

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - FÍSICA

MARLI TEREZINHA VAN KAN

**SINCRONIZAÇÃO E SUPRESSÃO DE CAOS EM REDES
COM INTERAÇÃO DE LONGO ALCANCE**

PONTA GROSSA
2013

MARLI TEREZINHA VAN KAN

**SINCRONIZAÇÃO E SUPRESSÃO DE CAOS EM REDES
COM INTERAÇÃO DE LONGO ALCANCE**

Tese apresentada para a obtenção do título de
Doutora na Universidade Estadual de Ponta
Grossa, Área de Física.

Orientador: Dr. Antonio Marcos Batista

PONTA GROSSA
2013

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Van Kan, Marli Terezinha
V217 Sincronização e supressão de caos em
 redes com interação de longo alcance/
 Marli Terezinha Van Kan. Ponta Grossa,
 2013.
 85f.

 Tese (Doutorado em Ciências - Área de
 Concentração: Física), Universidade
 Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos
 Batista.

 1.Sincronização. 2.Acoplamento.
 3.Modelos. 4.Expoentes de Lyapunov.
 I.Batista, Antonio Marcos. II.
 Universidade Estadual de Ponta Grossa.
 Doutorado em Ciências. III. T.

CDD: 531.11

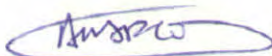
TERMO DE APROVAÇÃO

MARLI TEREZINHA VAN KAN

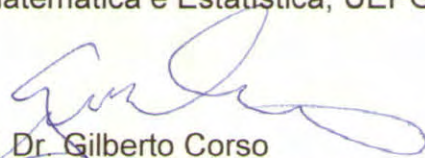
“SINCRONIZAÇÃO E SUPRESSÃO DE CAOS EM REDES COM INTERAÇÃO DE LONGO ALCANCE”.

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR



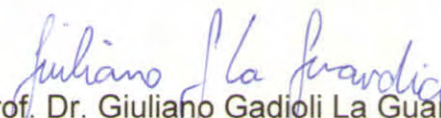
Prof. Dr. Gilberto Corso
Departamento de Biofísica - UFRN/RN



Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza
Departamento de Física - UFSJ/MG



Prof. Dr. Jose Danilo Szezech Junior
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG/PR



Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG/PR

Ponta Grossa, 18 de junho de 2013

Agradecimentos

Ao professor Dr. Antonio Marcos Batista pelos ensinamentos de vida, pelos esclarecimentos, por sempre me incentivar a melhorar, por sua importante contribuição ao longo da orientação.

Ao meu esposo João Marcos, aos meus filhos Fernanda e Rafael Felipe pelo apoio e compreensão em todos os momentos.

Aos meus pais Ludovico e Mônica que sempre acreditaram na importância do estudo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ciências-Física pelo conhecimento compartilhado.

Aos amigos da sala 105, Kelly, Regiane, Robson, Fernando, Ewandson, Moisés, Paulo, Ricardo, Rafael e Danilo pela amizade, companheirismo e por toda ajuda prestada nesta etapa de estudos.

Aos membros da banca de qualificação, pré-defesa e defesa pelas correções e sugestões.

Agradeço a Deus pela vida.

O conselho da sabedoria é; procure obter sabedoria; use tudo o que você possui para adquirir entendimento. (Provérbio 1: 7)

Resumo

Redes de mapas acoplados são utilizados como modelos para entender fenômenos espaço-temporais em sistemas espacialmente estendidos. Neste trabalho considera-se uma rede de mapas logísticos acoplados onde a interação entre os elementos decai segundo uma lei de potência. Para caracterizar a distribuição espacial das variáveis de estado da rede de mapas logísticos acoplados foi utilizado o diagnóstico parâmetro de ordem complexo a fim de quantificar a sincronização de caos. A sincronização e a supressão de caos foram obtidas no espaço de parâmetros por meio de valores da intensidade de acoplamento e do alcance de interação entre os elementos da rede. Outras medidas foram calculadas sendo o espectro de Lyapunov, a dimensão de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai. A partir do estudo da rede de mapas acoplados, foi investigada a dinâmica de uma rede de neurônios por meio do comportamento coletivo e do estado sincronizado. O modelo Hindmarsh-Rose é o modelo de neurônio escolhido para estudo, descrito por um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas em que a variável de estado que representa o potencial de membrana mostra uma sucessão de alternância entre estado de atividade e de repouso. A simulação possibilitou a compreensão do caso de um neurônio Hindmarsh-Rose e suas propriedades dinâmicas de geração de pulsos. O caso de acoplamento entre dois neurônios na configuração mestre-escravo e a sincronização na rede de neurônios com acoplamento não local foram tratados neste trabalho. A rede de mapas logísticos acoplados e a rede de neurônios Hindmarsh-Rose foram investigadas no espaço de parâmetros, uma vez que os constituintes das duas redes são diferentes.

Palavras-chave: sincronização, acoplamento, modelos, expoentes de Lyapunov.

Abstract

Networks of coupled map are used as models to understand the spatiotemporal phenomena in spatially extended systems. In this work it is considered a network of coupled logistic maps in which the interaction among the elements decays according to a power law. In order to characterize the spatial distribution of the logistic map network state variables it was used diagnostic complex order parameter to quantify the synchronization of chaos. The synchronization and suppression of chaos were obtained in the parameter space through coupling values of the intensity and range of interaction among network elements. Others measures were calculated as the spectrum of Lyapunov, Lyapunov dimension and Kolmogorov-Sinai entropy. From the study of the coupled maps network, it was investigated the dynamics of a neuron network by means of collective behavior, and the synchronized state. Hindmarsh-Rose model is the model neuron chosen in this work, and it is described by a system of three first order differential equations coupled in the state variable that represents the membrane potential which shows a succession of alternating activity and rest state. The simulation allowed us to understand the case of a neuron Hindmarsh-Rose and its dynamic properties generation of pulses. The coupling case between two neurons in the master-slave configuration and synchronization in the network of neurons with non-local coupling were used in this work. The network of coupled logistic maps and the Hindmarsh-Rose neurons networks were investigated in the parameter spaces since the two networks constituents are different.

Keywords: synchronization, coupling, models, Lyapunov exponents.

Lista de Figuras

2.1	Comportamentos da dinâmica do mapa logístico	18
2.2	Diagrama de bifurcação para o mapa logístico	19
2.3	Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov para o mapa logístico	21
2.4	Rede unidimensional com N elementos acoplados	24
3.1	Conexões do elemento de posição 1 para a rede de 8 elementos	36
3.2	Tempo versus parâmetro de ordem para a rede de mapas acoplados	39
3.3	Região de sincronização no plano $\varepsilon \times \sigma$	40
3.4	Comprimento horizontal da região de sincronização pelo tamanho da rede	41
3.5	Espectro de expoentes de Lyapunov analítico	43
3.6	Dimensão de Lyapunov pela intensidade de acoplamento	44
3.7	Diagrama de sincronização no espaço de parâmetros (σ, ε)	46
3.8	Densidade de entropia Kolmogorov-Sinai pela intensidade de acoplamento	48
4.1	Estrutura de um neurônio	50
4.2	Potencial de ação do neurônio	52
4.3	Potencial de ação do modelo Hodgkin-Huxley	54
4.4	Potencial de ação do modelo Hodgkin-Huxley em função da corrente	55
4.5	Série temporal do potencial de ação do modelo Hindmarsh-Rose	59
4.6	Disparos caóticos do modelo Hindmarsh-Rose	60
4.7	Exemplos da dinâmica do modelo Hindmarsh-Rose	61
4.8	Expoente de Lyapunov e diagrama de bifurcações do modelo Hindmarsh-Rose	64
4.9	Representação esquemática do acoplamento unidirecional mestre-escravo	66
4.10	Evolução temporal de x_1 e x_2 em função do tempo	68

4.11	Acoplamento pela média do módulo da diferença entre as trajetórias	69
4.12	Entropia KS em função da intensidade de acoplamento	70
4.13	Evolução temporal da variável x_i para dois neurônios da rede	73
4.14	Regiões no espaço de parâmetros	74
4.15	Frequência versus desvio médio para a rede de 16 neurônios	76
4.16	Amplitude versus desvio médio para a rede de 16 neurônios	77

Sumário

1	Introdução	10
2	Redes de mapas acoplados	14
2.1	Mapas unidimensionais	14
2.2	O expoente de Lyapunov	17
2.3	Acoplamento lei de potência	24
2.4	Espectro de expoentes de Lyapunov	27
3	Acoplamento não local	35
3.1	Rede de mapas acoplados com acoplamento lei de potência modificado	35
3.2	Sincronização e supressão de caos	37
3.3	Espectro de Lyapunov para o acoplamento lei de potência modificado	41
4	Hindmarsh-Rose	50
4.1	Neurônio	50
4.2	O modelo de Hindmarsh e Rose	56
4.3	Diagrama de bifurcações e expoente de Lyapunov	60
4.4	Sincronização no modelo de Hindmarsh e Rose	64
4.5	Modelo de Hindmarsh e Rose mestre-escravo	66
4.6	Modelo de Hindmarsh e Rose com acoplamento não local	71
5	Conclusão e trabalhos futuros	78
	Referências Bibliográficas	80

1 Introdução

Um sistema dinâmico é um conjunto de elementos que evoluem segundo regras matemáticas as quais determinam como o estado do sistema se modifica com relação ao tempo. A dinâmica de sistemas compostos por elementos que interagem entre si pode ser estudada por meio de modelos matemáticos, como as redes de mapas acoplados ou um sistema de equações diferenciais. As redes de mapas acoplados são sistemas dinâmicos que possuem variáveis de espaço e de tempo discretas e variáveis de estado contínuas, enquanto que um sistema de equações diferenciais possui as variáveis de espaço, tempo e estado contínuas. Um exemplo de fenômeno estudado por meio de uma rede de mapas acoplados é o comportamento coletivo em uma rede de neurônios e a formação de padrões em sistemas biológicos.¹ As redes de mapas acoplados são utilizadas para investigar fenômenos espaço-temporais em sistemas espacialmente estendidos, como a formação de padrões,² supressão de caos,³ intermitência,⁴ multiestabilidade⁵ e a sincronização de caos.⁶

A sincronização é o processo no qual os elementos de um sistema dinâmico passam a exibir um comportamento coletivo. Sistemas naturais como vagalumes piscando, marcapassos cardíacos e neurônios disparando apresentam uma tendência para funcionar em sincronia.^{6,7} A sincronização ocorre em um sistema como resultado da competição entre dois fatores, a desordem intrínseca causada por um comportamento não linear de cada elemento do sistema e o efeito difusivo provocado pelo acoplamento.⁸ O acoplamento entre os elementos de um sistema pode ocorrer de diferentes formas. Em geral, o acoplamento em uma rede pode ser classificado em local ou não local. No acoplamento local cada elemento está conectado com os seus vizinhos mais próximos e as interações são de curto alcance. O acoplamento local é uma forma estudada em redes de mapas acoplados, porém, foi observado que este tipo de acoplamento não permite a sincronização enquanto que a sincronização surge com a inclusão de conexões na rede.^{9,10} No acoplamento não local cada elemento está conectado com elementos mais distantes e as interações são de longo alcance. Um tipo de acoplamento não local é o acoplamento lei de potência onde a intensidade de interação entre os elementos diminui com a distância entre eles segundo uma lei de potência. O caso extremo de um acoplamento não local é o acoplamento

global, em que todos os elementos estão conectados entre si.

O acoplamento lei de potência foi utilizado em redes de mapas acoplados para o estudo da sincronização.^{11,12} Também é encontrado em redes biológicas para entender o decaimento da informação com a distância, onde a interação célula-a-célula é mediada por transmissores químicos. Em outro estudo, a dinâmica de células acopladas por difusão leva a um tipo de acoplamento não local que depende dos detalhes do processo de difusão. O modelo de acoplamento não local mediado por difusão química foi proposto por Kuramoto.^{13,14} No caso de neurônios, a substância química secretada e absorvida pelos neurônios é um neurotransmissor que intervém no acoplamento entre os neurônios. O acoplamento nesta forma, depende também da dinâmica dos neurônios individuais, que determina a propagação de impulsos elétricos no cérebro. O acoplamento lei de potência foi utilizado no trabalho de Viana e colaboradores¹⁵ para estudar a sincronização de *bursts* em uma rede neural com acoplamento de longo alcance mediado por substância de difusão. Outro trabalho que faz uso do acoplamento lei de potência é o de Pontes e colaboradores¹⁶ que investigaram a sincronização de fase de disparos de neurônios em uma rede de mapas de Rulkov acoplados e também foi verificada a inserção de um sinal externo de tempo periódico sobre as propriedades de sincronização.

A sincronização de caos refere-se a um processo em que dois ou mais sistemas caóticos se ajustam a uma determinada propriedade para obter um comportamento comum devido ao acoplamento. Um sistema dinâmico particular onde a sincronização desempenha um papel importante é o cérebro. A sincronização parece ser o mecanismo central de processamento de informação neuronal dentro de uma área do cérebro assim como para a comunicação entre outras áreas do mesmo. A sincronização é considerada crítica quando as mensagens e a transferência de sinais de uma unidade para outra na rede acontece com precisão. Oscilações síncronas de neurônios são relatadas no bulbo olfativo, no córtex visual, no hipocampo e no córtex motor.¹⁷ A presença ou a ausência de sincronia no cérebro é frequentemente associada a uma função específica do cérebro ou a um estado fisiológico crítico como a epilepsia ou a doença de Parkinson.¹⁸ A compreensão das condições que levam a um comportamento deste tipo e a possibilidade de manipular essas condições é um desafio na área da pesquisa.

Pesquisadores criaram modelos de neurônios como o modelo Hodgkin-Huxley,¹⁹ o modelo FitzHugh-Nagumo,²⁰ o modelo Hindmarsh-Rose,²¹ entre outros. Cada modelo fornece uma descrição da dinâmica do potencial de membrana do neurônio. Entre os modelos conhecidos, o modelo Hindmarsh-Rose é bastante utilizado e descrito por um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas em que a variável de estado que representa o potencial de membrana mostra uma sucessão de alternância entre regime de atividade e de repouso.²²

Neste contexto o estudo da sincronização por meio de um sistema de equações diferenciais constitui uma aplicação do acoplamento proposto para redes de mapas acoplados. As condições de sincronização de redes de neurônios utilizando o modelo Hindmarsh-Rose foram estudadas e conhecidas por meio de trabalhos como em.^{23,24}

Em sistemas dinâmicos, quando uma diferença muito pequena entre duas condições iniciais proporciona resultados distintos um do outro, o sistema é sensível às condições iniciais e uma maneira de medir esta sensibilidade é pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov informam a taxa média de aproximação ou separação entre trajetórias próximas iniciadas dentro de um pequeno volume do espaço de fase. Os expoentes de Lyapunov são utilizados para caracterizar a dinâmica de um sistema como caótica ou não caótica. O espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema acoplado fornece o grau de caoticidade do mesmo, quando um ou mais expoentes de Lyapunov são positivos.²⁵ Grandezas de interesse podem ser extraídas a partir do espectro de expoentes de Lyapunov como a entropia de Kolmogorov-Sinai (KS) e a dimensão de Lyapunov.²⁶ A entropia de Kolmogorov-Sinai é a taxa assintótica de criação de informação pelo sistema dinâmico e fornece a medida quantitativa do grau de caoticidade.

Neste trabalho, o acoplamento lei de potência será utilizado no modelo de redes de mapas acoplados e no modelo Hindmarsh-Rose de três equações diferenciais para o estudo da sincronização. A forma de acoplamento utilizada nos dois modelos surgiu de uma modificação no acoplamento lei de potência proposto por Tessone e colaboradores²⁷ e tratada neste estudo, como acoplamento lei de potência modificado. A hipótese do problema é que com a forma de acoplamento lei de potência modificado, a sincronização possa ser determinada no espaço de parâmetros a partir do tratamento utilizado em modelos de redes de mapas com acoplamento lei de potência existentes.^{11,12,25} Procurou-se obter diferentes comportamentos por meio da dinâmica coletiva da rede de mapas acoplados e da rede de neurônios variando os parâmetros de acoplamento, intensidade das interações e condições iniciais da rede. Uma aplicação do acoplamento lei de potência modificado consiste em conseguir a sincronização da atividade de *bursts* devido ao acoplamento que envolve todos os neurônios e o alcance das interações que diminui com a distância entre os neurônios por meio do modelo Hindmarsh-Rose.

Neste sentido, o acoplamento lei de potência modificado seria uma alternativa para estudar a sincronização em redes de mapas acoplados e como aplicação no modelo Hindmarsh-Rose. A razão para a escolha do acoplamento lei de potência modificado tem a vantagem de ser conveniente do ponto de vista computacional, pelo fato de um elemento ficar conectado com alguns elementos da rede. Então utilizando diagnósticos de sincronização e o espectro de

expoentes de Lyapunov pretende-se mostrar que redes de mapas com este acoplamento exibe sincronização e comportamentos equivalentes ao de redes de mapas com acoplamento lei de potência usual para determinados valores de parâmetros e diferentes tamanhos de redes.

Esta tese encontra-se organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, um estudo sobre redes de mapas acoplados e as formas de acoplamento estão apresentados. No Capítulo 3, encontram-se os resultados obtidos para a sincronização de caos para redes de mapas com o acoplamento lei de potência modificado e a expressão analítica para o espectro de expoentes de Lyapunov. No Capítulo 4, os conceitos referentes ao modelo Hindmarsh-Rose, regimes de disparos, sincronização no modelo de neurônios acoplados na configuração mestre-escravo e na rede de neurônios com acoplamento lei de potência modificado. No Capítulo 5, está a conclusão e sugestão de trabalhos futuros. O artigo resultante desta tese intitula-se *Synchronization and suppression of chaos in non-locally map lattices*.⁵¹

2 Redes de mapas acoplados

Este capítulo abordará um sistema dinâmico de tempo discreto regido por um mapa unidimensional, a saber, o mapa logístico que é capaz de exibir comportamento caótico. Conceitos como comportamento não linear, bifurcação, estabilidade, expoente de Lyapunov e formas de acoplamento são apresentados.

2.1 Mapas unidimensionais

Um sistema dinâmico consiste de uma regra determinística e de um conjunto de possíveis estados, os quais representam informações que caracterizam o sistema em um certo instante de tempo. É descrito por variáveis dependentes e variáveis independentes que variam no tempo.²⁸ O seu estado é representado pelos valores do conjunto de variáveis dependentes num certo instante de tempo e o espaço de estados possíveis é denominado espaço de fase. A sequência de estados ao longo do tempo define uma curva nesse espaço de fase denominada trajetória. A evolução de um sistema pode ser descrita por um conjunto de equações discretas ou contínuas as quais permitem a previsão do futuro, dado o passado do sistema.

Um sistema dinâmico contínuo é caracterizado por um conjunto de equações diferenciais, de variáveis dependentes e tempo contínuos.²⁹ Um exemplo é o sistema de equações ordinárias de primeira ordem. No tempo, $\frac{dx(t)}{dt} = F(x, t)$, em que $x(t)$ é um vetor N-dimensional e F é uma função N-dimensional das variáveis x e t .

Um sistema dinâmico discreto é caracterizado pela iteração de uma função. A sequência dos intervalos de tempo em um sistema dinâmico discreto é expressa por números inteiros, $n = 0, 1, 2, \dots$. Aplicando a regra de evolução em $n = 0$ obtém-se o estado em $n = 1$ e assim sucessivamente. O processo de atualização das variáveis onde o resultado de saída é utilizado como valor de entrada é denominado de iteração. Os resultados obtidos pelas iterações definem a trajetória dos estados no espaço de fase. A função que descreve tal sistema é chamada de mapa e é representada na forma $x_{n+1} = f(x_n)$, em que o tempo n é um valor discreto inteiro e $f(x_n)$ é

uma função linear ou não-linear. A escolha da lei f pode dar origem a diferentes tipos de comportamentos. Se f for uma função linear em x , a dinâmica depende de f e se restringe a valores de x_n que podem convergir assintoticamente para um ponto fixo, divergir para infinito, ou pode estacionar num ponto de equilíbrio. Observa-se que, a maioria dos fenômenos ou leis são regidos por funções não lineares, que apresentam uma dinâmica rica e mais complexa exigindo o conhecimento de outras possibilidades de estudo, como o de órbitas periódicas, bifurcações e caos. Para ilustrar a riqueza de comportamentos gerados por um sistema não linear, considera-se o mapa logístico. O nome logístico para o mapa surgiu do fato deste ser uma versão discreta do modelo de Verhulst para o crescimento populacional.³⁰

O mapa logístico é um exemplo de mapa unidimensional não linear utilizado para estudo, dado por $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, onde n é o tempo discreto, x é a variável contínua que pode assumir qualquer valor do intervalo $[0, 1]$ e r é o parâmetro do modelo, um número do intervalo $[0, 4]$. A representação gráfica do mapa logístico é uma parábola com concavidade voltada para baixo de vértice $(x_n = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{r}{4})$. As iterações sucessivas a partir de uma condição inicial x_0 para obter x_{n+1} para o mapa logístico são

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) = rx_0(1 - x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0) = rx_1(1 - x_1), \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(x_0)) = f^{(3)}(x_0) = rx_2(1 - x_2), \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_n) = f(f(\dots x_0 \dots)) = f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Assim, a órbita de x do mapa logístico é o conjunto de pontos $\{x_0, f(x_0), f^{(2)}(x_0), \dots\}$. O ponto x_0 é denominado de valor inicial da órbita. Um número real x^* é um ponto fixo de um mapa se $f(x^*) = x^*$. Se todos os pontos suficientemente próximos de x^* são atraídos para x^* , então x^* é chamado ponto fixo atrator. Se existe um $\delta > 0$ tal que as variáveis de estado x na vizinhança de $N_\delta(x^*)$, existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$, então x^* é um ponto fixo. A vizinhança $N_\delta(x^*)$ é o intervalo de números $\{x \in R : |x - x^*| < \delta\}$.²⁸ Os pontos fixos de um mapa são determinados resolvendo a equação $f(x) = x$. Os pontos fixos do mapa logístico de acordo com a equação $f(x) = x$ são os pontos de interseção do mapa com a reta bissetriz

$$\begin{aligned} rx_n(1 - x_n) &= x_n, \\ x_n &= r - \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

logo, $x_1^* = 0$ e $x_2^* = r - \frac{1}{r}$ são os pontos fixos do mapa logístico.

A questão da estabilidade de pontos fixos é significativa porque sistemas do mundo real

são sujeitos a perturbações infinitesimais. Um estado estável observado em um sistema realista deve corresponder a um ponto fixo estável. Se o ponto fixo é instável, pequenas perturbações no estado podem afastar a órbita do ponto fixo. A derivada do mapa no ponto fixo x^* é a medida de como a distância entre x^* e um ponto vizinho é aumentada ou diminuída pelo mapa.²⁸ Seja x_n próximo de x^* , isto é, $x_n = x^* + \delta_n$, $\delta_n > 0$, e a distância entre estes dois pontos $\delta_n = |x_n - x^*|$ evolui para $\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| = |f(x^* + \delta_n) - f(x^*)|$. Expandindo o mapa em série de Taylor em torno de x^* chega-se a expressão,

$$\begin{aligned} f(x^* + \delta_n) - f(x^*) &= \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right), \\ \delta_{n+1} &= \delta_n \left(\frac{df(x)}{dx} \right), \\ \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} &= \left(\frac{df(x)}{dx} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

O termo $\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}$ é uma constante, logo,

$$c = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*}. \quad (2.4)$$

Conclui-se que $|c| < 1$, o ponto fixo x^* é estável e, para $|c| > 1$, o ponto fixo é instável.

A estabilidade do ponto $x_1^*=0$ é determinada pela derivada do mapa logístico. Como $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = r(1 - 2x_n) = r$, então se $r > 0$, o ponto fixo $x_1^*=0$ será estável desde que $r < 1$, caso contrário será instável. Para o segundo ponto $x_2^* = r - \frac{1}{r}$ a derivada do mapa é $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_2^*} = 2 - r$. Então, x_2^* é estável se $f'(x_2^*) = |2 - r| < 1$, ou seja, o intervalo de estabilidade é o intervalo $(1, 3)$. Em $r = 1$, ocorre uma bifurcação e os pontos fixos trocam suas estabilidades. No intervalo $1 < r < 3$, $x_1^* = 0$ é instável, enquanto que x_2^* é assintoticamente estável e x_n converge para $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$. Para $r = 3$ tem-se uma bifurcação de duplicação de período, surgindo uma órbita estável de período 2, ou seja, a órbita estável deixa de ser o ponto fixo e passa a oscilar periodicamente entre dois valores.

Dependendo do mapa e dos valores de parâmetro, a dinâmica pode não convergir para um único ponto, mas resultar em um comportamento oscilante entre dois ou mais pontos. O mapeamento sucessivo dos pontos pode formar uma órbita periódica no espaço de fases. Uma órbita periódica é um conjunto finito de pontos que se repetem após um mesmo número de iteradas, sendo o período da órbita definido pelo menor número de iteradas para um determinado ponto voltar a se repetir. Por exemplo, se $f(f(x^*)) = x^*$ mas $f(x^*) \neq x^*$, a órbita é dita de período 2, se $f(x^*) = x^*$ a órbita é dita de período 1, que é o ponto fixo. Em geral, uma órbita com um ponto periódico x^* é expressa como $f^k(x^*) = x^*$, sendo k um número inteiro que

informa o período da órbita. A estabilidade de um ponto periódico pode ser analisada de modo semelhante a de pontos fixos.

O mapa logístico apresenta comportamentos diferentes quando o seu parâmetro de controle r é variado. A Figura 2.1 mostra quatro comportamentos da dinâmica do mapa logístico para diferentes valores de r todos com uma condição inicial igual a $x_0 = 0,1$. No mapa logístico em que $r = 2,8$, a condição inicial evolui para o ponto fixo $x^* = 0,642891$. Com parâmetro de controle $r = 3,3$, o sistema evolui para uma órbita de período 2, apresentando $x = 0,476158$ e $x = 0,822753$ para a variável de estado. Com parâmetro de controle $r = 3,5$, o sistema evolui para uma órbita de período 4 com os seguintes valores para a variável de estado, $x = 0,385327$, $x = 0,827013$, $x = 0,493294$ e $x = 0,872818$. Para o parâmetro $r = 3,9$, o mapa logístico apresenta comportamento caótico.

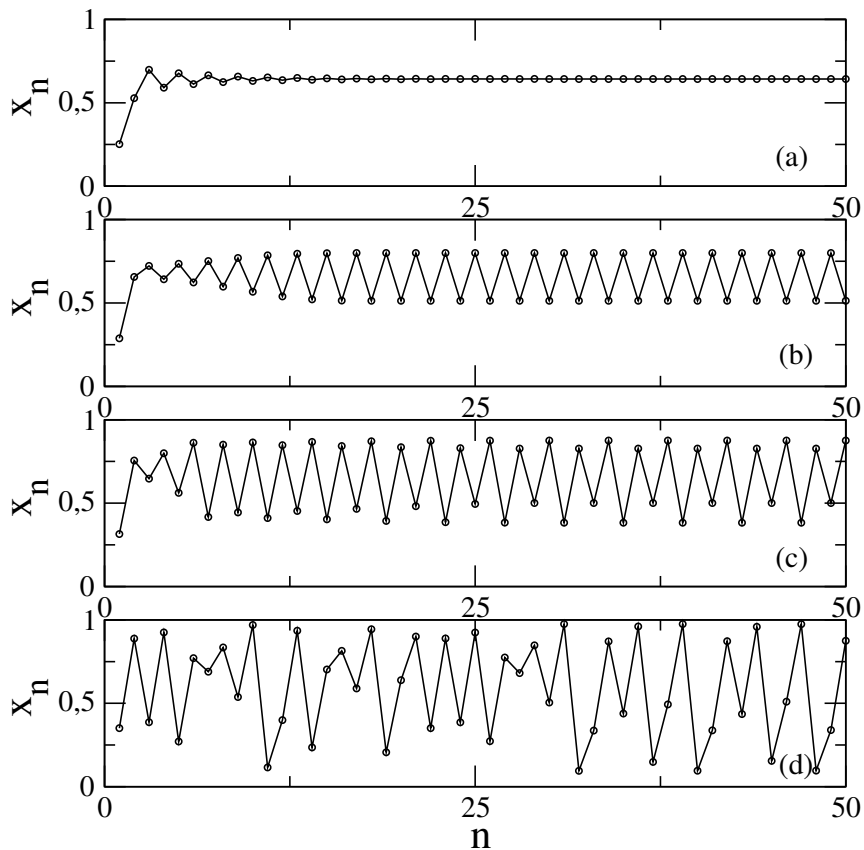
Para $r = 3,45$ a órbita de período 2 fica instável e sofre uma bifurcação de período, gerando uma órbita estável de período 4. A medida que o valor de r aumenta, as bifurcações passam a ocorrer indefinidamente. Para visualizar as bifurcações, constrói-se um diagrama de órbitas, onde são salvas as soluções assintóticas (os transientes são eliminados). Tempo transiente corresponde aos primeiros pontos da órbita que são desprezados para que esta evolua para seu comportamento final. O diagrama de bifurcações é um gráfico de valores assintóticos da variável de estado x versus parâmetro de controle r . Por valores assintóticos entende-se o comportamento das órbitas após um intervalo de tempo suficientemente grande. A Figura 2.2 apresenta o diagrama de órbitas, onde pode-se observar a cascata de bifurcações e janelas periódicas.

O mapa logístico apresenta comportamento caótico para $r = 4$. Para qualquer valor de $r < 3$, não existem órbitas periódicas com períodos maiores que 1. Para o intervalo aberto $(1, 3)$, qualquer condição inicial x do intervalo $[0, 1]$ faz com que o atrator se aproxime de $x = 1 - \frac{1}{r}$. Para $r=3$ ocorre uma duplicação de período, ou seja, aumentando o valor de r aparecem órbitas de período 2, 4, 8,... até um período infinito próximo de $r = 3,56994$, devido ao fato da órbita ficar instável. No intervalo $[3,56994, 4]$ o mapa apresenta um comportamento que varia entre caótico e janelas periódicas. O estudo e a previsão de comportamento caótico pode ser feito pela determinação dos expoentes de Lyapunov.

2.2 O expoente de Lyapunov

Para um sistema dinâmico, a sensibilidade às condições iniciais é quantificada pelo expoente de Lyapunov. Por exemplo, consideram-se duas trajetórias com condições iniciais muito

Figura 2.1: Comportamentos da dinâmica do mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ para diferentes valores de r . (a) $r = 2,8$, o mapa logístico exibe um ponto fixo atrator; (b) $r = 3,3$, órbita de período 2; (c) $r = 3,5$, órbita de período 4; (d) $r = 3,9$, comportamento caótico.

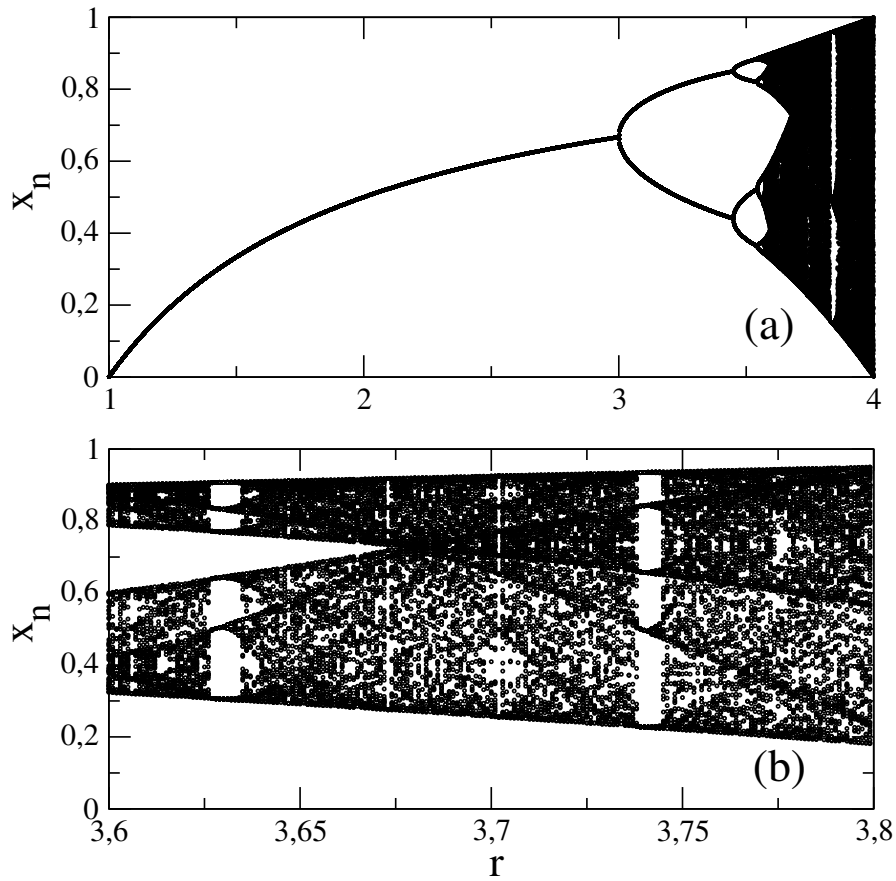


FONTE: A autora.

próximas em um espaço de estados. Quando o atrator é caótico, as trajetórias divergem, em média, em uma taxa exponencial caracterizada pelo maior expoente de Lyapunov. A presença de um único expoente de Lyapunov positivo é suficiente para diagnosticar caos e representa a instabilidade local em uma determinada direção.

A definição de expoente de Lyapunov para um mapa unidimensional do tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ é considerada. Dada uma condição inicial x_0 e um ponto $x_0 + \delta_0$, em que $\delta_0 > 0$, um número real tão pequeno quanto desejado. Seja δ_n a separação após n iterações. Se $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$, então λ é o expoente de Lyapunov. Uma fórmula para λ é obtida tomando o logaritmo

Figura 2.2: Diagrama de bifurcação para o mapa logístico, com uma condição inicial igual a 0, 1 e 1000 iterações sendo 900 desprezadas. (a) panorama geral; (b) ampliação de r no intervalo $[3,6, 3,8]$ para visualização de janelas de periódicas.



FONTE: A autora.

natural e observando que $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$

$$\begin{aligned}\delta_0 e^{n\lambda} &= |f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)|, \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|,\end{aligned}\tag{2.5}$$

para $\delta_0 \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$, a expressão de λ fica,

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|, \\ \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Pela regra da cadeia de diferenciação,

$$\frac{d}{dx_0} f^n(x_0) = \frac{d}{dx_{n-1}} f(x_{n-1}) \frac{d}{dx_{n-2}} f(x_{n-2}) \cdots \frac{d}{dx_0} f(x_0). \quad (2.7)$$

Pela substituição de (2.7) em (2.6), obtém-se,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|, \quad (2.8)$$

caso o limite exista. Pode-se separar o logaritmo do produtório em somas e o expoente de Lyapunov para uma órbita começando em x_0 pode ser escrito como

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (2.9)$$

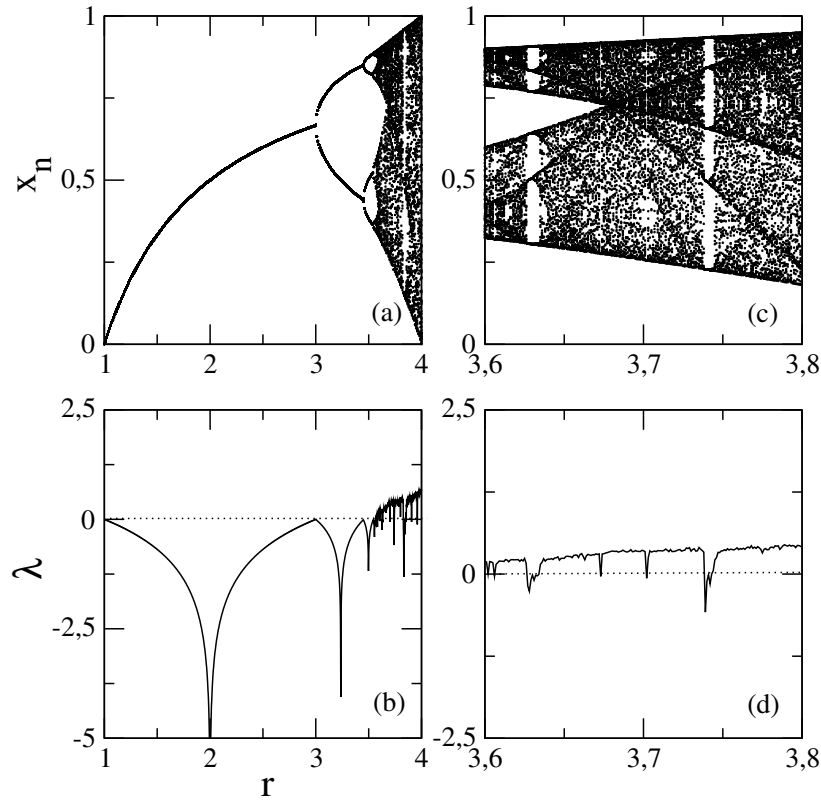
onde n indica o número de iterações, f' é a derivada do mapa que é calculada em cada ponto x_i .

A função que define o mapa logístico depende do parâmetro de controle r . Então, o valor de λ também dependerá desse parâmetro. Ao se construir o gráfico de r em função de λ pode-se identificar para quais valores de r tem-se dependência em relação às condições iniciais ($\lambda > 0$) e, portanto, sob quais condições o sistema apresenta comportamento caótico. Na Figura 2.3 apresenta-se a variação do expoente de Lyapunov com o parâmetro de controle para o mapa logístico. Observa-se que nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é nulo, nas regiões periódicas é negativo e nas regiões caóticas é positivo.

Para observar com detalhes, estabelece-se uma relação entre os diagramas de bifurcação, Figura 2.3 (a) e (c) e do expoente de Lyapunov, Figura 2.3 (b) e (d). Um expoente de Lyapunov negativo caracteriza um ponto atrator. Pela Figura 2.3 (b) percebe-se que isto ocorre para valores iniciais de r , onde o valor do expoente é menor que zero, sendo apenas igual a zero nos pontos onde ocorrem as bifurcações. Por outro lado, para r aproximadamente igual a 3,5, o expoente torna-se positivo, e é a partir daí que surgem as primeiras órbitas caóticas. Pode-se perceber por meio da ampliação do intervalo (3,6, 3,8) que na região periódica ou região de janelas, o expoente torna-se negativo novamente, voltando logo depois a ser positivo.

O sinal do expoente de Lyapunov é um indicador da estabilidade da trajetória e é utilizado para caracterizar a trajetória como caótica ou não caótica.²⁸ Expoentes de Lyapunov positivos indicam divergência exponencial de trajetórias próximas, implica sensibilidade às condições iniciais. Expoentes de Lyapunov negativos indicam um comportamento convergente para um ponto fixo estável ou para uma trajetória periódica. Expoentes de Lyapunov nulos indicam pontos de bifurcação. Em um sistema dinâmico, uma bifurcação corresponde a uma mudança nas características qualitativas do sistema à medida que um parâmetro é variado. As

Figura 2.3: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico; (b) variação do expoente de Lyapunov; (c) ampliação do intervalo [3,6, 3,8]; (d) variação do expoente de Lyapunov.



FONTE: A autora.

bifurcações podem estar relacionadas com o surgimento ou o desaparecimento de oscilações ou mudanças no período das oscilações. Um diagrama de bifurcação pode mostrar a transição entre flutuações cíclicas ou caóticas do sistema dinâmico.

Em mapas com mais de uma dimensão, um conjunto de condições iniciais muito próximas pode evoluir em direções diferentes no espaço de fase. Cada trajetória gerada por um mapa em $\mathbb{R}^N$ tem N expoentes de Lyapunov, os quais expressam a razão de separação de um ponto da trajetória em relação a cada direção ortogonal definida pela dinâmica do mapa. A partir de um pequeno volume de pontos no espaço de fase, os expoentes de Lyapunov informam a contração ou expansão do volume em direções ortogonais. Considera-se a evolução de um disco de condições iniciais após n iterações de um mapa com duas dimensões. A configuração dos pontos após n iteradas assume a forma de uma elipse de eixos $r_1 = e^{n\lambda_1}$ e $r_2 = e^{n\lambda_2}$, sendo λ_1 e λ_2 , os expoentes de Lyapunov do mapa. Como o eixo r_1 aumenta e o eixo r_2 diminui,

conclui-se que λ_1 é o expoente positivo e λ_2 é o expoente negativo.

Para mapas de dimensão $N \geq 3$, considera-se uma esfera de raio dr centrada em um ponto $\vec{r}_0$. Os raios da esfera podem ser considerados como deslocamentos infinitesimais em relação ao ponto $\vec{r}_0$ segundo vetores tangentes $\vec{r}^{(i)}$.²⁹ Deste modo, a evolução dos vetores tangentes $\vec{r}^{(i)}$ em relação ao ponto $\vec{r}_0$ é descrita pela equação

$$\vec{r}_{n+1}^{(i)} = DF^n(\vec{r}_0) \vec{r}_n^{(i)}, \quad (2.10)$$

sendo $\vec{r}^{(i)}$ o vetor tangente associado ao i -ésimo raio da esfera e DF^n a derivada do mapa F na n -ésima iteração. Pode-se escrever $DF^n(\vec{r}_0)$ por meio da matriz Jacobiana,

$$DF^{(n)} = J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(3)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(2)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(3)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(N)}} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

A Jacobiana representa a aproximação linear de uma função diferenciável nas vizinhanças de um ponto. A matriz Jacobiana descreve como uma pequena mudança no ponto inicial propaga-se até um ponto final. A variação na esfera será um elipsóide com N eixos ortogonais. A equação (2.10) pode ser analisada como sendo um problema de autovalores e autovetores. Para cada direção ortogonal existe um autovalor da matriz Jacobiana. Os expoentes de Lyapunov são determinados a partir dos autovalores da matriz Jacobiana $J_n(\vec{r}_0)$, considerando $n \rightarrow \infty$. Pela regra da cadeia, $J_n(\vec{r}_0)$ corresponde ao produto de n matrizes Jacobianas, cada uma definida em um ponto da trajetória,

$$DF^n(\vec{r}_0) = DF(\vec{r}_{n-1})DF(\vec{r}_{n-2})\dots DF(\vec{r}_0). \quad (2.12)$$

A equação dos expoentes de Lyapunov para mapas em $\mathbb{R}^N$ é dada por

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Gamma_k|, \quad (2.13)$$

para $k = 1, 2, \dots, m$ e Γ_k é o k -ésimo autovalor da matriz produto de n matrizes Jacobianas ao longo da trajetória. Os expoentes de Lyapunov podem ser obtidos por meio de aproximação numérica. Procedimentos tais como a redução da Jacobiana à forma superior de Hessenberg²⁵ e o método de ortonormalização de Gram-Schmidt²⁸ são utilizados para a determinação dos

expoentes de Lyapunov. O processo de Gram-Schmidt consiste em ortonormalizar os vetores que formam o espaço tangente a cada iteração e fundamenta-se na definição de produto interno. Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que associa um número real para cada par de vetores deste espaço. O processo recebe um conjunto finito de vetores linearmente independentes $\{v_1, \dots, v_N\}$, subtrai as projeções de um vetor sobre o outro e retorna um conjunto de vetores ortogonais $\{u_1, \dots, u_N\}$ que constitui uma base ortonormal do espaço de vetores. Para obter uma aproximação precisa para os expoentes de Lyapunov é necessário um número suficientemente grande de iterações, que por sua vez tendem a apresentar um resultado que concorda com os aproximados por outras técnicas numéricas e analíticas.^{31,34}

Neste trabalho será utilizado o procedimento de redução da Jacobiana a forma superior de Hessenberg. O produto das Jacobianas fornece uma matriz não simétrica. Devido a não simetria dessa matriz, utiliza-se a redução a forma superior de Hessenberg para calcular os autovalores. A sensibilidade no cálculo dos autovalores a erros numéricos durante a execução dos algoritmos pode ser reduzida pelo procedimento denominado balanceamento. Os erros encontrados por procedimentos numéricos são proporcionais a norma Euclidiana da matriz, isto é, a raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos da matriz. A ideia do balanceamento consiste em usar transformações similares para fazer linhas e colunas correspondentes da matriz terem normas comparáveis, reduzindo-se assim a norma total da matriz. Tal processo mantém os autovalores da matriz inalterados. O balanceamento é um procedimento de operações de ordem N^2 . Como o balanceamento leva mais que uma pequena porcentagem do tempo total necessário para calcular os autovalores, é recomendado aplicar o balanceamento para matrizes não simétricas. O algoritmo devido a Osborne, consiste em uma sequência de transformações similares por matrizes diagonais. A saída é a matriz que é balanceada na norma dada pela adição de valores nos elementos da matriz. Este procedimento é mais eficiente do que a utilização da norma Euclidiana e igualmente efetivo: uma grande redução em uma norma implica em uma grande redução das outras. Se os elementos da diagonal de saída de qualquer linha ou coluna da matriz são todos nulos, então o elemento da diagonal é um autovalor.³⁵

Depois do balanceamento reduz-se a matriz Jacobiana à forma de Hessenberg. Uma matriz de Hessenberg superior tem zeros abaixo da diagonal exceto para a primeira linha sub-

diagonal. Por exemplo, na matriz 6×6 , os elementos diferentes de zero são

$$\begin{pmatrix} X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

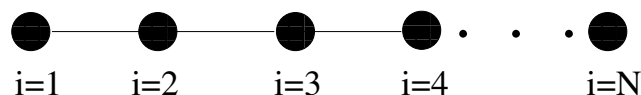
Na redução, é usado um procedimento análogo a eliminação de Gauss com pivotamento. Com a matriz na forma de Hessenberg calcula-se os autovalores por meio de uma transformação $J = QR$, em que Q é uma matriz ortogonal (matriz ortogonal é uma matriz cuja inversa coincide com a transposta) e R é uma matriz triangular superior.

Na sequência considera-se uma rede de mapas acoplados como uma representação matemática para o estudo de elementos que interagem e alguns tipos de acoplamentos.

2.3 Acoplamento lei de potência

Os sistemas acoplados denominados redes de mapas acoplados foram introduzidos por Kaneko,³⁶ Kapral e Kuznetsov³⁷ em 1983-84, como modelos para a análise de sistemas com dinâmica espaço-temporal caótica. Comportamento coletivo em população de neurônios, formação de padrões em sistemas biológicos, espalhamento de doenças infecciosas, turbulência em fluidos e plasmas são alguns dos exemplos de fenômenos que podem ser investigados por meio de redes de mapas acoplados.^{27,36} Uma rede de mapas acoplados pode consistir de N elementos distribuídos espacialmente como uma configuração de pontos interligados entre si. A Figura 2.4 representa um modelo de rede unidimensional com N elementos conectados, cada um com os vizinhos próximos, isto é, com o vizinho da esquerda e com o da direita. Aos elementos das extremidades pode-se ter uma condição de contorno periódica, por exemplo.

Figura 2.4: Rede unidimensional com N elementos acoplados.



FONTE: A autora.

Em sistemas acoplados por dois elementos ou mais, utilizam-se formas de acoplamento em que a interação entre os elementos acontece de modo uniforme segundo uma regra. As

formas de acoplamentos mais utilizadas são o acoplamento entre primeiros vizinhos,³⁸ acoplamento de campo médio,³⁹ acoplamento com conexões aleatórias,⁴⁰ acoplamento do tipo mundo pequeno⁴¹ e acoplamento do tipo sem escala.⁴² De modo geral, o acoplamento entre os elementos pode ser local ou não local. No acoplamento não local, existem conexões entre elementos distantes e, portanto, as conexões são de longo alcance. O caso extremo de acoplamento não local é o acoplamento global onde todos os elementos estão conectados entre si e interagem uns com os outros. No acoplamento local, cada elemento fica conectado com os elementos vizinhos mais próximos $i - 1$ e $i + 1$, e as conexões são de curto alcance conforme a equação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})], \quad (2.14)$$

sendo $i = 1, \dots, N$ um elemento do sistema de N elementos, $x_n^{(i)}$ as variáveis de estado calculadas no tempo discreto n , f um mapa com dinâmica caótica e ε a intensidade do acoplamento do sistema. Adota-se a condição de contorno periódica $x_{N+1} = x_1$, de modo que o último elemento do sistema é considerado vizinho do primeiro, considerando os elementos distribuídos em uma linha reta. As variáveis de estado correspondem as grandezas físicas para a descrição do sistema. A dinâmica de uma rede de mapas acoplados é governada pelo mapa $f(x)$ e pela intensidade de acoplamento ε , isto porque em um mapa caótico os valores das variáveis tendem a divergir e o acoplamento por sua vez tende a aproximar os valores da variáveis por meio da interação entre os elementos da rede.

A dinâmica local de uma rede de mapas acoplados corresponde a evolução individual de cada elemento da rede por um mapeamento, isto é, representa uma transformação de $x \rightarrow f(x)$, sendo $f(x)$ uma lei de evolução discreta ou um mapa e x a variável de estado. Em estudos com redes de mapas acoplados, o mapa logístico é frequentemente utilizado como dinâmica local e para o problema proposto nesta tese, o mapa logístico foi o mapa escolhido. Além do mapa logístico, outros mapas unidimensionais, como o mapa linear por partes ou mapa de Bernoulli $f(x) = 2x \pmod{1}$, o módulo 1 significa que a cada iterada subtrai-se o valor obtido da unidade até que o próximo valor a ser iterado seja menor que 1, e o mapa seno-círculo $f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) \pmod{1}$, podem ser utilizados como dinâmica local.²⁷

Mapas globalmente acoplados possuem acoplamento regular, no qual o estado de cada elemento recebe a influência da média dos estados dos demais, conforme a equação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}). \quad (2.15)$$

Ainda existe o acoplamento que leva em consideração a distância de um elemento a

outro. No acoplamento não local, cada elemento i pode estar acoplado com elementos mais distantes. Em acoplamentos não locais, a interação entre os elementos acoplados depende da distância entre eles e essa intensidade de interação diminui com a distância segundo uma lei de potência. A razão de decaimento na intensidade da interação entre os elementos da rede é controlada por um expoente σ , denominado parâmetro de alcance. As variáveis de estado de uma rede unidimensional de mapas acoplados com acoplamento lei de potência evoluem conforme a equação

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})], \quad (2.16)$$

sendo $\eta(\sigma)$ o fator de normalização dado por $\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left(\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right)$, com $N' = \frac{N-1}{2}$ e N , número ímpar é a quantidade de elementos da rede. Neste acoplamento, as interações entre os elementos dependem dos parâmetros σ sendo ($\sigma > 0$) e ε um número do intervalo $[0, 1]$ que controlam o alcance da interação entre os elementos da rede e a intensidade do acoplamento. A equação (2.16) exhibe dois limites interessantes, cada um caracterizando um tipo especial de interação dentro da rede. O acoplamento tipo lei de potência pode ser considerado como uma forma de interpolação entre os casos limites, que são o global e o local.

Se $\sigma = 0$ então

$$\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left(\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right) = 2N' = 2 \left(\frac{N-1}{2} \right) = N-1, \quad (2.17)$$

a equação (2.16) torna-se:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} = & (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) + \\ & f(x_n^{(i-2)}) + f(x_n^{(i+2)}) + \dots + f(x_n^{(i-N')}) + f(x_n^{(i+N')})]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Considerando que $N' = \frac{N-1}{2}$ e que as condições de contorno são periódicas a soma entre colchetes, representa a soma sobre todos os elementos da rede com exceção do elemento i . Assim, a equação (2.18) pode ser escrita como

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}). \quad (2.19)$$

O resultado (2.19), conhecido como acoplamento do tipo campo médio representa um caso extremo de acoplamento não local pois cada elemento i interage com o valor médio de todos os elementos da rede. A intensidade de acoplamento ε pode assumir um valor no intervalo $[0, 1]$, N é o tamanho da rede e i é a posição de cada elemento na rede, sendo $i = 1, 2, 3, \dots, N$, $x_n^{(i)}$

as variáveis de estado calculadas no tempo discreto e, $f : R \rightarrow R$ é em geral, um mapa com dinâmica caótica.

Se $\sigma \rightarrow \infty$, então

$$\eta(\sigma) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} = 2 \left(\frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \right) = 2, \quad (2.20)$$

e somente o termo $j = 1$ permanece no somatório no termo de acoplamento da equação (2.16). Considerando que $\eta \rightarrow 2$, obtém-se a equação para uma rede de mapas acoplados com interação simétrica

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{1}{1^\sigma} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})] + \right. \\ &\quad \frac{1}{2^\sigma} [f(x_n^{(i-2)}) + f(x_n^{(i+2)})] + \dots + \\ &\quad \left. \frac{1}{N'^\sigma} [f(x_n^{(i-N')}) + f(x_n^{(i+N')})] \right\}, \\ x_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})], \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que somente os primeiros vizinhos $i - 1$ e $i + 1$ contribuem para o termo de acoplamento, isto é, representa o caso de acoplamento local.

O acoplamento lei de potência mencionado é o acoplamento lei de potência usual que se tem conhecimento por meio de trabalhos sobre caos espaço-temporal e transições de fase em sistemas espacialmente estendidos.²⁵ Redes de mapas acopladas com acoplamento lei de potência usual em que cada elemento é regido por um mapa de Bernoulli foi investigada via sincronização.^{11,12} A sincronização em uma rede de mapas acoplados é definida como o processo em que os elementos apresentam o mesmo valor para a variável de estado. A sincronização é um fenômeno de comportamento coletivo e estudos indicam que sistemas acoplados são capazes de exibir diferentes dinâmicas espaço-temporais com a mudança no tamanho do sistema e também na intensidade de acoplamento entre os elementos.²⁵

2.4 Espectro de expoentes de Lyapunov

Redes unidimensionais de mapas acoplados representam uma classe de modelos relativamente simples para a investigação do comportamento espaço-temporal.³⁶ Um dos mais completos indicadores de dinâmica caótica é representado pelo espectro de expoentes de Lyapunov. O espectro de expoentes de Lyapunov para a rede de mapas lineares por partes acoplados e mapas logísticos acoplados foi estudado por Kaneko,⁴³ Isola e colaboradores.⁴⁴ O espectro

de expoentes de Lyapunov para rede de mapas com acoplamento lei de potência foi estudado por Batista e colaboradores.^{25,45} Nesta seção será considerada uma rede de mapas acoplados e o cálculo dos expoentes que constituirão o espectro de expoentes de Lyapunov.

Uma rede de mapas acoplados pode ser escrita na forma $\vec{x}_{n+1} = Cf(\vec{x}_n)$ onde o índice n é a coordenada de tempo, $\vec{x}$ é um vetor N -dimensional, C é a matriz de acoplamento e $f(\vec{x}_n)$ é um mapa. A forma mais simples de acoplamento, o acoplamento local dado por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) \right], \quad (2.22)$$

é simétrico e estabelece ligações somente entre os vizinhos mais próximos. A evolução espaço-temporal da rede dada pela equação (2.22) é dirigida por dois mecanismos, a dinâmica não linear do mapa e a difusão devido ao acoplamento entre os mapas. A dinâmica local tende a separar as trajetórias enquanto que o acoplamento tende a aproximar as trajetórias. O acoplamento local, equação (2.22) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & (1 - \varepsilon) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \cdots & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & (1 - \varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_n^{(1)}) \\ f(x_n^{(2)}) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n^{(N)}) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

A sincronização na rede de mapas acoplados corresponde ao processo no qual as variáveis de estado dos mapas tornam-se iguais, então para a rede de N mapas, a sincronização implica $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)} = s_n$. Quando os mapas são caóticos, s_n evolui para a sincronização de caos. A evolução temporal da rede (2.22) acontece como resultado da dinâmica não linear do mapa e do acoplamento entre os mapas. Como a sincronização está relacionada a caoticidade do mapa e ao parâmetro de acoplamento, utiliza-se um diagnóstico e, neste caso, os expoentes de Lyapunov constituem indicadores da estabilidade no espaço de sincronização. Os expoentes de Lyapunov da rede unidimensional composta por N elementos são dados por

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |DF^n \cdot v_k|, \quad (2.24)$$

onde DF^n é a matriz Jacobiana da rede no n -ésimo instante de tempo e v_k , $k = 1, 2, \dots, N$, é um vetor unitário que corresponde a k -ésima autodireção tangente à trajetória. O conjunto ordenado $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$, formado pelos N expoentes constitui o espectro de expoentes de Lyapunov. De acordo com a equação (2.24), os expoentes de Lyapunov medem a taxa média com que as trajetórias se aproximam ou se afastam em cada autodireção independente v_k no

espaço tangente. No espaço de sincronização todos os elementos da rede apresentam o mesmo valor para as variáveis de estado, então a Jacobiana para as trajetórias será dada por

$$\begin{aligned} DF^n &= \prod_{t=0}^{n-1} CI f'(s_t), \\ DF^n &= \left(\prod_{t=0}^{n-1} C \right) \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) I \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde C a matriz de acoplamento, $f'(s_t)$ a derivada do mapa em relação a s_t e I a matriz identidade. Usando a expressão (2.25) em (2.24),

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) I \right) \left(\prod_{t=0}^{n-1} C \right) \right|, \\ \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) \right) \cdot C \cdot C \dots C v_k \right|, \\ \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) \right) \Gamma_k^n v_k \right|, \\ \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{t=0}^{n-1} |f'(s_t)| \left| \Gamma_k^n \right| \right), \\ \lambda_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |f'(s_t)| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Gamma_k^n|, \\ \lambda_k &= \lambda_u + \ln |\Gamma_k|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |f'(s_t)| = \lambda_u$ é o expoente de Lyapunov do mapa isolado, Γ_k o k -ésimo autovalor da matriz produto de n matrizes Jacobianas. A equação $\lambda_k = \lambda_u + \ln |\Gamma_k|$ fornece o espectro de expoentes de Lyapunov para a rede unidimensional de mapas acoplados. As matrizes de acoplamento pertencem à classe de matrizes circulantes.^{46,47} Uma matriz é circulante se em cada linha sucessiva os elementos se movem uma posição para a direita e, isto pode ser visto na matriz C_{circ} como

$$C_{circ} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & \ddots & \ddots & \ddots & c_{N-2} \\ c_{N-2} & \ddots & \ddots & \ddots & c_{N-3} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

A matriz de acoplamento C_{local}

$$C_{local} = \begin{pmatrix} (1-\varepsilon) & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & (1-\varepsilon) & \frac{\varepsilon}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & (1-\varepsilon) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \cdots & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & (1-\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

é circulante e fica definida pela primeira linha. As matrizes de acoplamento além de serem circulantes são também simétricas. Os autovalores de matrizes circulantes são calculados por meio da equação,⁴⁶

$$\Gamma_k = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right), \quad (2.29)$$

sendo c_m o m -ésimo elemento da primeira linha da matriz, i um número complexo e $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ o índice do autovalor correspondente. Então de acordo com a equação (2.29) os autovalores da rede com acoplamento local são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{-2\pi i k}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{-2\pi i (N-1)k}{N}\right), \\ \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{-2\pi i k}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \left(\exp\left(-2\pi i k\right) \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

considerando a relação de Euler $\exp(-i\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{-2\pi i k}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \left(\cos(2\pi k) - i \sin(2\pi k) \right), \\ \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\exp\left(\frac{-2\pi i k}{N}\right) + \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \right], \\ \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right], \\ \Gamma_k &= (1-\varepsilon) + \varepsilon \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Consequentemente os expoentes de Lyapunov da rede com acoplamento local são dados por

$$\lambda_k = \lambda_u + \ln \left| (1-\varepsilon) + \varepsilon \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \right|. \quad (2.32)$$

Para o mapa logístico com parâmetro de controle $r = 4$, como mapa local para o acoplamento (2.22), o espectro de Lyapunov é dado por

$$\lambda_k = \ln 2 + \ln \left| (1-\varepsilon) + \varepsilon \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \right|. \quad (2.33)$$

Da mesma forma, para o acoplamento global ou acoplamento do tipo campo médio para uma rede de mapas

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.34)$$

a matriz de acoplamento C_{global} é

$$C_{global} = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{N-1} & \cdots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & (1 - \varepsilon) & \cdots & \frac{\varepsilon}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{N-1} & \frac{\varepsilon}{N-1} & \cdots & (1 - \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

A matriz de acoplamento C_{global} é circulante e fica definida pela primeira linha. Os autovalores de matrizes circulantes são calculados por meio da equação (2.29),

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right), \\ \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right) - \frac{\varepsilon}{N-1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Usando a ortogonalidade das exponenciais complexas,⁴⁶

$$\sum_{m=0}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right) = N \delta_{k \bmod N} = \begin{cases} N, & k \bmod N = 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.37)$$

onde δ é o delta de Kronecker

$$\delta = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.38)$$

Portanto, o autovalor para $k = 0$ é

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{N-1} N - \frac{\varepsilon}{N-1}, \\ \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \varepsilon, \\ \Gamma_k &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para $k > 0$

$$\Gamma_k = (1 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{N-1}. \quad (2.40)$$

Os expoentes de Lyapunov da rede com acoplamento global são dados por

$$\lambda_k = \lambda_u + \ln \left| (1 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{N-1} \right|. \quad (2.41)$$

Considerando uma rede de mapas com acoplamento lei de potência com interações que dependem da distância como em (2.16)

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)})]. \quad (2.42)$$

A matriz de acoplamento deste tipo de rede é constante e seus elementos podem ser expressos como

$$[C_{potencia}]_{ij} = \left[(1 - \varepsilon)\delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \frac{1}{j^\sigma} (1 - \delta_{ij}) \right], \quad (2.43)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e $\delta_{ij}=0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. A matriz que representa o acoplamento lei de potência descrito pela equação (2.16) é dada por

$$C_{potencia} = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} & \cdots & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} & (1 - \varepsilon) & \cdots & \cdots & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} & \cdots & (1 - \varepsilon) & \cdots & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)3^\sigma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} & \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} & \cdots & \cdots & (1 - \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Como a matriz de acoplamento é uma matriz circulante, os autovalores são calculados por meio da equação (2.29),

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{-2\pi ik}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{-4\pi ik}{N}\right) + \dots \\ &+ \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{-2\pi ik(N-2)}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{-2\pi ik(N-1)}{N}\right), \\ \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{-2\pi ik}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{-4\pi ik}{N}\right) + \dots \\ &+ \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{4\pi ik}{N}\right) \exp(-2\pi ik) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\right) \exp(-2\pi ik), \end{aligned} \quad (2.45)$$

utilizando a relação de Euler $\exp(-i\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$,

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{-2\pi ik}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{-4\pi ik}{N}\right) + \dots \\ &+ [\cos(2\pi k) - i\sin(2\pi k)] \times \left[\frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)2^\sigma} \exp\left(\frac{4\pi ik}{N}\right) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)1^\sigma} \exp\left(\frac{2\pi ik}{N}\right) \right], \\ \Gamma_k &= (1 - \varepsilon) + 2\frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \left[\frac{1}{1^\sigma} \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \frac{1}{2^\sigma} \cos\left(\frac{4\pi k}{N}\right) + \dots + \frac{1}{N'^\sigma} \cos\left(\frac{2\pi N'}{N}\right) \right] \quad (2.46)\end{aligned}$$

sendo $N' = \frac{N-1}{2}$. Os autovalores referentes a matriz serão

$$\Gamma_k = \left[(1 - \varepsilon) + 2\frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \right]. \quad (2.47)$$

O espectro de Lyapunov da rede (2.16) é

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \lambda_u + \ln |\Gamma_k|, \\ \lambda_k &= \lambda_u + \ln \left| (1 - \varepsilon) + 2\frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\sigma} \cos\left(\frac{2\pi jk}{N}\right) \right|, \quad (2.48)\end{aligned}$$

onde λ_u é o expoente de Lyapunov do mapa individual. Em relação ao estudo do espectro de expoentes de Lyapunov, verifica-se que independente do acoplamento utilizado, pode-se obter expressões analíticas para o espectro de expoentes de Lyapunov quando os coeficientes da matriz jacobiana formarem um espectro de autovalores bem definido.⁴⁶

A expressão analítica do espectro de expoentes de Lyapunov para redes de mapas com acoplamento lei de potência usual foi determinado por Anteneodo e colaboradores^{11,48} para analisar o efeito da intensidade de acoplamento no sistema dinâmico. As redes de mapas acoplados podem exibir o fenômeno da sincronização, em particular, a sincronização completa,⁶ que ocorre quando as variáveis dinâmicas que definem o estado de cada mapa assumem o mesmo valor para todos os mapas acoplados a cada passo de tempo. Geometricamente, esta condição define um subespaço de sincronização incorporado no espaço de fase N-dimensional do sistema. A instabilidade com respeito a perturbações infinitesimais em direções transversais ao subespaço de sincronização pode ser determinada a partir da análise do espectro de expoentes de Lyapunov calculados no estado sincronizado. No que diz respeito ao estado completamente sincronizado, a instabilidade permanece na direção associada ao do maior expoente e será transversalmente estável se o segundo maior expoente de Lyapunov e todos os demais forem negativos. Para uma ampla classe de mapas caóticos, incluindo o mapa logístico,⁴⁹ o critério de negatividade do segundo maior expoente de Lyapunov calculado no estado sincronizado é adequado e permite que seja determinado o domínio de sincronização no espaço de parâmetros, para o qual o estado completamente sincronizado é atingido.⁵⁰

Para estudar a sincronização na rede com acoplamento lei de potência modificado será utilizado o procedimento adotado para caracterização da sincronização na rede com acoplamento lei de potência usual como em trabalhos de Anteneodo e colaboradores^{11, 12} e de Batista e colaboradores.^{25, 26}

3 Acoplamento não local

Neste capítulo será estudado o processo de sincronização em redes de mapas com acoplamento lei de potência modificado. Alguns diagnósticos para identificar a sincronização na rede serão utilizados e a expressão analítica para o espectro de expoentes de Lyapunov obtida a partir do acoplamento lei de potência usual. A contribuição deste trabalho consiste em verificar se o acoplamento lei de potência modificado em redes de mapas exibe as mesmas propriedades dinâmicas de sincronização do acoplamento lei de potência usual.

3.1 Rede de mapas acoplados com acoplamento lei de potência modificado

Uma modificação no acoplamento lei de potência usual foi proposta por Tessone e colaboradores²⁷ e aplicada ao estudo da sincronização em duas réplicas de redes de mapas acoplados. O acoplamento lei de potência modificado, assim denominado neste trabalho é devido a forma como as conexões são estabelecidas. Tanto a intensidade quanto a distribuição das conexões entre os elementos segue uma lei de potência. Para se ter o acoplamento lei de potência modificado foi feita uma substituição de j por $q^m - 1$ na equação (2.16) e o modelo lei de potência modificado⁵¹ adquire a forma

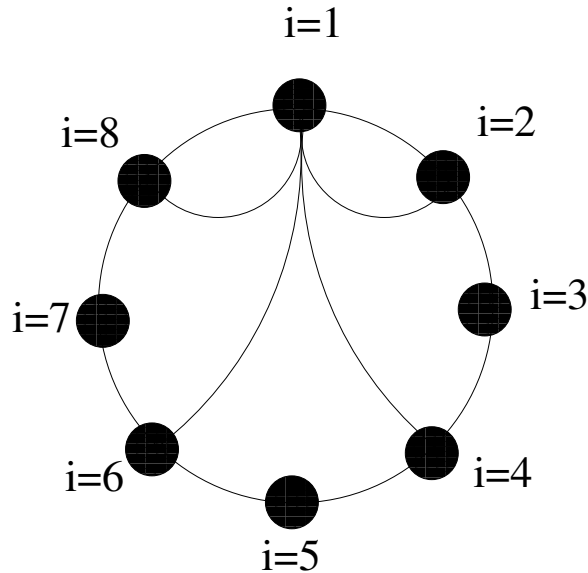
$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} [f(x_n^{(i-q^m+1)}) + f(x_n^{(i+q^m-1)})]. \quad (3.1)$$

A soma na equação (3.1) estende-se para $M = \log_q(\frac{N}{2})$ e $\eta(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma}$ é o fator de normalização. Os parâmetros σ sendo ($\sigma > 0$) e ε um número do intervalo $[0, 1]$ controlam o alcance da interação entre os elementos da rede e a intensidade do acoplamento, n e i são índices de tempo e espaço discretos e adota-se a condição de contorno periódica $x^{(i)} = x^{(N+i)}$, de modo que o último elemento da rede é considerado vizinho do primeiro. A variável de estado dinâmico $x_n^{(i)}$ relaciona o i -ésimo elemento, sendo $i = 1, 2, \dots, N$ no tempo $n = 1, 2, \dots$ e $x_n^{(i)} \in [0, 1]$. Cada elemento tem uma evolução descrita por um mapa $x \mapsto f(x)$. Utilizou-se uma rede

unidimensional de N mapas logísticos acoplados da forma $x \mapsto rx(1-x)$. O valor utilizado para o parâmetro de controle r foi 3,69, valor este definido porque encontra-se no intervalo $[3,6, 4,0]$, onde o mapa logístico apresenta um comportamento que varia entre caótico e janelas periódicas. O parâmetro $r = 3,69$ encontra-se na vizinhança de uma janela periódica e facilita a transição para a sincronização.

A razão para a escolha de $j = q^m - 1$ tem a vantagem de ser conveniente do ponto de vista computacional, pelo fato de um elemento ficar conectado com alguns elementos da rede. Este acoplamento também se reduz ao caso local se $\sigma \rightarrow \infty$, porém, o caso global não é recuperado quando $\sigma = 0$ porque para $q > 1$, não existem conexões de todos os elementos com todos os outros. No acoplamento lei de potência modificado o tamanho da rede depende da escolha de valores para q e M dado por $N = 2q^M$, razão de N ser um número par de elementos enquanto que a rede com acoplamento lei de potência usual, possui um número ímpar de elementos. O parâmetro q representa a base de potência em que as conexões são feitas e M , o número de conexões à direita e à esquerda de cada elemento na rede. A Figura 3.1 exibe uma representação das conexões do elemento $i = 1$ para o caso em que $q = 2$, $M = 2$ e $N = 8$ elementos.

Figura 3.1: Conexões do elemento de posição 1 para a rede de equação (3.1), $q = 2$, $M = 2$ e $N = 8$ elementos.



FONTE: A autora.

A etapa seguinte consistiu em fixar o valor de q e mudar o valor de M para obter tamanhos de rede adequados para a análise. Utilizou-se somente o valor 2 para q . Com o tamanho da rede definido passou-se a estudar a dinâmica da rede de mapas com acoplamento lei de potência modificado para diagnosticar a sincronização. A sincronização foi verificada por meio de diagnósticos os quais serão tratados na sequência.

3.2 Sincronização e supressão de caos

Acoplamentos não locais em sistemas espacialmente estendidos permitem que a interação se estenda a vários elementos, favorecendo a ocorrência da sincronização. A sincronização de caos se refere a processos de ajuste entre dois ou mais sistemas caóticos para um comportamento comum devido ao acoplamento entre eles. Em redes de mapas acoplados, a sincronização ocorre quando as variáveis de estado apresentam o mesmo valor no mesmo instante de tempo. No entanto, pode-se considerar uma margem de tolerância depois de um tempo transiente na caracterização do estado sincronizado. Um comportamento que pode ocorrer na transição para a sincronização é o comportamento intermitente entre o estado sincronizado e o estado não sincronizado. De acordo com Viana e colaboradores, a transição de alguns sistemas caóticos para o estado sincronizado ocorre via intermitência.³²

Uma rede unidimensional com N elementos acoplados está completamente sincronizada se o valor da variável de estado é comum, ou seja,

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(3)} = \dots = x_n^{(N)} = s_n, \quad (3.2)$$

em que x é a variável de estado e n é o índice de tempo. E como este estado é uma possível solução para uma rede com acoplamento de longo alcance, pode-se substituir na equação (3.1), o que resulta em

$$s_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(s_n) + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{j^\sigma} [2f(s_n)] = f(s_n), \quad (3.3)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. A sincronização dos elementos de uma rede depende da estabilidade do subespaço de sincronização. Se o subespaço for estável, as trajetórias tendem a se aproximar e, se for instável, as trajetórias tendem a se afastar em sua vizinhança. .

Um diagnóstico numérico para a sincronização é proporcionado pelo parâmetro de ordem e adaptado para rede de mapas acoplados,³³

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \phi_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (3.4)$$

em que as quantidades R_n e ϕ representam, respectivamente, a amplitude e o ângulo de um vetor de fase em um instante de tempo n de uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, i é a unidade imaginária e $x_n^{(j)}$ a variável de estado do j -ésimo elemento da rede. As N variáveis de estado da rede ficam distribuídas sobre um círculo unitário no plano complexo e associa-se a cada uma delas, um vetor $z_n^{(i)}$ de comprimento unitário. Assim, somando os N

vetores e dividindo o vetor resultante pelo número de variáveis, obtém-se um vetor z_n de módulo correspondente ao estado da rede naquele instante de tempo.³³

A equação (3.4) composta pelo termo $\exp(2\pi i x_n^{(j)})$ que fica expresso pela relação de Euler, $\exp(2\pi i x_n^{(j)}) = \cos(2\pi x_n^{(j)}) + i \sin(2\pi x_n^{(j)})$, que substituindo em (3.4) resulta em

$$R_n = \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{j=1}^N \cos(2\pi x_n^{(j)}) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sin(2\pi x_n^{(j)}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

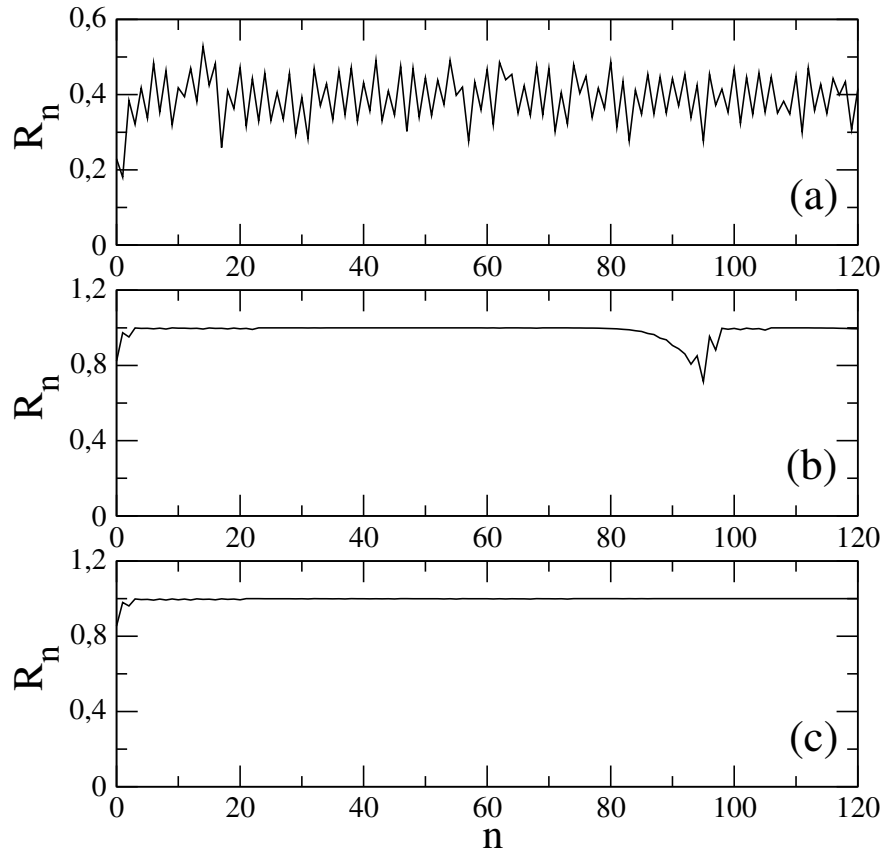
onde $R_n \in [0, 1]$. Quando todas as variáveis de estado apresentam o mesmo valor, o parâmetro de ordem é igual a um, $R_n = 1$. Na transição para a sincronização, as variáveis de estado podem assumir valores muito próximos em determinado intervalo de tempo e valores não tão próximos em instantes posteriores. O parâmetro de ordem R_n será aproximadamente igual a 1 no primeiro caso e menor que 1 no segundo caso. Sendo assim, foi considerada a média do parâmetro de ordem calculado ao longo de um intervalo com comprimento suficiente para garantir o estado assintótico conseguido pela rede. O parâmetro de ordem médio é expresso por

$$\bar{R} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T R_n. \quad (3.6)$$

Um estado de sincronização implica $\bar{R} = 1$. Considerando-se a rede com $q = 2$, $M = 7$ e $N = 256$ mapas, a partir da Figura 3.2 é possível observar o estado não sincronizado, o intermitente e o estado sincronizado para o parâmetro ε assumindo três diferentes valores. Na Figura 3.2 (a) não ocorre sincronização de caos pois R_n é menor que 1 para todo o tempo n . Quando os elementos oscilam de modo irregular, estando em alguns instantes de tempo não sincronizados e em outros instantes sincronizados, o parâmetro R_n oscila exibindo comportamento intermitente, Figura 3.2 (b). Quando todos os elementos da rede estão sincronizados em todo instante de tempo, R_n não oscila com o decorrer das iterações e é igual a 1, Figura 3.2 (c).

Dependendo dos parâmetros utilizados, a rede pode apresentar um comportamento intermitente entre um estado sincronizado e outro não sincronizado. Este tipo de comportamento pode ser observado quando os parâmetros da rede estiverem próximos de um valor crítico, ou seja, um valor a partir do qual acontece a transição para a sincronização. Utilizando o parâmetro de ordem médio e variando os parâmetros, intensidade de acoplamento e o alcance das interações da rede foi possível determinar os valores críticos destes parâmetros a partir dos quais a rede sincroniza. O valor crítico encontrado para a rede com $q = 2$, $M = 7$, $N = 256$ elementos, $\sigma = 0,0$ e $r = 3,69$ foi $\varepsilon = 0,669$. O valor crítico é aquele que separa a região onde a rede não sincroniza da região onde a rede apresenta sincronização completa após um certo transiente. A Figura 3.3 mostra a dependência dos parâmetros, intensidade de acoplamento e alcance das in-

Figura 3.2: Tempo versus parâmetro de ordem para a rede de mapas (3.1), com $q = 2$, $M = 7$, $N = 256$ elementos, $r = 3,69$ o parâmetro de controle, (a) $\sigma = 0,0$ e $\varepsilon = 0,01$ caracterizando o estado não sincronizado; (b) $\sigma = 0,0$ e $\varepsilon = 0,7$ caracterizando o estado intermitente; (c) $\sigma = 0,0$ e $\varepsilon = 0,75$ caracterizando o estado sincronizado.

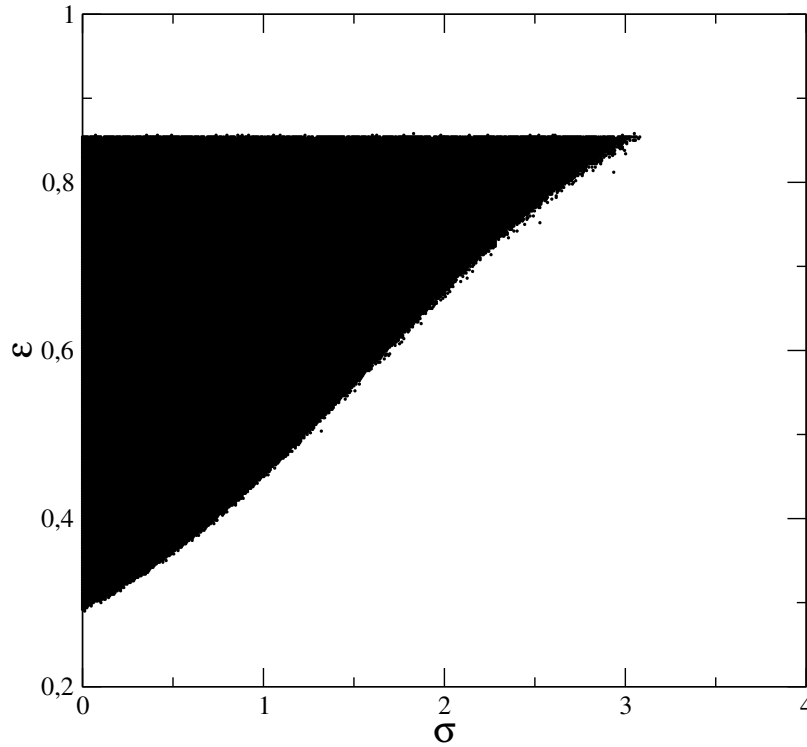


FONTE: A autora.

terações para a rede $N = 8$ elementos, onde foi registrado o ponto em que o parâmetro de ordem médio atingiu o valor próximo de 1 ($\bar{R} = 0,999999$). Como os parâmetros de sincronização dependem do tamanho da rede, observam-se uma região de sincronização (região em preto), onde concentram-se as trajetórias sincronizadas e outra região de não sincronização (região em branco), de trajetórias não sincronizadas. Acima da região em preto, em que $\varepsilon > 0,85$ está região em que ocorre a supressão de caos.

Foi possível observar que a região de sincronização depende do tamanho da rede. A região de sincronização tende a diminuir a medida que se aumenta o tamanho da rede. A Figura 3.4 mostra o comprimento horizontal da região de sincronização σ_{max} com $\varepsilon = 0,85$ e tamanhos de rede utilizados sendo $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$. Pode-se observar um

Figura 3.3: Região de sincronização (região em preto) e abaixo, região de não sincronização (região em branco) no espaço de parâmetros $\varepsilon \times \sigma$, com $r = 3,69$ para a rede $N = 8$. Acima da região em preto para $\varepsilon > 0,85$ está a região de supressão de caos.

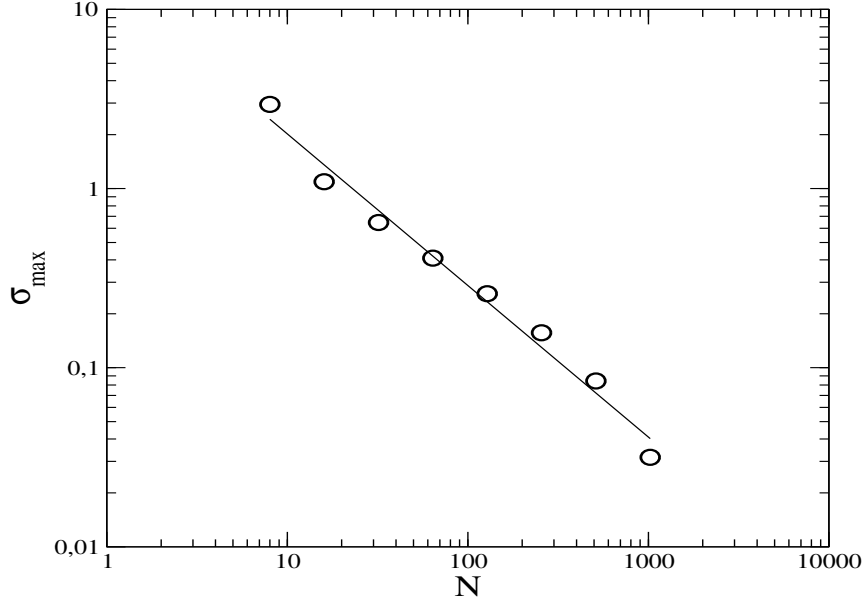


FONTE: A autora.

valor de alcance de interação máximo para a região de sincronização em relação a cada tamanho de rede. Observa-se que σ_{max} obedece a uma lei de potência com o tamanho da rede de mapas acoplados. O ajuste dado pela equação $\sigma_{max} = \alpha N^\beta$, fornece $\alpha = 14,595$ e $\beta = -0,85108$, sendo -0,9944121 o coeficiente de correlação dos dados observados.

A sincronização na rede está relacionada ao mapa caótico utilizado como dinâmica local e aos parâmetros de acoplamento. Para obter o conjunto de parâmetros que possibilitem a sincronização pode-se verificar as condições para as quais as trajetórias tendem a se aproximar ou a se afastar do subespaço de sincronização. Os expoentes de Lyapunov são indicadores da estabilidade do subespaço de sincronização. Determinando os expoentes de Lyapunov pode-se obter um conjunto de parâmetros para a ocorrência da sincronização.

Figura 3.4: Comprimento horizontal da região de sincronização σ_{max} para os tamanhos de rede $N = 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ com $\sigma_{max} = \sigma N^\beta$, onde $\sigma = 14,595$ e $\beta = -0,851$.



FONTE: A autora.

3.3 Espectro de Lyapunov para o acoplamento lei de potência modificado

Os expoentes de Lyapunov expressam a taxa com que as trajetórias se aproximam ou se afastam do subespaço de sincronização. O fato é que pode-se relacionar estes expoentes com a dinâmica local e os parâmetros de acoplamento. Para calcular o espectro de expoentes de Lyapunov da rede de mapas com acoplamento lei de potência modificado (3.1), foi considerado o mesmo procedimento visto no Capítulo 2 para o acoplamento lei de potência usual. Como no subespaço de sincronização, as variáveis de estado apresentam o mesmo valor, a Jacobiana para as trajetórias será

$$DF^n = \left(\prod_{t=0}^{n-1} C \right) \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) I \right), \quad (3.7)$$

sendo C a matriz de acoplamento, $f'(s_t)$ a derivada do mapa e I a matriz identidade. A matriz de acoplamento para a rede com acoplamento lei de potência modificado C_{potmod} é constante e seus elementos podem ser expressos como,

$$[C_{potmod}]_{ij} = \left[(1 - \varepsilon) \delta_{ij} + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} (1 - \delta_{ij}) \right], \quad (3.8)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Como a matriz de acoplamento é uma matriz circulante, os autovalores são calculados por meio da equação (2.29). Os autovalores para o acoplamento lei de potência modificado com $N = 2q^M$ e $j = q^m - 1$ são da mesma forma do acoplamento lei de potência usual (2.47), então

$$\Gamma_k = \left[(1 - \varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right]. \quad (3.9)$$

O espectro de expoentes de Lyapunov da rede (3.1) com N elementos e parâmetros q e M é dado por dois termos, o primeiro relacionado a dinâmica do mapa e o segundo ao acoplamento por meio da expressão ,

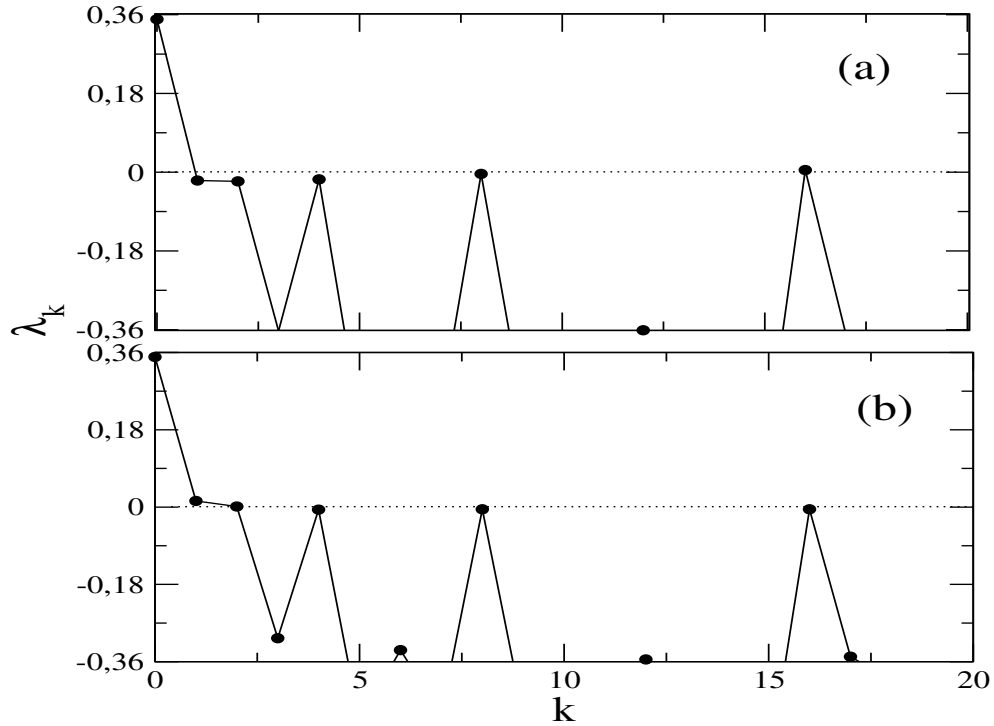
$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_u + \ln |\Gamma_k|, \\ \lambda_k &= \lambda_u + \ln \left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right|, \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo λ_u o expoente de Lyapunov do mapa individual e $k=1,2,\dots,N$, o índice de ordenamento do expoente no espectro. O maior expoente de Lyapunov é λ_u , para $k = 0$, tanto para o acoplamento lei de potência usual como para o acoplamento lei de potência modificado.

O espectro de expoentes de Lyapunov pode assumir características qualitativamente diferentes de acordo com os valores de parâmetros, como a intensidade de acoplamento e o alcance das interações, que pode ser observado na Figura 3.5 para alguns expoentes. O segundo maior expoente de Lyapunov pode depender do parâmetro σ para um valor de ε fixo. Observa-se que na Figura 3.5 (a), o segundo maior expoente de Lyapunov ocorre para $k = 16$ e $\sigma = 0,03$ e na Figura 3.5 (b), o segundo maior expoente de Lyapunov ocorre para $k = 1$ e $\sigma = 0,07$, utilizando a expressão analítica. Verificou-se que o segundo maior expoente de Lyapunov para o acoplamento lei de potência modificado depende do valor de σ , enquanto que o segundo maior expoente de Lyapunov fica definido para $k = 1$ em se tratando do acoplamento lei de potência usual.

Os expoentes de Lyapunov são importantes para a análise da sincronização de uma rede de mapas acoplados e também permitem determinar a dimensão de Lyapunov. Portanto, para uma rede composta por N mapas, o espectro de expoentes de Lyapunov é constituído de N expoentes correspondendo as taxas de expansão ou de contração de trajetórias próximas no espaço tangente. O espectro de expoentes de Lyapunov é definido como o conjunto de N expoentes dispostos em ordem decrescente. O espectro de expoentes de Lyapunov é bastante útil na caracterização de um atrator caótico e fornece uma estimativa da dimensão deste por meio da dimensão de Lyapunov. Para uma rede de mapas acoplados com expoentes de Lyapunov

Figura 3.5: Espectro de expoentes de Lyapunov analítico para a rede $q = 2$, $M = 7$, $N = 256$ com $r = 3,69$ e $\varepsilon = 0,68$, (a) $k = 16$, $\sigma = 0,03$ e (b) $k = 1$, $\sigma = 0,07$.



FONTE: A autora.

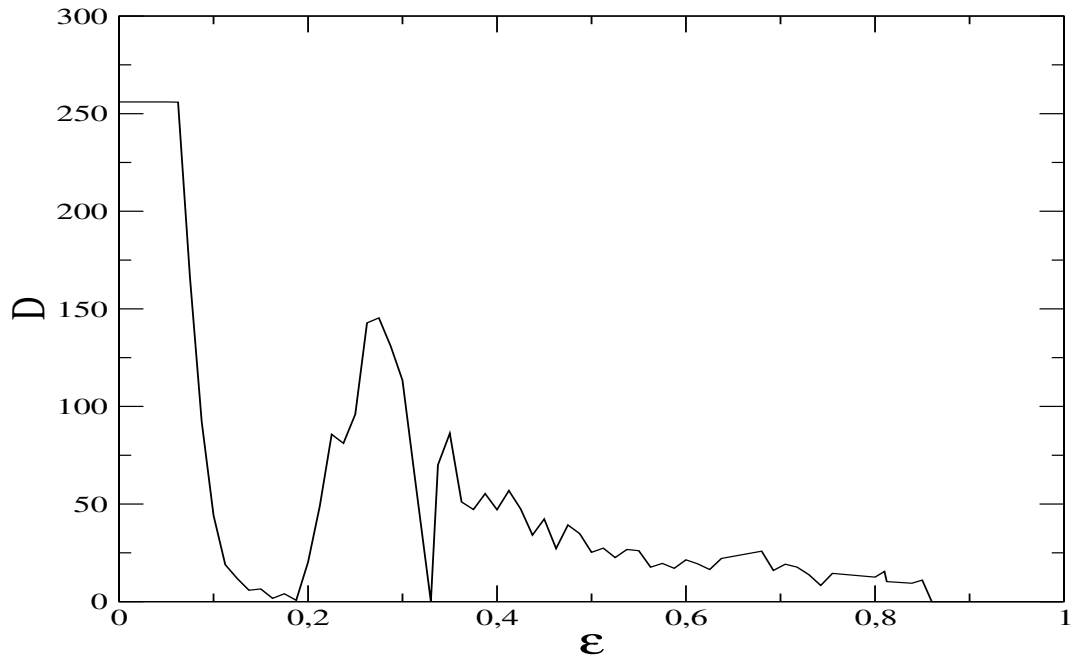
$\lambda_1 > \dots > \lambda_N$ e p como o maior inteiro tal qual $\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq 0$, a dimensão de Lyapunov D da trajetória é definida como

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se nenhum } p \text{ existe} \\ p + \frac{1}{\lceil \lambda_{p+1} \rceil} \sum_{i=1}^p \lambda_i & \text{se } p < N \\ N & \text{se } p = N \end{cases}, \quad (3.11)$$

indicando que a dimensão de Lyapunov é zero quando todos os expoentes são negativos ou é igual ao valor do tamanho da rede quando todos os expoentes de Lyapunov são positivos, e por fim valores intermediários na situação em que o maior inteiro para o somatório positivo seja menor que o tamanho da rede.²⁸ Quando os mapas não estão acoplados ou fracamente acoplados o valor máximo da dimensão de Lyapunov é $D = N$. Se o sistema apresenta supressão de sincronização, o valor da dimensão de Lyapunov é $D = 0$. A Figura 3.6, dimensão pela intensidade de acoplamento para a rede com $N = 256$ mapas acoplados, exhibe a sincronização e a supressão de sincronização relacionadas ao parâmetro de acoplamento. Para determinados valores do parâmetro de acoplamento, como $\varepsilon = 0,16$, $\varepsilon = 0,33$ e $\varepsilon > 0,85$ foi identificada a supressão de sincronização. O intervalo $[0,70, 0,85]$ caracteriza sincronização das trajetórias. Para valores maiores de ε , os mapas tendem a ficar mais acoplados e a dimensão de Lyapunov

diminui o seu valor.

Figura 3.6: Dimensão de Lyapunov pela intensidade de acoplamento para uma rede $N = 256$ mapas acoplados, com $r = 3,69$ e $\sigma = 0,0$.



FONTE: A autora.

Para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização deve-se calcular o espectro de expoentes de Lyapunov. De acordo com o sinal dos expoentes, pode-se saber se as trajetórias convergem ou não para o estado sincronizado à medida que o sistema evolui. Para analisar se a rede de mapas acoplados tende para a sincronização será considerado o maior expoente de Lyapunov transversal ($\lambda^\perp$). O expoente transversal máximo considera o tempo de evolução de um deslocamento infinitesimal ao longo da direção transversal do subespaço de sincronização. Se $\lambda_2 < 0$, então todos os demais expoentes serão negativos e, portanto, haverá aproximação de trajetórias em todas as direções transversais ao subespaço de sincronização. A negatividade do expoente de Lyapunov transversal é uma condição necessária e suficiente para ocorrer a sincronização. Com a variação dos parâmetros ϵ e σ , com a análise do expoente transversal é possível determinar um conjunto de parâmetros para a sincronização. Desta forma, pode-se definir os limites da região de parâmetros ou os parâmetros críticos. Supondo que o expoente de Lyapunov transversal seja o k -ésimo expoente para o acoplamento lei de potência

modificado e impondo $\lambda_k = 0$,

$$\begin{aligned} \ln \left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right| &= -\lambda_u, \\ e^{-\lambda_u} &= \left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A condição de que o expoente transversal seja negativo,

$$\left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right| < e^{-\lambda_u}. \quad (3.13)$$

Utilizando a propriedade de módulo, o domínio de sincronização é limitado para $k = 1$ e $k = N$.^{11, 12, 52}

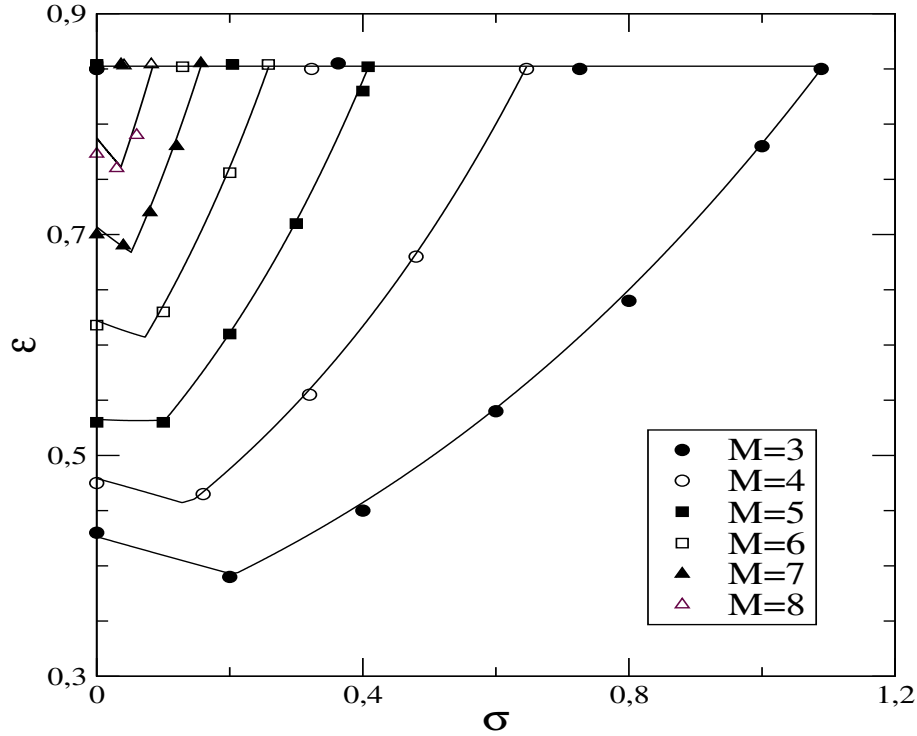
A condição $\lambda^\perp < 0$ leva a $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon'_c$ onde as expressões para a curva crítica resultam em

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= (1 - e^{-\lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right]^{-1}, \\ \varepsilon'_c &= (1 + e^{-\lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Os termos ε_c e ε'_c são os valores mínimo e máximo da intensidade de acoplamento ε da região de sincronização no espaço de parâmetros (σ, ε) . A sincronização na rede ocorrerá sempre que $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon'_c$. A Figura 3.7 mostra as curvas críticas no espaço de parâmetros (σ, ε) obtidas para diferentes valores de M por meio das equações (3.14). Os símbolos correspondem aos resultados numéricos obtidos por meio do parâmetro de ordem médio, ou seja, da condição $\bar{R} = 1$ com uma tolerância de 10^{-6} . No espaço de parâmetros, ocorreu uma diminuição da região de sincronização, a medida que o tamanho da rede foi sendo aumentado. A forma dessas regiões é delimitada por linhas críticas que variam de acordo com o tamanho da rede segundo os resultados analíticos e que por sua vez concordam com os resultados numéricos.

Outra medida útil que pode ser derivada do espectro de expoentes de Lyapunov é a entropia de Kolmogorov-Sinai (KS). Em uma rede de mapas acoplados, podem existir muitos expoentes de Lyapunov positivos e a média da soma de todos os expoentes de Lyapunov posi-

Figura 3.7: Diagrama de sincronização no espaço de parâmetros (σ, ε) , para diferentes valores de M . As linhas correspondem aos resultados analíticos por meio das equações (3.14) e os símbolos são resultantes de simulações numéricas obtidos por meio do parâmetro de ordem médio.



FONTE: A autora.

tivos constitui a densidade de entropia de Kolmogorov-Sinai.^{53,54}

$$h_{KS} = \langle \lambda_k \rangle_{k, \lambda_k > 0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\lambda_k > 0} \lambda_k. \quad (3.15)$$

A entropia h_{KS} de Kolmogorov-Sinai de uma trajetória pode ser vista como a taxa em que a informação se perde sobre as condições iniciais. A entropia é positiva para sistemas caóticos e igual a zero para sistemas não caóticos.²⁹ Neste trabalho, para conseguir uma expressão analítica aproximada para a entropia foi feita a substituição do espectro de expoentes de Lyapunov na fórmula (3.15) da entropia que fornece a entropia de Kolmogorov-Sinai em termos de uma soma. Valores aproximados podem ser obtidos por suposição de que a rede é tão compacta que a distância entre os elementos k é pequena o suficiente que pode ser considerada como um valor contínuo e, a soma é substituída pela integral,

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{N} \int_{\lambda > 0} \lambda_k dk. \quad (3.16)$$

É possível obter um valor aproximado para a integral para o caso de um acoplamento pequeno bem como o espectro de Lyapunov com todos os expoentes positivos. Substituindo λ_k em

(3.16),

$$\lambda_k = \lambda_u + \ln \left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right|, \quad (3.17)$$

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{N} \int \left[\lambda_u + \ln \left| (1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right| \right] dk. \quad (3.18)$$

Definindo $y = -\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \cos \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right)$, isto permite a expansão do integrando em potências de y ($-1 < y < 1$) de modo que $\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \dots$. Considerando o termo de primeira ordem,

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{N} \left\| \left[\lambda_u - \varepsilon k + \frac{2\varepsilon}{\eta(\sigma)} \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} \frac{q^M}{\pi k (q^m - 1)} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k (q^m - 1)}{q^M} \right) \right] \right\|_1^N, \quad (3.19)$$

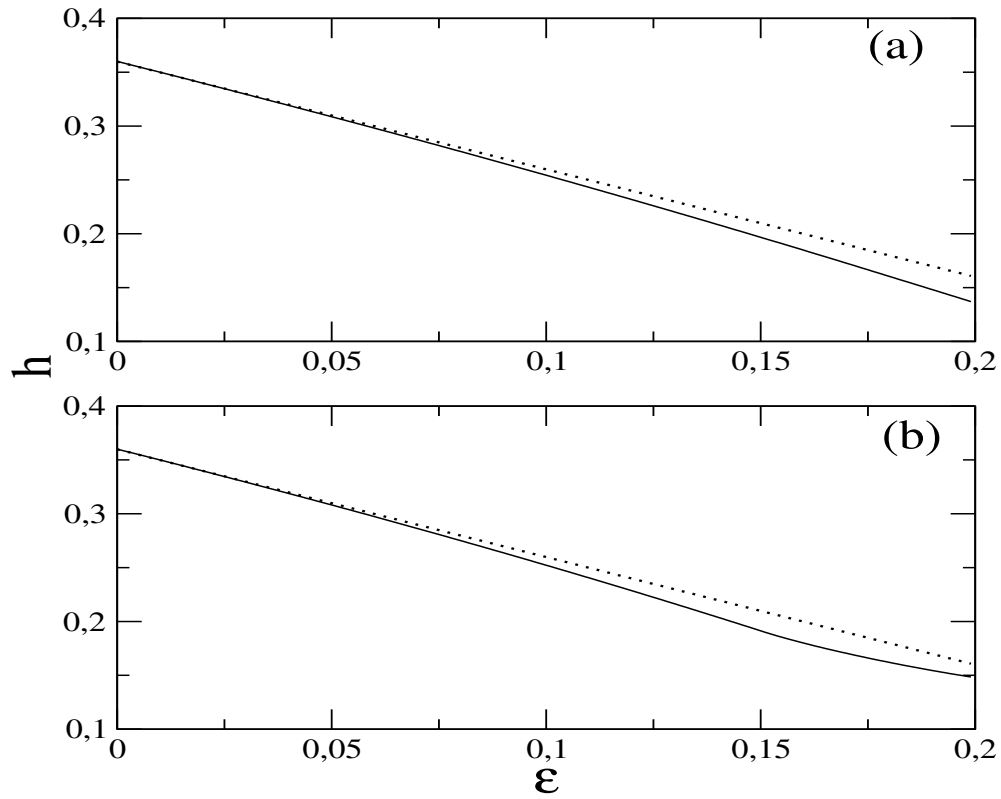
e efetuados os cálculos, a entropia será,

$$h(\varepsilon) = \frac{(N-1)(\lambda_u - \varepsilon)}{N} + \frac{2\varepsilon q^M}{N\pi\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^{\sigma+1}} \times \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{\pi N (q^m - 1)}{q^M} \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{\pi (q^m - 1)}{q^M} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

A Figura 3.8 (a) e (b) mostra uma comparação entre o resultado numérico da densidade de entropia de Kolmogorov-Sinai com a aproximação obtida por meio da equação (3.20) para uma rede $q = 2$ e $M = 10$. Na Figura 3.8 (a), $\sigma = 0$ e (b) $\sigma = 2, 0$. Pode-se observar uma aproximação entre os resultados obtidos tanto analiticamente como numericamente para a intensidade de acoplamento $\varepsilon < 0, 1$. Para acoplamento fraco, a densidade de entropia decresce a partir do valor máximo que é igual ao expoente de Lyapunov para mapas não acoplados. Quando o parâmetro ε aumenta, o espectro de expoentes de Lyapunov apresenta expoentes negativos que são descartados no cálculo da entropia, a qual diminui como consequência. Este comportamento para a entropia com respeito a variação da intensidade de acoplamento é típico para mapas caóticos acoplados.²⁶

Conclui-se que a soma dos expoentes de Lyapunov positivos fornecem uma boa estimativa para a entropia de Kolmogorov-Sinai e, portanto o resultado obtido é uma forma conveniente utilizada para quantificar o quanto uma rede é complexa. Como os expoentes de Lyapunov positivos medem a divergência exponencial de trajetórias próximas de um sistema dinâmico, a soma dos expoentes de Lyapunov pode ser considerado um limite superior para

Figura 3.8: Densidade de entropia Kolmogorov-Sinai pela intensidade de acoplamento. Resultados analíticos com linha pontilhada e resultados numéricos com linha cheia, sendo $r = 3,69$, $q = 2$, $M = 10$. (a) $\sigma = 0,0$ e (b) $\sigma = 2,0$.



FONTE: A autora.

a taxa de produção de informação e fornece uma maneira de quantificar a complexidade do sistema dinâmico.

O comportamento dinâmico exibido por redes de mapas com acoplamento lei de potência usual serviu de suporte para o estudo da sincronização e outros comportamentos em redes de mapas com acoplamento lei de potência modificado. Os resultados mostraram que é possível estudar a sincronização em uma rede de mapas com acoplamento lei de potência modificado a partir de estudos realizados em outros modelos com acoplamento lei de potência usual existentes.^{11,12,25} Pode-se confirmar que as condições para a sincronização foram verificadas com base nos diagnósticos numéricos, no espectro de expoentes de Lyapunov apresentando propriedades de sincronização equivalentes ao do modelo lei de potência usual. Acredita-se que resultados obtidos proporcionam o entendimento dos mecanismos naturais de sincronização como em sistemas compostos por elementos que interagem.

Para justificar o estudo da sincronização foi considerada uma rede de neurônios com acoplamento lei de potência modificado. Os neurônios podem ser modelados por meio de mapas ou de equações diferenciais acopladas. Uma abordagem sobre mapas na modelagem de neurônios biológicos foi feita por Ibarz, Casado e Sanjuán.⁵⁵ Uma classificação dos mapas

quanto ao tipo de disparos foi feita por Izhikevich.⁵⁶ O mapa de Rulkov foi proposto para estudar neurônios que exibem disparos caóticos, disparos periódicos ou comportamento periódico.^{57,58} Outros modelos de evolução temporal discreta foram propostos anteriormente ao modelo de Rulkov.⁵⁹ Modelos envolvendo equações diferenciais são adequados para analisar fenômenos biológicos. O modelo Hindmarsh-Rose foi o escolhido para o estudo computacional porque é um modelo capaz de produzir padrões de disparos que imitam os disparos exibidos por neurônios biológicos. Um neurônio pode exibir dois tipos de atividade, de *spiking* e de *bursting*. *Bursting* é a atividade tal que um neurônio dispara dois ou mais potenciais de ação seguidos por um período de quiescência que envolve escalas de tempo. *Spiking* é a atividade do neurônio que dispara uma sequência de potenciais de ação mais ou menos regularmente, durante um período de tempo ininterrupto por período de quiescência. Devido a existência de escalas de tempo, os neurônios podem apresentar sincronização de *burst* quando começam e terminam o *burst* ao mesmo tempo.⁵⁶ Direciona-se o estudo para a sincronização de *bursts* entre neurônios por meio do modelo Hindmarsh-Rose.

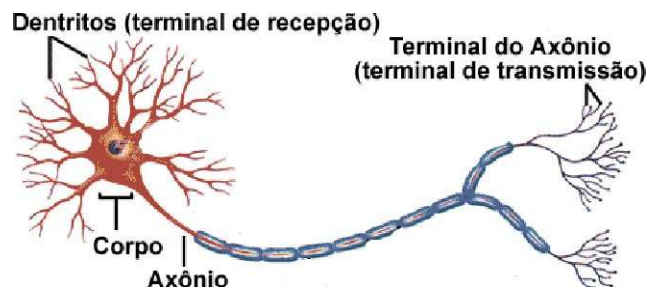
4 Hindmarsh-Rose

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos com a dinâmica de um neurônio Hindmarsh-Rose, de dois neurônios Hindmarsh-Rose acoplados na configuração mestre-escravo e de uma rede de neurônios Hindmarsh-Rose com acoplamento lei de potência modificado. Um conjunto de parâmetros são os responsáveis pela dinâmica. Será definida a sincronização de *bursts* de neurônios, o uso de diagnósticos de sincronização e por último, a supressão de disparos sincronizados.

4.1 Neurônio

O neurônio é a unidade funcional básica do sistema nervoso. Existe uma variedade de formas e tamanhos de neurônios. O neurônio é constituído de um corpo celular com núcleo e fibras finas que se prolongam a partir do corpo. Cada neurônio tem uma fibra longa, o axônio, e um grande número de fibras curtas, os dendritos, que possuem menos de 1 mm de comprimento.⁶⁰ As fibras longas, os axônios, são as linhas de comunicação entre os neurônios. A Figura 4.1 ilustra as partes de um neurônio.⁶¹

Figura 4.1: Estrutura de um neurônio.



FONTE: Adaptado de LEVADA, 1996.

Os pontos nos quais os neurônios e suas extensões fazem contato com outros neurônios são denominados sinapses. As sinapses podem ser elétricas ou químicas. Em sinapses quími-

cas, a transmissão de um impulso envolve a liberação de um neurotransmissor ou de um sinal químico, que pode ocorrer em uma direção, do axônio para uma célula adjacente. Em sinapses elétricas, a descarga elétrica que percorre a membrana celular passa diretamente de uma célula para outra.

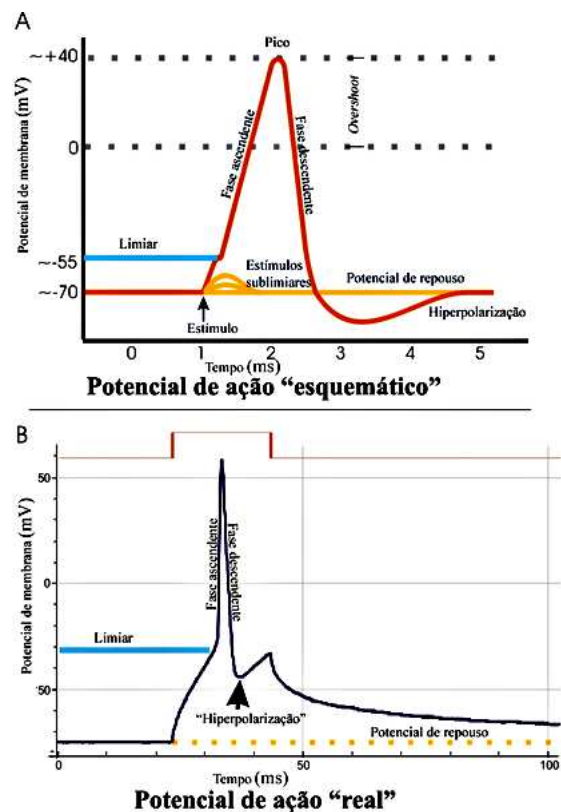
A membrana celular do neurônio é composta de uma bicamada de fosfolipídios que isola cargas elétricas, ou ainda, o meio intracelular do meio extracelular. Esta membrana tem espessura de 3 a 6 nm e proteínas imersas que a atravessam, formando um mosaico de lipídios e proteínas. Existe uma diferença de potencial entre o meio extracelular e o meio intracelular, chamada potencial de membrana. Os neurônios podem alterar seu potencial de membrana e usar este mecanismo para transmitir informação. Quando nenhum sinal é gerado, o potencial de membrana atinge o equilíbrio, ficando negativo no meio intracelular em relação ao meio extracelular. O potencial de equilíbrio é o chamado potencial de repouso.

O potencial de repouso resulta de uma distribuição desigual de íons dentro e fora da célula. Íons como sódio (*Na*), cloro (*Cl*) e cálcio (*Ca*) existem em maior concentração no meio extracelular enquanto que o potássio (*K*) e outros íons existem em maior concentração no meio intracelular. As proteínas que atravessam a membrana constituem poros que permitem a passagem passiva de íons por seu interior. As proteínas são os canais iônicos e apresentam características como seletividade a determinado tipo de íon e podem abrir ou fechar em resposta a sinais elétricos ou mecânicos ou químicos. Os canais iônicos são poros macromoleculares presentes na membrana celular e fundamentais no processo de excitabilidade em células excitáveis como neurônios e células musculares.¹⁹

Os terminais do axônio de um neurônio ficam conectados ao de um outro neurônio formando uma rede de neurônios através de estruturas denominadas sinapses. As sinapses permitem que a informação, na forma de um pulso de potencial elétrico, o chamado potencial de ação, se propague pela rede com o objetivo de cumprir funções. Por isso, os modelos de neurônios procuram descrever o pulso de potencial elétrico que se propaga pela membrana do axônio. O potencial de ação também é conhecido como *spike* ou disparo. Portanto, o neurônio disparar significa que seu potencial de membrana assumiu a forma de um pico além de um certo limiar retornando ao estado quiescente.⁵⁶ A figura 4.2 mostra um potencial de ação do neurônio.

A simulação de redes de neurônios está relacionada a como reproduzir uma riqueza de respostas dos neurônios com baixo custo computacional e com aceitabilidade biológica. O problema está na escolha do modelo que permita simular fenômenos mais próximos do real. Os modelos podem ser divididos em duas classes, os modelos biológicos, de parâmetros que

Figura 4.2: Potencial de ação do neurônio: A, Diagrama esquemático, cada potencial de ação possui uma fase ascendente, uma descendente e curva de voltagem inferior ao do potencial de repouso. B, Um exemplo real.



FONTE: Fonte primária: HODGKIN e HUXLEY, 1952d.

possuem uma conexão direta com experimentos em neurônios reais, baseados em condutância e os modelos formais, cujo comportamento é qualitativamente igual ao de neurônios biológicos mas de parâmetros arbitrários.

O primeiro modelo que simula o disparo de um neurônio foi desenvolvido por Hodgkin e Huxley¹⁹ que é um modelo biologicamente plausível em termos de descrição dos fenômenos que ocorrem na membrana do neurônio. Trata-se de um modelo baseado nas condutâncias da membrana do axônio de um molusco marinho conhecido como *Loligo* e popularmente de lula. Hodgkin e Huxley construíram um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias não lineares e parâmetros que descrevem o potencial de membrana, ativação das correntes de sódio (Na) e de potássio (K), a desativação das correntes de sódio e um grupo de correntes de escape (I). As equações e as devidas explicações sobre o modelo podem ser compreendidas por meio do artigo de Hodgkin e Huxley.¹⁹

A equação diferencial para as correntes que fluem através da membrana do axônio, as três equações diferenciais lineares de primeira ordem que especificam a evolução das taxas de transição e a dependência na voltagem V e as seis funções para α e β constituem o modelo clássico de Hodgkin e Huxley controlado pelo parâmetro I para uma pequena região da membrana

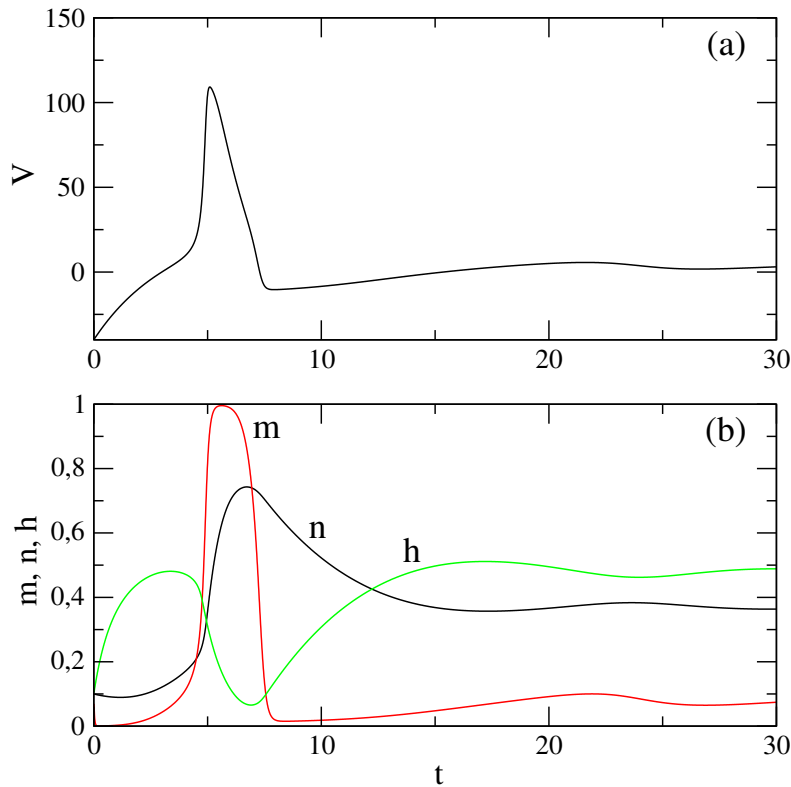
do axônio da lula,

$$\begin{aligned}
C_m \frac{dV}{dt} &= -\bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_l (V - V_l) + I, \\
\frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \\
\frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\
\frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h, \\
\alpha_n(V) &= \frac{0,01(10 - V)}{\exp(1 - 0,1V) - 1}, \\
\beta_n(V) &= 0,125 \exp\left(\frac{-V}{80}\right), \\
\alpha_m(V) &= \frac{0,1(25 - V)}{\exp(2,5 - 0,1V) - 1}, \\
\beta_m(V) &= 4 \exp\left(\frac{-V}{18}\right), \\
\alpha_h(V) &= 0,07 \exp\left(\frac{-V}{20}\right), \\
\beta_h(V) &= \frac{1}{\exp(3 - 0,1V) + 1}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

A voltagem V é o potencial de membrana medido em relação ao potencial de repouso, $V = V_m - V_{rep}$ em mV. A densidade de corrente injetada I_{ext} é medida em $\mu A/cm^2$, as condutâncias são medidas em mS/cm^2 e a capacitância é medida em $\mu F/cm^2$. Para a simulação computacional foi utilizado o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem para obter soluções aproximadas de equações diferenciais do modelo. O modelo Hodgkin-Huxley descreve como os potenciais de ação iniciam e se propagam pelo axônio da lula. Um potencial de ação pode ser visto na Figura 4.3, segundo o modelo Hodgkin-Huxley considerando os valores de parâmetros, $V_{Na} = 115mV$, $V_K = -12mV$ e $V_l = 10,6mV$ representando os potenciais de equilíbrio, $\bar{g}_{Na} = 120mS/cm^2$, $\bar{g}_K = 36mS/cm^2$, $\bar{g}_l = 0,3mS/cm^2$ que representam as condutâncias máximas das correntes iônicas e $C_m = 1\mu F/cm^2$ a capacitância da membrana.

Na Figura 4.3 (a) pode-se observar o potencial de ação e o que acontece com as variáveis m , n e h . A ativação do sódio m muda mais rapidamente do que n e h . A lenta recuperação de h e n após o pico do potencial explica porque a membrana se hiperpolariza e passa pelo período refratário.⁶² A corrente $I_{ext} = 5\mu A/cm^2$ representa a intensidade do estímulo aplicado na membrana do axônio. Existem quatro fases durante um potencial de ação, a fase de subida brusca, a fase excitada, a fase refratária e a fase de recuperação. O período refratário é o período durante o qual um novo estímulo não consegue provocar qualquer resposta devido ao fato de

Figura 4.3: (a) Potencial de ação do modelo Hodgkin-Huxley, V em mV e t em ms . (b) Dinâmica de m =ativação do sódio, n =ativação do potássio e h =desativação do sódio durante o potencial de ação.



FONTE: A autora.

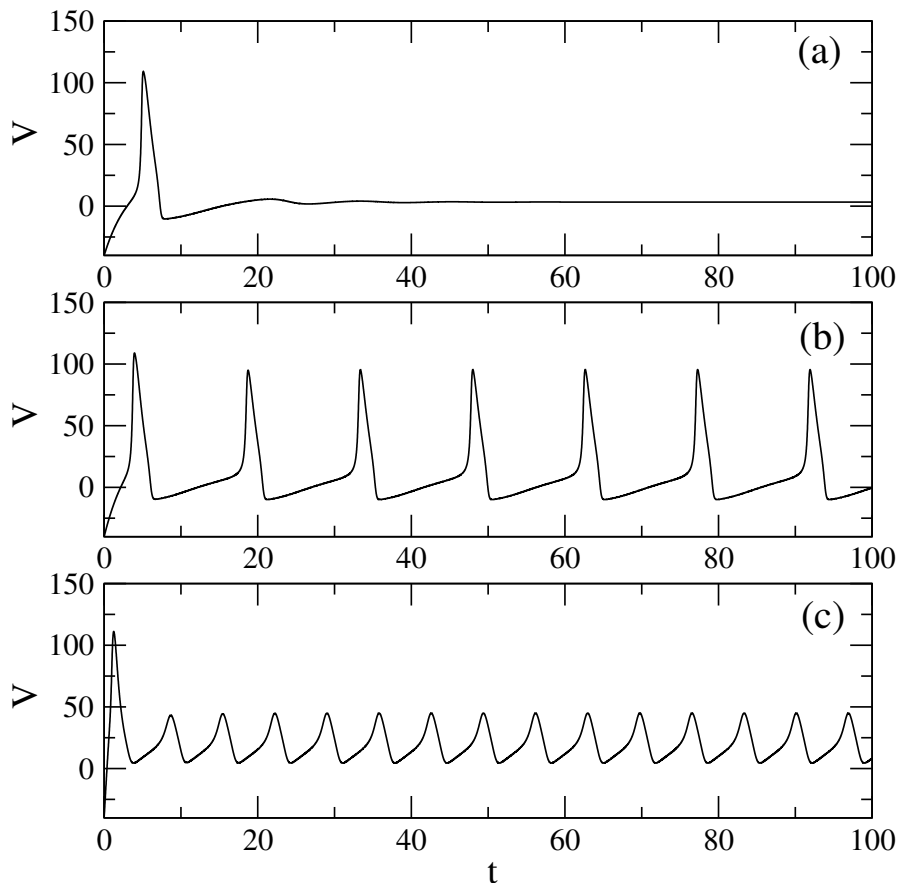
que nessa fase a variável h é pequena. A medida que h retorna gradualmente ao seu valor de repouso, um outro potencial de ação torna-se possível.

As curvas da Figura 4.3 (b) permitem entender o que ocorre na geração e propagação de um potencial de ação. No início, alguns canais de sódio se ativam a medida que o potencial de membrana aumenta e partir de um certo limiar deste potencial, mais canais de sódio se abrem atingindo uma ativação máxima, m , que ocorre na subida do potencial de ação. Os canais de potássio também se ativam e a ativação máxima n , ocorre na descida do potencial. A variação do potencial de membrana é repentino, ocorre despolarização até um limite, a partir do qual o fluxo se inverte. O potássio que saiu tende a entrar e o sódio que entrou tende a sair. O potássio retorna mais rápido do que o sódio, causando a hiperpolarização da membrana. O período refratário ocorre devido a inativação dos canais de sódio.

Na Figura 4.4, observam-se três soluções para o potencial de ação para três diferentes

valores de corrente aplicada I . A forma de um potencial de ação é uma característica de cada neurônio, sendo sempre igual a cada novo disparo independente do valor da corrente injetada. Se a membrana do neurônio for estimulada por uma corrente constante, com um valor acima do limiar por um longo tempo, potenciais de ação repetitivos com intervalos aproximadamente regulares serão gerados como na Figura 4.4 (b) e (c).

Figura 4.4: Potencial de ação do modelo Hodgkin-Huxley em função da corrente: a resposta de V em mV com I em $\mu A/cm^2$, (a) $I = 5\mu A/cm^2$, (b) $I = 10\mu A/cm^2$, (c) $I = 100\mu A/cm^2$.



FONTE: A autora.

O modelo original de Hodgkin-Huxley apresenta disparos periódicos e um único disparo caso o neurônio seja estimulado por um pulso de corrente no parâmetro I . A atividade de *bursting* como resposta de neurônios pode ser obtida por meio do modelo de Hindmarsh e Rose.²² Para um estímulo constante de corrente, os neurônios respondem com *bursts* ou sequências de disparos interrompidos por intervalos de repouso. O modelo Hindmarsh-Rose

utilizado neste trabalho simula *bursts* periódicos ou caóticos que dependem de uma escolha de parâmetros para o modelo.

4.2 O modelo de Hindmarsh e Rose

O neurônio processa informação e compreender o potencial de ação, os padrões de disparos é extremamente útil para entender o mecanismo de codificação neural. A sincronização caótica em uma rede de neurônios é um problema investigado em neurociência.⁶³ As investigações demonstram que a sincronização em rede de neurônios acoplados apresentam uma relação com a doença de Parkinson e com a epilepsia. Entender os tipos de conexão entre os neurônios na rede e a intensidade do acoplamento para a sincronização pode ter um papel significativo para a neurociência e pesquisas médicas. Os conceitos referentes ao modelo Hindmarsh-Rose, o estudo do modelo Hindmarsh-Rose na configuração mestre-escravo e do modelo Hindmarsh-Rose com acoplamento lei de potência modificado serão apresentados.

O modelo de Hindmarsh e Rose²¹ foi desenvolvido para estudar a sincronização de disparo de dois neurônios do molusco *Lymnaea stagnalis*,⁶⁴ sem no entanto, utilizar as equações do modelo Hodgkin-Huxley. A escolha para estudo consistiu no uso das equações de FitzHugh e Nagumo,^{20,65} que consolidou-se em uma simplificação das equações do modelo de Hodgkin e Huxley.¹⁹ FitzHugh e Nagumo observaram que nas equações de Hodgkin e Huxley, o potencial de membrana V e a ativação do sódio m evoluíam em escala de tempo semelhantes durante um potencial de ação, enquanto que a inativação do sódio h e a ativação do potássio n tinham mudança semelhante apesar da escala de tempo ser mais lenta. Como resultado, o modelo dinâmico que simula o potencial de ação e que usa apenas duas equações diferenciais de primeira ordem foi proposto por Hindmarsh e Rose em 1982²¹ e representado como,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - f(x) + I, \\ \frac{dy}{dt} &= g(x) - y,\end{aligned}\tag{4.2}$$

assumindo que a taxa de mudança do potencial de membrana depende linearmente de I , uma corrente introduzida através de um eletrodo e de y uma corrente de membrana que depende de forma não linear do potencial de membrana. Nas equações (4.2), o estado x representa o potencial de membrana, y uma variável de recuperação, a função $f(x)$ é cúbica, a função $g(x)$ é quadrática e I é a corrente externa aplicada ou corrente de fixação de voltagem como função do tempo. Hindmarsh e Rose realizaram experimentos de fixação de voltagem com neurônios do gânglio visceral do molusco *Lymnaea stagnalis* para determinar a forma das funções $f(x)$ e de

$g(x)$, como $f(x) = ax^3 + bx^2$ e $g(x) = c - dx^2$. Nestas condições, o modelo Hindmarsh-Rose de duas variáveis é definido como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - ax^3 + bx^2 + I, \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y,\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde a , b , c e d são parâmetros que assumem os valores, $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$ e $d = 5$. O uso do modelo bidimensional possibilitou reproduzir os potenciais de ação e a variação da taxa de disparo do neurônio em função da corrente injetada no neurônio.²¹ O modelo Hindmarsh-Rose de duas variáveis foi considerado importante por revelar propriedades como o fato dos potenciais de ação ficarem separados por um intervalo e que não era reproduzido pelo modelo simplificado de FitzHugh e Nagumo.^{20,65}

Em 1984, Hindmarsh e Rose fizeram uma adaptação no modelo bidimensional para conseguir disparos separados por um intervalo de estado de repouso, ou seja, os *bursts*.²² A célula nervosa do caracol *Lymnaea stagnalis* não dispara indefinidamente. Após um certo período, os pulsos terminam com uma onda hiperpolarizante (sinal inibitório). Um modo de produzir este efeito, segundo o que já foi observado em neurônios de moluscos, é a introdução de uma corrente lenta, que gradualmente hiperpolariza a membrana da célula e produz adaptação. Hindmarsh e Rose acrescentaram uma corrente de adaptação z ao sistema de equações (4.3) e assumiram que $\frac{dz}{dt}$ é uma função linear do potencial de membrana. Assim, as equações do modelo Hindmarsh-Rose de três variáveis são dadas como segue,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I, \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y, \\ \frac{dz}{dt} &= r(s(x - x_0) - z).\end{aligned}\tag{4.4}$$

O modelo Hindmarsh-Rose de três equações diferenciais descreve em unidades adimensionais o potencial de membrana x e usa as variáveis, y , que representa o conjunto de canais iônicos rápidos ligados ao transporte de Na e K , e z , uma variável lenta que comanda a dinâmica lenta dos outros canais iônicos presentes. As variáveis y e z são as que favorecem o comportamento de *bursts* neste modelo. As respostas a um pequeno pulso de corrente despolarizante (sinal excitatório) depende dos valores dados as constantes r e s , sendo que r representa a escala de tempo para a corrente de adaptação lenta e s representa a escala de influência do potencial de membrana na dinâmica lenta.

Uma interpretação para as variáveis e parâmetros do conjunto de equações do modelo

Hindmarsh-Rose são: I corresponde a entrada de corrente na membrana do neurônio. A constante b permite a escolha entre o comportamento de disparos e picos e controla a frequência de picos. O parâmetro r controla a velocidade de variação da variável lenta z , isto é, a eficiência dos canais lentos na troca de íons. Na presença de comportamento de picos, r controla a frequência de picos enquanto que no caso de disparos, r afeta o número de picos por disparo. O parâmetro s governa a adaptação, sendo que o valor unitário de s determina o comportamento de picos sem acomodação e adaptação sublimiares, enquanto que valores em torno de $s = 4$ fornecem acomodação forte e superação de sublimiares. O parâmetro $x_0 = -1,6$ define o potencial de repouso do modelo 4.4 e é o valor usado para simulações na literatura.

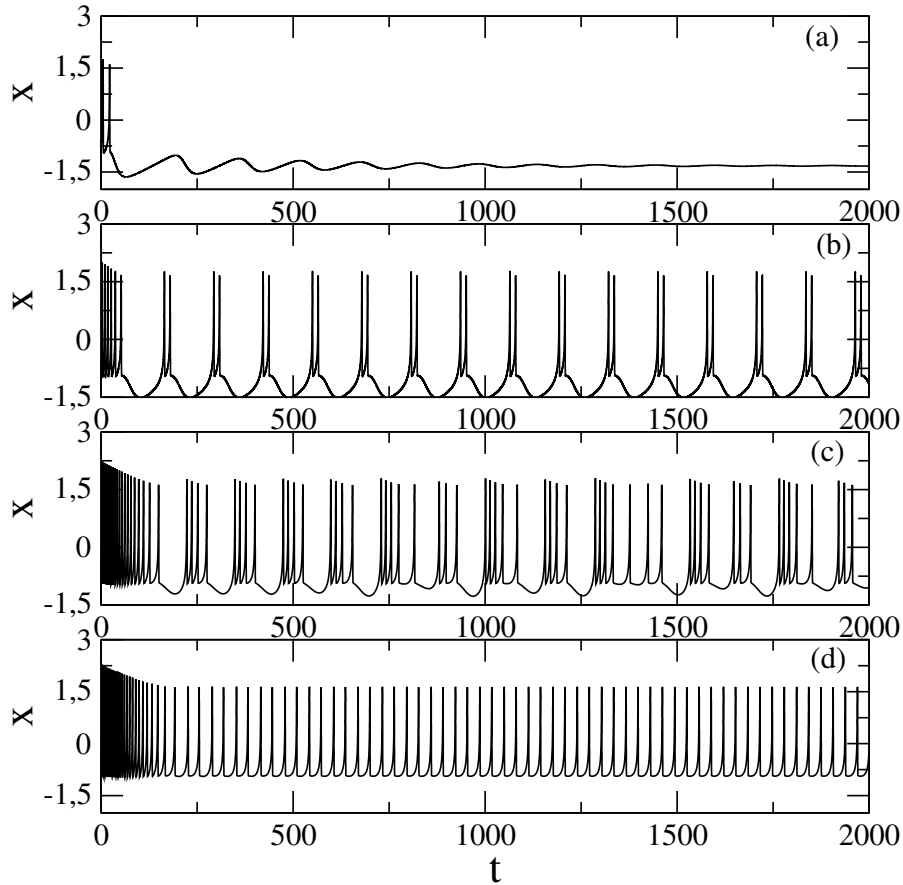
As equações Hindmarsh-Rose (4.4) fornecem por meio da simulação, *bursts* periódicos ou caóticos e outros comportamentos, quando é escolhido um valor positivo para a corrente I . Os valores de parâmetros comumente utilizados são $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0,006$, $s = 4$ e $x_0 = -1,6$. Na Figura 4.5 observam-se quatro soluções para diferentes valores de corrente aplicada I . Existem soluções de equilíbrio onde o potencial de ação cai para um valor constante como na Figura 4.5 (a), *bursts* periódicos de dois picos como na Figura 4.5 (b), *bursts* caóticos, Figura 4.5 (c) e disparos periódicos de um pico, Figura 4.5 (d).

Quando a corrente I assume um valor do intervalo $(2,92, 3,40)$, o modelo Hindmarsh-Rose de equações (4.4) descreve disparos caóticos. Com os valores de parâmetros definidos como $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0,006$, $s = 4$, $x_0 = -1,6$ e uma corrente constante $I = 3,2$, obtém-se comportamento de disparos caóticos para o potencial de membrana x , onde também podem ser visualizadas as variáveis y e z . Na Figura 4.6 é mostrado o tempo de evolução das variáveis de estado, onde é possível ver, depois de um transiente pequeno, o comportamento dessas variáveis. Tempo transiente é o tempo necessário para que o sistema evolua para um comportamento assintótico.

Por meio da Figura 4.6, considerando a série temporal da variável x e da variável de adaptação lenta z , pode-se verificar a relação entre a inclinação $\frac{dz}{dt}$ e a geração dos pulsos. Um pulso inicia-se aproximadamente quando ocorre a mudança na inclinação de z , no instante em que $\frac{dz}{dt} < 0$ passa para $\frac{dz}{dt} > 0$. Esta passagem pode ocorrer tanto no início de um pulso quanto no início de um *burst* de pulsos. O início de um *burst* de pulsos é precedido por um intervalo de quiescência e $\frac{dz}{dt} < 0$ demora um tempo maior para mudar para $\frac{dz}{dt} > 0$. De um modo geral, ocorre $\frac{dz}{dt} > 0$ no *burst* de pulsos e $\frac{dz}{dt} < 0$ nos intervalos de quiescência. Esta condição é válida para qualquer valor de corrente I que resultem em *burst* de pulsos.⁶⁶

A Figura 4.7 mostra dois comportamentos do modelo Hindmarsh-Rose de equações (4.4), um para $I = 2,8$, de *bursts* periódicos e outro para $I = 3,2$, que descreve *bursts* caóticos.

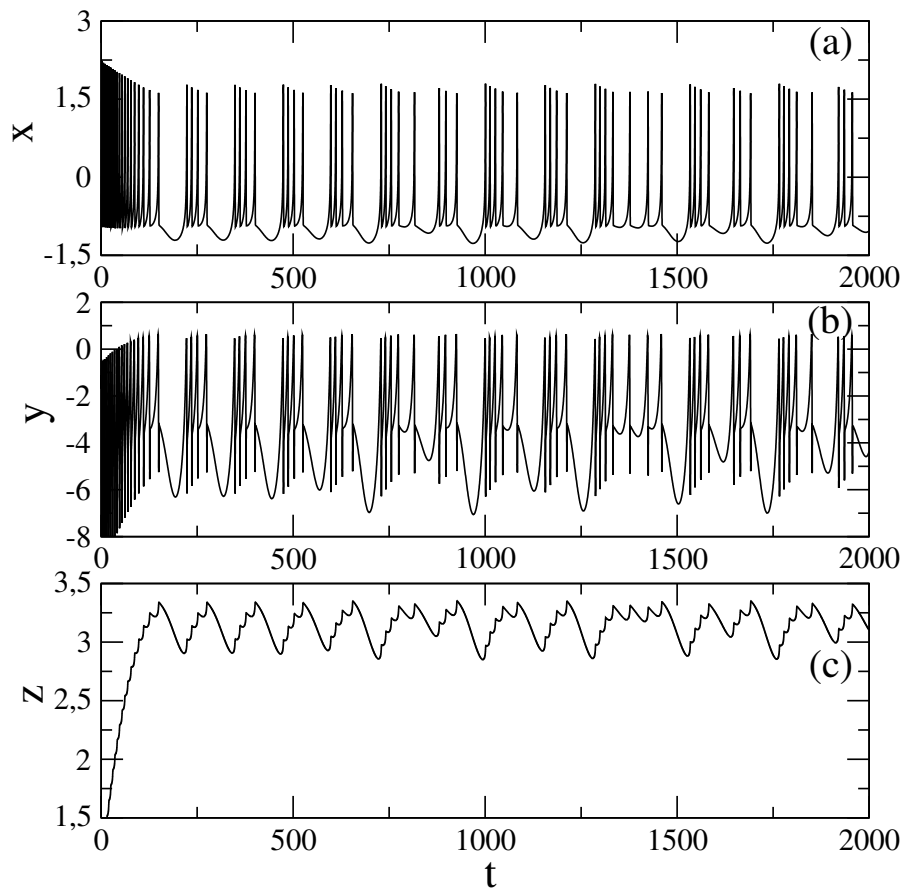
Figura 4.5: Série temporal do potencial de ação com os parâmetros $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0,006$, $s = 4$, $x_0 = -1,6$ na equação (4.4) para os valores da corrente aplicada, (a) $I = 1,3$, (b) $I = 2,0$, (c) $I = 3,2$ e (d) $I = 3,5$.



FONTE: A autora.

A Figura 4.7 exibe em (a) a evolução temporal da variável x com 4 disparos em cada *burst*, em (b) a evolução temporal da variável x de disparos caóticos, em (c) os 4 disparos por *burst* de uma órbita do modelo Hindmarsh-Rose e em (d) os disparos caóticos do modelo Hindmarsh-Rose no plano xz . A forma dos disparos e o retrato de fases sobre o plano xz foram simulados porque são úteis para distinguir qualitativamente dois diferentes comportamentos: *bursts* periódicos e *bursts* caóticos.

Figura 4.6: Disparos caóticos do modelo de equação (4.4) com os valores de parâmetros $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0,006$, $s = 4$, $x_1 = -1,6$ e $I = 3,2$: (a) Potencial de membrana x ; (b) variável y responsável pelo comportamento de alta frequência; (c) variável z de adaptação lenta.

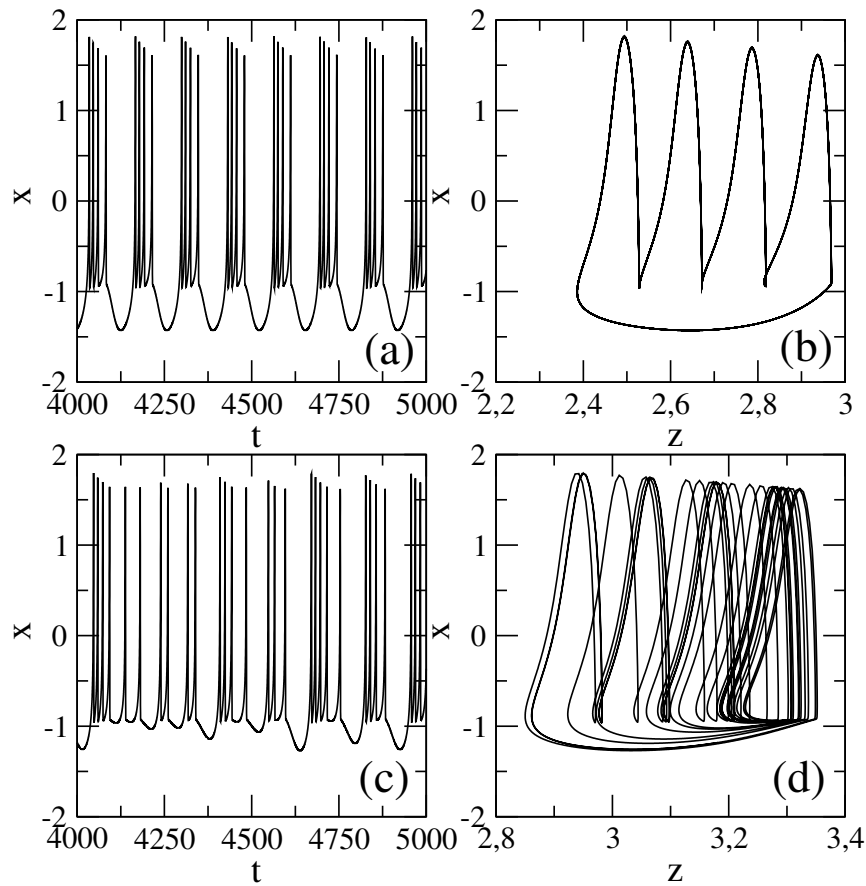


FONTE: A autora.

4.3 Diagrama de bifurcações e expoente de Lyapunov

O comportamento dinâmico do modelo Hindmarsh-Rose pode ser analisado numericamente em diferentes regiões do espaço de parâmetros por meio do diagrama de bifurcações, expoentes de Lyapunov, séries temporais e retrato de fases. A riqueza de comportamentos exibidos por modelos neurofisiológicos ou fenomenológicos estão associados a diagramas de bifurcações. O termo bifurcação foi introduzido por Poincaré em 1885 e faz referência à mudança qualitativa no espaço de fases de um sistema dinâmico. A ideia do fenômeno de bifurcação está associada ao conceito de estabilidade. Um sistema é estável se as propriedades geométricas

Figura 4.7: Exemplos da dinâmica do modelo Hindmarsh-Rose de equações (4.4) para $I = 2,8$ e $I = 3,2$: (a) evolução temporal de x com 4 disparos em cada *burst*; (b) os 4 disparos por *burst* de uma órbita do modelo Hindmarsh-Rose; (c) evolução temporal de x de disparos caóticos; (d) os disparos caóticos de uma órbita do modelo Hindmarsh-Rose no plano xz .



FONTE: A autora.

no espaço de fases são mantidas depois de uma perturbação infinitésima. Por outro lado, se ao variar o valor de um parâmetro do sistema em torno de um valor crítico, ocorrer uma alteração qualitativa no espaço de fases, então o sistema dinâmico será considerado instável para o valor crítico considerado. A bifurcação caracteriza-se por esta mudança na forma do espaço de fases.⁶⁷

Definida uma trajetória, pode-se analisar o que ocorre com os pontos vizinhos desta. As informações sobre as taxas de divergência dos pontos da trajetória permitem o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Existem métodos para o cálculo dos expoentes, cuja diferença entre

eles está na maneira de analisar a dinâmica ao longo da trajetória. O algoritmo Gram-Schmidt de Wolf e colaboradores³⁴ é uma das formas mais utilizadas para calcular numericamente os expoentes de Lyapunov de um conjunto de equações diferenciais. O conceito de expoente de Lyapunov para um sistema de equações diferenciais é o mesmo que para um mapa, uma vez que as iterações discretas do mapa são substituídas pelo fluxo contínuo de uma equação diferencial.

O método proposto por Wolf e colaboradores³⁴ trata de um algoritmo que permite a estimativa de expoentes de Lyapunov positivos de uma série temporal. Num primeiro momento, determina-se o maior expoente de Lyapunov positivo λ_1 e, na sequência o segundo maior expoente, λ_2 , se positivo e assim sucessivamente. A separação entre dois pontos próximos define um eixo principal e a reortonormalização é substituída por um outro ponto próximo à trajetória, que preserve a orientação do eixo principal. Seja uma trajetória de pontos $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots, z_0(t_0)$ o vizinho mais próximo de $y(t_0)$ e L_0 a distância entre $y(t_0)$ e $z_0(t_0)$, isto é, $L_0 = |y(t_0) - z_0(t_0)| < \delta$. $z_0(t_0)$ está dentro da esfera de raio δ centrada em $y(t_0)$. Acompanha-se a evolução temporal de $z_0(t_0)$ e de $y(t_0)$ até que num instante t_1 a distância entre esses dois pontos, L'_0 , exceda δ . Então, substitui-se $z_0(t_0)$ por um outro vizinho mais próximo de $y(t_1)$, que esteja na direção do segmento L'_0 e $L_1 = |y(t_1) - z_0(t_1)| < \delta$. O processo continua para os demais pontos $y(t_i)$. O maior expoente de Lyapunov positivo é obtido como sendo a média de $\ln(\frac{L'_i}{L_i})$ ao longo da trajetória como

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^{M-1} \ln\left(\frac{L'_i}{L_i}\right), \quad (4.5)$$

em que M é o número de passos da substituição. Por este método é possível obter uma aproximação numérica para o maior expoente de Lyapunov associado a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Para o diagrama de bifurcações das equações (4.4) foi considerado uma sequência de intervalos entre os picos de disparos do neurônio, enquanto que a estabilidade linear das soluções do sistema pode ser analisada em termos de seus autovalores. O grau de caoticidade da dinâmica é medido em termos do espectro de Lyapunov $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, 3$, calculado por integração da dinâmica linearizada associada com as equações (4.4). Os expoentes de Lyapunov λ_k são números reais ordenados do maior para o menor, e um expoente de Lyapunov máximo positivo λ_1 indica que a dinâmica do sistema é caótica. Para obter uma aproximação numérica para o maior expoente de Lyapunov associado ao sistema de equações diferenciais ordinárias

do modelo de Hindmarsh-Rose determinou-se a matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -3ax^2 + 2bx & 1 & -1 \\ -2dx & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

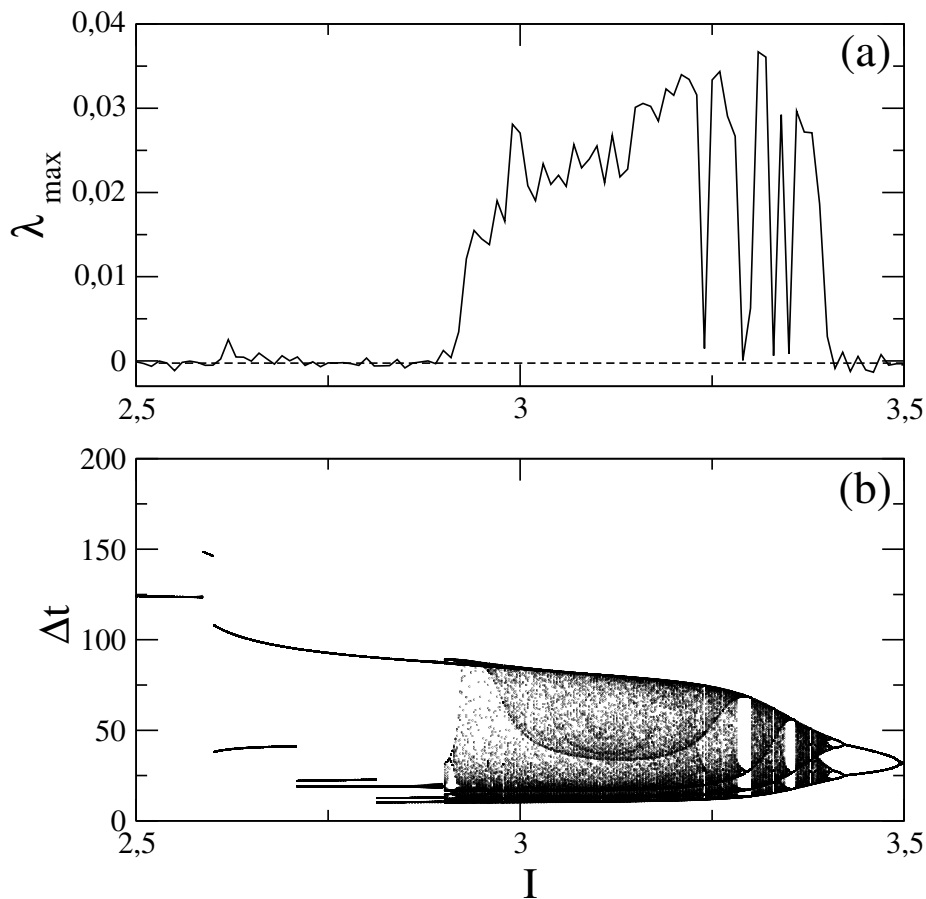
e os autovalores para o conhecimento dos expoentes de Lyapunov que caracterizam o comportamento global de trajetórias.

A maioria dos comportamentos dinâmicos oscilatórios podem ser caracterizados por meio de intervalos de tempo entre picos consecutivos. Em neurobiologia, os intervalos de tempo são conhecidos como intervalos entre picos e acredita-se que nesta estrutura, os neurônios codificam a informação.⁶⁸ Portanto, são observáveis relevantes para a dinâmica neuronal. Para se ter uma visão geral do comportamento dinâmico do modelo Hindmarsh-Rose, utiliza-se o diagrama de bifurcações, em que são verificados os intervalos entre os picos e a variação da corrente que é o parâmetro de controle do modelo. A Figura 4.8 (b) exibe o diagrama de bifurcações sendo que para cada valor de I registram-se tempos sucessivos quando o potencial x_n atinge um máximo positivo. O intervalo entre os picos, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ pode ser atingido por todos os disparos de um neurônio específico. Δt é o intervalo t entre dois pulsos sucessivos para uma evolução temporal considerada, descartando o tempo transiente. Para o valor da corrente menor que 1, $I < 1$, o neurônio encontra-se em estado de repouso. Atividade e tipos de comportamento são encontrados para a corrente $I > 1$. O modelo de equações (4.4) exibe *bursts* periódicos de um pico no intervalo de corrente (2,5, 2,6), *bursts* periódicos de dois picos no intervalo de corrente (2,6, 2,7), *bursts* periódicos de três picos no intervalo de corrente (2,7, 2,8) e *bursts* periódicos de quatro picos no intervalo de corrente (2,8, 2,9). *Bursts* caóticos são observados no intervalo de corrente (2,92, 3,40).

Na Figura 4.8 (a), no intervalo de corrente (2,92, 3,40), o expoente de Lyapunov máximo é positivo indicando comportamento caótico no modelo Hindmarsh-Rose, sendo $\lambda_{max} = 0,0367$ para o valor da corrente $I = 3,3$. O valor de λ_{max} está associado a direção de maior divergência de duas trajetórias inicialmente próximas no estado de estados. A transição entre os regimes de disparo do modelo (4.4) pode ser compreendida pelo diagrama de bifurcações na Figura 4.8 (b), onde é possível verificar diferentes soluções para o modelo de acordo com a variação do parâmetro I .

A dinâmica de um neurônio por meio do modelo Hindmarsh-Rose a qual depende do parâmetro corrente permitiu identificar padrões de disparos periódicos de disparos caóticos a partir de picos periódicos pela análise dinâmica rápida e lenta. Os resultados mostraram que com a mudança no valor da corrente, o neurônio Hindmarsh-Rose passa por estado de repouso

Figura 4.8: Expoente de Lyapunov e diagrama de bifurcações do modelo Hindmarsh-Rose, (a) O maior expoente de Lyapunov do modelo Hindmarsh-Rose em função da corrente, (b) O diagrama de bifurcações, intervalo entre os picos em função da corrente.



FONTE: A autora.

e apresenta comportamentos de picos periódicos ou caóticos. Verifica-se a partir deste estudo a sincronização de *bursts*, quando os neurônios começam e terminam os *bursts* simultaneamente. A atividade *spiking-bursting* sincronizada de neurônios é relevante para a transmissão do sinal e codificação no cérebro.²⁴

4.4 Sincronização no modelo de Hindmarsh e Rose

Sincronização é definida como um ajuste dos ritmos de objetos oscilantes devido a uma interação fraca entre eles.⁶ O fenômeno da sincronização, frequentemente observado na

natureza, envolve elementos ou sistemas acoplados. O acoplamento, cuja intensidade deve preservar a independência entre os osciladores, faz surgir relações entre suas frequências e fases ou outras características dos sinais originados nesses sistemas. Se o acoplamento for bidirecional, pode-se ter a sincronização mútua, onde os osciladores interagentes afetam um ao outro para produzir oscilações sincronizadas. Se o acoplamento for unidirecional, espera-se ter sincronização externa ou forçada, onde as oscilações sincronizadas são produzidas como resposta da ação de uma força externa, ou ainda, o oscilador agente ajusta o ritmo do oscilador resposta.

Existem outros tipos de sincronização, que por sua vez, dependem de como se estabelece o ajuste de ritmos: sincronização completa,^{6,69} sincronização com atraso⁷⁰, sincronização de fase⁷¹ e sincronização generalizada.⁷² Na sincronização completa, devido a forte interação entre dois ou um número N de osciladores idênticos, as variáveis de estados coincidem. Por osciladores idênticos, entende-se que apresentam a mesma dinâmica e igual conjunto de parâmetros. Como a coincidência é preservada no tempo, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$, onde x e y são vetores de estado de dois osciladores.

Neste estudo considera-se a sincronização de *bursts*. Em particular, destaca-se a sincronização completa.⁶ A atividade *spiking-bursting* é observada no sistema nervoso central.⁷³ Determinadas células no cérebro de mamíferos, por exemplo, os neurônios do tálamo, exibem atividade *spiking-bursting* durante períodos de sonolência, ou de falta de atenção ou de sono.⁷⁴ A atividade de neurônios apresenta em geral duas escalas de tempo distintas, sendo uma escala de tempo rápida caracterizada por picos repetitivos e outra, uma escala de tempo lenta caracterizada por *bursts*, onde observa-se alternância entre disparos e estado quiescente. A presença de ritmos sincronizados da atividade elétrica do cérebro são observados em registros encefalográficos, na forma de comportamento oscilatório gerado pela correlação entre populações de neurônios do córtex cerebral. A sincronização na forma de *bursts* é caracterizada como elemento chave na doença de Parkinson, tremor e epilepsia.¹⁸ Sabendo da existência de regiões do cérebro em que aglomerados de neurônios disparam de forma síncrona, estudos indicam que uma forma possível de controlar os ritmos patológicos seria o de suprimir o comportamento sincronizado.⁷⁶

A partir das observações empíricas, métodos da dinâmica não linear são aplicados no entendimento do comportamento de supressão de sincronização. Pesquisadores como Rosenblum e Pikowsky propuseram um procedimento de *feedback* com o objetivo de controlar os ritmos patológicos do cérebro por meio da supressão de comportamento sincronizado por um sinal de retorno atrasado.⁷⁶ O método consiste em um sinal de realimentação com tempo

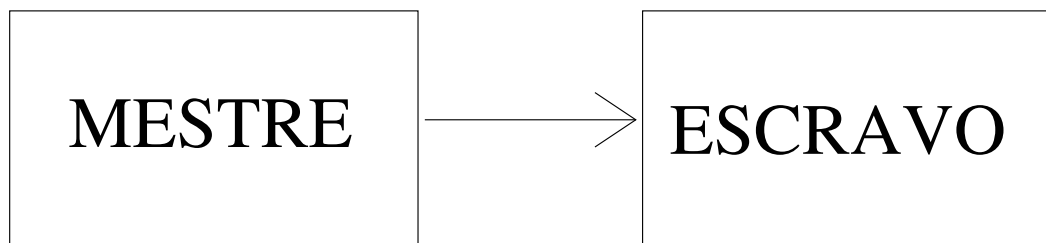
de atraso com valores para o controle da amplitude e do tempo de atraso. O procedimento de controle é considerado não invasivo porque pode ser realizado utilizando sinais externos de pequena amplitude e durante um pequeno intervalo de tempo. Esta estratégia é aplicada em redes com acoplamento global, onde cada elemento interage com todos os outros elementos em uma espécie de campo médio de acoplamento.⁷⁷

4.5 Modelo de Hindmarsh e Rose mestre-escravo

A sincronização entre sistemas caóticos foi proposta por Pecora e Carroll, que possibilitou a análise de dois sistemas caóticos, um transmissor e outro receptor, sincronizados por um sinal aplicado ao receptor.⁶⁹ Pecora e Carroll constataram que dois sistemas caóticos poderiam ter sua evolução temporal sincronizada promovendo a interação dos estados dos mesmos. A partir desta constatação existem muitos trabalhos sobre sincronização de sistemas dinâmicos. Uma das formas de estudar a sincronização de sistemas caóticos é por meio do formalismo mestre-escravo de Pecora e Carroll.⁶⁹

A formulação do problema consistiu no acoplamento unidirecional na configuração mestre-escravo considerando o modelo Hindmarsh-Rose. Quando o acoplamento é unidirecional, a sincronização é alcançada como resposta da ação de uma força externa, ou seja, o sistema mestre ajusta o sistema escravo. A dinâmica do sistema escravo é alterada pela influência do sistema mestre. No acoplamento bidirecional os sistemas interagentes afetam um ao outro para produzir sincronização. Um esquema de acoplamento unidirecional pode ser observado na Figura 4.9.

Figura 4.9: Representação esquemática do acoplamento unidirecional mestre-escravo.



FONTE: A autora.

O sistema com dois neurônios conectados via acoplamento unidirecional em uma configuração mestre-escravo considerando o modelo Hindmarsh-Rose pode ser expresso da

seguinte forma

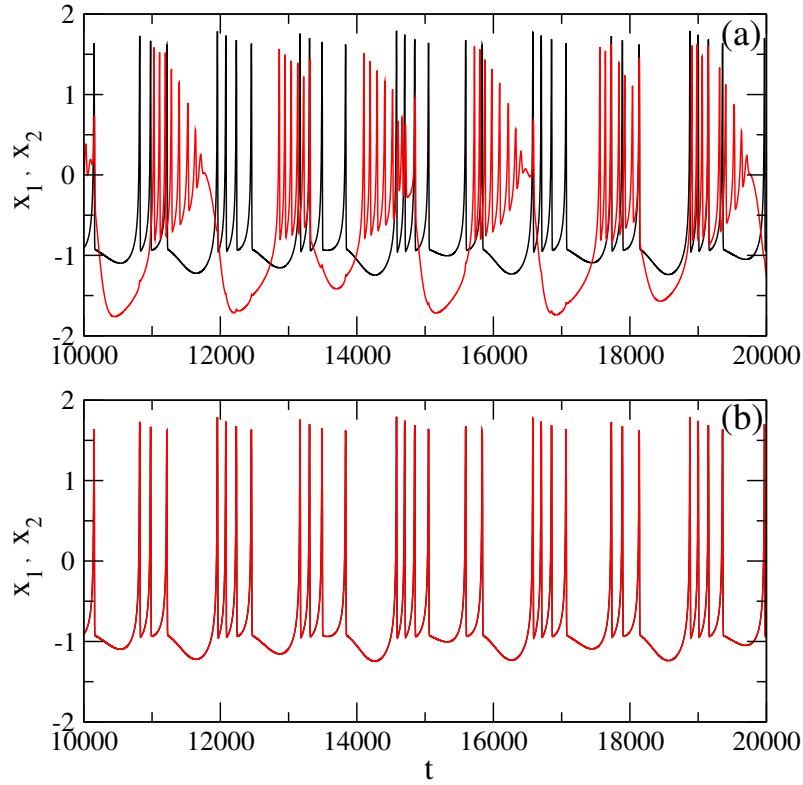
$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I_1, \\
\frac{dy_1}{dt} &= c - dx_1^2 - y_1, \\
\frac{dz_1}{dt} &= r(s(x_1 - x_0) - z_1), \\
\frac{dx_2}{dt} &= y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\
\frac{dy_2}{dt} &= c - dx_2^2 - y_2, \\
\frac{dz_2}{dt} &= r(s(x_2 - x_0) - z_2).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Os índices 1 e 2 correspondem aos neurônios mestre e escravo, respectivamente. O neurônio mestre atua sobre o neurônio escravo e o acoplamento é unidirecional, uma vez que o neurônio escravo recebe a influência do neurônio mestre, sendo que o inverso não ocorre. O termo de acoplamento $\varepsilon(x_1 - x_2)$ foi introduzido na equação do neurônio escravo a fim de se obter a sincronização. A intensidade de acoplamento ε é um número do intervalo $[0, 1]$. Um estímulo externo, a corrente, é usado como um parâmetro de controle e, quando esta assume determinados valores, o modelo Hindmarsh-Rose exibe padrões de comportamento. Neste estudo, a corrente utilizada é $I = 3,2$ onde o modelo de equações (4.7) descreve atividade de *bursting* caótica.

A Figura 4.10 exibe a evolução temporal x_1 e x_2 dos neurônios mestre e escravo. Para valores da intensidade de acoplamento ε pequeno não ocorre sincronização dos disparos. Para $\varepsilon = 0,2$, o neurônio mestre dispara em intervalos de tempo diferentes do neurônio escravo e as amplitudes dos disparos são diferentes, indicando que a intensidade de acoplamento não foi suficiente para que o neurônio escravo sincronizasse com o neurônio mestre, como na Figura 4.10 (a). Para valores maiores da intensidade de acoplamento, os dois neurônios apresentam sincronização completa, que é interpretada como a igualdade das variáveis de estado enquanto evoluem no tempo, ou seja, os valores da variável de estado dada pelo potencial de ação apresentam o mesmo valor, como pode ser observado na Figura 4.10 (b).

Neste estudo, a sincronização completa é definida como a igualdade entre as trajetórias do sistema na configuração mestre-escravo. A existência de sincronização completa implica que o sistema que recebe a influência é assintoticamente estável, isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$, sendo $d(t)$ a distância de sincronização definida como $d(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. A fim de caracterizar a sincronização em função do parâmetro de acoplamento foi utilizada a média do módulo da diferença entre as trajetórias do neurônio mestre e do neurônio escravo, ou seja, $d_m = \frac{1}{t_1 - t_2} \sum d(t)$. A

Figura 4.10: Evolução temporal de x_1 e x_2 em função do tempo, para dois valores da intensidade de acoplamento: (a) $\varepsilon = 0,2$ e (b) $\varepsilon = 0,95$, sendo a corrente $I = 3,2$. O neurônio x_1 em preto e o x_2 em vermelho.

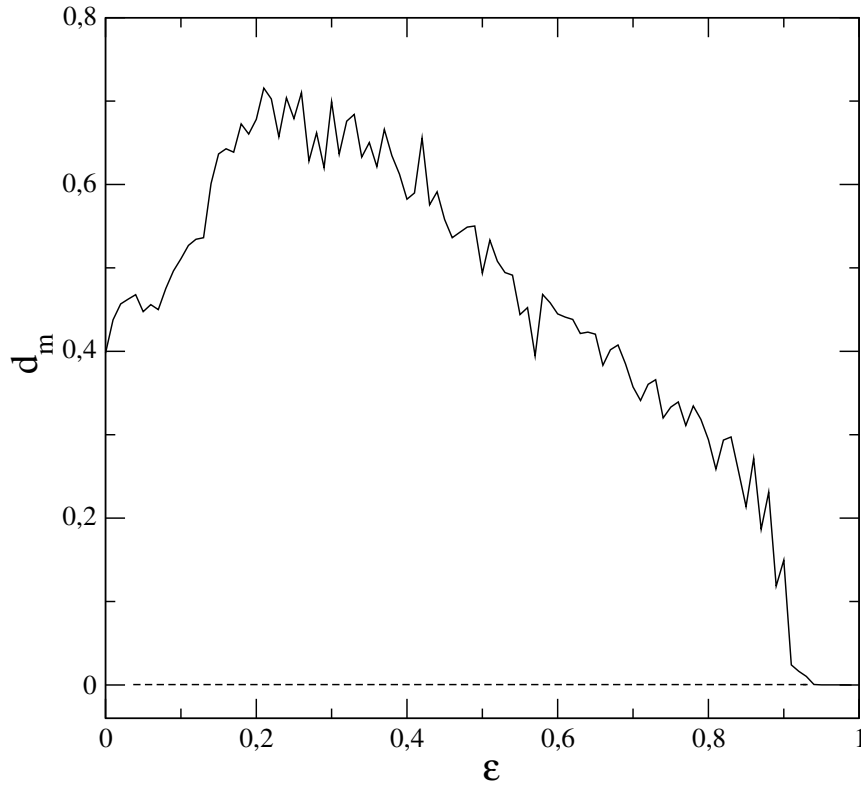


FONTE: A autora.

sincronização ocorre quando $d_m = |x_1(t) - x_2(t)| < 0,001$. Na Figura 4.11 pode-se observar que para valores pequenos de ε , os dois neurônios Hindmarsh-Rose apresentam valores diferentes para as variáveis de estado tornando a distância média muito superior ao valor de tolerância como sendo 0,001, enquanto que para um valor de $\varepsilon = 0,95$, o valor da distância média entre as variáveis torna-se igual a zero. Portanto, observou-se sincronização de caos a partir deste valor, ocorrendo uma redução do espaço de fase do sistema para três dimensões. O espaço de fase do sistema mestre-escravo possui 6 dimensões de coordenadas x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 e z_2 e quando os sistemas estão sincronizados, a evolução do novo sistema acontece em uma dimensão menor, neste caso, dimensão igual a 3.

Considera-se a sincronização entre os neurônios mestre e escravo e sua relação com os expoentes de Lyapunov. Para que a sincronização ocorra entre os sistemas mestre e escravo, o comportamento dinâmico do sistema escravo deve convergir para o comportamento dinâmico

Figura 4.11: Intensidade de acoplamento pela média do módulo da diferença entre as trajetórias x_1 e x_2 para o sistema mestre-escravo e $I = 3,2$. Para $d_m = 0$, observa-se sincronização de caos.



FONTE: A autora.

do sistema mestre. Isto é possível se o máximo expoente de Lyapunov do sistema escravo for negativo. Para calcular numericamente os expoentes de Lyapunov do sistema mestre-escravo determina-se a matriz Jacobiana para o sistema de equações dada por

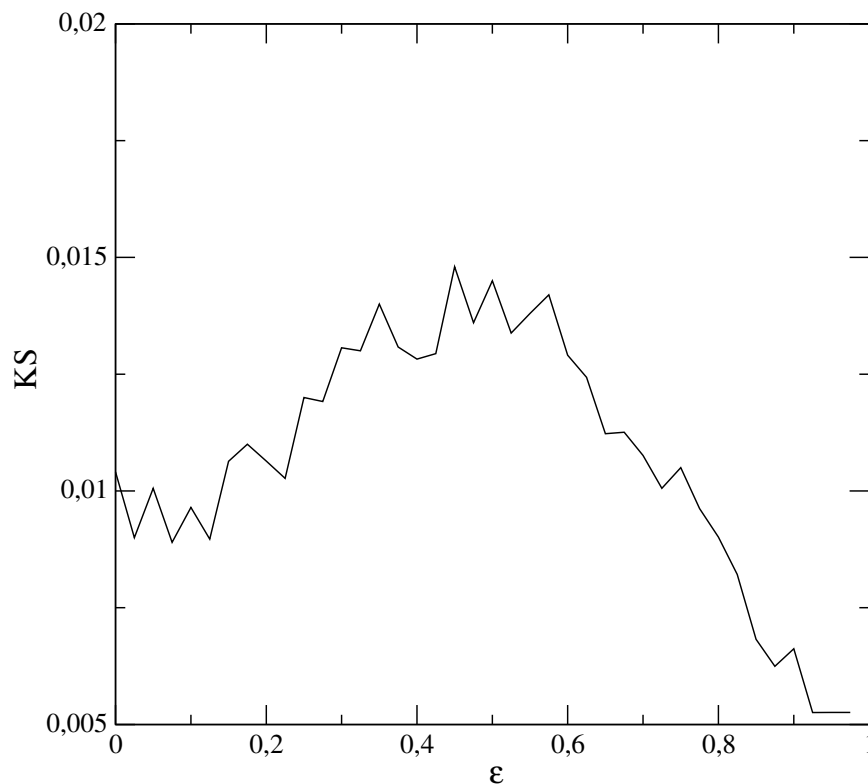
$$J = \begin{pmatrix} -3ax_1^2 + 2bx_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2dx_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rs & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & -3ax_2^2 + 2bx_2 - \varepsilon & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2dx_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rs & 0 & -r \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

O espectro de Lyapunov para o sistema de equações (4.7) é composto por seis expoentes. Um expoente $\lambda_k > 0$ implica uma solução associada a um atrator caótico.⁷⁸ Os

expoentes de Lyapunov caracterizam a estabilidade das soluções no modelo estudado. A estabilidade é uma característica importante no sistema no sentido da capacidade de retornar ao ponto de equilíbrio após perturbações infinitesimais.

Como foi mencionado anteriormente, uma medida útil neste estudo é a entropia de Kolmogorov-Sinai que considera a média da soma de todos os expoentes de Lyapunov positivos e refere-se ao grau de caos no sistema mestre-escravo aqui abordado. Calculou-se a entropia em função do acoplamento ε no intervalo $[0, 1]$ para o valor de corrente $I = 3,2$ exibida na Figura 4.12. Se $\varepsilon = 0,45$, a entropia Kolmogorov-Sinai alcança um valor máximo de 0,0148. A entropia responde com um aumento no seu valor e diminui o seu valor devido a configuração dos disparos no sistema. Pode-se verificar na Figura 4.12 que aumentando-se a intensidade do acoplamento, o valor da entropia Kolmogorov-Sinai aumenta e depois diminui para zero, indicando que o sistema entra em um regime de sincronização de caos.

Figura 4.12: Entropia KS em função da intensidade de acoplamento para o valor de corrente $I=3,2$. Entropia KS tende a zero, sincronização de caos.



4.6 Modelo de Hindmarsh e Rose com acoplamento não local

Um neurônio pode estar conectado com outro por uma conexão elétrica ou conexão química. Estes dois tipos de conexões são claramente distintos. A conexão elétrica é bidirecional, enquanto que a comunicação entre dois neurônios através de sinapses químicas é unidirecional, a partir de uma célula pré-sináptica para uma célula pós-sináptica. Outra diferença entre os dois tipos de conexão é o tempo de atraso na transmissão da informação. Acoplamentos elétricos podem ser considerados instantâneos, porém conexões químicas possuem um tempo de atraso, normalmente na faixa de alguns milissegundos. Apesar de acoplamentos elétricos desempenharem funções como ocasionar regimes síncronos em populações de neurônios,⁷⁹ a maior parte da comunicação neuronal acontece por meio de sinapses químicas. Pesquisas indicam que os acoplamentos elétricos e químicos possuem funções complementares na sincronização de redes de neurônios.⁸⁰

Optou-se por usar o acoplamento lei de potência modificado no estudo de uma rede de neurônios por meio do modelo Hindmarsh-Rose devido ao fato de existirem redes de interesse físico e biológico que são caracterizadas por acoplamento não local mediada por difusão química. O modelo de acoplamento não local mediado por difusão química foi proposto por Kuramoto.¹³ O trabalho de Viana e colaboradores¹⁵ considera uma rede de mapas de Rulkov com acoplamento de longo alcance mediado por difusão química para estudar a sincronização de *bursting*. A vantagem na escolha do modelo unidimensional com acoplamento lei de potência é que pode-se passar do acoplamento local para o global variando o termo de interação. Também foi utilizado um sinal externo de tempo periódico de modo a suprimir a sincronização.

Adotando como referencial o trabalho de Viana e colaboradores¹⁵ considerou-se o modelo Hindmarsh-Rose acoplado pela primeira equação, em relação a variável x . O acoplamento escolhido aqui é o acoplamento lei de potência modificado, que por sua vez foi o acoplamento utilizado para a rede de mapas logísticos acoplados. Procura-se verificar se o acoplamento com conexões de longo alcance é capaz de induzir ou aumentar a atividade de sincronização da rede de neurônios assim constituída.

A dinâmica da rede de N neurônios Hindmarsh-Rose acoplados é descrita por

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} (x_{i-1} + x_{i+1}), \\ \frac{dy_i}{dt} &= c - dx_i^2 - y_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= r(s(x_i - x_0) - z_i),\end{aligned}\tag{4.9}$$

com fator de normalização $\eta(\sigma) = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma}$, $M = \log_q(\frac{N}{2})$ e ε é a intensidade de acoplamento entre os neurônios.

Os neurônios ficam dispostos em uma estrutura de anel, onde o último neurônio da rede é considerado vizinho do primeiro. O tamanho N da rede dado pela expressão $N = 2q^M$ depende da escolha de q e de M . O número de neurônios na rede é um número par. Cada neurônio fica conectado com seus dois vizinhos próximos e ainda com neurônios à esquerda e à direita, e isto fica atribuído ao valor dado para M .

Dois parâmetros associados com a rede de neurônios Hindmarsh-Rose acoplados são o número de neurônios N e a intensidade de acoplamento ε . A dinâmica coletiva dos neurônios foi estudada variando-se o número de neurônios na rede. Nas simulações, considerou-se inicialmente uma rede de 16 neurônios com $q = 2$, $M = 3$, uma rede de 64 com $q = 2$, $M = 5$, uma rede de 256 com $q = 2$, $M = 7$ e outra rede com 512 neurônios com $q = 2$ e $M = 8$. Os parâmetros adotados para o modelo são $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $r = 0,006$, $s = 4$, $x_1 = -1,6$ e uma corrente constante $I = 3,2$, que resulta em um comportamento de disparos caóticos. A Figura 4.13 exibe a evolução temporal de dois neurônios da rede de 512 neurônios acoplados onde em (a) a intensidade do acoplamento é nula e em (b) a intensidade do acoplamento é igual a 0,15. Em (b) os dois neurônios apresentam sincronização nos disparos. Os resultados para a sincronização dos disparos surgem a partir da interação de propriedades intrínsecas dos neurônios individuais, das propriedades do acoplamento sináptico bem como da topologia da rede considerada.

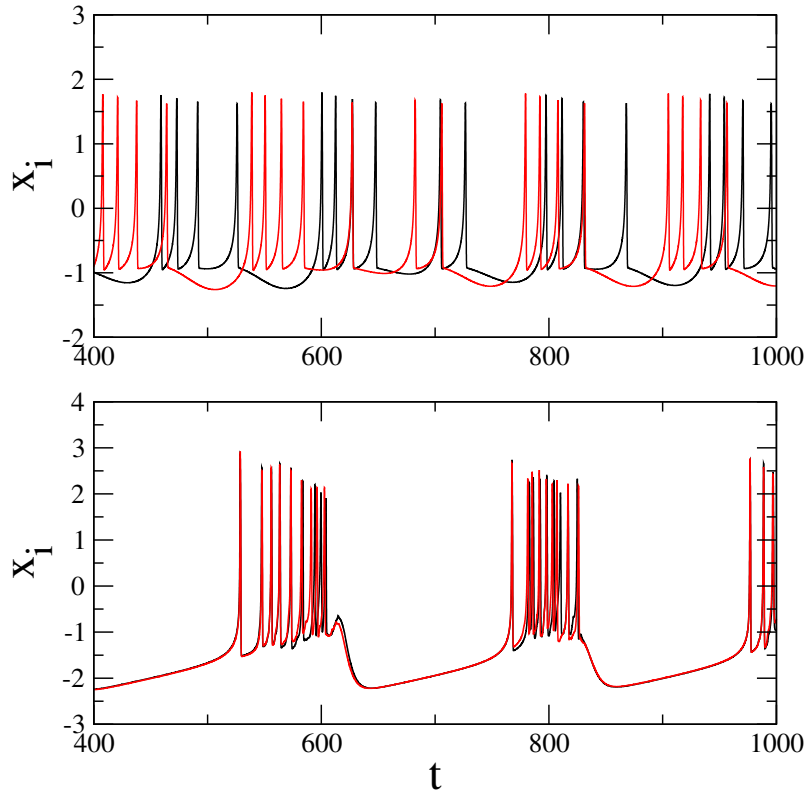
Para que a rede de neurônios acoplados exiba estado completamente sincronizado é necessário que $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$, $y_1(t) = y_2(t) = \dots = y_N(t)$, $z_1(t) = z_2(t) = \dots = z_N(t)$ seja solução das equações (4.9). A sincronização em uma rede de neurônios pode ser verificada por meio de diagnósticos numéricos. Para estudar quantitativamente a atividade da rede de neurônios Hindmarsh-Rose acoplados, fez-se uso do desvio padrão em relação a média $\langle x_i(t) \rangle$. O desvio padrão é definido como

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle)^2}{N-1}}. \quad (4.10)$$

A evolução da atividade média da rede é dada por $\langle x_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$, em um instante de tempo t . Pode-se afirmar que se na rede de neurônios, as variáveis $x_i(t)$ estiverem o mais próximo da sincronização, menor será o valor para o parâmetro $\delta(t)$. Também foi definido o desvio médio δ_m da variável $x_i(t)$ como sendo

$$\delta_m = \frac{1}{\Delta t} \sum \delta(t). \quad (4.11)$$

Figura 4.13: Evolução temporal da variável x_i para dois neurônios de uma rede com 512 neurônios e $\sigma = 0,1$, (a) $\varepsilon = 0$, os dois neurônios disparam em tempos diferentes e (b) $\varepsilon = 0,15$, *bursts* sincronizados.

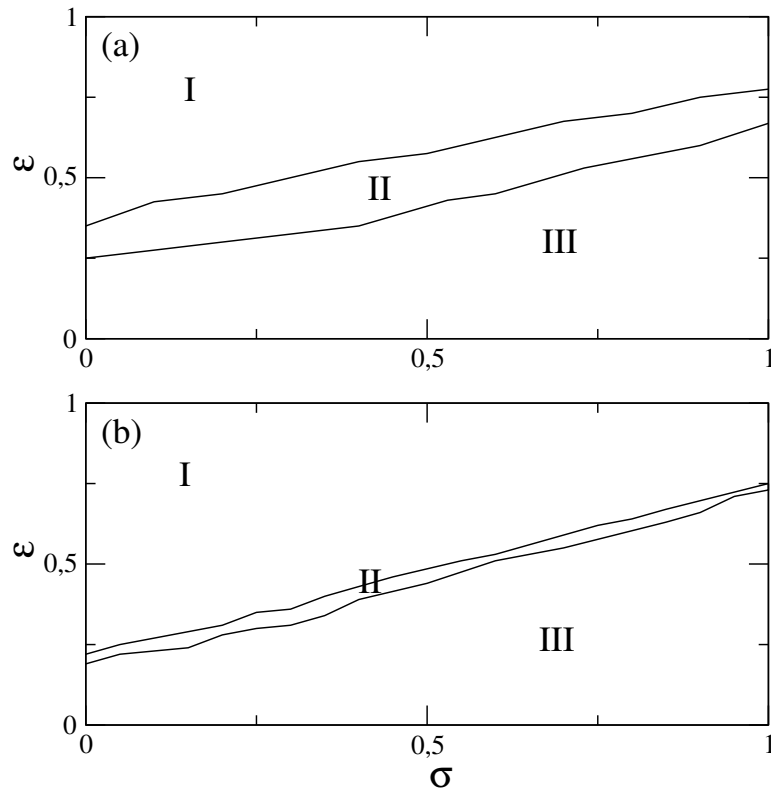


FONTE: A autora.

Quando os disparos de neurônios sincronizam, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_m = 0$.

O interesse neste trabalho concentra-se nos disparos sincronizados, para o qual os neurônios disparam aproximadamente no mesmo tempo. O problema é identificar no espaço de parâmetros as regiões onde existe sincronização de disparos e regiões onde não é possível a sincronização. A sincronização na rede de neurônios com acoplamento lei de potência modificado pode ser encontrada por meio de um pequeno valor para a intensidade de acoplamento. Na Figura 4.14 (a) para a rede de 16 neurônios e (b) para a rede de 64 neurônios, pode-se observar três regiões no espaço de parâmetros (ε, σ): na região I, os neurônios não disparam, na região II ocorre a sincronização de disparos e na região III não há sincronização dos disparos. De acordo com o estudo da sincronização no modelo de redes de mapas acoplados, a região de sincronização no modelo Hindmarsh-Rose com acoplamento lei de potência modificado também diminui com o tamanho da rede.

Figura 4.14: Regiões no espaço de parâmetros (ϵ , σ): região I, neurônios não disparam, região II, ocorre a sincronização de disparos e região III, não há sincronização dos disparos. Intensidade de acoplamento ϵ pelo alcance da interação σ , para dois tamanhos de rede, (a) $N = 16$, (b) $N = 64$.



FONTE: A autora.

Uma vez que um conjunto de neurônios pode exibir disparos sincronizados, a questão é a de como suprimir esta sincronização que exige uma importância em termos do controle dos ritmos neuronais indesejáveis. Algumas alternativas foram propostas como o controle dos ritmos indesejáveis por meio de técnicas de estimulação profunda em regiões do cérebro. Uma das alternativas é a adição de um sinal periódico externo de amplitude pequena com uma determinada frequência.^{76,82} Uma alternativa deste tipo foi considerada em redes sem escala⁸³ e também em redes com acoplamento lei de potência usual.¹⁶ Outra técnica de estimulação cerebral profunda foi proposta por Rosenblum e Pikovsky que consiste em um sinal de realimentação de tempo de atraso aplicado em áreas específicas do córtex cerebral.⁷⁶ Uma perturbação desse tipo, quando aplicada a um conjunto de oscilações de fase também foi mostrada em redes de neurônios de Rulkov com acoplamento global.⁸³ Batista e colaboradores investigaram a sincronização de *bursts* em uma rede de mapas acoplados não localmente¹⁶ e em uma rede sem escala,⁸³ em

particular, a sincronização de fase sobre as propriedades de acoplamento da rede bem como a supressão de sincronização com um sinal periódico aplicado.

Uma estimulação externa no cérebro foi estudada como uma aplicação para controlar ritmos patológicos. Uma intervenção deste tipo é viável experimentalmente pela inserção de microeletrodos no cérebro.⁸¹ Para suprimir os ritmos sincronizados no cérebro por meio de uma fonte externa, é necessário conhecer as faixas de parâmetros para os quais a sincronização ocorre. Ivanchenko e colaboradores fizeram uso da adição de um sinal externo periódico em um elemento selecionado da rede.⁸²

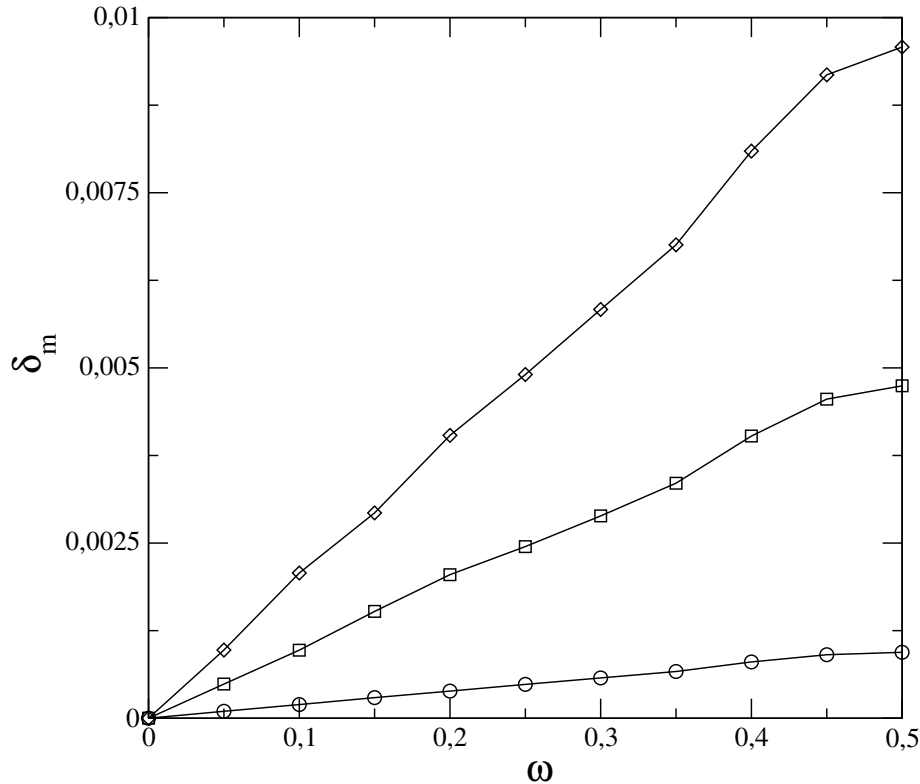
Dada a existência de disparos sincronizados na rede de Hindmarsh-Rose com acoplamento lei de potência modificado foi adicionado um sinal externo periódico no lado direito da primeira equação do modelo

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= y_i - ax_i^3 + bx_i^2 - z_i + I + \frac{\varepsilon}{\eta(\sigma)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\sigma} (x_{i-1} + x_{i+1}) + A \sin(\omega t), \\ \frac{dy_i}{dt} &= c - dx_i^2 - y_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= r(s(x_i - x_0) - z_i),\end{aligned}\tag{4.12}$$

com o objetivo de suprimir este estado. Na equação (4.12), A representa a amplitude do sinal externo e ω a frequência da amplitude. A corrente I é o parâmetro de controle do modelo e nas simulações foi utilizado $I = 3,2$. A amplitude do sinal e a frequência da amplitude foram ajustados no modelo e os demais parâmetros considerados fixos. Para valores da intensidade de acoplamento, a rede de neurônios não perturbada com $A = 0$ exibe sincronização dos disparos. A preocupação agora é sobre o efeito da amplitude e da frequência do sinal sobre a dinâmica de resposta do sistema Hindmarsh-Rose acoplado. Um neurônio que recebe a perturbação deve provocar uma mudança abrupta no campo médio percebido por todos os neurônios. Como resultado uma frequência com um pequeno valor produzirá um efeito na sincronização dos disparos dos neurônios na rede. Utilizando $\varepsilon = 0,5$ para a intensidade de acoplamento, $\sigma = 0,5$ para o alcance das interações procurou-se determinar um valor para a amplitude do sinal e um valor para a frequência da amplitude capaz de destruir o estado de disparos sincronizados na rede de 16 neurônios com $q = 2$ e $M = 3$.

A Figura 4.15 mostra que para três valores de amplitude 0,01, 0,05 e 0,1 utilizado nas simulações pode-se perceber que um pequeno aumento na amplitude do sinal em um neurônio da rede já produz um resultado desejado, que é suprimir a sincronização dos disparos. O efeito do acoplamento também é levado em consideração e neste caso, com o lei de potência modificado, as interações distantes contribuem menos para o acoplamento.

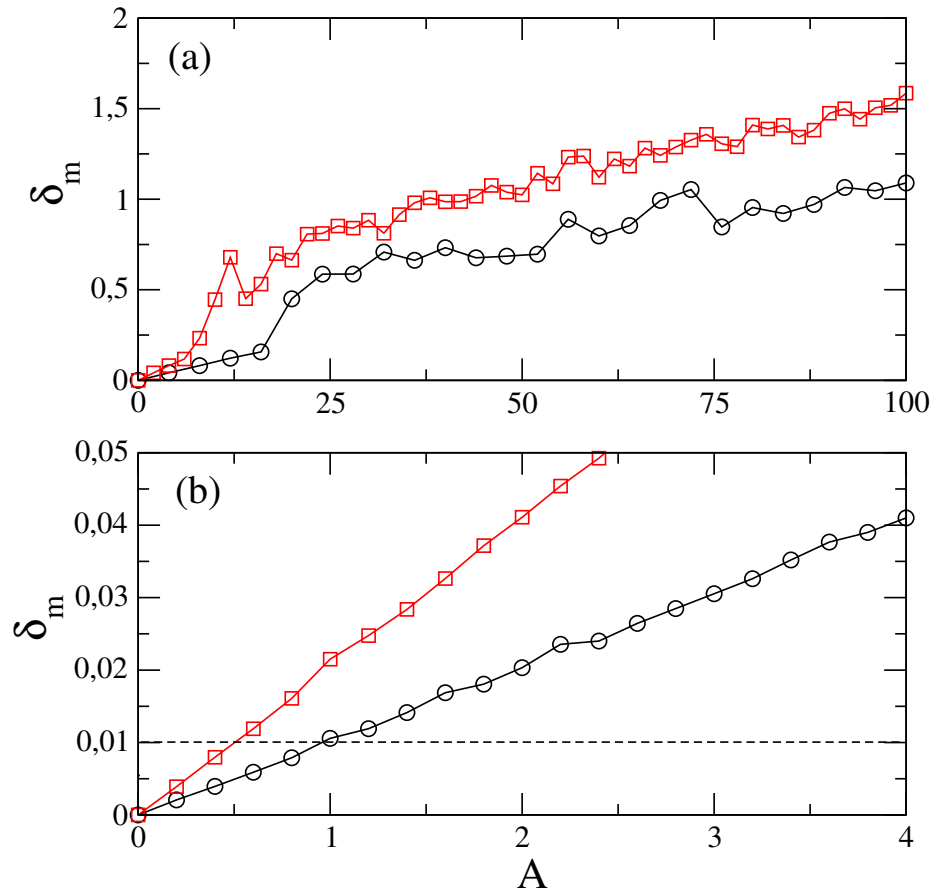
Figura 4.15: Frequência versus desvio médio para amplitude $A = 0,01$, curva com círculos, $A = 0,05$, curva com quadrados e $A = 0,1$, curva com losangos. Os dados correspondem aos parâmetros $\varepsilon = 0,5$ e $\sigma = 0,5$ para a rede de 16 neurônios.



FONTE: A autora.

Nas simulações foram usados dois valores para a frequência, $\omega = 0,05$ e $\omega = 0,1$ com as mesmas condições iniciais para controlar a supressão de sincronização. Pode-se verificar na Figura 4.16 tanto em (a) quanto em (b) que aumentando-se o valor da frequência é necessário um valor menor para a amplitude para que o modelo Hindmarsh-Rose com acoplamento lei de potência modificado saia do regime de sincronização de disparos. Os valores da amplitude foram determinados com um valor limite imposto para o desvio médio de 0,01. Se a amplitude e a frequência do sinal excederem um determinado valor, este efeito certamente fará com que os neurônios apresentem um comportamento não sincronizado na rede. Assim em situações em que a sincronização não é desejável, como por exemplo, em ritmos patológicos do cérebro, a aplicação de um sinal externo periódico pode tornar-se um procedimento de controle de tais ritmos anormais.^{76,81} O sinal externo periódico para suprimir a sincronização de disparos teve um efeito desejável, uma vez que a procura de valores para a amplitude e para a frequência

Figura 4.16: Amplitude versus desvio médio para frequência $\omega = 0,1$, curva em preto e $\omega = 0,05$, curva em vermelho. Os dados correspondem aos parâmetros $\varepsilon = 0,5$ e $\sigma = 0,5$ para a rede de 16 neurônios em (a) e (b).



FONTE: A autora.

estão de acordo com os resultados encontrados na literatura, como em trabalhos de.^{15,16}

5 Conclusão e trabalhos futuros

A sincronização é um fenômeno observado em sistemas acoplados e o modelo matemático frequentemente utilizado para este estudo são as redes de mapas acoplados das quais podem-se extrair resultados analíticos e numéricos. Redes de elementos acoplados podem exibir a sincronização completa que ocorre quando as variáveis de estado assumem o mesmo valor a cada passo de tempo. Este trabalho teve por objetivo o estudo da sincronização em redes de mapas acoplados e no modelo Hindmarsh-Rose de equações diferenciais com acoplamento lei de potência modificado onde a interação entre os elementos decai com a distância entre eles segundo uma lei de potência. Cada elemento da rede interagiu somente com alguns elementos diferente do acoplamento tipo lei de potência usual em que todos os elementos interagem com todos.

A hipótese do problema foi confirmada, uma vez que o acoplamento lei de potência modificado permitiu a sincronização e que as condições para a sincronização foram satisfeitas com base nos diagnósticos numéricos e no espectro de expoentes de Lyapunov, apresentando propriedades equivalentes ao do processo de sincronização do modelo de redes de mapas com acoplamento lei de potência usual. Os resultados obtidos para a sincronização sugerem que o acoplamento lei de potência modificado mostrou-se eficiente estando de acordo com os resultados encontrados na literatura. Por meio de diagnósticos foi possível determinar a região de sincronização no espaço de parâmetros. Os resultados indicaram que a região de sincronização diminuiu a medida que foi considerado um tamanho de rede maior. Foi observado que os parâmetros obtidos para a sincronização a partir de quantidades utilizadas em estudos já existentes colaboraram para confirmar a hipótese do problema em determinar a sincronização.

A sincronização nas redes com acoplamento lei de potência modificado foi demonstrada por meio do espectro de expoentes de Lyapunov que são indicadores da estabilidade do subespaço de sincronização. Considerando perturbações infinitesimais nas trajetórias sincronizadas foi possível encontrar uma expressão analítica para o espectro de expoentes de Lyapunov para a rede de mapas com acoplamento lei de potência modificado visto que existe a expressão analítica para o acoplamento lei de potência usual. A expressão analítica também

permitiu determinar uma fórmula para obter o valor mínimo e o valor máximo do parâmetro de acoplamento para observar a sincronização. Grandezas como a dimensão de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai foram obtidas a partir do espectro de expoentes de Lyapunov. A dimensão de Lyapunov permitiu a observação de sincronização e supressão de caos para determinados valores do parâmetro de acoplamento. A entropia de Kolmogorov-Sinai forneceu a taxa média de aumento de incerteza nas redes sujeitas a pequenas perturbações.

A análise de sincronização de dois ou mais neurônios acoplados também foi investigada. O modelo Hindmarsh-Rose de três equações diferenciais possibilitou determinar a sincronização de disparos de neurônios porque este apresenta características similares aos disparos de neurônios biológicos. Neste trabalho foi mostrado como dois neurônios com acoplamento unidirecional podem ter os disparos sincronizados para um conjunto de valores do parâmetro de acoplamento. Com relação a rede de neurônios com acoplamento lei de potência modificado foi mostrada a sincronização de disparos no espaço de parâmetros para determinados valores da intensidade de acoplamento e alcance de interação. A rede com este tipo de acoplamento tornou-se um diferencial por revelar comportamentos dinâmicos de um conjunto de neurônios como a sincronização de disparos. No entanto, em situações em que a sincronização não é desejável, como em ritmos patológicos do cérebro, foi utilizado um sinal externo periódico no potencial de membrana do neurônio fornecendo valores para a supressão de sincronização. A contribuição dada com este trabalho foi a de demonstrar a sincronização por meio do acoplamento lei de potência modificado e uma aplicação no modelo Hindmarsh-Rose.

Em trabalhos futuros pretende-se determinar medidas, relacionar grandezas, investigar mais algumas características que foram apontadas para aperfeiçoar os resultados obtidos. Outra sugestão para pesquisa é determinar o espectro de expoentes de Lyapunov de redes de neurônios com acoplamento lei de potência modificado utilizando o modelo Hindmarsh-Rose. Determinar o espectro de expoentes de Lyapunov constitui a ferramenta mais comum para caracterizar se o sistema apresenta caos ou não. Pode-se também calcular a entropia de Kolmogorov-Sinai a partir do espectro de expoentes de Lyapunov, ampliando desta forma o estudo que foi realizado no modelo Hindmarsh-Rose mestre-escravo.

Referências Bibliográficas

- 1 CRUTCHFIELD, J. P.; KANEKO, K. Directions in chaos. **World Scientific**, Singapore, v. 1, p. 272-348, 1987.
- 2 SHIBATA, T.; KANEKO, K. Coupled Map Gas: structure formation and dynamics of interacting mobile elements with internal dynamics. **Physica D**, v. 181, p. 197-214, 2003.
- 3 PINTO, S. E. de S.; CALDAS, I. L.; BATISTA, A. M.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Transversal dynamics of a non-locally-coupled map lattice. **Physical Review E**, v. 76, n. 017202, 2007.
- 4 VIANA, R. L.; GREBOGI, C.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; BATISTA, A. M.; KURTHS, J. Bubbling bifurcations: loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. **Physica D**, v. 206, p. 94-108, 2005.
- 5 LEMMAITRE, A.; CHATÉ, H. Phase ordering and onset of collective behavior in chaotic coupled maps lattices. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 6, p. 1140-1143, 1999.
- 6 PIKOVSKY, A.; ROSEMBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences**. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2001.
- 7 JAMPA, M. P. K.; SONAWANE, A. R.; GADE, P. M.; SINHA, S. Synchronization in a network of model neurons. **Physical Review E**, v. 75, n. 026215, 2007.
- 8 BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. **Physics Reports**, v. 424, p. 175-308, 2006.
- 9 SINHA, S. Random coupling of chaotic maps to spatiotemporal synchronization. **Physical Review E**, v. 66, n. 016209, 2002.
- 10 SINHA, S.; BISWAS, D.; AZAM, M.; LAWANDE, S. V. Local-to-global coupling in chaotic maps. **Physical Review A**, v. 46, n. 10, p. 6241-6246, 1992.
- 11 ANTENEODO, C.; PINTO, S. E. de S.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Analytical results for coupled-map lattices with long-ranges interactions. **Physical Review E**, v. 68, n. 045202, 2003.
- 12 ANTENEODO, C.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Chaos synchronization in long-range coupled map lattices. **Physics Letters A**, n. 326, p. 227-233, 2004.
- 13 KURAMOTO, Y. Scaling Behavior of Turbulent Oscillators with Non-Local Interaction. **Progress Theoretical and Experimental Physics**, v. 94, n. 3, p. 321-330, 1995.
- 14 KURAMOTO, Y.; NAKAO, H. Origin of power-law spatial correlations in distributed oscillators and maps with nonlocal coupling. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 23, p. 4352-4355, 1996.

- 15 VIANA, R. L.; BATISTA, A. M.; BATISTA, C. A. S.; PONTES, J. C. A.; SILVA, F. A. dos S.; LOPES, S. R. Bursting synchronization in networks with long-range coupling mediated by a diffusing chemical substance. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat** v. 17, p. 2924-2942, 2012.
- 16 PONTES, J. C. A. de; VIANA, R. L.; LOPES, S. R.; BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M. Bursting synchronization in non-locally coupled networks. **Physica A**, v. 387, p. 4417-4428, 2008.
- 17 GRAY, C. M. Synchronous oscillations in neuronal systems: Mechanisms and functions. **Journal of Computational Neuroscience**, v. 1, p. 11-38, 1994.
- 18 SHEN, YU; ZHONGHUI, HOU; XIN, HOUWEN. Transition to burst synchronization in coupled neuron networks. **Physical Review E**, v.77, n. 031920, 2008.
- 19 HODGKIN, A. L., HUXLEY, A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. **Journal of Physiology**, v. 117, p. 500-544, 1952d.
- 20 FITZHUGH, R. Impulses and physiological states in the theoretical models of nerve membrane. **Biophysics Journal**, v. 1, p. 445-465, 1961.
- 21 HINDMARSH, J. L., ROSE, R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. **Nature**, v. 296, p. 162-164, 1982.
- 22 HINDMARSH, J. L.; ROSE, R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. **Proceedings of the Royal Society B**, v. 221, n. 1222, p. 87-102, 1984.
- 23 OUD, W. T.; TYUKIN, I. Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and Rose neurons: Passivity-based approach. **In Proc IFAC NOLCOS**, Stuttgart, Germany, p. 1-3, 2004.
- 24 BELYKH, I.; LANGE, DE E.; HASLER, M. Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 13, p. 188101(1)-188101(4), 2005.
- 25 BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear maps lattices with power-law coupling, **Physical Review E**, v. 65, n. 056209, 2002.
- 26 BATISTA, A. M; VIANA, R. L. Kolmogorov-Sinai entropy for locally coupled piecewise linear maps. **Physica A**, v. 308, p. 125-134, 2002.
- 27 TESSONE, C. J.; CECINI, M.; TORCINI, A. Synchronization of Extended Chaotic Systems with Long-Range Interactions: An Analogy to Lévy-Flight Spreading of Epidemics. **Physical Review Letters**, v. 97, n. 224101, 2006.
- 28 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an Introduction to Dynamical Systems**. New York: Springer-Verlag, 1996.
- 29 OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. New York: Cambridge University Press, 1993.

- 30 VERHULST, P. F. **Tratite Élémentaire des Fonctions Elliptique**. Bruxelles: M Hayes, 1841.
- 31 SZMOSKI, R. M. **Análise da dinâmica de partículas brownianas interagentes a partir de redes de mapas acoplados**. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2009.
- 32 VIANA, R. L.; GREBOGI, C.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; BATISTA, A. M.; KURTHS, J. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems. **Physical Review E**, v. 68, n. 067204, 2003.
- 33 KURAMOTO, Y. **Chemical Oscillations, waves and turbulence**. Spring-Verlag, Berlin, 1984.
- 34 WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov from a times-series. **Physica D**, Amsterdam, v. 16, p. 285-317, 1985.
- 35 PRESS, H. W.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes in C: The art of scientific computing**. Cambridge University Press, Programas Copyright, 1992.
- 36 KANEKO, K. **Theory and Applications of Coupled Map Lattices**. Great Britain: John Wiley e Sons, 1993.
- 37 KUZNETSOV, S. Critical behavior of one-dimensional chains. **Pisma Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki**, v. 9, p. 9-98, 1983.
- 38 KANEKO, K. Globally coupled circle maps. **Physica D**, v. 54, p. 5-19, 1991.
- 39 HERRERA, D. S.; MARTIN, J. S. Analytical solutions of weakly coupled map lattice using recurrence relations. **Physics Letters A**, v. 373, p. 2404-2409, 2009.
- 40 BONETTI, R. C.; BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Short-time memories in a network with randomly distributed connections. **Physical Review E**, v. 78, n. 037102, 2008.
- 41 BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Mode locking in small-world network of coupled circle maps. **Physica A**, v. 322, p. 118-128, 2003.
- 42 BARABÁSI, A. L. Scale-free networks: A decade and beyond. **Science**, v.325, p.412-413, 2009.
- 43 KANEKO, K. Lyapunov analysis information flow in coupled maps lattices. **Progress of theoretical Physics**, v. 23, 1986.
- 44 ISOLA, S.; POLITI, A.; RUFFO, S.; TORCINI, A. Lyapunov spectra of coupled map lattice. **Physics Letters A**, v. 143, n. 365, 1990.
- 45 BATISTA, A. M.; VIANA, L. R. Lyapunov exponents of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling. **Physics Letters A**, v. 286, n. 134, 2001.
- 46 GRAY, R. M. **Toeplitz and Circulant Matrices: a review**. [S.1] Stanford University, 2006.

- 47 DAVIS, P. J. **Circulant Matrices**. Wiley-Interscience, New York, 1979.
- 48 BATISTA, A. M. **Memórias, Espectro de Lyapunov e sincronização de Sistemas Acoplados**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.
- 49 CENCINI, M.; TORCINI, A. Nonlinearly driven transverse synchronization in coupled chaotic systems. **Physica D**, v. 208, p. 191-208, 2005.
- 50 PECORA, L. M.; CARROL, T. L. Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 10, p. 2109-2112, 1998.
- 51 SZMOSKI, R. M.; PINTO, S. E. de S.; VAN KAN, M.T.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Synchronization and suppression of chaos in non-locally map lattices. **Pramana**, v. 73, p. 999-1009, 2009.
- 52 LIND, P. G.; GALLAS, J. A. C.; HERRMANN, H. J.; AUSLOOS, M.; DIRICK, M. **The Logistic Map and the Route to Chaos: From the Beginnings to Modern Applications**. Springer Heidelberg, 2005.
- 53 PESIN, Y. B. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. **Russian Mathematical Surveys**, v. 32, p. 55-114, 1977.
- 54 RUELLE, D. **Chaotic evolution and strange attractors**. (Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- 55 IBARZ, I.; CASADO, J. M.; SANJUÁN, M. A. F. Map-based models in neuronal dynamics, **Physics Reports**, v. 501, p. 1-74, 2011.
- 56 IZHIKEVICH, E. M.; DESAI, N. S.; WALCOTT, E. C.; HOPENSTEADT, F. C. Bursts as a unit of neural information: selective communication via resonance. **Trends in Neurosci**, v.26, p. 161-167, 2003.
- 57 RULKOV, N. F. Regularization of synchronized chaotic bursts. **Physical Review E**, v. 86, n. 183, 2001.
- 58 RULKOV, N. F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. **Physical Review E**, v. 65, n. 041922, 2002.
- 59 CHIALVO, D. R. Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 5, p. 461-479, 1995.
- 60 KANDEL, E. R.; SCHWARTZ, J. H.; JESSEL, T. M. **Principles of Neural Science**. 3 ed., Appleton Lange, Connecticut, 1991.
- 61 LEVADA, M. M. O., WALCIR, J., PIVESSO, M. S. G. **Apontamentos teóricos de Citologia, Histologia e Embriologia**, São Paulo: Catálise Editora, 1996.
- 62 KOCH, C. **Biophysics of computation: information processing in single neurons**. Oxford University Press, 1999.
- 63 LIMAN, J. E. Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable. **Trends in Neuroscience**, v. 20, p. 38-43, 1997.

- 64 THOMPSON, S. H.; SMITH, S. J. Depolarizing afterpotentials and burst production in molluscan pacemaker neurones. **J. Neurophysiol.**, New York, v. 39, p. 153-161, 1976.
- 65 NAGUMO, J.; ARIMOTO, S.; YOSHIKAWA, S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. **Proceeding of Institute of Radio Engineers**, v. 50, p. 2061-2070, 1962.
- 66 MAINIERI, M. S. **Sincronização em Neurônios de Hindmarsh-Rose**. Tese-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- 67 STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**, 1994.
- 68 SEJNOWSKI, T. J. Time for a new neural code? **Nature**, v. 376, p. 21-22, 1995.
- 69 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 8, p. 821-825, 1990.
- 70 PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M. G.; OSIPOV, G. V.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. **Physica D**, v. 104, p. 219-238, 1997.
- 71 ROSENBLUM, M. G.; PIKOWSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 11, p. 1804-1807, 1996.
- 72 BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, p. 1-101, 2002.
- 73 IZHIKEVICH, E. M. **Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting**. v. único, 1. ed. Boston: The MIT Press, 2007. 457 p.
- 74 STERIADE, M.; MCCORMICK, D. A.; SEJNOWSKI, T. Thalamocortical Oscillations in the Sleeping and Aroused Brain. **Science**, v. 262, n. 5134, p. 679-685, 1993.
- 75 ROSENBLUM, M. G.; PIKOWSKY, A. S.; KURTHS, J.; SCHFER, C.; TASS, P. Phase synchronization: from theory to data analysis. **Handbook of Biological Physics, Neuro-informatics and Neural Modeling**, v.4, p. 279-321, Elsevier Science, Amsterdam, 2001.
- 76 ROSENBLUM, M. G.; PIKOWSKY, A. S. Delayed feedback control of collective synchrony: An approach suppression of pathological brain rhythms. **Physical Review E**, v. 70, n. 041904, p. 1-11, 2004a.
- 77 ROSENBLUM, M. G.; PIKOWSKY, A. S. Controlling synchronization in an ensemble of globally coupled oscillators. **Physical Review Letters**, v.92, n. 114102, p. 1-4, 2004b.
- 78 ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Rev. Mod. Phys.**, Minneapolis, v.57, p. 617-656, 1985.
- 79 GIBSON, J. R.; BEIERLEIN, M.; CONNORS, B. W. Two networks of electrically coupled inhibitory neurons in neocortex. **Nature**, v.402, p. 75-79, 1999.
- 80 KOPELL, N.; ERMENTROUT, M. Chemical e electrical synapses perform complementary roles in the synchronization of interneuronal networks. **Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America**, v.101, p. 15482-15487, 2004.

- 81 BENABID, A. L.; POLLAK, P.; GERVASON, C.; HOFFMANN, D.; GAO, D. M.; PERRET, J. E.; ROUGEMONT, J. de. Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus. **The Lancet**, v. 337, p. 403-406, 1991.
- 82 IVANCHENKO, M. V.; OSIPOV, G. V.; SHALFEEV, V. D.; KURTHS, J. Phase synchronization in ensembles of bursting oscillators. **Physical Review Letters**, v. 93, n. 134101, 2004.
- 83 BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PONTES, J. C. A. de; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Bursting synchronization in scale-free networks. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 41, p. 2220-2225, 2009.