

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO - FÍSICA

ROMEU MIQUÉIAS SZMOSKI

**INTRODUÇÃO DE QUANTIDADES EFETIVAS PARA O
ESTUDO DA SINCRONIZAÇÃO E CRIPTOGRAFIA
BASEADA EM SISTEMAS NÃO-SÍNCRONOS**

PONTA GROSSA
2013

ROMEU MIQUÉIAS SZMOSKI

**INTRODUÇÃO DE QUANTIDADES EFETIVAS PARA O
ESTUDO DA SINCRONIZAÇÃO E CRIPTOGRAFIA
BASEADA EM SISTEMAS NÃO-SÍNCRONOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Dr. Sandro Ely de Souza Pinto.

PONTA GROSSA
2013

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor Tratamento da Informação BICEN/UEPG

S998i Szmoski, Romeu Miquéias
Introdução de quantidades efetivas para o estudo da sincronização
e criptografia baseada em sistemas não-síncronos./ Romeu Miquéias
Szmoski. Ponta Grossa, 2013.
144 f.

Tese (Doutorado em Ciências – Área de Concentração : Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto.

1. Sincronização. 2. Redes de mapas acoplados. 3. Expoentes de
Lyapunoy efetivos. 4. Entropia de transferência. I. Pinto, Sandro Ely de
Souza.. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Doutorado em
Ciências. III. T.

CDD : 530

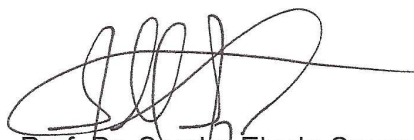
TERMO DE APROVAÇÃO

ROMEU MIQUÉAS SZMOSKI

“INTRODUÇÃO DE QUANTIDADES EFETIVAS PARA O ESTUDO DA SINCRONIZAÇÃO E CRIPTOGRAFIA BASEADA EM SISTEMAS NÃO-SÍNCRONOS”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



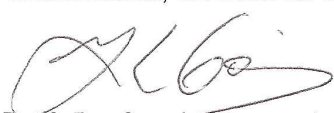
Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto
Departamento de Física - UEPG/PR



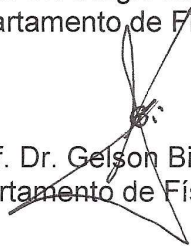
Prof. Dr. Adriano Doff Sotta Gomes
Coordenação de Física - UTFPR/PR



Prof. Dr. Rosângela Menegotto Costa
Instituto de Matemática, Estatística e Física - FURG/RS



Prof. Dr. Sergio Leonardo Gómez
Departamento de Física - UEPG/PR



Prof. Dr. Gelson Biscaia de Souza
Departamento de Física - UEPG/PR

Ponta Grossa, 31 de janeiro de 2013

*Dedico este trabalho aos meus pais e à minha esposa.
À eles meu carinho e profundo reconhecimento pelo
apoio recebido.*

Agradecimentos

A Deus pela vida e presença em todos os momentos.

Ao prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto pela sabedoria e amizade compartilhadas ao longo da orientação e pela confiança depositada em mim.

À minha esposa Cleisiara pela compreensão e participação em todos os momentos.

Aos meus pais e demais familiares pelo apoio, orações e incentivo constante.

A todos os amigos e, de modo especial ao amigo Rodrigo Frehse Pereira que muito me ajudou na realização deste.

Ao prof. Dr. Murilo da Silva Baptista pela colaboração e participação principalmente na última parte do trabalho.

A todos os professores do programa de Pós-Graduação em Ciências e do Departamento de Física da UEPG pela participação e colaboração nos conhecimentos adquiridos.

Aos membros da banca de qualificação, pré-defesa e defesa pelas valiosas correções e sugestões.

À Josecler Lepinski, pela competência e boa vontade em relação aos procedimentos burocráticos.

À CAPES, Fundação Araucária e à UEPG.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“Amei a sabedoria mais do que a saúde e a beleza, e resolvi tê-la como luz, porque o brilho dela nunca se apaga (...). Não vou esconder sua riqueza, porque ela é um tesouro inesgotável para os homens. Aqueles que a adquirem, atraem a amizade de Deus, porque são recomendados pelo dom da instrução dela” (Sb 7,10-12).

Resumo

A sincronização é um comportamento dinâmico exibido por uma ampla variedade de sistemas naturais tais como neurônios, vaga-lumes e junções Josephson. Ela é definida como um ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido a uma fraca interação entre eles, e é estudada usando diferentes modelos matemáticos tais como as redes de mapas acoplados (RMAs). Em uma RMA, o processo de sincronização representa uma evolução conjunta entre todas as variáveis de estados. Este processo é geralmente investigado com base nos expoentes de Lyapunov condicionais. No entanto, para redes com topologia variável tais expoentes não são facilmente determinados. Neste trabalho propomos novas quantidades para estudar a sincronização nestas redes. Estas quantidades são definidas como médias ponderadas sobre todas as topologias possíveis e, no caso em que a topologia é constante, equivalem aos expoentes de Lyapunov usuais. Encontramos uma expressão analítica para as quantidades efetivas para o caso em que a topologia é invariante sobre translação na rede e demonstramos que um conjunto de observações sobre um intervalo curto de tempo pode ser usado para prever o comportamento da rede a longo prazo. Também verificamos que, se a rede possui uma estrutura constante e homogênea, as quantidades efetivas podem ser obtidas considerando a projeção sobre os autovetores associados a esta estrutura. Mostramos a eficácia das quantidades efetivas usando-as para construir uma rede com topologia constante que exibe as mesmas propriedades de sincronização da rede com topologia variável. Por último apresentamos um criptossistema para sistemas de comunicação que é baseado em duas réplicas de redes sincronizadas cujos elementos são não-síncronos. Investigamos este sistema quanto ao tempo de operação, a robustez e a segurança contra intrusos. Nossos resultados sugerem que ele é seguro e eficiente para uma amplo intervalo de parâmetros.

Palavras-chave: sincronização, redes de mapas acoplados, expoentes de Lyapunov efetivos, entropia de transferência.

Abstract

Synchronization is a dynamical behavior exhibited by a wide range of systems. Neurons, firefly and Josephson junctions are examples of these systems. It is defined as an adjustment of rhythms of oscillating objects due to weak interaction between them, and it is studied using different mathematical models including the coupled map lattices (CMLs). In CML the synchronization corresponds to process in which all state variables become identical at the same instant. Usually we study the CML synchronization by calculating the conditional Lyapunov exponents. However, if the coupling or network topology is time-varying, this exponents are not readily determined. In this work we propose new quantities to study the synchronization in these CMLs. These quantities are defined as weighted averages over all possible topologies and, if the topology is constant, they are equivalent to the usual Lyapunov exponents. We find an analytical expression for the effective quantities when the topology is invariant over translation on the network and demonstrate that an ensemble of short time observations can be used to predict the long-term behavior of the lattice. Also we point that, if network has constant and homogeneous structure, the effective quantities correspond to the projection on the eigenvectors associated with this structure. We show the availability of effective quantities using them to build a lattice with constant topology that exhibits the same synchronization critical properties of the lattice with time-varying topology. Finally, we present a cryptosystem for communication systems based on two replica synchronized networks whose elements are not synchronous. We investigate it as to operation time, robustness and security against intruders. Our results suggest that it is safe and efficient for a wide range of parameters.

Keywords: synchronization, coupled map lattices, effective Lyapunov exponents, transfer entropy.

Lista de Figuras

2.1	Sistema de dois pêndulo	22
2.2	Dois regimes de sincronização de um sistema composto por dois pêndulos . . .	23
2.3	Diagrama de bifurcação do mapa da tenda	25
2.4	Mapas de primeiro retorno e partições do atrator do mapa da tenda	26
2.5	Atrator de um sistema composto por dois mapas da tenda acoplado	27
3.1	Duas representações de uma rede de polinização inseto-planta	31
3.2	Redes com acoplamento local e global	33
3.3	Rede das conexões das áreas corticais do gato	34
3.4	Coeficiente de aglomeração e comprimento de caminho médio de uma rede <i>small-world</i>	36
3.5	Rede unidimensional periódica com acoplamento do tipo lei de potência	40
3.6	Rede unidimensional cujas conexões dependem da distância intersticial	41
4.1	Espaço de fase e subespaço de sincronização para dois mapas acoplados	45
4.2	Decaimento dos autovalores em função do produto de matrizes	51
5.1	Diferença entre os expoentes de Lyapunov em função de α	62
5.2	Diferença entre os expoentes de Lyapunov em função do tamanho da rede. . . .	62
5.3	Domínio de sincronização no espaço de parâmetros.	63
5.4	Representação pictórica dos elementos da matriz $\hat{\mathbf{G}}$	67
5.5	Convergência de trajetórias típicas da rede variável e do sistema efetivo. . . .	67
5.6	Tempo de sincronização médio em função de α	68
5.7	Tempo de sincronização médio em função de α	71
5.8	Área de sincronização no espaço dos parâmetros em função do tamanho da rede.	73
5.9	Tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos e $k = 1$.	75

5.10	Tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos e $k = 0$.	75
5.11	Tempo de sincronização médio em função de p em uma rede substrato não-circulante.	76
5.12	Rede substrato e matriz de adjacência não circulante.	78
6.1	Duas réplicas de redes acopladas	81
6.2	Evolução temporal do erro de sincronização médio entre duas réplicas de redes	85
6.3	Tempo de sincronização entre duas réplicas de redes em função de ε	87
6.4	Representação esquemática do acoplamento <i>internetwork</i> periódico	88
6.5	Fronteira de sincronização <i>internetwork</i> no espaço dos parâmetros.	91
7.1	Diagrama esquemático de um sistema de comunicação.	97
7.2	Entropia de transferência em função do parâmetro de acoplamento	99
7.3	Conecções entre os sítios das redes emissora e receptora no primeiro estágio . .	101
7.4	Sistema de comunicação no segundo estágio de funcionamento.	103
7.5	Tempo de relaxação médio em função do parâmetro de acoplamento <i>intranetwork</i> .	104
7.6	Tempo de relaxação médio em função do tamanho das mensagens.	105
7.7	Tempo de relaxação médio em função do produto $N\varepsilon$	105
7.8	Máximo tempo de relaxação médio em função do produto $N\varepsilon$	106
7.9	Média da razão sinal ruído em função do acoplamento e amplitude do ruído. . .	107
7.10	Exemplo de transmissão de uma mensagem de 21 <i>bits</i>	108
7.11	Evolução temporal das variáveis binárias da rede emissora e intrusa	112
7.12	Evolução temporal do padrão binário da convertido em número decimal.	113

Lista de símbolos

δ_{ij}	Delta de Kronecker
ε	Intensidade de acoplamento <i>intranetwork</i>
γ	Intensidade de acoplamento <i>internetwork</i>
θ	Autovalor efetivo
$\hat{\lambda}$	Expoente de Lyapunov efetivo
λ_u	Expoente de Lyapunov do mapa desacoplado
$\lambda_{\perp}$	Maior expoente de Lyapunov transversal a $\mathcal{S}$
ρ	Erro de sincronização médio entre variáveis equivalentes
τ_s	Tempo de sincronização
τ_R	Tempo de relaxação
d	Distância ao subespaço de sincronização
p_{ij}	probabilidade de conexão entre os sítios i e j
r_{ij}	Menor distância entre os sítios i e j
$\mathcal{S}$	Subespaço de sincronização
$\mathbf{G}$	Matriz de acoplamento
$\hat{\mathbf{G}}$	Matriz de acoplamento efetiva
$\mathbf{G}_{med}$	Matriz de acoplamento auxiliar
$\mathbf{T}$	Matriz de topologia
$\mathbb{I}$	Matriz identidade
$\mathbf{Q}$	Matriz produto das matrizes de acoplamento
$\mathbf{D}$	Matriz jacobiana
χ	Autovalor da matriz $\mathbf{Q}$
Γ	Autovalor da matriz $\mathbf{G}$
$diam(\mathbf{Q})$	Diâmetro de Hajnal da matriz $\mathbf{Q}$
Λ	Maior expoente de Lyapunov de uma rede isolada
Θ	Função de Heaviside

Lista de abreviaturas e siglas

RMA	Rede de mapas acoplados
RC	Computação de reservatório
TE	Entropia de transferência
BER	Razão sinal-ruído

Sumário

1	Introdução	16
2	A Sincronização	20
2.1	História e Definição de Sincronização	20
2.2	Tipos de Sincronização	22
2.3	Os Sistemas Dinâmicos e a Sincronização	23
2.4	Comunicação <i>via</i> Sincronização de Caos	27
3	As Redes de Mapas Acoplados	30
3.1	Definição e representação de uma rede	30
3.2	Modelos de Redes	32
3.3	Propriedades das redes	34
3.4	Redes com conexões variáveis no tempo	37
3.5	As Redes de Mapas Acoplados	38
3.5.1	Rede com acoplamento do tipo lei de potência	39
3.5.2	Acoplamento com probabilidade de conexão decaindo com a distância	40
4	A Sincronização em Redes de Mapas Acoplados	43
4.1	A sincronização completa em redes de mapas	43
4.2	Diagnósticos de Sincronização	44
4.3	Os expoentes de Lyapunov	46
4.4	Os expoentes de Lyapunov efetivos	48
4.5	Cálculo dos autovalores efetivos: caso I	52

4.6	Cálculo dos autovalores efetivos: caso II	55
5	Sistema Efetivo para Redes com Topologia Variável no Tempo	59
5.1	O Modelo Auxiliar	59
5.2	A Construção de Sistemas Efetivos	64
5.2.1	Caso I: invariância translacional sobre a topologia	65
5.2.2	Caso II: invariância da probabilidade de conexão	68
5.2.3	Caso III: probabilidade de conexão uniforme	73
6	Sincronização em réplicas de redes com elementos não-síncronos	79
6.1	As redes	79
6.2	A análise linear	81
6.3	Parâmetros críticos de sincronização	84
6.4	Acoplamento periódico	87
6.5	Quantidades efetivas para as réplicas acopladas periodicamente	90
6.6	Sistema efetivo para as réplicas acopladas periodicamente	92
6.7	O sistema efetivo reduzido	94
7	Criptografia baseada em redes sincronizadas com elementos não-síncronos	96
7.1	Sistemas de comunicação com caos	97
7.2	Descrição do sistema de comunicação	100
7.2.1	Estágio pré-sincronização	101
7.2.2	Estágio pós sincronização	101
7.2.3	Efeito do ruído	105
7.3	Exemplo	106
7.4	Melhorando a eficiência e segurança	108
7.4.1	Estabelecendo o reservatório	111
7.4.2	Codificando e lendo uma mensagem	113

8	Conclusões	116
8.1	Considerações Finais	116
8.2	Trabalhos futuros	118
	Referências Bibliográficas	120
	Apêndice A – Prova da Convergência	128
	Anexo A – Artigo publicado	132
	Anexo B – Artigo aceito	139

1 Introdução

Na natureza observamos uma grande variedade de sistemas cujos elementos interagem uns com os outros. Estes sistemas definem conjuntos representativos de uma estrutura de rede, cujos os nós correspondem aos componentes individuais e as arestas à interação existente entre eles. A dinâmica destes sistemas pode ser estudada através de diferentes modelos matemáticos, entre eles as redes de mapas acoplados. Estes são sistemas dinâmicos cujas as variáveis tempo e espaço são discretas e as variáveis de estado são contínuas.

As redes de mapas acoplados surgiram no final do século passado como modelos para investigar fenômenos espaço-temporais de sistemas espacialmente estendidos. Elas foram propostas simultânea e independentemente por Kapral,¹ Kaneko,² Kuznetsov,³ Fujisaka e Yamada.⁴ O primeiro utilizou as redes para modelar sistemas químicos, Kuznetsov estava interessado na aproximação de grupo de renormalização, Fujisaka e Yamada investigaram a dinâmica de um conjunto de osciladores, e Kaneko utilizou as redes para estudar a evolução temporal de sistemas espacialmente estendidos.⁵ Atualmente as redes de mapas acoplados são utilizadas em diversos problemas da física da matéria condensada, neuro-ciência e físico-química.^{6,7} Basicamente elas são utilizadas para modelar sistemas dinâmicos acoplados e estudar as propriedades decorrentes da interação entre esses sistemas. Dentre os comportamentos espaço-temporais apresentados por uma rede de mapas acoplados podemos citar a propagação de estruturas,⁶ a intermitência,^{8,9} a formação de padrões^{6,8} e a sincronização.^{10,11}

Neste trabalho estudaremos especificamente o fenômeno da sincronização que é o processo no qual os elementos da rede passam a exibir um comportamento coletivo. Este processo pode ser observado em diversos sistemas físicos, químicos e biológicos. Cadeias de junções Josephson,¹² neurônios,¹³ células cardíacas¹⁴ e flashes de vagalumes¹⁵ são alguns exemplos de sistemas que manifestam o comportamento síncrono. Um sistema particular onde a sincronização exerce um papel fundamental é o cérebro. Alguns estudos^{16,17} mostraram que a sincronização entre os padrões de atividades dos neurônios é necessária para o processo de aprendizagem e para a memória curta. Em contrapartida, há estudos^{18,19} que a associam com comportamentos indesejados como os ataques epiléticos e o mal de Parkinson. Nesse contexto o estudo da

sincronização através de modelos matemáticos pode nos ajudar a entender melhor esse sistema e fenômenos. Além disso, as redes de mapas acoplados constituem uma boa opção de modelo porque são capazes de reproduzir outras três características observadas experimentalmente em redes de neurônios,^{20,21} a saber: uma rápida resposta à estímulos, uma grande variabilidade de padrões de atividade e um comportamento altamente irregular dos neurônios individuais.

Além da ampla variedade de sistemas naturais que exibem o comportamento síncrono, a sincronização também possui interesse de aplicação tecnológica como, por exemplo, em sistemas de comunicação baseado em caos.²² Nestes sistemas a sincronização é utilizada para transmitir dados de modo seguro, pois apenas sistemas caóticos idênticos são capazes de sincronizar. Qualquer erro ou diferença entre os parâmetros entre dois sistemas faz com que as dinâmicas exibidas por eles diverjam exponencialmente com o tempo. Então, se as dinâmicas de dois sistemas caóticos são utilizadas como chave para a criptografia, a sincronização proporciona um meio eficaz de transmitir e receber dados de modo seguro. Sistemas de comunicação baseados em sincronização de caos são investigados desde o final do século XX^{23,24} e uma realização experimental foi realizada em 2005 usando lasers semicondutores caóticos.²⁵ Nossa contribuição nesse contexto é a proposta de um método de criptografia que explora a sincronização de caos entre réplicas de redes cujos elementos são não síncronos. O método e suas propriedades serão discutidos detalhadamente na última parte do trabalho.

Para estudar o processo de sincronização podemos utilizar diferentes modelos de redes, desde os mais simples até os mais complexos.^{26–32} A escolha de um modelo específico geralmente é feita de acordo com as características do sistema que se pretende investigar. Embora existam vários modelos e estudos sobre redes, a maioria deles considera uma estrutura constante ao passo que as redes reais apresentam uma estrutura de nós e arestas que pode mudar com o tempo. Nas redes sociais, por exemplo, o número de elementos varia continuamente e as relações entre eles também é dinâmica. Então, como uma abordagem mais real destes sistemas, na última década, alguns modelos de redes com acoplamento variando no tempo têm sido propostos e analisados. O modelo *blinking*,³³ os grafos aleatórios³⁴ e as topologias *randomly switching*³⁵ são alguns exemplos. Estudos sobre a sincronização nestes modelos³⁶ sugerem que, em alguns casos, a dinâmica da topologia pode aumentar a sincronizabilidade da rede quando comparada à redes com estrutura estática e mesma distribuição de conexões.

A sincronizabilidade de uma rede pode ser inferida a partir do maior expoente de Lyapunov transversal ao subespaço de sincronização.¹⁰ No entanto, para redes com topologia variável o cálculo desta quantidade não é direto e diagnósticos alternativos são geralmente utilizados.^{34,37} Neste trabalho propomos uma nova abordagem para o estudo da sincronização

para esta classe de redes. Esta abordagem compreende quantidades denominadas efetivas cujo o significado físico é o mesmo das quantidades usuais, porém, elas diferem destas últimas pela maneira como são obtidas. Em³⁸ mostramos que os expoentes de Lyapunov efetivos de uma rede de mapas específica, cujo acoplamento varia no tempo, equivalem aos expoentes de Lyapunov tradicionais e, portanto, podem ser explorados para determinar a sincronizabilidade da rede. Nossa hipótese é que este procedimento pode ser aplicado à uma classe maior de redes com topologia variável no tempo. Então, neste trabalho, determinamos e analisamos os expoentes de Lyapunov efetivos para outros modelos de redes cuja topologia varia com o tempo. Os resultados obtidos têm ratificado tal hipótese.

Estudos com redes cuja topologia varia no tempo^{33,39} também têm sugerido a construção de esquemas de acoplamento auxiliares com topologias constante que exibem comportamentos dinâmicos equivalentes. Bhowmick e colaboradores,³⁹ por exemplo, utilizaram um circuito eletrônico e demonstraram experimentalmente que existe uma relação entre os parâmetros críticos de uma rede variável e do modelo auxiliar. Basicamente, o modelo auxiliar representa um acoplamento médio em que interações são ponderadas pela probabilidade das conexões. Nesse sentido, o modelo auxiliar seria uma boa alternativa para estudar a sincronização em redes com topologia variável. Mas, a equivalência entre os comportamentos assintóticos do modelo auxiliar e da rede variável tem sido verificada sobretudo quando a dinâmica local da rede é regida por equações diferenciais. Então, usando os expoentes de Lyapunov efetivos e outros diagnósticos de sincronização mostraremos que, quando a dinâmica local da rede é regida por mapas, o modelo auxiliar e a rede variável exibem comportamentos equivalentes apenas para determinados valores dos parâmetros ou quando o tamanho dos sistemas são suficientemente grandes.

Diante do problema encontrado no modelo auxiliar para redes de mapas acoplados com topologia variável propomos aqui um modelo auxiliar alternativo que denominamos sistema efetivo. Trata-se de um sistema autônomo e determinístico que, por construção, exhibe as mesmas propriedades de sincronização da rede cuja topologia varia com o tempo.³⁸ Com isso, mostramos que os expoentes de Lyapunov efetivos podem ser utilizados não apenas para prever o comportamento assintótico de redes com topologia variável, mas também para construir um sistema efetivo cujo comportamento é, do ponto de vista da sincronização, equivalente ao sistema com topologia variável. Em acréscimo mostramos que é possível construir um sistema efetivo reduzido composto apenas por dois elementos do sistema original e que preserva as propriedades de sincronização deste.

Concluimos nosso trabalho propondo e investigando um mecanismo de criptografia

para sistemas de comunicação que explora a sincronização de caos e a relação causal da dinâmica dos elementos de uma rede.^{40–42} O mecanismo proposto é composto por duas réplicas de redes de mapas acoplados e possui características similares à computação de reservatório,^{43,44} a qual é associada ao modo pelo qual a informação é processada no cérebro. Analisamos a segurança do nosso sistema de comunicação contra ataques de intrusos e investigamos a transmissão de mensagens arbitrárias através dele. Os resultados obtidos mostram um bom desempenho do sistema, mesmo na presença de ruídos externos, e sugerem que o sistema é extremamente seguro.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos relacionados à sincronização e introduzimos seu estudo a partir de sistemas dinâmicos. Na sequência, Capítulo 3, descrevemos as redes de mapas acoplados e as formas de acoplamento de nosso interesse neste trabalho. No Capítulo 4 estudamos a sincronização em redes de mapas acoplados, discutimos alguns diagnósticos de sincronização e apresentamos nosso método para obter os expoentes de Lyapunov efetivos de redes com topologia variável no tempo. No Capítulo 5 mostramos como construir o sistema efetivo para estas redes e analisamos este sistema para três modelos específicos de redes. No Capítulo 6 investigamos a sincronização entre réplicas de redes de mapas acoplados. Também para este caso construímos um sistema efetivo. Como aplicação do estudo da sincronização entre réplicas de redes propomos, no Capítulo 7, um método de criptografia de dados para sistemas de comunicação baseados em caos. Por último, apresentamos nossas conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2 A Sincronização

Neste capítulo descrevemos o processo de sincronização e sua utilização no desenvolvimento de sistemas de comunicação segura. Apresentamos inicialmente a descoberta, a definição e os tipos de sincronização. Em seguida, direcionamos a atenção para a sincronização entre sistemas caóticos acoplados, principal objeto deste trabalho. Concluimos o capítulo discutindo a aplicação da sincronização de caos para o desenvolvimento de sistemas de comunicação segura.

2.1 História e Definição de Sincronização

O primeiro trabalho sobre o processo de sincronização entre sistemas interagentes é de autoria de Christiaan Huygens.⁴⁵ Huygens observou, no início do séc. XVII, que dois relógios de pêndulos compartilhando o mesmo suporte passavam a exibir um comportamento comum após alguns instantes de tempo, isto é, suas oscilações tornavam-se coincidentes. Em uma carta remetida a seu pai, em 1665, ele definiu tal comportamento como “*le phénomène de la sympathie, sympathie es horloges*”. Este fenômeno de simpatia foi, posteriormente, denominado sincronização.

Além de oscilações coincidentes, Huygens observou que os movimentos dos pêndulos apresentavam outro padrão comum, a saber, ocorriam sempre em direções opostas. A partir desta observação ele passou a investigar mais detalhadamente a ocorrência destes comportamentos e concluiu que a coincidência entre os períodos de oscilações dos pêndulos devia-se a um imperceptível movimento do suporte no qual os relógios se encontravam. As pesquisas de Huygens foram fundamentais para melhorar estabilidade destes relógios e, conseqüentemente, para aumentar a precisão de medidas de tempo.

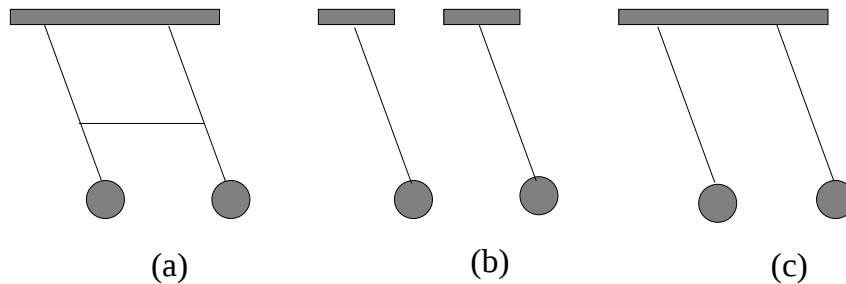
O comportamento síncrono observado por Huygens em seus relógios não é exclusivo deste sistema. Após a descoberta de Huygens, Jean-Jacques D. de Mairan observou que os organismos vivos apresentavam uma espécie de relógio biológico interno que ajusta seus ritmos

circadianos. Lord Rayleigh, no meio do séc. XIX, chamou a atenção para a sincronização em sistemas acústicos e investigou as condições em que dois tubos começam a soar em uníssono. Mais tarde, por volta de 1920, a sincronização passou a ser utilizada para estabilizar a frequência de um gerador através de outro mais preciso e com melhores possibilidades de ajuste. Recentemente a sincronização tem sido observada em uma grande variedade de sistemas naturais, em problemas de engenharia e até mesmo em comportamentos sociais.⁴⁶ Mas o que é a sincronização?

A sincronização é definida como um ajuste dos ritmos de objetos oscilantes causado por uma interação fraca entre eles.⁴⁶ Portanto, ela diz respeito a um processo de ajuste, a uma classe de objetos e a um tipo de interação. Por “objetos oscilantes” entende-se quaisquer sistemas cujas oscilações são auto-sustentáveis, isto é, resultam de sua própria energia interna. Os pêndulos simples constituem bons exemplos destes objetos e, além disso, são bastante úteis para elucidarmos o processo de sincronização. Considere, por exemplo, um sistema composto por dois pêndulos conectados por uma haste rígida como mostra a Figura 2.1(a). Nesse caso, o movimento dos pêndulos é limitado: ou eles estão parados ou se movendo conjuntamente. Trata-se, portanto, de um único sistema. Suponha, agora, que os pêndulos estejam em locais distantes, Figura 2.1(b). Nesse caso, o movimento não é mais restrito e há a possibilidade deles exibirem o mesmo comportamento. No entanto, como não há interação entre eles, qualquer alteração no movimento de um pêndulo não será “sentida” pelo outro. Portanto, ambas situações não podem representar o fenômeno de sincronização. Considere-se, enfim, dois pêndulos que compartilham a mesma haste de sustentação, Figura 2.1(c). Nesse caso, dependendo da rigidez da haste, alterações do movimento de um podem afetar o movimento do outro. Além disso, a interação existente entre eles não inibe a dinâmica individual de cada um. Portanto, este é um exemplo de interação fraca que pode resultar em um comportamento síncrono.

Embora o processo de sincronização esteja relacionado a um comportamento coletivo, nem todo comportamento coletivo pode ser considerado como sincronização. De acordo com⁴⁶ para classificar um processo como tal devemos assegurar que: a) estamos analisando um sistema composto de, no mínimo, dois osciladores auto-sustentáveis, b) o ajuste dos ritmos deve-se a uma interação fraca entre os osciladores e c) pequenas variações no movimento de um sistema afetam o movimento do outro. De fato, a sincronização não é um estado, mas um processo dinâmico complexo.

Figura 2.1: Sistema de dois pêndulos. Em (a) os pêndulos estão conectados por uma haste, a qual impõe restrição ao movimento. Esta restrição torna o sistema indecomponível e não constitui um exemplo de interação fraca. (b) Os pêndulos estão suspensos em suportes isolados. O movimento de um não interfere no movimento do outro e, portanto, não há interação. (c) Os pêndulos compartilham um mesmo suporte de sustentação. Dependendo da rigidez do suporte, pequenas alterações do movimento de um pode afetar o movimento do outro.



FONTE: O autor.

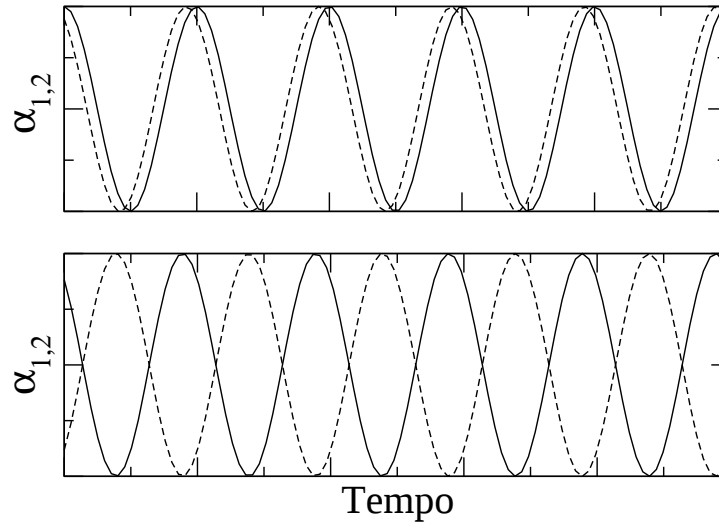
2.2 Tipos de Sincronização

Os comportamentos observados por Huygens em seus relógios, coincidência entre os períodos e movimento dos pêndulos em sentidos opostos, constitui um tipo particular de sincronização denominado sincronização em anti-fase.⁴⁶ No entanto, o processo de sincronização é mais geral e pode ocorrer sob diferentes maneiras. Trata-se, como mencionamos, de um ajuste dos ritmos de objetos oscilantes e, portanto, diz respeito àquilo que caracteriza o ritmo de oscilação destes objetos.

No caso de pêndulos oscilantes o ritmo pode ser associado ao período de oscilação ou, de modo equivalente, às frequências correspondentes. Um tipo específico de sincronização entre dois pêndulos corresponde ao caso em que ambos se movem para a esquerda, realizam seus deslocamentos máximos, e retornam para a direita passando quase simultaneamente pelo ponto de equilíbrio, Figura 2.2(a). Esta é a sincronização de fase.⁴⁶ O caso oposto, quando os pêndulos se movem com uma diferença de fase igual a um múltiplo de π , Figura 2.2(b), caracteriza a sincronização em anti-fase. Também é possível que os pêndulos apresentem a mesma intensidade de oscilação, o que é denominado sincronização de amplitude. Enfim, a combinação destes três tipos de sincronização (de fase, de amplitude e de frequência) é denominada sincronização completa.

Neste trabalho estudaremos a sincronização completa entre sistemas dinâmicos acoplados. Para esta classe de sistemas, como mostraremos a seguir, a sincronização completa corresponde ao processo no qual todas as variáveis de estado dos elementos individuais assumem o mesmo valor no mesmo instante de tempo.

Figura 2.2: Dois possíveis regimes de sincronização de um sistema composto por dois pêndulos. Em (a) há uma pequena diferença de fase e as oscilações são ditas sincronizadas quase-em-fase. (b) Os pêndulos oscilam com uma diferença de fase igual a π o que caracteriza a sincronização em anti-fase.



FONTE: O autor.

2.3 Os Sistemas Dinâmicos e a Sincronização

Sistemas dinâmicos constituem ferramentas importantes para descrever o comportamento de objetos oscilantes e, conseqüentemente, para estudar o processo de sincronização. Um sistema dinâmico consiste de uma prescrição matemática que possibilita descrever o estado de um objeto em instantes de tempos subsequentes a partir do conhecimento do estado inicial. Trata-se de uma regra de evolução que relaciona o estado do sistema em um instante de tempo arbitrário com seu estado em um instante imediatamente anterior, entendendo por estado o conjunto de valores que caracterizam completamente o sistema.

Sistemas dinâmicos podem ser de tempo contínuo, se o intervalo de tempo entre dois estados subsequentes for desprezível, isto é, se $\Delta t \rightarrow 0$, ou de tempo discreto, se a sequência dos intervalos temporais puder ser expressa por $n = 0, 1, 2, \dots$. Nosso foco são os sistemas dinâmicos de tempo discretos denominados mapas. Para estes sistemas, se $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de estado do sistema no tempo n , então

$$\mathbf{x}_{n+1} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial que rege o mapeamento.

Mapas são utilizados para estudar o comportamento de uma grande variedade de sistemas tais como densidades de população,⁴⁷ movimento de um rotor pulsado,⁴⁸ movimento de partículas brownianas,^{49,50} comunicação entre lasers caóticos²⁴ etc. Diferentemente das

equações diferenciais, um mapa é capaz de exibir comportamento caótico mesmo no caso unidimensional, isto é, ele pode apresentar uma dinâmica irregular ou aperiódica, limitada no espaço, e sensível às condições iniciais.^{51–53} O comportamento caótico é característico de muitos sistemas naturais e possui grande interesse de pesquisa.

Além do comportamento caótico um mapa pode exibir uma série de outros comportamentos dinâmicos interessantes. Considere, por exemplo, o mapa da tenda

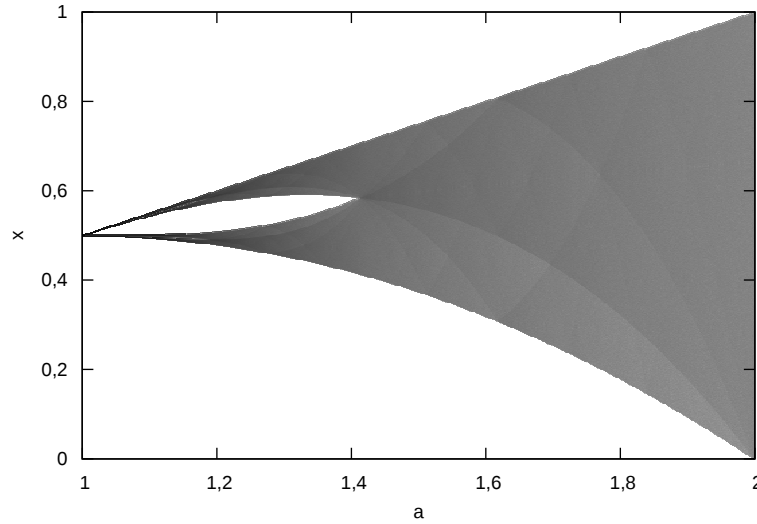
$$f_a(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x < 0,5 \\ a(1-x) & \text{se } x \geq 0,5 \end{cases} \quad (2.2)$$

Dependendo do valor do parâmetro a deste mapa, as trajetórias $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ podem convergir para um ponto fixo, apresentar um comportamento periódico, quase-periódico ou então ser totalmente irregular e preencher densamente o espaço de fase. A Figura 2.3 exibe o comportamento assintótico de 10^4 trajetórias iniciadas aleatoriamente e evoluídas de acordo com a Equação (2.2) com diferentes valores de a . Esta figura é denominada diagrama de bifurcação ou atrator do mapa. Na verdade, o termo atrator é utilizado para definir a região do espaço de fase acessível ao sistema após um tempo transiente e, portanto, pode ser estabelecido para apenas um valor do parâmetro enquanto que o diagrama de bifurcação não. A figura também exibe em escala de cinza a densidade de pontos em cada região do espaço de fases. Quanto mais escura mais densa é aquela região. Podemos observar que, em geral, os estados não são igualmente visitados.

O mapa da tenda recebe esse nome devido à curva da função de mapeamento ou mapa de primeiro retorno. As Figuras 2.4 (a) e (b) exibem tais curvas para dois valores de parâmetro de controle. A figura também mostra a bissetriz (linha cinza) e duas regiões delimitadas por linhas tracejadas. Estas regiões correspondem à partições do atrator do sistema que geralmente são utilizadas para definir uma dinâmica binária como aquela que utilizaremos no Capítulo 7. Em (a) as partições foram definidas iterando o mapa no ponto de descontinuidade $x = 0,5$ e em (b) elas foram obtidas aplicando f^{-1} sobre o ponto fixo do mapa. Note que para o caso em que $a = 2$ todo o intervalo $[0, 1]$ é acessível enquanto que para $a = \sqrt{2}$ o atrator está limitado ao intervalo $[a(1 - a/2), a/2]$, o que está de acordo com o diagrama de bifurcação apresentado na Figura 2.3.

Além dos comportamentos dinâmicos mencionados o mapa da tenda também exibe a periodicidade estatística. Trata-se de uma oscilação da densidade com um período bem definido.^{54–56} O mapa da tenda exibe tal comportamento para $2^{1/2T} < a \leq 2^{1/2(T-1)}$, sendo $T = 1, 2, \dots$ o período de oscilação. Portanto, para $a = \sqrt{2}$ a densidade oscila com período 2.

Figura 2.3: Diagrama de bifurcação do mapa da tenda. Para cada valor de a utilizamos 10^2 iteradas após descartar 10^4 de transiente.



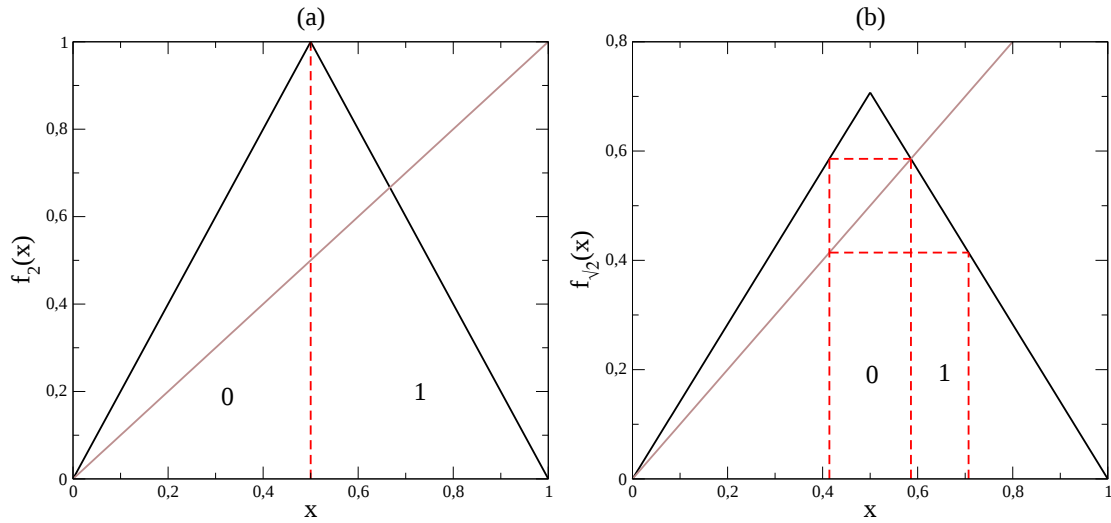
FONTE: O autor.

Tal comportamento pode ser verificado analisando as partições do atrator no mapa de primeiro retorno apresentado na Figura 2.4. Mais especificamente, notamos que todos os pontos na partição “0” são mapeados para a partição “1” e vice-versa. O fato do sistema apresentar periodicidade estatística não significa que ele não possui uma densidade invariante. Na realidade há uma densidade invariante, mas o sistema não converge para ela. Portanto, as propriedades dinâmicas de sistemas com periodicidade estatística não podem ser obtidas sobre a densidade invariante.

O mapa da tenda apresenta também algumas variantes que são o mapa da tenda assimétrico e o mapa da tenda com escape.⁵⁷ Embora estas formas também apresentem comportamentos dinâmicos interessantes, utilizaremos neste trabalho apenas o mapa da tenda na forma padrão, Equação (2.2), com $a = 2$. Para este valor de parâmetro todo o espaço de fases é igualmente acessível e o comportamento é fortemente caótico. Isto significa que duas trajetórias inicialmente próximas tendem a divergir exponencialmente com o tempo. No entanto, quando acoplamos dois ou mais mapas o espaço de fases deixa de ser igualmente acessível e as trajetórias descritas pelos mapas podem aproximar-se ao invés de afastar-se. Considere, por exemplo, dois mapas da tenda acoplados de acordo com a equação

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \varepsilon)f(x_n) + \varepsilon f(y_n), \\ y_{n+1} &= (1 - \varepsilon)f(y_n) + \varepsilon f(x_n), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Figura 2.4: Mapas de primeiro retorno e partições do atrator do mapa da tenda. Em (a) utilizamos $a = 2,0$ e as partições foram obtidas dividindo o atrator sobre o ponto de descontinuidade $x = 0,5$. Em (b) utilizamos $a = \sqrt{2}$ e as regiões binárias foram obtidas aplicando f^{-1} sobre o ponto fixo do mapa.



FONTE: O autor.

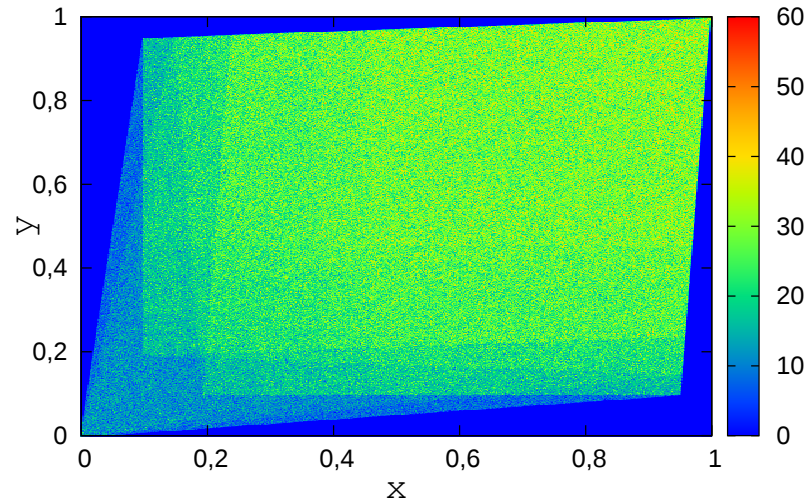
em que ε é a intensidade do acoplamento e $f(z_n)$ é dado pela Equação (2.2). A Figura 2.5 mostra o atrator do sistema (2.3) para $\varepsilon = 0,05$. Observe que, mesmo neste caso de acoplamento fraco, há uma redução significativa da área acessível no espaço de fases. Note também que, apesar de utilizarmos $a = 2$, as regiões não são mais igualmente visitadas. A redução é mais visível nos extremos da diferença entre as variáveis, ou seja, no canto superior esquerdo e no canto inferior direito. Isto ocorre porque o acoplamento tende a aproximar os valores das variáveis de estado. Então, dependendo da intensidade do acoplamento pode ocorrer que as duas variáveis exibam o mesmo valor em todos os instantes de tempo e, portanto, apenas uma linha diagonal definirá o atrator do sistema. Esta linha ou bissetriz é denominada subespaço de sincronização e o comportamento das variáveis neste subespaço é denominado síncrono.

Como mencionamos anteriormente a sincronização completa em sistemas descritos por mapas corresponde ao processo no qual os variáveis de estado de todos os mapas tornam-se idênticas. No caso de um sistema composto por dois mapas acoplados, se x_n e y_n são as variáveis de estado dos mapas 1 e 2, respectivamente, a sincronização do sistema é dada por $x_n = y_n \forall n > \tau_s$, sendo τ_s o tempo de sincronização. De modo equivalente, para um sistema composto por N mapas, a sincronização implica

$$\mathbf{x}_n^{(1)} = \mathbf{x}_n^{(2)} = \dots = \mathbf{x}_n^{(N)} = \mathbf{s}_n \forall n > \tau_s, \quad (2.4)$$

No caso em que os mapas são caóticos, $\mathbf{s}_n$ evolui caoticamente, e dizemos que se trata de sincronização de caos.

Figura 2.5: Atrator de um sistema composto por dois mapas da tenda acoplados com intensidade $\varepsilon = 0,05$. O código de cores denota a frequência na qual cada região foi visitada, as regiões mais densas são representadas pela cor vermelha e as menos densas pela cor azul. Os dados correspondem aos valores das variáveis em 10^7 iteradas após outras 10^4 de transiente.



FONTE: O autor.

Nos próximos capítulos investigaremos a sincronização de caos não apenas entre dois mapas, mas entre N mapas da tenda acoplados. Nossa escolha do mapa da tenda deve-se sobretudo à convergência monótona das trajetórias ao subespaço de sincronização no caso em que o acoplamento é constante. Portanto, se considerarmos acoplamentos variáveis e a convergência deixar de ser monótona, podemos assegurar que este comportamento deve-se exclusivamente à variação do acoplamento. Outro motivo que nos levou à escolha deste mapa é que uma rede de mapas da tenda fracamente acoplados é considerada um ótimo gerador de números pseudoaleatórios.⁵⁸ Isto significa que podemos utilizar a dinâmica deste sistema para gerar chave de criptografia para sistemas de comunicação. Na seção seguinte introduzimos a idéia de sistemas de comunicação baseado em sincronização de caos e no último capítulo apresentamos um método que criptografia que explora a aleatoriedade da dinâmica exibida por mapas da tenda fracamente acoplados.

2.4 Comunicação *via* Sincronização de Caos

A utilização da sincronização de caos em sistemas de comunicação é investigada desde o final do século passado.^{23,24} Em geral, nos sistemas baseados em caos as mensagens são codificadas pelo emissor em um sinal caótico e, após a transmissão, a mensagem é decodificada

por um receptor sincronizado ao emissor. Basicamente dois procedimentos têm sido empregados: a sincronização por um sinal externo comum e a sincronização por mútuo acordo de aprendizagem.⁵⁹ No primeiro caso, o emissor adiciona uma mensagem a um sinal sincronizado enquanto o receptor a subtrai. Logo, para a mensagem ser decodificada corretamente o emissor e o receptor devem compartilhar uma chave secreta, por exemplo, os mesmos parâmetros de seus sistemas caóticos. No processo de comunicação usando a sincronização por aprendizagem o emissor e o receptor não compartilham nenhuma chave secreta, porém eles atribuem pesos idênticos à mensagem como uma chave para a criptografia.

Um fator importante às pesquisas de sistemas de comunicação baseados em sincronização de caos tem sido a possibilidade de realização experimental.^{25,60} Em 2005, por exemplo, lasers semicondutores caóticos foram utilizados para transmitir mensagens de modo seguro sobre uma rede pública.²⁵ Em tal experimento foi utilizada uma configuração do tipo mestre-escravo entre os sistemas, isto é, um tipo de acoplamento em que apenas um interfere na dinâmica do outro.

Teoricamente o processo de comunicação entre lasers caóticos pode ser estudado por meio de um sistema dinâmico constituído por mapas caóticos acoplados.²⁴ Mais especificamente tem sido utilizado o mapa de Bernoulli, $f(x) = 2x \bmod 1$, e uma configuração mestre-escravo. Nesse caso, o sistema pode ser descrito como

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \varepsilon)f(x_n) + \varepsilon f(x_{n-\tau}), \\ y_{n+1} &= (1 - \varepsilon)f(y_n) + \varepsilon f(x_{n-\tau}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $x(y)$ representa o emissor (receptor), $f(z)$ é o mapa de Bernoulli, $\varepsilon \in [0, 1]$ é o parâmetro de acoplamento e τ é o tempo de atraso. Neste sistema, a mensagem é transmitida adicionando um sinal $m_n = \pm 1$ à dinâmica do receptor, isto é,

$$y_{n+1} = (1 - \varepsilon)f(y_n) + \varepsilon f(x_{n-\tau} + m_{n-\tau}). \quad (2.6)$$

Então, para decodificar a mensagem, o receptor filtra a mensagem do sinal considerando a diferença entre o valor de sua variável de estado e o valor do sinal recebido, isto é, a mensagem é lida pelo receptor como

$$\tilde{m}_n = x_n + m_n - y_n. \quad (2.7)$$

Portanto, a mensagem constitui uma perturbação que afasta y do subespaço de sincronização. Outra possibilidade seria modular um parâmetro do emissor e, neste caso, a mensagem é extraída pela diferença entre as trajetórias das unidades envolvidas.

O sistema de comunicação mencionado constitui o modelo mais simples de comunicação baseado em sincronização de caos. Vários outros modelos mais elaborados podem ser vistos em.^{?,?} O desenvolvimento e estudo de sistemas de comunicação baseados em sistemas dinâmicos caóticos deve-se sobretudo à segurança que estes sistemas proporcionam. Um intruso tentando determinar os parâmetros do sistema criptográfico para interceptar a mensagem sempre cometerá um erro. Se a dinâmica do sistema é caótica, então o erro crescerá exponencialmente com o tempo tornando improvável a interceptação da mensagem pelo intruso. Além disso, a segurança na comunicação em nível de software requer transformações que sejam ergódicas e *mixing* e os sistemas caóticos são naturalmente ergódicos e *mixing*¹. Na realidade, um sistema *mixing* é necessariamente ergódico, mas o contrário não é verdadeiro.

Além da segurança, a sincronização de caos permite que o sistema de comunicação envie e receba a informação em tempo real. No entanto, a necessidade de sincronização entre os sistemas caóticos do emissor e do receptor reduz o intervalo dentro do qual os sistemas podem ser considerados seguros. Uma proposta para utilizar sistemas caóticos para transmitir informação de modo seguro sem a necessidade da sincronização foi apresentada recentemente por Hung e Hu.⁴¹ A codificação de mensagem neste sistema é realizada de acordo com a direção do acoplamento entre os sistemas caóticos e é decodificada usando uma quantidade denominada entropia de transferência.⁴⁰ Tal quantidade será discutida mais adiante. A principal desvantagem da abordagem de Hung e Hu é o tempo de operação do sistema para transmitir uma mensagem. Neste trabalho propomos um sistema de comunicação⁴² que explora, ao mesmo tempo, a rapidez da comunicação oferecida pela sincronização e a segurança do modelo de Hung e Hu. O modelo proposto é descrito e analisado no Capítulo 7.

¹Dizemos que um sistema $\mathbf{F}$ que preserva a área de uma região compacta $\mathcal{A}$ é *mixing* sobre $\mathcal{A}$ se dado qualquer dois subconjuntos σ e σ' de $\mathcal{A}$, em que σ e σ' tem medida de Lebesgue positiva $\mu_L(\sigma) > 0, \mu_L(\sigma') > 0$, então⁶¹

$$\frac{\mu_L(\sigma)}{\mu_L(\mathcal{A})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_L[\sigma' \cap \mathbf{F}^m(\sigma)]}{\mu_L(\sigma')}$$

3 As Redes de Mapas Acoplados

Neste capítulo introduzimos a ideia de rede como uma representação matemática para o estudo de sistemas interagentes. Discutimos inicialmente o conceito, algumas propriedades e medidas típicas da teoria de redes bem como apresentamos alguns exemplos de redes reais. Na sequência consideramos um tipo particular de rede dinâmica denominado rede de mapas acoplados. Definimos este modelo matemático e apresentamos alguns tipos de acoplamento de nosso interesse nesse trabalho.

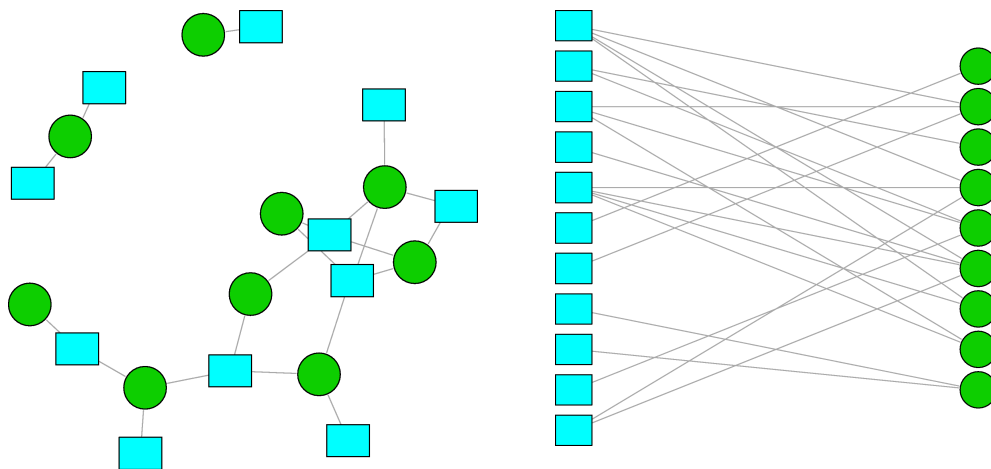
3.1 Definição e representação de uma rede

O termo rede abrange uma infinidade de objetos e áreas de conhecimento. Em geral, ele é utilizado para expressar conjuntos cujos elementos interagem entre si ou compartilham uma determinada relação. Como exemplos de tais conjuntos podemos citar as populações de indivíduos, os grupo de animais e plantas, os aglomerados de neurônios, as páginas da internet, etc. As relações para os exemplos mencionados podem expressar, entre outras coisas, o conhecimento ou amizade entre os indivíduos, uma interação polínica, a ocorrência de sinapses e a presença de links, respectivamente. Portanto, em cada caso uma estrutura específica ou topologia de rede é obtida.

Independentemente da natureza ou estrutura, a representação gráfica de uma rede é geralmente realizada por meio de pontos e linhas. Os pontos denotam os elementos do conjunto enquanto que as linhas as relações existente entre eles. Além de pontos outras formas geométricas como discos, quadrados e triângulos também costumam ser utilizadas para representar os elementos ou subconjuntos do sistema. Particularmente, se o sistema em questão é composto por elementos distintos, então diferentes formas geométricas são empregadas para representá-los e diferenciá-los. A Figura 3.1 (a) ilustra uma rede composta por dois elementos distintos. Trata-se de uma rede de polinização inseto-planta, com os discos representando as plantas e os retângulos as espécies de borboletas. A relação nesse caso representa a polinização da planta pela borboleta e, portanto, a interação ocorre apenas entre os elementos distintos. Redes cujos

elementos podem ser divididos em duas classes de objetos e que a interação ocorre apenas entre os objetos de uma classe com os objetos da outra, são denominadas bipartidas. A representação gráfica deste tipo de rede também pode ser feita separando os elementos de cada conjunto em duas colunas como mostramos na Figura 3.1 (b), que é uma outra representação da rede expressa na Figura 3.1 (a). Outro exemplo de rede bipartida que é bastante mencionado⁶² é a rede de atores e filmes. Neste caso a relação corresponde ao elenco ou à atuação do ator no filme.

Figura 3.1: Duas representações de uma rede de polinização inseto-planta. Os discos denotam as espécies de plantas e os retângulos as espécies de borboleta e as linhas indicam a presença de uma certa quantidade mínima de pólen das plantas na respectiva espécie de borboleta.



FONTE: O autor.

A representação gráfica de uma rede é a mesma de um grafo e ambos os termos são muitas vezes utilizados como sinônimos. Tanto um como o outro descrevem conjuntos cujos elementos compartilham uma determinada relação. Um grafo, no entanto, pode ser considerado uma abstração matemática de um sistema concreto denominado rede. Mais formalmente, um grafo é um ente matemático $\mathcal{G}$ que expressa um conjunto V de nós ou vértices e um conjunto E de links ou arestas que expressa uma relação existente entre os elementos de V . Portanto, a diferença entre os dois conceitos refere-se essencialmente à existência concreta do objeto representado. Apesar disso, uma vez construída uma rede podemos utilizar todo o conhecimento da teoria dos grafos para investigar suas propriedades topológicas, isto é, sua estrutura espacial.

Tanto uma rede como um grafo podem ser construídos a partir de uma matriz de adjacência. A dimensão dessa matriz depende da quantidade de elementos do conjunto e suas entradas, $a_{ij} = 1$ ou $a_{ij} = 0$, denotam, respectivamente, a presença ou não de uma relação entre os elementos. A matriz de adjacência também pode ser utilizada para investigar propriedades importantes das redes como sua estabilidade. De fato, como mostraremos mais adiante, o espectro de autovalores dessa matriz pode ser associado à capacidade de sincronização entre os elementos da rede se estes possuem uma dinâmica individual característica.

A matriz de adjacência é, por definição, quadrada, simétrica, com diagonal principal nula e entradas fora dessa diagonal iguais a 0 ou 1. Portanto, nesta forma ela apenas denota a existência da relação entre dois elementos. No entanto, em alguns casos, as relações entre pares distintos de elementos não possuem a mesma intensidade e este fato deve ser considerado tanto na construção como na análise da rede. Por exemplo, a quantidade de pólen de uma espécie de planta encontrada em uma borboleta geralmente é diferente da quantidade de pólen de outra espécie de planta. Nesse, como também em outros casos, é necessário expressar na matriz a frequência ou intensidade da relação. Temos, então, a matriz de adjacência ponderada. Outra possibilidade é a matriz de adjacência normalizada, cujas entradas são divididas pelo número de conexões de cada sítio, ou seja, pela soma de cada linha da matriz.

Além da matriz de adjacência, há várias outras representações matriciais importantes no estudo de redes.^{63,64} Uma delas é a matriz laplaciana, a qual pode ser escrita como a diferença entre uma matriz diagonal, cujos elementos não nulos expressam a soma dos elementos em cada linha da matriz de adjacência, e a matriz de adjacência.

3.2 Modelos de Redes

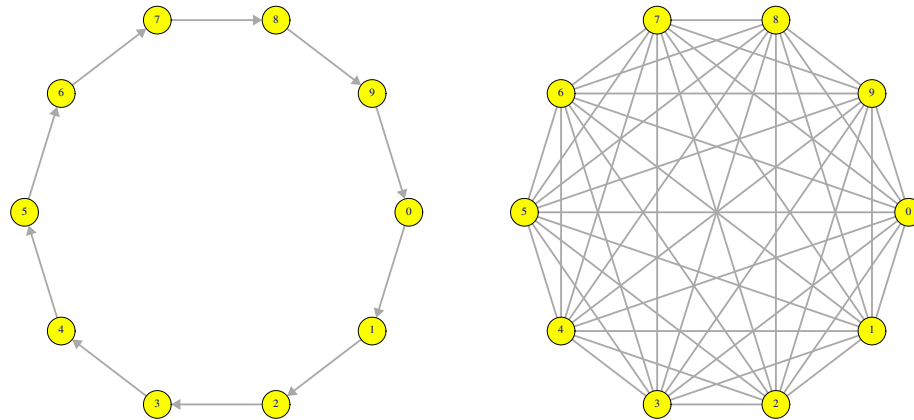
O acoplamento entre os elementos de um conjunto pode ocorrer de diferentes maneiras e há na literatura uma grande variedade de esquemas de acoplamento. Dentre os modelos de acoplamentos mais estudados podemos citar o acoplamento entre primeiros vizinhos,²⁶ acoplamento de campo médio,³⁰ com conexões aleatórias,⁶⁵ do tipo *small-world*⁶⁶ e redes sem-escala.^{67,68} Em cada caso a estrutura utilizada é a que propicia melhor correspondência entre o modelo e o sistema físico estudado.

Em uma perspectiva geral, o acoplamento em uma rede pode ser classificado como local ou não-local. No acoplamento local cada sítio está conectado apenas com seus vizinhos mais próximos e, portanto, as interações são de curto alcance. Acoplamentos não-locais, ao contrário, estabelecem conexões entre sítios distantes e, conseqüentemente, aumentam o alcance das interações. O caso extremo de um acoplamento não-local constitui o acoplamento global. Nesta forma de acoplamento todos os sítios estão conectados entre si e interagem diretamente uns com os outros.

Além de local e não-local, os acoplamentos podem ser classificados de acordo com a direção e à conectividade. Quanto à direção, um acoplamento é denominado unidirecional se, dado um par de sítios acoplados, a interação afeta apenas um deles ou bidirecional se ambos compartilham determinada propriedade ou relação. A Figura 3.2 representa uma rede com

acoplamento local e unidirecional e outra com acoplamento global e bidirecional, respectivamente. A direção da interação no primeiro caso é expressa por meio de setas. Já para o caso bidirecional a utilização de setas é desnecessária e, portanto, foram omitidas.

Figura 3.2: Representação de uma rede com acoplamento local e unidirecional (à esquerda) e de uma rede com acoplamento global e bidirecional (à direita). Os discos correspondem aos elementos do conjunto. As linhas representam as conexões e as setas indicam o sentido da interação para o caso unidirecional.

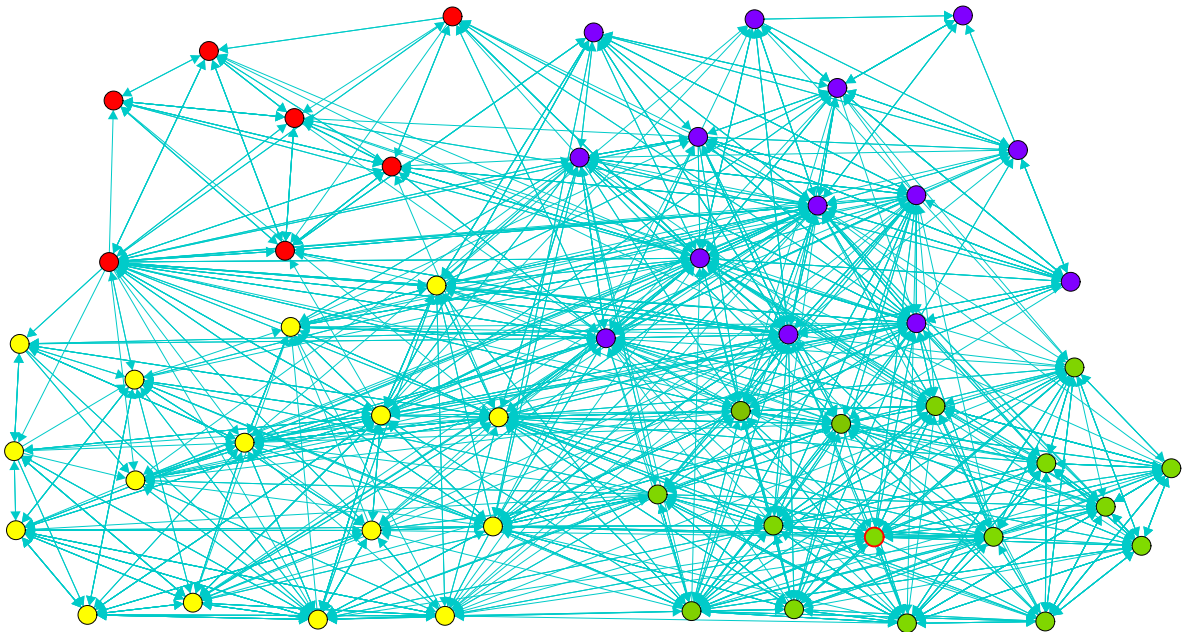


FONTE: O autor.

Finalmente, em relação à conectividade, um acoplamento é considerado homogêneo, heterogêneo, regular ou irregular. Se todos os sítios apresentam o mesmo número de conexões o acoplamento é homogêneo, caso contrário, ele é denominado heterogêneo. Se, além do mesmo número de conexões, a mesma regra de conexão e interação é respeitada por todos elementos da rede ela é dita regular, mas se interação e a distribuição das conexões não segue um padrão comum ela é denominada irregular. Redes heterogêneas são necessariamente irregulares. Embora a maioria das redes observadas na natureza sejam heterogêneas, algumas apresentam um certo grau de homogeneidade. Além disso, como foi demonstrado por Nishikawa e colaboradores⁶⁹ a homogeneidade das conexões aumenta a capacidade de sincronização da rede.

Como um exemplo de rede real considere a rede ilustrada na Figura 3.3. Trata-se de uma rede que mapeia o cérebro de um gato, sendo que os sítios ou nós representam 53 áreas corticais e as arestas correspondem à 826 fibras nervosas que compreendem os axônios entre elas. As 53 áreas foram separadas em quatro grupos maiores que correspondem às áreas funcionais visual, auditiva, somato-motora e fronto-límbica.⁷⁰ Cada um destes grupos é identificado por uma cor na figura. Observe que a rede é heterogênea, com alguns sítios com alta conectividade (*hubs*) e outros com poucas conectividades. Note também que o acoplamento não ocorre apenas entre vizinhos mais próximos e que há tanto ligações bidirecionais como ligações unidirecionais. Portanto, redes reais envolvem uma estrutura bastante complexa.

Figura 3.3: Rede das conexões das áreas corticais do gato conforme matriz de adjacência presente em.⁷⁰



FONTE: O autor.

3.3 Propriedades das redes

Na seção anterior mencionamos diversas classes de redes tais como *small-world*, sem escala, regular e aleatórias. Vamos, agora, explorar as principais características ou propriedades que nos permitem classificar uma rede como pertencente à alguma destas classes. Para isso, vamos primeiramente discutir algumas propriedades básicas das redes, tais como: a distribuição de grau ou conectividade, o comprimento de caminho médio, o coeficiente de aglomeração e a modularidade.

O grau ou conectividade diz respeito ao número de ligações que cada sítio possui. Como mencionamos anteriormente, em relação à conectividade, a rede é denominada homogênea, heterogênea, regular ou irregular. Grande parte das redes reais são heterogêneas e, na maioria delas, há uns poucos sítios que possuem um alto grau de conexões, os quais são geralmente denominados de *hubs*, e muitos outros com poucas ligações. Além disso, a conectividade entre os sítios geralmente decai seguindo uma lei de potência. Redes que satisfazem esta regra são denominadas “sem-escala”.⁶⁷ Embora estas redes compreendam grande parte das redes naturais, há redes cuja conectividade seguem outras distribuições como, por exemplo, uma gaussiana ou uma poissoniana.³⁸

Outra propriedade básica de uma rede é o comprimento de caminho médio. Esta propriedade corresponde à média do comprimento de todos os caminhos ou distâncias mais curtas

entre dois vértices ou sítios. O comprimento dos caminhos mais curtos, também chamados de geodésicas, referem-se ao número de arestas que separam dois sítios. Por exemplo, se dois sítios estão diretamente conectados, então a distância entre eles é $d = 1$. Por outro lado, se há um outro sítio entre eles, então a distância entre eles $d = 2$. Portanto o comprimento de caminho médio L é dado por⁷¹

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j}^N d_{i,j}, \quad (3.1)$$

em que $d_{i,j}$ refere-se à menor distância entre os sítios i e j e N é o número de sítios na rede.

O coeficiente de aglomeração, conhecido por transitividade na teoria dos grafos, é definido como a fração média dos pares de sítios vizinhos que também são vizinhos um do outro. Trata-se, portanto, de uma medida da probabilidade de que vértices adjacentes de um vértice estejam conectados. No caso de uma rede de amigos, este coeficiente informa a probabilidade de que os amigos de determinada pessoa também sejam amigos um do outro. O coeficiente de aglomeração C de uma rede pode ser obtido determinando o número de triângulos da rede, ou seja, por meio da equação⁶⁴

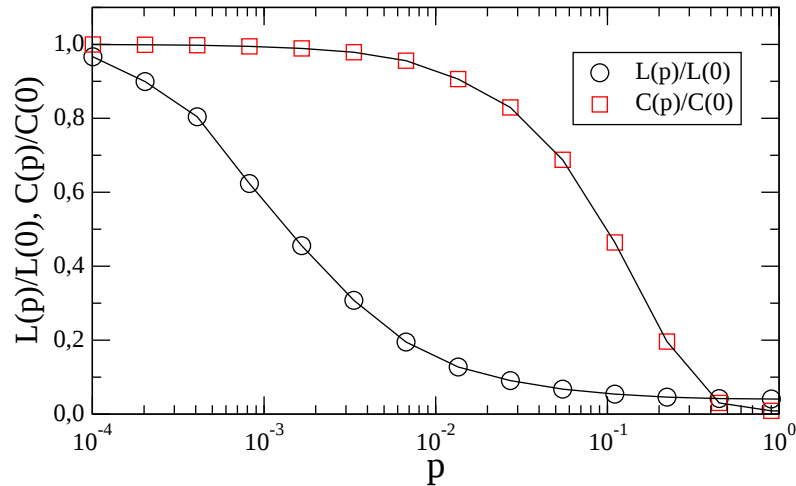
$$C = \frac{3\Delta}{v}, \quad (3.2)$$

em que Δ refere-se à quantidade de triângulos na rede e v a quantidade de vértices triplamente conectados.

Em geral as redes regulares com acoplamento não local apresentam um alto coeficiente de aglomeração e um comprimento de caminho médio grande. Ao contrário das redes regulares, as redes aleatórias possuem um comprimento de caminho médio pequeno e um baixo coeficiente de aglomeração. Dessa maneira, se uma rede regular com conexões entre os k vizinhos mais próximos for considerada e algumas ligações nesta rede forem alteradas aleatoriamente com uma probabilidade p , então o comprimento de caminho médio e o coeficiente de aglomeração apresentarão um decaimento no seu valor inicial. Se mais ligações forem alteradas, estas medidas se aproximarão cada vez mais daquelas obtidas para redes aleatórias. A Figura 3.4 mostra o comportamento do comprimento de caminho médio e do coeficiente de aglomeração em função da probabilidade de alterações nas conexões de uma rede inicialmente regular com conexões entre os $k = 2$ vizinhos mais próximos. Podemos observar que o comprimento de caminho médio L decai mais rápido do que o coeficiente de aglomeração C e, portanto, é possível encontrar valores de p com os quais a rede apresente L pequeno e C grande. Redes com estas características são denominadas redes de mundo pequeno (*small-world*). A denominação “mundo pequeno” tem sua raiz no experimento de Milgram⁷² a partir do qual se conclui que há poucos

graus de separação entre as pessoas, ou seja, que o mundo é realmente pequeno.

Figura 3.4: Coeficiente de aglomeração e comprimento de caminho médio em função da probabilidade de religamento sobre uma rede inicialmente regular com $k = 2$.



FONTE: O autor.

As alterações nas conexões de uma rede inicialmente regular não são a única maneira de se obter uma rede *small-world*. Este procedimento foi proposto por Watts e Strogatz⁷³ e, portanto, as redes contruídas dessa maneira são denominadas redes *small-world* de Watts-Strogatz. Outra maneira de se obter uma rede com características *small-world* é considerar uma rede regular inicial e inserir conexões aleatórias com uma certa probabilidade p . Este procedimento é atribuído à Newman e Watts⁷⁴ e ele possui uma vantagem em relação ao primeiro do ponto de vista de implementação. Nesse trabalho estudaremos uma rede que se assemelha ao modelo *small-world* de Newman-Watts.⁷⁴

A análise das conexões entre os sítios de uma rede também pode ser utilizada para dividi-la em grupos denominados módulos ou comunidades. Um módulo representa um conjunto de sítios com uma densidade alta de conexões entre eles e com poucas conexões com outros sítios fora do conjunto. Podemos dizer que tratam-se de subredes que se unem para formar um aglomerado maior. A identificação destas comunidades é de grande importância no estudo de redes reais. No caso de redes de polinização, por exemplo, a existência de uma comunidade revela uma relação de dependência vital entre grupos de animais e plantas. Módulos ou comunidades também são identificados em redes neurais, sendo que cada um deles controla uma determinada funcionalidade do cérebro. Na rede ilustrada na Figura 3.3, por exemplo, identificamos quatro comunidades e as expressamos utilizando quatro cores distintas. Para separar a rede em comunidades utilizamos o algoritmo denominado *walktrap* presente no pacote *igraph*.⁷⁵ Esse algoritmo consiste em distribuir caminhantes aleatórios sobre a rede e verificar o trajeto que eles percorrem em um intervalo curto de tempo. Como as ligações são densas dentro

da comunidade é pouco provável que o caminhante consiga escapar da comunidade em poucos passos. Vários outros métodos, no entanto, podem ser encontrados na literatura.^{76–78}

Além das medidas apresentadas há várias outras que podem ser utilizadas para explorar as características de uma rede. No caso de redes ecológicas, por exemplo, há um grande interesse na medida de aninhamento,⁷⁹ que consiste em determinar o quanto a distribuição das conexões da rede se aproxima da forma de um ninho e se afasta da forma aleatória. Outra propriedade, mais geral, é a centralidade de intermediação, a qual é definida como o número de geodésicas ou caminhos mais curtos entre dois sítios e que passam por um determinado sítio.⁸⁰ Embora esta propriedade seja bastante importante para a caracterização e análise de redes ela não será explorada neste trabalho.

3.4 Redes com conexões variáveis no tempo

As propriedades e modelos de redes discutidos acima aplicam-se particularmente à redes cuja estrutura é constante no tempo. No entanto, há uma ampla classe de sistemas naturais cujos elementos interagem apenas esporadicamente. Em tais sistemas dois elementos arbitrários interagem de forma direta somente em instantes de tempo específicos que podem ou não obedecer uma regra determinada. Um exemplo de sistema com interações esporádicas é o cérebro. Suas células constituintes, os neurônios, transmitem sinais elétricos para outros neurônios através de *spikes* cuja a duração é geralmente menor que o intervalo entre os mesmos.³³ Portanto, o estudo desses sistemas requer a utilização de redes com conexões variáveis no tempo para as quais as propriedades apresentadas na seção anterior precisam ser redefinidas.

Para entender melhor os sistemas cujas interações são esporádicas, vários modelos de redes com topologia variáveis têm sido propostos e analisados. O modelo piscante ou *blinking model*,³³ grafos aleatórios³⁴ e topologias dinâmicas³⁵ são alguns exemplos. Um resultado interessante a respeito da dinâmica destas redes é que, em algumas situações, o sistema comporta-se assintoticamente como se as ligações fossem constantes no tempo.^{33,38} Isto significa que nestes sistemas variáveis, algumas quantidades dinâmicas podem ser determinadas mais facilmente a partir de um modelo constante para o qual as medidas como comprimento de caminho médio e coeficiente de aglomeração estão bem definidas.

Estudos com redes não estáticas também têm mostrado que a dinâmica da topologia pode favorecer a sincronização entre os elementos da rede.³⁶ A sincronizabilidade maior de uma rede com topologia variável, em relação a uma rede com o mesmo número de conexões, mas constantes, pode ser atribuída ao fato de que, no modelo variável, todos ou quase todos os

sítios acabam interagindo diretamente uns com os outros. Estas interações, mesmo em instantes de tempo diferentes, causam um efeito médio que é proporcional à probabilidade da respectiva conexão³³ e que, portanto, pode aumentar as chances de comportamento coletivo na rede. A sincronização entre os elementos de uma rede, seja ela com topologia constante ou variável, será discutida no próximo capítulo, onde também apresentamos um método para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização de redes com topologia variável.

Há na literatura um crescente número de trabalhos envolvendo redes ou grafos com topologias variáveis.^{81,82} Nestes trabalhos, novas medidas bem como a redefinição das propriedades mencionadas têm sido propostas e discutidas. O comprimento de caminho médio, por exemplo, é calculado considerando não apenas a quantidade de arestas que separam dois sítios, mas também levando em consideração a ordem temporal em que as ligações ocorrem. Esta nova concepção de L considera, portanto, o fluxo de informação na rede e deste modo é possível obter $L \rightarrow \infty$, significando que a informação de um sítio nunca chegará a outro em um tempo finito pelo simples fato da ordem em que as conexões ocorrem não ser favorável para que isso ocorra. Neste trabalho estudamos a sincronização em redes com topologia variável no tempo. Para isso, associamos uma dinâmica caótica discreta a cada sítio da rede e analisamos a influência do acoplamento sobre ela. Trata-se, portanto, de redes de mapas acoplados.

3.5 As Redes de Mapas Acoplados

Uma rede de mapas acoplados constitui um sistema dinâmico cujas variáveis espaço e tempo são discretas e a variável de estado é contínua.⁶ Em outras palavras é uma cadeia de mapas sujeitos a um acoplamento bem definido. O modelo mais simples de uma rede de mapas acoplados é aquele em que cada elemento está conectado apenas com seus vizinhos mais próximos. Mais especificamente, ele corresponde a uma rede regular unidimensional com ligações locais. Se o acoplamento for bidirecional, então a dinâmica do sistema será dada por

$$x_{n+1}^{(i)} \mapsto F(x_n^{(i)}) = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} \left[f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) \right] \quad (3.3)$$

sendo $x_n^{(i)}$ a variável de estado do sítio i ($i = 1, 2, \dots, N$), $\varepsilon \in [0, 1]$ um parâmetro que controla a intensidade da interação entre os sítios e $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é a função não-linear que rege o mapeamento.

Note que a evolução espaço-temporal da rede, Equação (3.3), é governada simultaneamente por dois mecanismos: a dinâmica não-linear intrínseca de cada mapa e a difusão devido ao acoplamento espacial entre os mapas. Deste modo, enquanto a dinâmica local tende a sepa-

rar as trajetórias de cada elemento o acoplamento tende a aproximá-las. Portanto, a dinâmica da rede é o resultado da competição entre esses mecanismos.

De forma geral, a dinâmica de uma rede composta por mapas unidimensionais linearmente acoplados pode ser escrita como

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \sum_{j \neq i}^N [\mathbf{C}_n]_{ij} f(x_n^{(j)}), \quad (3.4)$$

em que $i (= 1, 2, \dots, N)$ denota a posição do sítio na rede e $\mathbf{C}_n = [\mathbf{C}_n]_{ij}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz de acoplamento, cujas entradas definem as conexões entre os sítios na rede. O subscrito n nesta matriz representa o caso em que as conexões podem mudar no tempo e N é o número de sítios na rede. A matriz $\mathbf{C}_n$ é uma função da matriz de adjacência. Para a rede expressa na Equação (3.3), por exemplo, ela corresponde à diferença entre matriz de adjacência normalizada e a matriz identidade, ponderada pela intensidade de acoplamento ε .

Uma representação mais compacta é obtida definindo $\mathbf{G}_n \equiv (\mathbb{I}_N + \mathbf{C}_n)$, sendo $\mathbb{I}_N$ a matriz identidade $N \times N$. Neste caso, considerando $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})^T$ o estado da rede no tempo n e $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = (f(x_n^{(1)}), f(x_n^{(2)}), \dots, f(x_n^{(N)}))^T$, a Equação (3.4) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}_n \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{H}_n(\mathbf{x}_n). \quad (3.5)$$

Neste trabalho vamos considerar que a matriz $\mathbf{G}_n$ satisfaz as seguintes condições:

$$[\mathbf{G}_n]_{ij} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^N [\mathbf{G}_n]_{ij} = 1 \quad \forall i, j, n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Estas condições asseguram que $x_n^{(i)} \in \omega$ para todo i e n , em que $\omega \subset \mathbb{R}$ define o espaço de estados do mapa, isto é, $f : \omega \rightarrow \omega$. Também assumiremos que o acoplamento é periódico e que, portanto, $x_n^{(i)} = x_n^{(i+N)}$ para todo i . Por último, a não ser que especifiquemos, consideraremos $\omega \in [0, 1]$ e N ímpar. A seguir, descrevemos alguns modelos de redes de nosso interesse nesse trabalho.

3.5.1 Rede com acoplamento do tipo lei de potência

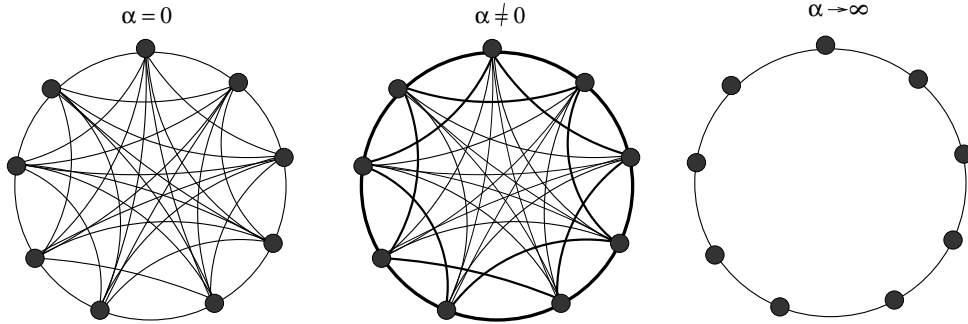
Este é um tipo acoplamento não-local onde a intensidade de interação entre os sítios depende de suas posições na rede.^{83–85} A matriz de acoplamento desta rede é constante e seus elementos podem ser escritos como:

$$[\mathbf{G}]_{ij} = \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \left[r_{ij}^{-\alpha} (1 - \delta_{ij}) - \eta(\alpha) \delta_{ij} \right] + \delta_{ij}, \quad (3.7)$$

em que ε é a intensidade do acoplamento, $\eta(\alpha) = 2 \sum_r^M r^{-\alpha}$ é um fator de normalização, com $M = (N-1)/2$ e N ímpar, $r_{ij} = \min_{l \in \mathbb{Z}} \{|i-j+ln|\}$ e α um parâmetro relacionado ao alcance e magnitude da interação entre os sítios e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

A Figura (3.5) ilustra esta forma de acoplamento para uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas e três valores distintos de α . A dependência da intensidade da interação com a distância é representada pela espessura das linhas de conexões. Note que quando $\alpha = 0$ obtemos um acoplamento em que todos os sítios da rede interagem entre si com a mesma intensidade. Neste caso, o estado de cada elemento é definido por duas contribuições: seu estado imediatamente anterior com um peso $(1 - \varepsilon)$ e pela média dos estados dos demais sítios, ou seja, $\varepsilon/(N+1)$. Esta configuração constitui o acoplamento denominado global ou de campo médio. No outro extremo do parâmetro de alcance, isto é, $\alpha \rightarrow \infty$, apenas as ligações entre os primeiros vizinhos tornam-se relevantes e, portanto, o acoplamento recupera a forma apresentada na Equação (3.3).

Figura 3.5: Representação de uma rede unidimensional com acoplamento do tipo lei de potência e condições de contorno periódicas. A espessura das linhas corresponde à intensidade de interação entre os sítios.



FONTE: O autor.

3.5.2 Acoplamento com probabilidade de conexão decaindo com a distância

Redes cuja probabilidade de conexão entre os sítios depende da distância intersticial foram estudadas como modelos para investigar impulsos nervosos transmitidos por neurônios do córtex cerebral.^{86,87} A matriz de acoplamento desta rede é uma função da matriz topologia $\mathbf{T}_n$, isto é,

$$[\mathbf{G}]_{ij} = \frac{\varepsilon}{\eta^{(i)}} \left[(1 - \delta_{ij}) [\mathbf{T}_n]_{ij} - \eta^{(i)} \delta_{ij} \right] + \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

em que ε é a intensidade do acoplamento e $\eta^{(i)} = \sum_{j=1}^N [\mathbf{T}_n]_{ij}$ é um fator de normalização. Os elementos da matriz topologia definem as conexões na rede e são dados por

$$[\mathbf{T}_n]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi > p_{ij}, \\ 1 & \text{se } \xi \leq p_{ij}, \end{cases} \quad (3.9)$$

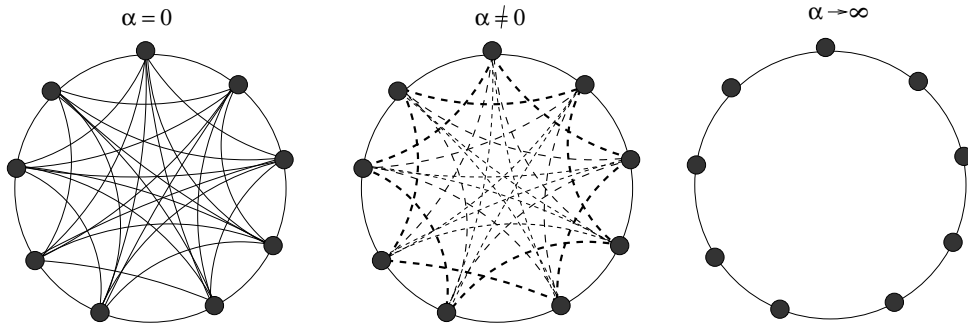
em que ξ representa um número aleatório pertencente ao intervalo $[0, 1]$ e p_{ij} é a probabilidade de conexão entre o i -ésimo e j -ésimo sítios. Então, se $[\mathbf{T}_n]_{ij}$ é 1, os sítios i e j estão conectados, caso contrário eles estão desconectados. O subscrito n denota o caso em que os elementos da matriz topologia são redefinidos a cada iterada.

A Equação (3.8) aplica-se a qualquer matriz com acoplamento probabilístico e aleatório. Aqui, consideramos que cada par i, j de sítios possui uma probabilidade de acoplamento p_{ij} dada por

$$p_{ij} = |i - j + \delta_{ij}|^{-\alpha}, \quad (3.10)$$

em que $i, j = 1, 2, \dots, N$, sendo $\alpha \geq 0$ um parâmetro de escala. Como no acoplamento do tipo lei de potência, a rede recupera a forma global, quando $\alpha = 0$, e a forma local, quando $\alpha \rightarrow \infty$. A Figura (3.6) representa este esquema de acoplamento e sua dependência com o parâmetro α .

Figura 3.6: Representação de uma rede unidimensional cuja conexão entre sítios depende de suas posições na rede. As linhas tracejadas denotam que a conexão é apenas provável e a espessura corresponde à magnitude da probabilidade de conexão entre os sítios correspondentes.



FONTE: O autor.

Neste trabalho, além da dependência espacial, assumimos que o acoplamento pode variar com o tempo. Em outras palavras, consideramos que as conexões são redistribuídas a cada iterada e, portanto, a matriz topologia é constantemente atualizada. Nossa consideração baseia-se no fato de que a maioria das redes reais não são estáticas, mas apresentam uma estrutura de nós e *links* que varia com o tempo. A dinâmica de cada sítio nesta rede pode ser escrita

como

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}) [\mathbf{T}_n]_{ij} \quad (3.11)$$

em que os elementos da matriz $[\mathbf{T}_n]$ são definidos a cada n de acordo com a Equação (3.9). Além disso, uma vez que a quantidade de conexões de um sítio pode ser diferente do outro e estas se modificam com o tempo, o fator de normalização também é atualizado a cada iterada.

Embora a probabilidade de acoplamento entre os sítios distantes seja menor, a intensidade de interação entre eles é igual à de sítios próximos, ou seja, a intensidade é independente da distância entre eles. Um caso particular desta rede corresponde à consideração $[\mathbf{T}_n]_{ij} = [\mathbf{T}_n]_{ji}$, o que estabelece um acoplamento bidirecional. Além disso, impondo condições de contorno periódicas sobre o acoplamento, definimos a distância máxima entre os sítios na rede como $\max |i - j| = (N - 1)/2$, para N ímpar. No próximo capítulo voltaremos a discutir esta forma de acoplamento.

4 A Sincronização em Redes de Mapas Acoplados

Neste capítulo definimos e analisamos o processo de sincronização em redes de mapas acoplados. Inicialmente revisamos algumas ferramentas de diagnóstico de sincronização e, na sequência, apresentamos nossa contribuição que consiste em um novo método para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização. O método é baseado em quantidades denominadas efetivas e pode ser utilizado tanto para o caso de redes com topologia constante como também para redes com topologia variável. Finalizamos o capítulo deduzindo uma expressão para as quantidades efetivas quando a topologia da rede é periódica e invariante translacionalmente.

4.1 A sincronização completa em redes de mapas

A sincronização completa em uma rede de mapas acoplados é definida como o processo no qual todos os elementos apresentam o mesmo valor para sua variável de estado no mesmo instante de tempo. Para uma rede composta por mapas unidimensionais ela é representada pela Equação (2.4) enquanto que, no caso de mapas com dimensões maiores, a sincronização diz respeito à igualdade entre as variáveis correspondentes, por exemplo, $x = x'$ e $y = y'$. De modo semelhante, no caso de um sistema composto por duas ou mais redes acopladas, considera-se que elas estão sincronizadas quando todos os elementos com índices iguais ocupam estados idênticos. Se, por exemplo, X e X' são duas redes idênticas com N mapas unidimensionais cada uma, então a sincronização completa entre elas é dada por

$$x_n^{(1)} = x_n^{(1)}, \quad x_n^{(2)} = x_n^{(2)}, \quad \dots, \quad x_n^{(N)} = x_n^{(N)}. \quad (4.1)$$

O comportamento síncrono dos elementos de uma rede depende da estabilidade do subespaço de sincronização.⁸⁸ Se este subespaço for estável, então as trajetórias tendem a se aproximar cada vez mais dele. Por outro lado, se este subespaço for instável, ocorrerá a repulsão das trajetórias em sua vizinhança. No caso de uma rede composta por mapas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o

subespaço de sincronização corresponde à diagonal do hipercubo formado pelas N variáveis de estado. Ele é definido como

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R} : x^{(i)} \equiv s \forall i \right\}. \quad (4.2)$$

Se o mapa utilizado como dinâmica local for bidimensional então $\mathcal{S}$ corresponderá a um plano e assim por diante. Para redes sujeitas à condição (3.6), que corresponde aos casos de interesse nesse trabalho, o subespaço de sincronização é invariante, isto é, $\mathbf{H}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Então, uma vez que as variáveis de estado sincronizem, a dinâmica da rede fica restrita à $\mathcal{S}$. Na verdade, se as trajetórias estão inicialmente fora de $\mathcal{S}$, exceto para o caso de super-estabilidade, elas nunca entram em $\mathcal{S}$. Contudo, dependendo da estabilidade transversal deste subespaço as trajetórias podem se aproximar de $\mathcal{S}$ até distâncias infinitesimais. Isto nos sugere um primeiro método para diagnosticar a sincronização na rede, a saber, determinar a distância da trajetória em relação ao subespaço de sincronização.

4.2 Diagnósticos de Sincronização

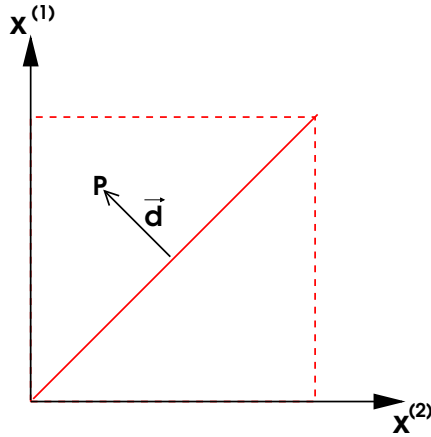
Há várias técnicas para diagnosticar a sincronização completa em uma rede de mapas acoplados. Uma delas consiste em medir diretamente a distância euclidiana da trajetória ao subespaço de sincronização.⁸⁹ Na Figura (4.1) representamos este procedimento para o caso simples de uma rede composta por dois mapas unidimensionais. O ponto P na figura corresponde ao estado da rede no tempo n e d sua distância em relação ao subespaço de sincronização. A partir da figura podemos verificar que essa distância é dada por

$$d_n \equiv \sigma_n \sqrt{N} = \sqrt{N(\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2)}, \quad (4.3)$$

em que $\langle x_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}$. Portanto, d_n é uma quantidade positiva que assume o valor mínimo quando os elementos da rede estão sincronizados.

No subespaço de sincronização d_n é identicamente nulo. No entanto, como este subespaço é invariante e os cálculos numéricos são realizados com precisão finita, considera-se que o sistema está sincronizado quando a distância é menor do que uma quantidade $\mu > 0$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Mas, dependendo das características e parâmetros do sistema, podemos obter $d_n < \mu$ em alguns instantes de tempo e $d_n > \mu$ em instantes subsequentes. Em outras palavras, a rede pode apresentar um comportamento intermitente entre um estado coerente e outro dessíncrono. Tal comportamento é geralmente observado quando os parâmetros da rede estão próximos de um valor crítico, isto é, um valor a partir do qual ocorre a transição para a sincronização. O

Figura 4.1: Espaço de fase de uma rede composta por dois mapas unidimensionais e o subespaço de sincronização correspondente (linha vermelha). O ponto P representa o estado do sistema em um instante de tempo arbitrário e d é a distância deste ponto ao subespaço de sincronização.



FONTE: O autor.

comportamento intermitente possui grande interesse de pesquisa e pode ser observado em diversos sistemas naturais.^{8,9} Apesar disso, neste trabalho, focaremos sobretudo no processo de sincronização.

Por definição, uma rede é considerada completamente síncrona se e somente se existir um $\mu > 0$ tal que $d_n < \mu$ para todo $n > \tau$, sendo τ um tempo denominado transiente. Então, para evitar que o comportamento intermitente seja confundido com o síncrono, em vez de considerar d_n analisamos $\langle d \rangle$, com a média realizada sobre longos intervalos da trajetória. Além disso, muitas vezes também consideramos o valor médio de d_n sobre várias realizações da rede ao invés de trajetórias isoladas. Se o sistema for ergódico, então ambos procedimentos são equivalentes e tanto um como o outro nos permitem inferir com confiança quando os elementos da rede estão síncronos.

O diagnóstico de sincronização dado pela distância d , Equação (4.3), é bastante útil para verificar quando os elementos de uma rede estão completamente síncronos. No entanto, se estamos interessados em diagnosticar a sincronização entre réplicas de redes, então devemos modificar a equação de modo que ela continue representando a distância ao subespaço de sincronização. Uma maneira equivalente de verificar a sincronização neste caso é determinar o erro médio ou diferença média entre todas as variáveis correspondentes.⁹⁰ Se duas réplicas X e X' de redes são utilizadas, então o erro de sincronização médio será dado por

$$\rho_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_n^{(i)} - x_n'^{(i)}|, \quad (4.4)$$

em que $w_n^{(i)}$ representa o erro local no tempo n . Como no caso do parâmetro d_n a sincronização

entre réplicas é inferida quando $\langle \rho \rangle < \mu$, sendo a média realizada sobre vários instantes de tempo ou, no caso de sistemas ergódicos, sobre várias condições iniciais.

Tanto $\langle d \rangle$ como $\langle \rho \rangle$ informam se o sistema está ou não sincronizado. No entanto, em alguns casos a identificação da sincronização exige a observação da dinâmica do sistema sobre ou após longos intervalos de tempo. Em outras palavras, o tempo transiente do sistema pode ser muito longo e uma observação curta pode conduzir a conclusões errôneas sobre os parâmetros críticos de sincronização como mostrado em.⁹¹ Então, ao invés de verificar se o sistema está ou não sincronizado podemos analisar sua tendência para a sincronização, ou seja, a taxa média com que as trajetórias se aproximam ou se afastam de $\mathcal{S}$. Uma medida bastante útil nesse caso é dada por

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \ln \left(\frac{d_{n+1}}{d_n} \right), \quad (4.5)$$

em que T refere-se ao tempo de observação. Se fizermos $T \rightarrow \infty$, então, $\lambda_{\perp}$ corresponde ao maior expoente de Lyapunov transversal ao subespaço de sincronização.⁵⁰ Os expoentes de Lyapunov são discutidos na próxima seção e constituem bons parâmetros para verificar a estabilidade de $\mathcal{S}$. No caso de sincronização entre réplicas de redes, obtém-se $\lambda_{\perp}$ apenas substituindo d por ρ na equação acima.

Além dos diagnósticos mencionados existem vários outros aos quais podemos recorrer para determinar a sincronização em uma rede de mapas acoplados. Um diagnóstico bastante utilizado, principalmente para a análise de sincronização de fase, é o parâmetro de ordem de Kuramoto.⁹² Este parâmetro possui duas versões, uma que permite uma análise global da rede e outra, proposta mais recentemente,⁹³ que informa a sincronização local, isto é, apenas entre os sítios diretamente conectados. Embora o parâmetro de ordem seja bastante útil para analisar a sincronização de fase, este pode apresentar problemas para análise de sincronização completa. Como demonstramos em um trabalho anterior,⁵⁰ quando o intervalo do mapa abrange valores positivos e negativos, o parâmetro de ordem pode indicar sincronização completa mesmo quando há uma diferença de fase igual a π . O parâmetro d , por sua vez, independe da amplitude de oscilação, ou seja, do intervalo em que o mapa é definido.

4.3 Os expoentes de Lyapunov

A sincronizabilidade de uma rede está diretamente relacionada à caoticidade do mapa utilizado como dinâmica local e às características e parâmetros de acoplamento. Então, se desejamos obter as condições ou conjunto de parâmetros que favorecem a sincronização e utilizamos

qualquer um dos diagnósticos mencionados, devemos variar os parâmetros e analisar o comportamento do sistema para cada configuração possível. No entanto, este procedimento pode ser inviável e exigir enorme esforço e tempo computacional. Um procedimento alternativo é determinar as condições sob as quais o subespaço de sincronização é estável. Como mencionamos anteriormente, se $\mathcal{S}$ é estável as trajetórias tendem a se aproximar do mesmo, caso contrário, elas tendem a se afastar. Os expoentes de Lyapunov constituem indicadores precisos da estabilidade do subespaço de sincronização. Portanto, se determinarmos os expoentes de Lyapunov em função dos parâmetros da rede podemos obter todo o conjunto de parâmetros sincronizáveis.

Além dos expoentes de Lyapunov serem bastante úteis para a análise da sincronizabilidade de uma rede, estes podem ser empregados para vários outros fins. A informação mútua, por exemplo, que é a quantidade de informação compartilhada por dois processos, pode ser determinada em termos dos expoentes de Lyapunov do sistema.^{94,95} Outra medida importante que pode ser determinada em termos destes expoentes é a taxa de escape de trajetórias em uma sela caótica.⁹⁶

Por definição, os expoentes de Lyapunov de uma rede composta por N elementos cuja dinâmica é unidimensional são dados por⁹⁷

$$\lambda_m(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_m\|, \quad (4.6)$$

em que $\mathbf{DF}^{(n)} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(n)}}{\partial \mathbf{x}}$, é a matriz jacobiana do sistema no n -ésimo instante de tempo ou iterada e $\mathbf{u}_m$ corresponde à m -ésima autodireção tangente à trajetória no espaço de fase com $m = 1, 2, \dots, N$. Portanto, para uma rede unidimensional composta por N mapas o espectro de Lyapunov é formado por N expoentes, os quais são geralmente ordenados de acordo com suas magnitudes, isto é, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$.

De acordo com a Equação (4.6) os expoentes de Lyapunov de um sistema medem a taxa da média com que as trajetórias se aproximam ou se afastam em cada autodireção independente $\mathbf{u}_m$ no espaço tangente. Portanto, se desejamos determinar a estabilidade do subespaço de sincronização, devemos calcular estes expoentes considerando trajetórias sobre $\mathcal{S}$. Neste caso, um expoente corresponderá à dinâmica no próprio subespaço de sincronização e os demais $N - 1$ expoentes informarão a taxa média de aproximação ou afastamento da trajetória em cada direção transversal à $\mathcal{S}$. Se o mapa for caótico, então o maior expoente de Lyapunov será positivo e a estabilidade de $\mathcal{S}$ será definida pelo segundo maior expoente do espectro. De fato, como os expoentes são geralmente ordenados de acordo com sua magnitude, se $\lambda_2 < 0$ então todos os demais também serão negativos e, portanto, as trajetórias tenderão a sincronizar à medida que a rede evolui.

Os expoentes de Lyapunov calculados sobre trajetórias em $\mathcal{S}$ são denominados expoentes de Lyapunov condicionais. O espectro desses expoentes para uma rede de mapas lineares por partes e logísticos acoplados localmente foi estudado por Kaneko⁸⁸ e Isola e colaboradores.⁹⁸ O correspondente espectro para redes de mapas logísticos com acoplamento global também foi considerado por Kaneko.⁸⁸ O caso do espectro para o acoplamento do tipo lei de potência foi estudado por Batista e colaboradores.^{8,99} No entanto, para redes com acoplamento com topologia variável, a obtenção dos expoentes de Lyapunov não é um procedimento direto e técnicas alternativas têm sido propostas.³⁴ No que segue, apresentamos um novo método para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização para uma classe de redes de mapas cujo acoplamento varia com o tempo. Como o método é baseado nos expoentes de Lyapunov, denominamos a quantidade obtida mediante tal método expoentes de Lyapunov efetivos. Além disso, o método se reduz aos expoentes de Lyapunov condicionais para o caso em que topologia é constante.

4.4 Os expoentes de Lyapunov efetivos

Na seção anterior vimos que os expoentes de Lyapunov condicionais medem a taxa em que as trajetórias se aproximam ou se afastam do subespaço de sincronização. Vamos investigar agora a relação entre estes expoentes com a dinâmica local e as características do acoplamento. Consideremos uma rede de mapas acoplados genérica, como aquela dada pela Equação (3.5), e calculemos os expoentes de Lyapunov condicionais para esta rede. Como no subespaço de sincronização todos os sítios da rede apresentam o mesmo valor para suas variáveis de estado, a jacobiana para trajetórias em $\mathcal{S}$ será dada por

$$\mathbf{DH}^{(n)}(s_0) = \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t \mathbf{DF}(s_t) = \left(\prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t \right) \left(\prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) \mathbb{I}_N \right), \quad (4.7)$$

sendo $f'(s_t)$ a derivada do mapa em relação a s_t e $\mathbb{I}_N$ é a matriz identidade. Usando a expressão acima podemos escrever

$$\lambda_m(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| e^{\lambda_u n} \mathbf{Q}_n \mathbf{e}_m \right| \quad (4.8)$$

em que $\lambda_u = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{t=0}^{n-1} f'(s_t) \right|$ é o expoente de Lyapunov do mapa desacoplado, $\mathbf{Q}_n = \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t$ é o produto à direita de n matrizes de acoplamento, isto é, $\mathbf{Q}_n = \mathbf{G}_{n-1} \mathbf{G}_{n-2} \cdots \mathbf{G}_0$, e $\mathbf{e}_m$ é um vetor unitário típico em $\mathbb{E}^m / \mathbb{E}^{m+1}$ com $\mathbb{E}^1 = \omega$. Denotando por χ_m o autovalor da matriz

$\mathbf{Q}_n$ associado ao autovetor $\mathbf{e}_m$ podemos reescrever a Equação (4.8) como

$$\lambda_m(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| e^{\lambda_u n} \chi_m \right| \quad (4.9)$$

De acordo com a Equação (4.9) os expoentes de Lyapunov condicionais da rede (3.5) são dados por dois termos, um relacionado à dinâmica local e o outro ao acoplamento. Além disso, para determinar tais expoentes é necessário conhecer a matriz $\mathbf{Q}_n$ para $n \rightarrow \infty$. Se as matrizes de acoplamento forem constantes então $\mathbf{G}_t \mathbf{e}_m = \Gamma_m \mathbf{e}_m$, para todo $t \geq 0$. Nesse caso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda_m(s_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \left(e^{\lambda_u} \Gamma_m \mathbf{e}_m \right)^n \right| \\ \lambda_m(s_0) &= \lambda_u + \ln |\Gamma_m|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo Γ_m o m -ésimo autovalor da matriz de acoplamento.

A Equação (4.9) indica que os expoentes de Lyapunov condicionais de uma rede com topologia constante são dados pelo expoente do mapa que rege a dinâmica local e pelos autovalores da matriz de acoplamento. Por outro lado, se as matrizes $\mathbf{G}_t$ mudam com o tempo, então os autovalores também mudarão com o tempo. Além disso, $\mathbf{Q}_n$ é, em geral, diferente para cada sequência de matrizes de acoplamento, ou seja, a matriz produto depende da ordem temporal em que os acoplamentos ocorrem. Logo, os expoentes de Lyapunov para redes com topologia variável genéricas não podem ser obtidos diretamente por meio do produto dos autovalores das matrizes de acoplamento como no caso de topologia constante.

De fato, as variações na topologia da rede tornam bastante difícil a obtenção dos expoentes de Lyapunov condicionais. Uma pequena simplificação para esse problema é alcançada se assumirmos que todas as matrizes de acoplamento satisfazem as condições (3.6). Estas condições são pouco restritivas e são assumidas naturalmente em grande parte dos trabalhos sobre redes de mapas acoplados. Matrizes que satisfazem as condições (3.6), isto é, que possuem elementos não-negativos e cuja soma das linhas é igual a unidade, são denominadas estocásticas e o produto dessas matrizes é também uma matriz estocástica.^{38,100} Para esta classe de matrizes o maior autovalor é $\chi_1 = 1$ e ele está associado ao autovetor $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}[1, \dots, 1]^T$. Portanto, independentemente da topologia ser constante ou variável, o maior expoente de Lyapunov de uma rede de mapas acoplados dada por (3.5) e que satisfaz (3.6) será igual ao expoente de Lyapunov do mapa desacoplado.

Como vimos anteriormente o maior expoente de Lyapunov está associado à dinâmica no subespaço de sincronização e para determinar a estabilidade de $\mathcal{S}$, precisamos determinar

os demais expoentes de Lyapunov, que são os expoentes transversais à $\mathcal{S}$. No entanto, a determinação dos expoentes λ_m para $m > 1$ exige a conhecimento dos demais autovalores de $\mathbf{Q}_n$ que, em geral, dependem da sequência de matrizes de acoplamento. Um ponto importante aqui é que o produto de matrizes estocásticas resulta novamente em uma matriz estocástica. Portanto, se ortonormalizarmos os autovetores da matriz $\mathbf{Q}_n$, com exceção do vetor de Perron, todos os demais autovetores terão elementos cuja a soma será nula. Logo, podemos afirmar que $\mathcal{S}$ é estável se e somente se

$$\max_{\|\mathbf{e}_m\|=1, \mathbf{e}_m^T \cdot \mathbf{e}_1=0} \ln |\mathbf{Q}_n \mathbf{e}_m| < -\lambda_u. \quad (4.11)$$

A quantidade do lado esquerdo da Equação (4.11) é conhecida na teoria de matrizes estocásticas como coeficiente de ergodicidade.¹⁰¹ Embora a desigualdade seja sempre válida ela não nos parece, a primeira vista, bastante útil. Isto porque, dependendo do tamanho das matrizes de acoplamento, podem existir uma quantidade enorme de autovetores $\mathbf{e}_m$ que satisfazem $\mathbf{e}_m^T \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ e, portanto, encontrar aquele que resulte no máximo autovalor pode ser algo impraticável.

Outra propriedade importante do produto de matrizes estocásticas diz respeito ao limite do produto de matrizes quando $n \rightarrow \infty$. Se, além de estocásticas, as matrizes de acoplamento forem *scrambling*, isto é, se para quaisquer duas linhas i, j existir no mínimo uma coluna k tal que $[\mathbf{G}_t]_{ik} > 0$ e $[\mathbf{G}_t]_{jk} > 0$,¹⁰² então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t = \mathbf{Q} \quad \text{e} \quad \text{rank}(\mathbf{Q}) = 1. \quad (4.12)$$

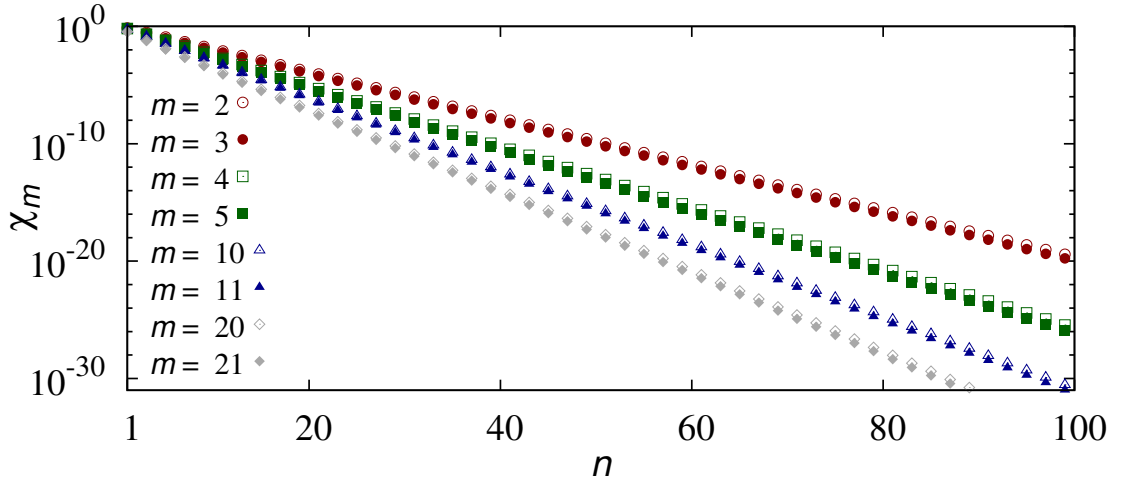
Na realidade não é necessário que todas as matrizes do produto sejam *scrambling* para que $\mathbf{Q}_n \rightarrow \mathbf{Q}$ quando n cresce. Se pelo menos uma matriz $\mathbf{G}_t$ for *scrambling*, o produto desta por qualquer outra matriz estocástica resultará em uma matriz *scrambling* e, portanto, ocorrerá a convergência.

Suponha, então, que o produto de matrizes de acoplamento da rede (3.5) tende a uma matriz de *rank* 1 quando $n \rightarrow \infty$. Uma demonstração da convergência do produto de matrizes estocásticas descrevendo o acoplamento de uma rede de mapas acoplados genérica é apresentada no Apêndice A. Como uma matriz $N \times N$ de *rank* 1 possui $N - 1$ autovalores nulos então, substituindo este resultado em (4.9), obteríamos $\lambda_m = -\infty$ para todo $m > 1$. Por outro lado, se o sistema é caótico, então, $\lambda_u > 0$ e, portanto, $\lambda_u n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$. Definimos, então, uma nova quantidade $\theta_m \equiv (\chi_m)^{\frac{1}{n}} = |\mathbf{Q}_n \mathbf{e}_m|^{\frac{1}{n}}$. Substituindo esta quantidade em (4.9) ficamos com

$$\lambda_m(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(e^{\lambda_u n} \theta_m \right)^n = \lambda_u + \ln(\theta_m) = \lambda_u + \hat{\lambda}_m \quad (4.13)$$

Chamamos a quantidade θ_m de autovalor efetivo e o logaritmo desta quantidade de expoente de Lyapunov efetivo ($\hat{\lambda}_m$). Tal quantidade representa a taxa em que os autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ tendem a zero quando n cresce. Na Figura (4.2) mostramos o comportamento de alguns autovalores χ_m para a rede com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância entre os sítios, Equações (3.8) e (3.10). Podemos observar que eles decaem obedecendo uma curva exponencial e que, portanto, poucos produtos são necessários para obter uma boa estimativa das quantidades θ_m . Isto ocorre porque, tipicamente, em um pequeno conjunto, observamos os acoplamentos mais prováveis, os quais têm maior influência sobre a estabilidade de $\mathcal{S}$ desde que a magnitude do m -ésimo autovalor de todas as matrizes possíveis sejam similares.

Figura 4.2: Decaimento de alguns autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ em função da quantidade de matrizes envolvidas no produto. Estes valores referem-se à rede com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância entre os sítios, Equação (3.10), e valores de parâmetro $N = 21$, $\varepsilon = 0,5$ e $\alpha = 0,5$.



FONTE: O autor.

Para grande parte das redes a estabilidade linear de $\mathcal{S}$ implica sincronização. Supondo que este seja o caso, podemos dizer que a rede sincronizará se a seguinte condição for satisfeita:

$$e^{\lambda_u} \theta_m < 1 \quad \text{ou} \quad \hat{\lambda}_m < -\lambda_u \quad \forall m > 0. \quad (4.14)$$

Esta equação estabelece que se a razão de convergência do produto de matrizes para $\mathbf{Q}$ for maior do que a instabilidade da dinâmica local a sincronização será possível, caso contrário não. Na realidade basta que $\hat{\lambda}_2$ seja menor do que $-\lambda_u$ para que possamos inferir a estabilidade de $\mathcal{S}$. Uma abordagem semelhante, mas usando outro parâmetro para medir a convergência das matrizes, foi apresentada por Jost e colaboradores.^{34,37} Mais precisamente, eles consideraram como parâmetro o diâmetro de Hajnal, o qual corresponde à diferença máxima entre as linhas

da matriz, isto é,

$$\text{diam}(\mathbf{Q}_n) = \max_{i,j} \|q_i - q_j\|, \quad (4.15)$$

sendo q_i o vetor correspondente à i -ésima linha de $\mathbf{Q}_n$. A condição de sincronização em termos do diâmetro de Hajnal foi expressa como

$$\text{diam}(\mathbf{Q}_n)e^{\lambda_u} < 1. \quad (4.16)$$

Note que, tanto θ_m como $\text{diam}(\mathbf{Q}_n)$ expressam a convergência do produto de matrizes para uma matriz de *rank* 1 quando n cresce. Ambas as quantidades permitem determinar a estabilidade do subespaço de sincronização independentemente da topologia da rede variar ou não, ou seja, foram definidas sem atentar para a variação ou não das matrizes de acoplamento. Além disso, nenhuma restrição foi imposta sobre a construção das matrizes de acoplamento, exceto que elas sejam estocásticas e *scrambling*. Para o caso em que o acoplamento é estático, então os θ_m correspondem aos próprios autovalores de $\mathbf{G}_n$. Por outro lado, se o acoplamento muda com o tempo, então θ_m representa a taxa de variação dos autovalores com o número de matrizes envolvidas no produto. No que segue, descrevemos como podemos calcular os autovalores efetivos para uma classe de rede com acoplamento variável no tempo.

4.5 Cálculo dos autovalores efetivos: caso I

Na seção anterior vimos que os autovalores efetivos descrevem a taxa de decaimento dos autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ quando n cresce. Também vimos que, em geral, os autovalores dessa matriz dependem da sequência considerada. Vamos demonstrar, agora, que sob certas condições é possível obter uma expressão fechada para os autovalores efetivos de uma rede com topologia variável. Na sequência mostraremos um procedimento alternativo para determinar estes autovalores para redes com topologia variável sob condições menos restritivas.

Consideremos novamente a rede genérica dada pela Equação (3.5), mas com a topologia da rede variando no tempo de modo estocástico. Além disso, impomos que a topologia em cada intervalo de tempo é invariante sobre translações na rede. Estas restrições fazem com que as matrizes de acoplamento $\mathbf{G}_t$ pertençam à classe de matrizes denominadas circulantes. Matrizes circulantes são aquelas cujas linhas abaixo da primeira são iguais a linha imediatamente anterior com o deslocamento cíclico dos elementos.¹⁰³ Portanto, estas matrizes são completamente definidas especificando apenas a primeira linha. Do ponto de vista da configuração de conexões na rede isto significa que o acoplamento de todos os sítios é determinado especi-

ficando apenas as conexões de um sítio já que a mesma distribuição de conexões é imposta para todos os outros. A periodicidade da topologia da rede também faz com que não haja direção preferencial para o acoplamento. Em outras palavras, não há razão para estabelecer um acoplamento à direita e nenhum à esquerda.

Além das condição de invariância translacional da topologia também assumimos que o acoplamento é bidirecional, ou seja, que $[\mathbf{T}_n]_{ij} = [\mathbf{T}_n]_{ji}$. Isto significa que as matrizes de acoplamento da rede serão necessariamente simétricas. Logo, todas as matrizes de acoplamento possíveis bem como o produto destas representam matrizes simétricas e circulantes. Estas características da topologia da rede, porém, não dependem da regra de probabilidade que define cada matriz de acoplamento possível.

Vimos no capítulo anterior que a matriz de acoplamento é definida em termos da matriz topologia. A probabilidade de ocorrer uma matriz de acoplamento específica depende somente das entradas dessa matriz. Se as regras que especificam as probabilidades de acoplamento são bem definidas e não mudam com o tempo, então os elementos da matriz topologia são dados por (3.9). No entanto, para que as condição de invariância translacional seja satisfeita impomos que

$$[\mathbf{T}_n]_{ij} = [\mathbf{T}_n]_{0(j-i \bmod N)}. \quad (4.17)$$

Portanto, para a rede em questão, a probabilidade de ocorrer uma determinada matriz de acoplamento k é

$$\pi_k = \prod_{r=0}^M (p_{ij} [\mathbf{T}_k]_{0r} + (1 - p_{ij})(1 - [\mathbf{T}_k]_{0r})), \quad (4.18)$$

em que $M = (N - 1)/2$. Note que há, no máximo, $K_N = 2^{\frac{(N+1)}{2}}$ matrizes distintas e para cada $p_{ij} = 0$ ou $p_{ij} = 1$, K_N é reduzido por um fator 2. A evolução da rede é, então, obtida selecionando uma matriz $\mathbf{G}_t$ do conjunto $\{\mathbf{G}_k\}_{k=1}^{K_N}$ a cada instante t de acordo com a probabilidade π_k .

A invariância translacional da topologia da rede implica o mesmo grau de conectividade κ_n para todos os sítios no mesmo instante n . E, considerando a evolução temporal da rede, κ_n segue uma distribuição poissoniana. Esta forma de distribuição deve-se sobretudo à consideração de que as probabilidades p_{ij} 's são independentes uma da outra. No entanto, diferentes distribuições podem ser obtidas realizando uma transformação das probabilidades π_k de acordo com suas respectivas conectividades.

Como as condição de invariância translacional assegura que todas as matrizes de acoplamento sejam circulantes, podemos escrever uma expressão fechada para os autovalores efetivos.

Isto é possível porque todas as matrizes circulantes compartilham a mesma base e, consequentemente, comutam entre si. Considere, por exemplo, uma sequência específica de matrizes

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{G}^{(k_{t-1})} \mathbf{G}^{(k_{t-2})} \dots \mathbf{G}^{(k_1)} \mathbf{G}^{(k_0)}, \quad (4.19)$$

em que k_t é um índice que identifica a matriz de acoplamento observada, no tempo t , dentre as K_N matrizes de acoplamento possíveis. Como mencionamos anteriormente, a evolução temporal da rede depende das sequência de matrizes $\mathbf{G}_t$ obtidas do conjunto $\{\mathbf{G}_t\}_{k=1}^{K_N}$. No entanto, como todas as matrizes $\mathbf{G}_t$ da rede são circulantes e, portanto, têm a mesma base, podemos escrever

$$\mathbf{Q}_n = \prod_{k=1}^{K_N} \left(\mathbf{G}^{(k)} \right)^{v_k}, \quad (4.20)$$

em que v_k representa quantas vezes foi observada a matriz $\mathbf{G}^{(k)}$ e, portanto, $\sum_k v_k = n$. No limite $n \rightarrow \infty$ a frequência em que ocorreu uma dada matriz k será $v_k = n\pi_k$. Então, podemos escrever

$$\mathbf{Q}_n \mathbf{e}_m = \prod_{k=1}^{K_N} \left(\mathbf{G}^{(k)} \right)^{v_k} \mathbf{e}_m = \prod_{k=1}^{K_N} \left(\Gamma_m^{(k)} \right)^{n\pi_k}. \quad (4.21)$$

Considerando $|\mathbf{Q}_n \mathbf{e}_m|^{1/n} = \theta_m$, obtemos

$$\theta_m = \prod_{k=1}^{K_N} \left(\Gamma_m^{(k)} \right)^{\pi_k}, \quad (4.22)$$

em que o produto se estende sobre todas as matrizes de acoplamento possíveis, e $\Gamma_m^{(k)}$ é o m -ésimo autovalor da k -ésima matriz de acoplamento. Aqui e no que se segue $\Gamma_m^{(k)}$ e θ_m não estão indexados de acordo com suas magnitudes, mas de acordo com seus respectivos autovetores cujas componentes são $h_q^{(w)} = \exp(-(2\pi i)qw/N) / \sqrt{N}$.¹⁰³ Note que, devido a simetria das matrizes, $\Gamma_m^{(k)} = \Gamma_{N-m}^{(k)}$ e, portanto, todos os θ_m para $m > 1$ são degenerados. Se, para algum k , $\Gamma_m^{(k)} = 0$, então $\theta_m = 0$, isto significa que o sistema é super-estável na m -ésima direção. Nesta situação qualquer implementação do sistema resulta em superestabilidade na m -ésima direção. Logo, se $\theta_m = 0$ em todas as direções transversais à $\mathcal{S}$, então o subespaço de sincronização será super-estável. No entanto, na média, o tempo necessário para que uma trajetória típica experimente os efeitos de superestabilidade é da ordem de π_k^{-1} . Portanto, este efeito dificilmente será observado.

De acordo com a Equação (4.22), se conhecermos todas as matrizes de acoplamento possíveis, podemos determinar os N autovalores efetivos simplesmente ponderando os autovalores de cada matriz pela probabilidade dela ocorrer. Então, de posse desses autovalores podemos determinar todo o espectro de expoentes de Lyapunov efetivos, que são os próprios

expoentes de Lyapunov condicionais da rede, usando a Equação (4.13). Além disso, no caso em que a estabilidade linear implica sincronização, podemos investigar o conjunto de parâmetros com os quais a rede sincroniza verificando se as condições (4.14) são ou não satisfeitas. Um problema que surge, no entanto, é que a quantidade de matrizes de acoplamento possíveis cresce rapidamente com o tamanho da rede, o que torna o procedimento inviável no caso de redes grandes. Em tais situações, podemos obter uma boa aproximação dos autovalores efetivos considerando apenas as matrizes mais frequentes. Mais precisamente, evoluímos a rede e verificamos todos os acoplamentos ocorridos em um intervalo longo de tempo. Calculamos os autovalores destas matrizes e usamos (4.22) para obter uma aproximação dos autovalores efetivos.

4.6 Cálculo dos autovalores efetivos: caso II

De forma geral os autovalores efetivos são determinados a partir do decaimento dos autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ quando n cresce. Para o caso em que a topologia em cada instante é invariante sobre translações na rede mostramos que eles podem ser obtidos diretamente da Equação (4.22). Esta equação pode ser demonstrada usando a própria razão de decaimento, dado que o produto de matrizes circulantes resulta novamente em uma matriz circulante. No entanto, se as matrizes não possuem a mesma base então não podemos obter uma expressão para a taxa média do decaimento dos autovalores e devemos, deste modo, acompanhar o produto de matrizes de acoplamento à medida em que elas ocorrem.

Para determinar a razão de decaimento dos autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ com uma boa precisão é necessário acompanharmos o produto de várias matrizes de acoplamento. Mas, como estas matrizes possuem elementos menores do que a unidade, precisamos utilizar uma grande precisão numérica nos cálculos, o que pode tornar o processo lento ou mesmo inviável. Na Figura (4.2), por exemplo, utilizamos uma precisão de 100 bits para demonstrar o decaimento exponencial dos autovalores durante o produto de 100 matrizes de acoplamento. Ocorre que, em geral, os autovalores não decaem com a mesma razão e, portanto, enquanto refinamos a taxa de decaimento dos autovalores maiores os menores podem estar na ordem da precisão da máquina. Por outro lado, se o produto de matrizes tende a convergir para uma matriz cujos autovetores é conhecido, então podemos determinar os autovalores efetivos usando um procedimento alternativo, o qual descrevemos a seguir.

Para demonstrar o novo procedimento continuaremos utilizando a condição de invariância translacional. No entanto, ao invés de considerar uma topologia invariante, vamos con-

siderar agora que a probabilidade de acoplamento é invariante sobre translação na rede. Isto significa que todos os sítios da rede apresentam a mesma distribuição de probabilidade de conexão. Esta condição é menos restritiva que aquela analisada na seção anterior e nos parece bastante plausível uma vez que o etiquetamento dos sítios de uma rede é realizado arbitrariamente. Além disso, a invariância na probabilidade de conexão abrange uma série de modelos para redes reais, como as redes do tipo *small-world*, nas quais geralmente é assumida a mesma probabilidade de conexão para todos os sítios.

Além da invariância da probabilidade de conexão vamos considerar que a rede é periódica e que a matriz de acoplamento é atualizada a cada instante de tempo. Então, para n suficientemente longo esperamos que uma grande quantidade de conexões possíveis sejam observadas. Um exemplo de rede periódica com probabilidade de conexão invariante sobre translação é a rede representada na Figura 3.6. Portanto, a análise a seguir permite determinar os autovalores efetivos de uma rede com probabilidade de conexão decaindo com a distância.

O primeiro passo do novo procedimento consiste em encontrar o conjunto de autovetores que represente a matriz $\mathbf{Q}_n$ para um determinado n . Dado que as matrizes de acoplamento são estocásticas, sabemos que um autovetor desse conjunto é necessariamente o vetor de Perron $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}[1, \dots, 1]^T$. Consequentemente, para que os demais autovetores formem uma base ortonormal eles devem ser tais que $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_m = 0$, para todo $m > 1$. Isto significa que a soma das coordenadas dos demais autovetores deve ser nula. Então, se $\mathbf{Q}_n \rightarrow \mathbf{Q}$ quando n cresce, o produto da primeira por qualquer autovetor com soma nula informará o quão próximo de $\mathbf{Q}$ a matriz $\mathbf{Q}_n$ se encontra, sendo identicamente nulo se $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}$. Portanto, analisando os coeficientes de projeção da matriz $\mathbf{Q}_n$ sobre uma base ortonormal contendo o vetor de Perron, podemos estimar os autovalores efetivos da rede ou, pelo menos, o segundo maior autovalor. Mas, como no caso do decaimento dos autovalores, precisamos também aqui utilizar grande precisão numérica.

Em vez de projetar a matriz $\mathbf{Q}_n$ sobre uma base ortonormal contendo o vetor de Perron, lançamos a hipótese de que os vetores de Lyapunov da rede com probabilidade de conexão invariante são os autovetores da base circulante, isto é, supomos que $\mathbf{e}_m = \mathbf{h}_m$. Os vetores de Lyapunov são os vetores que definem as direções de expansão e contração de um bola de condições iniciais sob a ação de um sistema dinâmico. Nossa hipótese é baseada no fato de que, após um longo intervalo de tempo, todos os acoplamentos possíveis ocorrerão. Como a configuração de probabilidades de conexão de cada sítio é a mesma, então todos eles vão interagir com o mesmo número de sítios e esta interação respeitará a mesma configuração espacial. Em outras palavras, estamos dizendo que o efeito médio da interação, após um tempo suficientemente longo, será equivalente ao de uma rede cuja matriz de acoplamento é circulante. Com

esse argumento podemos determinar os coeficientes $\hat{\lambda}_m$ por meio da equação:

$$\hat{\lambda}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln |(\mathbf{G}_t \mathbf{h}_m)^\dagger \mathbf{h}_m|, \quad (4.23)$$

em que $\dagger$ denota a transposta conjugada. Como estamos assumindo que $\mathbf{h}_m$ é um vetor de estado, a quantidade $|\cdots|$ informa a projeção do estado evoluído $(\mathbf{G}_t \mathbf{h}_m)$ sobre o vetor de estado atual. De fato, se $\mathbf{h}_m$ são os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$, os expoentes $\hat{\lambda}_m$ calculados a partir da Equação (4.23) quantificam a taxa média de deformação (expansão ou contração) de vetores típicos no subespaço formado pelos vetores $\mathbf{h}_m$.

Usando a relação $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ podemos reescrever a equação (4.23) como

$$\hat{\lambda}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln |\mathbf{h}_m^\dagger \mathbf{G}_t^T \mathbf{h}_m| \quad (4.24)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\| \mathbf{h}_m^\dagger \left(\sum_{r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} h_q^{(r)} \right) \right\| \quad (4.25)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\| \sum_{s=0}^{N-1} h_m^{\dagger(s)} \sum_{r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} h_q^{(r)} \right\| \quad (4.26)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\| \sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} h_m^{\dagger(s)} h_q^{(r)} \right\|. \quad (4.27)$$

A equação acima independe da base formada pelos vetores de Lyapunov. Nossa hipótese é que estes vetores correspondem aos autovetores de uma matriz circulante cujos elementos são dados por

$$h_m^{(q)} = (1/\sqrt{N}) e^{-2\pi i q m / N}. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.27) ficamos com

$$\hat{\lambda}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\| \sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} \frac{1}{N} e^{2\pi i m s / N} e^{-2\pi i m r / N} \right\| \quad (4.29)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\| \frac{1}{N} \sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} e^{2\pi i m (s-r) / N} \right\|. \quad (4.30)$$

Enfim, usando a relação de Euler $e^{\pm i\phi} = \cos(\phi) \pm i\sin(\phi)$ e tomando o módulo obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left\{ \frac{1}{N^2} \left(\sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} \cos \left(\frac{2\pi m(s-r)}{N} \right) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{N^2} \sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} \sin \left(\frac{2\pi m(s-r)}{N} \right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \hat{\lambda}_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n \ln \left\{ \frac{1}{N^2} \left[\left(\sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} \cos \left(\frac{2\pi m(s-r)}{N} \right) \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{G}_t]_{s,r} \sin \left(\frac{2\pi m(s-r)}{N} \right) \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.31)\end{aligned}$$

Note que se substituirmos o índice m por $N - m$ na equação acima obtemos a mesma expressão do lado direito, isto é, encontramos $\hat{\lambda}_m = \hat{\lambda}_{N-m}$. Isto significa que, os autovalores efetivos são degenerados aos pares.

A Equação (4.31) constitui uma nova maneira de determinar os expoentes de Lyapunov efetivos de redes com topologia variável com probabilidade decaindo com a distância. Uma vez que ela não envolve o produto de matrizes ela não requer a utilização de grande precisão numérica. No próximo capítulo mostraremos que utilizando os expoentes de Lyapunov calculados por meio da equação (4.31) conseguimos construir uma rede com acoplamento estático que exhibe as mesmas propriedades de sincronização que uma rede com topologia variável. Portanto, mesmo que nossa suposição inicial de que os vetores de Lyapunov sejam os vetores da base circulante possa ser questionada, a projeção das matrizes sobre esta base resgata todas as características da rede na transição para a sincronização, o que significa um grande passo para o entendimento de redes com topologia variável.

5 Sistema Efetivo para Redes com Topologia Variável no Tempo

No capítulo anterior apresentamos um método para investigar a estabilidade do subespaço de sincronização de redes com topologia variável. O método foi desenvolvido com base em quantidades denominadas efetivas cujo significado físico é o mesmo das quantidades usuais. Neste capítulo utilizaremos as quantidades efetivas para construir uma rede com topologia estática, a qual denominamos sistema efetivo. Mostraremos que este sistema exibe as mesmas propriedades de sincronização da rede com topologia variável a partir da qual ele é gerado. Portanto, o sistema efetivo tem por finalidade corroborar o papel das quantidades efetivas para a análise da sincronização e, ao mesmo tempo, propiciar um modelo mais simples para obter informações da dinâmica de uma rede com topologia variável no tempo. Antes de apresentar o sistema efetivo discutiremos sobre o modelo auxiliar de uma rede com topologia variável, o qual também constitui um sistema com topologia constante. Mostraremos que este modelo, bastante utilizado para redes cuja dinâmica local é descrita por equações diferenciais, pode falhar e superestimar os parâmetros de sincronização quando a dinâmica local é governada por mapas. Propomos, então, o sistema efetivo como um modelo auxiliar alternativo para o estudo de sincronização em redes de mapas acoplados com topologia variável. Finalizamos o capítulo mostrando a construção do sistema efetivo para as duas redes de mapas acoplados com topologia variável discutidas no capítulo anterior bem como para uma rede do tipo *small-world*.

5.1 O Modelo Auxiliar

O modelo auxiliar de uma rede com topologia variável é um esquema de acoplamento constante em que as interações representam o efeito médio de longas observações da rede com topologia variável. A construção deste esquema de acoplamento é simples e consiste em substituir a matriz $\mathbf{G}_t$, cujas entradas são atualizadas a cada instante ou período de tempo, por uma matriz $\mathbf{G}_{med}$ cujas entradas são ponderadas pela probabilidade de conexão do modelo variável.

Considere, por exemplo, uma rede cuja matriz de acoplamento é uma função da matriz topologia. Nesse caso, o modelo auxiliar é obtido substituindo os elementos $[\mathbf{T}]_{ij}$ da matriz topologia por p_{ij} , em que p_{ij} é a probabilidade de $[\mathbf{T}]_{ij}$ ser não-nulo. Portanto, se considerarmos uma matriz de acoplamento da forma (3.8), o modelo auxiliar será dado por

$$\mathbf{G}_{med} = \frac{\varepsilon}{\eta^{(i)}} [(1 - \delta_{ij})p_{ij} - \eta(\alpha)\delta_{ij}] + \delta_{ij}, \quad (5.1)$$

em que $\eta^{(i)} = \sum_j^N p_{ij}$ é o fator de normalização e p_{ij} a probabilidade de acoplamento entre os sítios i e j . Portanto, se todos os sítios da rede com topologia variável apresentam uma probabilidade não nula de conexão com qualquer outro sítio, a matriz $\mathbf{G}_{med}$ representa um acoplamento do tipo global.

Para a rede com topologia variável cuja probabilidade de acoplamento decai com a distância entre os sítios, Equação (3.10), obtemos a seguinte matriz de acoplamento auxiliar

$$\mathbf{G}_{med} = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \dots & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \dots & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \dots & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & (1 - \varepsilon) & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} \\ \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \dots & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 2^{-\alpha} & \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} 1^{-\alpha} & (1 - \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Note que esta matriz representa o acoplamento do tipo lei de potência descrito pela Equação (3.7). Portanto, o modelo auxiliar da rede cuja probabilidade de acoplamento depende da distância é uma rede em que a interação entre os sítios decai com a distância intersticial. Isto significa que, se o modelo auxiliar é capaz de recuperar as propriedades dinâmicas do modelo variável, então podemos optar entre uma rede com acoplamento global e intensidade variável ou uma rede com acoplamento variável e intensidade igual para todos os sítios.

Uma maneira de verificarmos se o modelo auxiliar e variável exibem as mesmas propriedades dinâmicas de sincronização é por meio dos expoentes de Lyapunov condicionais. Para a rede com acoplamento do tipo lei de potência, Anteneodo e colaboradores¹⁰⁴ mostraram que os expoentes de Lyapunov condicionais são dados por

$$\lambda_{k+1} = \lambda_u + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(2\pi k j / N)}{j^\alpha} \right|, \quad (5.2)$$

com $k = 0, 1, \dots, N-1$ e $M = (N-1)/2$. Então, para verificar a equivalência da dinâmica transversal ao subespaço de sincronização de ambos os modelos precisamos calcular os ex-

poentes de Lyapunov condicionais para a rede com topologia variável e compará-los com aqueles dados por (5.2). No entanto, como a sincronizabilidade da rede é determinada basicamente pelo segundo maior expoente de Lyapunov condicional, não precisamos considerar todo o espectro de expoentes mas apenas os dois maiores expoentes transversais à $\mathcal{S}$. Definimos, então, a quantidade

$$\Delta\lambda_T \equiv \lambda_2^{(d)} - \lambda_2^{(e)}, \quad (5.3)$$

em que $\lambda_2^{(e)}$ e $\lambda_2^{(d)}$ representam os expoentes para rede com acoplamento estático e dinâmico, respectivamente.

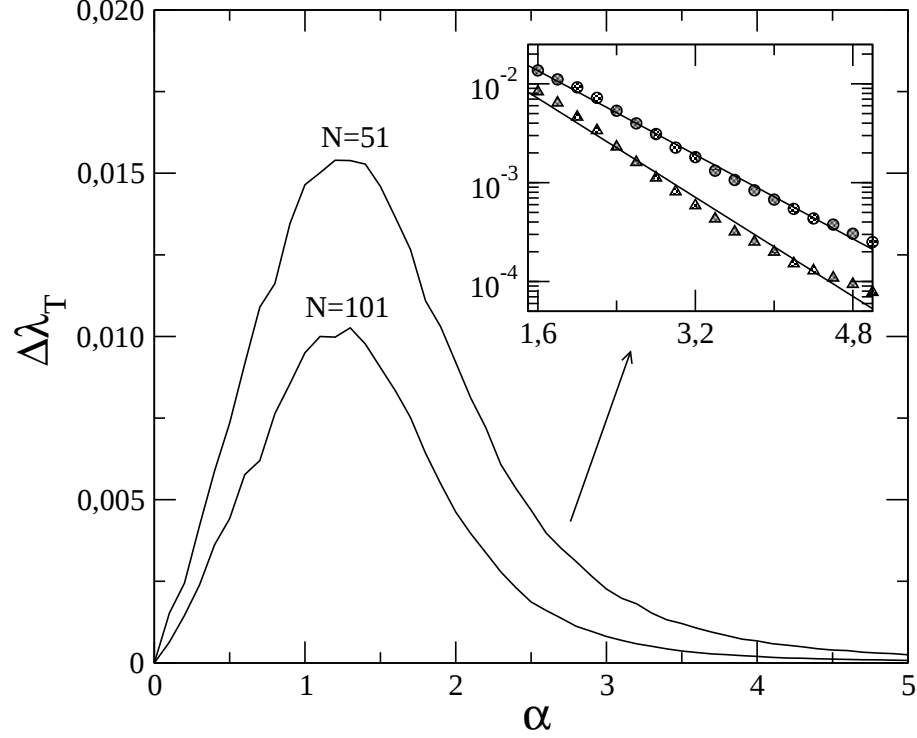
A Equação (5.3) nos dá uma medida de quão próximas ou distintas são as dinâmicas dos modelos na direção mais instável ou menos estável transversal ao subespaço de sincronização. Além disso, no caso em que os modelos apresentam dinâmicas distintas, podemos utilizá-la para determinar qual dos sistemas possui maior estabilidade. De fato, se os parâmetros (α, ε) forem escolhidos de tal maneira que $\lambda_2^{(e)}$ e $\lambda_2^{(d)}$ sejam ambos positivos ou negativos, então se $\Delta\lambda_T < 0$ podemos inferir que a rede com acoplamento variável é mais sincronizável, caso contrário, se $\Delta\lambda_T > 0$, inferimos que a rede auxiliar é mais sincronizável.

Usando as equações (4.13) e (4.31) para determinar o expoente $\lambda_2^{(d)}$, investigamos o comportamento de $\Delta\lambda_T$ em função dos parâmetros da rede. A Figura (5.1) mostra o comportamento desta quantidade à medida que variamos α . Como era esperado a diferença é nula para $\alpha = 0.0$ e para α suficientemente grande, já que ambos os casos recuperam a forma local e global de acoplamentos. No entanto, para valores intermediários a diferença é não-nula, o que significa que os modelos não apresentam a mesma dinâmica transversal. Inicialmente ocorre um crescimento da diferença e, quando $\alpha \approx 1,2$, ela começa a decair. Para $\alpha > 1,5$, o melhor ajuste dos pontos (*inset*) sugere um decaimento exponencial da diferença. Portanto, independentemente do parâmetro α temos $\Delta\lambda_T \geq 0$, o que nos permite inferir que a rede auxiliar é mais sincronizável do que a rede com topologia variável.

Na Figura (5.1) também podemos verificar que a diferença $\Delta\lambda_T$ é menor para $N = 101$ do que para $N = 51$. Este resultado nos motiva a investigar o comportamento $\Delta\lambda_T$ em função do tamanho da rede. Para isso, fixamos os valores dos parâmetros α e ε em 1,2 e 0,5, respectivamente, e calculamos a diferença entre os expoentes para vários tamanhos de rede. Podemos observar na Figura (5.2) que $\Delta\lambda_T$ decai com N segundo uma curva do tipo lei de potência. Este resultado nos indica que, no limite de $N \rightarrow \infty$, as redes com acoplamento variável e estático apresentam, do ponto de vista da sincronização, o mesmo comportamento assintótico.

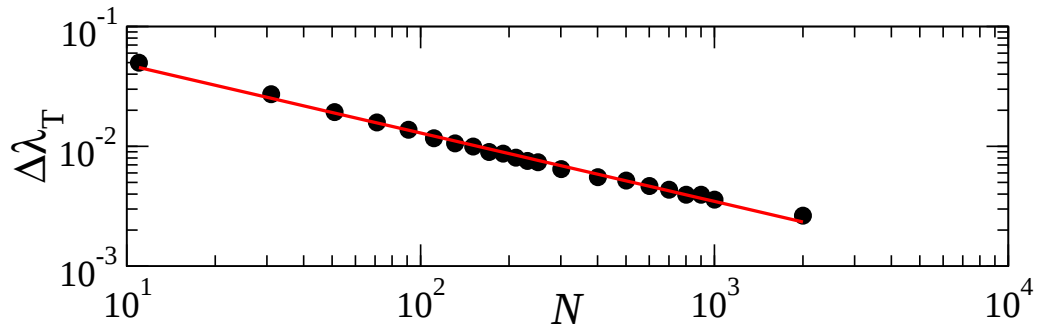
O comportamento lei de potência da diferença $\Delta\lambda_T$ com relação ao tamanho da rede

Figura 5.1: Diferença entre o maior expoente de Lyapunov transversal à $\mathcal{S}$, das redes com acoplamento variável e constante, em função do parâmetro α . Para ambas as redes utilizamos $\varepsilon = 0,5$, $N = 51$ and 101 e, para o cálculo dos expoentes $\lambda^{(d)}$, consideramos 10^3 matrizes de acoplamento para cada valor de α . O *inset* exibe a diferença, em escala log, na região de $\alpha > 1,5$.



FONTE: O autor.

Figura 5.2: Diferença entre o segundo maior expoente de Lyapunov condicional do modelo auxiliar e da rede com topologia variável em função do tamanho da rede. Os dados correspondem aos parâmetros $\varepsilon = 0,5$ and $\alpha = 1,2$ e $\lambda_2^{(d)}$ foi determinado considerando a evolução da rede sobre 10^5 iteradas.

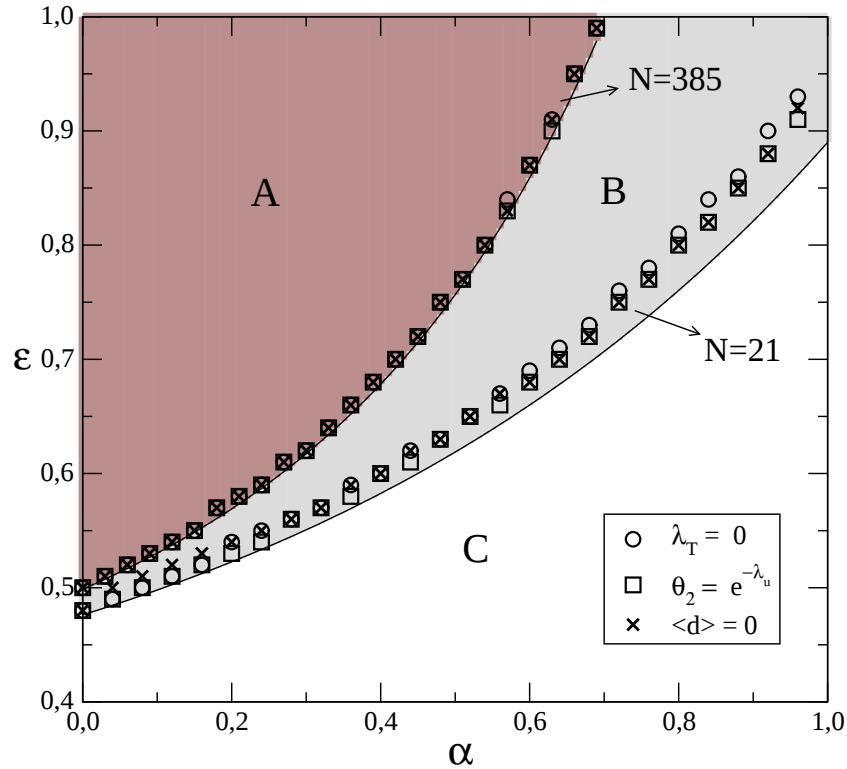


FONTE: O autor.

também sugere que, para redes suficientemente grandes, os sistemas apresentam os mesmos expoentes críticos de sincronização. Então, usando a condição de nulidade de λ_T e $\langle d_n \rangle$ investigamos o conjunto de parâmetros $[\varepsilon, \alpha]$ a partir dos quais as redes sincronizam. Além dos autovalores efetivos também consideramos o método de ortonormalização de Gram-Schmidt⁵¹ para obter os parâmetros sincronizáveis da rede com acoplamento variável. Na Figura (5.3) mostramos a fronteira de sincronização para $N = 21$ e $N = 385$. Nossa escolha de $N = 385$

baseia-se nos resultados apresentados em,⁸⁹ os quais sugerem este tamanho de rede como o mínimo prático para o limite termodinâmico.

Figura 5.3: Domínio de sincronização no espaço de parâmetros. A fronteira corresponde ao valor mínimo de ε e α para observar a sincronização na rede com acoplamento constante (linha contínua) e variável (círculos, quadrados e x) no tempo. Aqui, assumimos os elementos sincronizados se $\langle d \rangle \leq 10^{-12}$, sendo a média realizada sobre 500 condições iniciais. Note que os parâmetros de sincronização dependem do tamanho da rede, para $N = 21$ há duas regiões, A e B, enquanto que para $N = 385$ há somente uma, a região A.



FONTE: O autor.

Podemos observar na Figura (5.3) que, quando $N = 21$, a rede auxiliar apresenta uma região de sincronização maior do que a rede com acoplamento variável. No entanto, para $N = 385$ as regiões de sincronização de ambas as redes parecem sobrepostas. Isto significa que, do ponto de vista da sincronização, é preferível utilizar redes com acoplamentos estáticos e interações menos intensas entre os elementos mais distantes (conexões menos prováveis) do que acoplamentos variáveis e interações de intensidade uniforme para todos os elementos conectados.

Da Figura (5.3) também podemos inferir que o maior expoente de Lyapunov transversal e os parâmetros críticos de sincronização obtidos para a rede com topologia variável são sempre iguais ou maiores do que aqueles da rede auxiliar. Portanto, embora o modelo auxiliar não exiba os mesmos parâmetros críticos da rede com topologia variável para todo o intervalo de parâmetros, ele pode ser usado para definir um conjunto de parâmetros não-sincronizáveis desta de modo a diminuir a quantidade de parâmetros a ser investigado. Além disso, a figura

também sugere que quanto maior for N a diferença entre os parâmetros críticos de ambos os modelos tende a diminuir. Então, como a rede auxiliar é facilmente construída e geralmente apresenta um espectro de expoentes de Lyapunov bem definido, podemos utilizá-la para fazer uma primeira aproximação dos parâmetros críticos de uma rede com acoplamento variável, sendo melhor a aproximação quanto maior for a rede em estudo.

A Figura (5.3) também mostra que há um bom acordo entre os parâmetros estimados através das quantidades efetivas e aqueles encontrados considerando a distância média entre as trajetórias ao subespaço de sincronização. Portanto, ela indica que os expoentes de Lyapunov efetivos constituem bons indicadores da sincronizabilidade de uma rede com topologia variável e, dessa maneira, confirma que a análise de $\Delta\lambda_T$, apresentada nas duas figuras anteriores, corresponde de fato a uma diferença na dinâmica transversal dos modelos.

5.2 A Construção de Sistemas Efetivos

Ao analisarmos o modelo auxiliar de uma rede de mapas acoplados verificamos que a correspondência entre as propriedades dinâmicas de ambos os sistemas depende do tamanho e dos parâmetros da rede. Apenas para alguns valores de parâmetros e/ou redes suficientemente grandes observamos uma concordância satisfatória entre as propriedades de sincronização destes sistemas. Diante disso propomos um esquema de acoplamento auxiliar para estudar a dinâmica transversal à $\mathcal{S}$ de redes com topologia variável que independe do tamanho das redes envolvidas. Este novo modelo é baseado nos autovalores efetivos e, por conseguinte, o denominamos sistema efetivo.

O sistema efetivo é construído da seguinte maneira: seja $\text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_m}\}$ uma matriz diagonal formada pelos autovalores efetivos e $\mathbf{S}$ uma transformação de similaridade unitária formada pelos vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$, a matriz de acoplamento do sistema efetivo é dada por

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{S} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_m}\} \mathbf{S}^\dagger. \quad (5.4)$$

Podemos observar que, por construção, os sistemas $\{\mathbf{G}_n\}$ e $\hat{\mathbf{G}}$ são equivalentes do ponto de vista da sincronização. De fato, se $\hat{\lambda}_m$ descreve a dinâmica transversal ao subespaço de sincronização, os sistemas construídos por $\{\mathbf{G}_n\}$ e $\hat{\mathbf{G}}$ devem exibir os mesmos parâmetros de sincronização independentemente do tamanho das redes.

Para demonstrar a equivalência entre as propriedades de sincronização dos sistemas construídos por $\{\mathbf{G}_n\}$ e $\hat{\mathbf{G}}$ utilizaremos novamente a rede com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância entre os sítios. No entanto, consideraremos agora tanto o caso de

invariância translacional sobre a topologia, o qual resulta em matrizes de acoplamento circulantes, como também o caso mais geral que é a invariância translacional na probabilidade de conexão. Na sequência apresentaremos também a construção do sistema efetivo para o caso de uma rede do tipo *small-world*.

5.2.1 Caso I: invariância translacional sobre a topologia

A condição de invariância translacional sobre a topologia da rede faz com que a matriz $\mathbf{T}_n$ seja completamente definida pelas conexões de um sítio arbitrário, por exemplo, o sítio $i = 1$. Esta restrição, como vimos, reduz a quantidade de matrizes de acoplamento possíveis e, juntamente com a condição de periodicidade da rede, assegura que as matrizes de acoplamento sejam circulantes. Devido a esta propriedade encontramos uma expressão para os autovalores efetivos a qual utilizaremos, agora, para construir a matriz de acoplamento do sistema efetivo. Esta é a principal razão pela qual consideramos uma rede sob tais condições.

Demonstramos no capítulo anterior, que os autovalores efetivos de uma rede com invariância translacional sobre a topologia podem ser obtidos por meio da Equação (4.22). No entanto, para que esta equação seja útil precisamos conhecer tanto a probabilidade de ocorrer determinada matriz de acoplamento como seu espectro de autovalores. A probabilidade de ocorrer um dado acoplamento é, de acordo com (4.18), uma função da matriz topologia cujos elementos são 0 ou 1. Então, se considerarmos todas as sequências binárias possíveis para os elementos da matriz topologia obtemos de (4.18) a probabilidade π_k de ocorrer uma dada matriz k . Resta-nos, portanto, encontrar uma expressão para os autovalores.

Para determinar os autovalores de cada matriz de acoplamento lembramos que, devido a condição de invariância translacional sobre a topologia da rede, essas matrizes são necessariamente circulantes. Esta classe de matrizes possui um espectro de autovalores bem definido¹⁰³ e, portanto, podemos obter todos os autovalores de cada uma das matrizes de acoplamento possíveis sem muito esforço. De fato, se $\mathbf{C}$ é uma matriz circulante $N \times N$, o m -ésimo autovalor dessa matriz é dado por

$$\Gamma_m = \sum_{w=0}^{N-1} [\mathbf{C}]_{0w} e^{-(2\pi i)mw/N}, \quad (5.5)$$

em que $[\mathbf{C}]_{0,w}$ denota o w -ésimo elemento da primeira linha da matriz. Se, além de circulante, a matriz for simétrica com N ímpar, então a Equação (5.5) torna-se

$$\Gamma_m = [\mathbf{C}]_{00} + 2 \sum_{w=1}^M [\mathbf{C}]_{0w} \cos\left(\frac{2\pi mw}{N}\right), \quad (5.6)$$

em que $M = (N - 1)/2$. Dado que as matrizes acoplamento são simétricas, a Equação (5.6) nos permite determinar todo o espectro de autovalores dessas matrizes.

Outra propriedade importante das matrizes circulantes é que são fechadas para o produto. Isto significa que a matriz $\mathbf{Q}_n$ também é circulante e, conseqüentemente, os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ são dados por $[\mathbf{S}]_{qw} = \exp(-(2\pi i)qw/N)/\sqrt{N}$, onde utilizamos os índices q e w ao invés de i e j para não causar confusão com a quantidade imaginária presente na equação. Então, substituindo a Equação (5.6) em (4.22) obtemos os autovalores efetivos e os expoentes de Lyapunov efetivos. Usando estes expoentes em (5.4) encontramos

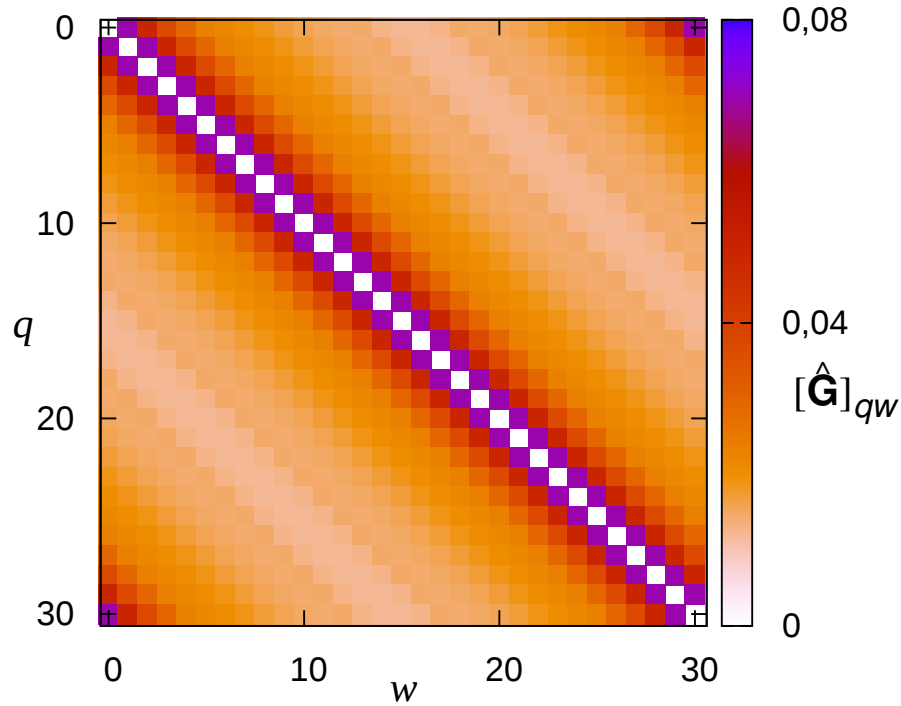
$$[\hat{\mathbf{G}}]_{qw} = \frac{1}{N} \left\{ 1 + 2 \sum_{s=1}^M e^{\hat{\lambda}_{s+1}} \cos \left(\frac{2\pi s(w-q)}{N} \right) \right\}. \quad (5.7)$$

Como $\cos(\cdot)$ é uma função par com período 2π , $\hat{\mathbf{G}}$ é uma matriz circulante, estocástica e simétrica. Isto significa que a matriz de acoplamento do sistema efetivo satisfaz todas as suposições sobre a rede com topologia variável. Na Figura (5.4) representamos pictoricamente a matriz de acoplamento efetiva para a rede em consideração. Podemos observar que esta matriz também resulta em uma rede regular, isto é, cujos acoplamentos são invariantes sob translações da rede. A dedução detalhada da Equação (5.7) é apresentada na subseção seguinte, em que consideramos uma rede sob condições menos restritivas do que esta.

Para verificar a equivalência da dinâmica dos sistemas original e efetivo analisamos a evolução temporal de trajetórias típicas em relação à $\mathcal{S}$. Aqui, como no que segue, consideramos que a dinâmica local das redes é regida pelo mapa da tenda, Equação (2.2), com parâmetro $a = 2$. A Figura (5.5) mostra a evolução temporal da distância ao subespaço de sincronização para algumas trajetórias e parâmetros de acoplamento específicos. Podemos observar que, para a rede com topologia variável, d_n evolui de modo irregular, enquanto que, para a rede com acoplamento efetivo, d_n decai seguindo uma curva exponencial. De fato, para a rede com acoplamento variável, se em um dado instante n cada sítio é influenciado por poucos sítios que estão em estados muito diferentes, a trajetória se afasta de $\mathcal{S}$. Por outro lado, se os sítios são influenciados por outros sítios com estados próximos, a trajetória tende a se aproximar de $\mathcal{S}$. Portanto, a irregularidade observada na evolução temporal d_n deve-se à dependência temporal do acoplamento.

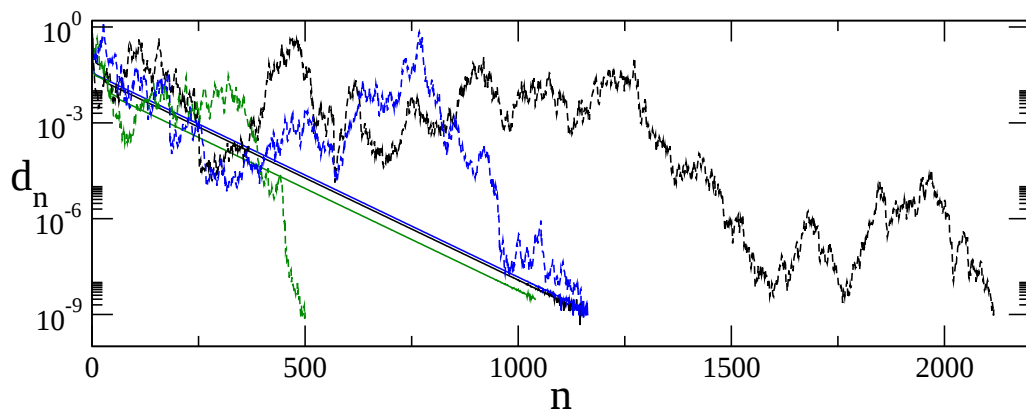
Embora o comportamento de trajetórias individuais, evoluídas a partir da rede com topologia variável, seja diferente daquele observado para o sistema efetivo, em média eles exibem o mesmo comportamento. A Figura (5.6) mostra o tempo de sincronização médio em função do parâmetro α para ambas as redes. Podemos observar que o tempo de sincronização

Figura 5.4: Representação pictórica dos elementos da matriz $\hat{\mathbf{G}}$, exceto os elementos da diagonal principal. A intensidade das cores corresponde à intensidade de acoplamento. Esta matriz foi gerada usando os seguintes valores de parâmetro: $N = 31$, $\varepsilon = 0,7$ e $\alpha = 0,6$.



FONTE: O autor.

Figura 5.5: Convergência para $\mathcal{S}$ de trajetórias típicas para a rede com topologia variável (linhas pontilhadas) e para o sistema efetivo (linhas sólidas). Utilizamos para ambos $N = 31$, $\varepsilon = 0,7$ e $\alpha = 0,6$. Cada cor de linha representa uma condição inicial distinta.

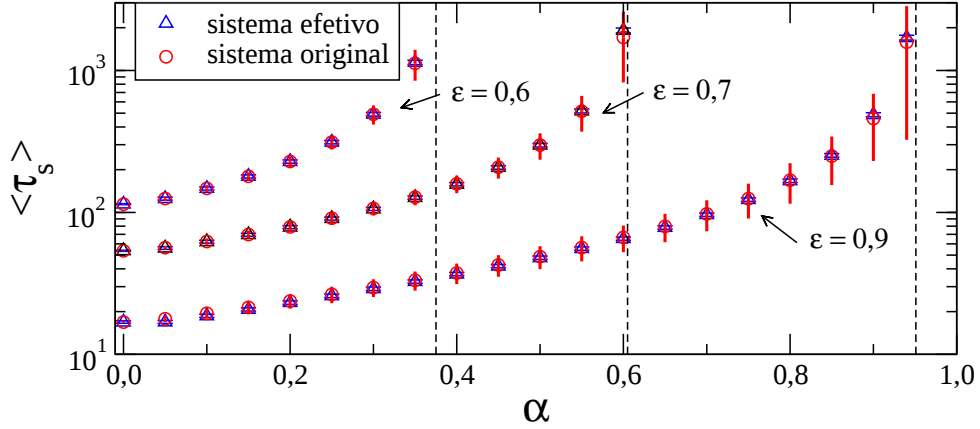


FONTE: O autor.

τ_s aumenta com α e diverge em seu valor crítico, $\alpha_c(\varepsilon, N)$, para o qual $\mathcal{S}$ torna-se transversalmente instável. Verificamos, ainda, que a transição para a sincronização ocorre no mesmo ponto para ambos os sistemas e que a dispersão, medida pelo desvio padrão de diversas realizações das redes, é pequena. Este resultado indica que o comportamento médio das trajetórias

do sistema com topologia variável é equivalente ao comportamento do sistema efetivo para qualquer conjunto de parâmetros.

Figura 5.6: Tempo de sincronização médio em função do alcance da probabilidade de acoplamento para o sistema com topologia variável (círculos) e para o sistema efetivo (triângulos), com $N = 31$. Barras verticais e horizontais representam a dispersão do tempo para as redes com topologia variável e efetiva, respectivamente. As linhas verticais representam os valores críticos de α para os quais $\mathcal{S}$ torna-se transversalmente instável.



FONTE: O autor.

Nossa abordagem também pode ser aplicada para redes em que a topologia varia periodicamente no tempo, trocando π_k pela frequência relativa associada com a k -ésima topologia. Em geral, devido à dependência explícita da matriz Jacobiana sobre os pontos da trajetória, podemos demonstrar formalmente a equivalência entre ambos os sistemas somente na vizinhança linear de $\mathcal{S}$. Quando esta dependência não existe, os vetores de Lyapunov de todos os pontos no espaço de fase são idênticos e os nossos resultados são globalmente válidos, isto é, a equivalência entre os dois sistemas, para propósitos de sincronização, é genérica.^{91, 104}

5.2.2 Caso II: invariância da probabilidade de conexão

Vimos que, se a rede apresenta uma invariância translacional sobre a topologia, há uma equivalência da dinâmica transversal ao subespaço de sincronização do sistema efetivo e da rede com topologia variável. Acreditamos, porém, que esta equivalência é mais geral e abrange igualmente as redes periódicas cuja probabilidade de interação entre os sítios é invariante sobre translações. Nossa hipótese, já mencionada no capítulo anterior, é que qualquer rede periódica com topologia variável no tempo, cuja probabilidade de interação entre os sítios é invariante sobre translações, pode ser representada por uma matriz efetiva circulante. Consequentemente, conhecendo os expoentes de Lyapunov que caracterizam a dinâmica transversal ao subespaço de sincronização, podemos encontrar uma estimativa para o acoplamento efetivo entre os elementos do sistema. Note que nossa conjectura diz respeito à invariância da probabilidade de

interação entre os sítios, e não da topologia, sob translações da rede.

No capítulo anterior demonstramos que, se a hipótese é procedente, os expoentes de Lyapunov efetivos são dados pela Equação (4.31). Então, utilizando estes expoentes para determinar a estabilidade de $\mathcal{S}$, verificamos que as medidas obtidas através deles concordam satisfatoriamente com outros diagnósticos de sincronização. Agora vamos utilizar a Equação (4.31) para construir o sistema efetivo da rede cuja probabilidade de interação é invariante sobre translações, tal como o fizemos para a rede com invariância translacional sobre a topologia.

Uma consequência direta de nossa hipótese é que os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ são dados por (4.28). Então, como no caso anterior, $[\mathbf{S}]_{qw} = [\mathbf{H}]_{qw} = \exp(-(2\pi i)qw/N)/\sqrt{N}$. Portanto, de acordo com a Equação (5.4), a matriz de acoplamento do sistema efetivo para a rede cuja probabilidade de interação é invariante sobre translações será dada por

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} &= [\mathbf{H} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_q}\} \mathbf{H}^\dagger]_{a,b} \\ &= \sum_{w=0}^{N-1} [\mathbf{H} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_q}\}]_{aw} [\mathbf{H}^\dagger]_{wb} = \sum_{w,s=0}^{N-1} [\mathbf{H}]_{as} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_q}\}_{sw} [\mathbf{H}^\dagger]_{wb} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{w,s=0}^{N-1} e^{(-2\pi ias)/N} (\delta_{sw} e^{\hat{\lambda}_s}) e^{(2\pi iwb)/N} = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N}. \end{aligned}$$

Então, lembrando que N é ímpar e $\hat{\lambda}_1 = 0$ podemos reescrever a equação acima como

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} = \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} + \sum_{w=M+1}^{N-1} e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} \right\}.$$

Para simplificar esta equação podemos substituir $w = N - s$ no segundo somatório. Fazendo isso ficamos com

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} + \sum_{s=1}^M e^{\hat{\lambda}_{N-s}} e^{(-2\pi i(N-s)(a-b))/N} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} + \sum_{s=1}^M e^{\hat{\lambda}_{N-s}} e^{(-2\pi i(a-b))} e^{(2\pi is(a-b))/N} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} + (\cos 2\pi(a-b) - i \sin 2\pi(a-b)) \times \right. \\ &\quad \left. \sum_{s=1}^M e^{\hat{\lambda}_{N-s}} e^{(2\pi is(a-b))/N} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N} + \sum_{s=1}^M e^{\hat{\lambda}_{N-s}} e^{(2\pi is(a-b))/N} \right\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Mas, como $\hat{\lambda}_w = \hat{\lambda}_{N-w}$, podemos agrupar os somatórios. Isso nos leva a

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} = \frac{1}{N} \left\{ 1 + \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} \left(e^{(-2\pi i w(a-b))/N} + e^{(2\pi i w(a-b))/N} \right) \right\}. \quad (5.9)$$

Finalmente, utilizando a relação de Euler encontramos

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} = \frac{1}{N} \left\{ 1 + 2 \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} \cos \left(\frac{2\pi w(a-b)}{N} \right) \right\}. \quad (5.10)$$

Podemos observar que (5.10) tem a mesma forma que a Equação (5.7) obtida para o caso em que a topologia é invariante sobre translações na rede. Ambas resultam em matrizes de acoplamento simétricas devido à paridade da função cosseno. Além disso, elas também são circulares, pois

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{G}}]_{0,(b-a \bmod N)} &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + 2 \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} \cos \left(\frac{2\pi w(-b+a \bmod N)}{N} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ 1 + 2 \sum_{w=1}^M e^{\hat{\lambda}_w} \cos \left(\frac{2\pi w(a-b)}{N} \right) \right\} \\ &= [\hat{\mathbf{G}}]_{a,b}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

para todo $a, b = 0, 1, \dots, N-1$. Na realidade, o fato da matriz de acoplamento efetiva ser circular independente das regras que definem o acoplamento no sistema com topologia variável no tempo. Esta característica, como podemos observar, depende apenas da base composta pelos vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ que assumimos ser os autovetores da base circular.

Calculando os autovalores efetivos e substituindo-os em (5.10) podemos construir uma rede com topologia estática que representa o sistema efetivo da rede cuja probabilidade de acoplamento decai com a distância. Se nossa hipótese estiver correta, então o sistema construído por meio da Equação (5.10) e a rede com topologia variável correspondente devem apresentar as mesmas propriedades de sincronização. No entanto, o contrário não é verdadeiro, isto é, o fato das propriedades serem equivalentes não é suficiente para comprovar a hipótese assumida. Além disso, mesmo que a equivalência entre as propriedades dinâmicas seja observada para o sistema efetivo construído usando autovetores da base circular, devemos testar outras bases para verificar se a primeira é ou não uma base privilegiada. Pois, se o sistema construído usando uma outra base ortonormal também exibir as mesmas propriedades de sincronização, isto significa que os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ não são representados pelos autovetores da base circular.

Dado que as matrizes de acoplamento são, por definição, estocásticas e o produto delas

resulta novamente em uma matriz estocástica, então qualquer base ortonormal a ser utilizada deve necessariamente conter o vetor de Perron e todos os demais vetores devem possuir soma nula de seus elementos. Consideramos, então, uma base alternativa $\bar{\mathbf{H}}$ cujos elementos são dados por

$$\bar{h}_{q1} = 1/\sqrt{N} \quad \text{para todo } q \quad (5.12)$$

$$\bar{h}_{qw} = 0 \quad \text{para } q > w \quad (5.13)$$

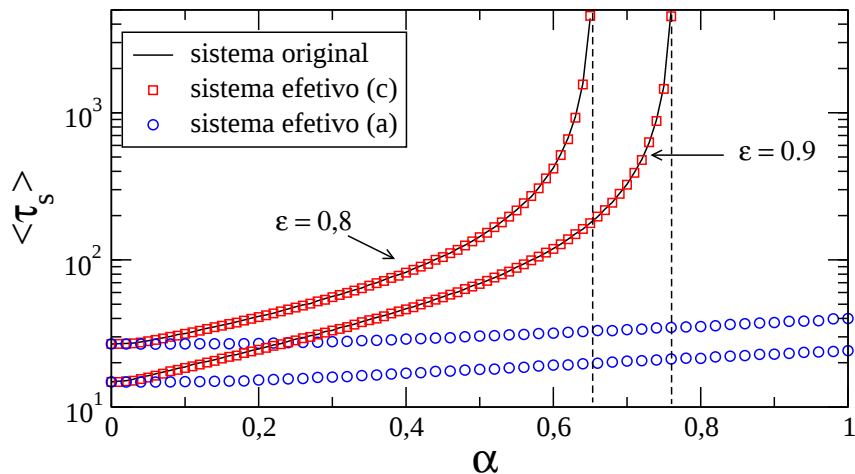
$$\bar{h}_{qq} = \sqrt{q-1}/\sqrt{q} \quad \text{para } q > 1 \quad (5.14)$$

$$\bar{h}_{qw} = -h_{qq}/(q-1) \quad \text{para } 1 < q \leq j. \quad (5.15)$$

Note que $\bar{\mathbf{H}}$ é uma base ortonormal que contém o vetor de Perron e os demais vetores possuem soma nula. Então, substituindo h_{qw} por $\bar{h}_{qw}$ na Equação (4.23), calculamos os expoentes de Lyapunov efetivos usando a nova base e, de posse desses expoentes, contruímos um novo sistema efetivo assumindo $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{H}}$ na Equação (5.4).

A Figura 5.7 exibe o tempo de sincronização médio em função do parâmetro α obtido para a rede com topologia variável e para dois sistemas efetivos, um construído usando a base circulante e o outro usando a base alternativa. Podemos observar que o tempo de sincronização médio do sistema efetivo construído sob a base circulante concorda satisfatoriamente com aquele obtido para a rede com topologia variável cuja probabilidade decaí com a distância. No entanto, para o sistema efetivo construído sob a base $\bar{\mathbf{H}}$ os tempos médios de sincronização coincidem apenas para $\alpha \approx 0$ e divergem à medida que α cresce.

Figura 5.7: Tempo de sincronização médio em função do alcance da probabilidade de acoplamento para o sistema com topologia variável (linha), para o sistema efetivo construído usando a base circulante (quadrado) e para o sistema efetivo usando a base arbitrária (triângulos). Os dados referem-se à $N = 51$ e foram obtidos considerando a média sobre 100 realizações para cada um dos sistemas analisados.



FONTE: O autor.

Além de $\bar{\mathbf{H}}$ consideramos outras bases arbitrárias de matrizes estocásticas e verificamos que o comportamento do tempo de sincronização médio se mantém como mostra a Figura 5.7. Em outras palavras, não encontramos uma base que nos permitiu construir um sistema efetivo que exibisse o mesmo tempo de sincronização da rede com topologia variável subjacente. Estas bases-testes foram geradas considerando os autovetores de matrizes estocásticas arbitrárias e usando o método de ortonormalização de Gramm-Schmidt. Os sistemas efetivos correspondentes à estas bases foram construídos tal como procedemos com os vetores da base circulante. O fato de não encontramos bases alternativas não significa que elas não existam, mas que a construção de um sistema efetivo não pode ser realizada a partir de qualquer base. Como a base circulante mostrou-se uma base privilegiada em nossos testes e a utilização da Equação (4.23) para a determinação das quantidades efetivas requer que os autovetores $\mathbf{h}_m$ representem os vetores de Lyapunov do subespaço de sincronização, podemos dizer que estes resultados constituem um forte indício que os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ do sistema em estudo correspondem aos autovetores da base circulante. Mais a frente vamos mostrar que um sistema efetivo que recupere as propriedades de sincronização do sistema variável no tempo pode ser construído usando os autovetores da matriz correspondente às ligações constantes. Portanto, como as ligações constantes neste caso representam o acoplamento cuja matriz é circulante, a base circulante constitui uma base privilegiada para a rede em estudo.

Para comparar o sistema efetivo e o modelo auxiliar consideramos a região de sincronização de ambos os modelos no espaço dos parâmetros. De acordo com a análise pelos expoentes de Lyapunov exibida na Figura (5.3) a diferença entre os parâmetros críticos destes sistemas diminui com o tamanho da rede. No entanto, a região de sincronização também diminui com N . Isto significa que a igualdade entre os sistemas depende da taxa com que ocorrem tais decaimentos. Mas, como mostrado por Anteneodo e colaboradores,¹⁰⁴ para $N \rightarrow \infty$ existe uma região de sincronização limite para a rede que, aqui, representa o modelo auxiliar. Portanto, como a diferença entre os parâmetros dos modelos tende a diminuir com N então ela deve ser nula neste limite. A Figura (5.3) também mostra que para $0 < \alpha \leq \alpha_c$ há um $\varepsilon_c \leq 1$ a partir do qual ocorre a sincronização. Então, podemos analisar o comportamento da região de sincronização com o tamanho da rede em termos da área

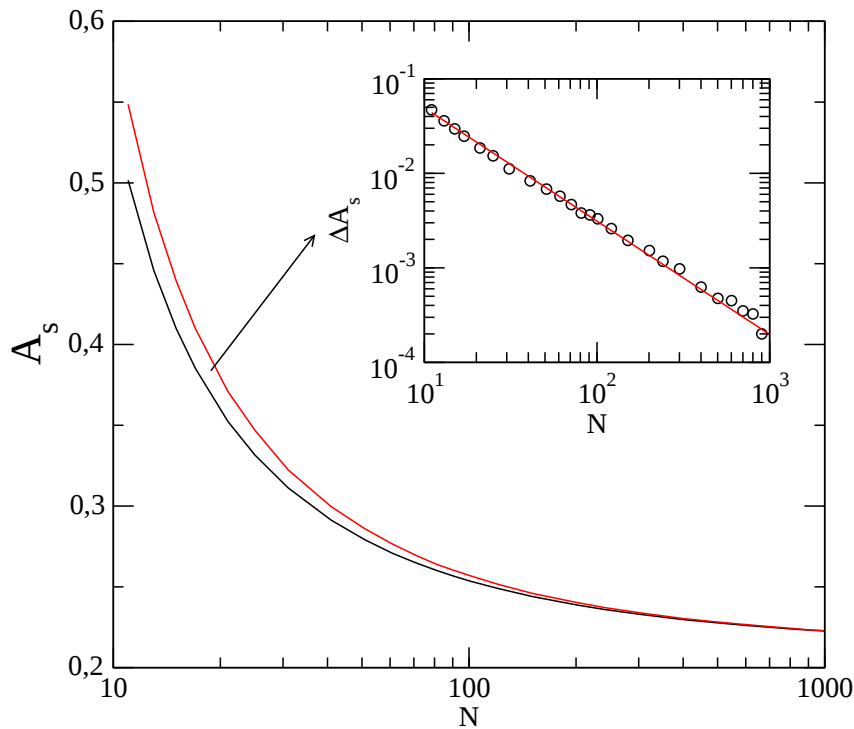
$$A_s(N) = \int_0^{\alpha_c(N)} [1 - \varepsilon(\alpha)] d\alpha. \quad (5.16)$$

Em geral não conhecemos $\varepsilon(\alpha)$ e, portanto, determinamos esta quantidade numericamente para um conjunto de valores de α . Neste caso, ao invés da integral acima utilizamos

$$A_s(N) = \sum_{i=0}^{i_c} [1 - \varepsilon(\alpha_i)] \Delta\alpha, \quad (5.17)$$

em que $i_c = \lfloor \frac{\alpha_c}{\Delta\alpha} \rfloor$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ refere-se ao maior inteiro menor ou igual a razão. A Figura (5.8) mostra o decaimento da área de sincronização com o tamanho da rede para o sistema efetivo e para o modelo auxiliar. A diferença entre as áreas de ambos modelos em função de N também é exibida e o ajuste dos pontos indica que ela segue uma lei de potência. Portanto, tanto a diferença dos expoentes de Lyapunov da rede com topologia variável e do modelo auxiliar como a diferença entre a área de sincronização deste como àquela do sistema efetivo comportam-se semelhantemente com o tamanho da rede.

Figura 5.8: Área de sincronização no espaço dos parâmetros em função do tamanho da rede. A linha vermelha corresponde ao modelo auxiliar e a linha preta ao sistema efetivo. A diferença entre as curvas em função do tamanho da rede é apresentada no quadro menor. O melhor ajuste indica que a diferença decai em uma lei de potência.



FONTE: O autor.

5.2.3 Caso III: probabilidade de conexão uniforme

Os resultados obtidos para as duas redes analisadas mostra que o sistema efetivo pode ser representado por uma matriz circulante. Nossa hipótese, no entanto, era que qualquer rede com topologia variável, cujas regras de distribuição de conexão são invariantes no tempo e quanto à translações na rede, resulta em um sistema efetivo cuja matriz de acoplamento é circulante. Nessa seção mostraremos que a invariância translacional da probabilidade de conexão é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir que a matriz de acoplamento efetiva seja circulante. Na realidade, além desta condição, devem existir conexões estáticas que sejam

representadas por uma matriz circulante. Se ambas condições são satisfeitas, o sistema efetivo construído com base nos expoentes de Lyapunov obtidos através da Equação (4.31) apresenta as mesmas propriedades de sincronização da rede original.

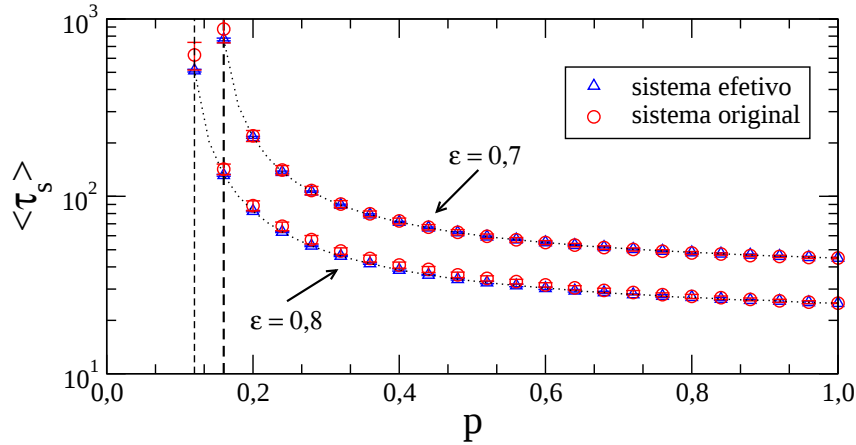
Considere, então, o caso trivial de uma rede cuja probabilidade de conexão entre os sítios é invariante sobre translações na rede. Trata-se de uma rede do tipo *small-world* de Newmann-Watts.⁷³ Dizemos que ela representa um caso trivial porque todos os sítios possuem a mesma probabilidade de conexão com qualquer outro sítio da rede. Lembre que, conforme mencionamos anteriormente, esta rede é construída considerando conectados os k -vizinhos mais próximos e inserindo atalhos entre os sítios distantes com uma probabilidade p . Então, se considerarmos que os atalhos são atualizados a cada instante de tempo, esperamos que, para n suficientemente grande, todos os sítios que não são vizinhos sobre uma distância topológica k tenham se conectado uns com os outros $p \cdot n$ vezes. Isto significa que o modelo auxiliar desta rede é representado por um acoplamento global cuja intensidade da interação entre os k vizinhos mais próximos é ε e entre os demais é $p \cdot \varepsilon$. A rede *small-world* cujos atalhos variam com o tempo bem como seu modelo auxiliar foram estudados por Belykh e colaboradores.³³ Eles denominaram a primeira de *blinking-model* ou modelo piscante e investigaram suas propriedades de sincronização para o caso em que a dinâmica local é regida por equações diferenciais.

Como o modelo piscante apresenta probabilidade de conexão invariante utilizamos a Equação (4.31) para determinar os expoentes de Lyapunov efetivos. Substituindo estes expoentes em (5.10) construímos o sistema efetivo subjacente e analisamos as propriedades de sincronização de ambos. A Figura 5.9 exibe os tempos médios de sincronização destes modelos em função da probabilidade de atalhos para $k = 1$ e $N = 31$. Podemos observar que os tempos médios bem como o valor crítico de p , que é a probabilidade mínima para que ocorra sincronização, estão em bom acordo. Portanto, também para este caso a matriz de acoplamento efetiva é circulantes.

Para o caso em que $k = 2$ também verificamos que os tempos de sincronização do sistema efetivo e do modelo piscante são equivalentes. No entanto, quando assumimos $k = 0$ esta equivalência rapidamente desaparece. Mais precisamente, observamos que os tempos concordam para $p = 1$, que é o caso em que ambos sistemas representam o acoplamento global, mas à medida que diminuimos a probabilidade de atalhos os tempos de sincronização se distanciam cada vez mais e divergem para valores distintos de $p = p_c$. A Figura 5.10 exibe este resultado para alguns valores específicos de parâmetros e $N = 31$, porém, observamos o mesmo comportamento também para outros tamanhos de rede.

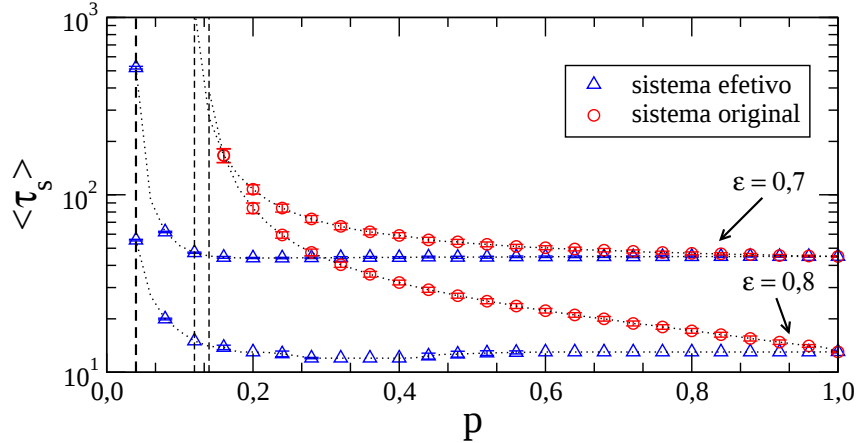
A discrepância entre nossa previsão teórica (equivalência) e o resultado numérico

Figura 5.9: Tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos em uma rede *small-world* do tipo Newmann-Watts para o sistema com topologia variável (círculos) e para o sistema efetivo (triângulos). Os dados correspondem aos parâmetros $k = 1$ e $N = 31$ e a média foi realizada sobre 100 realizações de cada modelo. As linhas tracejadas na vertical indicam os valores críticos da probabilidade a partir do qual ocorre a sincronização.



FONTE: O autor.

Figura 5.10: Tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos em uma rede *small-world* do tipo Newmann-Watts para o sistema com topologia variável (círculos) e para o sistema efetivo (triângulos). Os dados correspondem aos parâmetros $k = 0$ e $N = 31$ e a média foi realizada sobre 100 realizações de cada modelo. As linhas tracejadas na vertical correspondem aos valores críticos da probabilidade a partir do qual ocorre a sincronização.



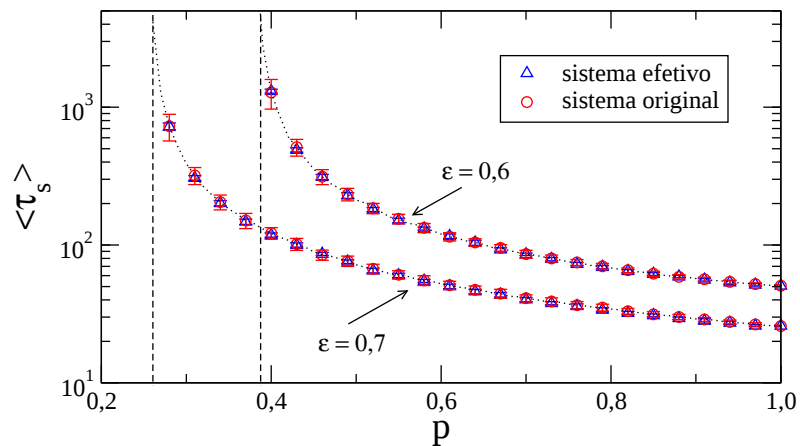
FONTE: O autor.

obtido (diferença) para o tempo de sincronização quando $k = 0$ sugere uma reconsideração de nossa hipótese inicial. De fato, quando retiramos as ligações locais da rede, ela continua apresentando uma probabilidade de conexão invariante sobre translação e, portanto, esperaríamos que o sistema efetivo construído a partir das equações (4.31) e (5.10) apresentasse as mesmas propriedades de sincronização independentemente dos parâmetros envolvidos. No entanto, como os tempos de sincronização são diferentes, isto significa que a matriz de acoplamento efetiva não é circulante e, conseqüentemente, os vetores de $\mathcal{S}$ não correspondem aos autovetores de matrizes circulantes. Note que o problema não se encontra na definição das quantidades efe-

tivas e do sistema efetivo, mas na maneira como eles foram determinadas, ou seja, através das equações (4.31) e (5.10). Um sistema efetivo que preserve as propriedades de sincronização para este modelo poderia ser construído, por exemplo, determinando os autovalores efetivos a partir da taxa de decaimento dos autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$ e utilizando a base adequada na Equação (5.4). Mas este procedimento, como mencionamos anteriormente, requer a utilização de grande precisão numérica nos cálculos o que resulta em maior tempo e esforço computacional.

Os resultados obtidos para os três tipos de redes estudados nos sugerem que, além da invariância translacional da probabilidade de conexão devemos impor que algumas conexões estejam sempre presentes. Neste ponto lembramos que nos dois primeiros casos em que a base circulante mostrou-se privilegiada, as conexões constantes eram locais e que, portanto, resultavam em uma matriz circulante. Isso nos faz acreditar que existe uma relação entre os vetores de Lyapunov do subespaço de sincronização e os autovetores da matriz que representa as ligações constantes quando a probabilidade das demais conexões é invariante sobre translação na rede. Chamamos esta matriz com as ligações fixas de matriz substrato e a rede correspondente de rede substrato e, para verificar se essa suspeita é ou não procedente, consideramos uma rede substrato aleatória e não necessariamente circulante na qual todos os sítios possuem duas conexões. Encontramos os autovetores $\tilde{\mathbf{h}}$ da matriz substrato e os utilizamos nas Equações (4.23) e (5.4) fazendo $\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}}$. A Figura 5.11 mostra o tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos sobre a rede substrato para dois valores de acoplamento. Observe que há uma boa concordância entre os dados obtidos para o sistema original ou variável e para o sistema efetivo.

Figura 5.11: Tempo de sincronização médio em função da probabilidade de atalhos em uma rede substrato homogênea não-circulante para o sistema com topologia variável (círculos) e para o sistema efetivo (triângulos). Os dados correspondem aos parâmetros $N = 7$ e duas conexões para cada sítio e a média foi realizada sobre 50 realizações de cada modelo.



FONTE: O autor.

A rede substrato e matriz de adjacência correspondente que utilizamos para determinar o tempo de sincronização exposto na Figura 5.11 são exibidas na Figura 5.12. Embora a matriz de adjacência substrato não seja circulante podemos transformá-la em uma matriz circulante multiplicando-a por uma matriz de permutação $\mathbf{P}$. Matriz de permutação é uma matriz quadrada que tem apenas um elemento não nulo em cada linha e coluna.¹⁰⁵ Podemos obter a matriz de permutação considerando inicialmente a matriz identidade e permutando as linhas de acordo com necessidade. Por exemplo, para transformar a matriz de adjacência exposta na Figura 5.12 em uma matriz circulante $\mathbf{C}$ podemos realizar a seguinte operação

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (5.18)$$

em que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

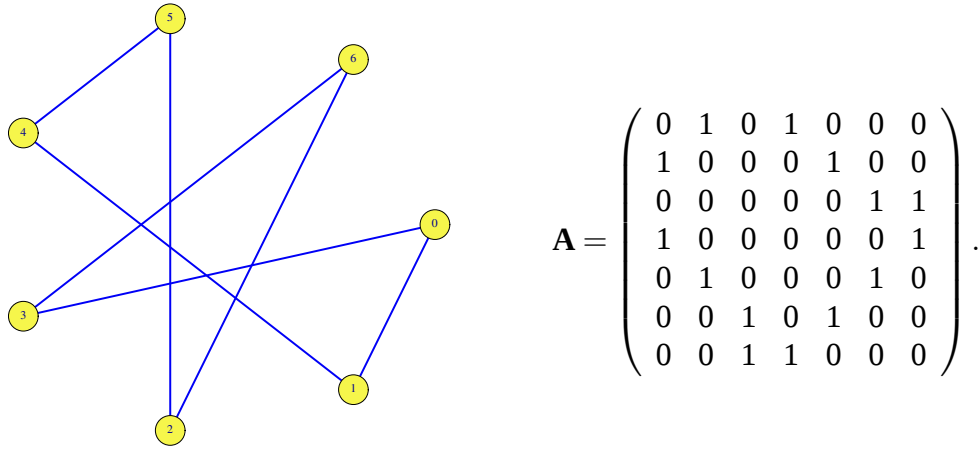
Consequentemente, como os autovetores de matrizes circulantes são dados por $\mathbf{h}_m$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{h}_m &= \lambda\mathbf{h}_m \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{h}_m &= \lambda\mathbf{h}_m \\ \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{h}_m &= \lambda\mathbf{P}\mathbf{h}_m. \end{aligned}$$

Isto significa que $\tilde{\mathbf{h}}_m = \mathbf{P}\mathbf{h}_m$ e, portanto, se a probabilidade for uniforme obteremos as mesmas propriedades de sincronização, seja utilizando uma rede substrato circulante ou uma rede homogênea com o mesmo grau de conexões.

A equivalência entre os tempos de sincronização do sistema efetivo e da rede variável com uma rede substrato homogênea sugere que a base circulante é uma base privilegiada. No próximo capítulo analisaremos a sincronização entre duas réplicas de redes cujas conexões entre elas variam periodicamente no tempo. Mostraremos que também, neste caso, podemos construir um sistema efetivo que exibe as mesmas propriedades de sincronização usando como referência a base circulante. Nossa análise para duas réplicas de redes também mostrará que é possível construir um sistema efetivo $2d$ dimensional que apresenta o mesmo tempo médio de

Figura 5.12: Rede substrato e matriz de adjacência substrato.



FONTE: O autor.

sincronização, sendo d a dimensão do mapa. O sistema efetivo reduzido é construído usando os d expoentes do mapa desacoplado e os d maiores expoentes de Lyapunov da rede que são transversais à $\mathcal{S}$. Isso significa que podemos estudar algumas propriedades de sincronização de um sistema dN -dimensional por um sistema $2d$ -dimensional. Mas, o fato de ser possível construir um sistema efetivo reduzido não diminui a importância do sistema efetivo não reduzido estudado neste capítulo. Como o sistema efetivo aqui exposto preserva a dimensionalidade do sistema variável original ele permite investigar a dinâmica em cada direção transversal $\mathcal{S}$. Também acreditamos que, no caso em que a derivada do mapa seja constante, tal sistema efetivo possa ser empregado para obter informações da dinâmica do sistema variável no tempo sem precisar recorrer à condição de sincronização das trajetórias. No entanto, esta análise será deixada para trabalhos futuros.

6 Sincronização em réplicas de redes com elementos não-síncronos

Nos capítulos anteriores discutimos o processo de sincronização em redes de mapas acoplados. Também apresentamos alguns diagnósticos para identificar quando a rede está sincronizada e introduzimos as quantidades efetivas como uma nova ferramenta para o estudo da sincronização em redes cuja topologia muda com o tempo. Neste capítulo exploraremos a sincronização entre réplicas de redes quando seus elementos são não-síncronos, ou seja, estudaremos as condições em que ocorre a sincronização entre os elementos das duas redes cujos índices são iguais e não mais entre todos os elementos dentro da própria rede. Para distinguir os dois tipos de sincronização denominamos o primeiro de sincronização *internetwork* e o segundo sincronização *intranetwork*. Analisaremos tanto o caso em que a interação entre as redes é constante bem como o caso em que ela varia com o tempo. Finalizaremos o capítulo investigando um sistema efetivo reduzido para as duas réplicas de redes. Este sistema é composto por apenas dois mapas e preserva as mesmas propriedades de sincronização do sistema a partir do qual ele é construído.

6.1 As redes

Sejam X e Y duas redes de mapas acoplados idênticas compostas por N elementos cada uma. Os elementos de cada rede são submetidos a um acoplamento local e condições de contorno periódicas são impostas. O grafo representativo deste acoplamento tem a forma de um anel e foi apresentado no Capítulo 3 tanto para o caso unidirecional, Figura (3.2), como para o caso bidirecional, Figuras (3.5) e (3.6) quando $\alpha \rightarrow \infty$. Também mostramos que, se o acoplamento é bidirecional, a dinâmica dessa rede é descrita pela Equação (3.3). No que segue utilizaremos especificamente o acoplamento bidirecional e, como ele está associado apenas às interações entre sítios dentro de cada rede, o denominaremos *intranetwork*.

Como mostrado em,¹⁰⁶ uma rede de mapas acoplados localmente possui um intervalo

bastante restrito de parâmetros sincronizáveis. Se utilizarmos, por exemplo, o mapa da tenda com $a = 2$, o subespaço de sincronização dessa rede será instável para todo $N > 6$, independentemente da intensidade do acoplamento ε . Então, dado que a sincronização depende da estabilidade de $\mathcal{S}$, ela será observada em situações bastante específicas, ou seja, dificilmente observaremos a sincronização completa nessa rede. Mas, não estamos mais interessados na sincronização entre os elementos da rede. Não desejamos e até mesmo evitaremos este tipo de sincronização. Os motivos pelos quais assumimos isso ficará mais claro no próximo capítulo quando apresentarmos nosso esquema de criptografia. Veremos, então, que a imposição de uma dinâmica *intranetwork* caótica e não-síncrona aumenta significativamente a segurança da comunicação do sistema proposto.

A sincronização que estamos interessados aqui é a *internetwork*, que é o processo no qual os sítios da rede X exibem o mesmo comportamento dinâmico dos sítios da rede Y para todo $n \geq \tau_s$, sendo τ_s o tempo de sincronização. Estudos prévios^{90,107,108} sobre este tipo de sincronização mostraram que, dependendo do mapa utilizado como dinâmica local da rede, os parâmetros críticos de transição permitem classificá-la dentro de duas classes de universalidade: a de ruído multiplicativo, se o mapa for suave, ou a de percolação direcionada, se o mapa é fortemente não-linear. Então, como estamos considerando apenas o mapa da tenda, que é suave, os sistemas em estudo pertencem necessariamente à classe de ruído multiplicativo. Mas, apesar deste conhecimento prévio e bem estabelecido, os estudos mencionados se limitaram à análise das redes para um valor específico do acoplamento *intranetwork*. Além disso, a maioria das abordagens são numéricas. Nossa contribuição, nesse contexto, é a consideração de um novo intervalo de acoplamento com o qual é possível obter algumas informações analiticamente.

Há basicamente duas maneiras para sincronizarmos as duas redes: 1) fazer com que elas sejam submetidas à mesma perturbação externa; 2) considerar uma interação entre as redes de modo que a dinâmica de uma dependa da dinâmica da outra. Se assumirmos a primeira possibilidade, então, como a sincronização *intranetwork* deve ser evitada, devemos considerar uma perturbação diferente para cada sítio. Isto significa que precisamos de uma fonte de perturbação externa com a mesma dimensão das redes e que seja compartilhada por elas. A segunda possibilidade é bem mais simples e requer apenas que consideremos um acoplamento entre os sítios de ambas as redes. Portanto, assumiremos este segundo procedimento e consideraremos que a dinâmica de cada sítio é dada por

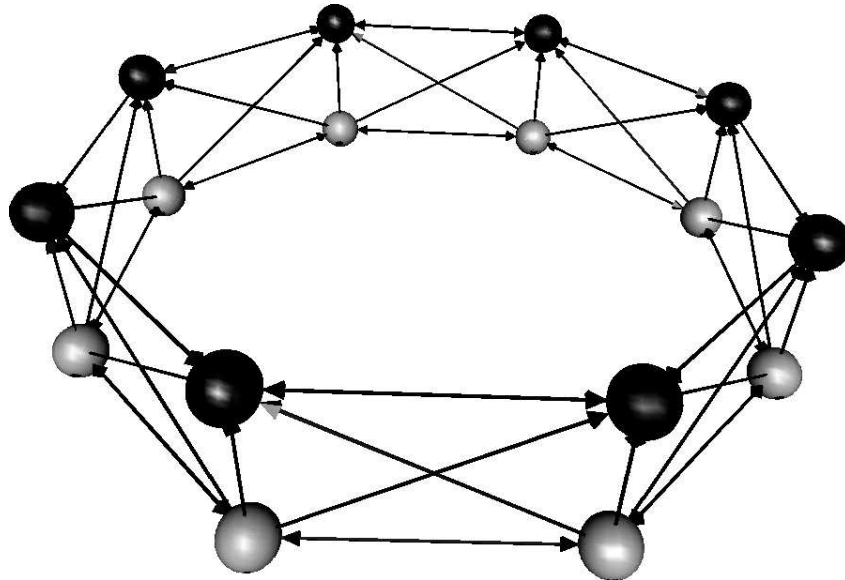
$$\begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = F(x_n^{(i)}) + \gamma_n^{(x,i)} [F(y_n^{(i)}) - F(x_n^{(i)})] \\ y_{n+1}^{(i)} = F(y_n^{(i)}) + \gamma_n^{(y,i)} [F(x_n^{(i)}) - F(y_n^{(i)})] \end{cases}, \quad (6.1)$$

em que $x_n^{(i)}$ e $y_n^{(i)}$ são as variáveis de estado das redes X e Y , respectivamente, $F(z_n^{(i)})$ é dado

pela Equação (3.3) e $\gamma_n^{(z,i)} \in [0, 1]$ representa a intensidade de interação da rede Y com a rede X para $z = x$, ou vice-versa para $z = y$.

O sistema descrito pela Equação (6.1) engloba tanto o caso em que o acoplamento é constante como aquele em que a topologia varia com o tempo. A possibilidade de variação temporal do acoplamento é expressa, neste caso, pelos índices n e i no parâmetro γ . Então, se o acoplamento *internetwork* for constante e todos os sítios interagirem uns com os outros, ambos os índices são omitidos. A Figura (6.1) ilustra o sistema composto pelas duas redes para o caso em que $\gamma_n^{(y,i)} = \gamma$ e $\gamma_n^{(x,i)} = 0$. Note que este caso expressa um acoplamento *internetwork* do tipo mestre-escravo, sendo X a rede mestra e Y a escrava.

Figura 6.1: Representação do sistema composto por duas redes com acoplamento *intranetwork* local e acoplamento *internetwork* do tipo mestre-escravo. As esferas claras representam os elementos da rede X e as escuras os elementos da rede Y enquanto que as setas indicam a direção do acoplamento.



FONTE: O autor.

6.2 A análise linear

Para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização podemos verificar o comportamento de trajetórias na vizinhança de $\mathcal{S}$. Como vimos anteriormente, se $\mathcal{S}$ for estável as trajetórias tendem a se aproximar dele, caso contrário elas tendem a se afastar. Consideremos, então, que as redes estão sincronizadas e realizemos pequenas perturbações nas trajetórias em $\mathcal{S}$. Mais precisamente, vamos assumir $y_{n+1}^{(i)} = x_{n+1}^{(i)} + \varphi_n^{(i)}$, sendo $0 < \varphi_n^{(i)} \ll 1$. Neste

caso, a dinâmica será dada por

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = F(x_n^{(i)}) + \gamma_n^{(x,i)} [F(x_n^{(i)} + \varphi_n^{(i)}) - F(x_n^{(i)})] \\ x_{n+1}^{(i)} + \varphi_{n+1}^{(i)} = F(x_n^{(i)} + \varphi_n^{(i)}) \gamma_n^{(y,i)} [F(x_n^{(i)}) - F(x_n^{(i)} + \varphi_n^{(i)})]. \end{cases} \quad (6.2)$$

Mas, como $\varphi_n^{(i)} \ll 1$ podemos expandir $F(x_n^{(i)} + \varphi_n^{(i)})$ em série de Taylor e reter apenas o primeiro termo da expansão. Fazendo isso obtemos

$$x_{n+1}^{(i)} = F(x_n^{(i)}) + \gamma_n^{(x,i)} \varphi_n^{(i)} F'(x_n^{(i)}) \quad (6.3)$$

$$x_{n+1}^{(i)} + \varphi_{n+1}^{(i)} = F(x_n^{(i)}) + \varphi_n^{(i)} F'(x_n^{(i)}) - \gamma_n^{(y,i)} \varphi_n^{(i)} F'(x_n^{(i)}), \quad (6.4)$$

em que $F'(x_n^{(i)})$ é a derivada do função que rege o acoplamento *intranetwork*. Uma simples subtração de (6.4) e (6.3) nos leva a

$$\varphi_{n+1}^{(i)} = (1 - \gamma_n^{(x,i)} - \gamma_n^{(y,i)}) F'(x_n^{(i)}) \varphi_n^{(i)}. \quad (6.5)$$

Esta equação nos permite determinar o erro entre cada par (x_n, y_n) de variáveis em um instante arbitrário n dado que conhecemos o erro no instante imediatamente anterior. Então, dado um erro inicial $\varphi_0^{(i)}$, o erro após n iteradas pode ser obtido considerando aplicações sucessivas de (6.5), ou seja,

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(i)} &= (1 - \gamma_{n-1}^{(x,i)} - \gamma_{n-1}^{(y,i)}) F'(x_{n-1}^{(i)}) \varphi_{n-1}^{(i)} \\ &= (1 - \gamma_{n-1}^{(x,i)} - \gamma_{n-1}^{(y,i)}) (1 - \gamma_{n-2}^{(x,i)} - \gamma_{n-2}^{(y,i)}) F'(x_{n-1}^{(i)}) F'(x_{n-2}^{(i)}) \varphi_{n-2}^{(i)} \\ &= \vdots \\ &= \prod_{t=0}^{n-1} (1 - \gamma_t^{(x,i)} - \gamma_t^{(y,i)}) \prod_{t=0}^{n-1} (F'(x_t^{(i)})) \varphi_0^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Agora, dividindo ambos os membros por $\varphi_0^{(i)}$ e tomando a raiz n -ésima obtemos

$$\left(\frac{\varphi_n^{(i)}}{\varphi_0^{(i)}} \right)^{1/n} = \left[\prod_{t=0}^{n-1} (1 - \gamma_t^{(x,i)} - \gamma_t^{(y,i)}) \prod_{t=0}^{n-1} (F'(x_t^{(i)})) \right]^{1/n}.$$

Finalmente tomando o logarítmo natural em ambos os lados e fazendo $n \rightarrow \infty$ encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\varphi_n^{(i)}}{\varphi_0^{(i)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |1 - \gamma_t^{(x,i)} - \gamma_t^{(y,i)}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |F'(x_t^{(i)})|. \quad (6.7)$$

Se assumirmos que a probabilidade de conexão entre cada par de sítios das redes X e Y é invariante sobre translações na rede então o primeiro termo do lado direito será igual para qualquer sítio i . Além disso, se os sistemas forem ergódicos também o segundo termo resultará no mesmo valor independentemente do sítio considerado. Então, lembrando que ϕ é uma perturbação da

trajetória sincronizada e que, portanto, diz respeito ao erro de sincronização, a média de (6.7) nos leva à

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \ln |1 - \gamma_t^{(x)} - \gamma_t^{(y)}| + \Lambda(N, \varepsilon) \quad (6.8)$$

em que $\lambda_{\perp}$ é o maior expoente de Lyapunov transversal à $\mathcal{S}$ e $\Lambda(N, \varepsilon)$ é o maior expoente de Lyapunov de uma das redes isoladas, por exemplo, a rede X .

A Equação (6.8) mostra que a dinâmica transversal ao subespaço de sincronização do sistema (6.1) depende tanto do comportamento espaço-temporal do acoplamento *internetwork* como do comportamento dinâmico da rede individual. No caso particular em que o parâmetro de acoplamento é constante e todos os sítios de uma rede interagem com os sítios da outra com a mesma intensidade essa equação se reduz à

$$\lambda_{\perp} = \ln |1 - \gamma^{(x)} - \gamma^{(y)}| + \Lambda(N, \varepsilon). \quad (6.9)$$

Note que, para o caso de acoplamento unidirecional, em que apenas uma rede influencia a dinâmica da outra, basta assumirmos um dos γ igual a zero na equação acima. Por outro lado, se o acoplamento for bidirecional e as duas redes interagirem com a mesma intensidade, então este termo será $\ln |1 - 2\gamma|$.

De acordo com (6.8) o comportamento das trajetórias na vizinhança de $\mathcal{S}$ depende de ambos os parâmetros de acoplamento, o *inter* e o *intranetwork*. No entanto, a influência deste último não é explícita como do primeiro e há casos em que ela pode ser desprezada. Na verdade é o expoente de Lyapunov máximo da rede que depende diretamente do acoplamento *intranetwork*. Portanto, para explicitar a relação de $\lambda_{\perp}$ com ε precisamos determinar como Λ depende deste parâmetro. Se considerarmos uma rede cujos elementos estão sincronizados, então o expoente de Lyapunov máximo corresponde ao expoente do mapa desacoplado λ_u . Isto significa que quando há sincronização *intranetwork* $\Lambda(N, \varepsilon) = \Lambda(N, 0) = \lambda_u$. Mas, como mencionamos anteriormente, estamos interessados no caso em que a dinâmica dentro da rede seja não-síncrona e bastante descorrelacionada. Então, dadas estas condições, podemos assumir que o acoplamento *intranetwork* é suficientemente fraco. Pikovski¹⁰⁹ mostrou que, se este for o caso, o expoente de Lyapunov máximo de uma rede de mapas da tenda localmente acoplados será dado por

$$\Lambda = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right). \quad (6.10)$$

Note que não aparece nenhum termo com N na equação acima, o que significa que, para acoplamentos suficientemente fracos, $\varepsilon \leq 0,1$ por exemplo, a dinâmica na direção mais instável do

espaço de fases independe do tamanho da rede.

Substituindo, então, a Equação (6.10) em (6.8) obtemos

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \ln |1 - \gamma_t^{(x)} - \gamma_t^{(y)}| + \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right), \quad (6.11)$$

para $\varepsilon \leq 0, 1$. Esta equação fornece o maior expoente de Lyapunov transversal, de um sistema composto por duas réplicas de redes de mapas da tenda com $a = 2$ e acoplamento *intranetwork* do tipo local. Nela está explícita a contribuição dos acoplamentos *intra* e *internetwork* para a dinâmica transversal à $\mathcal{S}$. Portanto, dado que a estabilidade deste subespaço implica sincronização, podemos utilizá-la para verificar se ocorrerá ou não a sincronização entre as réplicas à medida que elas evoluem no espaço-tempo.

6.3 Parâmetros críticos de sincronização

Embora a Equação (6.11) tenha sido derivada considerando trajetórias na vizinhança de $\mathcal{S}$, ela pode ser utilizada em um contexto mais geral. Podemos utilizá-la, por exemplo, para determinar os valores dos parâmetros de acoplamento críticos a partir dos quais as redes sincronizam ou, então, para escrever uma expressão para o tempo de sincronização médio entre as redes em termos dos parâmetros de acoplamento. A generalização da Equação (6.11) é possível porque assumimos que a dinâmica local da rede é descrita pelo mapa da tenda e, portanto, se $\mathcal{S}$ for estável, ocorrerá uma convergência monotônica das trajetórias para este subespaço à medida que as redes evoluem.

Para determinar os parâmetros de acoplamento a partir dos quais ocorre a sincronização entre as redes, podemos utilizar a condição de nulidade do maior expoente de Lyapunov transversal. Então, assumindo $\lambda_{\perp} = 0$ na Equação (6.11) ficamos com

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^n \ln |1 - \gamma_t^{(x)} - \gamma_t^{(y)}| + \ln(2) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right). \quad (6.12)$$

Observe que, como o parâmetro de acoplamento *internetwork* pode variar com o tempo, para obtermos uma relação mais direta entre os acoplamentos *intra* e *internetwork* precisamos conhecer como este último muda com o tempo. No caso particular em que este é constante e igual para as duas redes encontramos

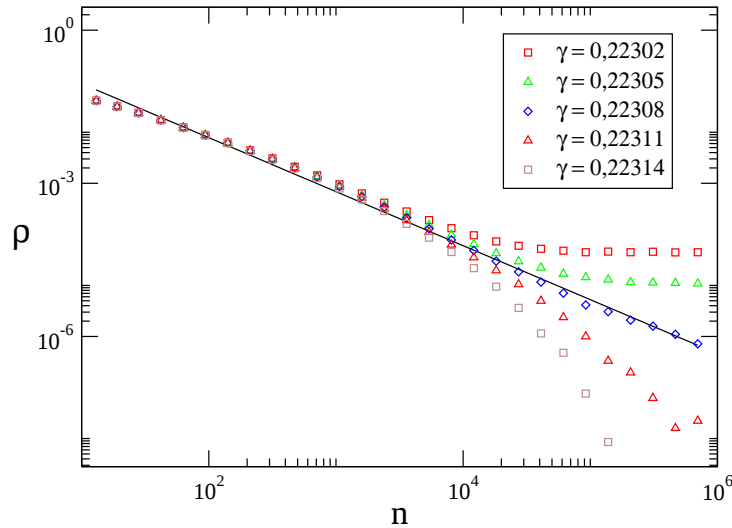
$$\gamma_c^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right)^{-1/2}, \quad (6.13)$$

sendo que os sinais de $(-)$ e $(+)$ referem-se, respectivamente, aos valores mínimo e máximo do

acoplamento para que as redes sincronizem.

Os valores de $\gamma_c^\pm$ obtidos por meio da Equação (6.13) definem a fronteira de sincronização no espaço dos parâmetros para $0 \leq \varepsilon \leq 0,1$. Se $\gamma > \gamma_c^-$ as redes sincronizarão após um certo tempo transiente, mas $\gamma < \gamma_c^-$ a sincronização não será observada seja qual for o tempo transiente utilizado. Especificamente, para $\gamma = \gamma_c^\pm$ o erro de sincronização médio dado pela Equação (4.4) deve decair com tempo em uma lei de potência.⁹⁰ Então, assumindo $\varepsilon = 0,1$ investigamos a evolução temporal do erro de sincronização médio para $\gamma \approx \gamma_c$, sendo γ_c^- determinado a partir de (6.13). A Figura 6.2 mostra que o comportamento temporal do erro de sincronização concorda com a previsão teórica. Além disso, para o valor crítico do acoplamento ($\gamma = 0,22308$) o melhor ajuste dos dados indica um decaimento lei potência com coeficiente $1,08 \pm 0,03$, o qual está em bom acordo com o valor encontrado na literatura $1,10 \pm 0,05$ ¹¹⁰ para sistemas pertencentes à classe de ruído multiplicativo.

Figura 6.2: Evolução temporal do erro de sincronização médio entre duas réplicas de redes de mapas da tenda acopladas local e bidirecionalmente. Os dados correspondem à $\varepsilon = 0,1$ e $N = 10^3$ e a média foi realizada considerando 100 condições iniciais aleatórias.



FONTE: O autor.

Outra propriedade de sincronização que está relacionada com o maior expoente de Lyapunov transversal é o tempo de sincronização médio. Esta quantidade é, geralmente, determinada considerando a evolução de um conjunto de trajetórias e verificando o tempo no qual o erro de sincronização médio é menor do que um certo valor ρ_c . Mas, como vimos ao deduzirmos a equação do expoente de Lyapunov transversal, o erro de sincronização médio satisfaz a equação

$$\rho_n = \rho_0 e^{\lambda_\perp n}. \quad (6.14)$$

Portanto, se assumirmos que para $n = \tau_s$ o erro de sincronização médio é igual ao valor de corte ρ_c e que $\rho_0 = 0,5$, obtemos

$$\tau_s = \frac{\ln(2\rho_c)}{\lambda_{\perp}}. \quad (6.15)$$

A Equação (6.15) relaciona o tempo de sincronização médio com o maior expoente de Lyapunov transversal à $\mathcal{S}$. Nossa suposição de que $\rho_0 = 0,5$ deve-se ao fato de que as condições iniciais são definidas aleatoriamente dentro do intervalo $[0, 1]$. Portanto, como ρ_0 representa uma quantidade média, esperamos que ele se aproxime cada vez mais do valor suposto à medida que adicionamos mais condições iniciais ou aumentamos o tamanho das redes.

Considerando novamente o caso em que o acoplamento *internetwork* é constante, o tempo de sincronização entre as redes será dado por

$$\tau_s = \frac{\ln(2\rho_c)}{\ln|1 - \gamma^{(x)} - \gamma^{(y)}| + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2)}. \quad (6.16)$$

Se assumirmos $\gamma^{(x)} = \gamma^{(y)} = \gamma$, que corresponde ao caso ilustrado na Figura 6.1, a equação acima adquire a forma

$$\tau_s = \frac{\ln(2\rho_c)}{\ln|1 - 2\gamma| + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2)}. \quad (6.17)$$

Uma simplificação adicional é obtida quando $\gamma = 0,25$ que corresponde ao valor crítico para o caso de dois mapas acoplados. Assumindo tal valor encontramos

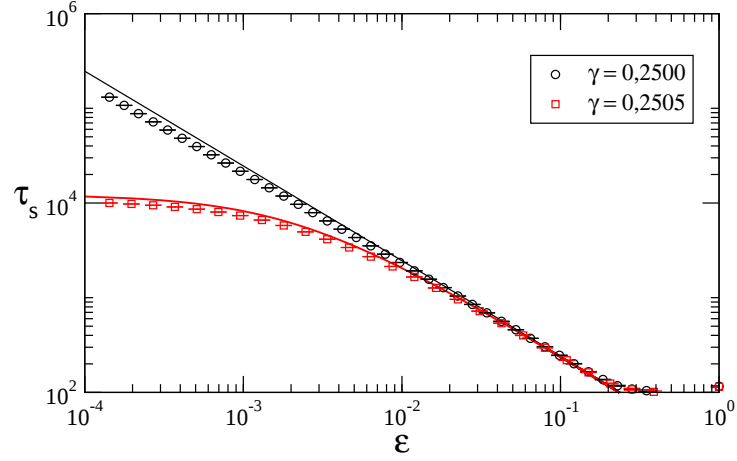
$$\tau_s = \frac{\ln(2\rho_c)}{\frac{1}{2} \ln(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2)}. \quad (6.18)$$

Finalmente, realizando uma expansão em série de potências do denominador até segunda ordem e desprezando os termos de ordens superiores obtemos

$$\tau_s \approx -\frac{\ln(2\rho_c)}{\varepsilon(1 - \frac{1}{4}\varepsilon)}. \quad (6.19)$$

Logo, em primeira ordem, o tempo de sincronização médio decai com ε seguindo uma lei potência. A Figura 6.3 mostra a curva de decaimento do tempo de sincronização em função da intensidade do acoplamento *intranetwork* para dois valores de acoplamento entre as redes. Os resultados indicam um bom acordo entre a curva analítica e os dados obtidos numericamente. Tanto em um como no outro caso consideramos as trajetórias sincronizadas quando $\rho \leq \rho_c = 10^{-12}$. Se, em vez de um acoplamento bidirecional utilizássemos um acoplamento unidirecional, então o comportamento como lei de potência seria observado para $\gamma = 0,50$ como demonstramos em.⁴²

Figura 6.3: Tempo de sincronização entre duas réplicas de redes de mapas da tenda acopladas local e bidirecionalmente em função do acoplamento *intranetwork*. As linhas correspondem ao resultado analítico e os pontos representam os valores médios sobre 100 condições iniciais aleatórias e $N = 10^3$.



FONTE: O autor.

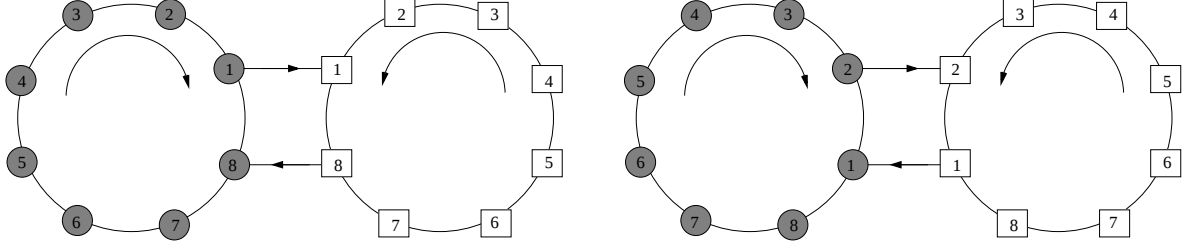
6.4 Acoplamento periódico

Vamos considerar, agora, o caso em que o parâmetro de acoplamento γ pode variar espaço-temporalmente. Isto significa que o acoplamento *internetwork* pode apresentar valores diferentes em cada instante de tempo e para cada sítio das redes. Por uma questão de simplicidade assumiremos, porém, que o acoplamento é periódico, ou seja, que as ligações entre as redes através de determinados sítios ocorre em períodos de tempo bem definidos. Por exemplo, se $\gamma_n^{z,i} > 0$ para um dado i , então $\gamma_{n+p}^{z,i} \cdot \gamma_n^{z,i} > 0$ para todo $n > 0$, sendo p o período de variação da topologia. Note que a periodicidade espacial do acoplamento não significa que a intensidade da interação é a mesma a cada período, mas apenas que a interação ocorre sempre no mesmo intervalo de tempo. Em relação à intensidade da interação vamos assumir que ela corresponde a um número aleatório tomado de uma distribuição uniforme cujo intervalo é bem definido. Portanto, em geral, ela muda com o tempo.

Consideremos, então, que a dinâmica do sistema é dada por (6.1) e que a cada instante de tempo $\gamma_n^{x,i}$ e $\gamma_n^{y,j}$ são não-nulos apenas para um determinado $i = k_n$ e $j = k_n + 1 \pmod{N}$. O valor da variável k em cada instante pode ser definido arbitrariamente; no entanto, vamos assumir que $k = n \pmod{N}$. Dessa maneira, estamos impondo que em $n = N$ iteradas todos os sítios de uma rede interajam diretamente com os sítios da outra rede. Note também que durante N iteradas cada sítio de uma rede acopla-se com seu correspondente da outra rede em dois instantes de tempo, mas, sendo $\gamma_n^{x,i} \neq \gamma_n^{y,j}$, em cada instante apenas um deles exerce uma influência sobre a dinâmica do outro. A Figura (6.4) ilustra esta forma de acoplamento para os dois primeiros instantes de tempo. Observe que a imposição de que $k = n \pmod{N}$ equivale a

mantermos as conexões *internetwork* fixas e rotacionarmos as duas redes a mesma quantidade, mas em sentidos contrários, a cada instante de tempo.

Figura 6.4: Representação esquemática do acoplamento *internetwork* periódico para $N = 8$ e dois instantes de tempo subsequentes.



FONTE: O autor.

Como no caso em que o acoplamento é constante estamos interessados em analisar as condições em que ocorre a sincronização entre as variáveis $x_n^{(i)}$ e $y_n^{(i)}$ de cada rede. Sabemos, porém, que para ela ser observada é necessário que a intensidade do acoplamento seja maior do que um certo valor crítico. Portanto, para garantirmos a sincronização das redes devemos assegurar que $\gamma_t^{(z,i)} \geq \gamma_c$ para todo $t > 0$. É possível observar sincronização mesmo que ocorra $\gamma_t^{(z,i)} < \gamma_c$ em alguns instantes de tempo. No entanto, estes valores devem ocorrer com uma frequência bem menor do que os demais, caso contrário o afastamento das trajetórias em relação à $\mathcal{S}$ será, na média, maior do que a aproximação. Diante disso, vamos assumir que quando há interação entre os sítios ($i = k$ e $i = k + 1$ para as redes X e Y respectivamente) a intensidade do acoplamento $\gamma_t^{(z,i)} \in [\gamma_c^-, \gamma_c^+]$. Portanto, precisamos encontrar os valores que definem os limites desse intervalo. Mas, como os valores críticos não dependem do tempo, para determiná-los consideraremos que, se dois sítios estão acoplados, a interação ocorre com a mesma intensidade em todo o tempo.

Vimos que, independentemente das regras que definem o acoplamento entre as redes, pequenas perturbações em $\mathcal{S}$ se propagam no tempo de acordo com (6.5). Portanto para o acoplamento periódico a perturbação em cada variável em $n = 1$ será dada por

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= (1 - \gamma)F'(x_0^{(1)})\varphi_0^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} &= (1 - \gamma)F'(x_0^{(2)})\varphi_0^{(2)} \\ \varphi_1^{(i)} &= F'(x_0^{(i)})\varphi_0^{(i)} \text{ para } i > 2.\end{aligned}$$

Para $n = 2$ os sítios acoplados são outros e a perturbação torna-se

$$\begin{aligned}\varphi_2^{(1)} &= F'(x_1^{(1)})\varphi_1^{(1)} = (1-\gamma)F'(x_0^{(1)})F'(x_1^{(1)})\varphi_0^{(1)} \\ \varphi_2^{(2)} &= (1-\gamma)F'(x_1^{(1)})\varphi_1^{(2)} = (1-\gamma)^2F'(x_0^{(2)})F'(x_1^{(2)})\varphi_0^{(2)} \\ \varphi_2^{(3)} &= (1-\gamma)F'(x_1^{(3)})\varphi_1^{(3)} = (1-\gamma)F'(x_0^{(3)})F'(x_1^{(3)})\varphi_0^{(3)} \\ \varphi_2^{(i)} &= F'(x_1^{(i)})F'(x_2^{(i)})\varphi_0^{(i)} \text{ para } i > 3.\end{aligned}$$

Então, após N iteradas, o acoplamento ocorrerá igualmente entre todos os sítios e, portanto, a perturbação sobre as variáveis será

$$\varphi_N^{(i)} = (1-\gamma)^2 \left(\prod_{n=0}^{N-1} F'(x_n^{(i)}) \right) \varphi_0^{(i)}.$$

Consequentemente, para qualquer T múltiplo inteiro de N teremos

$$\varphi_n^{(i)} = (1-\gamma)^{2T/N} \left(\prod_{n=0}^{T-1} F'(x_n^{(i)}) \right) \varphi_0^{(i)}.$$

Agora, dividindo ambos os membros por $\varphi_0^{(i)}$ e tomando a raiz T -ésima obtemos

$$\left(\frac{\varphi_n^{(i)}}{\varphi_0^{(i)}} \right)^{1/T} = \left[(1-\gamma)^{2T/N} \left(\prod_{n=0}^{T-1} F'(x_n^{(i)}) \right) \right]^{1/T}.$$

Finalmente tomando o logaritmo natural em ambos os lados e fazendo $T \rightarrow \infty$ encontramos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\varphi_n^{(i)}}{\varphi_0^{(i)}} \right) = \ln(1-\gamma)^{2/N} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{n=0}^{T-1} \ln |F'(x_n^{(i)})| \right). \quad (6.20)$$

Dado que as redes são ergódicas, podemos escrever

$$\lambda_{\perp} = \ln(1-\gamma)^{2/N} + \Lambda(N, \varepsilon). \quad (6.21)$$

Esta equação constitui um caso particular de (6.8) e o fator 2 que aparece resulta da nossa imposição de que apenas dois sítios distintos estão acoplados unidirecionalmente a cada instante de tempo. Então, se assumirmos que o acoplamento ocorre entre κ sítios distintos, obteremos

$$\lambda_{\perp} = \ln |1-\gamma|^{\kappa/N} + \Lambda(N, \varepsilon). \quad (6.22)$$

Para obter o valor de $\gamma_c^{\pm}$ usamos a condição de nulidade do maior expoente de Lyapunov transversal. Então, assumindo $\lambda_{\perp} = 0$ em (6.22) encontramos

$$\gamma_c^{\pm} = 1 \pm e^{-N\Lambda(N, \varepsilon)/\kappa}. \quad (6.23)$$

Esta equação nos fornece os valores máximo e mínimo do acoplamento *internetwork* que permitem a sincronização. Observe, porém, que ela resulta em $\gamma_c^+ > 1$, o que significa que não precisamos nos preocupar com o valor máximo de $\gamma^{(z,i)}$ já que ele está fora do intervalo no qual este parâmetro é definido.

No caso em que o valor de γ é dado, podemos utilizar a condição de nulidade do maior expoente de Lyapunov transversal para determinar o número de conexões κ_c necessário para que as redes sincronizem. Fazendo isso encontramos

$$\kappa_c = \frac{-N\Lambda(N, \varepsilon)}{\ln|1 - \gamma|}. \quad (6.24)$$

Note que, para obter as equações acima, não fizemos nenhuma suposição sobre os valores do acoplamento *intranetwork*. Mas, se assumirmos $\varepsilon < 0,1$ o expoente de Lyapunov máximo será dado por (6.10). Neste caso, podemos escrever

$$\gamma_c^- = 1 - \left(2\sqrt{1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2} \right)^{-\frac{N}{\kappa}}, \quad (6.25)$$

e

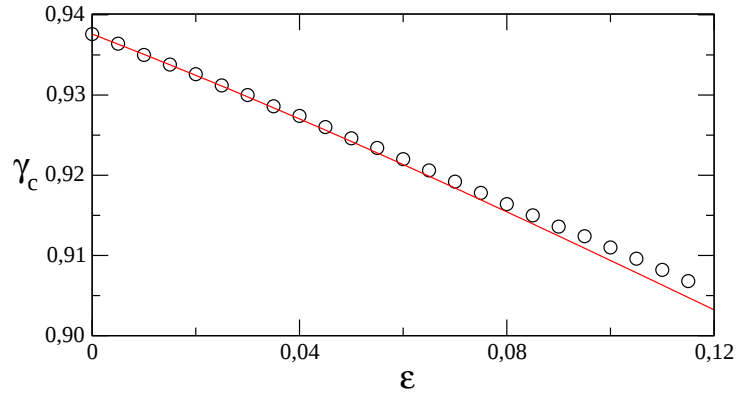
$$\kappa_c = \frac{-N \left[\ln 2 + \ln(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \right]}{\ln(1 - \gamma)}. \quad (6.26)$$

Observe que γ_c é menor quanto maior o valor de ε e menor for a razão N/κ . Considerando o caso ilustrado na Figura 6.4, $N = 8$ e $\kappa = 2$, a equação acima nos fornece $\gamma_{c,min}^- = 0,9048$ e $\gamma_{c,max}^- = 0,9375$, que correspondem a $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0$, respectivamente. Para este caso, também analisamos a evolução temporal do erro de sincronização médio, Equação (4.4). Os valores dos parâmetros de acoplamento para os quais observamos $\rho < 10^{-12}$ são mostrados na Figura 6.5. Podemos observar que tais valores coincidem com aqueles obtidos mediante a Equação (6.25) para acoplamentos fracos, mas a medida que o acoplamento é intensificado eles perdem a correlação.

6.5 Quantidades efetivas para as réplicas acopladas periodicamente

Para construir um sistema efetivo para as redes com topologia variando no tempo precisamos determinar os expoentes de Lyapunov ou autovalores efetivos e os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$. Então, de posse dessas quantidades, usamos a Equação (5.4) para obter a matriz de acoplamento do novo sistema que, por construção, apresenta as mesmas propriedades de

Figura 6.5: Fronteira de sincronização *internetwork* no espaço dos parâmetros. A linha refere-se ao resultado analítico dado pela Equação (6.25) e os círculos representam os valores obtidos numericamente variando os parâmetros de acoplamento e verificando quando $\rho < 10^{-12}$ em 10^3 iterações subsequentes.



FONTE: O autor.

sincronização do sistema variável no tempo. De forma geral os autovalores efetivos são determinados considerando a taxa de decaimento dos autovalores da matriz $\mathbf{Q}_n$. No entanto, se conhecemos os vetores de Lyapunov do subespaço de sincronização, podemos determinar os expoentes de Lyapunov efetivos usando (4.23).

Em geral os vetores de Lyapunov de $\mathcal{S}$ não são conhecidos. Mas, como mostramos no capítulo anterior, existem casos que nos permitem supor a forma desses vetores. O sistema descrito na seção precedente é um desses casos. Os motivos que nos levam a acreditar nisso são semelhantes àqueles usados para a rede cuja probabilidade de conexão decai com a distância, isto é, a periodicidade e a invariância. A diferença aqui é que a invariância do acoplamento só pode ser inferida em instantes de tempo que são múltiplos inteiros de N . Portanto, para utilizar (4.23) devemos substituir $\mathbf{G}_t$ por $\mathbf{Q}_p$, sendo $p = nN$.

Considere, então, o caso em que $N = 8$ e $\kappa = 2$ que é o mesmo analisado na seção anterior. A matriz $\mathbf{Q}_N$ para este acoplamento pode ser escrita como

$$\mathbf{Q}_N = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 - \gamma + \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \hline \gamma & 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma - \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma + \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 1 - \gamma + \gamma^2 \end{array} \right).$$

Portanto, usando os elementos dessa matriz em (4.23) e considerando que os vetores de Lya-

punov de $\mathcal{S}$ são os vetores da base circulante obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_m &= \frac{1}{p} \ln \left\| \frac{1}{N} \sum_{s,r=0}^{N-1} [\mathbf{Q}_N]_{s,r} e^{2\pi i m(s-r)/N} \right\| \\
&= \frac{1}{N} \ln \left\| \frac{1}{N} \left(N(1-\gamma) + \frac{N}{2} \gamma^2 + \frac{N}{2} \gamma e^{-\pi i m} - \gamma^2 e^{-\pi i m} + \frac{N}{2} \gamma e^{\pi i m} - \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \gamma^2 e^{\pi i m} \right) \right\| \\
&= \frac{1}{N} \ln \left\| \frac{1}{N} \left(N(1-\gamma) + \frac{N}{2} \gamma^2 + N\gamma \cos(\pi m) - \frac{N}{2} \gamma^2 \cos(\pi m) \right) \right\| \\
&= \frac{1}{N} \ln \left\| 1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma \cos(\pi m) - \frac{\gamma^2}{2} \cos(\pi m) \right\|. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Observe que se m é par ou nulo

$$\hat{\lambda}_m = \frac{1}{p} \ln \left\| 1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma - \frac{\gamma^2}{2} \right\| = 0, \tag{6.28}$$

enquanto que se m é ímpar temos

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_m &= \frac{1}{N} \ln \left\| 1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} \right\| \\
&= \frac{1}{N} \ln \|1 - 2\gamma + \gamma^2\| \\
&= \frac{1}{N} \ln (1 - \gamma)^2. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (4.13) e lembrando que, neste caso o sistema isolado refere-se a uma rede e, portanto, $\lambda_u \rightarrow \Lambda(N, \varepsilon)$, encontramos

$$\lambda_m = \frac{1}{N} \ln (1 - \gamma)^2 + \Lambda(N, \varepsilon) \text{ para } m \text{ ímpar.} \tag{6.30}$$

Como o maior expoente de Lyapunov transversal à $\mathcal{S}$ corresponde à $m = 1$, podemos escrever

$$\lambda_{\perp} = \ln (1 - \gamma)^{\frac{2}{N}} + \Lambda(N, \varepsilon). \tag{6.31}$$

Note que esta equação é idêntica à (6.21) obtida considerando a evolução de pequenas perturbações na vizinhança do subespaço de sincronização. A igualdade entre estas equações nos deixa mais convictos de que a base circulante é uma base privilegiada para sistemas que possuem uma determinada invariância translacional sobre as regras de acoplamento.

6.6 Sistema efetivo para as réplicas acopladas periodicamente

Usando os expoentes de Lyapunov efetivos $\hat{\lambda}_m$ obtidos na seção anterior construiremos, agora, a matriz de acoplamento efetiva para o sistema composto por duas redes acopladas

periodicamente. De (5.4) temos que

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} &= [\mathbf{H} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_m}\} \mathbf{H}^\dagger]_{a,b} \\
 &= \sum_{w=0}^{N-1} [\mathbf{H} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_m}\}]_{aw} [\mathbf{H}^\dagger]_{wb} = \sum_{w,s=0}^{N-1} [\mathbf{H}]_{as} \text{diag}\{e^{\hat{\lambda}_m}\}_{sw} [\mathbf{H}^\dagger]_{wb} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{w,s=0}^{N-1} e^{(-2\pi ias)/N} (\varphi_{sw} e^{\hat{\lambda}_s}) e^{(2\pi iwb)/N} = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} e^{\hat{\lambda}_w} e^{(-2\pi iw(a-b))/N}.
 \end{aligned}$$

Como $\hat{\lambda}_m = 0$ se m é par e $\hat{\lambda}_m = \ln(1-\gamma)^{2/N}$ se m é ímpar podemos reescrever a equação acima como

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{a,b} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{w=0}^{N/2-1} e^{(-2\pi i2w(a-b))/N} + (1-\gamma)^{2/N} \sum_{w=1}^{N/2} e^{(-2\pi i(2w-1)(a-b))/N} \right\}.$$

Então, fazendo $a = 0$ e $b = b - a \pmod N$ encontramos

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{G}}]_{0,(b-a \pmod N)} &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{w=0}^{N/2-1} e^{(-2\pi i2w(a-b))/N} + (1-\gamma)^{2/N} \sum_{w=1}^{N/2} e^{(-2\pi i(2w-1)(a-b))/N} \right\} \\
 &= [\hat{\mathbf{G}}]_{a,b}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Como esta igualdade vale para todo $a, b = 0, 1, \dots, N-1$ a matriz de acoplamento efetiva é uma matriz circulante. Portanto, para determinar $\hat{\mathbf{G}}$ completamente precisamos determinar apenas os elementos da primeira linha. Calculando, $[\hat{\mathbf{G}}]_{0,b}$ encontramos

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{G}}]_{0,b} &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{w=0}^{N/2-1} e^{(2\pi i2wb)/N} + (1-\gamma)^{2/N} \sum_{w=1}^{N/2} e^{(2\pi i(2w-1)b)/N} \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \left\{ e^0 + e^{(2\pi i2b)/N} + e^{(2\pi i4b)/N} + \dots + e^{(2\pi i2(N/2-2)b)/N} + e^{(2\pi i2(N/2-1)b)/N} + \right. \\
 &\quad \left. (1-\gamma)^{2/N} \left(e^{(2\pi ib)/N} + e^{(2\pi i3b)/N} + \dots + e^{(2\pi i(2(N/2-1)-1)b)/N} + e^{(2\pi i(2N/2-1)b)/N} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \left\{ e^0 + e^{(2\pi i2b)/N} + e^{(2\pi i4b)/N} + \dots + e^{-(2\pi i4b)/N} + e^{-(2\pi i2b)/N} + \right. \\
 &\quad \left. (1-\gamma)^{2/N} \left(e^{(2\pi ib)/N} + e^{(2\pi i3b)/N} + \dots + e^{(-2\pi i3b)/N} + e^{(-2\pi ib)/N} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Para simplificar esta equação vamos utilizar a relação de Euler. Fazendo isso ficamos com

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{0,b} = \frac{1}{N} \left\{ 1 - \cos(\pi b) + 2 \sum_{w=1}^{N/4} \cos\left(\frac{4\pi wb}{N}\right) + 2(1-\gamma)^{2/N} \sum_{w=1}^{N/4} \cos\left(\frac{2\pi(2w-1)b}{N}\right) \right\}$$

Portanto, encontramos que $[\hat{\mathbf{G}}]_{0,b} \neq 0$ apenas se $b = 0$ e $b = N/2$. Para tais casos obtemos

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{0,0} = \frac{1}{2} \left[1 + (1-\gamma)^{2/N} \right] \quad \text{e} \quad [\hat{\mathbf{G}}]_{0,N/2} = \frac{1}{2} \left[1 - (1-\gamma)^{2/N} \right]$$

Note que os elementos da diagonal da matriz de acoplamento efetiva equivalem à soma dos dois autovalores efetivos não degenerados utilizados para construir esta matriz e que $\sum_{w=0}^{N-1} [\hat{\mathbf{G}}]_{0,w} = 1$. Esta última assegura a matriz de acoplamento efetiva é estocástica como são as matrizes de acoplamento do sistema original.

6.7 O sistema efetivo reduzido

Ao deduzirmos a matriz de acoplamento do sistema efetivo para duas réplicas de redes acopladas periodicamente verificamos que ela apresenta dois elementos não-nulos em cada linha. Um desses elementos corresponde à soma dos autovalores efetivos dividido por dois e o outro a diferença entre o primeiro e o segundo, em ordem de magnitude, dividido por dois. Este resultado, juntamente com o fato de que o tempo de sincronização para mapas suaves depende apenas do maior expoente de Lyapunov transversal, nos faz acreditar que é possível construir um sistema efetivo composto apenas por dois mapas e que possua propriedades de sincronização equivalentes.

A matriz de acoplamento do sistema efetivo reduzido é dada por

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \theta_{\perp}) & \frac{1}{2}(1 - \theta_{\perp}) \\ \frac{1}{2}(1 - \theta_{\perp}) & \frac{1}{2}(1 + \theta_{\perp}) \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

em que $\theta_{\perp} = e^{\hat{\lambda}_{\perp}}$ é o autovalor efetivo associado ao maior expoente de Lyapunov efetivo transversal à $\mathcal{S}$. Vamos definir um parâmetro de acoplamento efetivo $\hat{\gamma}$ dado por

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{2}(1 - \theta_{\perp}). \quad (6.34)$$

Usando esta nova quantidade a matriz de acoplamento efetiva torna-se

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\gamma} & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma} & 1 - \hat{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Esta matriz é bastante familiar e representa um acoplamento bidirecional entre dois mapas, Equação (2.3).

De acordo com a Equação (6.15) o sistema efetivo reduzido e o sistema com conexões variáveis exibem o mesmo tempo de sincronização médio se ambos apresentarem o mesmo expoente de Lyapunov $\lambda_{\perp}$. Como o primeiro representa um acoplamento bidirecional entre dois mapas, este expoente é facilmente determinado. Mais precisamente ele é dado por

$$\lambda_{\perp} = \ln(1 - 2\hat{\gamma}) + \tilde{\Lambda}, \quad (6.36)$$

sendo $\tilde{\Lambda}$ o expoente de Lyapunov associado à dinâmica do mapa utilizado. Então, substituindo (6.34) nesta equação obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_{\perp} &= \ln(\theta_{\perp}) + \tilde{\Lambda} \\ \lambda_{\perp} &= \hat{\lambda}_{\perp} + \tilde{\Lambda}.\end{aligned}\tag{6.37}$$

Portanto, se o mapa utilizado para o sistema reduzido for escolhido de tal maneira que seu expoente de Lyapunov associado à dinâmica em $\mathcal{S}$ seja igual ao expoente de Lyapunov máximo do sistema original, isto é, se $\tilde{\Lambda} = \Lambda(N, \varepsilon)$, então ambos os sistemas apresentarão a mesma dinâmica transversal ao subespaço de sincronização e, conseqüentemente, exibirão as mesmas propriedades críticas de sincronização.

Nossos resultados sugerem uma nova maneira de estudar o comportamento dinâmico assintótico de sistemas caóticos sincronizáveis. Se encontramos na natureza um sistema sincronizável cujos componentes possuem uma dinâmica que é conhecida, mesmo que não sejamos capazes de determinar a quantidade de elementos e a forma do acoplamento entre eles, podemos construir um sistema efetivo reduzido que nos permite estudar as propriedades de sincronização do primeiro. Considere, por exemplo, uma região do cérebro que apresenta sincronização a partir de um determinado estímulo externo. Para este sistema podemos determinar $\lambda_{\perp}$ perturbando os neurônios sincronizados com um impulso elétrico e verificando o comportamento desta perturbação com o tempo. Esta taxa, como vimos, nos fornece o maior expoente de Lyapunov transversal ao subespaço de sincronização. Então, usando este expoente em (6.35) obtemos a matriz de acoplamento do sistema efetivo reduzido. Resta-nos, portanto, encontrar a dinâmica dos elementos constituintes do sistema original. No caso dos neurônios podemos supor que ela siga algum modelo presente na literatura e, assim, conseguimos um sistema que nos permite estudar o comportamento coletivo de toda uma região a partir da dinâmica de apenas dois constituintes. Por outro lado, se as equações que regem a dinâmica do sistema analisado for desconhecida, mas a série temporal das variáveis puder ser medida, então podemos utilizar os procedimentos apresentados em¹¹¹ para encontrar a forma das equações e, portanto, construir o sistema efetivo reduzido.

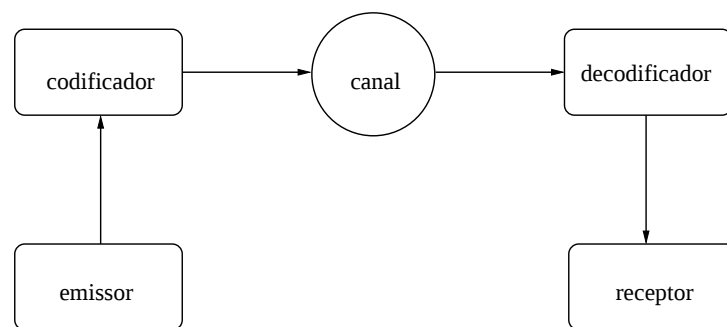
7 Criptografia baseada em redes sincronizadas com elementos não-síncronos

Sistemas de comunicação constituem dispositivos cuja finalidade é transmitir dados para diferentes locais. Em muitos casos, porém, não basta que o dispositivo seja capaz de transmitir os dados, mas ele deve fazê-lo de modo extremamente seguro. Dentro deste contexto, o fenômeno da sincronização de caos tem sido explorado como um elemento chave para aumentar a segurança de sistemas de comunicação, isto porque apenas sistemas idênticos são capazes de sincronizar.¹¹¹ Neste capítulo vamos propor e investigar um método de criptografia de dados para os sistemas de comunicação que é baseado em réplicas de redes sincronizadas cujos os elementos são não-síncronos. Este método explora a caoticidade da dinâmica dos elementos dentro da rede e a sincronização entre as réplicas de redes para transmitir dados de modo seguro. Ele também compartilha similaridades com um método denominado computação de reservatório, o qual é associado ao modo pelo qual a informação é processada e transmitida no cérebro. Tanto em um como no outro não há um esquema de codificação de caracteres pré-definido a partir do qual a mensagem é criptografada, mas este é estabelecido durante a própria comunicação por um processo de aprendizagem. Além da sincronização, utilizaremos uma quantidade física denominada entropia de transferência que, em um sentido mais amplo, mede a influência da dinâmica de um sistema sobre o outro. Empregaremos esta quantidade para verificar a correlação entre o sinal e o estado da rede a cada instante a fim de decodificar corretamente os dados criptografados. Finalizaremos o capítulo discutindo a eficiência e segurança do sistema proposto e apresentando algumas modificações que podem ser realizadas para torná-lo ainda mais seguro.

7.1 Sistemas de comunicação com caos

O processo de comunicação pode ser definido como a ação de transmitir e eventualmente receber outra mensagem como resposta, tal como em uma troca de e-mails. Do ponto de vista mais técnico, a comunicação envolve a transmissão e recepção de mensagens de uma fonte para um destinatário sendo que a mensagem, para ser transmitida através de um meio físico ou equipamento, é antes codificada em um sinal de acordo com esquema de criptografia. Esquemáticamente há cinco elementos em um sistema de comunicação: um emissor, um codificador, um canal de transmissão, um decodificador e um receptor.¹¹² O codificador manipula a mensagem de modo que ela possa ser transmitida através do canal e o decodificador realiza o processo reverso. A Figura 7.1 ilustra como estes elementos são arranjados em um sistema de comunicação. Além destes componentes o sistema de comunicação pode dispor de outros elementos que lhe assegure proteção contra ataques ou intrusos.

Figura 7.1: Diagrama esquemático de um sistema de comunicação.



FONTE: O autor.

Em um sistema de comunicação a mensagem consiste em um número de dados chamados, frequentemente, dados primários. Tratam-se de sinais que podem assumir muitas formas bem como ser traduzidos em termos numéricos, motivo pelo qual podemos medir a quantidade de informação transmitida. Quando a mensagem é composta de dígitos binários, cada unidade de informação é chamada *bit*. Em um computador, por exemplo, cada caractere é traduzido por uma sequência binária cujo tamanho ou número de *bits* depende do esquema de codificação utilizado. Especificamente no esquema ASCII cada caractere corresponde à uma sequência de 8 *bits* denominada byte. A letra “c”, por exemplo, é lida como 0110 0011.

Quando a informação de uma mensagem pode ser considerada independente de seu conteúdo semântico ela pode ser definida estatisticamente. Entramos, então, no campo da teoria de informação, no qual toda informação deve carregar uma indeterminação, caso contrário, não pode ser propriamente considerada informação. Mais precisamente, dado um sinal deve existir

uma indeterminação em relação ao próximo sinal e a quantidade de informação deste último é uma função da probabilidade dele ocorrer. Na realidade a quantidade em questão é igual ao negativo do logaritmo na base 2 da probabilidade do sinal.¹¹² Portanto, no campo da teoria de informação, a informação propriamente dita não se refere a “o que dizemos” mas a “o que poderíamos dizer”.

Para a maioria dos casos de interesse, o sistema de comunicação deve, além de transmitir as mensagens com pequena probabilidade de erro, ser capaz de fazê-lo de modo seguro. Em outras palavras, desejamos que apenas determinados destinatários recebam ou sejam capazes de decodificar a mensagem enviada. Um passo importante nesse sentido foi dado no início na década de 90.^{22,23} Mais precisamente, foi demonstrado que o fenômeno da sincronização de caos poderia ser explorado como elemento de segurança. Desde então diferentes sistemas de comunicação baseados em sincronização de caos foram propostos e investigados.^{24,113} Em geral, tais sistemas assumem uma dinâmica caótica para o emissor e para o receptor. O emissor então codifica a mensagem em um sinal caótico e, após a transmissão, a mensagem é decodificada pelo receptor sincronizado ao emissor.¹¹⁴

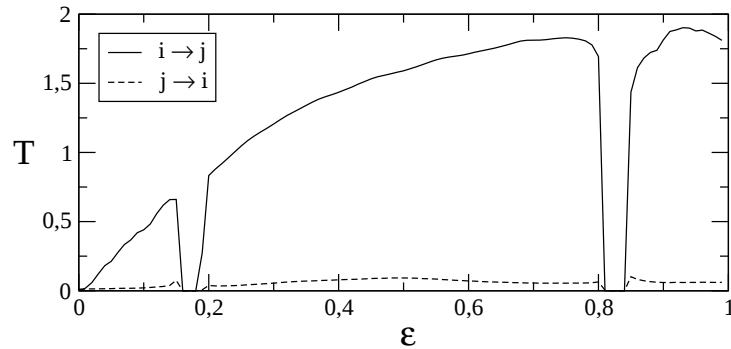
Fora do escopo da sincronização, uma abordagem alternativa para transmitir dados usando sistemas caóticos acoplados foi apresentada por Hung e Hu.⁴¹ No modelo de Hung e Hu uma mensagem binária é codificada pelo emissor de acordo com o sentido do acoplamento entre mapas caóticos dispostos em um anel e, para decodificar a mensagem, o receptor determina a entropia de transferência entre as variáveis de mapas subsequentes. A entropia de transferência é uma quantidade que diz respeito a quanto o estado futuro de um sistema é afetado pelo estado atual de outro sistema. Ela é definida como:⁴⁰

$$T_{X_n \rightarrow Y_{n+1}} \equiv \sum p(Y_{n+1}, Y_n, X_n) \log \frac{p(Y_{n+1}|Y_n, X_n)}{p(Y_{n+1}|X_n)}, \quad (7.1)$$

em que $p(,)$ e $p(|)$ denotam as probabilidades conjunta e condicional, respectivamente, e a soma é realizada sobre todos os estados possíveis para os sistemas X e Y . Note que esta quantidade é não-simétrica, ou seja, se interação entre os sistemas for diferente obtemos $T_{X_n \rightarrow Y_{n+1}} \neq T_{Y_n \rightarrow X_{n+1}}$. Portanto, dado um sistema composto por vários elementos interagentes, podemos utilizar a entropia de transferência para determinar quais elementos interagem entre si e qual o sentido da interação. A Figura 7.2 mostra o comportamento da entropia de transferência em função do parâmetro de acoplamento para dois mapas de uma rede de mapas acoplados unidirecionalmente. Observe que no sentido correto da interação ($i \rightarrow j$) ela tende a crescer com acoplamento, enquanto que no sentido contrário ($j \rightarrow i$) ela é aproximadamente nula para todo o intervalo do parâmetro. Há ainda duas regiões onde ela é nula em ambos os sentidos,

isto ocorre porque os mapas exibem um comportamento periódico nessas regiões do parâmetro.

Figura 7.2: Entropia de transferência em função do parâmetro de acoplamento para uma rede de mapas logísticos acoplados unidirecionalmente. Os dados foram obtidos considerando $N = 100$ mapas na rede e 10^5 iteradas.



FONTE: O autor.

A novidade do modelo de Hung e Hu é que ele não requer a sincronização para a transmissão de dados mas somente a determinação da entropia de transferência. No entanto, como esta quantidade é definida em termos de probabilidades,⁴⁰ um grande número de observações da dinâmica dos mapas é necessário para decodificar a mensagem. Para os dados mostrados na Figura 7.2, por exemplo, utilizamos 10^5 iteradas para determinar as probabilidades dos eventos. O tempo ou quantidade de iteradas mínima para o receptor determinar a entropia de transferência entre os mapas foi definido por Hung e Hu como tempo de relaxação. Portanto, a transmissão de informação através de seu mecanismo requer intervalos de tempo que são múltiplos do tempo de relaxação.

Considerando as duas possibilidades mencionadas de comunicação baseada em caos, propomos um mecanismo de criptografia que utiliza tanto o fenômeno da sincronização como a entropia de transferência. Nosso mecanismo é composto por duas redes de mapas acoplados, a emissora (E) e a receptora (R), sendo a rede receptora uma réplica da emissora. A transmissão de uma mensagem através do sistema é realizada a partir de dois estágios que denominamos pré e pós-sincronização. Na realidade a transmissão da mensagem propriamente dita ocorre apenas no segundo estágio, no entanto, a conclusão do primeiro estágio é fundamental para o processo de decodificação da mensagem. No estágio pré-sincronização as redes passam a interagir diretamente até que suas variáveis correspondentes tornem-se idênticas, ou seja, até que ocorra a sincronização *internetwork*. Uma vez que as redes estejam sincronizadas inicia-se o segundo estágio do processo que consiste na transmissão e decodificação da mensagem. Neste estágio a interação entre as redes é desativada e a mensagem é codificada em um sinal binário por meio de um dispositivo *on-off*. A vantagem desse procedimento é que podemos transmitir N bits de informação a cada unidade do tempo de relaxação, o que tende a acelerar a transmissão de dados quando comparado ao modelo de Hung e Hu. Finalmente, para decodificar

a mensagem o receptor utiliza a entropia de transferência tal como no modelo mencionado. No entanto, ela é calculada, não mais entre os mapas na rede, mas agora entre cada mapa e a variável que representa o sinal.

Embora o nosso sistema de comunicação seja capaz de enviar N bits em um mesmo intervalo do tempo de relaxação e, com isso, acelerar o processo de transmissão de dados, sua principal vantagem não é apenas diminuição do tempo, mas o fato de transmitir a mensagem de modo bastante seguro. Na realidade consideramos este segundo aspecto a propriedade mais importante do nosso modelo. Mesmo que um intruso consiga descobrir o valor de todas as variáveis de estado das redes emissora e receptora, se ele não souber com precisão a forma e intensidade do acoplamento, ele não será capaz de decifrar a mensagem corretamente. Nas próximas seções vamos discutir mais detalhadamente sobre o mecanismo criptográfico proposto.

7.2 Descrição do sistema de comunicação

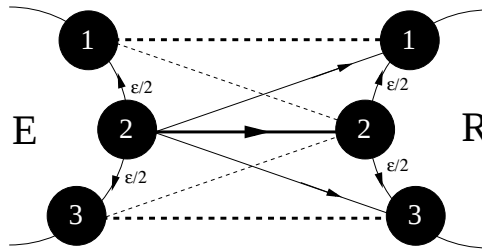
Considere um sistema de comunicação formado por duas redes de mapas acoplados denominadas emissora (E) e receptora (R). Exemplos de sistemas compostos por duas redes foram estudados no capítulo anterior do ponto de vista da sincronização de caos e, portanto, sempre que for necessário retomaremos as ideias expostas naquele capítulo. Aqui, a quantidade de elementos ou sítios em cada rede é definida de acordo com o tamanho da mensagem, em bits, que se deseja transmitir a cada envio. Uma mensagem ou bloco de mensagem de N bits, por exemplo, requer N sítios por rede. Como nos casos estudados, as redes são idênticas e os sítios dentro da rede são submetidos a um acoplamento *intranetwork* local e bidirecional.

Para que ocorra a comunicação entre o emissor (E) e o receptor (R) eles devem estar conectados de algum modo. Esta conexão é representada no modelo através do acoplamento entre as redes e, portanto, ele é estabelecido durante o próprio processo de comunicação. No estágio pré-sincronização atribuímos um valor inicial aleatório às variáveis de estado de cada rede e as evoluímos até obter a sincronização *internetwork*, ou seja, até que as variáveis de estado $e_n^{(i)}$ da rede emissora se tornem idênticas as variáveis de estado $r_n^{(i)}$ da rede receptora. Após isso, inicia-se o segundo estágio do processo. As mensagens são, então, criptografadas de acordo com as variáveis de estado da rede emissora e enviadas na forma de sinal para a rede receptora. Esta, por sua vez, decodifica a mensagem contida no sinal calculando a entropia de transferência deste com suas variáveis de estado. Analisemos, pois, cada um dos estágios separadamente.

7.2.1 Estágio pré-sincronização

No capítulo anterior estudamos as condições de sincronização entre duas réplicas de redes para alguns casos de acoplamento *internetwork*. Utilizaremos, então, os mesmos esquemas de acoplamento para as redes (E) e (R). Portanto, no primeiro estágio a dinâmica do sistema será descrita pela Equação (6.1). Vamos considerar inicialmente o caso específico em que o acoplamento *internetwork* é constante e homogêneo e que apenas a rede (E) influencia a dinâmica da rede (R). Uma representação deste acoplamento é apresentada na Figura 7.3.

Figura 7.3: Representação esquemática das conexões entre os sítios das redes emissora e receptora no primeiro estágio do mecanismo de comunicação.



FONTE: O autor.

Vamos considerar que a dinâmica local da rede é dada pelo mapa da tenda e que o parâmetro de acoplamento $\varepsilon \leq 0,1$. Então, de acordo com as equações (6.8) e (6.10), o maior expoente de Lyapunov transversal ao subespaço de sincronização para o caso considerado será dado por

$$\lambda_{\perp} = \ln|1 - \gamma| + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(1 - 2\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \right). \quad (7.2)$$

Então, se considerarmos $\gamma \geq 0,5$ obteremos $\lambda_{\perp} \leq 0$ para qualquer valor de acoplamento considerado e, portanto, as redes certamente sincronizarão após algum tempo de interação entre elas. Como $\gamma = 0,50$, neste caso, equivale a $\gamma = 0,25$ para o acoplamento bidirecional, o tempo médio mínimo de interação necessário para que as redes estejam ρ_c -sincronizadas, isto é, para que o erro de sincronização seja menor do que $\rho_c > 0$, será dado pela Equação (6.19). Portanto, dado um valor de acoplamento *intranetwork* e $\gamma = 0,5$ sabemos quanto tempo devemos deixar as redes interagindo para que elas sincronizem. Uma vez que as redes estejam sincronizadas inicia-se o segundo estágio do processo.

7.2.2 Estágio pós sincronização

O segundo estágio tem por objetivo transmitir uma determinada mensagem m através das redes de modo eficiente e seguro. Uma condição necessária é que as redes permaneçam sín-

cronas durante todo o processo. Caso contrário, o receptor não será capaz de ler corretamente a mensagem. Então, para satisfazer tal condição realizamos um truncamento da $O(\rho_c)$ nas variáveis de ambas as redes imediatamente após a conclusão do primeiro estágio. Então, como as redes constituem sistemas idênticos e o truncamento faz com que suas variáveis sejam exatamente as mesmas, elas permacerão síncronas independentemente do acoplamento, motivo pelo qual o desligamos neste estágio. Outro motivo para desacoplar as redes é aumentar a segurança da comunicação já que um intruso - capaz de determinar com precisão todas as variáveis da rede (E) no final do primeiro estágio, mas cujo acoplamento *intranetwork* é minimamente diferente - não conseguirá manter-se síncrono à ela quando a mesma deixar de enviar informação sobre os estados de suas variáveis em cada instante de tempo.

Introduzimos, então, um novo sistema dinâmico $S : \omega \mapsto \omega$ que é responsável por codificar a mensagem no sinal. Este sistema define o valor do sinal s_n em cada instante de tempo associando os caracteres da mensagem às variáveis de estado da rede emissora por meio de um mecanismo *on-off*. Este mecanismo funciona da seguinte maneira: se o i -ésimo elemento de m possui o valor 1, então considera-se que $e_n^{(i)}$ influencia a dinâmica de s_n (modo-*on*), caso contrário, não (modo-*off*). Portanto, o valor do sinal em cada instante de tempo será dado por:

$$s_{n+1} \mapsto S = (1 - \beta)s_n + \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^N e_n^{(i)} m^{(i)} \quad (7.3)$$

em que $\beta \equiv (N - 1)/N$ e $\eta = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$ é um fator de normalização. Note que a magnitude do sinal não é uma característica da mensagem, mas da dinâmica caótica da rede (E). Logo, se o sistema for iniciado a partir de estados iniciais distintos, a mesma mensagem resulta em diferentes sinais. Por outro lado, pode ocorrer que duas mensagens distintas resultem em um sinal com a mesma magnitude em algum instante de tempo, no entanto, esta situação será pontual e não deve se manter com o tempo.

O sinal com a mensagem, isto é, o valor de s_n em cada instante de tempo é então enviado ao receptor por meio de um canal. Após receber o sinal o receptor inicia o processo de decodificação da mensagem verificando quais variáveis $e_n^{(i)}$ influenciaram e quais não influenciaram o valor de s_{n+1} . Isto é possível porque $e_n^{(i)} = r_n^{(i)}$ e, portanto, ele não precisa receber a informação das variáveis da rede (E). O receptor, então, associa o símbolo 1 quando verifica a influência e 0 caso contrário, sempre respeitando o índice dos sítios na rede. Uma ferramenta que permite ao receptor realizar tal verificação é a entropia de transferência. De fato, calculando a entropia de transferência de cada variável da rede receptora para o sinal,

$$T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}} = \sum p(s_{n+1}, s_n, r_n^{(i)}) \log \frac{p(s_{n+1} | s_n, r_n^{(i)})}{p(s_{n+1} | s_n)}, \quad (7.4)$$

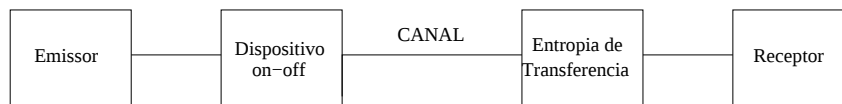
o receptor determina quais $e_n^{(i)}$ contribuíram para o valor do sinal naquele instante de tempo. Então, ele decodifica a mensagem enviada usando o seguinte procedimento: se $T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}} > 0$ então $m^{(i)} = 1$, senão $m^{(i)} = 0$. O cálculo das probabilidades condicional e conjunta necessárias para a obtenção da entropia de transferência pode ser efetuado utilizando, por exemplo, um algoritmo de contagem de caixas ou estimador de Kernel. Vamos considerar aqui o primeiro procedimento e, no lugar das variáveis $r_n^{(i)}, s_n$ e s_{n+1} , as variáveis binárias $\tilde{r}_n^{(i)}, \tilde{s}_n$ e $\tilde{s}_{n+1}$, em que $\tilde{x} = 0$ se $x < 1/2$ e $\tilde{x} = 1$ caso contrário. Neste caso, o somatório na Equação (7.4) compreende apenas oito termos, já que há apenas oito estados binários possíveis. O fato de considerarmos apenas as variáveis binárias para o cálculo da entropia também nos permite assumir que o sinal já é enviado como uma variável binária. Trata-se, portanto, de um sinal digital que pode ser transmitido através de qualquer canal público.

Quando o receptor calcula a entropia de transferência para recuperar a mensagem ele dificilmente obterá um valor nulo. No entanto, para os sítios conectados ele obterá uma medida significativamente superior àquela obtida para os sítios que não estão conectados. Então, para recuperar corretamente a mensagem o receptor deve utilizar um filtro passa-alto. Propomos como filtro o desvio padrão da entropia de transferência. Dessa maneira, assumimos que a mensagem lida pelo receptor é dada por

$$m'^{(i)} = \Theta(T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}} - \sigma(T)), \quad (7.5)$$

em que $\Theta(x)$ é a função de Heavside e $\sigma(T)$ é o desvio padrão da entropia de transferência de cada sítio da rede. Uma representação esquemática do sistema de comunicação no estágio pós-sincronização é apresentada na Figura 7.4.

Figura 7.4: Representação esquemática do sistema de comunicação no segundo estágio de funcionamento.

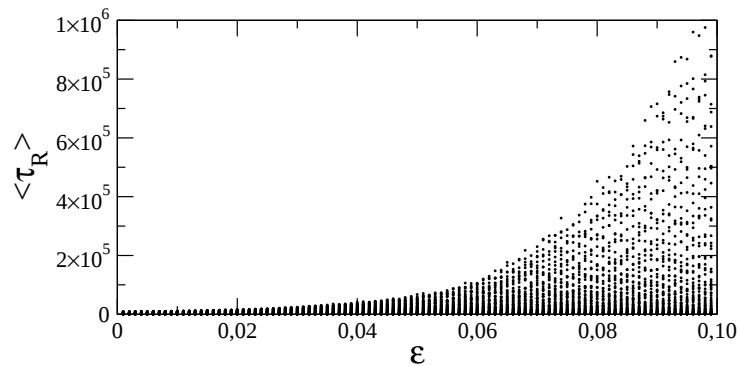


FONTE: O autor.

Tal como no modelo de Hung e Hu, o processo de decodificação da mensagem usando a entropia de transferência não é instantâneo, mas requer um certo intervalo de tempo mínimo de envio contínuo do sinal. Este intervalo de tempo ou quantidade mínima de sinais binários necessários para o receptor decodificar corretamente a mensagem é o tempo de relaxação τ_R . Mas, diferentemente do modelo de Hung e Hu, onde este tempo está relacionado apenas com o cálculo das probabilidades, aqui ele também vai depender dos parâmetros do sistema. Além disso, τ_R pode ser diferente para diferentes mensagens. Então, para obter uma estimativa deste tempo definimos e analisamos o comportamento do tempo de relaxação médio $\langle \tau_R \rangle$ em

função dos parâmetros do sistema, sendo a média realizada sobre uma certa quantidade de mensagens definidas aleatoriamente. A Figura 7.5 mostra o comportamento do tempo de relaxação médio em função do parâmetro de acoplamento *intranetwork*, sendo a média calculada para 100 mensagens aleatórias. Os vários pontos para um mesmo valor de ε referem-se à diferentes tamanhos de mensagem desde $11 \leq N \leq 151$.

Figura 7.5: Tempo de relaxação médio em função do parâmetro de acoplamento *intranetwork*. A média foi calculada para 100 mensagens aleatórias para diferentes valores de $11 \leq N \leq 151$.



FONTE: O autor.

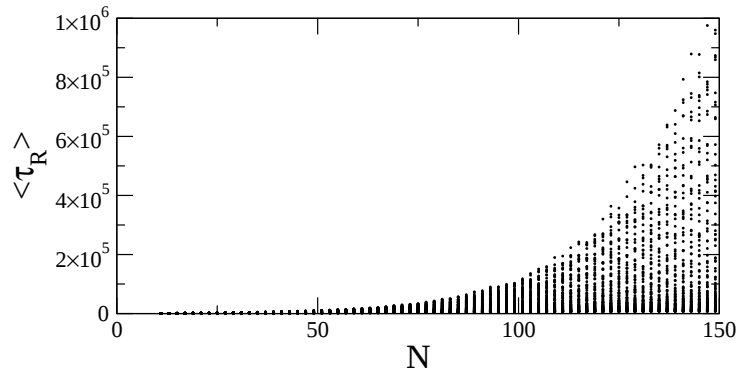
Podemos observar na Figura 7.5 que o tempo médio tende a crescer com ε . Este resultado já era esperado, porque à medida que intensificamos o acoplamento *intranetwork* aumentamos a correlação entre variáveis dos sítios vizinhos e, portanto, dificultamos a identificação das variáveis que não contribuem para a dinâmica do sinal. Também podemos observar na figura que mensagens de diferentes tamanhos, diferentes valores de N , resultam em tempos de relaxação variados. Analisamos, então, a relação de dependência entre o tempo de relaxação médio e o tamanho da mensagem. A Figura 7.6 exhibe o comportamento deste tempo para diferentes valores de N e ε . Como na figura anterior a média foi calculada considerando 100 mensagens aleatórias e, como naquele caso, observamos um comportamento crescente do tempo de relaxação médio.

Dado que o tempo de relaxação médio cresce com ambos, o tamanho da mensagem e a intensidade do acoplamento *intranetwork*, analisamos a dependência de $\langle \tau_R \rangle$ com relação ao produto $N\varepsilon$. A Figura 7.7 mostra que o comportamento do tempo de relaxação médio cresce com $N\varepsilon$ e que seu valor máximo é limitado por uma curva exponencial, ou seja,

$$\langle \tau_R \rangle_{\max} = K e^{bN\varepsilon}. \quad (7.6)$$

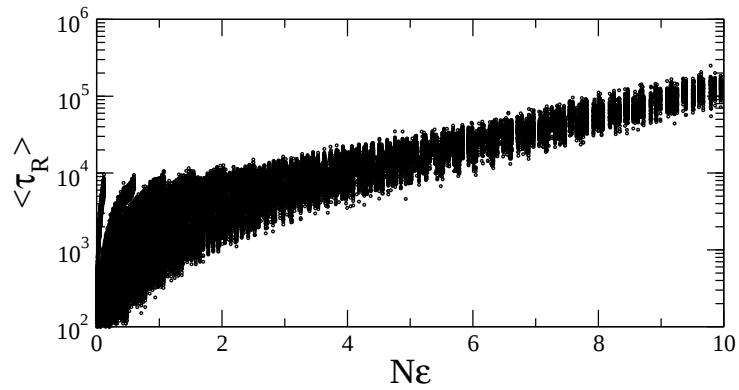
Para encontrar os parâmetros K e b da Equação (7.6) consideramos o ajuste exponencial dos valores máximos do tempo de relaxação médio em função de $N\varepsilon$. Com isso encontramos $K = 4,9 \times 10^3$ e $b = 1/3$. Os máximos do tempo de relaxação médio e a curva de ajuste

Figura 7.6: Tempo de relaxação médio em função do tamanho das mensagens. A média foi calculada considerando 100 mensagens aleatórias para cada tamanho N e $0 \leq \varepsilon \leq 1$.



FONTE: O autor.

Figura 7.7: Tempo de relaxação médio em função do produto $N\varepsilon$. Os dados correspondem a média sobre 100 mensagens aleatórias.



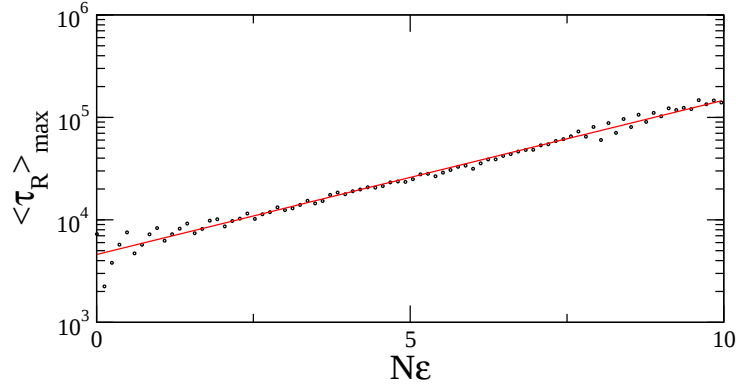
FONTE: O autor.

são mostrados na Figura 7.8. Podemos observar que a curva exponencial fornece um bom ajuste dos pontos. Então, substituindo estes parâmetros na Equação (7.6) obtemos o tempo de duração do estágio pós-sincronização para qualquer valor de ε e N .

7.2.3 Efeito do ruído

Durante a transmissão do sinal pode acontecer que algum ruído externo interfira no sinal transmitido. Este ruído pode resultar do próprio canal ou ser inserido por algum agente externo tentando atrapalhar ou impedir a comunicação. Diante disso, é extremamente importante verificar a quantidade de ruído que o sistema suporta sem que a comunicação seja prejudicada. Consideramos, então, que o sinal é submetido a um ruído gaussiano de média zero e variância σ e calculamos a razão sinal-ruído (BER). Esta razão corresponde a fração de *bits* decifrados erroneamente em relação ao número total de *bits* da mensagem. A Figura 7.9 mostra os valores médios da razão sinal-ruído em função do parâmetro de acoplamento *intranetwork* e

Figura 7.8: Máximo tempo de relaxação médio em função do produto $N\varepsilon$, sendo a média obtida para 100 mensagens aleatórias.



FONTE: O autor.

da amplitude do ruído para mensagens de tamanho igual a 51 *bits*.

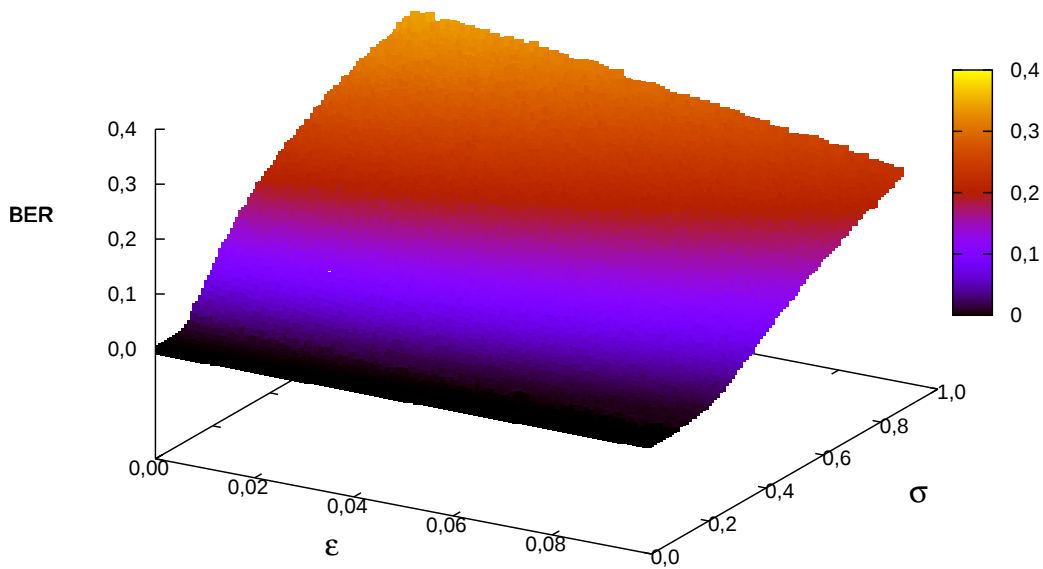
Podemos observar na Figura 7.9 que para ruídos fracos, $\sigma < 0,1$ a razão sinal-ruído é nula para qualquer valor de ε . Isto significa que, neste regime, não haverá distinção entre a mensagem enviada pelo emissor e a mensagem decodificada pelo receptor. Por outro lado, se consideramos ruídos com $\sigma > 0,1$ a razão sinal-ruído deixa de ser nula, sendo maior quanto maior o valor de ε . Mas, apesar desta medida ser não-nula, seu valor é pequeno para uma ampla faixa de valores deste parâmetro. Isto nos permite inferir que o sistema é bastante robusto a ruídos externos.

7.3 Exemplo

Nesta seção vamos utilizar o sistema de comunicação que acabamos de descrever para transmitir uma mensagem binária arbitrária. Vamos considerar que a mensagem contenha 21 bits e seja dada por $m = 10111001011111110011$. Então, as redes emissora e receptora devem ter $N = 21$ sítios cada uma. Além do mesmo número de sítios as redes devem compartilhar de uma chave de segurança que é representada pelo parâmetro de acoplamento *intranetwork*. Se assumirmos $\varepsilon = 0,1$ e $\rho_c = 10^{-14}$, as equações (6.19) e (7.6), resultam em $\tau_s = 323$ e $\langle \tau_R \rangle_{\max} \approx 2 \times 10^3$, respectivamente. Como estes tempos representam valores médios, consideraremos aqui $\tau_s = 10^3$ e $\tau_R = 2 \times 10^4$.

Após determinar os tempos de sincronização e relaxação distribuimos as condições iniciais para as duas redes e as acoplamos de acordo com a Equação (6.1) com $\gamma_t^{(x,i)} = 0$ e $\gamma_t^{(y,i)} = 0,50$. Deixamos as redes interagirem durante $n = \tau_s$ iteradas e, em seguida, truncamos as variáveis na $O(\rho_c)$ de modo a garantir que $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_n$. Iniciamos, então, a transmissão do

Figura 7.9: Média da razão sinal ruído em função do acoplamento *intranetwork* e da amplitude do ruído. Os dados correspondem à 500 mensagens escolhidas aleatoriamente de tamanho igual a 51 bits.

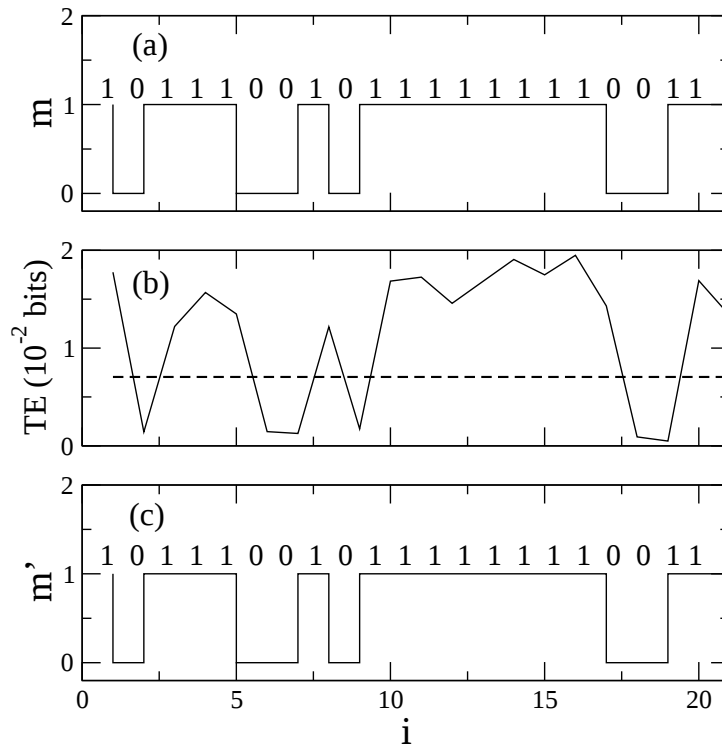


FONTE: O autor.

sinal $\tilde{s}_n(s_n)$, com s_n dado pela Equação (7.3). O receptor guarda o sinal binário durante $n = \tau_R$ iteradas subsequentes e, através da Equação (7.4), calcula a entropia de transferência. Enfim, usando a Equação (7.5) o receptor recupera a mensagem enviada. A Figura 7.10 exibe o padrão binário da mensagem enviada, a entropia de transferência calculada pelo receptor para cada variável e o padrão binário da mensagem lida por ele.

Conforme podemos verificar na Figura 7.10 cada sítio apresenta um valor diferente para a entropia de transferência. Além disso, há valores não-nulos mesmo quando o respectivo índice da mensagem é nulo. No entanto, como mostrado, o filtro permite que o receptor identifique corretamente os índices que correspondem à $m = 1$ e, portanto, recupere perfeitamente a mensagem enviada pelo emissor. Isto significa que a criptografia envolvida mostrou-se eficiente. Mas, além de eficiente, podemos afirmar que ela é bastante segura. Mesmo que um intruso seja capaz de copiar todo o sinal enviado, a probabilidade dele acertar todas as variáveis $\tilde{r}_n^{(i)}$ durante as τ_R iteradas é $P = 2^{-N\tau_R} = 2^{-63000}$. Esta é também a probabilidade dele acertar a mensagem enviada.

Figura 7.10: Exemplo de transmissão de uma mensagem de 21 *bits*. (a) Mensagem binária transmitida; (b) entropia de transferência (linha contínua) e desvio padrão da entropia de transferência (linha tracejada); (c) mensagem decodificada pelo receptor.



FONTE: O autor.

7.4 Melhorando a eficiência e segurança

Na seção anterior mostramos que o mecanismo de criptografia baseado em réplicas de redes é extremamente eficiente e seguro. No entanto, para sincronizar as redes foi necessário acoplar todas as variáveis da rede emissora com as variáveis da rede receptora e isto gera dois problemas, um do ponto de vista operacional e o outro em relação à segurança contra um intruso astuto. O problema operacional diz respeito à capacidade do canal que deve ser utilizado no primeiro estágio de funcionamento do modelo. Mais precisamente, para enviar o valor de todas as variáveis da rede emissora para a rede receptora no mesmo instante de tempo e com uma precisão alta, é necessário considerar um canal analógico para cada variável e, portanto, são necessários N canais.

O segundo problema diz respeito à existência de um intruso astuto que acompanha a troca de informação entre as redes no primeiro estágio e tenta construir uma réplica sincronizada da rede emissora a fim de decifrar a mensagem que ela envia no segundo estágio. Lembre que a segurança da criptografia reside no fato de que as redes devem ser idênticas e síncronas. Então, se de algum modo o intruso conhecer o acoplamento *intranetwork* (forma e valor de parâmetros)

e conseguir obter o valor de todas as variáveis da rede emissora no primeiro estágio, como a dinâmica desta independe da rede receptora, ele terá condições de decifrar a mensagem no segundo estágio.

Considere, por exemplo, que um intruso astuto possa de alguma forma interceptar a comunicação entre as redes durante o estágio pré-sincronização e copie todos os valores das variáveis enviadas. Como o número de variáveis é igual ao número de *bits* da mensagem ele determina, de imediato, qual é o tamanho da mensagem que se pretende enviar. Além disso, se ele conseguir acompanhar a evolução temporal de cada uma dessas variáveis, então ele poderá calcular a entropia de transferência entre cada par de variáveis e, com isso, determinar quais sítios da rede emissora estão acoplados entre si. Isto significa que ele conseguirá determinar a forma do acoplamento *intranetwork*. O único parâmetro desconhecido será, então, a intensidade do acoplamento ε . Mas como o intruso copiou a série temporal de todas as variáveis ele pode tentar determinar este parâmetro a força. Para o caso em que os cálculos são realizados com precisão *double*, o intruso terá que testar 10^{16} possibilidades.

Uma vez que o intruso determina o valor de ε ele verifica quando a rede emissora pára de enviar os valores de todas as variáveis e começa a emitir o sinal com a mensagem. Então, ele considera os últimos valores enviados como condição inicial em sua rede, a qual possui o mesmo acoplamento das redes emissora e receptora, obtendo assim uma réplica sincronizada destas. Neste caso, não há distinção entre a rede do receptor e a do intruso e, portanto, este poderá utilizar o mesmo procedimento que o primeiro para decodificar a mensagem contida no sinal durante o estágio pós-sincronização.

Os dois problemas que acabamos de apontar podem ser evitados se assumirmos que o acoplamento entre as redes possui a estrutura periódica que discutimos na seção 6.4 e a intensidade deste acoplamento varia com o tempo. Como demonstramos naquela seção, é possível sincronizar duas réplicas de redes considerando que a cada instante de tempo cada uma troque informação de apenas uma de suas variáveis de estado. Mas, para que isso ocorra, devemos considerar redes com poucos sítios, por exemplo, $N = 8$. Também demonstramos que existe um intervalo do parâmetro γ para o qual as redes sincronizam. Portanto, considerando valores dentro deste intervalo, mesmo que eles sejam definidos aleatoriamente a cada instante de tempo, as redes certamente sincronizarão. Vamos analisar, então, como este novo sistema evita os problemas apontados.

Ao considerarmos que cada rede compartilha o valor de apenas uma variável a cada instante de tempo reduzimos para dois o número de canais analógicos necessários para o funcionamento do sistema no primeiro estágio. Com essa redução facilitamos a implementação do

sistema do ponto de vista operacional. Isto significa que o primeiro problema está solucionado ou, pelo menos, foi diminuído. Resta-nos, portanto, verificar como as alterações mencionadas afetam a segurança no primeiro estágio de funcionamento do sistema.

A primeira mudança quando consideramos o acoplamento periódico diz respeito ao etiquetamento dos sítios. Como os elementos de cada rede são idênticos e as condições iniciais são distribuídas aleatoriamente este etiquetamento é realizado durante o próprio processo. Quando uma rede recebe o primeiro sinal, ela escolhe uma de suas variáveis à qual associa o índice 1, o segundo à variável 2 e assim por diante. A rede receptora, por outro lado, pode utilizar uma regra diferente daquela que consideramos no capítulo anterior, desde que ela seja conhecida pela primeira. Então, esta regra pode ser explorada como parâmetro de segurança. Se ela não for conhecida pelo intruso, ele não conseguirá sincronizar uma rede externa com a rede emissora.

A segunda mudança é aquela que aumenta a segurança do sistema de uma maneira mais elaborada. Ela diz respeito à variação aleatória do parâmetro γ em cada instante de tempo. Neste caso, mesmo que um intruso disponha de uma rede E com o mesmo número de elementos e com a mesma forma de acoplamento ele não será capaz de sincronizá-la com as redes X e Y apenas substituindo os valores das duas variáveis enviados a cada instante de tempo em suas próprias variáveis. Isto porque, cada rede define um valor de γ aleatoriamente em cada instante de tempo e este não é compartilhado no processo. Além disso, como o valor de uma determinada variável é enviado apenas a cada oito iterações e os sistemas são caóticos, a variação de γ vai impossibilitar que o intruso acompanhe a evolução temporal de cada variável.

Como no caso do acoplamento constante as redes interagem uma com a outra até que ocorra a sincronização entre cada par de variáveis correspondentes. Quando isto ocorre elas param de enviar informação de suas variáveis e passam a enviar uma mensagem arbitrária. Para saber se ocorreu a sincronização, cada rede avalia o termo entre parênteses do lado direito da Equação (6.1). Se ele é nulo para todo $i = 1, 2, \dots, 8$, então as redes estão sincronizadas. Em outras palavras, cada rede calcula o coeficiente

$$w_n^{(z)} = \sum_{i=1}^8 |F(e_{n-i}^{(i)}) - F(r_{n-i}^{(i)})| \quad \text{para } n \geq 8. \quad (7.7)$$

Então quando elas obtêm $w_n < \rho_c$, imediatamente param de enviar informação de suas variáveis de estado.

Para que o intruso consiga sincronizar sua réplica com as redes emissora e receptora ele precisaria determinar todas as variáveis das redes X ou Y quando elas já estivessem sin-

cronizadas, pois nesse caso o parâmetro γ é multiplicado por um argumento nulo e, portanto, não exerce nenhuma influência sobre o sistema. Mas como as redes emissora e receptora cessam a interação imediatamente após ocorrer a sincronização entre elas o intruso não conseguirá determinar todas as variáveis das redes. Mesmo se ele observar quando as redes param de trocar informação e, então, retomar os valores das variáveis nas oito últimas iteradas, ele não conseguirá determinar o estado da rede completamente, mas apenas da última variável, pois as demais já evoluíram para outros estados nas últimas sete iteradas e, em cada iterada, um valor diferente de γ foi utilizado. Enfim, se o intruso tentar obter a força o valor das outras sete variáveis sincronizadas, com precisão de $\rho_c = 10^{-15}$, ele terá $(10^7)^{15}$ possibilidades de escolha. Além disso, para manter as variáveis síncronas ele também tem que conhecer exatamente o valor do parâmetro de acoplamento ε . Neste caso, o intruso teria $(10^7)^{15} \cdot (10^1)^{15} = 10^{120}$ possibilidades de escolha e, portanto, dificilmente conseguiria determinar o valor correto de todas as variáveis.

Uma vez que as redes estejam sincronizadas inicia-se o estágio pós-sincronização. Neste estágio a mensagem é codificada no sinal e transmitida pelo canal. Podemos considerar este estágio tal como no caso do acoplamento estático com a simples alteração de que, agora, ambas as redes podem trocar informação. Além disso, o envio do sinal pode ser realizado pelo próprio canal utilizado, no estágio anterior, para sincronizar as redes. Uma possibilidade de alteração do segundo estágio de funcionamento é estabelecer um reservatório com a informação das variáveis das redes. Esta alteração pode ser realizada, não para aumentar a segurança do modelo, mas para tornar o processo mais rápido no segundo estágio.

7.4.1 Estabelecendo o reservatório

Nesta etapa cada rede evolui independentemente durante $n = \tau_R$ iteradas. Em cada instante de tempo as redes X e Y verificam os valores de suas variáveis de estado e definem as variáveis binárias

$$\tilde{z}_n^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{se } z_n^{(i)} < 0,5 \\ 1 & \text{se } z_n^{(i)} \geq 0,5 \end{cases} \quad (7.8)$$

em que $\tilde{z}_n^{(i)} = \{\tilde{x}_n^{(i)}, \tilde{y}_n^{(i)}\}$. Como as redes estão sincronizadas temos $\tilde{x}_n^{(i)} = \tilde{y}_n^{(i)} \forall n$. A Figura 7.11 mostra a evolução temporal destas variáveis nas 50 primeiras iteradas para uma realização típica do sistema. Também apresentamos as variáveis de um terceiro sistema sincronizado à X e Y , porém com ε 1% diferente. Note que à medida que as redes evoluem os padrões logo perdem a correlação.

Figura 7.11: Evolução temporal (da esquerda para a direita) das variáveis binárias da rede X nas 50 primeiras iterações para uma realização típica do sistema. O eixo vertical corresponde aos índices de cada variável, eixo horizontal ao tempo e as cores aos valores de cada variável. Cor escura refere-se ao valor 1 e cor clara ao valor 0. (a) Valores de $\hat{x}_n^{(i)} = \hat{y}_n^{(i)}$ e (b) aos valores das variáveis binárias obtido por uma terceira rede sincronizada à X e Y , porém com ε 1% diferente.



FONTE: O autor.

Cada rede armazena o padrão binário em uma espécie de reservatório. Este reservatório, idêntico para as redes X e Y , será fundamental para o processo de codificação e decodificação das mensagens, o qual discutiremos na próxima seção. Podemos dizer que o reservatório contém a chave de encriptação de toda informação que as redes possam trocar naquele contato. Sua funcionalidade, portanto, assemelha-se ao *pad* do método de Vernan cipher e, como neste método, o padrão binário não é constante. De fato, mesmo se as redes utilizarem sempre o mesmo valor de ε em cada contato, o padrão será diferente, pois ele também depende das condições iniciais, as quais são definidas aleatoriamente por cada rede.

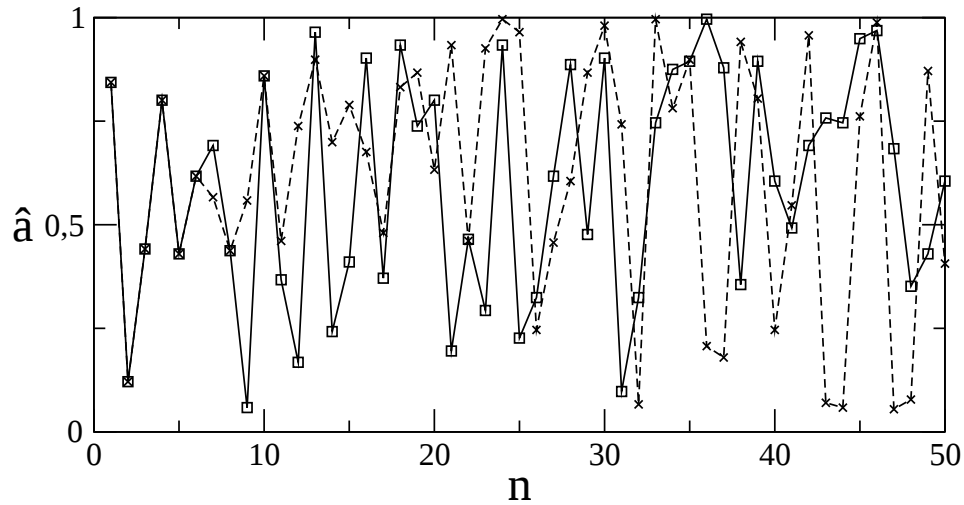
O padrão binário em cada instante de tempo também pode ser armazenado na forma de caracteres de acordo com algum esquema de codificação de 8 bits. Neste caso, os padrões exibidos nas Figura 7.11 seriam substituídos por uma sequência de caracteres. Outra possibilidade é a rede guardar o padrão binário no reservatório escrevendo-o na forma decimal, isto é, calculando e armazenando o número

$$\hat{a}_n = \sum_{i=0}^8 \hat{z}_n^{(i)} 2^{-i}. \quad (7.9)$$

A Figura 7.12 mostra a série temporal de $\hat{a}_n$ obtida a partir do padrão binário exibido na Figura 7.11. A informação contida tanto em uma como na outra é a mesma. A diferença ocorre apenas na representação que, em alguns casos, pode ser mais conveniente em uma ou outra forma.

O tamanho do padrão binário ou, de modo equivalente, da série temporal de $\hat{a}$, é dado pelo tempo de relaxação τ_R . Este tempo como vimos anteriormente é limitado por uma

Figura 7.12: Evolução temporal do padrão binário da Figura 7.11 convertido em número decimal através da equação (7.9). A linha contínua (tracejada) corresponde ao padrão da rede X (E).



FONTE: O autor.

curva exponencial cujos parâmetros dependem da intensidade de acoplamento *intranetwork* e do tamanho da mensagem. Como estamos considerando a rede com tamanho fixo $N = 8$ e, portanto, mensagens de 1 *byte*, τ_R é sempre menor ou igual a 10^3 . Este limite é obtido substituindo $N = 8$ e $\varepsilon = 0,1$ na Equação (7.6).

7.4.2 Codificando e lendo uma mensagem

Vamos assumir que a comunicação entre as redes ocorre por meio de computadores e, portanto, a mensagem corresponde a uma sequência de caracteres gerada pelas teclas pressionadas ao longo do tempo. Além disso, cada tecla pressionada corresponde a um número inteiro ou a uma sequência binária cujo tamanho depende do esquema de codificação de caracteres utilizado. Considere que o sistema proposto utiliza um esquema de codificação no qual todos os caracteres podem ser representados por uma única sequência de 8 *bits* ou 1 *byte*.

Considere que o esquema de codificação utilizado seja conhecido. Isto significa que não podemos transmitir a mensagem diretamente para o receptor de modo seguro. Precisamos, portanto, realizar uma nova codificação ou encriptação da mensagem de maneira tal que apenas o receptor consiga decodificar e recuperar a mensagem. Em outras palavras, o emissor e o receptor devem compartilhar uma chave de segurança conhecida apenas por eles. Nesse ponto, lembramos que ambas as redes possuem reservatórios idênticos cuja igualdade deve-se ao fato delas compartilharem da mesma prescrição de acoplamento. Portanto este reservatório pode ser utilizado para codificar e decodificar a mensagem de modo seguro.

Uma maneira de criptografar a mensagem a partir dos dados do reservatório é usando o algoritmo de encriptação *XOR*. Neste esquema os bits da mensagem são *XORed* com os do reservatório e o resultado é a mensagem criptografada. Considere, por exemplo, que o emissor deseja transmitir a letra “c” e que o esquema de codificação seja o ASCII. Então, ao pressionar a tecla correspondente a seguinte sequência gerada será 01100011. Da Figura 7.11 vemos que o primeiro padrão binário do reservatório é 00100111. Portanto, usando o algoritmo *XOR* obtemos

$$01100011 \oplus 00100111 = 01000100. \quad (7.10)$$

Ao receber a mensagem criptografada o receptor realiza novamente a aplicação do *XOR* com o padrão do reservatório, isto é,

$$01000100 \oplus 00100111 = 01100011. \quad (7.11)$$

Com esse procedimento o receptor recupera a mensagem.

Embora o algoritmo *XOR* seja bastante interessante e eficiente, propomos aqui um outro mecanismo de encriptação que utiliza a entropia de transferência e apresenta similaridades com o processo denominado computação de reservatório (RC). Considere que a mensagem seja criptografada em um escalar s dado por

$$s_n = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^8 m^{(i)} \tilde{x}_n^{(i)} \quad (7.12)$$

em que $m^{(i)}$ é o i -ésimo elemento da sequência $\eta_k = \sum_{i=1}^8 m(i)$ é um fator de normalização e $\tilde{x}_n^{(i)}$ representa o i -ésimo elemento da sequência binária do número $\hat{a}_n$. Definimos, então, uma variável binária

$$\tilde{s}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } s_n < 0,5 \\ 1 & \text{se } s_n \geq 0,5 \end{cases} \quad (7.13)$$

Esta variável representa o sinal a ser transmitido no tempo n . O processo é repetido para todas as τ_r variáveis $\tilde{x}_n^{(i)}$ presentes no reservatório. Isto significa que os oito *bits* de um caractere são codificados em 10^3 *bits* no sinal. O processo, portanto, aumenta significativamente a dimensão da entrada tal como ocorre na operação de computação de reservatório. Além disso, como os padrões contidos no reservatório dependem das condições iniciais, que são aleatórias, o receptor não saberá a priori qual sequência está relacionada a cada caractere. Então, como no caso do computação de reservatório, o receptor determinará a sequência que corresponde à cada caractere durante a própria comunicação, tal como num processo de aprendizagem. No

entanto, se o contato é interrompido naquele instante e, posteriormente, é reiniciado, o mesmo caractere certamente será representado por outra sequência, pois, devido a escolha aleatória das condições iniciais, o reservatório conterá outro padrão binário para codificar a mensagem.

O sinal na forma binária pode ser transmitido a partir de qualquer canal digital. Ao receber o sinal o receptor inicia o processo de decodificação. Primeiro ele calcula a entropia de transferência de cada variável $\hat{y}_n^{(i)}$ para $\hat{s}_{n+1}$. E, após isso, o receptor recupera a mensagem usando o filtro passa-alto como no caso apresentado anteriormente.

8 Conclusões

Neste último capítulo apresentamos nossas conclusões a respeito do trabalho. Fazemos uma breve revisão/consideração sobre alguns pontos principais contidos no mesmo e apontamos sugestões para trabalhos futuros.

8.1 Considerações Finais

O comportamento caótico e a sincronização são fenômenos que podem ser observados em uma ampla variedade de sistemas encontrados na natureza. Eles também são explorados em aplicações tecnológicas como no desenvolvimento de sistemas de comunicação. Um modelo matemático importante para estudar estes sistemas são as redes de mapas acoplados, pois podem ser derivadas das próprias equações fundamentais que regem a dinâmica destes e são mais factíveis analítica/numericamente do que outros modelos que descrevem tais sistemas. Além disso, o comportamento dinâmico exibido por modelos de redes de mapas acoplados pré-existentes podem revelar características importantes de problemas físicos caracterizados por sistemas compostos por elementos interagentes que apresentam estrutura similar.

Neste trabalho demos um passo para a compreensão da sincronização em redes de mapas caóticos acoplados com topologia variável no tempo. Esta classe de redes abrange não só a dinâmica individual dos elementos de um conjunto, mas também a dinâmica das relações e interações que eles assumem, o que constitui outro aspecto importante das redes reais. Estudamos o processo sincronização nesses modelos de redes introduzindo novas quantidades denominadas efetivas. Usando estas quantidades determinamos os parâmetros de sincronização de uma rede com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância intersticial e verificamos que os parâmetros obtidos a partir das quantidades efetivas estão em bom acordo com aqueles obtidos por meio de outros diagnósticos de sincronização. Isto significa que as quantidades efetivas podem ser usadas como diagnósticos precisos de sincronização quando o mapa que rege a dinâmica local for suave. No entanto, a principal vantagem das quantidades efetivas é, como mostramos, a construção de um sistema autônomo e determinístico que exhibe as

mesmas propriedades de sincronização da rede com topologia variável no tempo.

Definimos os autovalores efetivos como a razão de decaimento dos autovalores da matriz de acoplamento e mostramos que quando há uma invariância na topologia é possível encontrar uma expressão analítica para eles. Os expoentes de Lyapunov efetivos foram, então, definidos como o logaritmo dos autovalores efetivos. Para o caso mais geral em que a probabilidade de conexão, e não a topologia, é invariante sobre translações na rede, lançamos a hipótese de que as quantidades efetivas seriam dadas pela projeção dos estados sobre os autovetores da base circulante. Confrontamos nossa hipótese utilizando dois modelos de rede e diferentes valores de parâmetros. Verificamos, então, que os autovetores da base circulante são vetores privilegiados não apenas devido à invariância da probabilidade, mas pelo fato de assumirmos uma estrutura circulante sempre presente, a estrutura de substrato. Utilizando outra estrutura de rede homogênea como substrato encontramos evidências de que, se a probabilidade for invariante e a rede variável no tempo, os vetores de Lyapunov estão relacionados aos autovetores da matriz adjacência da rede substrato. Este resultado proporciona um avanço para o entendimento das redes mapas com topologia variável no tempo, pois dada uma rede homogênea de substrato, podemos realizar permutações dos elementos transformando-a em uma estrutura circulante sem alterar suas propriedades fundamentais.

Para demonstrar que os expoentes de Lyapunov efetivos constituem bons parâmetros para determinar a estabilidade do subespaço de sincronização comparamos os valores dos parâmetros críticos obtidos através deles com os que foram obtidos usando outros diagnósticos de sincronização. Nossos resultados mostraram que há uma concordância satisfatória entre estes parâmetros indicando, portanto, que pelo menos o maior expoente de Lyapunov transversal efetivo e o usual são equivalentes. Outro resultado que corrobora o papel das quantidades efetivas para sincronização foi a construção do sistema efetivo. Este sistema foi proposto como um modelo auxiliar para o caso em que a dinâmica local da rede é regida por mapas. Mostramos que o modelo auxiliar padrão, construído considerando uma rede global com interações ponderadas pela probabilidade de conexões, nem sempre apresenta uma boa estimativa dos parâmetros de sincronização neste caso. Apenas quando as redes são suficientemente grandes é que a rede de mapas com topologia variável e o modelo auxiliar padrão exibem um comportamento dinâmico equivalente. Em contrapartida, o sistema efetivo foi construído de tal maneira que, se as quantidades efetivas forem equivalentes às quantidades usuais, ambos sistemas devem exibir as mesmas propriedades de sincronização independentemente do tamanho das redes. Comparando o tempo de sincronização médio e os parâmetros críticos de sincronização do sistema efetivo e da rede com topologia variável verificamos que eles concordam entre si. Este resultado significa que: (a) é possível estudar a sincronização em uma rede com topologia variável a partir de um

sistema constante no tempo; (b) as quantidades efetivas possuem o mesmo significado físico das quantidades usuais.

A sincronização entre réplicas de redes de mapas acoplados também foi investigada. Considerando pequenas perturbações de trajetórias sincronizadas encontramos uma expressão para o expoente de Lyapunov transversal ao subespaço de sincronização que o relaciona ao maior expoente de Lyapunov de uma rede isolada. Embora esta expressão já seja conhecida na literatura, a novidade que trouxemos aqui é a relação linear entre este expoente e o parâmetro de acoplamento *intranetwork* a partir da qual pode-se determinar o conjunto de parâmetros de acoplamento com os quais as redes sincronizam. Além disso a relação permite obter o parâmetro de acoplamento crítico, cujo valor é necessário para determinar os expoentes que descrevem a transição para a sincronização. Outro ponto importante é que a relação encontrada permite obter uma expressão fechada para o tempo de sincronização entre as redes.

Por último, apresentamos um mecanismo seguro para transmitir mensagens binárias sobre réplicas de redes de mapas acoplados. O mecanismo explora tanto a entropia de transferência como o fenômeno da sincronização. A entropia de transferência representa uma nova abordagem para sistemas de comunicação, pois, permite a construção de sistemas de comunicação sem utilizar o fenômeno de sincronização de caos. No entanto, utilizando a entropia de transferência junto com a sincronização conseguimos construir um modelo seguro e robusto a ruídos externos. Utilizando, então, mensagens arbitrárias testamos o sistema em cada um de seus estágios e comparando a mensagem lida pelo receptor com aquela emitida verificamos que ele é bastante preciso. Também consideramos as várias possibilidades de um intruso astuto decifrar corretamente a mensagem a partir do sinal. Vimos que isso seria possível apenas se o intruso conseguisse sincronizar uma rede externa às redes emissora e receptora. Então, para evitar tal ataque apresentamos algumas modificações que podem ser realizadas.

8.2 Trabalhos futuros

Em trabalhos futuros pretendemos investigar de modo mais aprofundado alguns fenômenos que foram observados ao longo deste e que ainda não encontramos uma explicação conclusiva. Tais comportamentos referem-se sobretudo à aproximação dos parâmetros críticos de sincronização do modelo auxiliar e da rede com topologia variável no tempo quando aumentamos o número de elementos nas redes.

Também almejamos investigar mais detalhadamente a correspondência entre os vetores da matriz substrato e os vetores de Lyapunov do sistema. Com isso, pretendemos demonstrar

que os expoentes de Lyapunov efetivos equivalem aos expoentes de Lyapunov usuais e que a base circulante é uma base privilegiada para uma ampla classe de sistemas.

Outra sugestão para pesquisas futuras é investigar as propriedades de sincronização de redes com topologia variável no tempo quando a rede substrato é heterogênea e/ou a probabilidade de conexão não é invariante. Acreditamos que mesmo para o caso em que a rede substrato é heterogênea, se a probabilidade de conexão for invariante, podemos utilizar os autovetores da matriz de adjacência substrato para construir o sistema efetivo, sendo este sistema capaz de recuperar as propriedades de sincronização da rede cuja topologia é variável no tempo. Por fim, acrescentamos às nossas perspectivas de trabalhos futuros a implementação do mecanismo de criptografia em nível de *software*.

Referências Bibliográficas

- 1 WALLER, I.; KAPRAL, R. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. **Physical Review A**, v. 30, p. 2047–2055, Oct 1984.
- 2 KANEKO, K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice. **Progress of Theoretical Physics**, v. 72, n. 3, p. 480–486, 1984.
- 3 KUZNETSOV, S. Critical behavior of one-dimensional chains. **Soviet Technical Physics Letters**, v. 9, n. 1, p. 41–42, 1983.
- 4 FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. **Progress of Theoretical Physics**, v. 69, n. 1, p. 32–47, 1983.
- 5 BUNIMOVICH, L. Coupled map lattices: at the age of maturity. In: **Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2005, (Lecture Notes in Physics, v. 671). p. 9–32.
- 6 KANEKO, K. **Theory and Applications of Coupled Map Lattices**. Great Britain: John Wiley e Sons, 1993.
- 7 CRUTCHFIELD, J. P.; KANEKO, K. **Directions in Chaos**. Singapura: World Scientific, 1987.
- 8 BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. d. S.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling. **Physical Review E**, v. 65, p. 056209, May 2002.
- 9 VIANA, R. L.; GREBOGI, C.; PINTO, S. E. d. S.; LOPES, S. R.; BATISTA, A. M.; KURTHS, J. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems. **Physical Review E**, v. 68, p. 067204, Dec 2003.
- 10 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L.; JOHNSON, G. A.; MAR, D. J.; HEAGY, J. F. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 7, n. 4, p. 520–543, 1997.
- 11 BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, n. 1-2, p. 1–101, 2002.
- 12 WIESENFELD, K.; COLET, P.; STROGATZ, S. H. Synchronization transitions in a disordered josephson series array. **Physical Review Letters**, v. 76, n. 3, p. 404 – 407, 1996.
- 13 DHAMALA, M.; JIRSA, V. K.; DING, M. Enhancement of neural synchrony by time delay. **Physical Review Letters**, v. 92, p. 074104, Feb 2004.

- 14 PESKIN, C. **Mathematical Aspects of Heart Physiology**. New York: University Press, 1975.
- 15 MIROLLO, R.; STROGATZ, S. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. **SIAM H. Appl. Math.**, v. 50, n. 6, p. 1645 – 1662, 1990.
- 16 KOTTER, R.; SOMMER, F. T. Global relationship between anatomical connectivity and activity propagation in the cerebral cortex. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences**, v. 355, n. 1393, p. 127–134, 2000.
- 17 SALAZAR, R. F.; DOTSON, N. M.; BRESSLER, S. L.; GRAY, C. M. Content-specific fronto-parietal synchronization during visual working memory. **Science**, v. 338, p. 1097–1100, 2012.
- 18 DOUW, L.; GROOT, M. de; DELLEN, E. van; HEIMANS, J. J.; RONNER, H. E.; STAM, C. J.; REIJNEVELD, J. C. Functional connectivity is a sensitive predictor of epilepsy diagnosis after the first seizure. **PLoS ONE**, v. 5, n. 5, p. e10839, 05 2010.
- 19 HAMMOND, C.; BERGMAN, H.; BROWN, P. Pathological synchronization in parkinson's disease: networks, models and treatments. **Trends in Neurosciences**, v. 30, n. 7, p. 357 – 364, 2007.
- 20 MILTON, J. G.; MACKEY, M. C. Neural ensemble coding and statistical periodicity: Speculations on the operation of the mind's eye. **Journal of Physiology-Paris**, v. 94, n. 5â6, p. 489 – 503, 2000.
- 21 HAUPTMANN, C.; TOUCHETTE, H.; MACKEY, M. C. Information capacity and pattern formation in a tent map network featuring statistical periodicity. **Physical Review E**, v. 67, p. 026217, Feb 2003.
- 22 PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, v. 64, p. 821–824, Feb 1990.
- 23 CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. **Physical Review Letters**, v. 71, p. 65–68, Jul 1993.
- 24 KINZEL, W.; ENGLERT, A.; IKANTER. On chaos synchronization and secure communication. **Philosophical Transactions of The Royal Society A**, v. 368, p. 379–389, 2010.
- 25 ARGYRIS, A.; SYVRIDIS, D.; LARGER, L.; ANNOVAZZI-LODI, V.; COLET, P.; FISCHER, I.; GARCÃA-OJALVO, J.; MIRASSO, C. R.; PESQUERA, L.; SHORE, K. A. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. **Nature**, v. 438, p. 343–346, 2005.
- 26 KANEKO, K. Globally coupled circle maps. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 54, n. 1-2, p. 5 – 19, 1991.
- 27 SZMOSKI, R.; PINTO, S.; KAN, M.; BATISTA, A.; VIANA, R.; LOPES, S. Synchronization and suppression of chaos in non-locally coupled map lattices. **Pramana**, v. 73, p. 999–1009, 2009.

- 28 PINTO, S. E. d. S.; CALDAS, I. L.; BATISTA, A. M.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Transversal dynamics of a non-locally-coupled map lattice. **Physical Review E**, v. 76, n. 1, p. 017202, 2007.
- 29 VASCONCELOS, D.; VIANA, R.; LOPES, S.; BATISTA, A.; PINTO, S. de S. Spatial correlations and synchronization in coupled map lattices with long-range interactions. **Physica A**, v. 343, p. 201 – 218, 2004.
- 30 HERRERA, D. S.; MARTÍN, J. S. Analytical solutions of weakly coupled map lattices using recurrence relations. **Physics Letters A**, v. 373, p. 2404–2409, 2009.
- 31 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small-world networks. **Nature**, v. 393, n. 440, 1998.
- 32 BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PONTES, J. A. C.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling. **Physical Review E**, v. 76, n. 016218, p. 1–10, 2007.
- 33 BELYKH, I.; BELYKH, V.; HASLER, M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling. **Physica D**, v. 195, n. 1-2, p. 188–206, 2004.
- 34 LU, W. L.; ATAY, F. M.; JOST, J. Chaos synchronization in networks of coupled maps with time-varying topologies. **The European Physical Journal B**, v. 63, p. 399–406, 2008.
- 35 OLFATI-SABER, R.; MURRAY, R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. **IEET Autom. Control.**, v. 49, p. 1520, 2004.
- 36 AMRITKAR, R. E.; HU, C.-K. Synchronized state of coupled dynamics on time-varying networks. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 16, n. 1, p. 015117, 2006.
- 37 LU, W. L.; ATAY, F. M.; JOST, J. Synchronization of discrete-time dynamical networks with time-varying couplings. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 39, n. 4, 2007.
- 38 SZMOSKI, R. M.; PEREIRA, R. F.; PINTO, S. E. de S. Effective dynamics for chaos synchronization in networks with time-varying topology. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 18, n. 6, p. 1491 – 1498, 2013.
- 39 BHOWMICK, S. K.; AMRITKAR, R. E.; DANA, S. K. Experimental evidence of synchronization of time-varying dynamical network. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 22, n. 2, p. 023105, 2012.
- 40 SCHREIBER, T. Measuring information transfer. **Physical Review Letters**, v. 85, p. 461–464, Jul 2000.
- 41 HUNG, Y.-C.; HU, C.-K. Chaotic communication via temporal transfer entropy. **Physical Review Letters**, v. 101, p. 244102, Dec 2008.
- 42 SZMOSKI, R.; FERRARI, F.; PINTO, S. de S.; BAPTISTA, M.; VIANA, R. Secure information transfer based on computing reservoir. **Physics Letters A**, n. 0, p. –, 2013. In Press.

- 43 APPELTANT, L.; SORIANO, M. C.; SANDE, G. V. der; DANCKAERT, J.; MASSAR, S.; DAMBRE, J.; SCHRAUWEN, B.; MIRASSO, C. R.; FISCHER, I. Information processing using a single dynamical node as complex system. **Nature Communications**, v. 2, n. 468, 2010.
- 44 CIUS, M. L. sevi JAEGER, H. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. **Computer Science Review**, v. 3, n. 3, p. 127–149, 2009.
- 45 HUYGENS, C. **Horologium oscillatorium: Die pendeluhr, Horologium oscillatorium, von Christiaan Huygens; hrsg. von A. Heckscher und A. v. Oettingen, mit einem bildnis und 113 figuren im text.** Leipzig: W. Engelmann, 1913.
- 46 PIKOVSKI, A.; ROSEMBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.** England: Cambridge University Press, 2001.
- 47 MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459–467, 1976.
- 48 CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. **Physics Reports**, v. 52, p. 263–379, 1979.
- 49 BECK, C.; ROEPSTORFF, G. From dynamical systems to the langevin equation. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 145, n. 1â2, p. 1 – 14, 1987.
- 50 SZMOSKI, R. M. **Análise da dinâmica de partículas brownianas interagentes a partir de redes de mapas acoplados.** Dissertação (Mestrado) — UEPG, 2009.
- 51 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: an Introduction to Dynamical Systems.** New York: Springer-Verlag, 1996.
- 52 CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. **Chaos Book.** 13. ed. [S.l.]: ChosBook.org, 2010.
- 53 DEVANEY, R. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.** 2. ed. US: Westview Press, 2003.
- 54 LASOTA, A.; MACKEY, M. C. **Probabilistic Properties of Deterministic Systems.** [S.l.]: Cambridge University Press, 1985.
- 55 PROVATAS, N.; MACKEY, M. C. Asymptotic periodicity and banded chaos. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 53, n. 2-4, p. 295 – 318, 1991.
- 56 SZMOSKI, R. M.; PEREIRA, R. F.; FERRARI, F. A. S.; PINTO, S. E. de S. Locking-time and information capacity of cml with statistical periodicity. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 285, n. 1, p. 012043, 2011.
- 57 CHATÉ, H.; MANNEVILLE, P. Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 32, n. 3, p. 409 – 422, 1988.
- 58 LOZI, R. New enhanced chaotic number generators. **Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics**, v. 1, p. 1–23, 2007.

- 59 MISLOVATY, R.; KLEIN, E.; KANTER, I.; KINZEL, W. Public channel cryptography by synchronization of neural networks and chaotic maps. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 11, p. 118701, 2003.
- 60 COLET, P.; ROY, R. Digital communication with synchronized chaotic lasers. **Optics Letters**, OSA, v. 19, n. 24, p. 2056–2058, Dec 1994.
- 61 OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. New York: Cambridge University Press, 1993.
- 62 NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. **Physical Review E**, v. 64, n. 026118, 2001.
- 63 BORNHOLDT, S.; SCHUSTER, H. G. (Ed.). **Handbook of Graphs and Networks**. Weinheim: Wiley-VCH, 2003.
- 64 WASSERMAN, S.; FAUST, K. **Social Network Analysis: Methods and Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- 65 BONETTI, R. C.; BATISTA, C. A. S.; BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Short-time memories in a network with randomly distributed connections. **Physical Review E**, v. 78, n. 3, p. 037102, 2008.
- 66 BATISTA, A. M.; PINTO, S. E. de S.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Mode locking in small-world networks of coupled circle maps. **Physica A**, v. 322, p. 118 – 128, 2003.
- 67 BARABÁSI, A.-L. Scale-free networks: A decade and beyond. **Science**, v. 325, p. 412–413, July 2009.
- 68 WANG, B.; AIHARA, K.; KIM, B. J. Comparison of immunization strategies in geographical networks. **Physics Letters A**, v. 373, n. 42, p. 3877 – 3882, 2009.
- 69 NISHIKAWA, T.; MOTTER, A. E.; LAI, Y.-C.; HOPPENSTEADT, F. C. Heterogeneity in Oscillator Networks: Are Smaller Worlds Easier to Synchronize? **Physical Review Letters**, v. 91, 2003.
- 70 ZAMORA-LÓPEZ, G.; ZHOU, C.; KURTHS, J. Cortical hubs form a module for multisensory integration on top of the hierarchy of cortical networks. **Frontiers in Neuroinformatics**, v. 4, n. 1, 2010.
- 71 SOLÉ, R. V.; PASTOR-SATORRAS, R. Complex networks in genomics and proteomics. In: _____. **Handbook of Graphs and Networks**. [S.l.]: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005. p. 145–167.
- 72 MILGRAM, S. The small-world problem. **Psychology Today**, v. 2, p. 60–67, 1967.
- 73 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of small worlds networks. **Nature**, v. 393, p. 440–442, 1998.
- 74 NEWMAN, M. E. J.; WATTS, D. J. Scaling and percolation in the small-world network model. **Physical Review E**, v. 60, p. 7332–7342, Dec 1999.
- 75 CSARDI, G.; NEPUSZ, T. The igraph software package for complex network research. **InterJournal**, Complex Systems, p. 1695, 2006.

- 76 REICHARDT, J.; BORNHOLDT, S. Statistical mechanics of community. **Physical Review E**, v. 74, n. 016110, 2006.
- 77 NEWMAN, M. E. J.; GIRVAN, M. Finding and evaluating community structure in networks. **Physical Review E**, v. 69, n. 026113, 2004.
- 78 BALL, B.; KARRER, B.; NEWMAN, M. E. J. Efficient and principled method for detecting communities in networks. **Physical Review E**, v. 84, n. 036103, 2011.
- 79 ALMEIDA-NETO, M.; AES, P. G.; JR., P. R. G. aes; LOYOLA, R. D.; ULRICH, W. A consistent metric for nestedness analysis in ecological systems: reconciling concept and measurement. **Oikos**, v. 117, p. 1227–1239, 2008.
- 80 FREEMAN, L. C. Centrality in social networks: conceptual clarification. **Social Networks**, v. 1, p. 215–239, 1979.
- 81 TANG, J.; SCELLATO, S.; MOSOLESI, M.; MASCOLO, C.; LATORA, V. Small-world behavior in time-varying graphs. **Physical Review E**, v. 81, n. 055101, 2010.
- 82 CASTEIGTS, A.; FLOCCHINI, P.; QUATTROCIOCCHI, W.; SANTORO, N. Time-varying graphs and dynamic networks. **International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems**, v. 27, p. 346–349, 2012.
- 83 PINTO, S. E. de S.; VIANA, R. L. Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps. **Physical Review E**, v. 61, p. 5154–5161, May 2000.
- 84 TORCINI, A.; LEPRI, S. Disturbance propagation in chaotic extended systems with long-range coupling. **Physical Review E**, v. 55, p. R3805–R3808, Apr 1997.
- 85 VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Synchronization of coupled kicked limit cycle systems. **Chaos, Solitons Fractals**, v. 9, n. 12, p. 1931 – 1944, 1998.
- 86 RAGHAVACHARI, S.; GLAZIER, J. A. Spatially coherent states in fractally coupled map lattices. **Physical Review Letters**, v. 74, p. 3297–3300, Apr 1995.
- 87 WAGNER, C.; STOOP, R. Neocortex’s small world of fractal coupling. **International Journal of Bifurcations and Chaos**, v. 17, n. 10, p. 3409–3414, 2007.
- 88 KANEKO, K. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 23, n. 1-3, p. 436 – 447, 1986.
- 89 PINTO, S. E. de S.; LUNARDI, J. T.; SALEH, A. M.; BATISTA, A. M. Some aspects of the synchronization in coupled maps. **Physical Review E**, v. 72, p. 037206, Sep 2005.
- 90 AHLERS, V.; PIKOVSKY, A. Critical properties of the synchronization transition in space-time chaos. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 25, 2002.
- 91 PEREIRA, R. F.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R. Synchronization time in a hyperbolic dynamical system with long-range interactions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 389, n. 22, p. 5279 – 5286, 2010.
- 92 KURAMOTO, Y. **Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

- 93 OMELCHENKO, I.; MAISTRENKO, Y.; HÖVEL, P.; SCHÖLL, E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. **Physical Review Letters**, v. 106, p. 234102, 2011.
- 94 BAPTISTA, M. S.; KURTHS, J. Chaotic channel. **Physical Review E**, v. 72, p. 045202, 2005.
- 95 BAPTISTA, M. S.; RUBINGER, R. M.; VIANA, E. R.; SARTORELLI, J. C.; PARLITZ, U.; GREBOGI, C. Mutual information rate and bounds for it. **PLoS ONE**, v. 7, n. 10, p. e46745, 10 2012.
- 96 DORFMAN, J. R. **An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics**. New York: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Lecture Notes in Physics, 14).
- 97 ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, v. 57, p. 617–656, Jul 1985.
- 98 ISOLA, S.; POLITI, A.; RUFFO, S.; TORCINI, A. Lyapunov spectra of coupled map lattices. **Physics Letters A**, v. 143, n. 8, p. 365 – 368, 1990.
- 99 BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Lyapunov exponents of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling. **Physics Letters A**, v. 286, n. 2, p. 134 – 140, 2001.
- 100 HAJNAL, J. On products of non-negative matrices. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, v. 79, p. 521, 1976.
- 101 IPSEN, I. C. F.; SELEE, T. M. Ergodicity coefficients defined by vectors norms. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 32, n. 1, p. 153–200, 2011.
- 102 ANTHONISSE, J. M.; TIJMS, H. Exponential convergence of products of stochastic matrices. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 59, p. 360–364, 1977.
- 103 GRAY, R. M. **Toeplitz and Circulant Matrices: A review**. USA: Stanford University, 2006.
- 104 ANTENEODO, C.; PINTO, S. E. d. S.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. **Physical Review E**, v. 68, p. 045202, Oct 2003.
- 105 BRUALDI, R. A.; BRUALDI, D. C. **A combinatorial approach to matrix theory and its applications**. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2009.
- 106 PALANIYANDI, P.; RANGARAJAN, G. Critical lattice size limit for synchronized chaotic state in one- and two-dimensional diffusively coupled map lattices. **Physical Review E**, v. 76, p. 027202, 2007.
- 107 CENCINI, C. J. T. M.; TORCINI, A. Chaotic synchronizations of spatially extended systems as nonequilibrium phase transitions. **Chaos**, v. 18, n. 037125, 2008.
- 108 TESSONE, C. J.; CENCINI, M.; TORCINI, A. Synchronization of extended chaotic systems with long-range interactions: An analogy to lévy-flight spreading of epidemics. **Physical Review Letters**, v. 97, p. 224101, Nov 2006.

- 109 PIKOVSKY, A. S. Local lyapunov exponents for spatiotemporal chaos. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 3, n. 2, p. 225–232, 1993.
- 110 TU, Y.; GRINSTEIN, G.; NOZ, M. A. M. Systems with multiplicative noise: Critical behavior from kpz equation and numerics. **Physical Review Letters**, v. 78, p. 274–277, 1997.
- 111 SORRENTINO, F.; OTT, E. Using synchronization of chaos to identify the dynamics of unknown systems. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 19, n. 3, p. 033108, 2009.
- 112 SHANNON, C. E.; WEAVER, W. **The Mathematical Theory of Communication**. [S.l.]: The University of Illinois Press, 1963.
- 113 STAVROULAKIS, P. (Ed.). **Chaos Applications in Telecommunications**. Usa: New York: CRC Press, 2006. 418 p.
- 114 JOVIC, B. **Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems**. New Zeland: Auckland: Springer, 2011. 362 p.

APÊNDICE A – Prova da Convergência

Seja $\mathbf{Q}_n$ o produto de n matrizes $\mathbf{G}_t$, isto é, $\mathbf{Q}_n = \mathbf{G}_{n-1} \cdots \mathbf{G}_0$. Denotemos por $M_j(\mathbf{Q}_n)$ e $m_j(\mathbf{Q}_n)$ o máximo e o mínimo, respectivamente, de cada coluna da matriz $\mathbf{Q}_n$. Matematicamente, isto pode ser escrito como

$$M_j(\mathbf{Q}_t) = \max_i [\mathbf{Q}_t]_{ij} \text{ e } m_j(\mathbf{Q}_t) = \min_i [\mathbf{Q}_t]_{ij}. \quad (\text{A.1})$$

Se, para todo $n > 1$, ambas as desigualdades

$$M_j(\mathbf{Q}_n) \leq M_j(\mathbf{Q}_{n-1}) \text{ e } m_j(\mathbf{Q}_n) \geq m_j(\mathbf{Q}_{n-1}) \quad (\text{A.2})$$

são satisfeitas, com a igualdade ocorrendo apenas se $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{n-1}$, então podemos inferir que $\mathbf{Q}_n \rightarrow \mathbf{Q}$ a medida que aumentamos n .

Vamos analisar primeiramente o comportamento do máximo $M_j(\mathbf{Q}_n)$ e, em seguida, consideramos a outra condição. Usando a relação

$$[\mathbf{Q}_n]_{i,j} = \sum_{k=1}^N [\mathbf{G}_{n-1}]_{i,k} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \quad (\text{A.3})$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} M_j(\mathbf{Q}_n) &\leq M_j(\mathbf{Q}_{n-1}) \\ \max_i ([\mathbf{Q}_n]_{ij}) &\leq \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \\ \max_i \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{G}_{n-1}]_{i,k} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\leq \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para demonstrar que a desigualdade é satisfeita, vamos considerar que os elementos da matriz de acoplamento são dados por

$$[\mathbf{G}_t]_{ik} = \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} ([\mathbf{A}_t]_{ik} - \eta_t^{(i)} \delta_{ik}) + \delta_{ik} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo essa expressão em A.4 obtemos

$$\begin{aligned} \max_i \left(\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} [\mathbf{A}_{n-1}]_{ik} + (1-\varepsilon) \delta_{ik} \right\} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\leq \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \\ \max_i \left((1-\varepsilon) [\mathbf{Q}_{n-1}]_{i,j} + \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{ik} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\leq \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \end{aligned}$$

Supondo que o máximo do argumento do lado esquerdo seja obtido quando $i = s$ e o máximo argumento do lado direito seja dado por $i = r$, a equação acima torna-se

$$(1-\varepsilon) [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j} + \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(s)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj}.$$

Rearranjando os termos ficamos com

$$\frac{\varepsilon}{\eta_n^{(s)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j} + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}. \quad (\text{A.6})$$

Definindo $\Delta = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}$ e usando $\eta_n^{(s)} = \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}]_{sk}$, podemos escrever

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \quad (\text{A.7})$$

como assumimos $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} = \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$ temos que $\Delta \geq 0$. Se Δ é nulo, então $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{sj} = \max_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$ e, portanto, o lado esquerdo será sempre menor do que o lado direito, e a igualdade ocorrerá apenas se $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{sj} = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{kj} \forall k$, ou seja, se todas as linhas de $\mathbf{Q}_{n-1}$ forem iguais.

Por outro lado, para $\Delta > 0$, podemos demonstrar que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta + [\varepsilon \mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}).$$

mostrando que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) \varepsilon (\Delta + [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \quad (\text{A.8})$$

pois, como $\varepsilon \leq 1, 0$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta + [\varepsilon \mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) \varepsilon (\Delta + [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}).$$

Dado que $\Delta = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}$ podemos escrever a equação A.8 como

$$\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \leq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{r,j}). \quad (\text{A.9})$$

Então, sendo $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} = \max_i([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$, é direto que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} < \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}). \quad (\text{A.10})$$

sendo a igualdade observada apenas as linhas de $\mathbf{Q}_{n-1}$ forem iguais.

Para demonstrar que $m_j(\mathbf{Q}_n) \geq m_j(\mathbf{Q}_{n-1})$ procedemos de maneira equivalente. Tal como em (A.4) podemos escrever

$$\begin{aligned} \min_i \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{G}_{n-1}]_{i,k} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\geq \min_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \quad (\text{A.11}) \\ \min_i \left(\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} [\mathbf{A}_{n-1}]_{ik} + (1 - \varepsilon) \delta_{ik} \right\} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\geq \min_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \\ \min_i \left((1 - \varepsilon) [\mathbf{Q}_{n-1}]_{i,j} + \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(i)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{ik} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \right) &\geq \min_i ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij}) \end{aligned}$$

Supondo que o mínimo do argumento do lado esquerdo seja obtido quando $i = s$ e o mínimo do argumento do lado direito seja dado por $i = r$, a equação acima torna-se

$$(1 - \varepsilon) [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j} + \frac{\varepsilon}{\eta_n^{(s)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj}.$$

Rearranjando os termos ficamos com

$$\frac{\varepsilon}{\eta_n^{(s)}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j} + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}. \quad (\text{A.12})$$

Definindo $\Delta' = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}$ e usando $\eta_n^{(s)} = \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}]_{sk}$, podemos escrever

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta' + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \quad (\text{A.13})$$

como assumimos $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} = \min_i([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$ temos que $\Delta' \leq 0$. Se Δ' é nulo, então $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{sj} = \min_i([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$ e, portanto, o lado esquerdo será maior do que o lado direito, e a igualdade ocorrerá apenas se $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{sj} = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{kj} \forall k$, ou seja, se todas as linhas de $\mathbf{Q}_{n-1}$ forem iguais.

Por outro lado, para $\Delta' < 0$, podemos demonstrar que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta' + [\varepsilon \mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}).$$

mostrando que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) \varepsilon (\Delta' + [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \quad (\text{A.14})$$

pois, como $\varepsilon \leq 1, 0$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta' + [\varepsilon \mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}) \leq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) \varepsilon (\Delta' + [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}).$$

Dado que $\Delta' = [\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} - [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}$ podemos escrever a equação A.14 como

$$\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) ([\mathbf{Q}_{n-1}]_{r,j}). \quad (\text{A.15})$$

Então, sendo $[\mathbf{Q}_{n-1}]_{rj} = \min_i([\mathbf{Q}_{n-1}]_{ij})$, é direto que

$$\varepsilon \sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} [\mathbf{Q}_{n-1}]_{k,j} \geq \left(\sum_{k=1}^N [\mathbf{A}_{n-1}]_{sk} \right) (\Delta + \varepsilon [\mathbf{Q}_{n-1}]_{s,j}). \quad (\text{A.16})$$

sendo que a igualdade é observada apenas se as linhas de $\mathbf{Q}_{n-1}$ forem iguais.

Enfim, como $\eta_n^{(i)} > 1$ para todo i e n , estes resultados são suficientes para assegurar que $\mathbf{Q}_n \rightarrow \mathbf{Q}$ quando n cresce.

ANEXO A – Artigo publicado

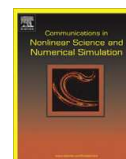
Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18 (2013) 1491–1498



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cnsns



Effective dynamics for chaos synchronization in networks with time-varying topology

Romeu M. Szmowski, Rodrigo F. Pereira, Sandro E. de Souza Pinto *

Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 84030-900 Ponta Grossa, PR, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:
Received 29 May 2012
Received in revised form 3 October 2012
Accepted 13 October 2012
Available online 23 October 2012

Keywords:
Coupled map lattice
Time-varying coupling
Chaos synchronization
Effective dynamics

ABSTRACT

A coupled map lattice whose topology changes at each time step is studied. We show that the transversal dynamics of the synchronization manifold can be analyzed by the introduction of effective dynamical quantities. These quantities are defined as weighted averages over all possible topologies. We demonstrate that an ensemble of short time observations can be used to predict the long-term behavior of the lattice. Finally, we point out that it is possible to obtain a lattice with constant topology in which the dynamical behavior is asymptotically identical to one of the time-varying topology.

© 2012 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

In nature, we see objects that interact in various ways. These objects define sets, called networks, that presents a specific structure according to each situation observed. When objects are identical an important phenomenon can occur: the complete synchronization of chaos [1]. This kind of synchronization is a phenomenon in which all elements of a network present the same states in the same time. Neurons in the brain [2], groups of individuals [3] and the world wide web [4] are examples of systems that can exhibit synchronization. These three systems, among others, have a complex topology as part of its structure, and, for each specific topology different properties are observed [5]. Random, small-world and scale-free are the most prominent among the networks that appear in literature [3,6–8]. In real systems, such as topologies can coexist in the same instant, or change as time passes [9–11].

Synchronization can occur in the systems cited above, as well as in models using topologies above mentioned. A recent work [12] has studied the synchronization of clusters in genetic oscillators with external disturbances, in which the time delay is taken into account, in order to simulate the delay in the transmission of information in real systems. Aiming to optimize synchronization between coupled chaotic systems the authors of Ref. [13] present an adaptive strategy that has two parallel objectives: to minimize the intensity of coupling optimization and convergence speed. These two studies show more realistic models and aim to capture the complexity of real systems. In a paper in which it uses the topology of the cat brain authors study the role of synchronization, among other attributes of a complex network, to characterize the most central nodes of a network [14].

Using the synchronization, we present a method in order to predict the long-term behavior of networks whose topology varies over time and present long-range interactions [15]. The main idea of this work is the statement of effective quantities static quantities that replace those that vary over time for the analysis of the transversal dynamics to the synchronization manifold. These quantities, obtained by calculating a weighted average over the set of possible states, can be used to verify

* Corresponding author. Tel.: +55 42 3220-3044.

E-mail addresses: sandroesp@pq.cnpq.br, desouzapinto@gmail.com (S.E. de Souza Pinto).

the ability of synchronization of a network as well as for derive the quantities that are defined on the subspace of synchronization, for example, the conditional Lyapunov exponents and upper bond of mutual information [16]. As a parameter for checking the ability of the network to synchronize, the effective quantities adds to the pre-existing approaches as the Hajnal diameter [17], and the stability method in a connection graph [18] among others. Another advantage of our approach is to allow the construction of a lattice with a static coupling which, for synchronization purposes, exhibits behavior consistent with the networks with time-varying topology. We say that such effective coupling represents the effective dynamics of the system. Therefore, the main contribution of this paper is to determine the circumstances under which a network with variable topology, reaches the synchronization, and from there build a network with *effective coupling*, which can be determined from the *effective quantities*, which regains its dynamics.

We hypothesized that each realization of the original time-varying network, for a long enough observation period, can be replaced by an effective system. Moreover, we expect that any network with time-varying topology can be represented by a circulant effective matrix, provided that the network is periodic and that the probability of interaction between elements is invariant over translations. Knowing the Lyapunov exponents that characterize the transversal dynamics to the synchronized state, we can find a good estimate for the effective coupling between the elements of the system under study.

The article has six main sections including the introduction. Firstly, we shall present the class of coupled map lattice, with time-varying topology, that is the subject of this work. The next section outlines the mathematical tools for calculating the effective quantities. This will be followed by the derivation of the expression for such quantities and the construction of the effective system. The next section will present an application of our results in a coupled map lattice whose coupling between the elements is semirandomly determined: the coupling probability between two elements in a given instant depends algebraically on their distance in the lattice. This coupling form was studied in Refs. [19,20] as a model of a network of neurons. Our conclusions are left to the last section.

2. Coupled map lattice

We examined a network called *coupled map lattice* (CML) [21], which is defined in the following way: let $\mathbf{g} : \omega \rightarrow \omega$ be an axiom-A¹ d -dimensional map defined in $\omega \subset \mathbb{R}^d$. Let $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \Omega$ be a lattice with N coupled maps in the form $\mathbf{g}$, with $\Omega = \omega^N$. This lattice reads

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_n, n) = \mathbf{G}_n \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (1)$$

in which $\mathbf{y}_n \triangleq [\mathbf{x}_n^{(0)} \dots \mathbf{x}_n^{(N-1)}]^T$, $\mathbf{x}_n^{(m)}$ defines the state of the m th site, $\mathbf{f}^{(m)}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n^{(m)})$, and $\mathbf{G}_n$ is a $dN \times dN$ matrix that depends on discrete time n , in an explicit way. This is the *coupling matrix*.

2.1. Topology

We shall restrict the lattice to the linear couplings, as we can see in the Eq. (1), and consider the lattice topology varying stochastically with time. However, the following conditions must be observed:

- (i) the lattice is a periodic one;
- (ii) the topology at each time interval is invariant under translations in the lattice.

Since there are constraints about the topology, one can call this form of *semirandom* coupling. The above conditions imply $\mathbf{G}_n$ is a circulant matrix. Due to periodicity imposed to the topology, there is no reason to define a preferential direction (say, to the left or to the right) and we also require the topology to be a symmetric one. These features do not depend on the probability rule that defines each possible coupling matrix. The condition that the phase space Ω is a direct product of N subspaces ω is satisfied if, and only if,

$$[\mathbf{G}_n]_{qw} \geq 0, \quad \sum_{m=0}^{dN-1} [\mathbf{G}_n]_{qm} = 1, \quad (\forall q, w). \quad (2)$$

Herein, $q, w = 0, 1, \dots, dN - 1$. Thus, $\mathbf{G}_n$ is also a stochastic matrix. We imposed also that the system (1) represents the coupling (direct or indirect) between all the N maps. That is, the state of an arbitrary site eventually influences all other elements in the lattice. If not, the system (1) can be split in two uncoupled subsystems. In this case, our results are applied separately to each subsystem. Mathematically, this means that the condition $0 < [\mathbf{G}_k]_{0w} < 1$ must be satisfied, for at least one $\mathbf{G}_k$, for each w , in a such way that the infinite product of matrices $\mathbf{G}_k$ typically results in a strictly positive matrix [23,24]. For instance, if each site is always coupled with its first neighbors, this condition is always satisfied. Here, we consider that the network topology uniquely defines the coupling matrix $\mathbf{G}_n$, i.e. $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_n(\mathbf{T}_n)$, being $\mathbf{T}_n = \mathbf{1} + \mathbf{A}_n$ the *topology matrix*, $\mathbf{1}$ the identity matrix and $\mathbf{A}$ the usual adjacency matrix [25].

¹ A map that satisfies the axiom-A is hyperbolic and mixing [22].

If we suppose that the rules that specify the coupling probabilities are well-defined and do not change over time, we have

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_n]_{0r} &\equiv [\mathbf{T}_n]_{0(dN-r)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi \leq p_r, \\ 0 & \text{if } \xi > p_r, \end{cases} \\ [\mathbf{T}_n]_{qw} &= [\mathbf{T}_n]_{0(w-q \bmod dN)}, \end{aligned}$$

in which $r = 0, 1, \dots, N'$, with $N' \equiv \frac{dN-1}{2}$, ξ is random variable, and p_r is a parameter that determines the connectivity between sites 0 and r . We remark that the connectivity distribution of each site is uniquely defined by the parameter p_r . If ξ is δ -correlated and with uniform probability distribution in $[0, 1]$, then p_r defines the coupling probability. Therefore, the probability of occurrence of a specific coupling matrix depends only on entries of the topology matrix:

$$\pi_k = \prod_{r=0}^{N'} (p_r [\mathbf{T}_k]_{0r} + (1 - p_r)(1 - [\mathbf{T}_k]_{0r})). \quad (3)$$

If the conditions (i) and (ii) are fulfilled, there are, at most, $K_N = 2^{\frac{d(N+1)}{2}}$ distinct matrices. For each $p_r = 0$ or $p_r = 1$, K_N is reduced by a factor 2. The evolution of the network is then obtained by the selection of $\mathbf{G}_n$ from the set $\{\mathbf{G}_k\}_{k=1}^{K_N}$ according to the probability π_k .

The translational invariance of the lattice topology implies all sites share the same connectivity degree κ_n at the same instant n . Along the temporal evolution of the lattice, κ_n follows a Poissonian distribution, because we assume that the p_r 's are independent of each other. Different distributions can be obtained through a rescaling of the probabilities π_k following their respective connectivities.

3. Chaos synchronization and linear stability analysis

We are interested in studying the CML (1) from the point of view of the synchronization manifold stability. Such manifold is defined by

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{s} \in \Omega : \mathbf{x}^{(m)} \equiv \mathbf{s} \forall m\},$$

that is, we are considering the *complete amplitude synchronization* – all sites share the same state at same time. We say that a trajectory $\{\mathbf{y}_t\}_{t=0}^n$ achieves $\mathcal{S}$ at time n when, for any $\delta > 0$, we observe $\text{dist}(\mathbf{y}_n, \mathcal{S}) < \delta$. The mapping $\mathbf{F}$ keeps $\mathcal{S}$ invariant, and the dynamic in this subspace is determined by $\mathbf{g}$.

The stability of the synchronization manifold can be determined through the Lyapunov exponents' spectrum of $\mathcal{S}$, calculated for a typical trajectory in this manifold. The m th Lyapunov exponent is defined by

$$\lambda_m(\mathbf{s}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{D}\mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{s}_0)\mathbf{e}_m\|, \quad (4)$$

in which $\mathbf{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}$ is the dN -dimensional Jacobian matrix, $\mathbf{e}_m$ is a typical unitary vector in $\mathbb{E}^m \setminus \mathbb{E}^{m+1}$, and $\mathbb{E}^0 = \Omega$ [22]. Since the dynamics in $\mathcal{S}$ is ruled by the map $\mathbf{g}$, which is, by assumption, mixing, $\lambda_m(\mathbf{s}_0)$ do not depends on $\mathbf{s}_0$, apart from a set of null Lebesgue measure, and we have $\lambda_m(\mathbf{s}_0) \equiv \lambda_m$. The calculations yielded by (4) give $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{Nd-1}$. The analysis of the stability of $\mathcal{S}$ is done by the examination of the greatest transversal Lyapunov exponent, denoted by $\lambda_{\perp}$, which is calculated in $\Omega \setminus \mathcal{S}$. In the case of networks whose topology varies over time, the scaling behavior of the Hajnal diameter of the product of coupling matrices enables us to obtain $\lambda_{\perp}$ [26,17].

Now, let us develop Eq. (4) for typical trajectories embedded in $\mathcal{S}$. For the sake of simplicity, we shall consider $d = 1$. Let $\mathbf{J}_n(\mathbf{y}_0)$ be the Jacobian matrix applied in (1), which is calculated over $\{\mathbf{y}_t\}_{t=0}^{n-1}$:

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{y}_0) = \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{y}_t).$$

In $\mathcal{S}$ we have $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{y}_t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \mathbb{I}_N$, where $\mathbb{I}_N$ is the identity $N \times N$ matrix. Thus, the calculation of the Lyapunov exponents given by Eq. (4) yields

$$\lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| e^{\lambda_U n} \left(\prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t \right) \mathbf{e}_m \right\|, \quad (5)$$

in which $\lambda_U > 0$ is the Lyapunov exponent of the map $\mathbf{g}(\mathbf{s})$.

Once $\mathbf{G}_t$ is a matrix satisfying the conditions (i), (ii) and Eq. (2), we can show that ²

² Our results remain valid under less restrictive conditions with respect to the possible coupling matrices. Theorems in Refs. [24,23] guarantee that the infinite product of matrices that are indecomposable and aperiodic converges to a matrix whose all rows are identical (matrix $\mathbf{H}$). A matrix is indecomposable if it contains no submatrix of order $s \times (N - s)$ composed of zeros, whatever $s > 0$. If there is a finite sequence whose product results in a strictly positive matrix, i.e. all matrix elements are positive, the infinite product of indecomposable matrices converges to the matrix $\mathbf{H}$. This result was used by Lu et al. in Refs. [17,26] in the study of coupled map lattices in which the coupling is time-varying. They demonstrated the need for the union of all sets contains a spanning tree, that is, any pair of elements must be eventually coupled. We extend the applicability of expression (7) for all Lyapunov exponents of the synchronization subspace, from which we could build an effective system (autonomous and deterministic). The restrictions that we imposed on the topology of the network allowed us to derive analytically an expression for the effective quantities, Eq. (8).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t = \mathbf{H},$$

with $[\mathbf{H}]_{qw} = [\mathbf{H}]_{0w}$, for all q and w . The values labeled by $[\mathbf{H}]_{0w}$ depends on the observed coupling matrix chronological sequence, though it does not hold for the $\mathbf{H}$ form. $\mathbf{H}$ is a stochastic matrix, whose greatest eigenvalue is $\eta_0 \equiv 1$, which is associated to the eigenvector $\mathbf{h}_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}[1 \ \cdots \ 1]^T$. All the others eigenvalues, associated with the eigenvectors $\mathbf{h}_q$ ($q > 0$) are equal to zero, $\eta_q \equiv 0$.

4. Results and discussion

4.1. The effective quantities

In the limit $n \rightarrow \infty$, the Lyapunov vectors of S , which are parallel to the eigendirections of the Jacobian matrix, are determined by $\mathbf{h}_q$. For this reason, the Lyapunov exponents are given by

$$\lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|e^{i\omega n} \eta_m\|,$$

with $\mathbf{e}_m = \mathbf{h}_m$ in (5) (the index of $\mathbf{h}_m$ are chosen to provide a non-increasing spectrum).

For $n \rightarrow \infty$ we have $e^{i\omega n} \rightarrow \infty$ and $\eta_m \rightarrow 0$ ($m > 0$). If we write

$$\hat{\theta}_m = (\eta_m)^{1/n}, \quad (6)$$

we have

$$\hat{\lambda}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \left(e^{i\omega} \hat{\theta}_m \right)^n \right\| = \lambda_U + \ln |\hat{\theta}_m|. \quad (7)$$

The quantities $\hat{\lambda}_m$ and $(e^{i\omega} \hat{\theta}_m)$ represent the m th effective exponent and Lyapunov number, respectively, and we call $\hat{\theta}_m$ the m th effective coupling eigenvalue. For $n \gg 1$ we have $n\hat{\lambda}_m$, which describe the time- n average behavior of the system. If η_m approaches zero faster than the exponential, the limit $n \rightarrow \infty$ in Eq. (6) results $\hat{\theta}_m = 0$, therefore, Eq. (7) gives $\hat{\lambda}_m = -\infty$.

Expression (6) gives a general and strong meaning to the effective coupling eigenvalues. The $\hat{\theta}_m$ ($m > 0$) quantity is obtained by the decay rate to zero of the eigenvalues of the matrix $\mathbf{H}_n = \prod_{t=0}^{n-1} \mathbf{G}_t$. Only one condition was imposed, namely $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{H}_n = \mathbf{H}$. In other words, for any system in the form (1), in which all the possible coupling matrices satisfies (i), (ii) and Eq. (2), the results (6) and (7) are formally valid. Thus, in general, our results suggest that the effective dynamics of a network whose topology is time-varying can be obtained by the analytical or numerical calculation of $\hat{\theta}_m$.

Since the conditions (i) and (ii) imply all coupling matrices are circulant, we can write down the exact expression for (6). This is possible because all circulant matrices share the same basis and, consequently, commute with each other. For this reason,

$$\hat{\theta}_m = \prod_{k=1}^{K_N} \left(\Gamma_m^{(k)} \right)^{\pi_k}, \quad (8)$$

in which the product extends over all possible coupling matrices, and $\Gamma_m^{(k)}$ is the m th eigenvalue of the k th coupling matrix. Here and in what follows, the $\Gamma_m^{(k)}$ (and the $\hat{\theta}_m$) are not indexed by their magnitudes, but according their respective eigenvectors whose components are $h_q^{(w)} \propto \exp(-(2\pi i)qw/N)$ [27]. Notice that, due symmetry, $\Gamma_m^{(k)} = \Gamma_{N-m}^{(k)}$ and all the $\hat{\theta}_m$ with $m > 0$ are degenerated. If for some k , $\Gamma_m^{(k)} = 0$, then $\hat{\theta}_m = 0$, which implies the system is superstable in the m th direction. Strictly speaking, in this situation, any implementation of the system eventually results in superstability in the m th direction. The synchronization manifold is transversely superstable if, and only if, $\hat{\theta}_m = 0$ in all transversal directions, i.e. for every $m > 0$. In average, the time required for a typical trajectory to experience the effects of superstability is of the order of π_k^{-1} .

4.2. The effective coupling

Let $\text{diag}\{\hat{\theta}_m\}$ be a diagonal matrix formed by the effective coupling eigenvalues (8). Let $\mathbf{P}$ be an unitary similarity transformation formed by the Lyapunov vectors of S . Hence, we can make an effective *autonomous deterministic* system from the definition of an effective coupling matrix:

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{P} \text{diag}\{\hat{\theta}_m\} \mathbf{P}^\dagger.$$

From the point of view of the synchronization capacity we show that the systems constructed by $\{\mathbf{G}_n\}$ and $\hat{\mathbf{G}}$ in (1) are equivalent.

For the systems under consideration, we have $[\mathbf{P}]_{qw} = \exp(-(2\pi i)qw/N)/\sqrt{N}$, therefore

$$[\hat{\mathbf{G}}]_{qw} = \frac{1}{N} \left\{ \hat{\theta}_0 + 2 \sum_{s=1}^N \hat{\theta}_s \cos \left(\frac{2\pi s(w-q)}{N} \right) \right\}. \quad (9)$$

Once $\cos(\cdot)$ is an even function with period 2π and $\hat{\theta}_0 = 1$, is straightforward that $\hat{\mathbf{G}}$ is a circulant, stochastic and symmetric matrix. For this reason, the effective matrix satisfies all the suppositions about the network. An example is found in Fig. 1.

In general, due to the explicit dependence of the Jacobian matrix on the points of the trajectory, we may formally demonstrate the equivalence between both systems only in the linear neighborhood of S . When such dependence does not exist, the Lyapunov vectors of all points in phase space are identical and our results are globally valid in Ω [28,29]. From this, we conjecture that the equivalence between the two systems, for synchronization purposes, is generic. Our results are also valid for networks in which the topology varies periodically in time, replacing π_k by the relative frequency associated with k th topology.

4.3. Example

We shall apply the above results to a system in which, at each time instant, two sites are coupled with probability $p_r = r^{-\alpha}$; being r the shortest distance between sites 0 and r , $p_0 \equiv 1$, and $\alpha \geq 0$ a parameter that quantifies the range of the coupling. We assume the same value of the coupling strength ε for all connections. Therefore, the coupling is expressed by

$$[\mathbf{G}_n(\mathbf{T}_n)]_{qw} = \left([\mathbf{T}_n]_{qw} - (1 + (1 - \varepsilon^{-1})v_n)\delta_{qw} \right) \frac{\varepsilon}{v_n}, \quad (10)$$

in which $v_n = 2 \sum_{r=1}^N [\mathbf{T}_n]_{0r}$ is a normalization factor according to (2). Since, by construction, $p_0 = p_1 = 1$, the total number of different topologies for this system is $K_N = 2^{\frac{N-3}{2}}$.

This example describes a network with time-varying topology and interactions whose probability of coupling between two sites depends on the r distance between them. This spatial dependence is recovered by the effective matrix $\mathbf{G}$ in the form of the coupling intensities, as shown in Fig. 1.

We present an analysis on the synchronization of chaos in this system, as well as illustrations of the equivalence between the original system (1) and effective static system. In view of this, we consider the temporal evolution of the Euclidean distance between the points of the trajectory and S , denoted by $d_n \equiv \text{dist}(\mathbf{y}_n, S)$. As a first examination, we consider the evolution of typical trajectories to S for a specific realization of this network. The results for the numerical simulations are presented in Fig. 2. From the expressions (8) and (7) we determine a set of parameters (N, ε, α) for which S is transversely stable, in which we chose the tent map $g(s) = 1 - 2|s - 1/2|$ ($\lambda_U = \ln 2$) to rule the dynamics of each site. The rationale behind this choice is the monotonic convergence of the trajectories to the transversely stable synchronized state, when static couplings are considered [29]. Thus, we can ensure that the irregular time evolution of d_n in Fig. 2 – for typical trajectories outside the synchronization manifold – is precisely due to the time-dependent coupling. For example, at a given instant n , it is possible that each site is only influenced by a few distant sites, which are in very different states, causing a departure from S . On the other hand, the same mechanism may explain the decrease in the synchronization time when the states are very close together. Fig. 2 also shows the numerical simulations for the static performance of the system, in which we observe that the convergence is monotonic.

We must emphasize that typical trajectories of the system, whose topology is time-varying, present an average behavior that is determined by the equivalent static system, for any set of parameters – including the lattice size – inside the synchronization domain. This result is shown in Fig. 3 in which we analyze the average time required for synchronization of a set of

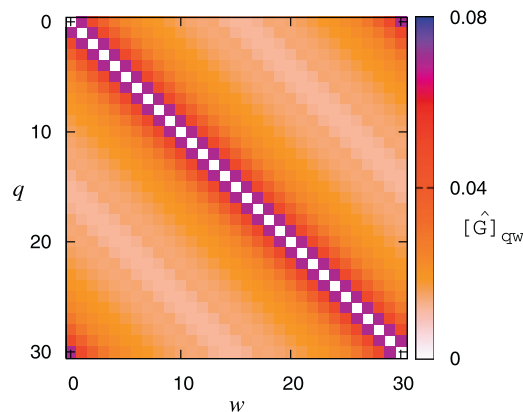


Fig. 1. Pictorial representation of $\hat{\mathbf{G}}$ elements, in which the color scale stands for the coupling intensity. Note the periodicity and translational invariance of the coupling. This matrix has the following parameters: $N = 31$, $\varepsilon = 0.7$ and $\alpha = 0.6$ (elements on the main diagonal are not shown). (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

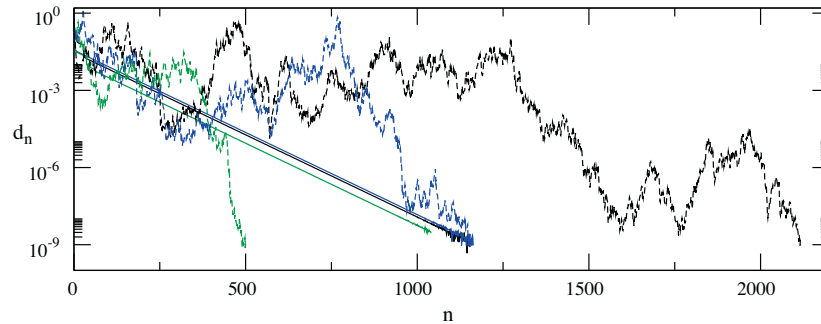


Fig. 2. The convergence to S of typical trajectories for the time-varying topologies (dashed lines) and for the effective system (solid lines), with $N = 31$, $\varepsilon = 0.7$ and $\alpha = 0.6$.

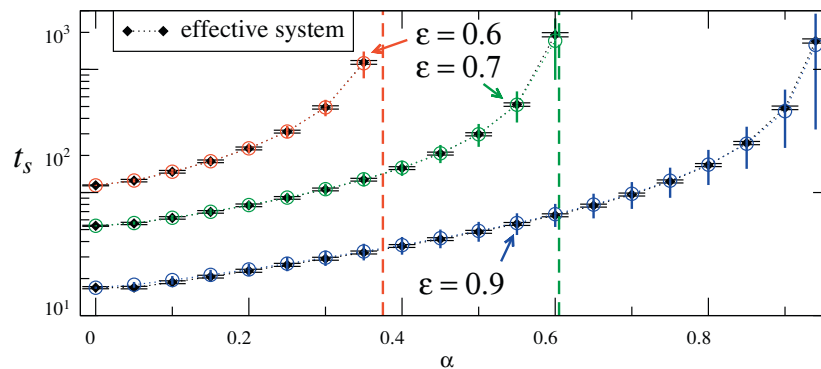


Fig. 3. The dependence on the range of coupling probability of the average synchronization times, for the time-varying system (circles) and the effective static one (diamonds), and its standard deviation, given by vertical and horizontal bars, respectively, for $N = 31$. The vertical dashed lines are the critical values α_c for which S becomes transversely unstable.

typical trajectories. The synchronization time increases with the parameter α and diverges at its critical value, $\alpha_c(\varepsilon, N)$. For this parameter value S becomes transversely unstable. The α_c is determined by the Eq. (8) when $|e^{i\omega} \hat{\theta}_\perp| = 1$ [28], being $\hat{\theta}_\perp = \max_{m>0} \{|\hat{\theta}_m|\}$. This critical value³ is indicated by the dashed lines in Fig. 3. The transition to synchronization, which is characterized by changes in transversal stability of S , occurs at the same point for both systems. In this figure, we also analyze the dispersion of synchronization times. The dispersion is computed by the standard deviation of several network realizations. This quantity is represented by vertical and horizontal bars in the case of systems with varying and static topology, respectively.

5. Conclusions

In conclusion, we studied here the synchronization of chaos in coupled map lattices whose topology varies semi-stochastically with time. Regarding the periodicity, the translational invariance of lattice topology, and that all sites are eventually coupled, we showed that a weighted average over all possible topologies determines the dynamics transverse to the synchronization manifold. This was quantified by the introduction of effective Lyapunov exponents, for which we derive an exact analytical expression. We also showed that, starting from such effective dynamical quantities, a system that is *deterministic and autonomous* – which we call effective system – can be constructed, so that its topology is static. We demonstrated the equivalence between the two systems by analyzing the stability of the synchronization manifold, and the average time needed for the typical trajectories of the network to reach it. Although the average behavior is the same

³ This network can present superstability at $\varepsilon = (1 - 1/N) \equiv \varepsilon_{ss}$ for any $\alpha < \infty$, because global coupling has probability $\pi_{gl} = (N!)^{-\alpha}$. Typically, this superstability is not observed because the set of parameters, which is determined by ε_{ss} , has null measure in parameter space. For $\varepsilon = \varepsilon_{ss} \pm \delta\varepsilon$ the contribution to the expression (8) of the eigenvalue associated with global coupling is given by $\delta e^{(N!)^{-\alpha}}$, i.e. it becomes evident only for very small networks. For this reason, even for $\varepsilon \approx \varepsilon_{ss}$, no manifestation of this phenomenon is observed.

for both systems, we showed that the time dependence of the coupling can cause great variability in time synchronization for the case of isolated observations.

We found an efficient method to numerically determine the effective quantities. This method is based on the eigenvalue decay rate of the coupling matrices' products, which may be a quick way to calculate the Lyapunov spectrum, because it usually involves a small number of products of matrices (compared to the number of possible topologies). The eigenvalues' decay is due to the convergence of the coupling matrices product to a matrix of rank 1, because these matrices are stochastic, indecomposable and aperiodic (SIA). SIA matrices appear in different contexts and constitutes a broad class; however, in this work, we use a specific coupling matrix form. Therefore, measuring the rate of decay of the eigenvalues for the determination of effective quantities extends beyond the coupling model used in this work.

In future work, we intend to study the effective quantities for networks with time-varying topology in which the probability of interaction (and not the topology) between elements is invariant over translations. We expect also that the new network considered can be represented by a circulant effective matrix, provided that the network is periodic. If the effective coupling is circulant, the Lyapunov vectors of the synchronization subspace correspond to the eigenvectors of the circulant base matrix and, thus, we can estimate the effective Lyapunov exponents analyzing how close the final shape is each matrix coupling. Consequently, knowing the Lyapunov exponents that characterize the transversal dynamics to the synchronized state, we can find a good estimate for the effective coupling between the elements of the system under study. This is possible with the use of Eq. (9) after inversion of Eq. (7). A well-known example of models whose probability of interaction between elements is invariant over translations are the small-world networks. In these networks one usually assumes that all elements have the same probability of connection. However, few papers have studied the small-world networks with time-varying topology. Therefore, our next step will be to apply the method presented here for this class of systems, and analyze the dependence of the effective quantities on the time scale at which the topology changes.

Acknowledgments

This work has been made possible thanks to the partial financial support from the following Brazilian research agencies: CNPq, CAPES and Fundação Araucária. R.F.P. would like to acknowledge Sinha for presenting the Refs. [10,11] to him at the Dynamics Days South America 2010 coffee break.

References

- [1] Pikovski A, Roseblum M, Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press; 2001.
- [2] Bonifazi P, Goldin M, Picardo MA, Jorquera I, Cattani A, Bianconi G, Represa A, Ben-Ari Y, Cossart R. Gabaergic hub neurons orchestrate synchrony in developing hippocampal networks. *Science* 2009;326(5958):1419–24. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1175509>.
- [3] Palla G, Barabási A-L, Vicsek T. Quantifying social group evolution. *Nature* 2007;446:664–7. <http://dx.doi.org/10.1038/nature05670>.
- [4] Wellman B. Computer networks as social networks. *Science* 2001;293(5537):2031–4. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1065547>.
- [5] Strogatz SH. Exploring complex networks. *Nature* 2001;410:268–76. <http://dx.doi.org/10.1038/35065725>.
- [6] Kleinberg JM. Navigation in a small world. *Nature* 2000;406:845.
- [7] Butts CT. Revisiting the foundations of network analysis. *Science* 2009;325(5939):414–6. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1171022>.
- [8] Brockmann D, Hufnagel L, Geisel T. The scaling laws of human travel. *Nature* 2006;439:462–5. <http://dx.doi.org/10.1038/nature04292>.
- [9] Belykh IV, Belykh VN, Hasler M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling. *Phys D* 2004;195(1–2):188–206. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2004.03.013>.
- [10] Sinha S. Random coupling of chaotic maps leads to spatiotemporal synchronization. *Phys Rev E* 2002;66(1):016209. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.66.016209>.
- [11] Mondal A, Sinha S, Kurths J. Rapidly switched random links enhance spatiotemporal regularity. *Phys Rev E* 2008;78(6):066209. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.78.066209>.
- [12] Zhang W, Tang Y, Fang J-a, Zhu W. Exponential cluster synchronization of impulsive delayed genetic oscillators with external disturbances. *Chaos*;21(4). <http://dx.doi.org/10.1063/1.3671609>.
- [13] Tang Y, Wang Z, Wong WK, Kurths J, Fang J-a. Multiobjective synchronization of coupled systems. *Chaos*;21(2). <http://dx.doi.org/10.1063/1.3595701>.
- [14] Tang Y, Gao H, Zou W, Kurths Ja. Identifying controlling nodes in neuronal networks in different scales. *Plos One*;7(7). <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0041375>.
- [15] Vasconcelos D, Viana R, Lopes S, Batista A, Pinto S. Spatial correlations and synchronization in coupled map lattices with long-range interactions. *Phys A Stat Mech Appl* 2004;343:201–18. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.063>.
- [16] Baptista M, Kurths J. Chaotic channel. *Phys Rev E*;72(4, Part 2). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.72.045202>.
- [17] Lu W, Atay FM, Jost J. Synchronization of discrete-time dynamical networks with time-varying couplings. *SIAM J Math Anal* 2007;39(4):1231–59. <http://dx.doi.org/10.1137/060657935>.
- [18] Belykh VN, Belykh IV, Hasler M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Phys D* 2004;195:159–87. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2004.03.012>.
- [19] Raghavachari S, Glazier JA. Spatially coherent states in fractally coupled map lattices. *Phys Rev Lett* 1995;74(16):3297–300. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.3297>.
- [20] Stoop R, Wagner C. Neocortex's architecture optimizes computation, information transfer and synchronizability at given total connection length. *Int J Bifur Chaos* 2007;17:2257–79. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127407018373>.
- [21] Chazottes J-R, Fernandez B, editors. Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems. Springer; 2005.
- [22] Eckmann J-P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev Mod Phys* 1985;57:617–56. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.57.617>.
- [23] Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices. *Proc Amer Math Soc* 1962;14:733.
- [24] Hajnal J. On products of non-negative matrices. *Proc Camb Phil Soc* 1976;79:521. <http://dx.doi.org/10.1017/S030500410005252X>.
- [25] Gross JL, Yellen J. Graph theory and its applications. Chapman & Hall; 2006.
- [26] Lu WL, Atay FM, Jost J. Chaos synchronization in networks of coupled maps with time-varying topologies. *Eur J Phys B* 2008;63:399–406. <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2008-00023-3>.
- [27] Gray RM. Toeplitz and circulant matrices: a review. *Found Trends Commun Inf Theory* 2006;2:155–239. <http://dx.doi.org/10.1561/01000000006>.

- [28] Anteneodo C, Pinto SE de S, Batista AM, Viana RL. Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Phys Rev E* 2003;68(4):045202. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.68.045202> (4).
- [29] Pereira RF, Pinto SEDS, Lopes SR. Synchronization time in a hyperbolic dynamical system with long-range interactions. *Phys A* 2010;389(22):5279–86. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2010.06.051>.

ANEXO B – Artigo aceito



Contents lists available at [SciVerse ScienceDirect](http://SciVerse.ScienceDirect)

Physics Letters A

www.elsevier.com/locate/pla



Secure information transfer based on computing reservoir

R.M. Szmowski^a, F.A.S. Ferrari^a, S.E. de S. Pinto^{a,*}, M.S. Baptista^b, R.L. Viana^c

^a Department of Physics, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 84030-900, Ponta Grossa, Brazil

^b Institute for Complex Systems and Mathematical Biology, SUPA, University of Aberdeen, Aberdeen, United Kingdom

^c Department of Physics, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 9 August 2012

Accepted 15 January 2013

Available online xxxx

Communicated by A.P. Fordy

Keywords:

Chaotic coupled maps

Computing reservoir

Information transmission

Networks

Transfer entropy

ABSTRACT

There is a broad area of research to ensure that information is transmitted securely. Within this scope, chaos-based cryptography takes a prominent role due to its nonlinear properties. Using these properties, we propose a secure mechanism for transmitting data that relies on chaotic networks. We use a nonlinear on-off device to cipher the message, and the transfer entropy to retrieve it. We analyze the system capability for sending messages, and we obtain expressions for the operating time. We demonstrate the system efficiency for a wide range of parameters. We find similarities between our method and the reservoir computing.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

A communication system is a device whose purpose is to convey a message between spatially distinct locations. Schematically, there are five elements in any communication system, namely: an emitter, an encoder, a transmission channel, a decoder, and a receiver [1]. The encoder handles the message, so it passes through the channel, and the decoder carries out the reverse process. In order to be practical and safe, the construction of a communication system may require other components [2].

A major concern of communication is the security in data transmission. In many cases, the speed and reliability for transmitting a message with low probability of errors is not enough, but also the transmission has to be carried out in an extremely secure way. In 1949, C.E. Shannon took a decisive step toward showing that if the length of the key is not an inconvenience, a message can be securely sent [1]. In a communication system, traditional cryptography functions in the software level rather than in the high speed physical level. Besides, security requires the use of ergodic and mixing transformations also in the software level. In the early 1990s an attempt was made to show how to use chaos synchronization to create a secure communications systems [3,4]. This kind of synchronization has enabled one to create a fast cryptographic system that operates in the physical (hardware) level of

the communication system. Besides, chaotic systems are naturally ergodic and mixing, which provides security. This initial idea was shown to be insecure [5]; however, the complexity of nonlinear systems enables other approaches. On account of this, different communication systems based on chaos synchronization have been proposed and investigated [6,7]. In general, such systems assume chaotic dynamics for both the decoder and receiver. Thus, the encoder codifies a message using some property of the chaotic signal and, after being transmitted, the message is decoded by the receiver, which is synchronized to the emitter [8].

An eavesdropper trying to determine the parameters of a cryptographic system will always make an error. If the dynamics of the system is chaotic, a small error grows exponentially what makes difficult to decrypt the intercepted message [9–14], if the decoding relies on a receiver that is exactly identical to an emitter. This is one of the properties that made chaos-based cryptosystems popular.

Synchronization offers a communication system where information is transmitted and received in real time and that operates in physical level. However, the need for synchronization reduces the parameter range of the transmitter and receiver within which the system can be considered secure. For example, in [15] it was shown that receiver and emitter do not need to match for the retrieval of information.

A different approach to secure communication using coupled chaotic systems was presented by Hung and Hu [16]. In their method, a binary message is codified considering the coupling direction between chaotic maps on a ring. The receiver decodes the message, determining the transfer entropy [17] between

* Corresponding author.

E-mail addresses: desouzapinto@pq.cnpq.br, desouzapinto@gmail.com

(S.E. de S. Pinto).

0375-9601/\$ – see front matter © 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2013.01.021>

succeeding maps. Indeed, for any interacting system, the transfer entropy can be used for determining which variables influence the dynamics of each other. The novel feature of this method is that it does not require synchronization for transmitting data; it only requires the determination of the transfer entropy. One inconvenience is that, as this quantity is statistically defined, many observations from the dynamics of the maps are necessary in order to decode the message. The observation interval needed by the receiver to determine the transfer entropy between the maps was taken as the relaxation time [16]. Therefore, the transmission of information through this mechanism requires operating times that are multiples of the relaxation time.

In this work, we propose an improvement over the previous method of Hung and Hu consisting of a communication system that uses both chaos synchronization as well as transfer entropy. While Hung and Hu's method uses only one network of coupled maps, our model contains two networks, the emitter and the receiver, the latter being a replica of the former. The transmission of a message through the system is accomplished by two stages that we call pre- and post-synchronization. Here, synchronization occurs just between the elements with the same label, in the emitting and receiving networks. Importantly, the elements in each network are out of synchronization. The use of desynchronized networks allows one to explore the good properties of synchronization, namely fast transmission of information, but without losing the parameter range for which the system is secure [18]. Mostly important, since that all nodes in the emitter network are desynchronous, the encoded signal generated by this network is composed by variables that are not correlated. In our method, it is strictly necessary that receiver is identical to emitter in order to decode the message. Since the transmitter is composed by a large network of desynchronous elements, it is very difficult to determine the parameters of this network by analyzing the transmitted signal. An eavesdropper cannot reproduce equally the emitter. Even if an intruder manages to find all values of the state variables from the emitter and receiver, if one does not know precisely the coupling function and intensity, one is not capable of decoding the message correctly. Assuming the coupling prescription to be secret keys of the communication system, if the key is altered after each communication, then security would be increased further.

In the stage of pre-synchronization, the networks start interacting directly with each other until every node of the emitting network becomes identical to other every node with the same label of the receiving network. Once the emitter and receiver networks are synchronized, the second stage starts transmitting and decoding the message. During this stage, the interaction between networks is deactivated and the message is encoded in a binary signal through an on-off device. The advantage of this procedure consists on transmitting N bits of information for each unit of the relaxation time. In other words, the communication device transmits N bits of information using a bit stream, which makes data transmission fast.

The proposed method relies on the fact that a long scalar quantity, composed by the trajectory of a uni-dimensional system (s) coupled in a master-slave fashion with an N -dimensional emitter network by a connecting matrix representing the binary message to be transmitted, carries information about these couplings and, therefore, the message. The message can only be decoded by a person that has complete knowledge of the emitter network. Imagine the system s as a node in a large dynamical network. With the exception of the node s , assume that the information about all other nodes is either known or can be precisely measured. Our method works because it is possible to determine, which are the nodes in this dynamical network that are connected to s by measuring the flow of information created by a connection. Hence, nodes coupled

to s influence its dynamical behavior. Furthermore, the receiver uses the transfer entropy to decode the message.

The fundamentals behind the success of our cryptographic method share similarities with one possible way in which the information is believed to be processed and transmitted in the brain. Reservoir Computing (RC) [19] is a machine-learning paradigm employed to retrieve from a dynamical network, the reservoir (the "brain"), information of an external perturbation driving it, input. The assumption behind RC is that the information about the input is spread out all over the network, and reliable retrieval of it can be accomplished by making a weighted average from the trajectories of some selected nodes of the reservoir, the output. Discovering which nodes should be selected is a remarkable task that can be resolved by a learning process whose purpose is to find an approximate match between input and output. In summary, one hopes to find the connecting topology between the reservoir and output (for a given random connecting topology between the input and the reservoir), such that the output matches the input. It has been recently demonstrated that RC can be performed by a reservoir composed by a single dynamical node operating as if it were a complex system [20]. In order to make the analogy between RC and the proposed cryptographic method, imagine the system s functioning as the reservoir, the emitter network being responsible to produce the input, the connecting topology between the input and s is given by the message, and the output is generated by the receiver network, which in our method equals the input in the post-synchronization stage. Similarly, to RC, which considers that the input perturbs any random set of nodes in the reservoir, the proposed cryptographic method works regardless of how is the connecting topology between the input and s , the message. Any random message can be decoded by whom has confidential information. The main assumption for the success of RC lies behind the belief that the reservoir stores information about the perturbation experienced by it. According to this analogy, we argue that the state of the reservoir stores specific information about the way how it is disturbed. In contrast to RC, that aims at discovering the connecting topology between the reservoir and output, in the proposed cryptographic method it is the connecting topology between input and the reservoir, the message that needs to be revealed. Finally, in RC input and output only roughly match, whilst in our method, they need to match perfectly; otherwise, the message cannot be decoded. Therefore, this analogy allows one to interpret the encoding system s as a sort of reservoir that has memory about the message, i.e., the way it is being perturbed.

This work is organized as follows: in Section 2, we describe the communication device based on both chaos synchronization and transfer entropy analysis. Section 3 describes the pre-synchronization stage, computing the synchronization time of a lattice of coupled piecewise-linear chaotic maps. In Section 4 we describe the post-synchronization stage, determining the relaxation time of the system. Section 5 examines an example of data transmission through this mechanism. The last section is devoted to our conclusions.

2. Description of the communication mechanism

Consider the emitter (E) and receiver (R) networks as two identical coupled map lattices composed by N sites each one [21–23]. The number of sites N is defined according to the amount of bits in a message that will be transmitted. If we assume the message as a binary sequence $m = \{m^{(1)}m^{(2)}, \dots, m^{(N')}\}$ of length N' , with $m^{(i)}$ equal to 0 or 1, N is equal to the number of elements belonging to this sequence, this is $N = N'$. The state of the E and R networks, at each discrete time n , is defined by the vectors $\mathbf{e}_n = (e_n^{(1)}, e_n^{(2)}, \dots, e_n^{(N)})^T$ and $\mathbf{r}_n = (r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \dots, r_n^{(N)})^T$, re-

spectively, with $e_n^{(i)}$ and $r_n^{(i)}$ corresponding to a state variable $z \in \Omega$ whose time evolution is governed by a chaotic map $f: \Omega \mapsto \Omega$, with $\Omega \subset \mathbb{R}$.

There have been investigations of chaos synchronization between replicas of coupled map networks using continuous maps [24–26]. Based on such previous investigations we can restrict our analysis to continuous maps f over the set Ω . In particular, we focus on the piecewise-linear tent map $f(z) = 1 - 2|z - 0.5|$ [27].

Besides the individual dynamics, the sites in each network are submitted to a coupling prescription. This intra-network coupling is arbitrary, but, for transmitting and sending a message correctly both E and R networks must be taken as identical, sharing the same coupling prescription and parameters. So, our communication system uses a symmetric private key. Here we consider a Laplacian-local intra-network coupling with periodic boundary conditions and random initial conditions:

$$F(z^{(i)}) = (1 - \varepsilon)f(z_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(z_n^{(i-1)}) + f(z_n^{(i+1)})], \quad (1)$$

where $z^{(i)} = z^{(N+i)}$ represents the state variable of the i -th site ($i = 1, \dots, N$) and $\varepsilon \in [0, 1]$ stands for the strength of intra-network coupling in each network.

The transmission data process between E and R networks is composed by two stages: the pre- and post-synchronization. When we refer to synchronization we mean the process in which $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_n$ for all n . The components of each state vector are necessarily not equal. If all maps of a network mutually synchronize, then the dynamics of the network, given by Eq. (1), reduces to the dynamics of an uncoupled map. This is an undesirable feature for the point of view of the secure communication, since an intruder could determine the network state from knowing the state of only one site, that would endanger the security of the transmission. Thus, in order to avoid mutual synchronization in each network, we will assume that intra-network coupling intensity is sufficiently weak, which increases the dimension of the emitter.

3. Pre-synchronization stage

A way of synchronizing the state vectors of the E and R networks is to assume an interaction between them. This inter-network coupling may be unidirectional or bidirectional. In the first case, also known as master-slave coupling, one network influences the dynamics of the other but is not influenced by the latter; while, in the second case, both networks influence and are influenced by each other. We will take here the master-slave coupling, E as the master and R as the slave networks, such that the dynamics of the system is described by

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(i)} &= F(e_n^{(i)}), \\ r_{n+1}^{(i)} &= (1 - \gamma)F(r_n^{(i)}) + \gamma F(e_n^{(i)}), \end{aligned} \quad (2)$$

in which γ is the strength of the inter-network coupling. Fig. 1 illustrates the system described by Eqs. (1) and (2). Each site is represented by a disc and the lines indicate the connections among them. Note that the E-sites interact with their neighbors inside the E-network, and R-sites interact with their neighbors inside the R-network (intra-network connections are bidirectional). However, the sites of E influence a corresponding site of R and its nearest neighbors, since the inter-network connections are unidirectional.

The coupling remains active while the networks do not synchronize with each other. When this occurs the network E stops sending information about its state variables. Since the synchronization of the E and R networks marks the end of the first stage of the process, we have to identify when it occurs. We use as a synchronization diagnostic, the synchronization error average, given by

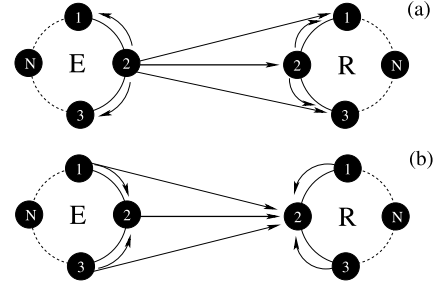


Fig. 1. Schematic diagram of the connections between corresponding sites (labeled 2) of two networks (E: emitter; R: receiver) with Laplacian-local intra-network coupling and a master-slave inter-network coupling. (a) Site 2 in both networks has outgoing intra-network coupling. Outgoing inter-network coupling is described by site 2 of E coupled to sites 1, 2, and 3 of R; (b) Site 2 in both networks has incoming intra-network coupling. Incoming inter-network coupling is described by site 2 of R coupled to sites 1, 2, and 3 of E.

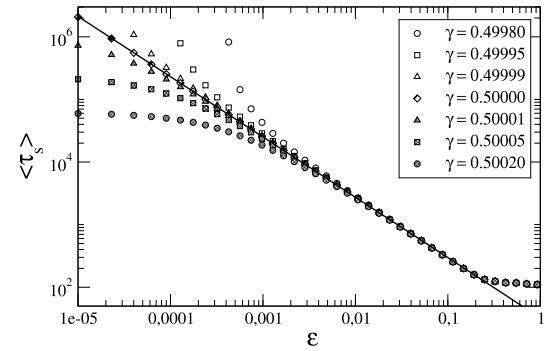


Fig. 2. Average synchronization time as a function of the intra-network coupling parameter ε for different values of the inter-network coupling parameter γ . The solid line is a least squares fit with slope -1.0 .

$$w_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_n^{(i)} - r_n^{(i)}|. \quad (3)$$

If the state vectors of E and R networks are synchronous we have $w_n = 0$, otherwise $w_n > 0$. The synchronization time τ_s is the time it takes for this average error to be less than 10^{-14} over a time window of 1000 consecutive iterations of the system.

In order to make the $\mathbf{e}_n$ and $\mathbf{r}_n$ vectors identical we need to choose the γ and ε parameters in such a way that they allow synchronization. In the particular case in which $\varepsilon = 0$, synchronization is just observed when $\gamma > \gamma_c = 1/2$. For an inter-network coupling strength of $\gamma = 1/2 \pm \delta$, we investigated the synchronization time τ_s between the networks as a function of the intra-network coupling strength ε . Fig. 2 shows the average synchronization time as a function of the intra-network coupling strength for 100 different randomly chosen initial conditions, $N = 21$ and for different values of δ . We see that, for $\gamma = 0.5$ ($\delta = 0$) and $\varepsilon < 0.3$, the average synchronization time scales with ε as a power-law

$$\langle \tau_s \rangle = C \varepsilon^{-\alpha}, \quad (4)$$

in which C and α are obtained by the best fit of the points. In the case presented we have the following values: $\alpha = 1.018$ and $C = 32.23$. Considering networks of different sizes, we found that $\alpha \approx 1.0$ while C depends on the value of w from which the networks are considered synchronized, more specifically, $C = \ln w^{-1}$. Even though this relation, in general, is not a power-law for any

Table 1
XOR true table.

Message	0	0	1	1
Keystream	0	1	0	1
XOR	0	1	1	0

Table 2
Cipher and decipher operations.

Plain Text	$\oplus$	Keystream	=	ciphertext
ciphertext	$\oplus$	keystream	=	Plain text

value of ε , it can be used nevertheless to estimate the synchronization time between the networks. In the following we will consider just the case for $\varepsilon \leq 0.1$ and, thus, Eq. (4) allows us to estimate the time it takes for the coupled networks to mutually synchronize.

4. Post-synchronization stage

In the previous section, we showed how to synchronize the networks E and R by controlling the inter-network coupling parameter γ . Here, we will describe how to convey a particular message m between E and R in a safe and efficient way. A necessary condition is that both networks remain synchronized during all the process, otherwise the receiver will not be able to read the message correctly.

Remember that we consider the networks to be synchronized whenever the synchronization error w_n is less than a tolerance fixed at 10^{-14} . In order to keep the network synchronized we truncate the state variables of both E and R such that we get rid of differences $o(w)$ less than 10^{-14} . Then we turn off the inter-network coupling, since it is no longer necessary for keeping the networks synchronized. Indeed, E and R being identical networks, if $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_n$ at a given instant $n = \tau_s$ then they remain synchronized for all $n > \tau_s$.

After the inter-network coupling is switched off the second stage of the communication process begins, in which we transmit the desired message. To compare our method with traditional cryptography, we briefly introduce the famous Vernam cipher [28], a symmetrical key cipher where plain text digits are combined with a keystream. This combination produces a ciphertext using the operation XOR, symbolized by $\oplus$, whose true table is presented in Table 1. The operation is reciprocal: one uses an identical keystream both to encipher plain text to ciphertext and to decipher ciphertext to yield the original plain text (Table 2).

According to Shannon, for a cipher to be considered secure it must satisfy the following conditions: (i) the keystream must have at least the same length of the message, (ii) is changed at every communication, and (iii) binary symbols of keystream must be randomly decorrelated, then cipher is proven to be secure [2].

In our method, the XOR transformation is a sophisticated non-linear transformation. Similarly to the Vernam cipher, the size of the emitter network is equal to the length of the message. The emitter network has a role similar to the keystream in the Vernam cipher method. Finally, the requirement that a keystream must have decorrelated symbols is analogously reproduced in our method by having decorrelated nodes in the emitter network.

We introduce a discrete-time dynamical system $S: \Omega \mapsto \Omega$ that is responsible for encoding the message in the signal consisting of an orbit of the system S . The map S defines the value of the signal s_n in each time instant associating the message characters to the state variables of the emitter network through an on-off device. If the i -th element of the message m , denoted as $m^{(i)}$, has a binary value of 1, then $e_n^{(i)}$ influences the dynamics of s_n (mode-on), whereas if $m^{(i)} = 0$, then $e_n^{(i)}$ does not influence the signal

dynamics (mode-off). Moreover, the dynamics of the signal is given by the following map

$$s_{n+1} = S(s_n) = (1 - \beta)s_n + \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^N e_n^{(i)} m^{(i)}, \quad (5)$$

in which $\beta \equiv (N - 1)/N$ and $\eta = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$ is a normalization factor. Given a randomly chosen initial condition s_0 the iteration of the map S yields a chaotic orbit $\{s_n\}_{n=0}^\infty$. The map S itself is not chaotic but, since it is driven by $e_n^{(i)}$, that it is itself chaotic, the orbit $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ results chaotic as well.

Notice that the magnitude of the signal is not a feature of the message, it is rather a feature of the dynamics of each element of the emitter network (E). Consequently, if the system initiates from different initial states, the same message will generally result in different signals. On the other hand, it may happen that two different messages result in the same signal for a limited and usually short period of time, however the signals will eventually diverge with time.

For recovering the message contained in the signal $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ the receiver network R first verifies which state variables $e_n^{(i)} = r_n^{(i)}$ influence and which do not influence the s_{n+1} . Then the receiver network associates the symbol 1 to the former case and 0 to the latter case, observing the indexes of the sites in the network. The transfer entropy is the dynamical tool that allows the receiver network R to accomplish such verification. The transfer entropy $T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}}$ vanishes if and only if the dynamics of s_{n+1} does not depend on the dynamics of $r_n^{(i)}$, so if the transfer entropy is nonzero there is a statistical coherence between these signals. It is defined as

$$T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}} = \sum p(s_{n+1}, s_n, r_n^{(i)}) \log \frac{p(s_{n+1} | s_n, r_n^{(i)})}{p(s_{n+1} | s_n)}, \quad (6)$$

where $p(\cdot, \cdot, \cdot)$ and $p(\cdot | \cdot)$ mean the joint and conditional probabilities, respectively. These probabilities may be calculated using a box counting algorithm or a kernel estimator [17]. In this work we use the former procedure by considering the following coarse-grained variables

$$\tilde{x} = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < x \leq 1/2, \\ 1, & \text{if } 1/2 < x < 1, \end{cases} \quad (7)$$

in such a way that, instead of using the variables $r_n^{(i)}$, s_n and s_{n+1} we use the binary variables $\tilde{r}_n^{(i)}$, $\tilde{s}_n$ and $\tilde{s}_{n+1}$.

Since there are only eight possible binary states, the summation in Eq. (6) has only eight terms. Besides, instead of working with the signal s_n itself, it suffices to consider the binary variables $\tilde{s}_n$ without risk of turning the decoding process unsafe. In the binary form the signal can be transmitted through any public channel. In the following we explain how the determination of the transfer entropy of each variable from the receiver network to the signal enables the receiver to decode the message.

When the receiver network computes the transfer entropy to recover the message encoded in the signal, it hardly will achieve a vanishing contribution due to the fluctuations. Moreover the receiver network sites coupled with the signal yield a transfer entropy value much higher than those uncoupled sites. A high-pass filter is used to enable the receiver network to correctly recover the message. Let m be the message sent by the emitter network and m' be the message recovered by the receiver network. The elements of the received message are given by:

$$m'^{(i)} = \Theta(T_{r_n^{(i)} \rightarrow s_{n+1}} - \sigma(T)), \quad (8)$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside unit step function and $\sigma(T)$ is the transfer entropy standard deviation of all network sites of the R

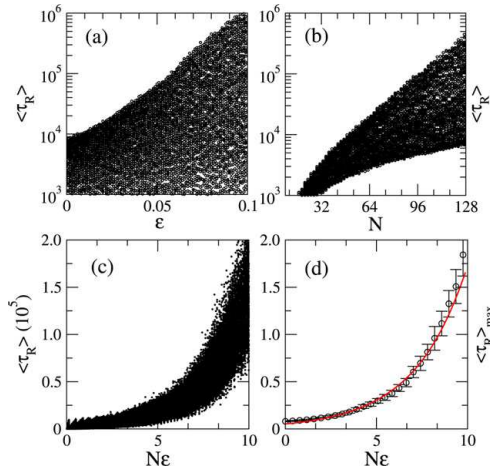


Fig. 3. Average relaxation time as a function of (a) intra-network coupling strength ε , (b) message size N , (c) $N\varepsilon$, for $N_m = 100$ different messages, each of them with $N_0 = 100$ initial conditions. (d) The upper limit for the relaxation time. The red line stands for Eq. (9). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this Letter.)

network. Hence the received message is a string of 0's and 1's if the transfer entropy of the corresponding network site is less or greater than one standard deviation of T .

The decoding process performed by the receiver network is not instantaneous, but requires a finite time interval during which a sufficiently large amount of binary signal is sent, in order to correctly decode the message. We define the relaxation time τ_R the time it takes for R to correctly decode the message, i.e. such that $m' = m$ [16]. We have observed that the value of τ_R depends on the message, for a given set of parameters. Hence we work with the average relaxation time $\langle \tau_R \rangle$, where the average is taken with respect to a number N_m of randomly chosen messages.

In numerical simulations, we consider a number $N_m = 100$ of different messages m consisting of randomly chosen strings of bits. The whole set of average relaxation times is plotted as a function of the intra-network coupling strength ε [Fig. 3(a)] and the network size N [Fig. 3(b)], where we verified that $\langle \tau_R \rangle$ grows with both parameters. So, it is suggestive to analyze the τ_R -dependency with respect to the product $N\varepsilon$ [Fig. 3(c)], which shows a growth whose upper bound is an exponential curve

$$\langle \tau_R \rangle = K e^{\kappa N\varepsilon}, \quad (9)$$

where $K = 4.9 \times 10^3$ and $\kappa = 1/3$ were obtained by fitting the maximum relaxation time points, presented in Fig. 3(d).

During the transmission of the message it may well happen that some amount of noise corrupts the transmitted signal. It is thus important to verify if the receiver network remains able to decode correctly the message in the presence of external noise, within a time of the order of relaxation time. We consider that the signal s_n is subjected to a Gaussian noise of zero mean and variance σ . The bit error ratio (BER) is the fraction of erroneously transmitted bits with respect to the total number of bits in the message [29]. This ratio was computed as an average over $N_m = 500$ randomly chosen messages of fixed length $N = 51$. In Fig. 4 we plot the bit error ratio (BER) as a function of σ and the intra-network coupling strength ε . Note that, for $\sigma < 0.1$ BER nearly vanishes for all values of ε and, thus, there is no difference between the decoded and emitted messages for a time $n = \langle \tau_R \rangle$. Even

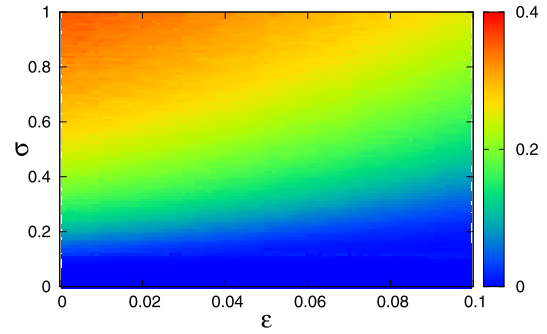


Fig. 4. Colors represent the bit error ratio as a function of the intra-network coupling strength and the noise level. The values represent an average over 500 randomly chosen messages of length 51 bits. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this Letter.)

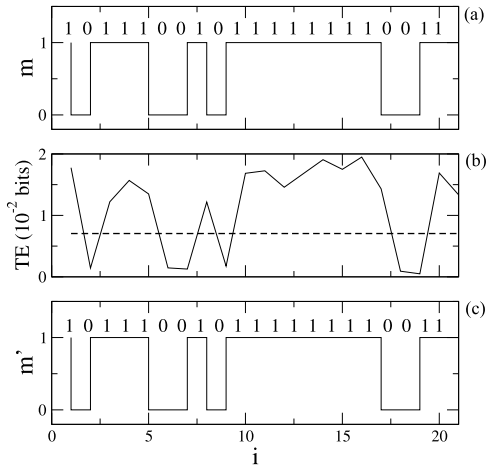


Fig. 5. (a) 21-bit message sent; (b) Transfer entropy between $\hat{r}_n^{(t)}$ and $\hat{s}_n$; (c) Message received.

for a stronger noise level the BER was found to be small, showing that the communication process is robust in presence of noise.

5. Application to a specific example

We now exemplify the use of the communication system described in the previous sections to transmit a specific binary message. Let us suppose that the message contains $N = 21$ bits and is given by the binary string $m = 1011100101111110011$ [Fig. 5(a)]. Hence both the emitter and receiver networks should have $N = 21$ sites. Besides having the same number of sites the networks should share a symmetric security key that is represented by the intra-network coupling strength ε , and the inter-network, from which we calculated the time to synchronize. The value of the inter-network coupling strength has been fixed as $\gamma = 1/2$. Assuming a value $\varepsilon = 0.1$, Eqs. (4) and (9) result in $\langle \tau_s \rangle = 323$ and $\langle \tau_R \rangle \approx 10^4$, respectively, for the average synchronization and relaxation times. Since these are average values, we can consider here $\tau_s = 10^3$ and $\tau_R = 2 \times 10^4$.

We couple the E and R networks following Eq. (2) and during $n = \tau_s$ iterates in the first stage of the process. At this point we

expect to obtain a synchronization error $w_n < 10^{-14}$ and, if so, we truncate the state variables such that $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_n$ and switch off the inter-network coupling. In the beginning of the second state we use Eq. (5) to obtain a signal s_n which is transformed by Eq. (7) in a binary sequence $\tilde{s}_n$.

The receiver network keeps this binary signal during subsequent $n = \tau_R$ iterates and, through Eq. (6), computes the transfer entropy for all network sites [Fig. 5(b)]. Finally, using Eq. (8) as a high-pass filter, the receiver network decodes the message sent [Fig. 5(c)], which is clearly identical to the sent message. We remark that this process is extremely safe, since even if an eavesdropper would be able to snatch the signal that has been sent, the probability of this eavesdropper to strike all the variables $r_n^{(i)}$ during the time τ_R would be $P = 2^{-N\tau_R} = 2^{-63000}$. This is also the probability of striking the message sent, which is utterly insignificant.

6. Conclusions

We proposed in this work a robust and safe device for transmitting binary messages using replicas of coupled map networks. The communication system uses transfer entropy and as a consequence allows the construction of a communication system where information can only be decoded if the emitter and receiver are completely synchronous and they are exactly identical. Since nodes in each network are not synchronous, that enables the generation of a decorrelated encoded signal. This provides an extra security for the communication system, since it makes virtually impossible for an eavesdropper to discover the dynamics of the emitter.

In addition, imagine that the eavesdropper is very clever and it knows exactly the time the emitter and the receiver network take to synchronize. If it does not know exactly the connecting topology of the receiver network, it will not maintain synchronization. The eavesdropper will also not be able to verify the existence of synchronization, since all nodes in its network will be desynchronous. Suppose now that the eavesdropper knows all the secret keys (intra and inter couplings and connecting topology). Still all that is needed for the communication system to regain security is that the emitter and the receiver changes at a given time their network connecting topology, after the message has started being transmitted. This will maintain synchronization between E and R, but will make the network of the eavesdropper to become desynchronous. Both networks must have the same size N as the message itself (in number of bits).

The proposed system works in two stages: in the first one we synchronize the emitter and receiver networks. Only emitter and receiver know how much time it takes to achieve synchronization. After the first stage the inter-network coupling is switched off, but the networks remain synchronized.

In the second stage we encode a given message into a signal which is read by the receiver network using the transfer entropy between the receiver network and the signal, with a high-pass filter based on the standard deviation of the transfer entropy. The message can be decoded after a relaxation time. We obtained an expression for an upper bound of the relaxation time as a function of the intra-network coupling strength and the message size. Hence, given a message of arbitrary size the intra-network coupling strength can be chosen in order to minimize the transmission time.

The proposed device is similar to a method developed by Hung and Hu [16] but differs from it in this way: in our method we compact N bits of the message into a bit-stream of the signal, whereas

in the Hung and Hu method every bit of the message is encoded in a different bit of the signal. Hence our method represents a considerable increase in the channel capacity attainable.

We considered a specific example to test this method and, comparing the message read by the receiver with the message emitted, we verified that the method is reliable. Besides this advantage, the method we propose is robust since, even in presence of external noise, the bit error ratio can be kept in sufficiently low levels, varying the intra-network coupling and noise level.

Finally, we shown that even if an eavesdropper could intercept the signal, it could not strike the message (more precisely, the probability of it is negligible). We suggest that other continuous maps as well as other intra- and inter-network couplings may also be used. Some tests with other intra-network couplings have suggested us that, for instance, the synchronization time power-law behavior remains unaltered. This was also verified when considering the logistic map for the dynamics of each network site.

Acknowledgements

This work has been made possible thanks to the partial financial support from the following Brazilian research agencies: CAPES, CNPQ and Fundação Araucária. M.S.B. acknowledges NRP.

References

- [1] C. Shannon, W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, The University of Illinois Press, 1963.
- [2] C. Shannon, *Bell System Technical Journal* 28 (1949) 656.
- [3] T. Pecora, L.M. Caroll, *Physical Review Letters* 64 (1990) 821.
- [4] A. Cuomo, K.M. Oppenheim, *Physical Review Letters* 71 (1993) 65.
- [5] G. Perez, H. Cerdeira, *Physical Review Letters* 74 (1995) 1970.
- [6] W. Kinzel, A. Engler, I. Kanter, *Philosophical Transactions of The Royal Society A* 368 (2010) 379.
- [7] P. Stavroulakis (Ed.), *Chaos Applications in Telecommunications*, CRC Press, New York, USA, 2006.
- [8] B. Jovic, *Synchronization Techniques for Chaotic Communication Systems*, Springer, Auckland, New Zealand, 2011.
- [9] L. Kocarev, G. Jakimoski, T. Stojanovski, U. Parlitz, Paper presented at the Conference on the International Symposium on Circuits and System, 1998.
- [10] M. da Silva Baptista, *Physics Letters A* 240 (1998) 50.
- [11] G. Alvarez, S. Li, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16 (2006) 2129.
- [12] E. Alvarez, A. Fernandez, J. Garcia, P. Jimenez, A. Marciano, *Physics Letters A* 263 (1999) 373.
- [13] S. Li, G. Chen, K.E.A. Wong, *Physics Letters A* 332 (2004) 368.
- [14] L. Kocarev, *IEEE Circuits and Systems* 1 (2002) 6.
- [15] M. Ding, E. Ott, *Physical Review E* 49 (1994) R945.
- [16] C. Hung, Y.C. Hu, *Physical Review Letters* 101 (2008) 244102(4).
- [17] T. Schreiber, *Physical Review Letters* 85 (2000) 4.
- [18] G. Vidal, M.S. Baptista, H. Mancini, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22 (10) (2012), <http://dx.doi.org/10.1142/S0218127412502434>.
- [19] H. Jaeger, Technical Report GMD, German National Research Center for Information Technology, Report 148, 2001.
- [20] L. Appeltant, M. Soriano, G. Sande, *Nature Communications* 2 (2010) 468.
- [21] J. Crutchfield, K. Kaneko, *Phenomenology of Spatio-Temporal Chaos*, vol. 1, World Scientific, 1987.
- [22] D. Vasconcelos, R. Viana, S. Lopes, A. Batista, S. Pinto, *Physica A—Statistical Mechanics and its Applications* 343 (2004) 201.
- [23] R.F. Pereira, S.E. de S. Pinto, S.R. Lopes, *Physica A—Statistical Mechanics and its Applications* 389 (2010) 5279.
- [24] V. Ahlers, A. Pikovsky, *Physical Review Letters* 88 (2002) 254101(4).
- [25] M. Cencini, C. Tessone, A. Torcini, *Chaos* 18 (2008) 037125.
- [26] I. Szendro, M. Rodrigues, J. López, *Europhysics Letters* 86 (2009) 2008.
- [27] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1993.
- [28] G.S. Vernam, *Journal of the IEEE* 55 (1926) 109.
- [29] P. Stavroulakis (Ed.), *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New Jersey, USA, 2006.