inferir a velocidade angular.

Como diferentes modos de oscilação penetram diferentes profundidades do Sol, o desdobramento das frequências pode ser invertido para obter a velocidade angular em função do raio solar. De forma similar, os modos em que $|m| \approx l$ ficam concentrados no equador solar, enquanto modos com $|m| \ll l$ cobrem toda a esfera solar, criam múltiplos de frequência com espaçamentos diferentes e permitem obter informações acerca da dependência da velocidade angular com a latitude. Os resultados desse tipo de estudo são vistos na Figura 2.14. De medidas como essas, sabemos que o interior radiativo rotaciona quase como um corpo rígido até a fase de transição da tacoclina, base da região convectiva, em que a rotação começa a variar fortemente com a latitude. Em camadas superficiais, nos últimos 5% do interior solar, a taxa de rotação decresce rapidamente, conforme o gradiente logarítmico $\partial \ln \Omega / \partial \ln r \approx -1$ (Rabello-Soares; Basu; Bogart, 2024). Essa camada é denominada “camada de cisalhamento próxima à superfície” (NSSL).

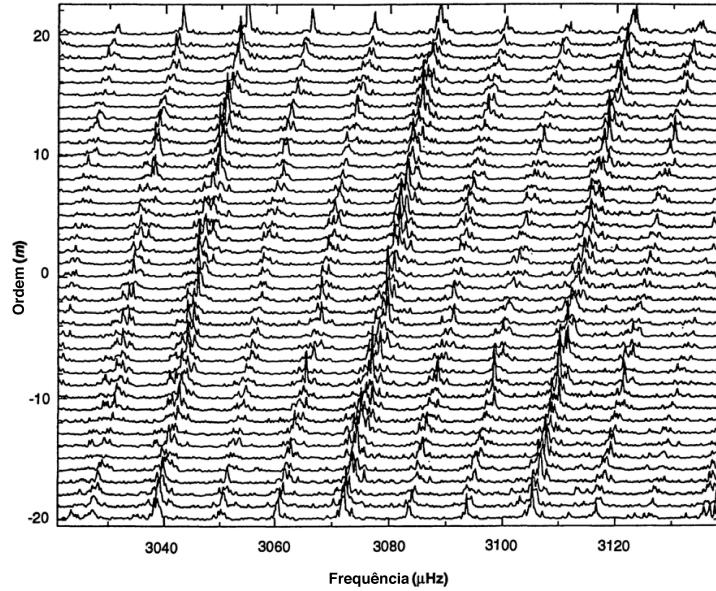
Como função da latitude para as camadas superficiais do Sol, a velocidade angular pode ser representada por

$$\Omega = A + B \sin^2 \psi + C \sin^4 \psi, \quad (2.99)$$

em que as constantes A , B e C são obtidas através de ajustes para as medidas realizadas, que

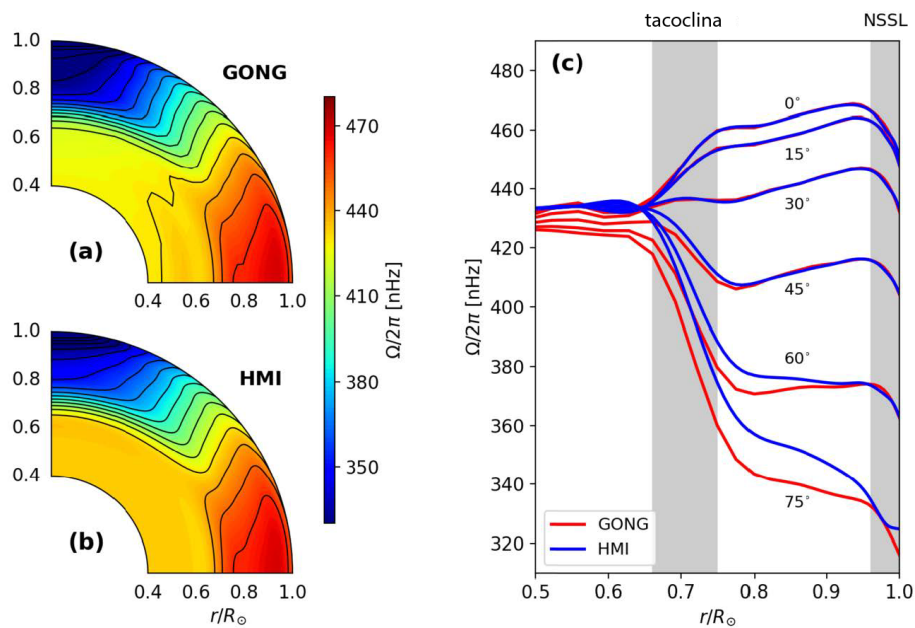
⁶A partir desta seção a letra omega maiúscula (Ω) será utilizada somente para indicar a velocidade angular.

Figura 2.13: Espectro de frequências ν das oscilações superficiais do Sol em função da ordem azimutal m para $l = 20$. Cada fileira de picos é produzida por um modo p de $n = 15$.



Fonte: adaptado de Woodard e Libbrecht (1993).

Figura 2.14: Perfil da rotação diferencial interna do Sol a partir de medidas de heliosismologia global. a) e b) mostram resultados obtidos pelo GONG e pelo HMI, respectivamente, em função do raio solar relativo e c) mostra as frequências de rotação em função do raio solar relativo para latitudes selecionadas, com regiões acinzentadas destacando regiões de grande cisalhamento.



Fonte: adaptado de Hotta et al. (2023).

podem ser de natureza espectroscópica, de posicionamento de manchas solares ou de heliosismologia. A representa a taxa equatorial de rotação enquanto B e C transmitem a variação em direção aos polos. Através de medidas de efeito Doppler, Snodgrass (1983) obteve para os coeficientes os valores $A = 2.857 \pm 0.006$, $B = -0.347 \pm 0.005$ e $C = -0.477 \pm 0.007$.

Além do transporte de matéria na direção longitudinal, o Sol apresenta um fluxo meridional na direção norte-sul. Esse fluxo, apesar de muito menor que o efeito de rotação, é responsável por diversos efeitos eletromagnéticos (Liang et al., 2018) e de transporte de grandes células convectivas (Hill, 1988). Próximo às camadas superficiais, o fluxo meridional ocorre em direção aos polos em ambos os hemisférios, mas sabe-se que essa circulação não ocorre de forma simétrica para o norte e para o sul (Stix, 2012).

Valores comuns para a velocidade de rotação linear no equador solar são da ordem de 2 km s^{-1} (Mullan, 2009; Priest, 2020), enquanto amplitudes típicas para o fluxo meridional são da ordem de $\sim 10 - 20 \text{ m s}^{-1}$ (Hotta et al., 2023).

2.2.3 Perturbação das frequências

As equações obtidas na Seção 2.1 assumem um modelo em equilíbrio em que não existem campos de velocidade. Porém, como visto acima, a rotação causa o desdobramento das frequências, afetando as medidas realizadas de um ponto de vista geométrico. Ao assumir a velocidade angular Ω como uniforme e uma oscilação de frequência ω_0 , independente de m , no referencial girando com a estrela, a frequência medida por um observador no referencial da Terra será separada de acordo com m por

$$\omega_m = \omega_0 + m\Omega. \quad (2.100)$$

Essa equação é aproximadamente correta se Ω for substituída por uma média da velocidade angular dependente da posição e a força de Coriolis for desconsiderada, dado que é muito pequena. O desenvolvimento a seguir segue o apresentado por Christensen-Dalsgaard (2014).

O vetor de rotação

$$\vec{\Omega} = \Omega (\cos \theta \hat{a}_r - \sin \theta \hat{a}_\theta), \quad (2.101)$$

dado pelas coordenadas esféricas definidas na Seção 2.1.4, está associado à velocidade linear $\vec{U}_0$ no estado de equilíbrio por

$$\vec{U}_0 = \Omega r \sin \theta \hat{a}_\phi = \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (2.102)$$

A perturbação causada na frequência ω por conta da presença de um campo de velocidades pode ser escrita em função do deslocamento físico (equação 2.74) como

$$\delta\omega = -i \frac{\int_V \rho_0 \delta \vec{r}^* \cdot (\vec{U}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{r} \, dV}{\int_V \rho_0 |\delta \vec{r}|^2 \, dV} \quad (2.103)$$

e, mais comumente, com o intuito de investigar o desdobramento de frequências, por

$$\delta\omega_{nlm} = m \int_0^R \int_0^\pi K_{nlm}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r \, dr \, d\theta, \quad (2.104)$$

no qual a perturbação é definida pelos índices que caracterizam os modos de oscilação (n , l , m). A função K_{nlm} , do inglês *kernel*, é uma função de peso média da estrutura solar, que altera o valor da perturbação conforme as propriedades do meio (Schou et al., 1998). É com a equação (2.104), a partir de uma técnica conhecida como inversão de frequências, que os dados da Figura 2.14 são obtidos.

O efeito da perturbação para os modos p pode ser obtido ao considerar uma perturbação $\delta_r a(r)$, função somente do raio, na relação de dispersão de uma onda sonora plana, equação (2.45), como

$$\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2 + \delta_r a(r). \quad (2.105)$$

Ao usar a equação (2.91) para o módulo ao quadrado do vetor de onda e (2.61) para o quadrado da componente horizontal com um raio variável r , obtemos, para k_r ,

$$k_r = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{1}{c^2} \delta_r a \right)^{1/2}. \quad (2.106)$$

Assumindo a perturbação como pequena, temos

$$k_r \simeq \frac{\omega}{c} \left[\left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\omega^2} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \delta_r a \right], \quad (2.107)$$

em que a condição para que essa seja uma onda estacionária é de que

$$\int_{r_t}^{R_\odot} k_r \, dr = (n + \alpha)\pi, \quad (2.108)$$

onde $\alpha = \alpha(\omega)$ é uma função da frequência que representa a mudança de fase nas camadas superficiais. Substituindo a equação (2.107), obtemos

$$\frac{(n + \alpha)\pi}{\omega} \simeq \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2} \frac{dr}{c} - \frac{1}{2\omega^2} \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \delta_r a \frac{dr}{c}. \quad (2.109)$$

Se o termo de perturbação $\delta_r a$ for nulo na equação acima, obtemos a chamada lei de Duvall desenvolvida por Duvall (1982). A lei mostra a dependência que as frequências de oscilação dos modos p têm dos índices n e l e da velocidade do som, permitindo que se estime essa velocidade no interior solar.

O efeito da perturbação nas frequências de oscilação é obtido ao multiplicar a equação

(2.109) por ω e perturbá-la de ω para $\omega + \delta\omega$, assim

$$\begin{aligned} \pi \frac{d\alpha}{d\omega} \delta\omega = & \delta\omega \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{dr}{c} + \omega \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2} \frac{\delta\omega}{\omega} \frac{dr}{c} \\ & - \frac{1}{2\omega} \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} \delta_r a \frac{dr}{c}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

que é simplificado para

$$S \frac{\delta\omega}{\omega} \simeq \frac{1}{2\omega^2} \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} \delta_r a \frac{dr}{c}, \quad (2.111)$$

onde

$$S = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{c} - \pi \frac{d\alpha}{d\omega} = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{c} - \pi \frac{d\alpha}{d\omega}, \quad (2.112)$$

em que se fez uso da expressão para a frequência acústica característica (2.76). A expressão S está associada ao tempo que o som leva para viajar pela distância radial dr ao longo de um caminho do raio, ou à propagação da onda, do ponto de retorno r_t até o raio solar $R_\odot$.

Considerando rotação do Sol, no referencial inercial a relação de dispersão (2.45) será, de acordo com (2.100),

$$\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2 + 2m\omega\Omega, \quad (2.113)$$

em que, novamente, Ω é uma média latitudinal dependente somente de r . Comparando (2.100) e (2.113), vemos que $\delta_r a(r) = 2m\omega\Omega(r)$. Substituindo em (2.111), obtemos a perturbação na frequência dos modos p causada pela rotação:

$$S\delta\omega \simeq m \int_{r_t}^{R_\odot} \left(1 - \frac{L^2 c^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} \Omega(r) \frac{dr}{c}. \quad (2.114)$$

Assim, pode-se obter a perturbação a partir dos parâmetros físicos calculados.

3 HELIOSISMOLOGIA NO LIMBO

Medidas tradicionais de heliosismologia local não usam a borda do disco solar por usarem medidas de velocidade radial, que tendem a zero em direção ao limbo. Uma das grandes incertezas das medidas heliosismológicas provém das camadas superficiais, dado que não é possível construir um modelo teórico de equilíbrio confiável por conta de sua dependência do transporte convectivo de calor e momento (Gough; Toomre, 1991).

Uma forma complementar de realizar medidas é fazê-las no limbo solar. Como as camadas superficiais solares são translúcidas, medir as oscilações provenientes do limbo traz informações específicas da fotosfera solar em alturas determinadas. O ruído devido à convecção não é eliminado, mas sua dependência de medidas do deslocamento do limbo é menor. A partir de observações heliosismológicas do limbo solar, por exemplo, Kuhn (1989) pôde fazer medidas da temperatura nessa região e obter informações sobre o ciclo solar. Como veremos no fim deste capítulo, Cunyningham et al. (2017) foram capazes de calcular a velocidade angular para camadas da atmosfera do Sol com medidas da variação do brilho do limbo causadas pelas oscilações.

3.1 MODELOS

A seguir, serão mostrados alguns modelos que usaram as oscilações solares para tirar conclusões sobre o limbo solar e como esse ramo foi sendo desenvolvido.

- Hill, Rosenwald e Caudell (1978):

Os autores calcularam um conjunto de soluções lineares para a equação de onda radial não-adiabática para um modelo da fotosfera solar com o objetivo de determinar as condições de contorno das oscilações solares na fotosfera. A partir de comparações entre observações e combinações lineares das soluções, foi possível obter combinações aproximadas adequadas às medidas que estabeleciam as condições na fronteira do Sol, isto é, no limbo.

Um resultado notável foi o de que as amplitudes das soluções independentes são da mesma magnitude perto do topo da fotosfera, deixando de ser válidas na região da cromosfera e da coroa. Além disso, à época, medições de flutuações na intensidade média de radiação (brilho total) eram inadequadas para a detecção de oscilações solares devido à baixa sensibilidade. Graças aos equipamentos descritos no Capítulo 4, isso já não é mais o caso.

- Brown (1979):

Após críticas ao estudo de Hill, Rosenwald e Caudell (1978) sobre se as oscilações obtidas não eram efeito da atmosfera da Terra, Brown (1979) procurou fazer observações em pontos específicos do limbo para separar os efeitos solares dos atmosféricos.

Para isso, foram medidas as intensidades de 32 posições radiais separadas por um segundo de arco ($1''$), sendo a primeira mais próxima do centro do disco solar e a última no limbo, no polo norte solar. As medidas em todas as posições são feitas simultaneamente e permitem discernir os efeitos através de um diagrama $k - \omega$, similar ao da Figura 2.11 para os modos p.

Com isso, Brown confirmou a origem solar das oscilações de brilho através das estruturas de potência características do fenômeno e mediu os períodos de 5 minutos (3,0 a 5,0 mHz), excluindo a possibilidade de que os resultados fossem decorrentes de efeitos atmosféricos.

Outro resultado de interesse obtido foi que as mudanças na função de escurecimento de limbo em seus dados eram suficientes para explicar variações no diâmetro solar. A função de escurecimento de limbo (LDF, *Limb Darkening Function*) é uma medida crucial na análise de astrometria solar que descreve a variação radial média do brilho solar na imagem obtida próxima do limbo (Emilio; Bush; Kuhn; Scherrer, 2007).

- Buta e Smith (1979):

Os autores investigaram a estrela 53 Persei, do tipo B, para mostrar que suas variações fotométricas e espectroscópicas podem ser explicadas pela teoria das pulsações não radiais. Para isso, desenvolvem um modelo teórico para oscilações lineares adiabáticas para descrever como as oscilações não radiais causam variações de brilho na estrela.

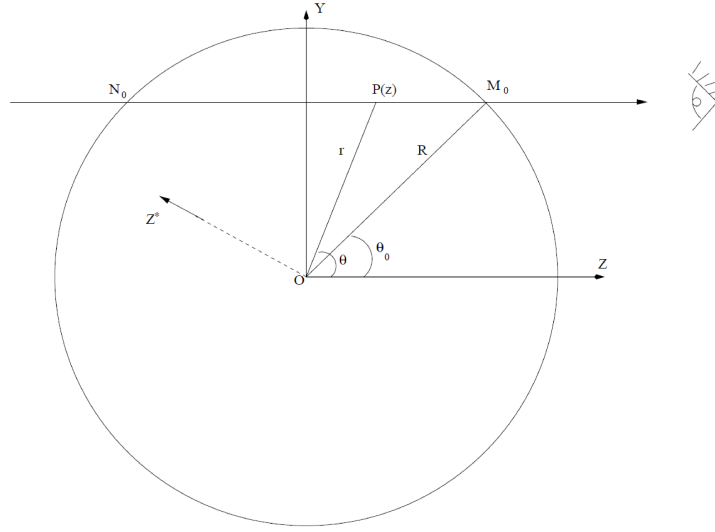
Os efeitos considerados que mais contribuem para a variabilidade da luz são a variação da direção do vetor normal à superfície, que muda o ângulo de visão em relação ao observador; a distorção da forma da estrela devido à oscilação, alterando a área total projetada do disco visível ao observador; a compressão e rarefação do gás, que causam variações locais de temperatura. Os dois primeiros efeitos são de teor geométrico e têm o escurecimento do limbo como fator contribuinte nas medidas.

- Toutain, Berthomieu e Provost (1999):

Trata-se do principal modelo para a compreensão das oscilações no limbo solar. Com base no modelo anterior de Buta e Smith (1979), os autores desenvolvem expressões analíticas para as perturbações de intensidade e fluxo luminoso causadas por oscilações solares não radiais, com o diferencial de considerar a esfericidade das camadas emissoras da atmosfera solar.

Para isso, considera-se o Sol como uma esfera, dada sua baixa rotação, centrada no ponto O , com raio $R_{\odot}$ e eixo de rotação ao longo de Z^* , conforme a Figura 3.1. O eixo Z aponta na direção do observador e M_0 é um ponto da camada de superfície visível, de coordenada Z_0 . Simétrico a M_0 , N_0 representa um ponto da camada de superfície não visível de coordenada $-Z_0$. O observador é suposto como estando suficientemente distante em relação a $R_{\odot}$ para que a linha de visada em M_0 seja paralela ao eixo Z . Em coordenadas esféricas, a posição de M_0 é definida em coordenadas esféricas por (R, θ_0, ϕ_0) , em que μ_0 é o cosseno de θ_0 .

Figura 3.1: Caminho de integração da intensidade emergente. P é o ponto variável, z é a variável de integração, Z^* é o eixo de rotação e o eixo que aponta ao observador é Z .



Fonte: adaptado de Toutain, Berthomieu e Provost (1999).

No equilíbrio, a intensidade monocromática $I_\nu^{(0)}$ da luz na frequência ν emergindo de M_0 para o observador é obtida integrando a contribuição de cada elemento entre N_0 e M_0 ao longo da linha de visada:

$$I_\nu^{(0)}(\mu_0) = \int_{-Z_0}^{Z_0} \epsilon_\nu(z) e^{-\eta_\nu} dz, \quad (3.1)$$

onde

$$\eta_\nu(z) = \int_z^{Z_0} \alpha_\nu(z) dz, \quad (3.2)$$

$$\alpha_\nu(z) = \kappa_\nu \rho, \quad (3.3)$$

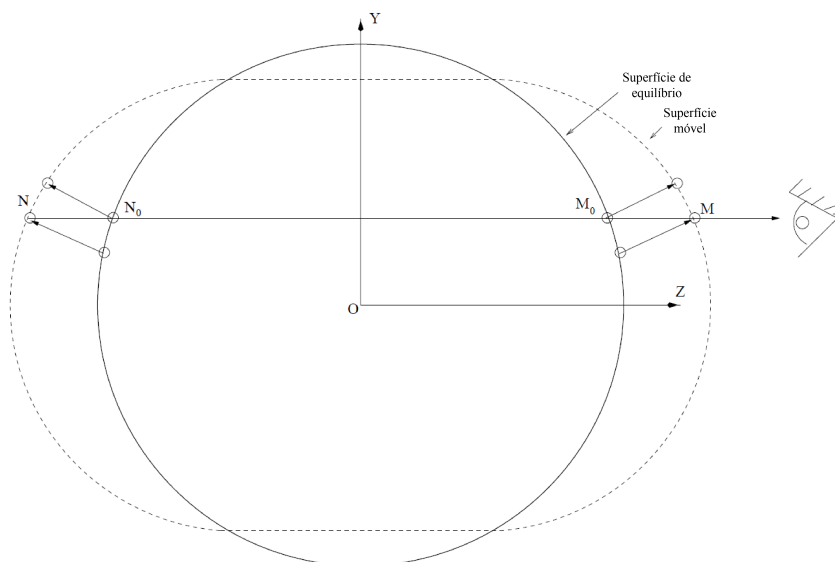
$$\epsilon_\nu(z) = \alpha_\nu S_\nu. \quad (3.4)$$

Nessas equações, $\eta_\nu(z)$ representa a espessura óptica monocromática ao longo da linha de visada, α_ν e ϵ_ν são os coeficientes de absorção volumétrica e emissão volumétrica monocromáticos, respectivamente, e S_ν é a função fonte, que descreve a emissão local de radiação monocromática na atmosfera do Sol.

Para determinar a perturbação na intensidade, os autores assumem que o Sol está oscilando ao redor de sua posição de equilíbrio e que ocorrem pequenas perturbações do estado de equilíbrio. As perturbações de temperatura, densidade e pressão na fotosfera junto com o deslocamento de matéria produzem perturbações nos coeficientes de emissão e absorção. Essas perturbações induzem a perturbação da intensidade do contínuo visível emergente na direção do observador, descrita por

$$\Delta I_\nu(\mu_0, \phi_0, t) \equiv I_\nu(\mu_0, \phi_0, t) - I_\nu^{(0)}(\mu_0). \quad (3.5)$$

Figura 3.2: Esquema de uma estrela oscilante. Quando a estrela é perturbada, cada elemento localizado na linha de visada é reposto por outro elemento localizado na mesma casca esférica. Aqui, os elementos M_0 e N_0 do equilíbrio são substituídos por M e N .



Fonte: adaptado de Toutain, Berthomieu e Provost (1999).

O trabalho, então, mostra as diferentes formas de se obter os termos da equação acima partindo do princípio de que os pontos observados serão deslocados, conforme a imagem ilustrativa da Figura 3.2.

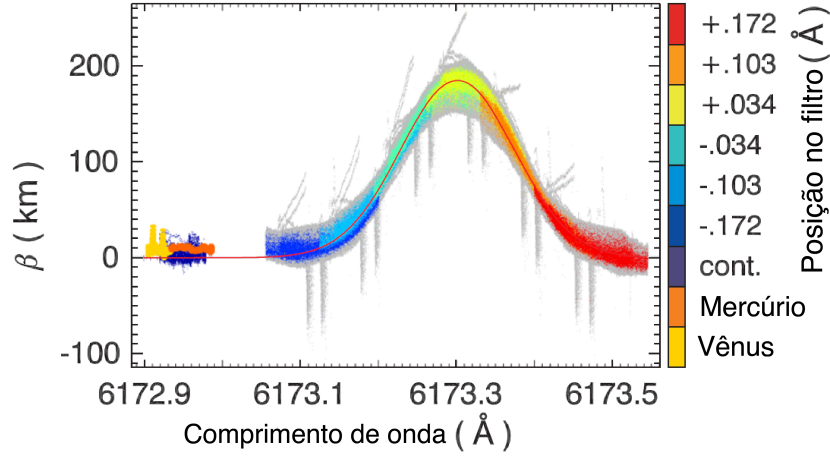
A principal conclusão deste trabalho é que seu modelo prevê que os sinais de oscilação solar devem apresentar maiores variações de intensidade no limbo, dado que a linha de visada atravessa as camadas superiores da fotosfera de forma tangencial. As perturbações na espessura óptica tornam-se dominantes sobre as variações de temperatura no limbo. Essa conclusão nos traz uma das principais vantagens de se trabalhar com heliosismologia no limbo solar.

Essa conclusão foi posteriormente confirmada por Toner, Jefferies e Toutain (1999), que, após analisar 72 horas de observações do disco completo do Sol com o MDI/SOHO, verificou a previsão teórica de que os modos p possuem amplitudes duas vezes maiores no limbo solar, principalmente para baixo grau l .

- Cunnynggham et al. (2017):

Neste trabalho, os autores uniram a geometria de observação do Sol com a análise das oscilações vistas no limbo solar para determinar a velocidade de rotação das camadas superiores da fotosfera. A partir da variação da estrutura de oscilação observada no limbo, foi possível inferir valores da velocidade angular da matéria oscilante. O estudo utilizou dados do HMI/SDO que, por estar no espaço, permite observar o limbo solar sem interferência da atmosfera terrestre, trazendo alta precisão e excluindo os efeitos que antes precisaram ser investigados (Brown, 1979).

Figura 3.3: Posição média do limbo “ β ” em quilômetros em diferentes filtros do HMI, medidos em relação à linha central. Como comparação, são mostrados os valores para o contínuo e os trânsitos de Vênus e Mercúrio.



Fonte: adaptado de Cunnyngnam et al. (2017).

As oscilações acústicas foram medidas em um anel estreito ao redor do limbo solar para determinar variações de brilho $\alpha(\theta, t)$ e da posição $\beta(\theta, t)$ do limbo em 256 posições (θ) ao longo de quase seis anos em diversos estados de polarização. Ao medir em diferentes comprimentos de onda (cf. Seção 4.1), é possível determinar a rotação de diferentes alturas dentro da fotosfera, conforme pode ser visto na Figura 3.3, que mostra os diferentes valores médios da posição do limbo obtidos em diferentes comprimentos de onda do filtro do HMI. A média do deslocamento do limbo é maior no núcleo da linha de referência do que nas asas devido ao gradiente na atmosfera, que afeta a opacidade dentro da linha espectral.

Da Terra, o eixo solar de rotação aparenta precessar (Seção 2.2.1) ao redor da direção normal à eclíptica com período de um ano. A orientação da imagem do satélite é corrigida pelo ângulo P , mas não pelo ângulo B , que se move para dentro e para fora do plano do céu por um ângulo γ definido por

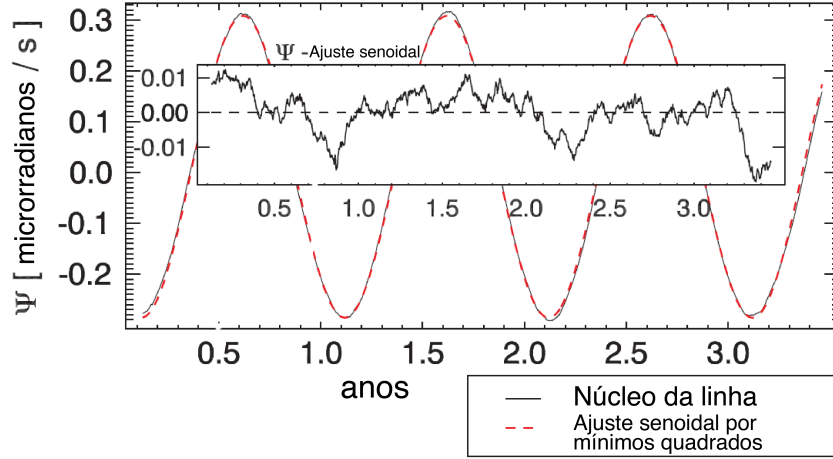
$$\sin \gamma = \sin B \sin \frac{2\pi t}{P}, \quad (3.6)$$

em que P é agora o período orbital sinódico da Terra e t é o tempo. Para pequenos ângulos B ($\sim 7^\circ$), a modulação temporal geométrica varia como

$$\gamma(t) = B \sin \frac{2\pi t}{P}. \quad (3.7)$$

Conforme a estrutura da fotosfera rotaciona ao longo do limbo para dentro e para fora do disco solar visível, a projeção no plano do céu faz com que a estrutura oscilatória do limbo pareça rotacionar no sentido horário caso o eixo norte de rotação esteja apontado para dentro do plano do céu ou no sentido anti-horário caso o eixo esteja apontado para fora do plano do céu. A taxa

Figura 3.4: Ajuste senoidal à variação temporal da rotação do limbo $\Psi(t)$, obtido a partir dos dados do filtro do núcleo da linha espectral. O resíduo é mostrado no gráfico inserido para os dados observados e o modelo senoidal.



Fonte: adaptado de Cunyningham et al. (2017).

dessa rotação aparente ao longo do limbo Ψ é dada por

$$\Psi(t) = \Omega(r) \sin[\gamma(t)], \quad (3.8)$$

onde $\Omega(r)$ é a média latitudinal da taxa de rotação solar no raio r . A Figura 3.4 mostra um ajuste senoidal da variação temporal da equação (3.8) para os dados obtidos no núcleo da linha espectral. Para dados obtidos em outras linhas, pode-se obter Ψ para diferentes alturas da fotosfera solar. Usando esse método, os pesquisadores encontraram valores da média latitudinal para a velocidade angular $\Omega(r)$ de $2,403 \pm 0,005$, $2,399 \pm 0,001$ e $2,339 \pm 0,008 \mu\text{Hz}$ para as alturas de 20, 80 e 156 km acima da fotosfera, respectivamente.

A partir de uma análise de Fourier, a série temporal de dados é convertida em harmônicos de frequência angular do limbo k_a e frequência temporal ω na forma

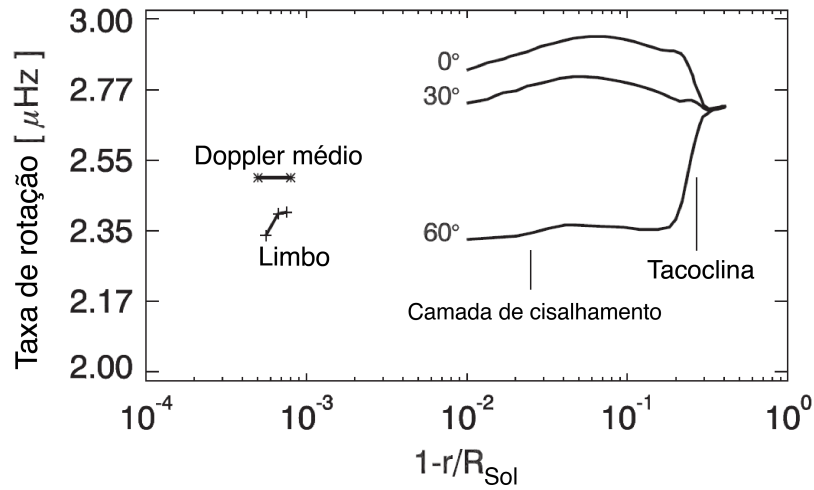
$$\alpha(\theta, t) = \Re \left\{ \sum_{k, \omega} \tilde{\alpha}(k, \omega) \exp[i(k_a \theta - \omega t)] \right\},$$

onde, novamente, a variável com til representa a amplitude. A rotação aparente ao longo do limbo perturba a frequência temporal dos modos p em proporção à k_a por

$$\begin{aligned} \delta\omega_k &= 2\pi\delta\nu_k = \Psi(t)k_a \\ &= \Omega(r) \sin(B) \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) k_a. \end{aligned} \quad (3.9)$$

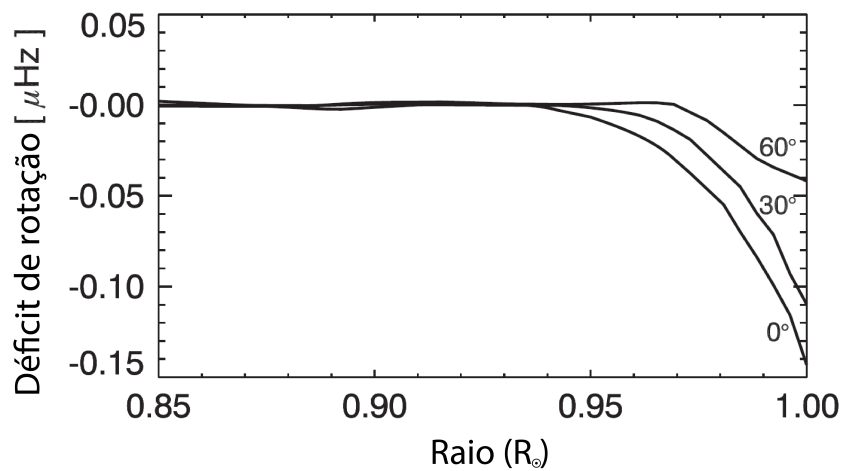
A partir da relação acima, os autores conseguiram isolar o termo da velocidade angular para medir seus valores, citados acima. A Figura 3.5 mostra esses valores em comparação com medidas de heliosismologia tradicionais, obtidas no disco solar. Do gráfico, observa-se

Figura 3.5: Taxa de rotação solar em função da profundidade e da latitude medidas no limbo em comparação com medidas de heliosismologia tradicional. Pontos em cruz indicam as medidas feitas no limbo e pontos em estrela indicam a média angular da rotação feita por efeito Doppler.



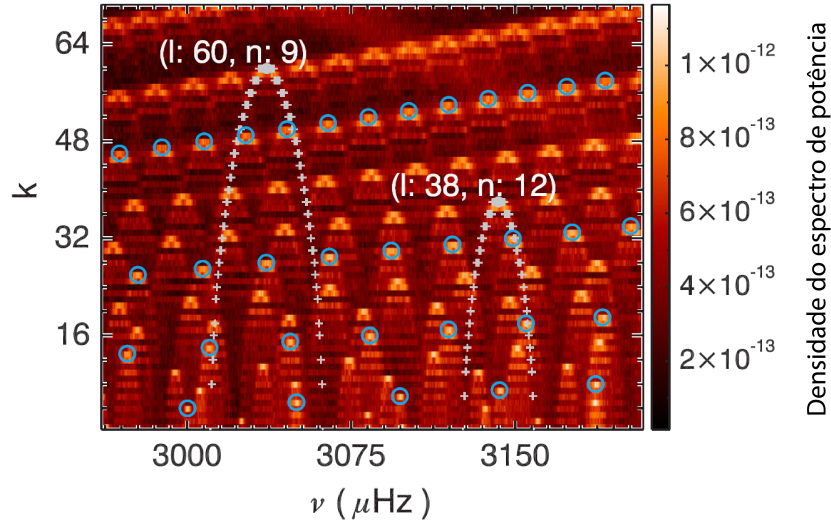
Fonte: adaptado de Cunnynggham et al. (2017).

Figura 3.6: Déficit de rotação a partir de uma tendência linear no raio para a camada de cisalhamento próxima à superfície para as latitudes 0, 30 e 60 graus.



Fonte: adaptado de Cunnynggham et al. (2017).

Figura 3.7: Espectro de potências do limbo $|\alpha(k, \nu)|^2$. Círculos abertos sobrepostos indicam dados de frequências globais em que $m = 0$. Cruzes cinzas indicam valores de modos do disco completo em que $m \neq 0$ para l e n indicados.



Fonte: adaptado de Cunnyingham et al. (2017).

que o método permite obter medidas em camadas superiores às realizadas no disco solar, as quais apresentam velocidades menores em comparação com as camadas inferiores. Além disso, observaram-se os efeitos de decréscimo da rotação na NSSL (Seção 2.2.2), conforme mostrado na Figura 3.6. Os dados não tiveram dependência dos estados de polarização.

Como as medidas são feitas com exclusividade no limbo solar, os modos zonais (Figura 2.8) são mais facilmente identificados devido à maior amplitude. Na Figura 3.7, é possível observar no diagrama $k - \nu$ um comportamento parabólico para os diferentes modos, com o pico ocorrendo quando $k = l$ e $m = 0$, isto é, um modo zonal. A imagem também mostra a concordância da heliosismologia no limbo solar com a heliosismologia tradicional por efeito Doppler a partir dos círculos abertos, que representam dados de heliosismologia global.

4 HELIOSEISMIC AND MAGNETIC IMAGER (HMI)

Em 11 de fevereiro de 2010, foi lançado pela NASA, como parte da missão *Living With a Star*¹ (LWS), o *Solar Dynamics Observatory* (SDO), responsável por fornecer dados para o estudo da atividade solar, da topologia de campos magnéticos e seu comportamento e da heliosismologia. O programa tem como objetivo trazer maior compreensão da heliofísica e do clima espacial, áreas que têm influência em nossa vida na Terra (Pesnell; Thompson; Chamberlin, 2012).

O satélite está localizado em uma órbita geossíncrona circular inclinada de 28° em uma altitude de aproximadamente 35800 km (Pesnell; Thompson; Chamberlin, 2012). Conforme cobre sua órbita, forma um analema do ponto de vista terrestre sobre a longitude da estação dedicada de White Sands (EUA). Por conta disso, a linha de visada da observação dos instrumentos do satélite é similar, relativamente, à obtida em telescópios terrestres, dado que o satélite realiza uma órbita ao redor do Sol junto com a Terra.

O SDO possui três instrumentos de investigação científica:

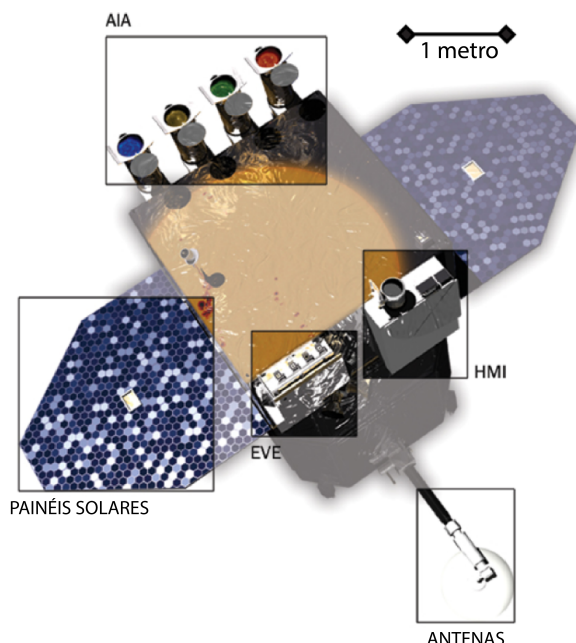
- *Atmospheric Imaging Assembly* (AIA) é um conjunto de quatro telescópios que observam as camadas superficiais e a atmosfera do Sol em dez comprimentos de onda diferentes, incluindo sete no ultravioleta extremo, dois no ultravioleta e um na região do visível. Seu foco é estudar a evolução do ambiente magnético da atmosfera solar e sua interação com o plasma (Lemen et al., 2012);
- *Extreme Ultraviolet Variability Experiment* (EVE) mede flutuações na radiação ultravioleta do Sol, responsável pela maior entrada de energia no topo da atmosfera e que impacta operações de satélites, comunicações e navegação. O foco do instrumento é entender a evolução das erupções solares para sua incorporação em modelos para esses eventos (Woods et al., 2012);
- *Helioseismic and Magnetic Imager* (HMI) faz o mapeamento de campos magnéticos e de velocidade na fotosfera solar a partir de medidas de efeito Doppler da linha de Fe I 617,3 nm. Seu principal objetivo é estudar a origem da variabilidade do Sol, entender seu interior e desvendar a física do dínamo magnético solar (Scherrer et al., 2012).

Uma visão geral do SDO e seus instrumentos pode ser vista na Figura 4.1.

O HMI é altamente baseado em seu antecessor, o *Michelson Doppler Imager* (MDI) a bordo do satélite SOHO. Entre suas principais vantagens, ele possui duas câmeras ao invés de uma, melhor resolução espacial e cobertura temporal. Como no instrumento anterior, o HMI produz um filtrograma, que consiste em uma série de imagens em diferentes comprimentos de

¹ Vivendo com uma estrela, em tradução livre.

Figura 4.1: Telescópio espacial SDO com seus instrumentos, antenas e painéis solares em destaque.



Fonte: adaptado de Pesnell, Thompson e Chamberlin (2012).

onda e polarizações que são combinadas para obter os parâmetros físicos. São fornecidas imagens estabilizadas de velocidade Doppler, do fluxo magnético na linha de visada e do contínuo do disco completo com resolução de um segundo de arco ($1''$) a cada 45 segundos. A câmera das CCDs² tem ponto de saturação próximo a 200 000 contagens e produz imagens de 4096×4096 pixels, permitindo que se tenha 0,5 segundos de arco por pixel. Os resfriadores acoplados mantêm a temperatura das CCDs abaixo de -50°C (Schou et al., 2012).

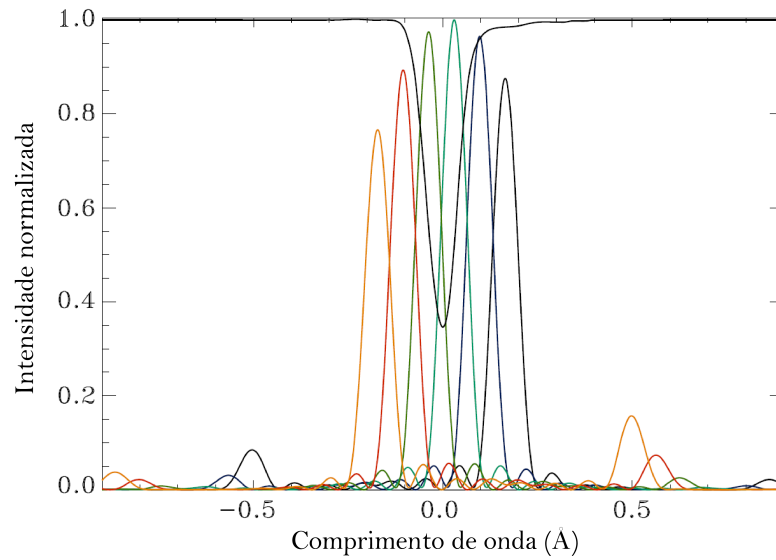
4.1 PACOTE ÓPTICO

O caminho ótico do instrumento começa no filtro da janela frontal, cujo principal objetivo é limitar a entrada de calor. Em seguida, a luz passa por um telescópio refrator, um seletor de foco, lentes de calibração, seletores de polarização, espelhos de direcionamento, o filtro de Lyot e dois interferômetros de Michelson. O sistema de filtros permite isolar linhas ao redor da linha de absorção solar do Fe I 6173 Å, gerando o chamado filtrograma. Com essa linha centrada, o instrumento obtém seis imagens de 7,6 pm de largura espaçadas por 7,0 pm. A posição das linhas é vista na Figura 4.2.

Durante o desenvolvimento do projeto, a linha de Ni I 6768 Å foi considerada por ter sido usada anteriormente no MDI e na rede do GONG. A escolha pela linha do Fe I 6173 Å veio por ela ser mais isolada, aproximadamente 2% mais profunda e 15% mais estreita que a do Ni I, e por ter maior sensibilidade às variações do campo magnético, trazendo maior precisão

²Charge-Coupled Device

Figura 4.2: Exemplo de perfis das linhas obtidas pelo HMI. São mostradas as seis posições em relação à linha solar de absorção do Fe I 6173 Å em preto no centro.



Fonte: adaptado de Schou et al. (2012).

aos magnetogramas vetoriais (Norton et al., 2006).

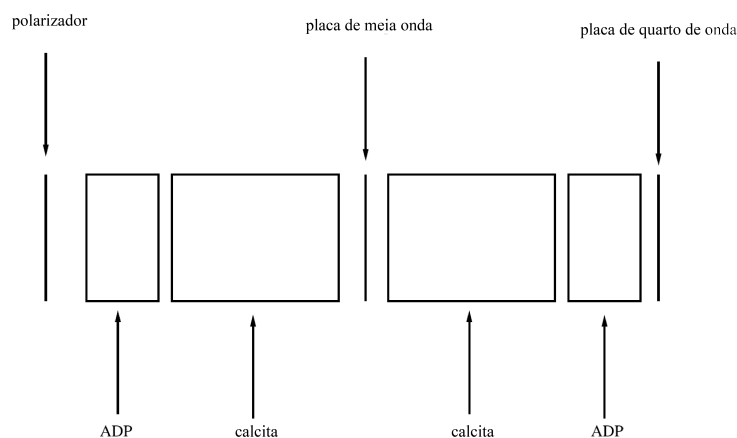
Para cada imagem obtida em cada linha, os seletores de polarização também diferem seis estados de polarização. Portanto, para cada exposição, há 36 combinações possíveis de comprimento de onda e polarização. Para categorizar essas exposições, é atribuído a elas um código denominado *Frame Definition Block ID* (FID). Para heliosismologia, a polarização não se mostra revelante (cf. Seção 3.1, Cunningham et al.), mas é necessário escolher um ou mais FIDs para a análise dos dados.

Como peça de interesse para compreender os mecanismos do caminho óptico, podemos dar ênfase ao filtro de Lyot e ao interferômetro de Michelson. O filtro de Lyot, ou filtro birrefringente, é um filtro de banda estreita descrito por Bernard Lyot, em 1933, e Yngve Öhman, em 1938. Trata-se de uma sequência de polarizadores intercalados por cristais birrefringentes de espessuras escolhidas. Materiais birrefringentes dividem a luz em dois feixes com índices de refração diferentes. Os cristais são uniaxiais, seccionados paralelamente ao eixo óptico e posicionados de tal forma que o eixo faz um ângulo de 45° com o eixo dos polarizadores. Se a espessura do primeiro cristal ($n = 1$) for e , o n -ésimo cristal terá a espessura de

$$e_n = 2^{n-1}e. \quad (4.1)$$

O filtro de Lyot presente no HMI é composto de cinco filtros birrefringentes ajustáveis, referidos como E2, E3, E4, E5 e E1, na ordem do caminho óptico. O elemento E1 pode ser visto na Figura 4.3, na qual a luz entra no polarizador, seguido de um cristal de di-hidrogenofosfato de amônio (ADP), uma calcita, uma placa de meia onda (que introduz um atraso de fase de π), uma calcita, um cristal de ADP e uma placa de quarto de onda (que introduz um atraso de fase de

Figura 4.3: Esquema exagerado do elemento E1 do filtro de Lyot do HMI. A luz entra pelo polarizador e sai pela placa de quarto de onda.



Fonte: adaptado de Couvidat et al. (2012).

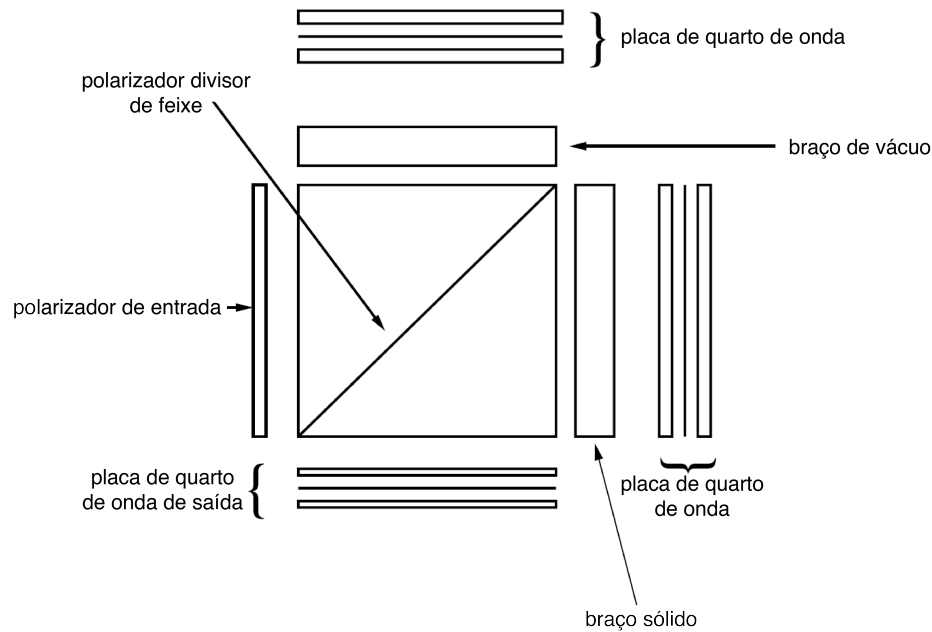
$\pi/2$). Nos elementos mais finos, E4 e E5, são usados cristais de di-hidrogenofosfato de potássio (KDP). Os cristais de ADP e KDP são usados em combinação com a calcita para cancelar a mudança no comprimento de onda com a temperatura causada pelos cristais de calcita. Os cristais possuem diâmetro físico de 32 mm com abertura útil de 30 mm (Couvidat et al., 2012).

O interferômetro de Michelson é um instrumento que divide um feixe de luz em dois caminhos diferentes para em seguida recombiná-los em um anteparo, criando um padrão de interferência. Foi usado em 1887 por Albert Michelson e Edward Morley no famoso experimento da medida do movimento da Terra em relação ao proposto éter. Os dois interferômetros de Michelson que compõem o HMI são ajustáveis e operam sobre um campo de visão amplo, com abertura útil de 32 mm, e colocados ao fim do filtro de Lyot. O interferômetro é feito ajustável a partir de uma placa de quarto de onda posta fora do instrumento.

Para atingir a seletividade espectral desejada, um dos interferômetros é de banda larga e o outro de banda estreita. O interferômetro de banda estreita produz franjas estreitas de comprimento de onda, permitindo isolar a linha espectral de absorção do Fe I. Já o de banda larga tem função de eliminar ordens interferométricas indesejadas e melhorar a estabilidade do sistema. O conjunto dos dois tipos de interferômetros garante que se selecione a linha espectral desejada e melhore a relação sinal-ruído. Um esquema do interferômetro de banda larga pode ser visto na Figura 4.4, o divisor de feixe polarizador possui um braço a vácuo e outro em vidro sólido. O interferômetro de banda estreita possui a mesma configuração, mas a luz entra pela placa de quarto de onda de saída e sai pelo polarizador de entrada (Couvidat et al., 2012).

O uso do filtro de Lyot junto dos interferômetros de Michelson é essencial para a coleta de dados do HMI. O filtro de Lyot é responsável por limitar a entrada de luz apenas à faixa espectral de interesse, bloqueando ordens indesejadas. Sozinhos, os interferômetros de Michelson possuem múltiplos picos de transmissão e o filtro de Lyot atua como um monocromador de campo amplo. Os interferômetros, por sua vez, fornecem a alta resolução espectral necessária.

Figura 4.4: Esquema exagerado do interferômetro de Michelson de banda larga presente no HMI.



Fonte: adaptado de Couvidat et al. (2012).

A Tabela 4.1 mostra uma síntese da largura à meia altura da linha observada conforme a luz atravessa os diversos filtros que integram o HMI. O filtro de bloqueio é um filtro de interferência com a função de rejeitar ordens indesejadas para o filtro de Lyot e os interferômetros, além de limitar a carga térmica incidente.

4.2 OBTENÇÃO DOS DADOS

O alto fluxo de dados gerado pela coleta de imagens é gerenciado pelo *HMI/AIA Joint Science Operations Center* (JSOC), que é composto por três membros: o *JSOC Instrument Operations Center* (IOC), localizado na Lockheed Martin Solar and Astrophysics Laboratory (LMSAL); o *Science Data Processing* (SDP), localizado na Universidade Stanford; e o *AIA Visualization Center* (AVC), localizado em LMSAL. O JSOC-SDP disponibiliza um sistema para arquivar dados do HMI e do AIA, com acesso ao público pelo site <<http://jsoc.stanford.edu/>>.

O processamento dos dados do HMI é feito através de um *pipeline*, que transforma os observáveis dos filtrogramas em produtos científicos através de diversos passos. Os observáveis científicos básicos são a imagem de velocidade Doppler do disco completo, um indicador de brilho contínuo, o fluxo magnético ao longo da linha de visada e o campo magnético vetorial. Eles são disponibilizados com resolução espacial total e cadência de 45 segundos. A Figura 4.5 mostra um exemplo de imagem de velocidade Doppler do disco completo do Sol na linha do Fe I 6173 Å com largura à meia altura de 75 mÅ, a diferença do claro para o escuro nos dois opostos do disco evidencia o movimento de rotação solar, com um lado vindo em direção

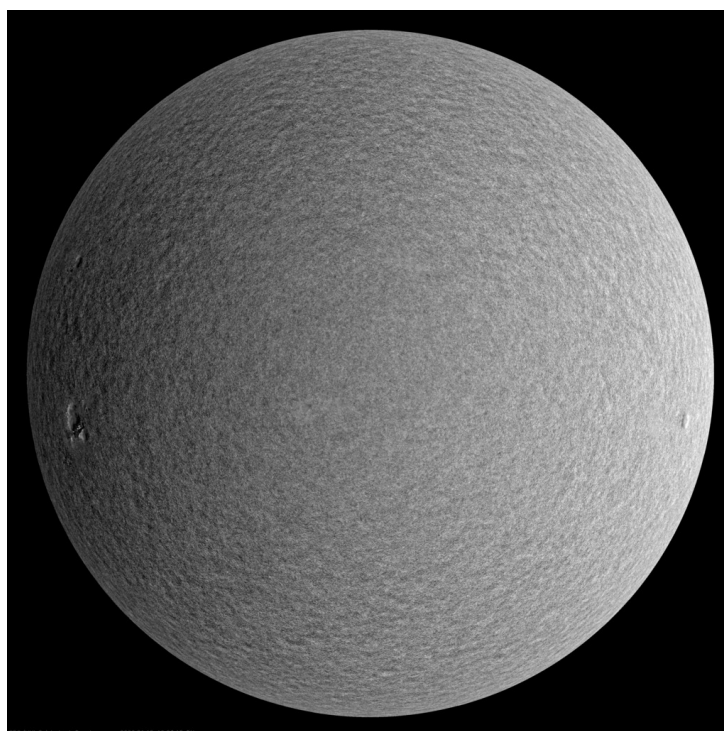
Tabela 4.1: Largura à meia altura da linha ao passar pelos filtros que compõem o caminho óptico do HMI.

Filtro	Largura à meia altura
Janela frontal	50 Å
Filtro de bloqueio	8 Å
Lyot elemento E2	0,69 Å
Lyot elemento E3	1,38 Å
Lyot elemento E4	2,76 Å
Lyot elemento E5	5,52 Å
Lyot elemento E1	344 mÅ
Interferômetro de banda larga	172 mÅ
Interferômetro de banda estreita	86 mÅ
Sistema completo de filtros	76 mÅ

Fonte: Schou et al. (2012).

à linha de visada e o outro se afastando dela. Essa imagem tem o mesmo princípio da Figura 1.1a, em que se evidencia o avanço técnico ao longo dos anos.

Figura 4.5: Exemplo de imagem de velocidade Doppler feita pelo HMI em 15 de janeiro de 2026.



Fonte: <<https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/>>.

5 ANÁLISE DE DADOS

Para este trabalho, foram obtidos dados na plataforma do JSOC para a série *limbfit*, cujo *pipeline* consiste em obter ajustes da LDF ao longo de 256 posições mapeadas no limbo solar para cada FID. O ajuste é feito ao longo de um anel estreito com 200 pixels de largura (Figura 5.1a) nas posições igualmente espaçadas conforme a função

$$L(r, \theta) = L_0[1 - \alpha(\theta)][r - \beta(\theta)], \quad (5.1)$$

em que L_0 é o brilho médio de todas as funções de ajuste e $\alpha(\theta, t)$ e $\beta(\theta, t)$ representam variações no brilho e na posição do limbo, respectivamente, conforme foi descrito na Seção 3.1 para o estudo feito por Cunyningham et al. (2017). Para cada uma das posições em $i = 0, 1, 2, \dots, 255$, a função da equação (5.1) apresentará flutuações ao redor de um valor médio, onde α assinala diferenças no brilho causadas pelas oscilações e β o deslocamento da posição do ajuste à média.

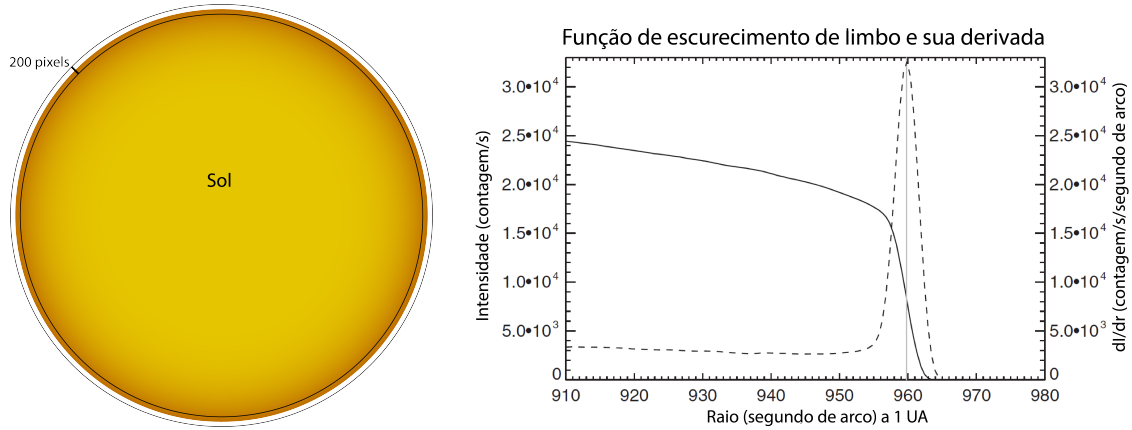
A Figura 5.1b mostra um exemplo de LDF (linha sólida) feita com dados do HMI para uma posição do limbo. Nela, podemos ver que o número de contagens obtidas cai conforme o raio aumenta, isto é, conforme nos afastamos do centro. Em dada posição, o número de contagens da LDF cai mais abruptamente e sua derivada (linha pontilhada) revela, em seu valor máximo, o ponto de inflexão da função. O ponto de inflexão é definido como o limite do limbo solar e a referência para se obter os termos da equação (5.1).

Foram obtidas 4.145.419 exposições com início na meia-noite de 24 de julho de 2012 do FID 10158, que se refere à banda +172 mÅ em relação à linha do Fe I 6173 Å (região em vermelho da Figura 3.3) sob a polarização I+V, referente à polarização circular do vetor de Stokes. Este FID é obtido com a câmera 2 do instrumento. Como as exposições são obtidas a cada 45 segundos, a totalidade dos dados representa aproximadamente seis anos de observação.

Os procedimentos numéricos do trabalho e recursos visuais foram realizados através da linguagem de programação Python, com os pacotes NumPy, SciPy, pandas e Matplotlib. A Figura 5.2 traz dois exemplos dos valores de α e β para um ponto no tempo em todas as posições e para uma posição ao longo de todo o tempo. Em 5.2a vemos os valores para todas as 256 posições no tempo $t = 2592000$ segundos, isto é, um mês após o início da coleta de dados. Já em 5.2b temos os valores somente para a posição 30 por toda a extensão dos seis anos de coleta de dados. Pode-se observar, principalmente para α , uma queda no valor de intensidade no fim do período de observação, resultado de adversidades na coleta de dados do satélite. Esses dados foram excluídos desta análise. Independentemente da análise no tempo ou nas posições, o valor β se mantém consistente, com desvios esporádicos da média conforme a atividade solar observada no limbo. Já o valor de α mostra uma oscilação aproximadamente anual visível em qualquer posição do limbo.

Para obter os índices dos harmônicos esféricos que representam as oscilações aprisio-

Figura 5.1: a) Esquema fora de escala do ajuste de LDF em um anel estreito de 200 pixels ao longo do limbo solar feito pelo *pipeline limbfit*. O círculo alaranjado representa a imagem do Sol e os dois aros em preto representam o início e o fim do ajuste. b) Exemplo de LDF (linha sólida) para uma posição do limbo e sua derivada (linha pontilhada). A linha vertical mostra a posição de máximo da derivada da LDF.



Fonte: a) o autor e b) adaptado de Emilio et al. (2014).

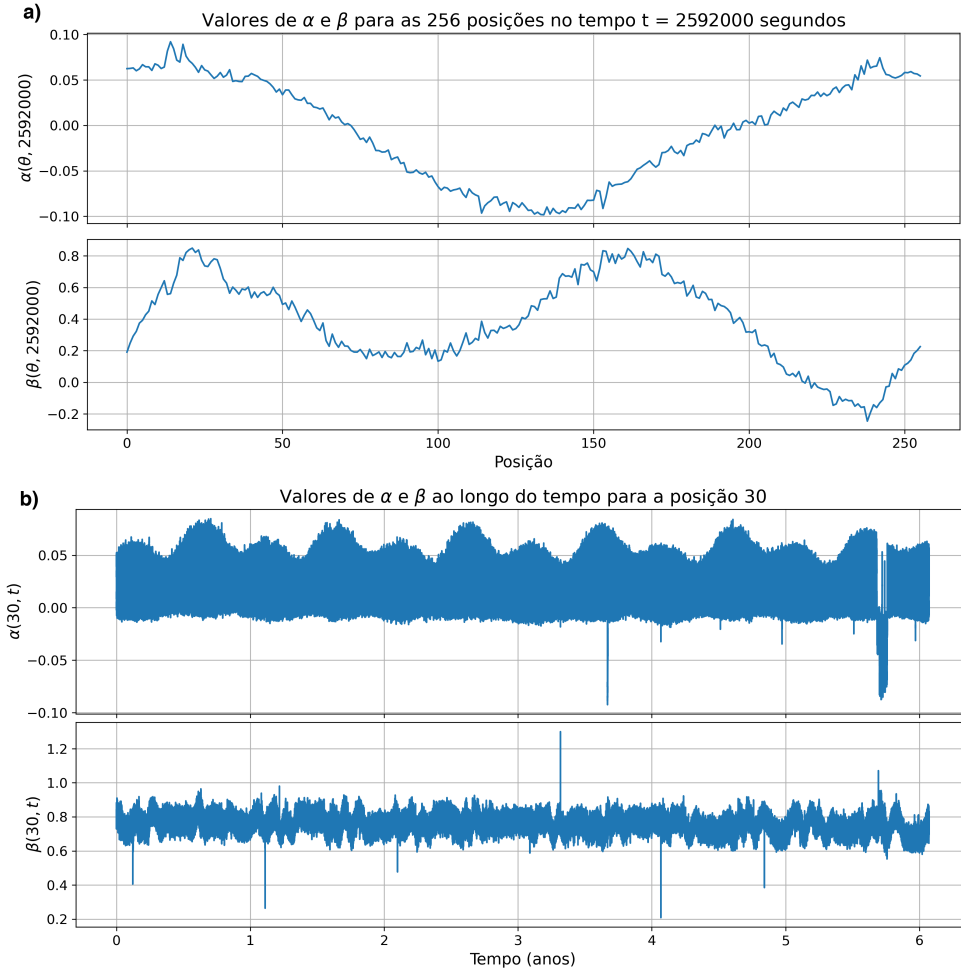
nadas na estrutura solar, são realizadas transformadas de Fourier na série de dados com o intuito de visualizar as frequências de oscilação presentes. A função dessa análise é levar o sinal de um domínio para outro em que possamos visualizar as frequências de forma mais fácil, pois são evidenciadas a partir de picos de potência no diagrama de Fourier. Com o uso do `scipy.fft`, são feitas FFT¹ espaciais nas 256 posições, isto é, ao longo do limbo, para obter o número angular l ; e FFT temporais para obter as frequências ν . Na prática, é feita uma transformada em duas dimensões, espacial e temporal, para obter um diagrama semelhante ao da Figura 2.11 para os modos p . A janela da FFT é de 8,53 dias (2^{14} exposições) com passo de 45 segundos, equivalente ao tempo entre cada exposição, para a totalidade dos dados.

Do teorema de Nyquist–Shannon, sabe-se que um sinal com certa amostragem só pode ser reconstruído se tiver frequências abaixo da metade da frequência de amostragem. Portanto, a maior frequência dada pela transformada é metade da frequência de amostragem e o maior índice angular l será, da mesma forma, metade do número de posições em que são feitas as medidas. Sendo assim, o diagrama $l - \nu$ dos picos de potência para a série de dados atual pode mostrar frequências de oscilação com períodos muito maiores do que os que se sabe que o Sol apresenta, da ordem de 5 minutos, e nos permite obter modos com grau angular até $l = 128$, isto é, metade do número de posições em que são feitas as medidas. Esse fato é fisicamente interpretado pelo fato de que as oscilações presas na estrutura solar que são vistas no limbo têm de ser ondas estacionárias, em que a circunferência solar corresponde a um múltiplo inteiro do comprimento de onda das oscilações observadas.

Gois (2020) estuda a variação anual da inclinação aparente do eixo de rotação solar em relação ao HMI e procura corrigir a variação para obter dados com melhor sinal-ruído. Apesar

¹Fast Fourier Transform, algoritmo rápido utilizado para calcular transformadas de Fourier discretas.

Figura 5.2: Dados de α e β para a) as 256 posições em $t = 2592000$ segundos após o início da coleta de dados e para b) cerca de seis anos de medidas de intensidade relativa média do limbo “ α ” (acima) e do deslocamento do limbo “ β ” (abaixo) na posição 30.



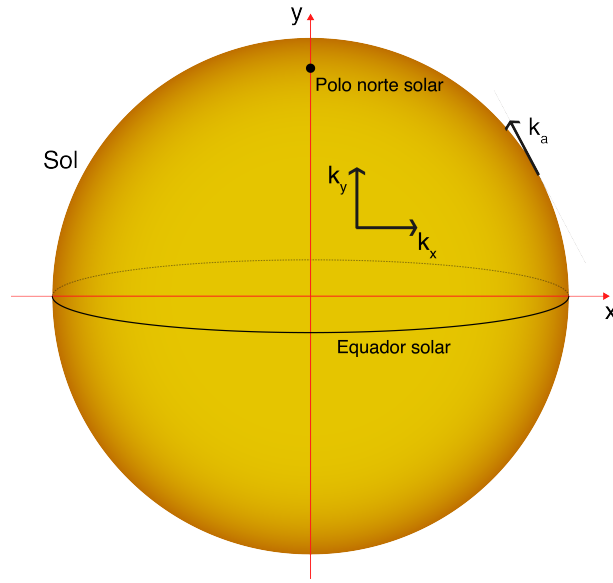
Fonte: o autor.

da correção trazer uma melhor resolução para separação dos modos de oscilação, não existe uma abordagem geométrica que mostre onde as oscilações registradas estão ocorrendo. Isso ocorre porque, ao observar somente o limbo por um longo período de tempo, observa-se um movimento de precessão aparente do Sol, mencionado por Cunyningham et al. (2017), que faz com que uma mesma posição do limbo do *limbfit* represente pontos fisicamente diferentes no Sol.

Ao obter diagramas $l - \nu$ com a correção da variação do ângulo B_0 , Gois (2020) pôde separar os modos de oscilação para os diferentes índices que caracterizam os modos de oscilação (n, l, m) , mas a região física onde a oscilação está ocorrendo permanece desconhecida, dado que uma mesma posição estará captando oscilações de regiões diferentes ao longo do ano. Com este trabalho, pretendemos dar uma descrição geométrica que auxilie futuras medidas heliosismológicas feitas no limbo solar.

A análise se baseou no fato de que, ao transladar ao redor do Sol, o HMI obtém ima-

Figura 5.3: Esquema das coordenadas usadas na determinação das componentes do vetor de onda horizontal k_h e do vetor de onda angular k_a .



Fonte: o autor.

gens com variações do ângulo P e B_0 (Figura 2.12), mas o instrumento realiza a correção em relação ao ângulo P . Assim, ao invés de vermos o eixo de rotação realizando um movimento de precessão aparente ao redor da normal à eclíptica, observa-se o eixo entrando e saindo do plano do céu, com máximos em $\pm 7, 25^\circ$. O polo norte solar é mais visível em setembro, quando está inclinado em direção à Terra, enquanto o polo sul é mais visível em março (Stix, 2012). A síntese do método é a mesma da usada por Cunyningham et al. (2017), em que o ângulo $\gamma(t)$ entre o eixo de rotação e a normal à eclíptica é dado pela equação (3.7), na qual $B = 7, 25^\circ$. Com os valores de velocidade angular obtidos em seus artigos, o comportamento senoidal da taxa Ψ foi simulado teoricamente.

Da equação (3.9), sabemos que a frequência temporal dos modos p observada é perturbada pela rotação da estrutura oscilante em proporção à velocidade angular Ω . No artigo de Hill (1988), uma abordagem parecida é apresentada para um estudo de heliosismologia local, em que a decomposição de Fourier é feita nas imagens de seções do disco solar em (x, y, t) transformando em um espectro $k_x - k_y - \omega$, em três dimensões. Neste caso, k_x e k_y são as componentes em x e y , respectivamente, do vetor número de onda horizontal $|\vec{k}_h| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Um esquema desses vetores, junto com k_a , pode ser visto na Figura 5.3. Os eixos em vermelho indicam as referências usadas por Hill e o ponto próximo ao limbo solar norte indica a saída do eixo de rotação solar, inclinado em relação à linha de visada. Na figura, k_a pode ser visto tangencial ao limbo. Para $l > 10$, os harmônicos podem ser descritos como ondas planas que se propagam ao longo de grandes círculos, como descrito na Seção 2.1.3, e as componentes do

vetor de onda horizontal são aproximadas por

$$k_x \approx \frac{m}{R_\odot}, \quad k_y \approx \frac{\sqrt{l^2 - m^2}}{R_\odot}. \quad (5.2)$$

De acordo com Hill (1988), a presença de um campo de velocidades $\vec{U}$ perturba as frequências ao deslocar a frente de onda e produzir um desvio Doppler aparente $\Delta\omega$, dado por

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \vec{k}_h \cdot \vec{U} = k_x U_x + k_y U_y \\ &= |\vec{k}_h| \cdot |\vec{U}| \cos \varphi \approx |\vec{k}_h| U_x \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que φ é o ângulo entre os dois vetores. O módulo do campo de velocidades é substituído por somente a componente em x , paralela ao equador solar, por estar associada à componente de velocidade leste-oeste, que é muito maior que o fluxo meridional, isto é, $U_x^2 \gg U_y^2$, fato confirmado no referido artigo a partir da análise tridimensional do espectro.

Usaremos a equação (5.3) como base para associar a perturbação dos modos com a geometria das observações no limbo.

6 RESULTADOS

A Figura 6.1 mostra o diagrama $l - \nu$ feito a partir do logaritmo do valor absoluto do espectro de potências da parte real da FFT bidimensional descrita no capítulo anterior. Com comprimento da janela temporal de 8,53 dias (2^{14} exposições) e passo de 45 segundos, a resolução de frequência do diagrama é da ordem de $\Delta f \approx 1,36 \times 10^{-6} \mu\text{Hz}$. Como esperado, a figura mostra modos com energia maior entre 3000 e 3500 μHz correspondentes às oscilações em torno de 5 minutos.

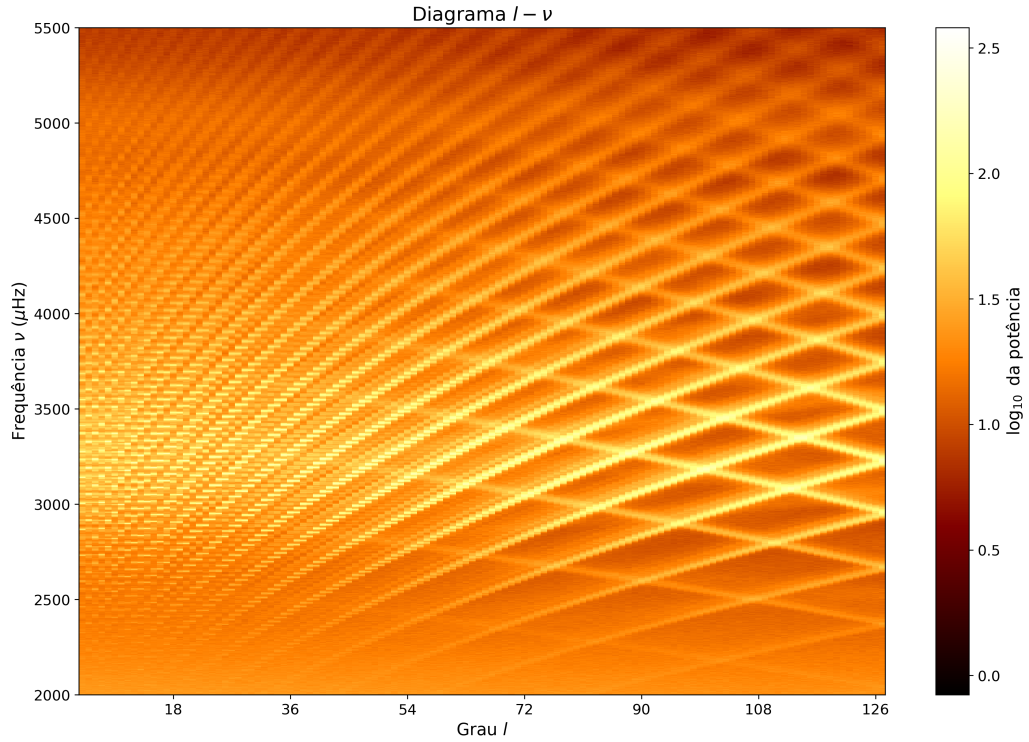
Da esquerda para a direita e de baixo para cima, o diagrama fornece informações desde o núcleo do Sol até suas camadas superficiais. O grau angular l representa a escala espacial da oscilação e a frequência temporal ν revela como oscilam diferentes partes do interior solar. Os picos de potência que indicam os modos de oscilação são organizados em cristas ao longo do diagrama. Cada crista representa um valor da ordem radial n , associado ao número de nós da onda na direção radial, iniciando em $n = 0$ para a crista mais fraca na parte inferior do diagrama (visível à direita), que representa o modo f, de gravidade superficial (cf. Seção 2.1.5). Todas as outras cristas acima do modo f representam modos p.

Para um dado modo p, a frequência aumenta com o aumento do grau angular e da ordem radial. A distribuição dos modos na forma de cristas indica quais oscilações estão presas no interior solar, dadas suas condições internas. A maior parte do diagrama ($l > 10$) mostra ondas presas no gradiente de temperatura da zona convectiva. O formato de parábolas inclinadas ocorre devido à relação de dispersão das ondas acústicas no meio gravitacionalmente estratificado junto do transporte do campo de ondas em relação ao observador pela rotação do Sol (Hill, 1988).

Além das cristas comuns aos diagramas $l - \nu$ solares, na Figura 6.1 também são visíveis cristas que parecem estar “refletidas” na extremidade direita. Trata-se de um problema matemático associado à frequências maiores que a frequência de Nyquist, que são dobradas para valores menores de l dado que os dados não possuem amostragem suficiente para resolvê-las. Outra característica visível no diagrama é o vazamento das cristas de potência para graus menores, com acúmulo de potência de vazamento entre as cristas à medida que a separação entre elas diminui, isto é, para menores valores de l . Isso ocorre, de acordo com Toner, Jefferies e Toutain (1999), devido à análise feita no anel estreito no limbo, tornando a resposta espacial unilateral em relação a l , algo que não ocorre para heliosismologia global.

A partir dos valores da média latitudinal da velocidade angular $\Omega(r)$ apresentados na Seção 3.1 obtidos por Cuny et al. (2017), a equação (3.8) foi utilizada para simular teoricamente a taxa de rotação aparente ao longo do limbo $\Psi(t)$, vista na Figura 6.2. Como os valores de incerteza são pequenos, não é possível vê-los no gráfico. Procurou-se utilizar o mesmo tempo de 3 anos para assemelhar o gráfico ao da Figura 3.4, feito originalmente com o ajuste senoidal. O período de 1 ano na taxa aparece devido à razão t/P e a amplitude

Figura 6.1: Diagrama $l - \nu$ do logaritmo do valor absoluto do espectro de potências da parte real da transformada de Fourier bidimensional realizada para $\alpha(\theta, t)$.



Fonte: o autor.

obtida entre $\pm 0,3$, aproximadamente, é a mesma obtida pelos autores do artigo original. Vê-se que a forma temporal não depende da velocidade angular, somente a amplitude, reforçando a afirmação de que a taxa $\Psi(t)$ é apenas um fator geométrico proveniente da linha de visada do instrumento, não uma medida física.

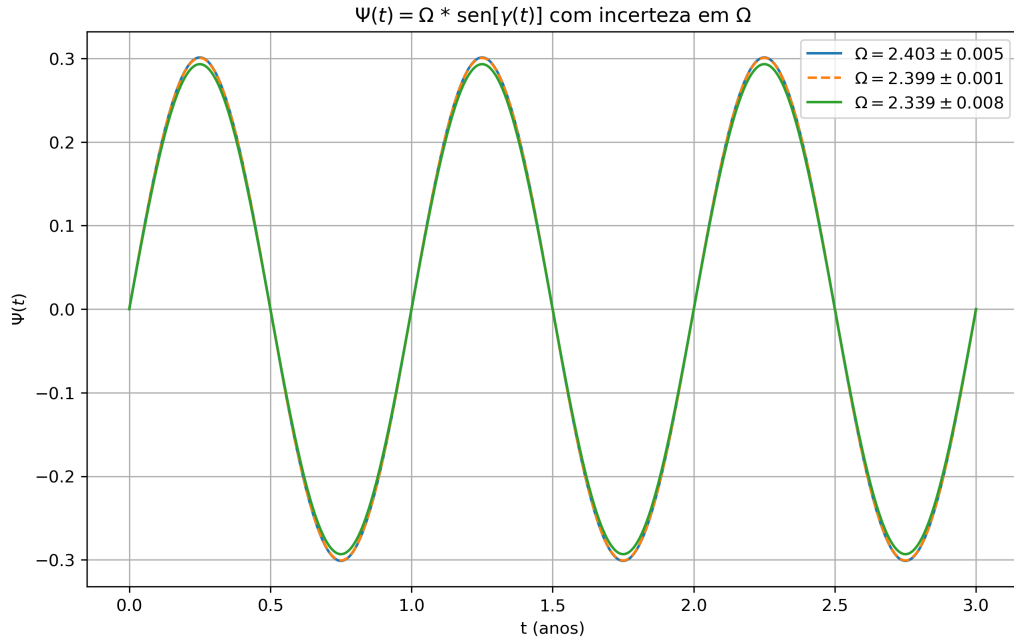
Procurou-se relacionar a perturbação das frequências vista no limbo e descrita pela equação (3.9) com a perturbação gerada pelo campo de velocidades, descrita pela equação (5.3). As duas equações têm em comum sua dependência da rotação do meio. Na camada superior da fotosfera, no limbo, a velocidade angular Ω está associada à velocidade linear zonal (leste-oeste) U_x , tangencial ao disco, por

$$\begin{aligned} \Omega(r = R_{\odot}, \psi) &= \frac{U_x(\psi)}{R_{\odot} \cos \psi} \\ \implies \vec{U} &= \Omega(R_{\odot}, \psi) R_{\odot} \cos \psi \hat{\phi} = \vec{\Omega}(\psi) \times (R_{\odot} \hat{r}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

em que a descrição é feita em coordenadas esféricas e ψ é a latitude solar, relacionada à colatitude (θ) por $\theta = 90^\circ - \psi$ (Figura 2.7).

Neste capítulo, a partir deste parágrafo, a letra θ será usada exclusivamente para denotar a variação nas posições determinada pelo *limbfit*, substituiremos a colatitude pela letra ψ' . Dessa forma, temos $\psi' = 90^\circ - \psi$. Essa mudança, além de evitar confusão entre as letras, tem o intuito de seguir a convenção amplamente usada do sistema de coordenadas heliocêntricas ra-

Figura 6.2: Simulação da taxa de rotação aparente Ψ para os valores de velocidade angular obtidos por Cunningham et al. (2017).



Fonte: o autor.

diais definido por Thompson (2006). O ângulo ψ' é medido no sentido anti-horário da projeção do polo norte solar, como pode ser visto na Figura 6.3, em que o ângulo aparece em graus junto do parâmetro de impacto ρ , que mede a distância radial.

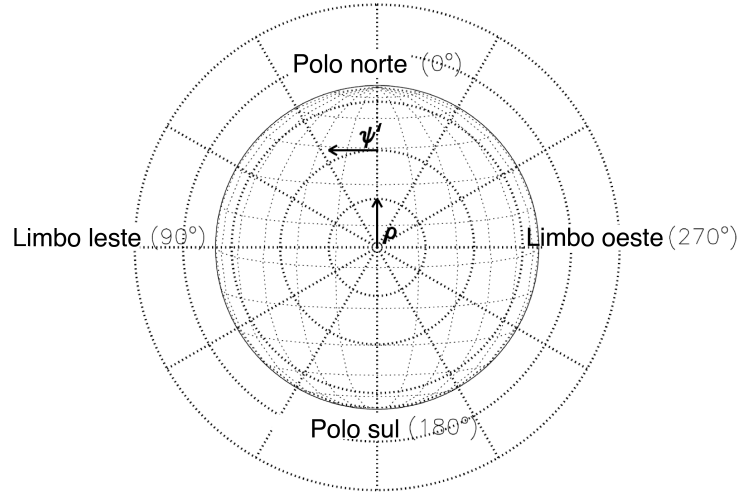
Na equação (5.3), podemos substituir o módulo do vetor de onda horizontal pela expressão dada em (2.61) e a componente da velocidade linear por (6.1). Assim, obtemos para a perturbação

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \frac{L}{R_{\odot}}\Omega(R_{\odot}, \psi)R_{\odot} \cos \psi \cos \varphi, \\ &= L \Omega(R_{\odot}, \psi) \cos \psi \cos \varphi.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Essa simplificação só é possível em $r = R_{\odot}$, dado que a equação (2.61), que determina o módulo do vetor de onda horizontal, define o Sol como cavidade oscilante e não é válida para valores diferentes de $R_{\odot}$, exceto ao considerar outras estrelas.

Para modos de oscilação bem definidos, como os modos de 5 minutos, a contribuição para a perturbação das frequências temporais observadas será determinada, de acordo com (6.2), pelo número de comprimentos de onda ao redor do Sol, sua velocidade angular e pelos cossenos da latitude, associada à análise feita ao longo do limbo, e do ângulo φ entre o vetor de onda e a componente linear da velocidade de rotação. Ambos os ângulos devem estar relacionados a $\gamma(t)$, da equação (3.7), que provoca a variação da posição do limbo na linha de visada e, portanto, os dois ângulos variam com o tempo. Além disso, como a análise é feita ao longo do limbo, ambos os ângulos irão variar conforme variam as posições, para um tempo específico.

Figura 6.3: Diagrama do Sol mostrando as coordenadas heliocêntricas radiais com linhas indicando valores constantes do parâmetro de impacto ρ e do ângulo de posição ψ' .



Fonte: adaptado de Thompson (2006).

Para cada θ , o ângulo entre o vetor de onda e a direção da rotação linear será diferente e, como deve ser, a latitude da posição medida também.

De forma similar, investigou-se o número de onda angular do limbo $|\vec{k}_a|$, oriundo da análise de Fourier, para determinar sua relação com $|\vec{k}_h|$. Conforme $\gamma(t)$ varia, $\vec{k}_a$ muda de direção em relação à rotação. Quando $\gamma(t) = 0$, o equador solar está paralelo à eclíptica (com a correção do ângulo P) e o limbo coincide com o meridiano solar. Neste caso, a análise retorna $\vec{k}_a = \vec{k}_y$, isto é, há somente contribuição ao longo do meridiano e nenhuma devido à rotação. Quando $\gamma(t) = \pm B$, há contribuição máxima de $\vec{k}_x$, pois é quando o Sol está mais inclinado da normal à eclíptica na linha de visada do HMI.

Introduzem-se as constantes $a(\gamma)$ e $b(\gamma)$ que determinam a contribuição de k_x e k_y para k_a , respectivamente, tal que

$$\begin{aligned}\vec{k}_a &= a(\gamma)\vec{k}_x + b(\gamma)\vec{k}_y, \\ a(0) &= 0, \quad b(0) = 1, \\ a(\pm B) &= \text{valor máximo}, \quad b(\pm B) = \text{valor mínimo}, \\ a^2 + b^2 &= 1.\end{aligned}$$

Dessas relações, podemos esperar que a e b sejam expressões trigonométricas. Da variação de $\vec{k}_a$ com $\gamma(t)$, é razoável supor que ele dependa de φ , dada a relação com o vetor de onda horizontal. Uma solução simples é supor $a(\gamma) = \cos[\varphi(\gamma, \theta)]$ e $b(\gamma) = \sin[\varphi(\gamma, \theta)]$ e, portanto,

$$\vec{k}_a = \cos[\varphi(\gamma, \theta)] \vec{k}_x + \sin[\varphi(\gamma, \theta)] \vec{k}_y. \quad (6.3)$$

É necessário encontrar a dependência de φ de γ e θ . Quando $\gamma(t) = 0$ sabemos que,

Tabela 6.1: Valores de $\varphi(\gamma, \theta)$ para diferentes γ e θ .

$\theta \backslash \gamma$	$+B$	0	$-B$
0	$\pi/2 - B$	$\pi/2$	$\pi/2 + B$
$\pi/2$	0	$\pi/2$	π
π	$-\pi/2 + B$	$\pi/2$	$-\pi/2 - B$
$3\pi/2$	0	$\pi/2$	π

Fonte: o autor.

de $\vec{k}_a = \vec{k}_y$, devemos ter $\varphi(0, \theta) = \pi/2$, independentemente de θ , pois a direção ao longo do meridiano será sempre perpendicular à velocidade de rotação linear, ao longo da direção zonal. Conforme $\gamma(t)$ varia entre $\pm B$, o valor de φ terá variação equivalente no equador solar. Nos polos, independentemente do valor absoluto de $\gamma(t)$, exceto para $\gamma(t) = 0$, o ângulo φ terá sempre direção igual ou oposta à velocidade linear, dependendo apenas do sinal de $\gamma(t)$. Um resumo dessa exposição pode ser visto na Tabela 6.1, em que se considera que θ tem início no limbo oeste (Figura 6.3), como no círculo trigonométrico. Como o ângulo $\varphi(\gamma, \theta)$ é usado somente dentro da função cosseno da equação (6.2), optou-se por substituir $3\pi/2$ por $-\pi/2$, para simplificação.

Vemos que são necessárias duas funções para descrever φ , uma para quando o eixo de rotação solar está inclinado em direção à Terra, deixando o hemisfério norte solar mais visível e $\gamma(t) \rightarrow +B$, e outra para quando o eixo está inclinado para a direção contrária, com o hemisfério sul solar mais visível e $\gamma(t) \rightarrow -B$. As funções são simétricas em relação à linha $\varphi = \pi/2$, dado que os vetores só apresentam esse ângulo entre si quando $\gamma(t) = 0$.

Começando pelo lado positivo de $\gamma(t)$, o valor nulo para $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$ indica uma função trigonométrica do tipo cosseno multiplicando toda a expressão e o valor para $\theta = 0$ nos indica que

$$\varphi_+(\gamma \rightarrow +B, \theta) = (\pi/2 - \gamma) \cos \theta.$$

A expressão também entra em acordo com $\theta = \pi$.

Quando $\gamma(t)$ é negativo, dada a simetria em relação à φ_+ , inverte-se o sinal da função e adiciona-se um termo $+\pi$ para que o eixo de simetria seja a linha $\varphi = \pi/2$. Dessa forma, temos

$$\varphi_-(\gamma \rightarrow -B, \theta) = \pi + (|\gamma| - \pi/2) \cos \theta,$$

onde o módulo garante que o sinal da função não seja alterado novamente.

As expressões finais para o ângulo entre o vetor número de onda e o vetor da velocidade linear do Sol são

$$\varphi(\gamma, \theta) = \begin{cases} (\pi/2 - \gamma) \cos \theta, & 0 < \gamma \leq +B, \\ \pi/2, & \gamma = 0, \\ \pi + (|\gamma| - \pi/2) \cos \theta, & -B \leq \gamma < 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

Tabela 6.2: Valores de $\psi(\gamma, \theta)$ para diferentes γ e θ .

$\theta \backslash \gamma$	$+B$	0	$-B$
0	0	0	0
$\pi/2$	$\pi/2 - B$	$\pi/2$	$\pi/2 - B$
π	0	0	0
$3\pi/2$	$-\pi/2 + B$	$-\pi/2$	$-\pi/2 + B$

Fonte: o autor.

que devem ser usadas na equação (6.3). A Figura 6.4a ilustra como essas expressões variam em função de θ , ao longo das 256 posições, para diferentes valores de $\gamma(t)$. No gráfico, φ_0 está em roxo e vemos a evolução de φ_+ de $\gamma(t) = +B/2$ em verde para o seu máximo, em azul. O mesmo pode ser visto para φ_- , indo do vermelho ao máximo em laranja. Com exceção de φ_0 , a variação de $\varphi(\gamma, \theta)$ conforme $\gamma(t)$ varia é pequena, pois o ângulo de amplitude de $\gamma(t)$ é pequeno. Em 6.4b, vemos o cosseno dessas expressões para o mesmo domínio da figura anterior. Observa-se que o módulo do produto entre $\vec{k}_a$ e $\vec{U}_x$ é máximo nos polos ($\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$), em que os dois vetores têm a mesma direção, e tende a diminuir conforme $\gamma(t) \rightarrow 0$ em qualquer direção.

A latitude ψ está associada à rotação diferencial, como visto em (6.1). Como a análise de Fourier não atravessa os polos quando $\gamma(t) \neq 0$, a expressão do ângulo da latitude deve estabelecer qual a latitude máxima atingida conforme $\gamma(t)$ varia. Quando $\gamma(t) = 0$, não há alteração na medida da latitude, dada a coincidência do limbo com o meridiano solar. Conforme temos $\gamma(t) \rightarrow \pm B$, o anel descrito pelo limbo ao redor da circunferência solar se desloca de B nos polos, mas se mantém atravessando o equador no mesmo lugar.

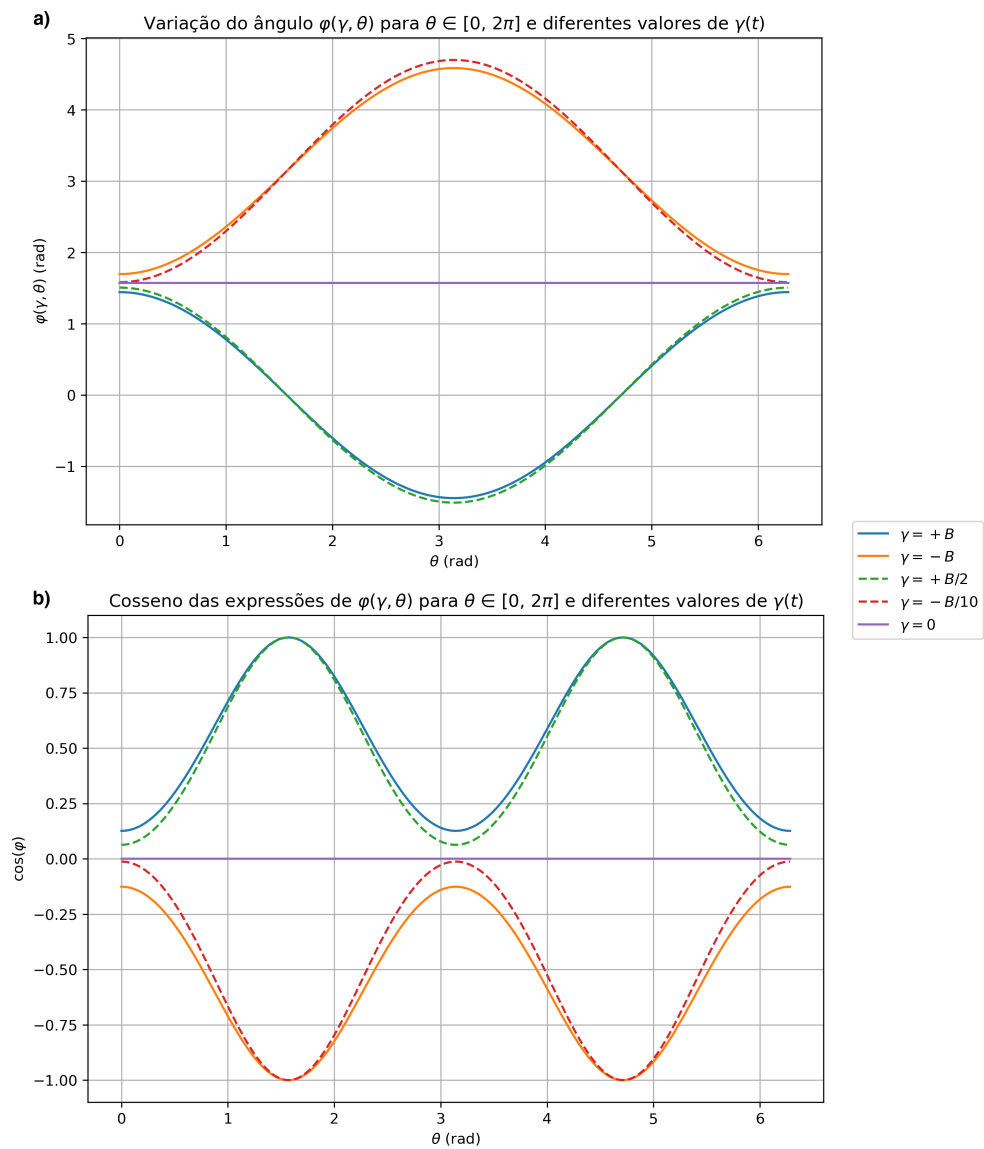
Os valores de $\psi(\gamma, \theta)$ para diferentes momentos do ano e posições do limbo podem ser vistos na Tabela 6.2. Como os valores de $\gamma(t)$ só aparecem para $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$, espera-se que ele apareça multiplicado por uma função seno. A função para a latitude é dada por $\arcsen(\sen \theta)$, assim, temos

$$\psi(\gamma, \theta) = \arcsen(\sen \theta) + |\gamma| \sen \theta, \quad (6.5)$$

em que o valor absoluto de $\gamma(t)$ faz com que se mantenha o sinal da função seno. A aplicação do seno do ângulo seguido de seu inverso tem a função de manter a amplitude do primeiro termo da expressão entre $\pm\pi/2$. O comportamento do ângulo pode ser visto na Figura 6.5a. Para $\gamma(t) = 0$, em verde, a expressão representa a função para a latitude sem alterações. Conforme $\gamma(t) \rightarrow \pm B$ (laranja pontilhado e azul), vemos um desvio na região dos polos, em $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$. A Figura 6.5b mostra o cosseno da expressão de $\psi(\gamma, \theta)$ para o mesmo domínio, em que é possível observar que os máximos aparecem na região do equador solar, para $\theta = 0$ e π , como se espera da velocidade diferencial.

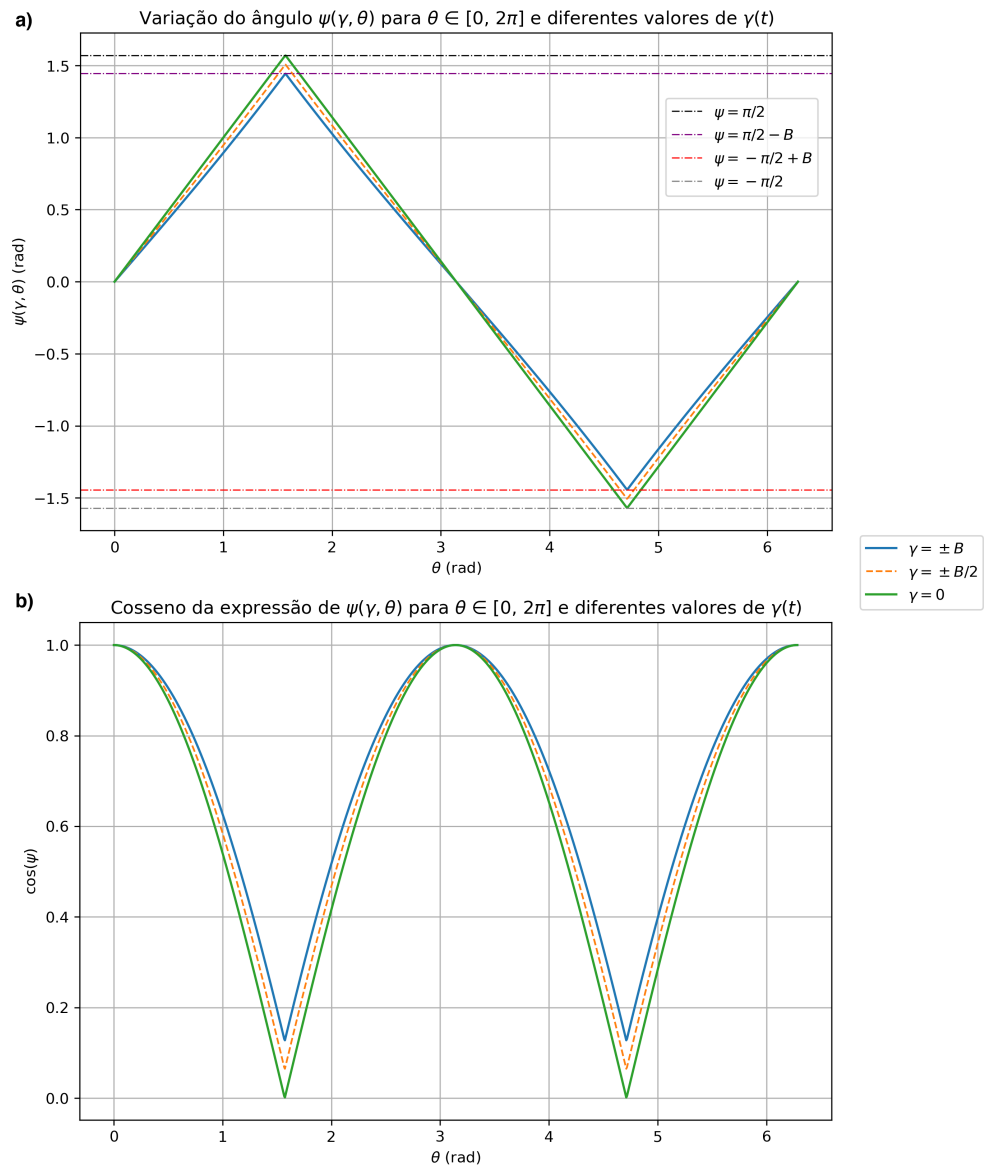
Na Figura 6.6, vemos um gráfico com o resultado do produto introduzido na equação

Figura 6.4: Variação do ângulo $\varphi(\gamma, \theta)$ ao longo de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$. As curvas em laranja e vermelho indicam valores negativos de $\gamma(t)$, enquanto as curvas azul e verde indicam valores positivos. A reta em roxo representa $\gamma(t) = 0$.



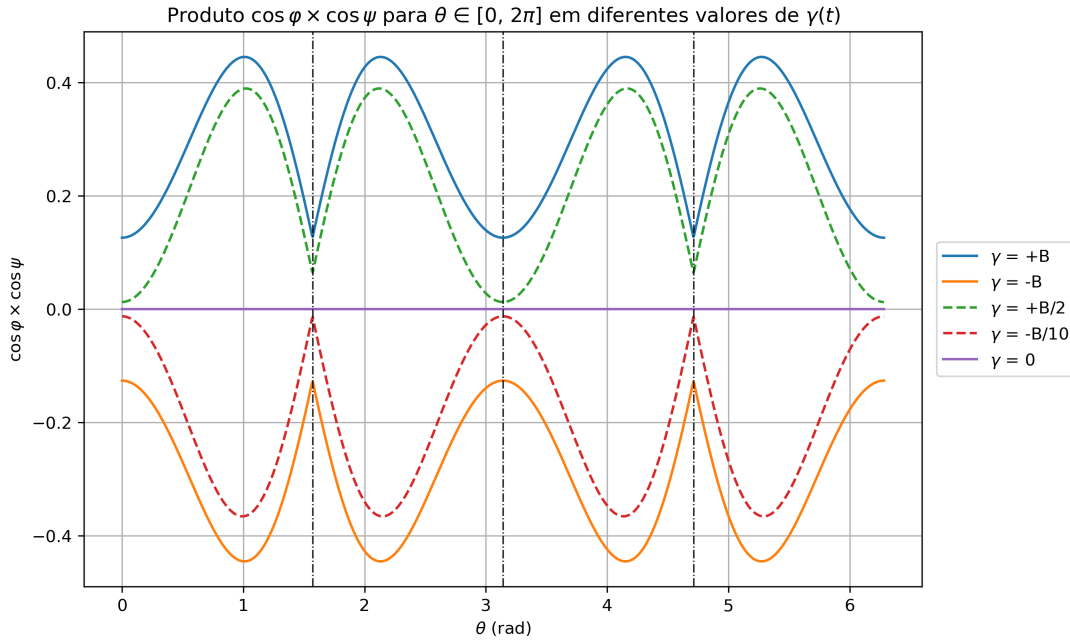
Fonte: o autor.

Figura 6.5: Variação do ângulo $\psi(\gamma, \theta)$ ao longo de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$.



Fonte: o autor.

Figura 6.6: Comportamento do produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para diferentes valores de $\gamma(t)$. As linhas verticais pretas traço-ponto indicam posições de destaque em que $\theta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$.



Fonte: o autor.

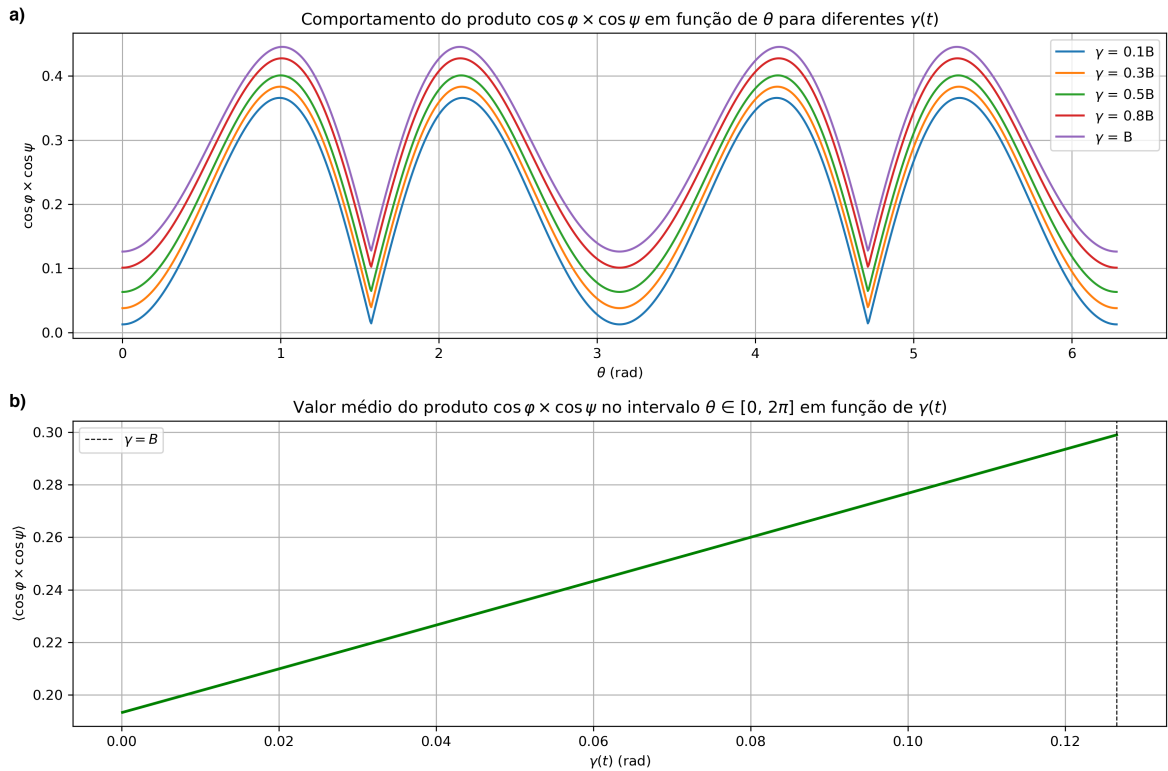
(6.2). Quanto maior a inclinação do eixo de rotação solar, maior a contribuição do produto dos cossenos para a perturbação $\Delta\omega$ observada pela geometria do problema. No instante em que $\gamma(t) = 0$, não há contribuição da velocidade linear de rotação solar na perturbação das frequências observadas. Se, portanto, não houvesse a inclinação do eixo de rotação solar em relação à eclíptica, não seria possível realizar medidas da velocidade linear do Sol por este método.

Do gráfico, vemos que as menores contribuições ocorrem nos polos e no limbo leste e oeste, marcadas na imagem por linhas verticais traço-ponto. Isso ocorre devido à inversão dos máximos e mínimos para os dois ângulos. Ao considerar $\varphi(\gamma, \theta)$, os valores máximos para seu cosseno ocorrem nos polos, dado que é quando os vetores $\vec{k}_a$ e $\vec{U}_x$ têm a mesma direção. No equador solar, o cosseno deste ângulo é pequeno, dado que B é um ângulo pequeno. Para a latitude, que determina a intensidade da velocidade linear, a situação é a oposta: a velocidade linear é máxima no equador solar e mínima nos polos. A inclinação faz com que o cosseno não chegue a valores nulos em $\theta = \pi/2$ e $3\pi/2$, dado que a análise não passa pelos polos.

As regiões de máxima contribuição da geometria da linha de visada ocorrem para os máximos dos produtos dos cossenos quando $\gamma(t) > 0$ e para os mínimos quando $\gamma(t) < 0$, que coincidem. Os valores para θ são de 1,01, 2,13, 4,15 e 5,27 radianos ou, em graus, são de aproximadamente $58,0^\circ$, $122,2^\circ$, $237,8^\circ$ e $302,0^\circ$. A maior contribuição, portanto, é de regiões levemente mais próximas dos polos solares.

Como a análise de Fourier é feita para todas as 256 posições pelo método usado por

Figura 6.7: a) Produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para valores positivos de $\gamma(t)$ e b) valor médio do mesmo produto para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ em função de $\gamma(t)$ para $\gamma(t) > 0$.

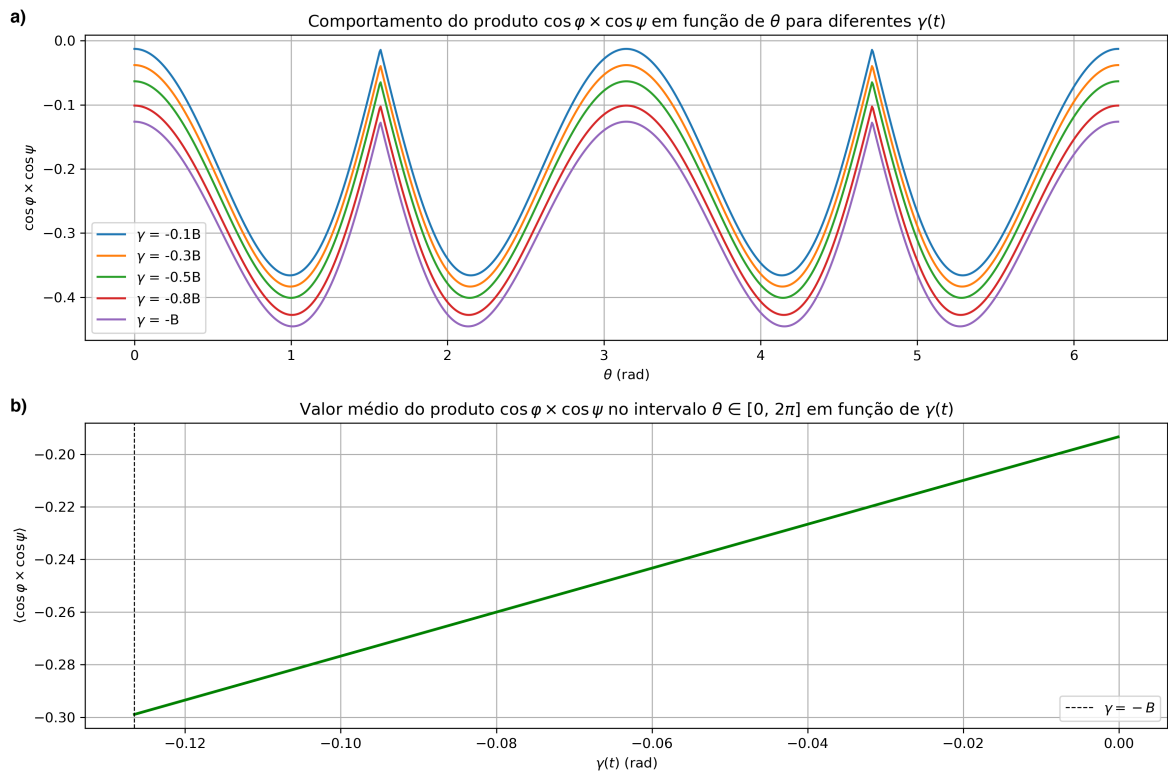


Fonte: o autor.

Cunyngham et al. (2017), sem determinar um ponto específico do limbo, procurou-se determinar o valor médio que o produto dos cossenos atinge para um ciclo completo ao redor do limbo. As Figuras 6.7 e 6.8 mostram novamente os gráficos do produto dos cossenos para valores de $\gamma(t)$ positivos e negativos, respectivamente. Abaixo dos gráficos dos produtos, em 6.7b e 6.8b, temos os gráficos do valor médio em função de $\gamma(t)$. Como é de se esperar, quanto maior a inclinação do eixo de rotação solar, maior é a contribuição da perturbação causada pela linha de visada. A linha vertical pontilhada desses gráficos marca o ponto de inclinação máxima, onde $\gamma(t) = \pm B \approx \pm 0,1265$ radianos. Os gráficos para o valor médio mostram que seu módulo é o mesmo quando a inclinação é positiva ou negativa. O valor mínimo absoluto de $\langle \cos \varphi \times \cos \psi \rangle$ é de $\sim 0,1934$ e o valor máximo absoluto é de $\sim 0,2989$. Portanto, a geometria da linha de visada contribui com até 30% da perturbação observada nas frequências de oscilação, conforme a equação (6.2).

Com base nesses resultados, a modulação anual usada por Cunyngham et al. (2017) para medir a taxa de rotação solar no limbo equivale a apenas cerca de 25% da contribuição total da perturbação das frequências observada devido à geometria da linha de visada, considerando o módulo do valor médio do produto dos cossenos na Figura 6.8, dado que mesmo a inclinação do eixo de rotação solar na outra direção contribui para uma perturbação maior. Como esse resultado foi obtido de uma interpretação diferente da usada no artigo de 2017, ele não prevê que a taxa de rotação deve ser menor, mas que no cálculo da taxa de rotação aparente ao longo

Figura 6.8: a) Produto $\cos \varphi \times \cos \psi$ em função de θ para valores negativos de $\gamma(t)$ e b) valor médio do mesmo produto para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ em função de $\gamma(t)$ para $\gamma(t) < 0$.



Fonte: o autor.

do limbo $\Psi(t)$ a variação da perturbação das frequências calculada neste trabalho está implícita.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho contribuiu para o estudo das oscilações solares a partir do método de observação no limbo solar ao estabelecer de que forma a geometria da linha de visada do HMI contribui para a perturbação das oscilações observadas. A heliosismologia do limbo é uma área ainda em desenvolvimento que pode trazer uma nova compreensão das propriedades dos modos oscilatórios acústicos e, possivelmente, gravitacionais. Ao determinar a geometria envolvida no método observacional do limbo, abrimos espaço para que novas pesquisas possam utilizar essa abordagem.

Com dados já trabalhados por Gois (2020), o método usado no estudo de Cunyningham et al. (2017) e a interpretação de Hill (1988), determinou-se como a geometria da linha de visada do instrumento HMI/SDO contribui para a perturbação das frequências observadas das oscilações e qual a intensidade dessa contribuição, da ordem de 30% para a inclinação máxima e 25% para a modulação anual. Para que isso fosse determinado, foram identificadas as expressões que caracterizavam o vetor de onda angular resultante da análise de Fourier realizada ao redor do limbo, além de em quais regiões do limbo o efeito é intensificado.

A inclinação do eixo de rotação do Sol e a variação do ângulo B ao longo do ano, apesar de trazerem incertezas que devem ser resolvidas, tornam possível tirar conclusões sobre as propriedades físicas do astro. Medidas da velocidade de rotação solar para diferentes camadas da zona de cisalhamento não seriam possíveis por este método se o eixo de rotação fosse perfeitamente perpendicular à eclíptica. A taxa de rotação aparente $\Psi(t)$ da estrutura do limbo foi simulada teoricamente, com dados de velocidade angular encontrados por Cunyningham et al. (2017). Determinou-se que as diferentes velocidades angulares provenientes de diferentes camadas da zona de cisalhamento contribuem somente para a amplitude da taxa $\Psi(t)$ e não para o seu comportamento senoidal, proveniente somente da geometria da linha de visada.

Os dados observados foram analisados em um diagrama de potências conhecido como diagrama $l - \nu$ a partir de uma transformada de Fourier em duas dimensões no tempo, para os quase seis anos de coleta de dados, e no espaço, para as 256 posições observadas no limbo. O diagrama mostra alta concentração de frequências de oscilação na região de período de cinco minutos ($3000 \sim 3500 \mu\text{Hz}$) mesmo para altos valores do grau l , que é uma das vantagens da observação no limbo solar. A observação do padrão de cristas características desse tipo de análise feita em heliosismologia do disco solar valida a análise através do limbo.

Ainda que o método de observação traga vantagens, uma fonte de erro é a presença de frequências acima da frequência de Nyquist, que são dobradas para menores valores de l . Os picos de amplitude podem ser vistos “refletindo-se” do lado direito do diagrama, trazendo imprecisão para o exame das oscilações.

A partir deste trabalho, é possível fazer uso dos resultados para realizar uma pesquisa sistemática das oscilações observadas em regiões específicas do limbo, associando-as a regiões

solares determinadas. Além disso, faz-se necessário o desenvolvimento de um método que compare a geometria calculada com os dados observacionais, de forma a corroborar o desenvolvimento teórico.

REFERÊNCIAS

- AERTS, C.; CHRISTENSEN-DALSGAARD, J.; KURTZ, D. W. *Asteroseismology*. [S.l.]: Springer Dordrecht, 2010.
- APPOURCHAUX, T. et al. Observational upper limits to low-degree solar g-modes. *The Astrophysical Journal*, v. 538, n. 1, p. 401, jul 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/309124>>.
- APPOURCHAUX, T.; PALLÉ, P. L. The History of the g-mode Quest. In: Jain, K. et al. (Ed.). *Fifty Years of Seismology of the Sun and Stars*. [S.l.: s.n.], 2013. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 478), p. 125.
- BECK, J. G.; GILES, P. Helioseismic Determination of the Solar Rotation Axis. *The Astrophysical Journal*, v. 621, n. 2, p. L153, feb 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/429224>>.
- BROWN, T. M. Observed brightness oscillations at the solar limb. *The Astrophysical Journal*, v. 230, p. 255–260, maio 1979.
- BROWN, T. M. et al. Inferring the Sun's Internal Angular Velocity from Observed p-Mode Frequency Splittings. *The Astrophysical Journal*, v. 343, p. 526, ago. 1989.
- BUTA, R. J.; SMITH, M. A. The light variations of nonradial pulsators: theory and application to the line profile variable 53 Persei. *The Astrophysical Journal*, v. 232, p. 213–235, ago. 1979.
- ÇAKMAK, H. Computer-aided measurement of the heliographic coordinates of sunspot groups. *Experimental Astronomy*, v. 38, n. 1, p. 77–89, Nov 2014. ISSN 1572-9508. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10686-014-9410-5>>.
- CARRASCO, V. M. S.; MUÑOZ-JARAMILLO, A.; GALLEGO, M. C.; VAQUERO, J. M. Revisiting Christoph Scheiner's Sunspot Records: A New Perspective on Solar Activity of the Early Telescopic Era. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, v. 927, n. 2, p. 193, mar 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac52ee>>.
- CARRINGTON, R. C. *Observations of the spots on the Sun: from November 9, 1853, to March 24, 1861, made at Redhill*. London, Williams and Norgate, 1863. Disponível em: <<https://archive.org/details/observationsofsp00carr>>.
- CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- CHAPLIN, W. J. *Music of the Sun: The Story of Helioseismology*. 1. ed. [S.l.]: Oneworld, 2006. ISBN 9781851684519.
- CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. Some aspects of the theory of solar oscillations. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, Taylor & Francis, v. 62, n. 1-4, p. 123–152, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03091929108229129>>.

CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. Helioseismology. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 74, p. 1073–1129, Nov 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.1073>>.

CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. *Lecture Notes on Stellar Oscillations*. 2014. Online lecture notes. Acessado em: 16 ago. 2025. Disponível em: <https://users-phys.au.dk/jcd/oscilnotes/Lecture_Notes_on_Stellar_Oscillations.pdf>.

CHRISTENSEN-DALSGAARD, J.; GOUGH, D.; TOOMRE, J. Seismology of the sun. *Science*, v. 229, n. 4717, p. 923–931, 1985. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.229.4717.923>>.

COUVIDAT, S. et al. Wavelength Dependence of the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) Instrument onboard the Solar Dynamics Observatory (SDO). *Solar Physics*, v. 275, n. 1, p. 285–325, Jan 2012. ISSN 1573-093X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11207-011-9723-8>>.

COWLING, T. G. The Non-radial Oscillations of Polytopic Stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 101, n. 8, p. 367–375, 12 1941. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/101.8.367>>.

CUNHA, M. S. et al. Asteroseismology and interferometry. *The Astronomy and Astrophysics Review*, v. 14, n. 3, p. 217–360, Nov 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00159-007-0007-0>>.

CUNNYNGHAM, I. et al. Poynting-Robertson-like Drag at the Sun's Surface. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 118, p. 051102, Feb 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.051102>>.

CURTIS, H. D. Rosa Ursina, sive SOL, A Retrospect. *Popular Astronomy*, v. 20, p. 561–568, nov. 1912.

DEUBNER, F.-L. Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the Sun. *Astronomy and Astrophysics*, v. 44, n. 2, p. 371–375, nov. 1975.

DOMINGO, V.; FLECK, B.; POLAND, A. I. SOHO: The solar and heliospheric observatory. *Space Sci. Rev.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 72, n. 1-2, p. 81–84, abr. 1995.

DUVALL, T. L. A dispersion law for solar oscillations. *Nature*, v. 300, n. 5889, p. 242–243, Nov 1982. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/300242a0>>.

EMILIO, M.; BUSH, R. I.; KUHN, J.; SCHERRER, P. A Changing Solar Shape. *The Astrophysical Journal*, v. 660, n. 2, p. L161, apr 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/518212>>.

EMILIO, M. et al. Measuring the solar radius from space during the 2012 venus transit. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, v. 798, n. 1, p. 48, dec 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0004-637X/798/1/48>>.

FOSSAT, E. et al. Asymptotic g modes: Evidence for a rapid rotation of the solar core. *Astronomy and Astrophysics*, v. 604, p. A40, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730460>>.

FRAUNHOFER, J. von. *Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre*. Franz, 1817. (Denkschriften der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gWNZ64zhzgC>>.

FRIAÇA, A. C. S.; PINO, E. D.; SODRe, L.; JATENCO-PEREIRA, V. (Ed.). *Astronomia: Uma Visão Geral do Universo Vol. 28*. 2. ed. EDUSP, 2003. ISBN 9788531404627. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=GF_SsuJIn4sC>.

GOIS, G. d. *Correção de efeito sistemático causado pelo movimento relativo do polo solar em observações de modos de pressão (p) no limbo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2020.

GOUGH, D. What have we learned from helioseismology, what have we really learned, and what do we aspire to learn? *Sol. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 287, n. 1-2, p. 9–41, out. 2013.

GOUGH, D.; TOOMRE, J. Seismic observations of the solar interior. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Annual Reviews, v. 29, n. 1, p. 627–685, set. 1991.

GOUGH, D. O. On the rotation of the sun. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 313, n. 1524, p. 27–38, 11 1984. ISSN 0080-4614. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rsta.1984.0080>>.

HARVEY, J. W. et al. The Global Oscillation Network Group (GONG) Project. *Science*, v. 272, n. 5266, p. 1284–1286, 1996. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.272.5266.1284>>.

HILL, F. Rings and Trumpets—Three-dimensional Power Spectra of Solar Oscillations. *The Astrophysical Journal*, v. 333, p. 996, out. 1988.

HILL, H. A.; ROSENWALD, R. D.; CAUDELL, T. P. Solar oscillations: the influence of the Sun's outer layers on their detection. *The Astrophysical Journal*, v. 225, p. 304–317, out. 1978.

HOTTA, H. et al. Dynamics of Large-Scale Solar Flows. *Space Science Reviews*, v. 219, n. 8, p. 77, Nov 2023. ISSN 1572-9672. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11214-023-01021-6>>.

HOWE, R. Solar interior rotation and its variation. *Living Reviews in Solar Physics*, v. 6, n. 1, p. 1, Dec 2009. ISSN 1614-4961. Disponível em: <<https://doi.org/10.12942/lrsp-2009-1>>.

KIPPENHAHN, R.; WEIGERT, A.; WEISS, A. *Stellar Structure and Evolution*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, 2012. (Astronomy and Astrophysics Library).

KUHN, J. R. Helioseismic Observations of the Solar Cycle. *The Astrophysical Journal*, v. 339, p. L45, abr. 1989.

KUHN, J. R.; BUSH, R.; EMILIO, M.; SCHOLL, I. F. The Precise Solar Shape and Its Variability. *Science*, v. 337, n. 6102, p. 1638–1640, 2012. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1223231>>.

LEIBACHER, J. W.; STEIN, R. F. A New Description of the Solar Five-Minute Oscillation. *Astrophysical Letters*, v. 7, p. 191–192, jan. 1971.

- LEIGHTON, R. B.; NOYES, R. W.; SIMON, G. W. Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report. *The Astrophysical Journal*, v. 135, p. 474, mar. 1962.
- LEMEN, J. R. et al. The Atmospheric Imaging Assembly (AIA) on the Solar Dynamics Observatory (SDO). *Solar Physics*, v. 275, n. 1, p. 17–40, Jan 2012. ISSN 1573-093X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11207-011-9776-8>>.
- LIANG, Z.-C. et al. Solar meridional circulation from twenty-one years of SOHO/MDI and SDO/HMI observations. *Astronomy and Astrophysics*, EDP Sciences, v. 619, p. A99, nov. 2018.
- MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas V.1*. 1. ed. [S.l.]: TODAPALAVRA, 2012. ISBN 8562450251; 9788562450259.
- MAMAJEK, E. E. et al. *IAU 2015 Resolution B3 on Recommended Nominal Conversion Constants for Selected Solar and Planetary Properties*. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1510.07674>>.
- MEHRET, L. C. *Estudo dos modos p no limbo solar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2015.
- MULLAN, D. J. *Physics of the Sun: A First Course*. [S.l.]: CRC Press, 2009. (Pure and Applied Physics). ISBN 9781420083088.
- NASA. *Solar Dynamics Observatory (SDO) Data*. <<https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/>>. Accessed: 2025-11-16.
- NORTON, A. A. et al. Spectral Line Selection for HMI. In: CASINI, R.; LITES, B. W. (Ed.). *Solar Polarization 4*. [S.l.: s.n.], 2006. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 358), p. 193.
- PAYNE-GAPOSCHKIN, C. H. *Stellar atmospheres: A contribution to the observational study of high temperature in the reversing layers of stars*. Tese (Doutorado) — Radcliffe College, United States, jan. 1925.
- PESNELL, W. D.; THOMPSON, B. J.; CHAMBERLIN, P. C. The Solar Dynamics Observatory (SDO). *Solar Physics*, v. 275, n. 1, p. 3–15, Jan 2012. ISSN 1573-093X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11207-011-9841-3>>.
- PRIEST, E. *Solar Physics: Overview*. Oxford University Press, 2020. Disponível em: <<https://oxfordre.com/physics/view/10.1093/acrefore/9780190871994.001.0001/acrefore-9780190871994-e-21>>.
- RABELLO-SOARES, M. C.; BASU, S.; BOGART, R. S. Exploring the substructure of the near-surface shear layer of the sun. *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 967, n. 2, p. 143, jun. 2024.
- ROBE, H. Les oscillations non radiales des polytropes. *Annales d'Astrophysique*, v. 31, p. 475, fev. 1968.
- RUSSELL, B. *History of Western Philosophy: And Its Connection with Political and Social Circumstances from the Earliest Times to the Present Day*. [S.l.]: Allen & Unwin, 1961. (Unwin University Books). ISBN 9780041090086.

SCHEINER, C. *Rosa Ursina*. [S.l.]: apud Andream Phaeum Typographum Ducalem, 1626.

SCHERRER, P. H. et al. The Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) investigation for the Solar Dynamics Observatory (SDO). *Sol. Phys.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 275, n. 1-2, p. 207–227, jan. 2012.

SCHOU, J. et al. Helioseismic Studies of Differential Rotation in the Solar Envelope by the Solar Oscillations Investigation Using the Michelson Doppler Imager. *The Astrophysical Journal*, v. 505, n. 1, p. 390, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/306146>>.

SCHOU, J. et al. Design and Ground Calibration of the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) Instrument on the Solar Dynamics Observatory (SDO). *Solar Physics*, v. 275, n. 1, p. 229–259, Jan 2012. ISSN 1573-093X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11207-011-9842-2>>.

SNODGRASS, H. B. Magnetic rotation of the solar photosphere. *The Astrophysical Journal*, v. 270, p. 288–299, jul. 1983.

SPIEGEL, E. A.; ZAHN, J.-P. The solar tachocline. *Astronomy and Astrophysics*, v. 265, p. 106–114, nov. 1992.

STIX, M. *The Sun*. 2. ed. Berlin, Germany: Springer, 2012. (Astronomy and Astrophysics Library).

THOMPSON, W. T. Coordinate systems for solar image data. *Astronomy and Astrophysics*, v. 449, n. 2, p. 791–803, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054262>>.

TONER, C. G.; JEFFERIES, S. M.; TOUTAIN, T. Increasing the visibility of solar oscillations. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 518, n. 2, p. L127–L130, jun. 1999.

TOUTAIN, T.; BERTHOMIEU, G.; PROVOST, J. Light perturbation from stellar nonradial oscillations: an application to solar oscillations. *Astronomy and Astrophysics*, v. 344, p. 188–198, abr. 1999.

TREES, V.; WANG, P.; STAMMES, P. Restoring the top-of-atmosphere reflectance during solar eclipses: a proof of concept with the uv absorbing aerosol index measured by tropomi. *Atmospheric Chemistry and Physics*, v. 21, p. 8593–8614, 06 2021.

ULRICH, R. K. The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface. *The Astrophysical Journal*, v. 162, p. 993, dez. 1970.

WOODARD, M. F.; LIBBRECHT, K. G. Observations of Time Variation in the Sun's Rotation. *Science*, v. 260, n. 5115, p. 1778–1781, 1993. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.260.5115.1778>>.

WOODS, T. N. et al. Extreme Ultraviolet Variability Experiment (EVE) on the Solar Dynamics Observatory (SDO): Overview of Science Objectives, Instrument Design, Data Products, and Model Developments. *Solar Physics*, v. 275, n. 1, p. 115–143, Jan 2012. ISSN 1573-093X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11207-009-9487-6>>.