

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS - FÍSICA

MICHELE MUGNAINE

Transporte e simetria em sistemas Hamiltonianos não *twist*

PONTA GROSSA
2019

MICHELE MUGNAINE

Transporte e simetria em sistemas Hamiltonianos não *twist*

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Física ao Programa de Pós Graduação
em Ciências, área de concentração Física, na Uni-
versidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

PONTA GROSSA

2019

M951 Mugnaine, Michele
 Transporte e simetria em sistemas Hamiltonianos
 não *twist*/ Michele Mugnaine. Ponta Grossa, 2019.
 76f.

 Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de
 concentração - Física), Universidade Estadual de
 Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech
 Junior

 1. Condição *twist*. 2. *Turnstiles*. 3. Simetria.
 I. Szezech Junior, José Danilo. II. Universidade
 Estadual de Ponta Grossa - Mestrado em Ciências.
 IV. T.

CDD: 515.39

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos – CRB 9/986

TERMO DE APROVAÇÃO

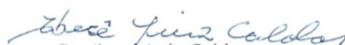
Michele Mugnaine

“Transporte e simetria em sistemas Hamiltonianos Não Twist”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Dr. José Danilo Szezech Junior
Departamento de Matemática, UEPG/PR


Dr. Iberé Luiz Caldas
Instituto de Física, USP/SP


Dra. Kelly Cristiane Iarosz
Instituto de Física, USP/SP

Ponta Grossa, 21 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e a minha irmã por todo apoio desde o vestibular até a conclusão desta dissertação.

Aos meus amigos de dentro e fora da UEPG por toda ajuda, apoio, conversas e momentos de descontração durante todo o percurso.

Ao professor José Danilo Szezech por toda construção de conhecimento, pela paciência, pela orientação e pelos conselhos que vou levar para toda minha vida acadêmica.

A todos os colegas da 105 pelo acolhimento, companheirismo, por toda ajuda e apoio.

Ao CNPq e a Fundação Araucária pelo suporte financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Temos
um mapa do universo
para micróbios,
temos
um mapa de um micróbio
para o universo.
(Miroslav Holub)

RESUMO

O mapa padrão não *twist* é um exemplo simples e geral de sistemas Hamiltonianos que violam a condição *twist*. Sua aplicação abrange fenômenos associados a plasmas, dinâmica celeste, guias de onda, aceleradores de partículas, entre outros. A presença de cadeias gêmeas e da curva *shearless*, neste mapa, tem uma grande influência sobre as barreiras presentes no espaço de fase e sobre o transporte observado através dele. Neste trabalho, fornecemos uma conexão entre os mecanismos de *turnstile*s e o cenário de intersecção entre variedades das cadeias gêmeas com o transporte no espaço de fase, uma situação ainda não completamente entendida em sistemas Hamiltonianos não *twist*. O alto transporte está relacionado com o cenário de *intercrossing*, com a proximidade dos pontos homoclínicos e heteroclínicos das duas cadeias e com os *turnstile*s agindo como um mecanismo de transporte, como uma passagem da trajetória de uma região a outra no espaço de fase. Já o transporte baixo é representado pelo cenário oposto, temos um cenário de *intracrossing* com uma distância maior entre os pontos de intersecção e os *turnstile*s agindo como mecanismo de barreira de trajetórias. O mapa não *twist* é um mapa simétrico, sendo assim, não há uma direção preferencial para o transporte. Entretanto, a adição de uma nova perturbação na forma $c \sin(2\pi mx)$ é capaz de quebrar a simetria, para m par, e assim o transporte direcionado é um fenômeno possível. O mapa com esta nova perturbação é denominado mapa padrão não *twist* estendido e ele apresenta fenômenos interessantes como a quebra de simetria, transporte direcionado e a recuperação do cenário monotônico, cenário não observado no mapa não *twist* original.

Palavras-chave: condição *twist*, *turnstile*s, simetria

ABSTRACT

The standard nontwist map is a simple and general example of Hamiltonian systems that does not satisfy the twist condition. The map applications cover phenomenons related to plasmas, celestial mechanics, wave guides, particle accelerators and other examples. The presence of twin islands chains and the shearless curve has a big influence over barriers in the phase space and, consequently, over the transport through the space. In this work, we provide a connection between turnstiles, the manifolds intersection scenario and the transport in the phase space. This connection is still not completely understood in non twist Hamiltonian systems. The high transport is associated to the intercrossing scenario and how the homoclinic and heteroclinic points from different islands chains are close to each other and how the turnstiles act like a transport mechanism. The turnstile is the gate or the barrier to the trajectories from one region of the phase space to another. The low transport is represented by the opposite scenario, the intracrossing scenario has a larger distance between the intersection points. In this case, the turnstiles act as a trapping mechanism. The standard nontwist map is a symmetric map, i.e, there is not a preferential direction for the trajectories to follow. However, the addition of a new perturbation with a shape as $c\sin(2\pi mx)$ is able to break the symmetry, if m is even, and the directed transport is a possible phenomenon to exist in the phase space. The map with the new perturbation is called extended standard nontwist map and it features interested phenomenon as the symmetry breaking, directed transport and the recovery of the monotonic scenario, which is not present in the original nontwist map.

Keyword: twist condition, turnstiles, symmetry

LISTA DE SÍMBOLOS

H	Função Hamiltoniana
$\mathbf{q}$	Posição generalizada
$\mathbf{p}$	Momento generalizado
k_n	Número de graus de liberdade
d	Dimensão
E_{cin}	Energia cinética
U	Energia potencial
E	Energia
τ	Período
$\hat{T}$	Operador temporal
I	Momento angular do rotor pulsado
K	Parâmetro de perturbação do mapa padrão
θ	Ângulo para o mapa padrão
n	Número de iteradas
Ω	Frequência do toro
m	Número inteiro
γ	Número irracional
s	Período do toro
φ	Frequência angular
ω	Número de rotação
M	Mapa
λ	Expoente de Lyapunov
J	Matriz Jacobiana
Q	Matriz ortogonal
R	Matriz triangular
D	Matriz de derivadas
β	Ângulo da matriz ortogonal genérica
T_n	Transmissividade
N	Número de trajetórias
N_T	Número total de condições iniciais
A, B	Saídas estabelecidas
ε	incremento
f	Fração de incerteza
α	Coeficiente de incerteza
N_{cx}	Número total de caixas
N_C	Número de condições iniciais em uma caixa
p_{ij}	Probabilidade
S	Entropia total
N_A	Número de saídas
S_b	Entropia de bacia

S_{bb}	Entropia de borda de bacia
N_b	Número de caixas na borda
CC	Corrente de catraca
p	Momento linear
Υ	Ação
F	Função periódica
Θ	Ângulo
g	Função de ação
C	Constante
a	Parâmetro não monotônico (mapa padrão não <i>twist</i>)
b	Amplitude de perturbação (mapa padrão não <i>twist</i>)
W	Variedade
O	Ponto hiperbólico
P	Ponto homoclínico
PPI	Ponto principal de intersecção
T_S	Transformação de simetria
$I_{0,1}$	Involuções
$S_{0,1,2,3}$	Linha de simetria
$\mathbf{z}$	Ponto indicador
c	Amplitude de perturbação (mapa não <i>twist</i> estendido)
T_{acima}	Transmissividade acima
T_{abaixo}	Transmissividade abaixo

SUMÁRIO

Sumário	11
1 Introdução	11
2 Sistemas dinâmicos e transporte	16
2.1 Sistemas dinâmicos conservativos	16
2.1.1 Sistemas Hamiltonianos	17
2.1.2 Fluxos e mapas	17
2.1.3 O mapa padrão	18
2.1.4 Teorema KAM e teorema de Poincaré-Birkhoff	20
2.1.5 Número de rotação	23
2.1.6 Expoente de Lyapunov	25
2.2 Transporte no espaço de fase	27
2.2.1 Transporte em sistemas Hamiltonianos	28
2.2.2 Transmissividade	28
2.2.3 Bacias de escape	29
2.2.3.1 Dimensão de incerteza	30
2.2.3.2 Entropia de bacia e entropia de borda de bacia	31
2.2.4 Transporte direcionado	32
3 Mapa padrão não <i>twist</i>	34
3.1 O mapa e a condição <i>twist</i>	34
3.1.1 Mapa não- <i>twist</i> e a violação da condição <i>twist</i>	34
3.2 Transporte no espaço de fase	36
3.2.1 Transmissividade	36
3.2.2 Espaços de fase	37
3.2.3 Mecanismo de transporte: as variedades e os <i>turnstile</i> s	38
4 Barreiras, simetria e entropia para o mapa não <i>twist</i>	46
4.1 Simetria	46
4.1.1 Transformação de simetria e pontos indicadores	46
4.1.2 Espaço de parâmetros para a quebra da curva <i>shearless</i>	49
4.2 Bacias de escape	50
4.2.1 Entropia de bacia	52

4.2.1.1	Dimensão de Incerteza	52
4.2.1.2	Entropia de bacia e entropia de borda de bacia	54
5	Mapa padrão não <i>twist</i> estendido: quebra de simetria e transporte direcionado .	56
5.1	A extensão do mapa não <i>twist</i>	56
5.2	Espaços de fase	56
5.3	Quebra de simetria	57
5.3.1	Composição do mapa e linhas de simetria	57
5.3.2	Pontos indicadores	61
5.3.3	Quantificação da assimetria do sistema	62
5.4	Barreiras no mapa estendido	63
5.5	Quebra da última barreira	65
5.6	Transporte no espaço de fase	67
6	Conclusões	70
	Referências	73

1 INTRODUÇÃO

Em seu aniversário de 60 anos, Oscar II, rei da Suécia e da Noruega, propôs uma competição internacional que premiaria o estudioso que resolvesse e respondesse problemas matemáticos específicos e ainda sem solução ¹. Um entre os quatro problemas propostos era a prova matemática da estabilidade ou não-estabilidade do sistema solar. Este problema foi escolhido, estudado e solucionado por Jules Henri Poincaré que acabou levando o prêmio em 1889 ².

O problema escolhido pelo matemático francês era analisar a estabilidade de um sistema de n corpos que interagem entre si pela força gravitacional. Particularmente, Poincaré estudou o problema que envolvia 3 corpos e, devido à complexidade e à dificuldade de se obter a solução analítica para a equação diferencial referente, ele investigou as propriedades das soluções a partir de uma abordagem qualitativa utilizando técnicas geométricas e topológicas ². O resultado encontrado por Poincaré foi que as soluções em séries para o problema convergiam, logo, existia uma solução analítica para o problema. Porém, enquanto preparava o manuscrito para a publicação encontrou um erro que marcaria a história da mecânica clássica: era impossível encontrar uma solução analítica exata que descrevesse o sistema para uma condição inicial qualquer ³. De fato, apenas algumas condições particulares resultavam em soluções exatas e, para complementar, ele observou que pequenas diferenças nas condições iniciais produziam grandes diferenças do estado final: o sistema não era totalmente previsível ².

O resultado encontrado por Poincaré foi o primeiro indício de um novo comportamento imprevisível, uma ideia que contrariava o universo mecanicista e determinístico defendido por Sir Isaac Newton e outros cientistas da época ³. O pensamento científico defendido pelos deterministas era de um universo que funcionava como uma engrenagem, uma máquina confiável, perfeita e totalmente previsível: sob condições próximas a máquina do universo leva a resultados idênticos ⁴.

Poincaré contestou a ideia mecanicista do universo matematicamente e, anos depois, foi observado comportamentos imprevisíveis e irregulares na natureza, em especial em sistemas celestes. Como exemplo, podemos citar o mais clássico deles: Hipérion, a lua incerta de Saturno. Hipérion é uma lua com uma forma elíptica irregular que tem uma órbita bem estabelecida, precisa e regular, mas, a sua rotação apresenta um padrão complexo e irregular ⁴. A lua de

Saturno é dita ser caótica e é uma consequência de vários fatores ⁵. A rotação de Hipérion obedece as leis determinísticas de Newton mas, devido a complexidade da interação gravitacional entre ela e os outros corpos celestes próximos, a regularidade é substituída pelo caos.

Um dos fatores que leva um sistema ao caos é o fenômeno de ressonância. De fato, este fenômeno é de grande importância em problemas da Mecânica e é a explicação para vários eventos naturais. Como exemplo, podemos citar as falhas nos anéis de Saturno e no cinturão de asteroides existente entre Marte e Júpiter ⁶. Para ambos os casos, temos corpos com órbitas definidas e a presença de corpos perturbadores. Quando a órbita destes corpos está em ressonância com os períodos dos agentes perturbadores, esta órbita é desocupada, gerando assim a falha ⁶. Outra consequência da ressonância é a captura dos cometas de Júpiter, como Oterma e Gehrels 3 ⁷. O que ocorre com estes corpos é a transição de órbitas: entre uma órbita externa a de Júpiter, geralmente com ressonância 3:2 *, para uma interna a ela, com ressonância 2:3 ⁷. O oposto também pode ocorrer, um cometa de uma órbita interna se mudar para uma órbita externa. As duas ressonâncias são conectadas por sua energia, o que justifica a transição entre estas órbitas ⁷. Durante esta transição, alguns cometas com uma energia próxima a de Oterma podem ser capturados por Júpiter ⁷.

Um outro exemplo de caos de grande interesse, principalmente na área de mecânica de fluídos, é a advecção caótica. A advecção, neste contexto, é interessante para acelerar o processo de homogeneização de uma mistura pela difusão molecular e ela é utilizada desde aplicações industriais, como a reologia que estuda as deformações da matéria e seu escoamento, até fluxos geofísicos ⁸. Neste caso, o caos é um componente desejável no sistema.

O estudo de sistemas conservativos perturbados exigiu uma evolução da matemática utilizada e aplicada para a análise de órbitas regulares nestes sistemas. Com a descoberta e demonstração do teorema KAM, o estudo deste movimento regular obteve uma base bem consistente ⁹. Kolmogorov começou o estudo para a convergência das soluções de sistemas perturbativos em 1954 ⁶. Sua investigação foi continuada por seu aluno Arnold, que em 1963 estendeu o estudo e deixou os resultados mais rigorosos, mas para sistemas Hamiltonianos contínuos. Para completar o estudo, Moser provou o teorema para a dinâmica discreta representada pelos mapas ⁶. Assim, Kolmogorov, Arnold e Moser construíram o teorema que leva o nome em sua homenagem, o teorema KAM, a principal contribuição da Mecânica Clássica do século XX. Em suma, o teorema afirma que sistemas conservativos sob efeito de uma perturbação externa

* Esta notação indica a razão entre as frequências dos dois corpos.

não tem todas suas órbitas regulares destruídas, algumas sobrevivem e coexistem com órbitas caóticas ^{10, 11}. A coexistência de caos com regularidade em sistemas conservativos é de grande interesse pois é presente em áreas como a astronomia, a física de plasmas, a meteorologia, a física estatística e em modelos complexos de sistemas químicos, biológicos e físico-químicos.

Porém, o teorema KAM não é válido para todos os sistemas. Para que ele seja válido, uma das condições necessárias é que o sistema satisfaça a condição *twist* [†] globalmente. Esta condição garante a monotonicidade [‡] de que um momentos canônicos grandes implicam em velocidades grandes ¹². Sistemas que violam a condição *twist* são denominados não *twist* e eles são amplamente utilizados para descrever linhas de campo magnético no plasma, fenômenos astronômicos, entre outros exemplos ^{12, 13}. Uma vez que o teorema KAM é violado, novos fenômenos são observados nestes sistemas como a existência de *meanders*, que pode ser traduzido como sinuosidade, e da curva *shearless* [†], a curva responsável pela quebra da monotonicidade no espaço de fase. Outros fenômenos exclusivos de cenários não *twist* são a reconexão e a colisão de separatrizes no espaço de fase, assim como a existência de cadeia de ilhas gêmeas.

O comportamento universal dos sistemas que violam a condição *twist* pode ser representado pelas características do mapa padrão não *twist*, proposto por Morrison e Castillo-Negrete, em seu trabalho publicado em 1993. Este mapa é um mapa genérico, conservativo e perturbado, que viola a condição *twist* e apresenta a reconexão de separatrizes e a reconexão de camadas estocásticas, fenômenos não observados em sistemas *twist* ¹⁴.

O transporte pelo espaço de fase e seu mecanismo são bem estabelecidos e conhecidos para sistemas dinâmicos *twist*, mas, para sistemas não *twist*, o fenômeno de transporte ainda é estudado e de grande interesse. Na primeira parte desta dissertação, buscamos entender como ocorre o transporte no mapa padrão não *twist* e, ainda mais, qual é a diferença entre situações de alto e baixo transporte. A análise do transporte é feita baseada no conceito de transmissividade e do comportamento das trajetórias no espaço de fase em relação aos mecanismos de *turnstile* [§] e também associando as bacias de escape ao transporte.

O estudo sobre transporte em sistemas Hamiltonianos *twists* teve um grande destaque no trabalho de Meiss, MacKay e Percival, em 1984 ¹⁵. Neste trabalho, eles mostraram que o transporte das trajetórias caóticas através das barreiras parciais que separavam o espaço em duas regiões ocorre pelos mecanismos de *turnstile*, que são formados pelas variáveis instáveis e

[†] Este termo é específico da área, evitaremos utilizar a tradução.

[‡] Termo utilizado para representar algo que tem apenas um comportamento: crescente, decrescente, entre outros.

[§] Tradução: roleta. Como é um termo próprio da área, utilizaremos o termo em inglês.

estáveis do sistema^{9, 16}. Eles também descobriram que é possível prever tempos de confinamento a partir destes mecanismos de transporte⁹.

Para sistemas conservativos abertos com saídas específicas, o estudo do transporte também engloba o caminho que a trajetória segue e a saída escolhida. Sanjuán *et al* propuseram a adaptação de bacias de atração de sistemas dissipativos para bacias de escape em sistemas conservativos, definindo as bacias de escape como o conjunto de condições iniciais que escapam por uma determinada saída¹⁷. As entropias definidas e associadas às bacias de escape nos informam sobre a incerteza do sistema assim como elas se relacionam com a imprevisibilidade das posições finais das trajetórias¹⁷.

Uma propriedade importante do mapa padrão não *twist* é a sua simetria vertical no espaço de fase. Devido a isso, o transporte para cima ou para baixo são iguais, não há uma direção preferencial. Entretanto, quando há a quebra de alguma simetria, o transporte direcionado se torna um fenômeno possível. A este fenômeno damos o nome de catraca (do inglês, *ratchet*). Vários estudos sobre este fenômeno foram realizados nos últimos anos pois ele fornece explicações para vários fenômenos químicos, físicos e biológicos como os motores moleculares, migração de bactérias, transporte de fluídos, fluxos de densidade entre outros exemplos^{18, 19, 20, 21}.

Na segunda parte desta dissertação buscaremos estabelecer a relação entre simetria e transporte direcionado para sistemas não *twist*. Para isso, estudamos o mapa padrão não *twist* estendido, proposto por Portela e colaboradores²² como uma expansão local de um mapa não *twist* global que descreve as linhas de campo magnético em um dispositivo de plasma toroidal na presença de um limitador ergódico magnético^{22, 23}. O limitador ergódico tem, como contribuição, uma nova perturbação externa responsável pela quebra de simetria e, conseqüentemente, pela presença do transporte direcionado.

A estrutura desta dissertação é dividida de maneira que no capítulo 2 apresentamos uma revisão sobre sistemas dinâmicos e as ferramentas utilizadas para analisá-los, como o número de rotação e o expoente de Lyapunov. Também fazemos uma breve exposição sobre os conceitos de bacia de escape, sobre as entropias associadas as bacias e o transporte direcionado. A primeira parte do nosso estudo está concentrada nos capítulos 3 e 4. No capítulo 3, apresentamos o mapa padrão não *twist* e estudamos o transporte pelo espaço de fase. Este estudo é baseado nos conceitos de transmissividade, variedades e *turnstile*s. Já no capítulo 4, abordamos a simetria do mapa não *twist* e o estudo das bacias de escape e entropias para este mapa. A segunda parte da dissertação está concentrada no capítulo 5, onde apresentamos a extensão do mapa não *twist*, as

consequências da presença e da influência da nova perturbação na simetria do sistema, na quebra de barreiras e, conseqüentemente, no transporte pelo espaço de fase.

Os resultados desta dissertação para o mapa padrão não *twist*, apresentado no capítulo 3, foram publicados na revista *Physical Review E* sob o título "Dynamical characterization of transport barriers in nontwist Hamiltonian systems". Este mapa também foi objeto de estudo no artigo "Recurrence-based analysis of barrier breakup in the standard nontwist map", desenvolvido em colaboração e publicado no periódico *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*.

2 SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSPORTE

Sistemas dinâmicos são sistemas que evoluem no tempo e são definidos por um conjunto de equações matemáticas que descrevem a sua evolução temporal²⁴. A descrição matemática é feita, de maneira geral, de duas formas: equações diferenciais ou equações de diferenças, esta última também conhecida por mapas²⁵. As equações diferenciais descrevem os sistemas com uma evolução contínua no tempo e são amplamente utilizadas na física. Por outro lado, os mapas são uma descrição temporalmente discreta do sistema, as equações são iterativas e mais simples, mas oferecem exemplos de caos e são ferramentas para estudar as soluções de equações diferenciais²⁵. De uma maneira geral, qualquer comportamento de um sistema físico pode ser aproximado por mapas e, a utilização de uma dinâmica discreta tem um custo de simulação computacional menor e dispensa o uso de ferramentas matemáticas mais complexas, como os integradores numéricos.

Neste capítulo iremos estudar uma classe específica de sistemas dinâmicos, os sistemas conservativos. Na primeira seção, examinaremos a descrição matemática de mapas relacionados a estes sistemas e as ferramentas que serão utilizadas para analisá-los. Na última seção, vamos abordar um tópico importante em sistemas dinâmicos, o transporte no espaço de fase.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS CONSERVATIVOS

Os sistemas conservativos são uma classe importante dentro do estudo de sistemas dinâmicos: eles descrevem sistemas onde os efeitos de dissipação de energia são negligenciáveis²⁶. Como exemplo temos os sistemas astronômicos, o confinamento em reatores de fusão, as trajetórias de ondas propagantes, a dissociação de moléculas, entre outros^{24, 26, 27}.

Uma vez que a energia é conservada, uma partícula em movimento permanecerá com a mesma quantidade de energia e sua trajetória será restrita a uma superfície de energia durante todo o movimento²⁸. Como consequência, tanto as equações diferenciais quanto os mapas iterativos que descrevem os sistemas conservativos são reversíveis: a dinâmica original e a inversa são equivalentes²⁶. Dentro da classe dos sistemas reversíveis estão os sistemas Hamiltonianos²⁹, assunto discutido a seguir.

2.1.1 Sistemas Hamiltonianos

Os sistemas Hamiltonianos são sistemas físicos cuja dinâmica é descrita inteiramente pela função $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e pelo conjunto de equações diferenciais ^{24, 29}

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

As variáveis $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ são vetores k_n -dimensionais, onde k_n é o número de graus de liberdade do sistema ²⁴. O espaço formado pelos vetores das variáveis conjugadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é um espaço de dimensão $d = 2k_n$ denominado espaço de fase ³⁰. O espaço de fase é uma ferramenta gráfica que permite conhecer os comportamentos de um sistema dinâmico: quais condições iniciais levam a um comportamento caótico ou regular.

Dentro dos sistemas Hamiltonianos, temos o caso especial onde a função Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo ²⁴. Quando isto ocorre, o sistema é dito ser autônomo e, com as equações de Hamilton (2.1), podemos mostrar que $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é constante no tempo:

$$\frac{dH(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \left(- \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0.\tag{2.2}$$

A definição da função Hamiltoniana é a soma da energia potencial com a energia cinética, $H = E_{cin} + U$. Sendo assim, podemos associar a Hamiltoniana com a energia E do sistema e, para sistemas conservativos autônomos, temos ²⁴

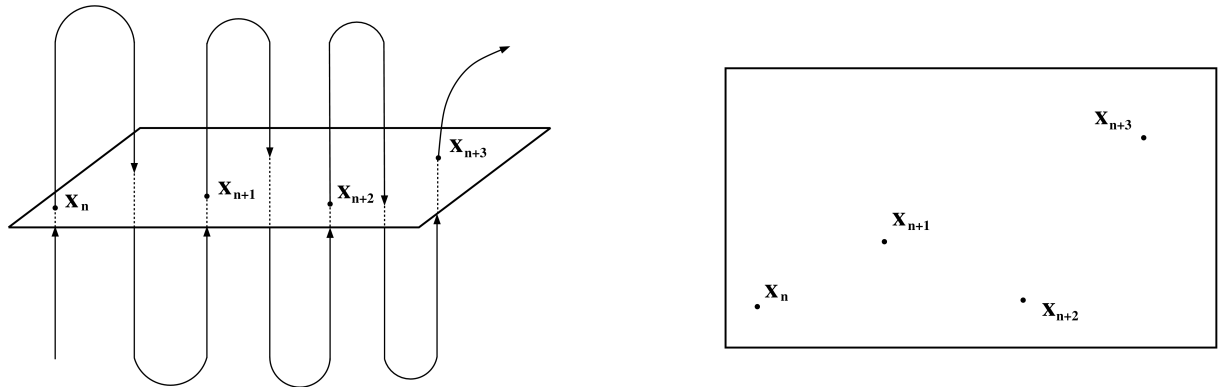
$$E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{constante no tempo}.\tag{2.3}$$

2.1.2 Fluxos e mapas

As soluções das equações diferenciais (2.1) são funções contínuas no tempo, um fluxo Hamiltoniano no espaço de fase ³⁰. Para o caso unidimensional ($d = 1$), se a função Hamiltoniana depender explicitamente do tempo, temos uma dependência de três variáveis: a posição generalizada q , o momento generalizado p e o tempo t , sendo assim, consequentemente, o espaço de fase será tridimensional. Podemos reduzir a dimensionalidade do espaço de fase a partir da seção de Poincaré.

A seção de Poincaré, também denominada corte ou mapa, é o conjunto de pontos $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ resultante da interseção entre o fluxo (soluções das eq. (2.1)) com uma hipersuperfície propriamente definida (Figura 1) ³¹.

Figura 1 – Figura esquemática da seção de Poincaré. À esquerda temos a órbita em 3 dimensões. A seção ao lado é a respectiva seção de Poincaré.



Fonte: A autora.

Considerando uma dependência periódica do sistema onde $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t + \tau) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ construímos o mapa de Poincaré a partir da interseção do fluxo no plano a cada instante de tempo $t_n = t_0 + n\tau$ ¹⁰. Matematicamente, temos que a seção de Poincaré pode ser definida como

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \hat{T}(p_n, q_n), \quad (2.4)$$

onde $p_n \equiv p(t_n)$, $q_n \equiv q(t_n)$ e $\hat{T}$ é o operador temporal¹⁰.

Como exemplo de sistema Hamiltoniano citamos o rotor pulsado, um modelo simples que emerge de muitos sistemas físicos e que traz consigo as principais características da dinâmica de sistemas conservativos^{10, 26}.

2.1.3 O mapa padrão

O rotor pulsado é um corpo preso por uma haste a um eixo vertical que pode oscilar e rotacionar livremente no plano perpendicular à haste²⁶, como esquematizado na figura 2. Os pulsos aplicados ao corpo são periódicos, com um período τ .

A função Hamiltoniana que descreve o sistema é definida por^{10, 30}

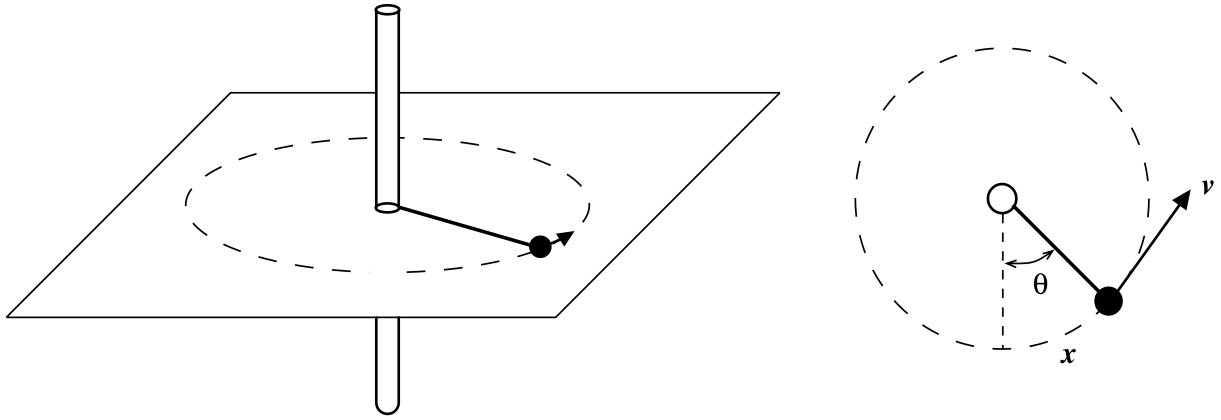
$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{\tau} - n\right), \quad (2.5)$$

onde o primeiro termo refere-se a Hamiltoniana não perturbada,

$$H_0 = \frac{1}{2}I^2, \quad \text{ou} \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2, \quad (2.6)$$

com p sendo o momento linear. O segundo termo da Hamiltoniana (2.5) é a perturbação consequente das sequências de pulsos de período τ ¹⁰. Na seção de Poincaré, onde $t = n\tau$, temos

Figura 2 – Rotor pulsado. A massa está fixa a uma haste horizontal, paralela ao plano, e está presa a um eixo vertical. A massa pode girar livremente no plano.



Fonte: A autora.

que a função delta será igual a unidade. Logo, utilizando as equações (2.1) chegamos a

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial I} = I, \\ \dot{I} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -K \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Considerando que (I, θ) são os valores das variáveis logo antes do pulso de número n e que $(\bar{I}, \bar{\theta})$ são os valores logo antes do pulso $n + 1$, trabalhando com as equações (2.7), encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \theta}{\Delta t} &= \frac{\bar{\theta} - \theta}{(n+1) - n} = \bar{\theta} - \theta = I, \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} &= \frac{\bar{I} - I}{(n+1) - n} = \bar{I} - I = -K \sin \theta,\end{aligned}\tag{2.8}$$

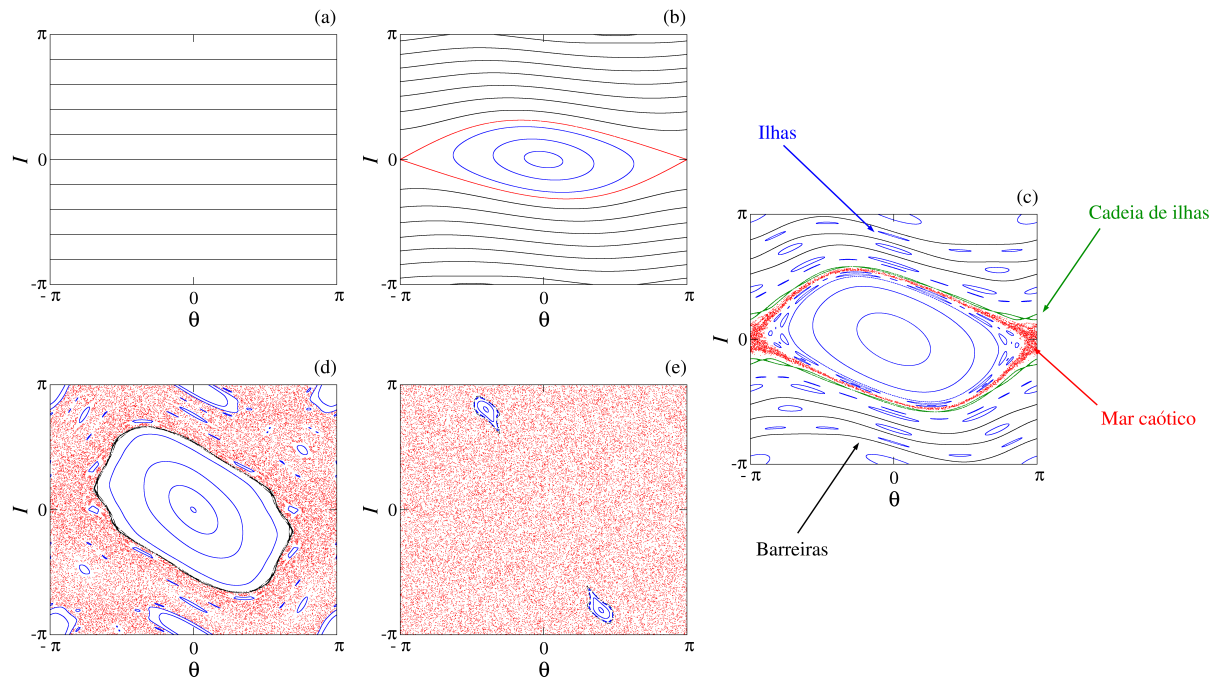
e chegamos às equações definidas por Chirikov³²

$$\begin{aligned}\bar{I} &= I + K \sin \theta, \\ \bar{\theta} &= \theta + I,\end{aligned}\tag{2.9}$$

que são a definição do mapa padrão, ou mapa de Chirikov, onde o parâmetro K é o parâmetro de perturbação. Para entender o papel da perturbação no sistema, construímos o espaço de fase para diferentes valores do parâmetro K . Estes espaços de fase são resultados de simulações computacionais e estão apresentados na figura 3.

As curvas nos espaços de fase nas figuras 3 representam órbitas regulares que oscilam ao redor de um ponto de equilíbrio estável, estas órbitas são denominadas ilhas e são representadas pelas curvas fechadas em azul. As curvas também podem representar órbitas que rotacionam

Figura 3 – Espaços de fase para o mapa padrão com os parâmetros (a) $K = 0,0$, (b) $K = 0,24$, (c) $K = 0,70$, (d) $K = 1,3$ e (e) $K = 5,3$.



Fonte: A autora.

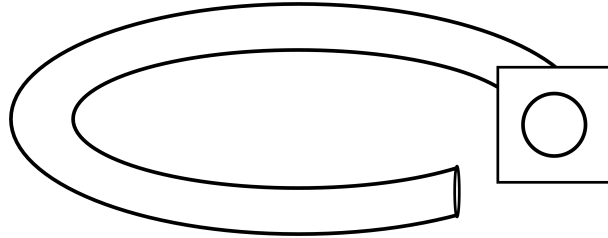
ao redor da haste do rotor, estas curvas são as barreiras ou separatrizes indicadas pelas curvas pretas. As cadeias de ilhas são uma consequência da perturbação em uma órbita regular, elas estão representadas em verde. Os pontos vermelhos dispersos representam condições iniciais (posição e velocidade inicial) que geram um comportamento caótico no sistema, um comportamento irregular, não periódico e imprevisível. Por este motivo, o conjunto destes pontos é denominado mar caótico. Podemos observar que quando K é não nulo, temos a destruição de órbitas periódicas e o surgimento do mar caótico. A coexistência entre o comportamento caótico e regular é consequência da perturbação externa no sistema, que é conservativo. As consequências da perturbação externa são resumidas em dois teoremas, o teorema KAM e o teorema de Poincaré-Birkhoff²⁶.

2.1.4 Teorema KAM e teorema de Poincaré-Birkhoff

A ideia base para o Teorema KAM é o estudo das órbitas como toros, e não como trajetórias no espaço de fase³⁰, como mostrado na figura 4. Imaginamos que as soluções do sistema estão sobre a superfície do toro. Assim, se uma trajetória volta exatamente para o ponto da condição inicial depois de um certo intervalo de tempo, o toro é dito ser racional e representa

uma dinâmica periódica. O inverso deste intervalo de tempo é a frequência característica do toro. Se não houver um retorno exato, temos uma dinâmica quasi-periódica e o toro é dito irracional²⁶.

Figura 4 – Correspondência de uma órbita regular no espaço de fase (curva fechada) para um toro em um espaço tridimensional.



Fonte: A autora.

As consequências da ação da perturbação no toros depende de sua racionalidade. Toros racionais têm uma frequência característica Ω racional e estão sujeitos a efeitos de ressonâncias e consequentemente a sua destruição com a ação da perturbação externa²⁶. Para toros irracionais, não há um retorno exato ao ponto de origem, assim, as frequências não são definidas e, consequentemente, não é possível definir Ω como um número racional.

Quando a perturbação externa é pequena, a maioria dos toros não ressonantes, ou seja, os toros irracionais, não são destruídos, apenas distorcidos no espaço de fase¹¹. A existência de órbitas regulares no espaço de fase com a presença de uma pequena perturbação é garantida pelo teorema KAM¹⁰.

Segundo o teorema KAM, as condições para que exista um toro invariante na presença de uma perturbação externa são as listadas abaixo^{26, 33}:

1. As frequências do toro são linearmente independentes

$$\sum_i m_i \Omega_i \neq 0, \quad (2.10)$$

onde Ω_i são as frequências e m_i são as componentes do vetor de números inteiros $\mathbf{m}$.

2. A perturbação é descrita por funções suaves (existe um número suficiente de derivadas contínuas da perturbação).
3. As condições iniciais estão suficientemente afastadas da ressonância.

O teorema foi provado por Arnold entre os anos de 1961 e 1962, partindo da conjectura exposta por Kolmogorov (1954) e foi provado também por Moser (1962) para um número suficiente de derivadas contínuas³³.

Os toros remanescentes, sobreviventes a perturbação, são toros muito irracionais e são denominados toros KAM²⁶. A medida da irracionalidade de um toro é o quão irracional é a frequência Ω associada a ele²⁶. Um número irracional γ positivo pode ser expandido em frações contínuas de modo que

$$\gamma = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \equiv [a_1, a_2, a_3, \dots], \quad (2.11)$$

onde os valores de a_i são números inteiros positivos²⁶. A expansão é única e sua versão finita é a aproximação racional do número irracional²⁶. Os números que são considerados mais irracionais são os números onde a convergência da aproximação racional é mais lenta, ou seja, onde a quantidade de termos $a_i = 1$ é maior²⁶.

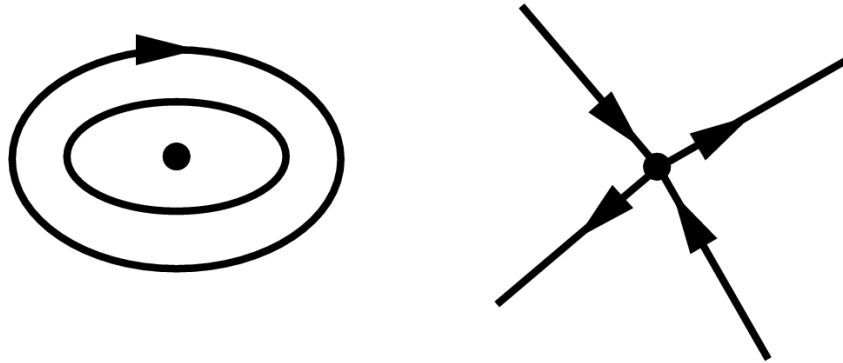
O Teorema KAM abrange os toros irracionais, toros que não são efeitos de ressonância e que são quasi-periódicos. O tratamento de toros racionais, ou toros ressonantes, é feito pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff.

A maioria dos toros ressonantes não sobrevive a pequenas perturbações²⁴, de fato, os toros de período s são destruídos e substituídos por $2ls$ pontos fixos, onde l é um número inteiro³³. Pontos fixos são condições iniciais cuja evolução temporal é sempre a condição inicial²⁶. Os pontos fixos são classificados de acordo com a sua estabilidade: pontos fixos estáveis são denominados pontos elípticos, enquanto os pontos instáveis são pontos fixos hiperbólicos.

Condições iniciais próximas ao ponto elíptico formam trajetórias que orbitam ao redor deste ponto, ou seja, as ilhas do espaço de fase. Já condições iniciais próximas ao ponto hiperbólico podem se afastar ou se aproximar assintoticamente do ponto. O ponto hiperbólico apresenta duas direções: uma direção estável representada pelas setas com sentido em direção ao ponto, e uma direção instável, indicada pelas setas que se afastam, como mostrado na figura 5. As trajetórias que seguem a direção instável (estável) se afastam (aproximam) do ponto hiperbólico.

O Teorema de Poincaré-Birkhoff afirma que sob efeito de uma perturbação externa, o

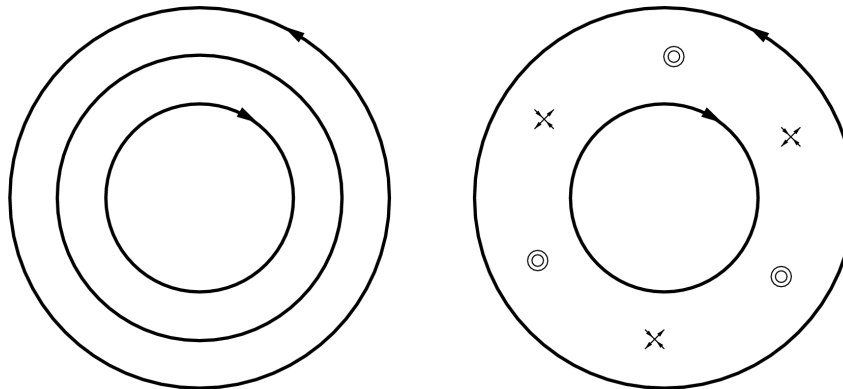
Figura 5 – Ponto elíptico e ponto hiperbólico. O ponto elíptico representa um ponto de equilíbrio estável e as órbitas elípticas orbitam ao seu redor. Para o ponto hiperbólico, vemos duas direções: uma direção estável (setas com sentido em direção ao ponto) e uma direção instável (setas se afastando do ponto).



Fonte: A autora.

remanescente de um toro racional é uma cadeia de pontos elípticos e hiperbólicos alternados entre si ²⁶, como podemos ver na figura 6, onde os pontos elípticos (hiperbólicos) são representados por círculos concêntricos (setas ortogonais). O surgimento de $2ls$ pontos fixos da quebra de um toro de período s é uma consequência da conservação de energia do sistema ³³.

Figura 6 – Ação da perturbação em um toro regular. As curvas com setas são toros irracionais na vizinhança do toro racional (curva do meio). Após a perturbação, a curva é substituída por um número de pontos elípticos (círculos concêntricos) e hiperbólicos (setas ortogonais) igual a seu período, neste caso, a curva tinha um período 3.

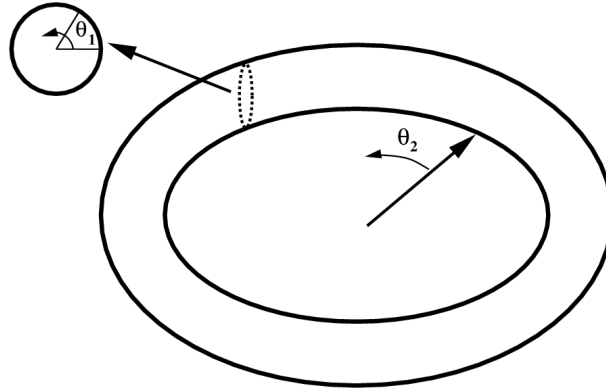


Fonte: A autora.

2.1.5 Número de rotação

Órbitas periódicas e quasi-periódicas, em sistemas bidimensionais, podem ser tratadas geometricamente como toros. Neste caso, temos duas frequências associadas a cada trajetória: $\varphi_1 = \dot{\theta}_1$ e $\varphi_2 = \dot{\theta}_2$. Estas frequências são frequências angulares, a variação temporal dos ângulos integrantes do toro, ângulos que estão indicados na figura 7.

Figura 7 – Deslocamentos angulares de um trajetória sobre um toro. O círculo indicado pela seta representa a seção reta do toro.



Fonte: A autora.

O número de rotação (*winding number* ou *rotation number*) é definido como a razão entre estas duas frequências

$$\omega = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (2.12)$$

e representa a média do número de rotações executadas pela órbita na direção pequena (θ_1) para cada rotação na direção longa θ_2 ²⁴. O número de rotação (2.12) define a racionalidade do toro: se ω é racional, ele pode ser escrito como uma fração de números naturais e temos uma dinâmica periódica para qualquer condição inicial no toro²⁶. Porém, se ω é irracional, não podemos escrever o número de rotação como uma razão, sendo assim, temos uma dinâmica quasi-periódica onde a trajetória irá preencher todo o toro²⁴.

De maneira prática, o número de rotação (2.12) pode ser calculado para uma trajetória em um espaço de fase com coordenada periódica x , que começa em x_0 , pelo limite¹³

$$\omega := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}, \quad (2.13)$$

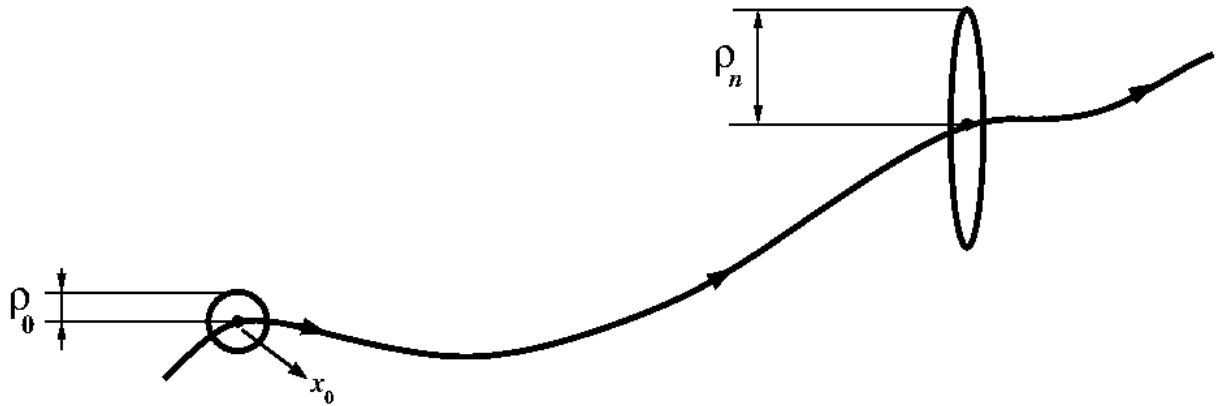
onde x_n é o valor da variável x na iterada n . Se o limite em (2.13) convergir e for um número definido, a trajetória com condição inicial x_0 é regular: uma ilha ou uma curva no espaço de fase. Se ω for racional ou irracional, teremos um toro periódico ou quasi-periódico, respectivamente. Caso o limite não convirja, teremos que a trajetória apresenta características diferentes: ela não é regular, nem periódica e não pode ser representada por um toro. A esse tipo de comportamento, denominamos comportamento caótico, que foi apresentado anteriormente na seção 2.1.3. Uma das ferramentas utilizadas para identificar caos em sistemas dinâmicos é o expoente de Lyapunov, explanado na próxima seção.

2.1.6 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov pode ser compreendido como a taxa exponencial média da divergência ou convergência de órbitas com condições iniciais próximas no espaço de fase ³⁴ e é uma ferramenta fundamental no estudo das propriedades estocásticas (caóticas) de sistemas dinâmicos, tanto analítica quanto numericamente ³⁵.

Consideramos uma hipersfera de k_n dimensões ao redor de uma condição inicial x_0 , no espaço de fase, de um mapa M com k_n graus de liberdade. Ao iterar todas as condições iniciais presentes na esfera esta irá se deformar em um corpo hiper-elipsoidal de dimensão k_n ^{2, 34}, como mostrado na figura 8.

Figura 8 – Evolução da esfera de condições iniciais de raio ρ_0 ao redor da condição inicial x_0 . As setas indicam a direção da evolução.



Fonte: A autora.

Supondo que o raio inicial ($n = 0$) da esfera de condições iniciais é ρ_0 e após n iteradas, ao longo da direção j , o raio variou exponencialmente, no tempo, até alcançar um valor (ρ_n). O expoente de Lyapunov a tempo infinito, referente a esta direção j , é definido pelo limite ³⁴

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\rho_n}{\rho_0} \right). \quad (2.14)$$

Cada direção j tem um expoente de Lyapunov relacionado, o que faz com que o hiper-elipsoide mude de direção à medida que o sistema evolui temporalmente ³⁴. Em sistemas conservativos, a soma dos expoentes de Lyapunov de todas as direções deve ser nula pois o volume do espaço de fase é conservado, por definição.

O valor do expoente de Lyapunov depende da condição inicial e pode ser positivo, negativo ou nulo ³⁴. Sobre as ilhas e curvas no espaço de fase, o expoente de Lyapunov é nulo, uma vez que a distância entre dois pontos muito próximos é constante durante toda evolução

temporal. Expoentes negativos ocorrem, por exemplo, quando há convergência de órbitas para um certo conjunto específico no espaço de fase, os atratores ². Já expoentes positivos são característicos de órbitas caóticas, órbitas onde condições iniciais próximas a ela levam a posições finais muito diferentes no espaço de fase. Esta situação é atribuída a sistemas caóticos pois representa a imprevisibilidade do sistema. Um sistema é considerado caótico se apresentar, no mínimo, uma direção com expoente de Lyapunov positivo.

O cálculo do expoente de Lyapunov é baseado na separação exponencial entre duas trajetórias com condições iniciais muito próximas. De forma operacional, este cálculo é baseado no mapa linearizado, das derivadas de M ³⁶. O algoritmo proposto por Eckmann e Ruelle ³⁶ para o cálculo numérico dos expoentes λ_i é baseado na decomposição da matriz linearizada de M (a matriz jacobiana J), no produto de uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R . Os expoentes de Lyapunov são calculados a partir das derivadas $D_x f^t$ ³⁶ que, pela regra da cadeia, podem ser escritas como ³⁷:

$$D_x f^t = J(f^{t-1}(x)) \cdot J(f^{t-2}(x)) \dots J(f(x)) \cdot J((x)) = \prod_{k=1}^t J(f^{k-1}(x)). \quad (2.15)$$

onde J é a matriz Jacobiana, D são as derivadas e f^t é o próprio mapa ³⁶.

Primeiramente, precisamos considerar a troca na condição inicial de $J(x)$ para $J(x)Q_0$ ³⁶, onde Q_0 é a matriz ortogonal no instante $t = 0$. Para $k = 1$, temos que a decomposição é $J(x) = Q_1 R_1$ e, para $k = 2, 3, \dots, t$ temos, por definição, ^{36, 37}:

$$J_k^T = J(f^{k-1}(x))Q_{k-1}. \quad (2.16)$$

A decomposição para $k > 1$ também é $J_k^T = Q_k R_k$ e, igualando a (2.16), encontramos $J(f^{k-1}(x))Q_{k-1} = Q_k R_k$. Multiplicando os dois lados a direita por Q_{k-1}^{-1} temos que

$$J(f^{k-1}(x)) = Q_k R_k Q_{k-1}^{-1}, \quad (2.17)$$

levando em conta que $Q^{-1}Q = \mathbb{1}$. Substituindo (2.17) e a condição inicial modificada $J(x)Q_0$ em (2.16), temos:

$$\begin{aligned} D_x f^t &= J(f^{t-1}(x)) \cdot J(f^{t-2}(x)) \dots J(f(x)) \cdot J((x))Q_0, \\ D_x f^t &= Q_t R_t Q_{t-1}^{-1} Q_{t-1} R_{t-1} \dots Q_2 R_2 Q_1^{-1} R_1 Q_0^{-1} Q_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como $Q_k^{-1}Q_k = \mathbb{1}$ para qualquer k , a equação (2.18) reduz-se a,

$$D_x f^t = Q_t R_t R_{t-1} \dots R_1. \quad (2.19)$$

O termo $D_x f^t$ é calculado pela multiplicação das matrizes Jacobianas de cada tempo, consideramos que $J_x^t = D_x f^t$ e a matriz de produtos $R = R_t R_{t-1} \dots R_1$, que é a matriz triangular superior total resultante de todas as multiplicações. Os expoentes de Lyapunov são dados em função dos elementos da diagonal principal da matriz R :

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln r_{jj}, \quad (2.20)$$

onde r_{jj} são os elementos da diagonal da matriz ³⁶.

Para encontrar os valores de r_{jj} partimos da afirmação que como a inversa de uma matriz ortogonal é a sua própria transposta, multiplicamos a relação $J_x^t = QR$ a direita por Q^{-1} e encontramos $Q^{-1}J = R$. A matriz Q é uma matriz ortogonal genérica dependente de um ângulo β e pode ser escrita como, ³⁸

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Então, $Q^{-1}J_x^t = R$ se torna

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Pelo termo nulo de R em (2.22) conseguimos encontrar o valor de β :

$$-J_{11} \sin \beta + J_{21} \cos \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \beta = \frac{J_{21}}{J_{11}} \quad \rightarrow \quad \beta = \tan^{-1} \left(\frac{J_{21}}{J_{11}} \right), \quad (2.23)$$

e, consequentemente, os valores dos elementos de R ,

$$r_{11} = J_{11} \cos \beta + J_{21} \sin \beta, \quad (2.24)$$

$$r_{12} = J_{12} \cos \beta + J_{22} \sin \beta, \quad (2.25)$$

$$r_{22} = -J_{12} \sin \beta + J_{22} \cos \beta. \quad (2.26)$$

Linearizando o mapa M , encontramos os elementos (2.26) e o expoente característico de Lyapunov para o sistema.

2.2 TRANSPORTE NO ESPAÇO DE FASE

Uma questão de grande interesse ao estudar sistemas dinâmicos é o transporte no espaço de fase. Este estudo pode ser feito analisando as regiões acessíveis ao sistema e o tempo que um grupo de trajetórias leva de uma determinada região do espaço a outra ²⁹.

Nesta seção, apresentaremos os principais conceitos sobre transporte em sistemas Hamiltonianos e as ferramentas utilizadas para analisá-lo: a transmissividade e a bacia de escape. Por último, iremos explorar sobre o transporte direcionado no espaço de fase, o fenômeno de *ratchet*.

2.2.1 Transporte em sistemas Hamiltonianos

Os sistemas Hamiltonianos são caracterizados pela coexistência de caos e regularidade no espaço de fase. Sendo assim, a evolução temporal do sistema não é inteiramente regular ou irregular, ele depende da condição inicial da trajetória¹⁵. Os movimentos periódico e quase-periódico são representados por curvas no espaço de fase que são resultado das interseções dos toros KAM com o plano definido pela seção de Poincaré. O movimento caótico e irregular é representado por um conjunto de pontos que preenche o espaço entre duas curvas KAM¹⁵.

As trajetórias no mar caótico podem levar um longo tempo até explorar toda região acessível a elas. Isto ocorre pois no espaço de fase existem barreiras parciais que são remanescentes das barreiras totais, estas que foram destruídas devido a ação da perturbação no sistema.

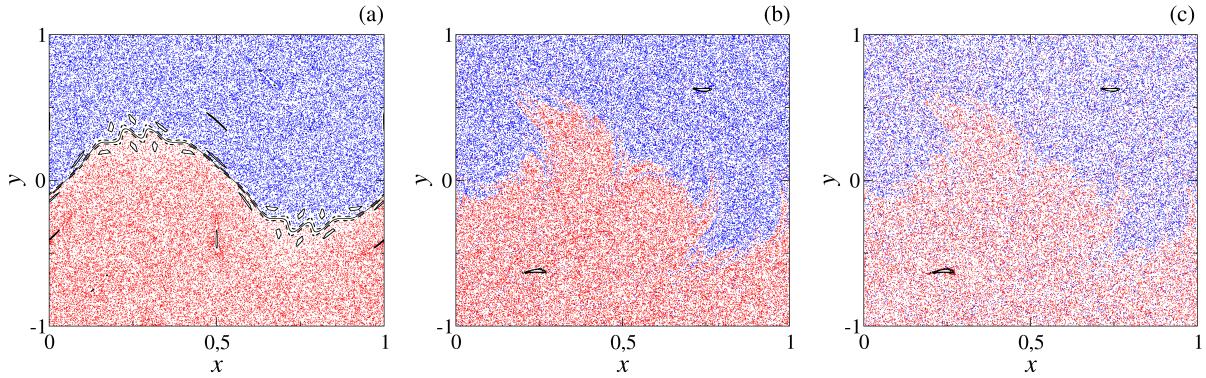
Na figura abaixo, figura 9 (a), vemos um esquema de um espaço de fase com barreira. As condições iniciais que começam na parte inferior (pontos em vermelhos) não atravessam o espaço de fase e não chegam a parte superior. O contrário também é verdadeiro, as trajetórias da região superior (pontos azuis) não chegam à inferior. Já na figura 9 (b) não observamos mais uma barreira, mas as trajetórias em vermelho (azul) ainda não ocupam totalmente o espaço de fase, uma vez que não chegam a parte superior (inferior) dele, o tempo necessário para isso é muito maior que o utilizado para a construção deste espaço de fase. Isso ocorre devido às barreiras parciais que existem e são consequência da quebra da barreira total da figura 9 (a). Para o caso representado em 9 (c) temos a mesma situação de 9 (b), mas a evolução das trajetórias ocorre por mais tempo. Como consequência, vemos a mistura dos pontos de cores distintas, as trajetórias atravessam a barreira parcial e podem acessar qualquer ponto do espaço de fase.

As ferramentas que serão utilizadas neste trabalho para estudar o transporte são a transmissividade e as bacias de escape, explicadas nas próximas seções.

2.2.2 Transmissividade

A transmissividade T_n é definida como a fração de órbitas que começam na região de um lado da barreira parcial, atravessam o espaço de fase e chegam ao outro lado da barreira, em um determinado tempo n ³⁹. Matematicamente, temos,

Figura 9 – Efeito das barreiras no espaço de fase. (a) Espaço de fase com uma barreira total, as 100 condições iniciais escolhidas aleatoriamente na linha $y = -1, 0$ ($y = 1, 0$) e suas respectivas iteradas no espaço de fase por 500 tempos são representadas pela cor vermelha (azul). Em (b) e (c), o espaço de fase tem uma barreira parcial, escolhemos também 100 condições iniciais aleatoriamente na linha $y = -1, 0$ ($y = 1, 0$) e suas trajetórias são representadas no espaço de fase pela cor vermelha (azul). Para (b) o número de iteradas foi de $n = 500$ e para (c) $n = 5000$.



Fonte: A autora.

$$T_n = \frac{N(n)}{N_T}, \quad (2.27)$$

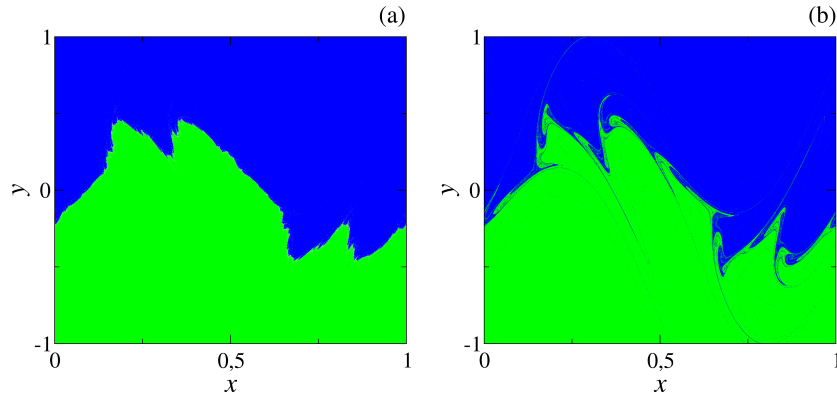
onde $N(n)$ é o número de trajetórias que atravessou o espaço de fase dentro de um intervalo de tempo n e N_T é o número total de condições iniciais na região inicial especificada.

Uma transmissividade nula e baixa, indica a presença de barreiras totais ou barreiras parciais, uma vez que elas vão dificultar que as trajetórias atravessem o espaço de fase e assim $N(n)$ será menor. Uma transmissividade baixa também pode ser consequência da presença de armadilhas dinâmicas no espaço de fase. Essas armadilhas aprisionam as trajetórias por um certo intervalo de tempo, o que faz com que as trajetórias precisem de um intervalo de tempo maior para atravessar o espaço. Uma transmissividade $T_n \approx 1$ representa um espaço de fase que não apresenta nenhuma obstáculo às trajetórias, logo, não apresenta dificuldade ao transporte.

2.2.3 Bacias de escape

Atratores são conjuntos de pontos para onde os pontos de sua bacia de atração convergem, após um tempo, devido a perda de energia. Os sistemas Hamiltonianos são conservativos, logo não apresentam atratores ou bacias de atração. Entretanto, se o sistema for aberto, podemos estabelecer saídas e construir as bacias de escape, o conjunto de condições iniciais que escapa por cada saída ¹⁷. Na figura 10 temos o esquema de duas bacias de escape no espaço de fase.

Figura 10 – Exemplo de bacias de escape. As bacias são construídas evoluindo um conjunto grande (9×10^6) de condições iniciais distribuídas uniformemente pelo espaço de fase: se as trajetórias atravessam a linha $y = 1,0$ ($y = -1,0$) a condição inicial que a gera é marcada de azul (verde). Para a bacia em (a) temos uma barreira total entre as duas bacias e por isso elas não se misturam. Em (b) temos uma bacia com barreira parcial, como podemos identificar pelas incursões de uma cor sobre a outra



Fonte: A autora.

As saídas escolhidas neste exemplo foram as linhas $y = 1,0$ e $y = -1,0$. As bacias de escape da figura 10 foram construídas a partir da evolução tempo de um grande conjunto de condições iniciais (CI) distribuídas uniformemente pelo espaço de fase. Após um tempo n , analisamos se a trajetória de uma certa CI escapou e por qual saída ela passou: se a trajetória cruzou a linha $y = -1,0$ ($y = 1,0$) marcamos a condição inicial com a cor verde (azul).

Como exemplo, podemos ver que na figura 10 (a) a fronteira de bacia é suave, as bordas são bem delimitadas e não há incursões de uma bacia na outra: há uma barreira total entre estas duas bacias. Já para a figura 10 (b), há incursões de uma bacia na outra, caracterizando uma barreira parcial.

Além da informação de quais condições iniciais escapam por cada saída, as bacias nos fornecem informações sobre a incerteza e a imprevisibilidade associada ao sistema, pois, se temos uma região onde as bacias são misturadas, das condições iniciais próximas podem escapar por saídas distintas, o que caracteriza imprevisibilidade. Para estudar esta relação entre bacias, precisamos de ferramentas associadas a estas bacias, como a dimensão de incerteza, as entropias de bacia e de borda de bacia¹⁷.

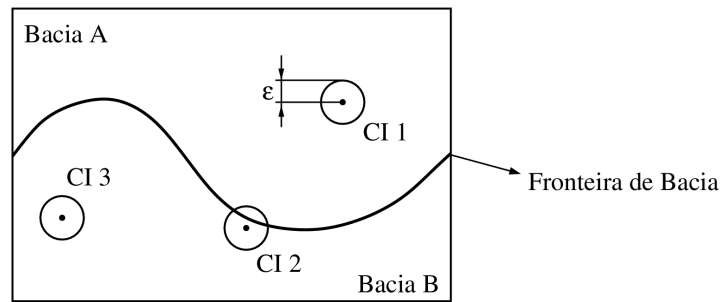
2.2.3.1 Dimensão de incerteza

A dimensão de incerteza quantifica a incerteza do estado final de um conjunto de condições que pertencem a duas ou mais bacias de escape. Seu cálculo é feito baseado na fração

de incerteza, conceito explicado a seguir.

Consideramos um espaço de fase com duas bacias, bacia *A* e bacia *B*, e escolhendo um número grande de condições iniciais (x_0, y_0) aleatórias no espaço de fase. Então, iteramos as condições e suas vizinhas mais próximas, $(x_0 \pm \epsilon, y_0)$ com ϵ positivo e $\epsilon \ll 1$, e verificamos para onde elas escapam. Se todas as condições iniciais convergirem para a mesma saída, como a condição inicial CI 1 e CI 3 na figura 11, denominamos que a condição inicial central é dita certa, caso contrário, ela é incerta, como em CI 2. É esperado que a fração de condições iniciais incertas, a fração de incerteza $f(\epsilon)$, siga uma lei de escala $f(\epsilon) \approx \epsilon^\alpha$, onde α é o coeficiente de incerteza⁴⁰. Se $\alpha < 1$, temos que a borda da bacia não é suave e, como consequência, o estado final apresenta uma sensibilidade maior às condições iniciais⁴⁰.

Figura 11 – Condições iniciais certas (CI 1 e CI 3) e incertas (CI 2) nas bacias de escape *A* e *B*. Vemos que a condição incerta está próxima da fronteira entre as duas bacias



Fonte: A autora, adaptado de Grebogi *et al.*, 1983⁴¹.

2.2.3.2 Entropia de bacia e entropia de borda de bacia

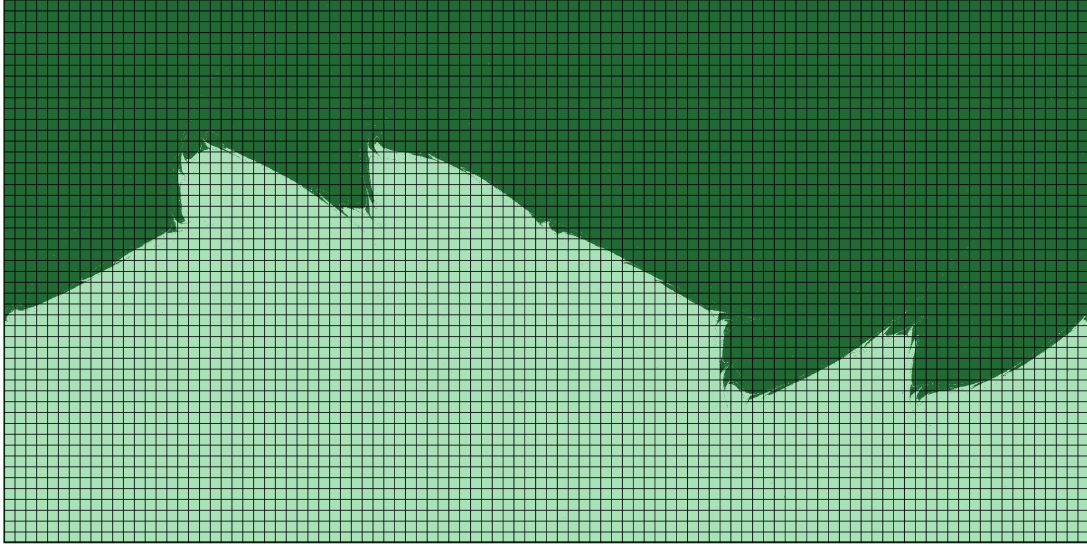
A entropia de bacia é uma ferramenta proposta por Sanjuán *et al.* que, diferente do expoente de incerteza, captura a incerteza associada a cada bacia, não só à borda, assim é possível saber qual das bacias é mais imprevisível^{17, 42}.

Dividimos o espaço de fase em N_{cx} caixas, como esquematizado na figura 12. Cada caixa contém N_c condições iniciais, distribuídas uniformemente, que são evoluídas, pelas regras do mapa em estudo, por um certo intervalo de tempo. Para cada caixa i de condições iniciais, a fração destas condições que escapa por uma saída j define uma probabilidade p_{ij} . Sendo assim, a entropia para cada caixa é definida por¹⁷,

$$S_i = - \sum_{j=1}^{N_A} p_{ij} \log(p_{ij}), \quad (2.28)$$

onde N_A é o número de saídas estipuladas no espaço de fase. Se todas as condições iniciais dentro de uma caixa evoluírem para a mesma saída, teremos $p_{ij} = 1$ e a entropia será nula.

Figura 12 – Divisão das bacias em caixas. Cada quadrado é uma caixa onde serão escolhidas N_c condições iniciais para o cálculo das probabilidades e, consequentemente, das entropias.



Fonte: A autora.

A entropia de bacia S_b é calculada pela média das entropias de cada caixa individual¹⁷

$$S_b = \frac{S}{N_{cx}} = \frac{1}{N_{cx}} \sum_{i=1}^{N_{cx}} S_i. \quad (2.29)$$

A entropia de borda de bacia S_{bb} é definida em função do número de caixas N_b que estão na borda entre as bacias¹⁷

$$S_{bb} = \frac{S}{N_b}. \quad (2.30)$$

As caixas que estão na borda entre as bacias são consideradas todas as caixas que, entre todas as condições iniciais N_c , no mínimo uma condição tem um destino diferente das outras.

A entropia de bacia S_b é sensível ao tamanho das bacias, logo, é possível diferenciar bacias com bordas suaves e, como ela é dependente da estrutura da bacia, podemos quantificar a imprevisibilidade associada a ela¹⁷. Já a entropia S_{bb} nos dá uma informação sobre a incerteza referente apenas à fronteira entre as duas bacias¹⁷.

2.2.4 Transporte direcionado

De uma forma geral, o transporte no mar caótico de sistemas Hamiltonianos é semelhante a um processo de difusão, como uma caminhada aleatória, não existe uma direção preferencial²⁶. Entretanto, muitos estudos mostram a geração de transporte direcionado no espaço de fase sem a presença de uma força externa que direcione o transporte⁴³. A este fenômeno, dá-se o nome de efeito catraca (*ratchet*)¹⁸.

O efeito catraca é de grande interesse na área de sistemas dinâmicos pois modela e explica vários fenômenos de transporte em sistemas químicos, físicos, biológicos e biofísicos ¹⁹. Como bem resumido por ^{18, 19, 21, 20}, temos como exemplo o transporte em motores moleculares e Brownianos, transporte de fluídos e energia, migração de bactérias, dispositivos em nanoescala, fluxo de densidade, filmes magnéticos entre muitos outros.

O transporte direcionado, segundo Hutchings e colaboradores, é uma consequência da quebra de simetria dos voos de Levy e, para sistemas Hamiltonianos, o efeito de catraca tem como origem o desequilíbrio entre as correntes das regiões regulares (ilhas e curvas) e as correntes das regiões irregulares (mar caótico) ⁴⁴. As catracas podem ser induzidas de maneiras diferentes: adicionando ruídos a potenciais periódicos e assimétricos ou um termo periódico no tempo que quebre a simetria de reflexão ²¹. De maneira geral, o efeito catraca pode surgir quando há a quebra de alguma simetria do sistema, seja ela temporal ou espacial ^{18, 45}.

A identificação do efeito de catraca é feita pela corrente de catraca (CC), obtida numericamente por ¹⁸

$$CC = \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^{(j)} \right], \quad (2.31)$$

onde N_c é o número de condições iniciais distribuídas pelo mar caótico e n é o número total de iterações para cada condição. De uma forma direta, a corrente de catraca é a média dos momentos de toda a região caótica $\langle p \rangle$ e existe uma catraca quando $\langle p \rangle \neq 0$ ⁴⁶.

3 MAPA PADRÃO NÃO *TWIST*

Como enunciamos no Capítulo 2 desta dissertação, sistemas Hamiltonianos perturbados exibem uma coexistência de regularidade e caos no espaço de fase. Interessados nas consequências desta coexistência, escolhemos um modelo muito estudado de sistema Hamiltoniano para estudar seu comportamento: o mapa padrão não *twist*, uma versão do mapa padrão apresentada anteriormente que viola a condição *twist*.

Neste capítulo, buscamos apresentar o mapa padrão não *twist*, sua aplicação e o transporte em seu espaço de fase.

3.1 O MAPA E A CONDIÇÃO *TWIST*

As propriedades de transporte de sistemas dinâmicos podem ser descritas por mapas discretos conservativos⁴⁷. Mapas são equações iterativas de diferença que descrevem o sistema em tempos discretos e são uma forma mais simples de estudar o comportamento do sistema físico²⁵.

3.1.1 Mapa não-*twist* e a violação da condição *twist*

Os mapas bidimensionais conservativos podem ser escritos, de uma forma geral, pelas equações⁴⁷

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n+1} &= \Upsilon_n + F(\Theta_n), \\ \Theta_{n+1} &= \Theta_n - g(\Upsilon_{n+1}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde Υ e θ são as variáveis de ação e ângulo, respectivamente, resultantes da transformação canônica de ângulo-ação⁴⁸. Em (3.1) temos que $\Upsilon \in \mathbb{R}$, $\Theta \in (-\pi, \pi]$, $F(\Theta_n)$ é uma função periódica de período 2π e $g(\Upsilon)$ é uma função da ação⁴⁷. Se $g(\Upsilon)$ cresce ou decresce monotonicamente em função de Υ , temos que de (3.1), encontramos a relação

$$\left| \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial \Upsilon_n} \right| = |g'(\Upsilon_{n+1})| \geq C > 0,\tag{3.2}$$

onde C é uma constante real e a função $g'(\Upsilon)$ é chamada função *shear*^{* 47}.

A relação (3.2) é chamada de condição *twist* e é uma condição necessária para muitos teoremas relacionados à dinâmica de sistemas Hamiltonianos¹², como o teorema KAM e o

* Por ser um termo específico da área, evitaremos traduzi-lo

teorema de Poincaré-Birkhoff apresentados no capítulo anterior⁴⁹. A condição *twist* garante que grandes velocidades implicam em grandes momentos canônicos no espaço de fase, ou seja, o monotonicidade do número de rotação¹².

Um exemplo de mapa conservativo que viola a condição *twist* é o mapa padrão não-*twist* (SNM)[†] proposto por Castillo-Negrete e Morrison¹⁴. O SNM é definido pelas equações,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - b \sin(2\pi x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2), \mod 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $y \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, 1)$. Os parâmetros a e b são independentes e os seus valores estão dentro dos intervalos $a \in [0, 1)$ e $b \in \mathbb{R}$. Para valores $a > 1$, as variáveis x e y podem ser reescaladas de maneira que o comportamento obtido seja equivalente a $a \leq 1$ ¹⁴. O parâmetro a é o responsável pela quebra do cenário monotônico do número de rotação e b é a perturbação do sistema.

Identificando x como a variável de ângulo e y como a variável de ação, podemos verificar a violação da condição *twist*:

$$\left| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \right| = -2a(y_n - b \sin(2\pi x_n)) = 0. \quad (3.4)$$

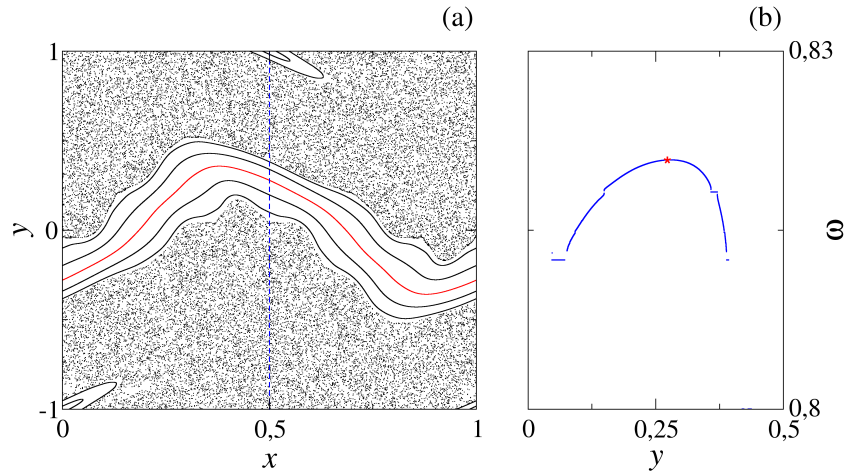
A violação da condição ocorre nos pontos (x_n, y_n) pertencente a uma curva específica no espaço de fase, a curva não monotônica ou a curva sem *shear* (*shearless*)^{12, 50}.

Como consequência da violação da condição *twist*, a função *shear* e, consequentemente, o perfil de número de rotação tem um ponto de extremo, máximo ou mínimo, e este ponto pertence à curva *shearless*^{12, 50}. Na figura 13 vemos o resultado das simulações no espaço de fase com barreiras totais e no número de rotação calculado por (2.13), em função de y , na linha $x = 0,5$. Observamos que a curva *shearless*, que corresponde ao ponto de extremo do perfil do número de rotação, é uma barreira total no espaço de fase (curva em vermelho na Figura 13 (a)).

O SNM é um mapa que apresenta as principais características de sistemas não *twist* e pode ser considerado a aproximação local de mapas não *twist* mais complicados⁵¹. A aplicação do mapa, como resumido por Morrison,^{12, 13} abrange o estudo de linhas de campos magnéticos em dispositivos toroidais de plasmas e do transporte de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ no plasma magnetizado. Também observamos uma dinâmica não *twist* na mecânica celeste, quando os potenciais gravitacionais apresentam simetria esférica^{12, 13}. A dinâmica em guias de onda cilíndricas e em aceleradores de partículas com ajuste não monotônico também podem ser estudados a partir de mapas que violam a condição (3.2).

[†] Do inglês *Standard Nontwist Map*

Figura 13 – (a) Espaço de fase e (b) perfil de número de rotação para o mapa SNM com $a = 0,87$ e $b = 0,33$. O número de rotação é calculado para todas as trajetórias com condição inicial sobre a reta $x = 0,5$. O máximo do número de rotação e, conseqüentemente, a posição da curva *shearless* estão indicados pela asterisco vermelho no perfil do número de rotação.



Fonte: A autora.

3.2 TRANSPORTE NO ESPAÇO DE FASE

Com o objetivo de estudar o transporte no espaço de fase do mapa padrão não *twist*, utilizamos a transmissividade e a análise do espaço de fase para diferentes parâmetros (a, b) .

3.2.1 Transmissividade

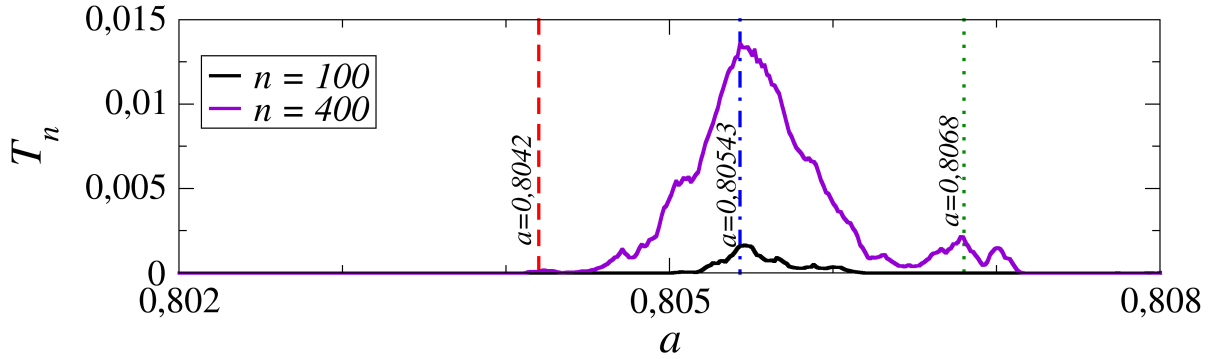
Como vimos no capítulo anterior, a transmissividade T_n pode ser definida como a razão do número de pontos $N(n)$ que atravessam o espaço de fase dentro de um intervalo de tempo n em relação ao número total de condições iniciais N_T ³⁹,

$$T_n = \frac{N(n)}{N_T}. \quad (3.5)$$

Para calcular a transmissividade no SNM, escolhemos $N_T = 10^6$ condições iniciais sobre a linha $y = -0,8$, evoluímos todas numericamente pelas equações 3.3, e contamos quantas trajetórias atravessam o espaço de fase e chegam a linha $y = 0,8$. Escolhemos dois intervalos de tempo diferente para o cálculo da transmissividade, $n = 100$ e $n = 400$. Para o estudo do transporte, fixamos $b = 0,6$ e escolhemos a próximo a $a = 0,8$. Na figura 14 observamos o valor da transmissividade em função do parâmetro a .

Pela figura 14 observamos a dependência do transporte no espaço de fase com o parâmetro a . Até um valor próximo de $a = 0,804$, não observamos transporte algum: a transmissividade

Figura 14 – Transmissividade em função do parâmetro a para $b = 0,6$. A curva em preto representa a transmissividade calculada para um intervalo de tempo $n = 100$, enquanto a curva em roxo representa a transmissividade para $n = 400$. A linha vermelha (azul) indica o valor de a que representa um transporte baixo (alto) no espaço de fase, para os dois intervalos de tempo. Marcamos também, com a linha em verde, um segundo pico de transporte que só aparece para um intervalo maior de tempo.



Fonte: A autora.

é nula. A partir deste ponto, a transmissividade aumenta até chegar em seu máximo, em $a = 0,80543$. Este ponto $(a, b) = (0,80543; 0,6)$ é um máximo tanto para $n = 100$ e $n = 400$. Aumentando mais o valor de a , a transmissividade diminui e, para $n = 100$, ela se torna aproximadamente nula; para $n = 400$ ela alcança um mínimo e depois volta a aumentar, apresentando um segundo pico próximo a $a = 0,8068$, depois volta a diminuir até se anular. Este segundo pico é uma evidência das barreiras parciais no espaço de fase: para que a transmissividade tenha um valor significativo, é necessário mais tempo para que as trajetórias atravessem o espaço.

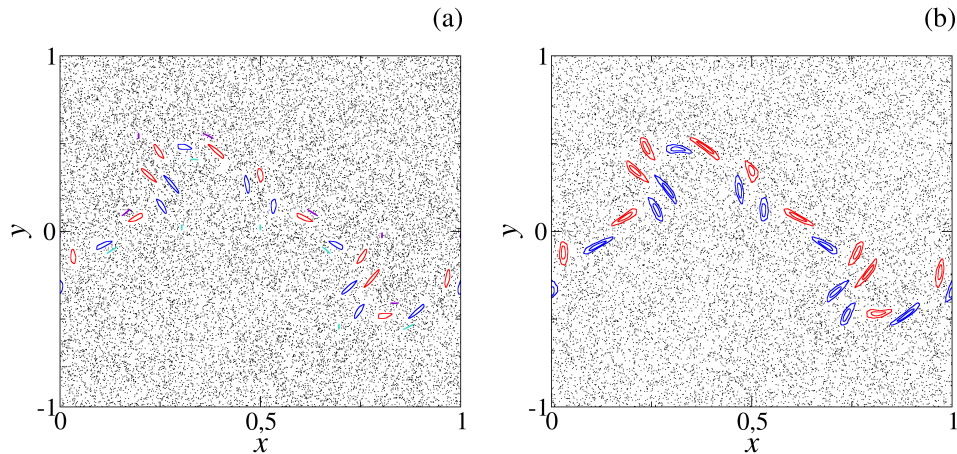
O nosso objetivo é investigar e entender a diferença entre o transporte alto e baixo, representados pela linha vermelha e azul respectivamente, e o mecanismo no espaço de fase que leva a este regime de alta transmissividade. Nosso próximo passo é construir os espaços de fase para estas duas situações de transporte.

3.2.2 Espaços de fase

O espaço de fase é dado pelas evoluções temporais das equações definidas em (3.3). Para o transporte baixo escolhemos os parâmetros $(a, b) = (0,8042; 0,6)$, e para o transporte alto, temos $(a, b) = (0,80543; 0,6)$. Os espaços de fase para cada caso são apresentados na figura 15.

Ambos espaço de fase não apresentam barreiras totais, apenas mar caótico (pontos pretos) e duas cadeias de ilhas. Estas ilhas são chamadas ilhas gêmeas pois são visualmente iguais, tem o mesmo número de rotação mas estão em superfícies de energias diferentes, elas são trajetórias de condições iniciais diferentes: uma trajetória que começa na ilha azul nunca chega à ilha

Figura 15 – Espaços de fase para $b = 0,6$ e (a) $a = 0,80420$ e (b) $a = 0,80543$.



Fonte: A autora.

vermelha.

O espaço de fase da figura 15 (a) representa o caso de transporte baixo enquanto o da figura 15 (b), o de transporte alto. Notamos que, visualmente, não há nada que torne possível essa conclusão, pelo contrário, uma vez que as ilhas presentes na figura 15 (b) são maiores, isto nos conduziria erroneamente a acreditar que este caso teria um transporte mais baixo. Para tentar explicar estes resultados contraintuitivos, analisamos as variedades do sistema e o seu papel no transporte pelo espaço de fase.

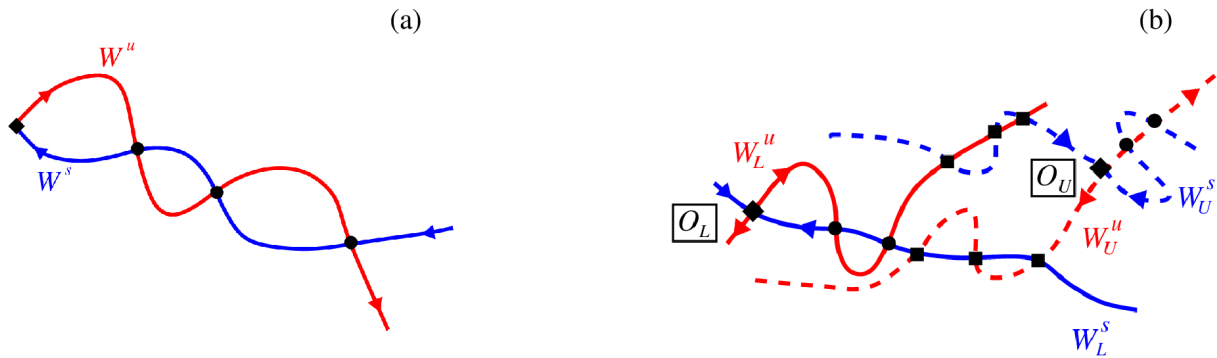
3.2.3 Mecanismo de transporte: as variedades e os turnstiles

Segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff, em um sistema perturbado, um toro racional, após sua quebra, é substituído por pontos elípticos e hiperbólicos, sendo assim, para cada ponto elíptico (ponto estável) existe um ponto hiperbólico (ponto instável) correspondente. Estes pontos instáveis geram as variedades estáveis e instáveis do sistema. A variedade estável de uma órbita periódica ou de um estado estacionário é o conjunto de pontos ξ que ao serem evoluídos temporalmente "para frente" se aproximam da órbita periódica (ou estado estacionário)²⁴. De maneira análoga, a variedade instável é o conjunto de pontos ξ que se aproxima da órbita regular ou do estado estacionário se evoluirmos os pontos "para trás", ou seja, com o mapa inverso (assumimos que o mapa é invertível)²⁴.

A existência de cadeias gêmeas no mapa padrão não *twist* faz com que existam variedades estável e instável superiores e inferiores, cada par instável-estável correspondente a uma cadeia. Uma variedade pode interseccionar apenas outra de estabilidade oposta: pode existir pontos

de intersecção apenas entre um variedade estável e uma instável. Se a intersecção é formada por variedades que partem o mesmo ponto hiperbólico, o ponto de intersecção é chamado homoclínico, caso elas sejam de pontos diferentes, temos um ponto heteroclínico. As cadeias gêmeas permitem que existam dois cenários diferentes de cruzamento entre as variedades: se as intersecções forem entre variedades de uma mesma cadeia temos o cenário de *intracrossing*, se forem de cadeias diferentes, temos o cenário de *intercrossing*.

Figura 16 – (a) Cenário de *intracrossing* apenas com pontos homoclínicos (representados pelos círculos) e (b) cenário de *intercrossing* onde variedades das duas cadeias se interseccionam formando os pontos heteroclínicos (representados pelos quadrados). Também observamos alguns pontos homoclínicos no *intercrossing*. As variedades estáveis (instáveis) são identificadas por W^S (W^U) e, para o *intercrossing*, as variedades da cadeia superior (inferior) são identificadas pelo subíndice U (L), proveniente do inglês para *upper* (*lower*) (Upper e Lower foram os termos escolhidos no artigo ⁴² e significam superior e inferior, respectivamente).



Fonte: A autora.

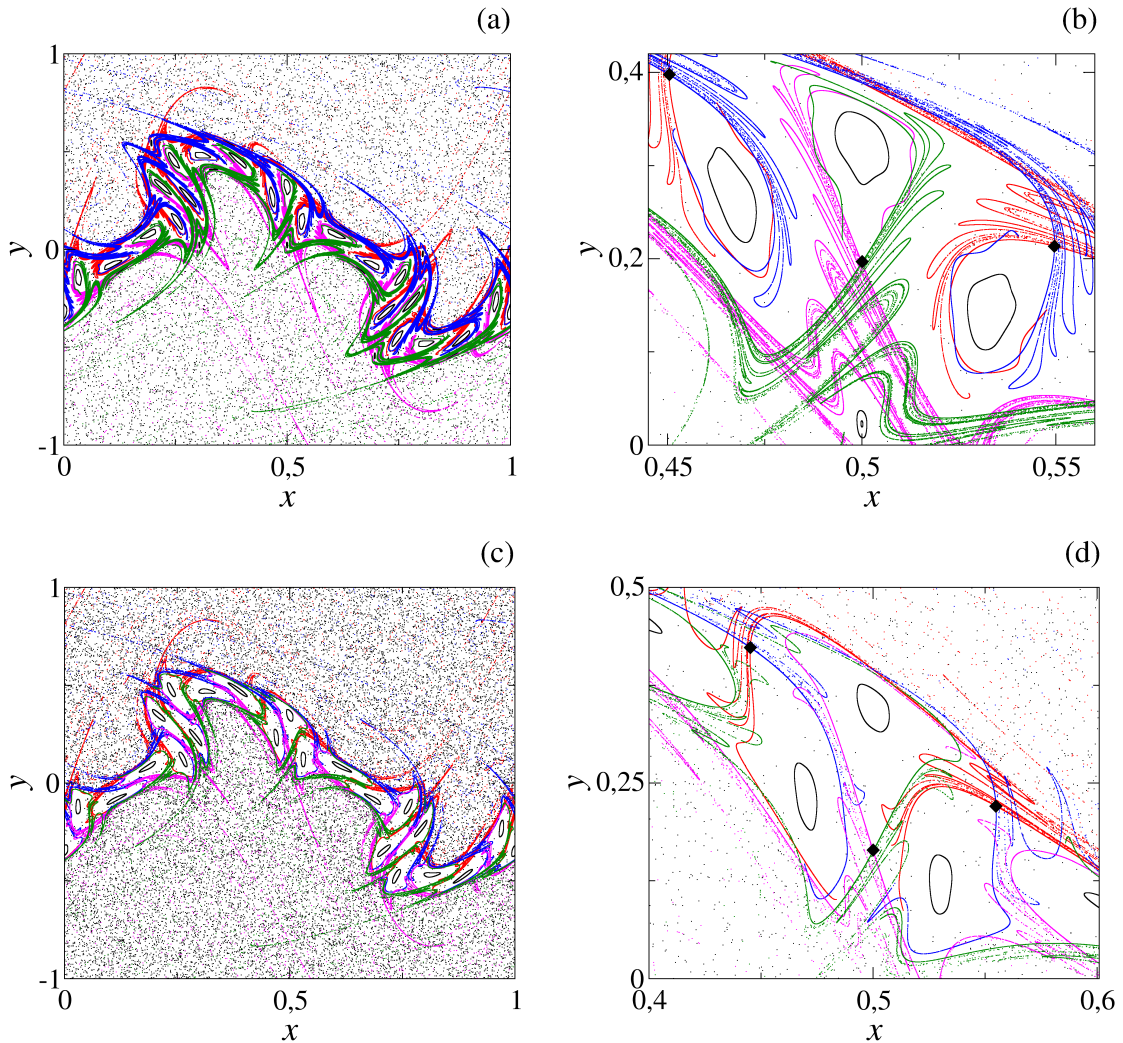
Na figura 16 (a) temos a representação esquemática do encontro entre as variedades estável (W^S) e instável (W^U) de um mesmo ponto hiperbólico (indicado pelo quadrado preto). Os pontos de intersecção, representados por círculos, são pontos homoclínicos e este é o cenário de *intracrossing*. O cenário de *intercrossing* é observado na figura 16 (b) onde temos a intersecção de variedades provenientes de pontos hiperbólicos diferentes e de cadeias de ilhas diferentes. Consideramos, neste momento, duas cadeias de ilhas, a cadeia superior, que contém o ponto hiperbólico O_U , e a cadeia inferior, com o ponto hiperbólico O_L . Os superíndices das variedades W indicam se elas são estáveis (com índice s (*stable*, cor vermelha)) ou instáveis (com índice u (*unstable*, cor azul)) enquanto os subíndices indicam a qual cadeia elas pertencem: superior (U , *upper*), representadas pela curva tracejada, ou inferior (L , *lower*), representada pela linha cheia [‡].

Construindo as variedades para o caso de alto ($a = 0,80543$) e baixo ($a = 0,8042$) transporte, ambos indicados no resultado da transmissividade na figura 14 e apresentados pelos

[‡] A escolha pelo uso super e subíndice é baseada no artigo ⁴² e estes índices são traduzidos como: *upper* é superior, *lower* representa inferior, *stable* é estável e *unstable*, instável.

espaços de fase na figura 15, observamos o cenário das variedades na figura 17.

Figura 17 – Espaços de fase e variedades para $b = 0,6$ e (a) $a = 0,80420$ e (c) $a = 0,80543$. Na coluna da direita, temos as respectivas ampliações ao redor das ilhas centrais próxima de $x = 0,5$. A variedade estável (instável) superior é representada pela cor vermelha (azul) enquanto a variedade estável (instável) inferior é identificada pela curva em rosa (verde). Os pontos hiperbólicos, na ampliação, estão indicados pelos losangos.



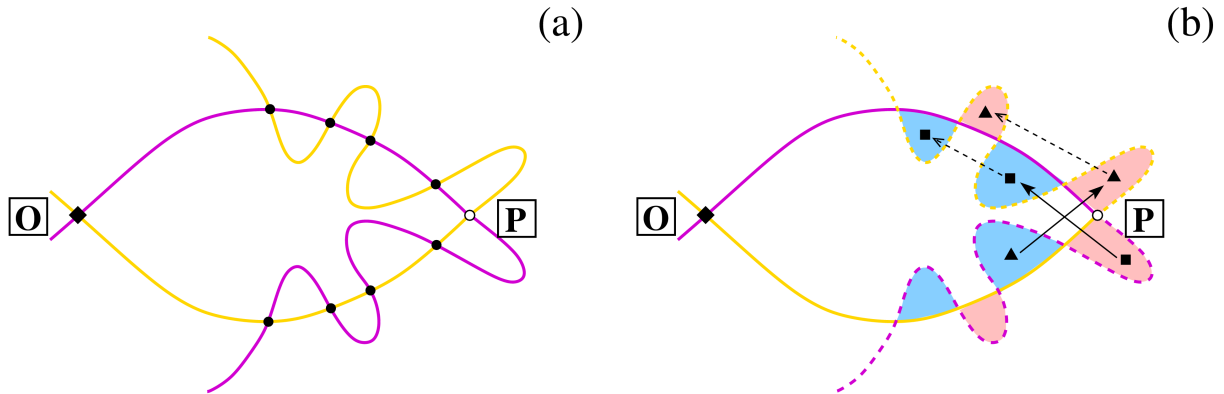
Fonte: A autora.

As variedades da cadeia inferior, W_L^u e W_L^s , são representadas pelas curvas verde e rosa na figura 17, respectivamente. Para a cadeia de ilhas superior, as variedades W_U^u e W_U^s são indicadas pelas curvas em azul e vermelha, respectivamente. Os pontos hiperbólicos são representados pelos símbolos quadrados. Uma vez que a ilha tem um período 11, o ponto hiperbólico também tem este período, por esse motivo que há mais de um ponto hiperbólico para cada cadeia.

Nas ampliações, representadas nas figuras 17 (b) e (d), observamos que as intersecções sucessivas entre variedades definem áreas, que formam lóbulos entre as duas curvas. Segundo

os trabalhos encontrados na literatura ^{9, 52, 53}, a configuração dos pontos heteroclínicos e homoclínicos e das áreas entre as variedades interfere no transporte e determina a passagem das trajetórias pelas barreiras parciais ⁴². Para entender como ocorre essa interferência, precisamos primeiramente compreender o mecanismo de *turnstile*. Considerando um ponto hiperbólico **O**, sua variedade estável e instável se interceptam e definem os pontos homoclínicos, como já mostramos anteriormente e esquematizamos na figura 18. Entre estes pontos, escolhemos um ponto **P** entre os pontos homoclínicos e denominamos ponto principal de interseção (PPI) e o identificamos como **P** ⁵³.

Figura 18 – (a) Interseção entre a variedade estável (curva em rosa) e instável (curva em amarelo). Os pontos homoclínicos estão indicados pelos círculos cheios e o ponto principal de interseção (PPI) está representado pelo círculo branco. (b) As áreas internas (externas) à pseudo-separatriz estão representadas por azul (rosa). O quadrado e o triângulo representam condições iniciais em diferentes áreas. A seta cheia (tracejada) indica a primeira (segunda) iteração.



Fonte: A autora (Adaptado de ⁵³).

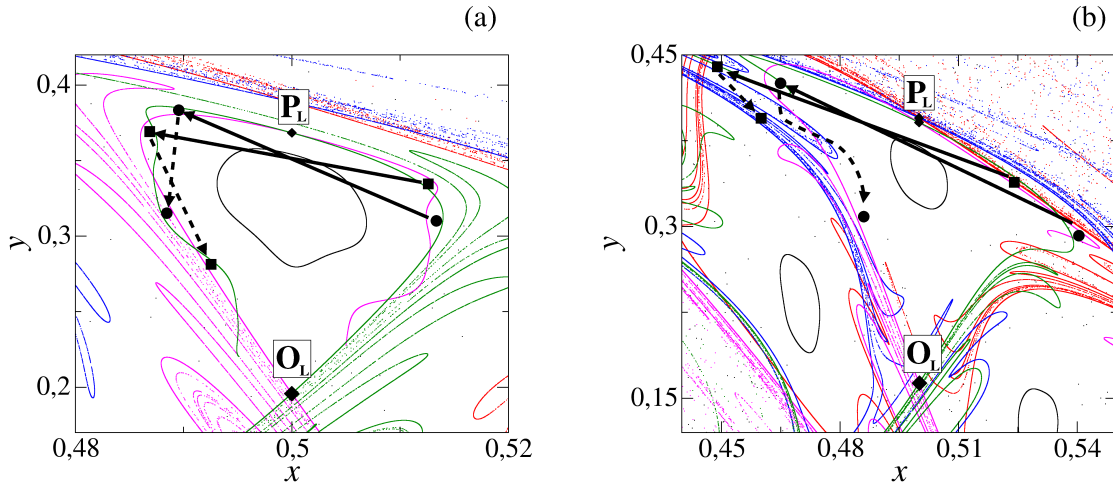
A união dos segmentos da variedade instável $W^u(O, P)$ e estável $W^s(P, O)$ forma uma "pseudo separatriz" e define as zonas de ressonância. Esta pseudo separatriz é a curva cheia na figura 18 (b) e ela define duas regiões no espaço de fase: os lóbulos no interior da curva e os lóbulos no exterior. Na figura 18 (b), os lóbulos no interior (exterior) são representados pela área sombreada azul (rosa).

As condições iniciais presentes no lóbulo, quando iteradas, seguem a direção das setas. Vemos que, no lóbulo anterior a **P** (no sentido anti-horário), as condições presentes no lóbulo interno (triângulo), quando iteradas, são mapeadas em um lóbulo externo depois de **P**; a mesma inversão de regiões ocorre para o lóbulo inicialmente externo (quadrado). Esta região formada pelos lóbulos, e onde ocorre a inversão, é denominada *turnstile*.

Agora podemos analisar o mecanismo de *turnstile* para os dois casos de transporte. Primeiramente escolhemos o ponto de intersecção principal entre todos os pontos homoclínicos

e em seguida realizamos a iteração dos lóbulos vizinhos. Escolhemos a cadeia de ilhas inferior (*lower*) do espaço de fase e analisamos a linha central, em $x = 0,5$. O ponto hiperbólico, identificado por O_L , assim como o PPI escolhido P_L estão na linha $x = 0,5$.

Figura 19 – Região de *turnstile* para o caso de (a) transporte baixo ($a = 0,8042$) e (b) transporte alto ($a = 0,80543$). Círculos e quadrados indicam condições iniciais diferentes. A primeira iterada é representada pela seta cheia enquanto a segunda é representada pela seta tracejada.



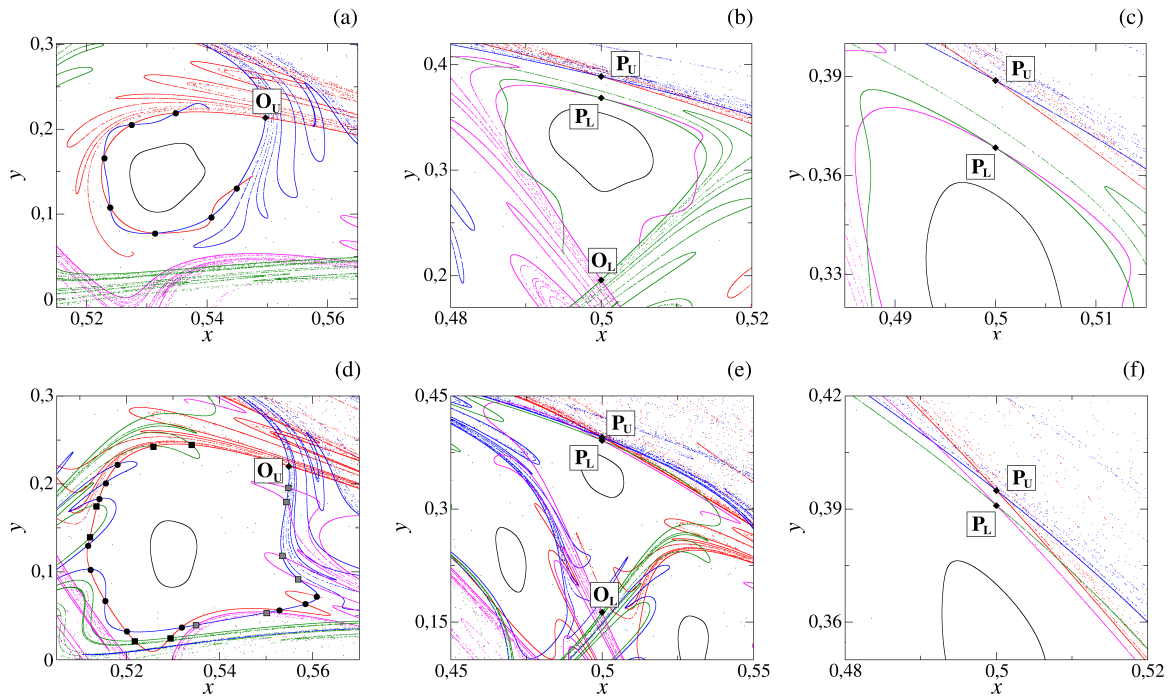
Fonte: A autora.

Para o caso de transporte baixo (figura 19 (a)) observamos comportamento idêntico ao indicado na figura esquemática anterior (figura 18). A trajetória que começa na condição inicial representada pelo quadrado (círculo) está fora (dentro) da zona de ressonância, ou seja, no lado externo (interno) da pseudo separatriz. Após duas iteradas, observamos que a trajetória que estava fora (dentro) da área de ressonância entra (deixa) esta área. É importante notar que as trajetórias continuam na cadeia de ilhas inferior e o cenário observado neste caso é o cenário de *intracrossing*, apenas intersecções entre as variedades de uma mesma cadeia.

Na figura 19 (b) adotamos o mesmo procedimento aplicado na figura 19 (a). Para o transporte alto, podemos observar que as trajetórias que começam na cadeia de ilhas inferior representada pelo círculo e o quadrado, após duas iteradas começam a acompanhar a variedade instável da cadeia superior, representada pela curva em azul. Neste caso, observamos a troca das trajetórias entre a cadeia superior e inferior, e isto implica em uma modificação no cenário homoclínico do *turnstile* e do cenário de *intracrossing* do sistema. O *turnstile* não representa mais apenas a entrada e saída da trajetória de uma zona de ressonância ao redor de uma ilha, mas sim uma região onde a trajetória atravessa a cadeia de ilhas no espaço de fase. Agora, o *turnstile* age como um mecanismo de transporte no espaço de fase. O cenário observado é um

cenário de *intercrossing* pois agora temos intersecções heteroclínicas entre as variedades estáveis e instáveis das cadeias de ilhas superiores e inferiores. Na figura 20, evidenciamos a diferença entre os cenários de *intracrossing* e *intercrossing* e o mecanismo da transição entre esses dois cenários pelos pontos principais de interseção.

Figura 20 – Principais pontos de interseção para os dois casos de transporte: alto ($a = 0,8042$), na linha superior, e baixo ($a = 0,80543$), na linha inferior. O ponto hiperbólico é representado por O_U (O_L) e o PPI é indicado por P_U (P_L) para cadeia superior (inferior). Círculos cheios representam os pontos de interseção do cenário de *intracrossing* enquanto os quadrados cheios e hachurados representam os PPIs do *intercrossing*.



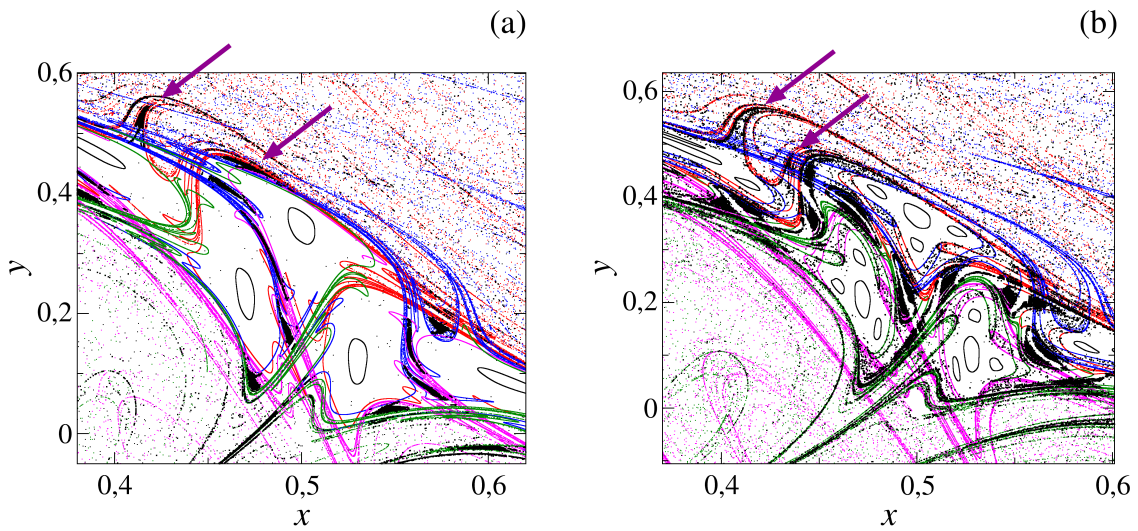
Fonte: A autora.

Na figura 20, os círculos representam pontos homoclínicos enquanto os quadrados cheios (hachurados) representam pontos heteroclínicos formados a partir da interseção entre as variedades W_U^s e W_L^u (W_U^u e W_L^s). Para o caso de transporte baixo (figura 20 (a)) observamos apenas pontos homoclínicos enquanto que para o transporte alto (figura 20 (d)), observamos pontos homoclínicos e heteroclínicos. Outra diferença marcante entre os dois casos é a proximidade entre os pontos PPIs P_L e P_U , que pode ser observada nas figuras 20 (b) e 20 (e) e nas ampliações 20 (c) e (f), respectivamente. No cenário de *intracrossing* a distância entre os pontos é relativamente maior que para o *intercrossing*. Sendo assim, podemos alegar que a proximidade maior dos pontos PPIs e o cenário de *intercrossing* interferem no mecanismo de *turnstile* e possibilita que a trajetória que está em uma zona de ressonância de uma cadeia visite uma zona de ressonância da

outra cadeia e assim, atravesse a barreira parcial e, conseqüentemente, aumente o transporte pelo espaço de fase.

Até este momento, pudemos concluir que a diferença entre os casos de alto e baixo transporte se deve a proximidade entre as variedades das ilhas gêmeas e ao cenário de *intra* e *intercrossing*. Por último, queremos investigar como ocorre o transporte pelo espaço de fase, isto é, como a trajetória atravessa a cadeia de ilhas. Escolhendo os dois casos com transmissividade alta, $a = 0,80543$ e $a = 0,8068$, escolhemos um conjunto de condições iniciais sobre a reta $y = 0,8$ e acompanhamos sua trajetória até que ela chegue em $y = -0,8$, dentro do intervalo de tempo de 100 iteradas, para $a = 0,80543$, e 400 iteradas, para $a = 0,8068$. Como vimos no resultado para a transmissividade, o transporte só ocorre em $a = 0,8068$ para $n = 400$, por isso precisamos escolher estes dois intervalos de tempo.

Figura 21 – Fluxo através das cadeias de ilhas para (a) $a = 0,80543$ e (b) $a = 0,8068$. Os pontos pretos indicam as trajetórias provenientes de $y = 0,8$ que chegam a $y = -0,8$.



Fonte: A autora.

Pela figura 21, observamos que as trajetórias provenientes da região superior do espaço de fase atravessam a cadeia de ilhas pelos lóbulos formados pelas variedades, como indicados pelas setas. As trajetórias acompanham a variedade da cadeia superior, e como mostrado pelo *turnstile* da figura 19, há a troca de variedade e então a trajetória começa a acompanhar a variedade inferior, chegando a região mais inferior do espaço de fase. Esse comportamento é observado para os dois casos $a = 0,80543$ (linha azul na figura 14) e $a = 0,8068$ (linha verde na figura 14).

O estudo do fluxo pelo espaço de fase corrobora o cenário de *turnstile* observado para o caso de alto transporte: o transporte através do espaço de fase ocorre devido à presença dos

lóbulos formado devido ao cruzamento das variedades, em um cenário de *intercrossing*. Unindo este resultado com a proximidade dos PPIs, podemos explicar a alta transmissividade no espaço de fase para o mapa padrão não *twist*.

4 BARREIRAS, SIMETRIA E ENTROPIA PARA O MAPA NÃO *TWIST*

A procura por órbitas periódicas em sistemas bidimensionais é um problema em que é necessário achar as raízes das equações que definem o sistema. Podemos reduzir a complexidade do problema tornando-o um problema unidimensional ao usar as simetrias do sistema. Para sistemas contínuos (equações diferenciais) as simetrias determinam as integrais de movimento¹³, e a partir delas conseguimos reduzir a dimensão do sistema e encontrar as suas raízes. Para sistemas com dinâmica discreta, os mapas, não temos integrais de movimento, entretanto, com as operações de simetria é possível encontrar suas órbitas periódicas. Neste capítulo investigaremos as simetrias do mapa padrão não *twist*, as propriedades e consequências associadas a transformação de simetria do sistema.

4.1 SIMETRIA

4.1.1 Transformação de simetria e pontos indicadores

Uma transformação T_S é dita ser uma transformação de simetria de um mapa M se a relação $M = T_S^{-1}MT_S$ for satisfeita, ou $T_SM = MT_S$, uma vez que $T_ST_S^{-1} = T_S^{-1}T_S = \mathbb{1}$. Em outras palavras, o mapa é invariante em relação a T_S . A transformação T_S também pode ser chamada de simetria do sistema.

Outra propriedade relacionada a simetria são as linhas de simetria do sistema, e elas são definidas como o conjunto de pontos no espaço de fase que é solução da equação $I_{0,1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, onde $I_{0,1}$ são as decomposições do mapa M : $M = I_1 \circ I_0$.

O mapa padrão não *twist*, definido por

$$M_{\text{SNM}}(x_n, y_n) = (x_n + a(1 - y_{n+1}^2), y_n - b \sin(2\pi x_n)), \quad (4.1)$$

pode ser decomposto como $M_{\text{SNM}} = I_1 \circ I_0$, onde as involuções são¹³

$$I_0(x, y) = (-x, y - b \sin(2\pi x)), \quad (4.2)$$

$$I_1(x, y) = (-x + a(1 - y^2), y). \quad (4.3)$$

Pela definição de linha de simetria, encontramos duas linhas S_i , uma associada a cada involução. Sendo assim temos, para a involução I_0

$$I_0(x, y) = (x, y) \rightarrow (-x, y - b(\sin 2\pi x)) = (x, y) \rightarrow (x = 0, y), \quad (4.4)$$

logo,

$$S_0 := \{(x, y) | x = 0\}. \quad (4.5)$$

Para a involução I_1 , temos

$$I_1(x, y) = (x, y) \rightarrow (-x + a(1 - y^2), y) = (x, y) \rightarrow \left(x = \frac{a(1 - y^2)}{2}, y\right), \quad (4.6)$$

sendo assim, a linha de simetria é definida como

$$S_1 := \left\{ (x, y) | x = \frac{a(1 - y^2)}{2} \right\}. \quad (4.7)$$

Com as linhas de simetria, reduzimos a procura de órbitas regulares para um problema de uma variável: a variável y , uma vez que as variáveis x são definidas pelas linhas S_0 e S_1 . Como definimos anteriormente, a simetria de um sistema é dada pela transformação de simetria. Segundo Morrison ¹³, para o SNM, a simetria é definida pela transformação

$$T_S(x, y) := \left(x \pm \frac{1}{2}, -y\right). \quad (4.8)$$

Se substituirmos (4.1) e (4.8) na identidade $MT_S = T_SM$, encontraremos as relações

$$x \pm 1/2 + a(1 - y_{n+1}^2) = x \pm 1/2 + a(1 - y_n^2), \quad (4.9)$$

$$(-y) - b \sin(2\pi x \pm \pi) = -[y - b \sin(2\pi x)]. \quad (4.10)$$

Uma vez que $\sin(2\pi x \pm \pi) = -\sin(2\pi x)$, a identidade (4.10) é verdadeira, e o SNM é simétrico em relação a transformação T_S .

Aplicando T_S definido em (4.8) nas duas linhas de simetria S_0 e S_1 encontramos mais duas linhas de simetria:

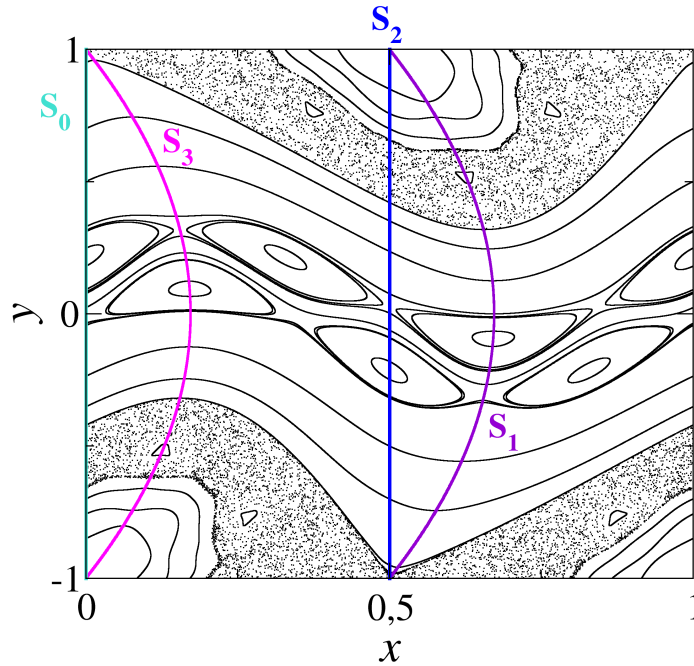
$$S_2 := \left\{ (x, y) | x = \frac{1}{2} \right\}, \quad (4.11)$$

$$S_3 := \left\{ (x, y) | x = \frac{a(1 - y^2)}{2} + \frac{1}{2} \right\}. \quad (4.12)$$

A posição das quatro linhas de simetria estão indicadas no espaço de fase da figura 22.

Como sabemos, o mapa SNM viola a condição *twist*, ou seja, há duas órbitas no espaço de fase com o mesmo número de rotação ω , isto é, o perfil é não monotônico, como visto na figura 13. Pelas linhas de simetria conseguimos encontrar as órbitas correspondentes: uma órbita começando na linha de simetria S_0 (S_1) tem a sua correspondente, com o mesmo ω , na linha de

Figura 22 – Espaço de fase para o mapa SNM com $a = 0,345$ e $b = 0,351$ e as linhas de simetria do sistema.



Fonte: A autora.

simetria S_2 (S_3). As linhas de simetria passam pelas ilhas e curvas do espaço de fase, o que faz com que o problema de achar estas órbitas regulares se reduza a um problema de uma dimensão apenas, como proposto anteriormente.

O mapa não *twist* tem como propriedade a existência da curva *shearless*. Uma maneira simples de indicar a presença destas curvas é pelos pontos indicadores^{54,55}: se estes pontos pertencerem a uma órbita periódica, ela será a curva *shearless*. De fato, estes pontos são os pontos de interseção entre a curva *shearless* e o eixo x ⁵⁶.

Os pontos indicadores $\mathbf{z}$ são obtidos a partir da transformação de simetria T_S e são solução da equação

$$I_i \mathbf{z}_i = T_S \mathbf{z}_i, \quad i = 0, 1 \quad (4.13)$$

Substituindo (4.5), (4.6) e (4.8) em (4.13) e resolvendo para $\mathbf{z}_i$, temos, para I_0

$$\begin{aligned}
 I_0 \mathbf{z}_0 &= T_S \mathbf{z}_0 \\
 (-x_0, y_0 - b \sin(2\pi x_0)) &= (x_0 \pm 1/2, -y_0) \\
 -x_0 &= x_0 \pm 1/2 \rightarrow x_0 = \mp 1/4 \\
 y_0 - b \sin[2\pi(\mp 1/4)] &= -y \rightarrow y_0 = \mp \frac{b}{2}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{z}_0^{(0,1)} = \left(\mp \frac{1}{4}, \mp \frac{b}{2} \right). \tag{4.15}$$

Para I_1 , temos

$$\begin{aligned}
 I_1 \mathbf{z}_1 &= T_S \mathbf{z}_1 \\
 (-x_1 + a(1 - y_1^2), y_1) &= (x_1 \pm 1/2, -y_1) \\
 y_1 &= -y_1 \rightarrow y_1 = 0 \\
 -x_1 + a &= x_1 \rightarrow x_1 = \frac{a}{2} \mp 1/4
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{z}_1^{(0,1)} = \left(\frac{a}{2} \mp \frac{1}{4}, 0 \right). \tag{4.17}$$

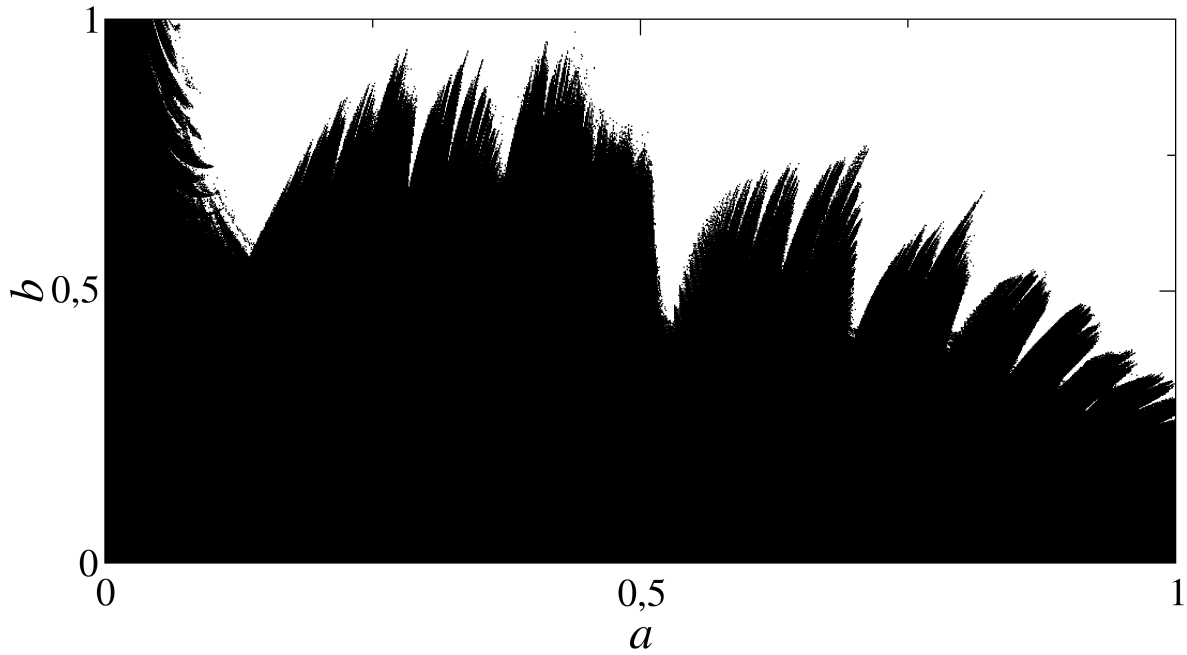
Como os pontos indicadores são uma consequência da existência da curva *shearless*, a partir deles podemos estimar os parâmetros críticos para o desaparecimento desta curva. O método para calcular esta estimativa é explicado a seguir.

4.1.2 Espaço de parâmetros para a quebra da curva *shearless*

A partir dos pontos indicadores, Morrison *et al* propuseram um método para estimar a localização dos parâmetros críticos (a, b) para a quebra da curva *shearless*⁵⁵. O método se baseia em escolher um par (a, b) e iterar os respectivos pontos indicadores (4.15) e (4.17) por um longo intervalo de tempo e observar se a trajetória escapa para grandes valores de y durante este intervalo: se a trajetória não escapar, a curva *shearless* existe no espaço de fase; caso contrário, ela foi destruída.

Para o mapa SNM, iteramos o ponto indicador z_0^1 de todos os pares (a, b) com a e $b \in [0, 1)$ por um intervalo de $n = 10^6$ iteradas. Se a trajetória com condição inicial em z_0^1 permanecer dentro dos limites $|y| < 10$, consideramos que a curva *shearless* existe e marcamos

Figura 23 – Espaço de parâmetro para a existência da curva *shearless* para o mapa padrão não *twist*.



Fonte: A autora.

um ponto no espaço de parâmetros $a \times b$; caso contrário, a curva já foi destruída e o ponto não é marcado. O resultado está na figura 23.

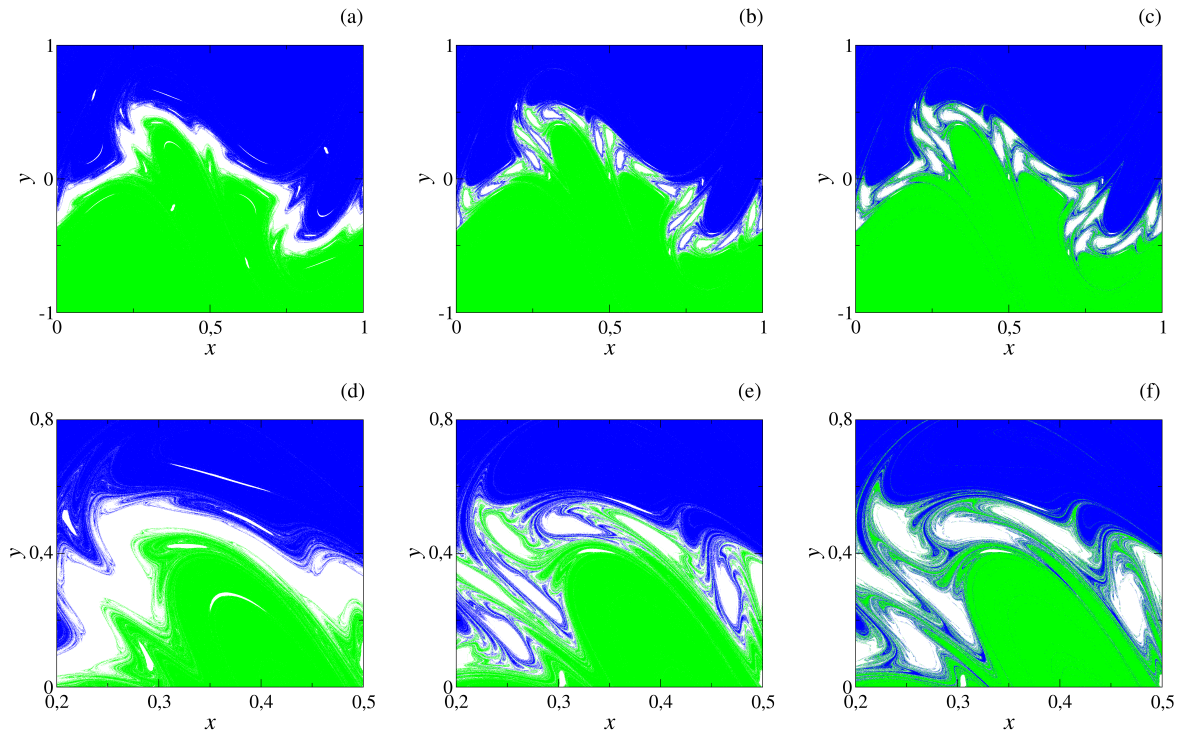
Os pontos em preto indicam a presença da curva *shearless* no espaço de fase. Podemos ver que a estrutura do espaço de parâmetro não é trivial e nos fornece uma aproximação da curva crítica (a, b) para a quebra da curva: a fronteira entre a região preta e a região branca.

4.2 BACIAS DE ESCAPE

As bacias de escape foram introduzidas no capítulo 2, assim como o conceito de entropia de bacia e de borda de bacia. Para o mapa SNM escolhemos como escape as linhas $y = 1$ e $y = -1$. Construindo uma malha de $3 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^3$ condições iniciais distribuídas uniformemente na região do espaço de fase onde $x \in [0, 1]$ e $y \in [-1, 1]$. Se uma trajetória originada de uma condição inicial (x_0, y_0) atravessar a linha $y = 1$ ($y = -1$), dentro do intervalo de tempo $n = 400$, o ponto (x_0, y_0) é marcado com a cor azul (verde). Caso a trajetória não escape dentro deste tempo, a condição inicial está em uma ilha ou em uma barreira e é marcada com a cor branca.

Na figura 24, temos três casos de espaço de fase: um caso com transporte nulo, outro de transporte baixo e o último de transporte alto. Na bacia de escape da figura 24 (a) observamos uma faixa contínua branca separando as duas bacias azul e verde. Essa faixa representa uma

Figura 24 – Bacias de escape para casos de transporte (a) nulo $a = 0,79500$, (b) baixo $a = 0,80420$ e (c) alto $a = 0,80543$, e suas respectivas ampliações em (d), (e) e (f). Em todos os casos, $b = 0,6$.



Fonte: A autora.

barreira total que impede o transporte pelo espaço de fase. Há algumas regiões brancas pequenas imersas nas bacias, como podemos ver em (a) e (d), elas representam as ilhas imersas no mar caótico. Para o caso representado pela figura 24 (b), temos o caso de transporte baixo estudado no capítulo anterior: não existe mais uma barreira total mas devido ao cenário de *intracrossing* o transporte é dificultado. Observamos em (b) e em (e) que a fronteira entre as duas bacias é bem definida. Já para o transporte alto, representado pela figura (24) (c), observamos que a fronteira não é suave, há pontos azuis (verdes) que formam canais na bacia verde (azul): existe uma mistura (*mixing*) entre as duas bacias, que é bem evidenciada na ampliação em (f). Sendo assim, algumas condições iniciais que pertenciam a uma bacia A antes da quebra da barreira podem pertencer a outra bacia B .

A região da borda entre as bacias no caso do transporte alto é uma região de *mixing* e ela é caracterizada pela imprevisibilidade das condições iniciais. Quando escolhemos algum ponto dessa região como CI (x_0, y_0) , pontos ao redor desta condição podem escapar pela mesma saída que a CI ou para a outra.

4.2.1 Entropia de bacia

A presença dos canais que adentram a bacia vizinha na figura 24 (c) próxima a região de fronteira traz uma complexidade para esta fronteira. De fato, os canais representam um *mixing* entre as duas bacias o que caracteriza uma maior incerteza ao sistema: condições iniciais muito próximas podem escapar por diferentes saídas. Para caracterizar a incerteza associada às bacias e suas fronteiras analisamos a dimensão de incerteza, a entropia de bacia e a entropia de borda de bacia.

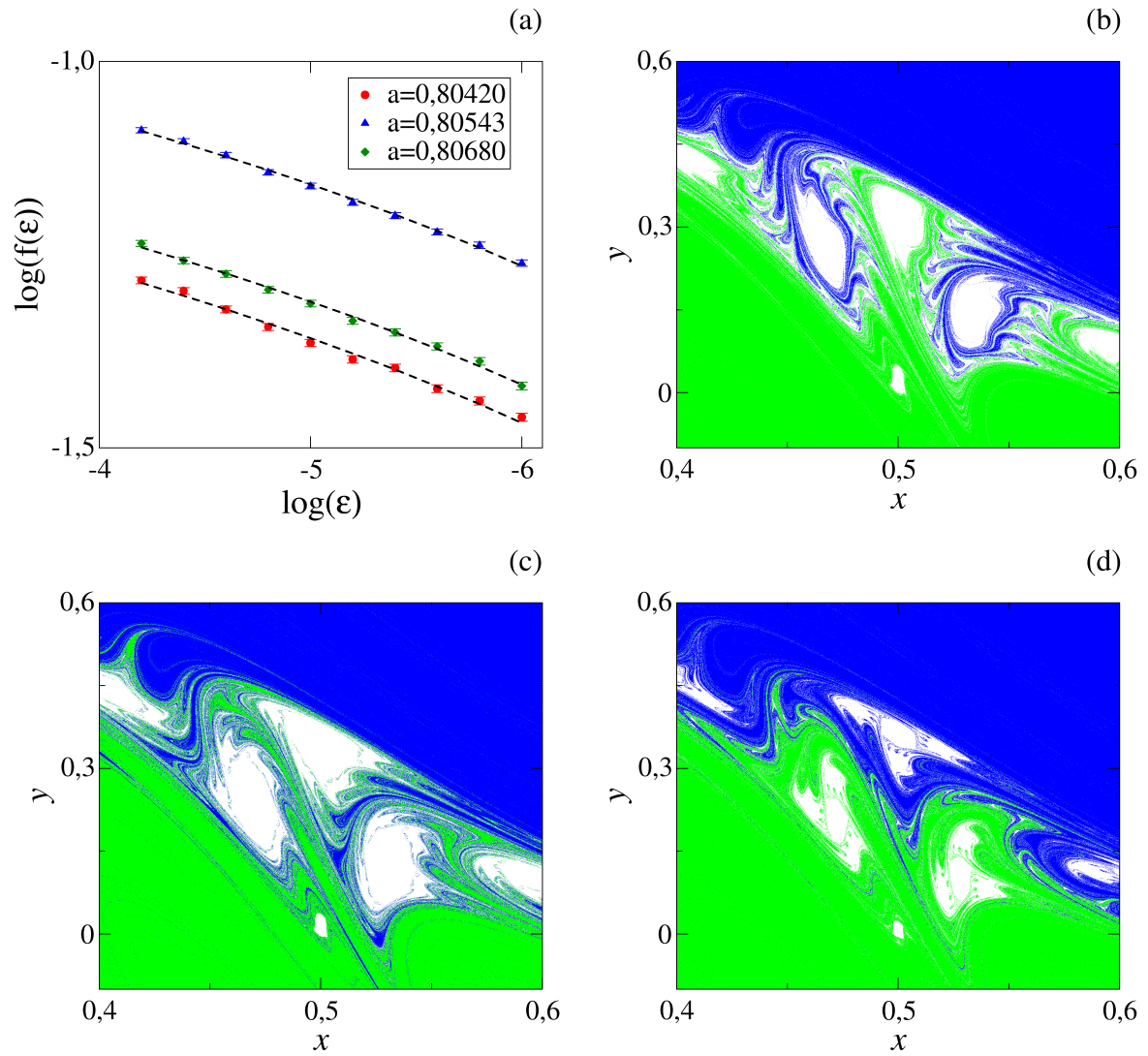
4.2.1.1 Dimensão de Incerteza

A dimensão de incerteza, previamente apresentada, quantifica a incerteza associada ao estado final das condições iniciais pertencentes a duas ou mais bacias. Considerando as duas bacias de escape A (azul) e B (verde), escolhemos um grande número de condições iniciais (x_0, y_0) : elegemos 2×10^4 condições distribuídas aleatoriamente sobre a região do espaço de fase entre $x \in [0, 1)$ e $y \in [-0, 7; 0.7]$. Para cada condição inicial (x_0, y_0) escolhemos duas vizinhas $(x_0 \pm \varepsilon, y_0)$ e iteramos as três condições, segundo as equações que regem o mapa SNM, até que elas escapem por uma das duas saídas $y = \pm 1$. Se todas as condições iniciais escaparem pela mesma saída, dizemos que a condição inicial é certa (há uma certeza), caso contrário, a condição é incerta. A fração de pontos incertos segue uma lei de potência $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, onde α é o expoente de incerteza. Se $\alpha = 1$, a fronteira desta bacia é suave enquanto que se $0 < \alpha < 1$, existe uma sensibilidade do estado final ⁴¹.

Considerando os três casos de transporte: baixo ($a = 0,8042$), intermediário ($a = 0,8068$) e alto ($a = 0,80543$), calculamos a fração de pontos incertos em função do deslocamento ε , com $\varepsilon \ll 1$, para um número total de iterações de $n = 400$.

A figura 25 (a) exhibe o comportamento de $f(\varepsilon)$ em função de ε em um gráfico log-log para cada bacia de escape apresentada nas figuras 25 (b)-(c). O coeficiente angular nos dá o valor do expoente de incerteza α . Na tabela 1, temos o valor de cada expoente para cada valor de a . Para as três situações vemos que $\alpha < 1$, ou seja, existe uma sensibilidade no estado final das condições iniciais. Sendo assim, podemos afirmar que o coeficiente de incerteza nos informa sobre a incerteza, a sensibilidade do estado final que existe nos três casos, mas não explica a diferença no transporte para cada um.

Figura 25 – (a) Fração de incerteza das bacias de escape para os parâmetros (b) $a = 0,80420$ e (c) $a = 0,80543$ e (d) $a = 0,80680$. Em todos os casos, $b = 0,6$.



Fonte: A autora.

Tabela 1 – Expoente de incerteza α calculado pelo coeficiente angular das retas mostradas na figura 25 (a).

Parâmetro a	Expoente de incerteza α	Coeficiente de correlação
0,80420	0,0043	0,9962
0,80543	0,0065	0,9989
0,80680	0,0047	0,9980

4.2.1.2 Entropia de bacia e entropia de borda de bacia

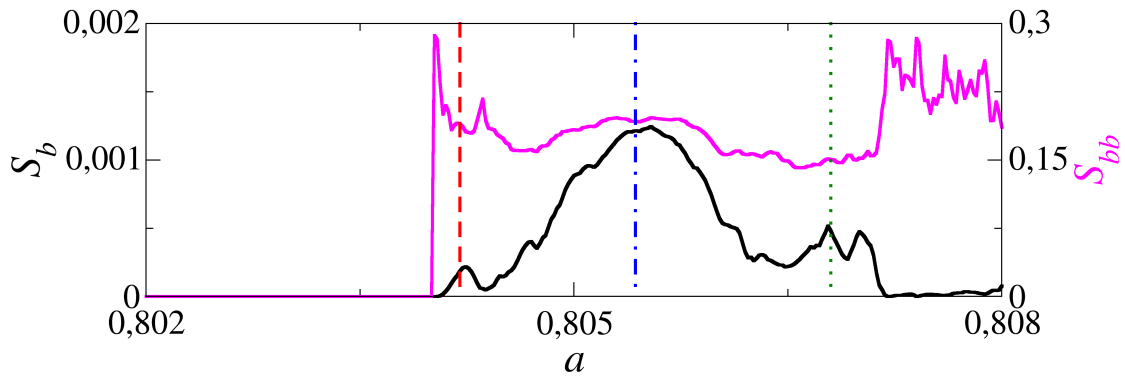
Os resultados obtidos pelo expoente de incerteza mostram que existe uma incerteza no sistema, mas não nos diz o motivo da diferença entre os valores da transmissividade. Então, estudamos a relação entre as entropias associadas às bacias e o transporte no espaço de fase.

Lembrando que a entropia de bacia é definida por $S_b = S/N_{cx}$ e a entropia de borda de bacia é $S_{bb} = S/N_b$. A entropia S é a entropia total de todas as caixas e é definida por

$$S = - \sum_{i=1}^{N_{cx}} \sum_{j=1}^{N_A} p_{ij} \log(p_{ij}). \quad (4.18)$$

onde N_{cx} é o número total de caixas que cobrem as bacias, p_{ij} é a fração das condições iniciais da caixa i que escaparam pela saída j e N_A é o número de saídas. Para o nosso caso, dividimos a região do espaço de fase $x \in [0, 1)$ e $|y| < 1$ em $N_{cx} = 2 \times 10^6$ caixas e em cada caixa consideramos $N_c = 25$ condições iniciais. As entropias S_b e S_{bb} foram calculadas em função do parâmetro a , dentro do intervalo $a \in [0,802; 0,808]$ que engloba os três casos de transporte.

Figura 26 – Entropia de bacia (S_b) e de borda de bacia (S_{bb}) em função do parâmetro a , com $b = 0,6$.



Fonte: A autora.

Pela figura 26 podemos ver que os picos de entropia de bacia coincidem aproximadamente com os picos de transporte, representados pelas linhas vermelha, azul e verde. A entropia de borda de bacia está relacionada com a complexidade da borda da bacia de escape: o valor de S_{bb} é zero quando não há transmissividade, não há o *mixing* entre as bacias, logo, a fronteira entre elas é suave. À medida que S_b cresce podemos ver um salto da entropia S_{bb} que permanece relativamente constante em todo o intervalo de a onde a transmissividade é alta. Este resultado indica que a borda da bacia de escape é complexa quando a curva *shearless* é destruída, quando

começa a acontecer o transporte e seu remanescente forma uma barreira parcial no espaço de fase.

5 MAPA PADRÃO NÃO *TWIST* ESTENDIDO: QUEBRA DE SIME- TRIA E TRANSPORTE DIRECIONADO

5.1 A EXTENSÃO DO MAPA NÃO *TWIST*

Mapas que violam a condição *twist*, como o mapa padrão não *twist* (SNM), são utilizados no estudo da linhas de campo magnéticos em dispositivos toroidais de plasmas e do transporte no plasma magnetizado^{12, 13}. A versão estendida do mapa SNM foi proposta por Portela e colaboradores²² como uma expansão local na vizinhança da barreira principal de transporte, de um mapa não *twist* global que descreve as linhas de campo magnético em um dispositivo de plasma toroidal na presença de um limitador ergódico magnético^{22, 23}.

A versão estendida do mapa padrão não *twist* (ESNM*) é definida pelas equações

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - b \sin(2\pi x_n) - c \sin(2\pi m x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \mod 1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde x está limitado ao intervalo $[0, 1)$ e $y \in \mathbb{R}$, enquanto a , b e c são parâmetros reais e m é inteiro^{22, 23}. Podemos ver que o mapa (5.1) é semelhante ao mapa SNM, definido pelas equações em (3.3), com um novo termo, o termo de perturbação $c \sin(2\pi m x_n)$ devida a presença do limitador ergódico²². Com $c = 0$ em (5.1), voltamos ao mapa SNM. Este mapa também é denominado mapa padrão não *twist* de duas frequências²³, onde a segunda frequência refere-se a presença do segundo termo em seno e tem dependência com o parâmetro m .

Neste capítulo, buscamos estudar e entender o papel deste novo termo de perturbação, sua influência no espaço de fase, na simetria do sistema e no transporte pelo espaço de fase.

5.2 ESPAÇOS DE FASE

O mapa estendido ESNM apresenta dois novos parâmetros: a amplitude c e o número inteiro m . Para estudar a influência destes termos no sistema, construímos os espaços de fase para diferentes valores de m e c , comparando com o caso do mapa SNM, com $c = 0$.

Primeiramente, buscamos estudar o papel da amplitude c no espaço de fase. Fixando $m = 1$, escolhemos como valores de parâmetros $a = 0,8054$, $b = 0,6$, quatro valores de c :

* A sigla é proveniente do nome em inglês *Extended Standard Nontwist Map*

$c = 0,000$, $c = 0,005$, $c = 0,007$ e $c = 0,010$, e os espaços de fase para cada conjunto (a, b, c) são apresentados na figura 27.

Analisando os quatro casos da figura 27 podemos ver que o papel do novo termo é a perturbação e, como consequência, a destruição das ilhas do espaço de fase. A medida que a amplitude c da perturbação aumenta, as ilhas das duas cadeias diminuem de tamanho pela destruição das ilhas mais externas até que, em um certo parâmetro crítico, ocorre a bifurcação e as ilhas são substituídas por outras de período maior, neste caso, o período é o dobro do anterior. Uma característica importante é que a bifurcação das duas cadeias de ilhas ocorre para o mesmo parâmetro.

Agora buscamos entender o papel do parâmetro m no sistema, para isso, escolhemos quatro valores $m = 1, 2, 3$ e 4 . Na figura 28 vemos os quatro espaços de fase para o conjunto de parâmetros $(a, b, c) = (0,8054; 0,6; 0,005)$.

Para os espaços de fase da figura 28, quando o parâmetro m é par, observamos um cenário um pouco diferente do observado na figura 27. Para $m = 1$ e $m = 3$, observamos que as ilhas, pertencentes a cadeias diferentes, são iguais, configurando um cenário de cadeias gêmeas. Já para m par ($m = 2$ e $m = 4$), podemos ver que as ilhas de cada cadeia são diferentes: as ilhas da cadeia inferior para $m = 2$ são menores enquanto que para $m = 4$ as ilhas da cadeia superior são menores. Isso significa que a bifurcação, para cada cadeia ocorre, em diferentes parâmetros. Podemos observar, visualmente, que há uma falta de simetria entre as duas cadeias, não configurando mais ilhas gêmeas. Para confirmar se há mesmo uma falta de simetria no sistema, refazemos o estudo das involuções e da transformação de simetria feita no capítulo 4 para o SNM, agora para o mapa em sua versão estendida.

5.3 QUEBRA DE SIMETRIA

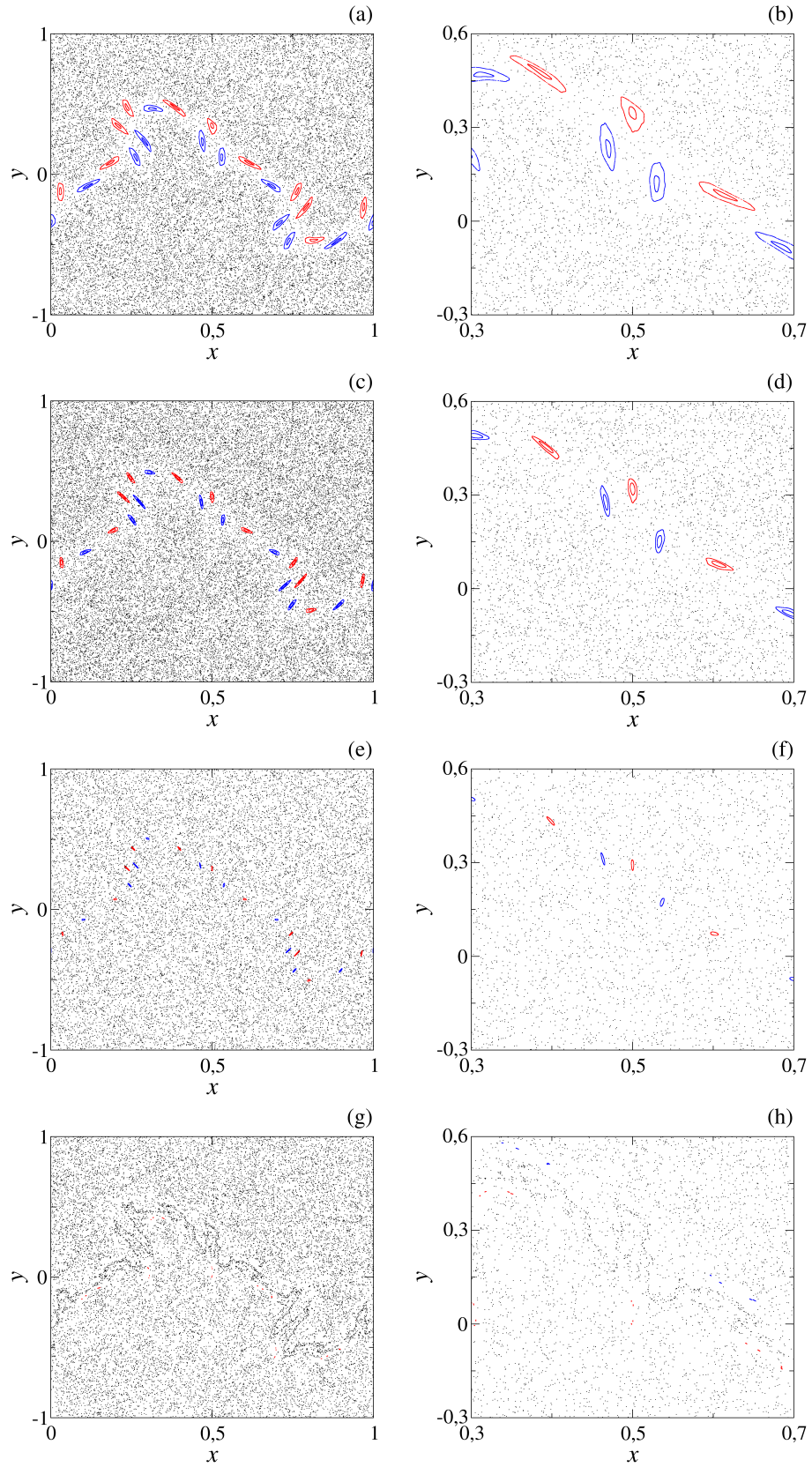
5.3.1 Composição do mapa e linhas de simetria

Assim como o mapa padrão não *twist*, podemos decompor sua versão estendida (ESNM) em duas involuções: $M_E = I_1 \circ I_0$, onde

$$I_0(x, y) = (-x, y - b \sin(2\pi x) - c \sin(2\pi mx)), \quad (5.2)$$

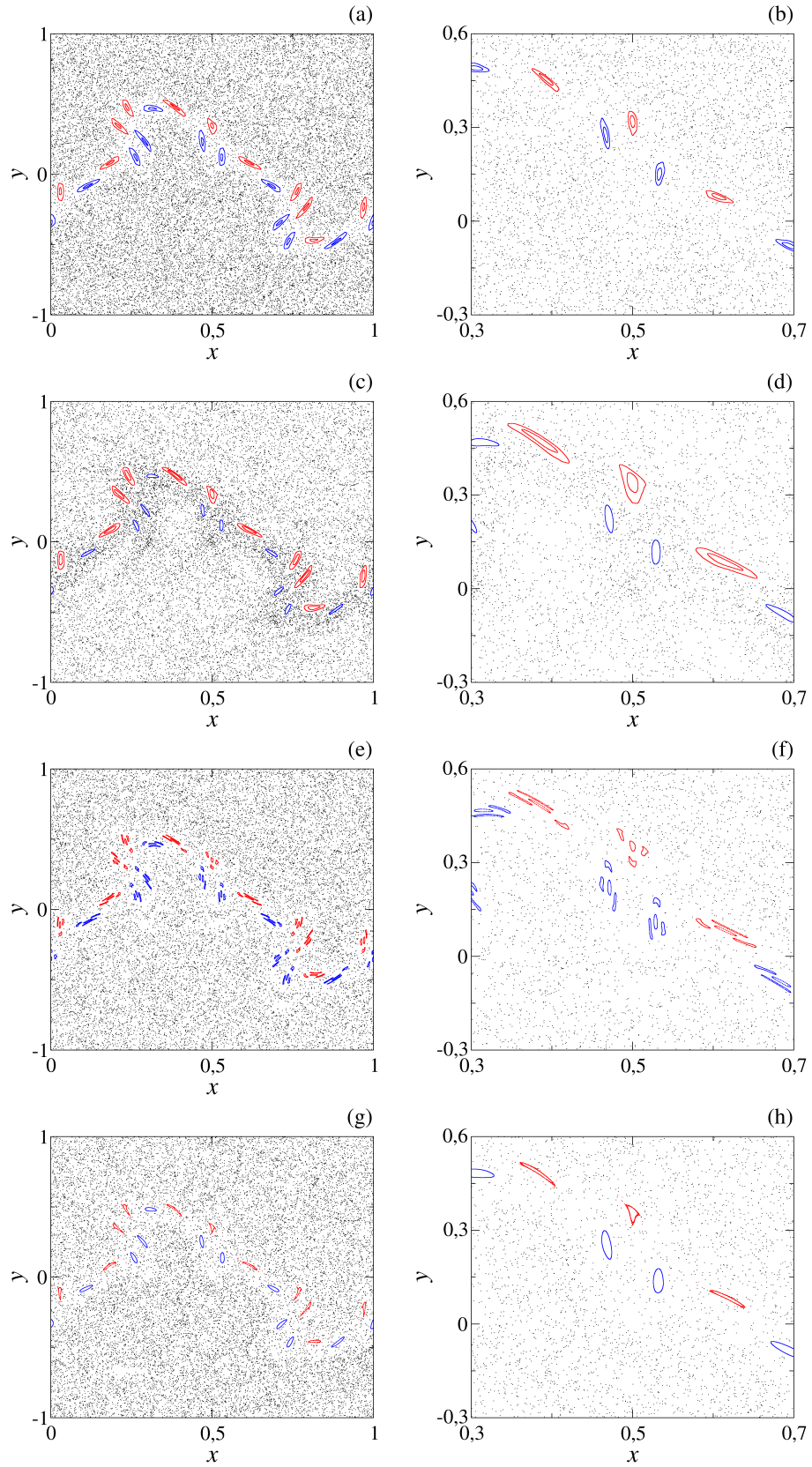
$$I_1(x, y) = (-x + a(1 - y^2), y). \quad (5.3)$$

Figura 27 – Espaço de fase para $a = 0,8054$, $b = 0,6$, $m = 1$ e (a) $c = 0,000$, (c) $c = 0,005$, (e) $c = 0,007$, (g) $c = 0,010$ e suas respectivas ampliações em (b), (d), (f) e (h).



Fonte: A autora.

Figura 28 – Espaço de fase para $a = 0,8054$, $b = 0,6$ e $c = 0,005$ com (a) $m = 1$, (c) $m = 2$, (e) $m = 3$, (g) $m = 4$ e as respectivas ampliações em torno das ilha centrais em (b), (d), (f) e (h).



Fonte: A autora.

As involuções satisfazem as relações $M_E^{-1}I_i = M_E I_i$ e $I_i^2 = \mathbb{1}$, para $i = 0, 1$. Uma vez que o mapa ESNM tem a mesma involução I_1 do mapa SNM, ambos tem as mesmas linhas de simetria S_1 e S_3 , onde, lembramos que

$$S_1 := \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2\}, \quad (5.4)$$

$$S_3 := \{(x, y) | x = a(1 - y^2)/2 + 1/2\}. \quad (5.5)$$

A transformação de simetria definida e satisfeita por SNM é a transformação $T(x, y) = (x \pm 1/2, -y)$. Se aplicarmos esta transformação e o mapa ESNM na relação $MT = TM$ para verificar a validade da simetria, encontramos as seguintes relações

$$\begin{aligned} (x \pm 1/2) + a(1 - y_{n+1}^2) &= [x + a(1 - y_{n+1}^2)] \pm 1/2 \\ -y - b \sin[2\pi(x \pm 1/2)] - c \sin[2\pi m(x \pm 1/2)] &= -y + b \sin(2\pi x) + c \sin(2\pi m x). \end{aligned}$$

Como sabemos, o termo $\sin(2\pi x \pm \pi)$ é equivalente a $-\sin(2\pi x)$, e o termo $\sin[2\pi m(x \pm 1/2)]$ pode ser desenvolvido como

$$\begin{aligned} \sin[2\pi m(x \pm 1/2)] &= \sin(2\pi m x) \cos(\pi m) \pm \cos(2\pi m x) \sin(\pi m), \\ \sin[2\pi m(x \pm 1/2)] &= (-1)^m \sin(2\pi m x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sendo assim, a equação (5.6) se torna

$$\begin{aligned} (x \pm 1/2) + a(1 - y_{n+1}^2) &= [x + a(1 - y_{n+1}^2)] \pm 1/2, \\ -y + b \sin(2\pi x) + (-1)^{m+1} c \sin(2\pi x) &= -y + b \sin(2\pi x) + c \sin(2\pi m x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Observando a segunda equação em (5.7) verificamos que ela só é verdadeira quando m é ímpar; para m par o mapa não é mais simétrico sob a transformação T . Este resultado corrobora com a assimetria observada nos espaços de fase da figura 28 para $m = 2$ e $m = 4$. O resultado em (5.7) é a explicação para a diferença entre as cadeias de ilhas: a falta de simetria impossibilita a existência de ilhas gêmeas, uma vez que ao encontrar uma órbita periódica em uma cadeia, ao aplicar a transformação T , não necessariamente encontraremos outra órbita periódica, isto é, condições iniciais regulares em uma cadeia podem ter uma correspondente caótica na outra cadeia. De fato, é o que ocorre para a figura 28 (c): a cadeia superior tem ilhas maiores ao compará-las com as ilhas da cadeia inferior, ou seja, as ilhas superiores mais externas tem correspondentes que já foram destruídas e agora são trajetórias caóticas.

5.3.2 Pontos indicadores

Como visto no capítulo anterior, os pontos indicadores $\mathbf{z}_i$ são soluções da equação (4.13) $I_i T \mathbf{z}_i = T I_i \mathbf{z}_i$ com $i = 0, 1$. Calculando os pontos indicadores para as involuções (5.3) do mapa estendido, com a transformação de simetria (4.8), temos, para I_0 :

$$I_0 \mathbf{z}_0 = T \mathbf{z}_0$$

$$(-x_0, y_0 - b \sin(2\pi x_0) - c \sin(2\pi m x_0)) = (x_0 \pm 1/2, -y_0)$$

$$-x_0 = x_0 \pm 1/2 \rightarrow x_0 = \mp 1/4 \quad (5.8)$$

$$y_0 - b \sin[2\pi(\mp 1/4)] - c \sin(2\pi m(\mp 1/4)) = -y_0$$

$$2y_0 = b \sin(\mp \pi/2) + c \sin(\mp m\pi/2) \quad (5.9)$$

Como m é ímpar, $\sin(\mp m\pi/2)$ é sempre não nulo. Seu valor pode ser escrito em função do parâmetro m da seguinte maneira: sendo

$$\sin(\mp m\pi/2) = \mp \sin(m\pi/2),$$

temos

$$\mp \sin(m\pi/2) = \begin{cases} \mp 1, \text{ para } m=1, 5, 9, \dots \\ \mp(-1), \text{ para } m=3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad (5.10)$$

Resumindo, temos que

$$\sin(\mp m\pi/2) = \mp(-1)^{\frac{m+1}{2}} = \begin{cases} -(-1)^{\frac{m+1}{2}} = (-1)^{\frac{m+1}{2}+1} = (-1)^{\frac{m-1}{2}+2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \\ +(-1)^{\frac{m+1}{2}} = (-1)^{\frac{m+1}{2}}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Então, $\sin(\mp m\pi/2) = (-1)^{\frac{m\mp 1}{2}}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} 2y_0 &= \mp b + (-1)^{\frac{m\mp 1}{2}} c, \\ y_0 &= \mp \frac{b}{2} + (-1)^{\frac{m\mp 1}{2}} \frac{c}{2}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

e o ponto indicador $\mathbf{z}_0$ pode ser escrito como

$$\mathbf{z}_0^{(0,1)} = \left(\mp \frac{1}{4}, \mp \frac{b}{2} + (-1)^{\frac{m\mp 1}{2}} \frac{c}{2} \right). \quad (5.13)$$

Para I_1 , o ponto indicador é equivalente ao mapa SNM:

$$\mathbf{z}_1^{(0,1)} = \left(\mp \frac{a}{2} \mp \frac{1}{4}, 0 \right). \quad (5.14)$$

5.3.3 Quantificação da assimetria do sistema

Os pontos indicadores, assim como a transformação de simetria, são válidos para m ímpar. Quando m é par o sistema é assimétrico e as órbitas regulares das duas cadeias de ilhas não estão mais relacionadas pela transformação de simetria T .

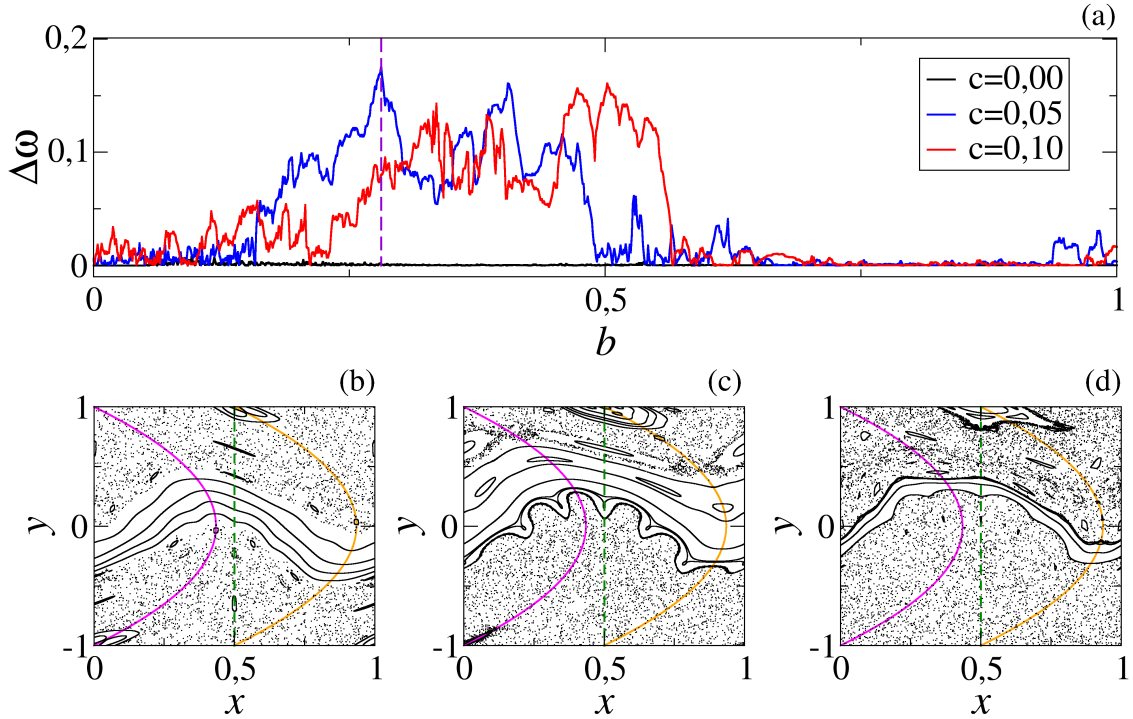
Os mapas não *twist* tem como característica um perfil de número de rotação não monotônico onde duas órbitas regulares tem o mesmo número de rotação: uma órbita que pertence a cadeia superior tem um número de rotação ω e, pela transformação de simetria T , encontramos a outra órbita da cadeia inferior com o mesmo ω . Entretanto, como o mapa ESNM não é simétrico, essa igualdade de números de rotação não é mais verdadeira. Com o objetivo de quantificar a assimetria do sistema e analisar suas consequências, calculamos a diferença entre os números de rotação de órbitas regulares que deveriam seguir a transformação de simetria, isto é, entre duas órbitas com condições iniciais nas linhas de simetria S_1 e S_3 . Lembramos que, para o mar caótico o número de rotação não é definido, ω é definido apenas para ilhas e barreiras no espaço de fase, as órbitas regulares.

Mantendo o parâmetro a fixo no valor $a = 0,87$, calculamos a diferença de número de rotação $\Delta\omega$, entre órbitas relacionadas pela transformação T , para o intervalo $b \in [0, 1]$ com três valores de c : $c = 0,00$ (caso simétrico), $c = 0,05$ e $c = 0,10$.

Na figura 29(a) temos o resultado da diferença entre números de rotação de duas órbitas correspondentes. Para $c = 0$, observamos que a diferença é nula, pois o sistema neste caso é simétrico. Para $c = 0,05$ e $c = 0,10$ observamos uma situação diferente: a diferença é não nula para a maioria dos valores de $b \in [0, 1]$.

Podemos observar um pico de assimetria para $c = 0,05$ em $b = 0,281$ na figura 29 (a). Escolhendo este máximo de assimetria e construindo os espaços de fase para cada valor de c , observamos que para $c = 0,00$ temos uma simetria perfeita: a ilha que é interceptada por uma linha de simetria tem a sua gêmea na outra linha. Esta situação não é mais observada para $c = 0,05$ e $c = 0,10$. Para estes casos observamos a presença de ilhas em uma linha de simetria, mas suas ilhas gêmeas já bifurcaram ou foram destruídas. Os valores de assimetria são normalizados para cada espaço de fase com o número total de órbitas regulares que são interceptadas pelas linhas de simetria. Sendo assim, a assimetria para $c = 0,10$ é menor em comparação a $c = 0,05$ pois a quantidade de ilhas interceptadas é menor e a presença das barreiras totais aumenta a simetria do sistema.

Figura 29 – Quebra de simetria no espaço de fase para o ESNM. (a) Diferença dos números de rotação entre as órbitas periódicas que estão na linha de simetria S_1 e S_3 para $a = 0,87$ e diferentes valores de c . Espaços de fase e linhas de simetria S_1 (linha rosa) e S_3 (linha laranja) para $a = 0,87$, $b = 0,281$ (linha tracejada roxa) e (b) $c = 0,000$, (c) $c = 0,050$ e (d) $c = 0,100$.



Fonte: A autora.

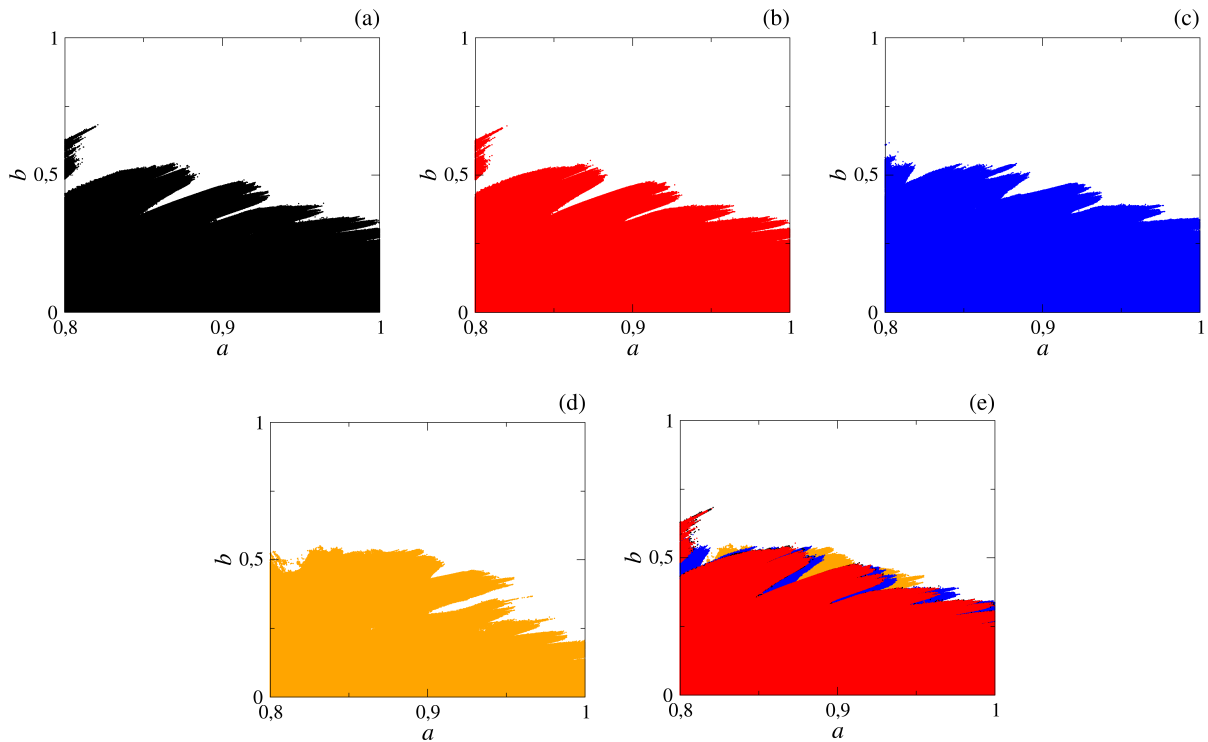
5.4 BARREIRAS NO MAPA ESTENDIDO

Os pontos indicadores encontrados em (5.13) e (5.14) são válidos apenas para m ímpar, sendo assim o método citado no capítulo anterior para estimar os parâmetros críticos (a, b) para a quebra da curva *shearless* não pode ser utilizado quando m é par. Precisamos de outra estratégia que identifique a presença das barreiras ou das curvas *shearless* no espaço de fase e que estime os valores críticos a , b e c para a quebra da última barreira.

Uma maneira de identificar órbitas regulares e diferenciá-las das trajetórias caóticas é pelo expoente de Lyapunov a tempo finito λ_n (definido no capítulo 2). O valor de λ_n é nulo para ilhas e barreiras e é positivo para trajetórias caóticas. Com o intuito de identificar as barreiras totais no espaço de fase, escolhemos 1000 condições iniciais sobre a linha $x = 0,5$, iteramos todas $n = 1000$ vezes e calculamos o expoente λ_n para cada trajetória. Se o expoente λ_n de uma trajetória é próximo de zero, esta trajetória pode representar dois casos: uma ilha ou uma barreira. Para diferenciar estes dois casos investigamos se a trajetória percorre todo o domínio de x : se sim, temos uma barreira; caso não percorra, isso significa que ela representa uma ilha.

Com o método descrito acima, podemos construir o espaço de parâmetros para um certo valor de c : para cada par (a, b) verificamos se existe uma barreira no espaço de fase, se sim, o ponto é marcado no espaço $a \times b$. O resultado está na figura 30, para diferentes valores de c . Como, nesta dissertação, sempre utilizamos $a \geq 0,8$, calculamos o espaço de parâmetros para a região $a \in [0,8; 1]$ e $b \in [0, 1]$.

Figura 30 – Espaços de parâmetro para a existência de barreiras no espaço de fase para (a) $c = 0,000$, (b) $c = 0,005$, (c) $c = 0,050$ e (d) $c = 0,100$. Em (e) temos a sobreposição de todos.



Fonte: A autora.

Pelos espaços de parâmetros na figura 30, vemos que o aumento da amplitude da perturbação c não implica necessariamente na destruição das barreiras no espaço de fase. Na figura 30 (a) temos o caso simétrico, e em (b)-(d) o caso assimétrico, com $c > 0$. Pela comparação de todos os espaços de parâmetros em 30 (e) podemos ver que para $c = 0,000$ e $c = 0,005$ o resultado é muito semelhante, com alguns pontos contrastando perto da curva crítica. Já para $c = 0,050$ e $c = 0,100$, em algumas regiões o espaço de parâmetros apresenta uma quantidade maior de pontos, como por exemplo a região próxima de $a = 0,9$ para $c = 0,100$ e o espaço em geral para $c = 0,050$, indicando que os valores críticos para a quebra da última barreira são maiores. Para outras regiões temos a quebra antecipada da última barreira, como em $a > 0,95$ para $c = 0,100$. Assim, concluímos que a nova perturbação de amplitude c pode aumentar ou

diminuir o valor crítico para a quebra da barreira.

5.5 QUEBRA DA ÚLTIMA BARREIRA

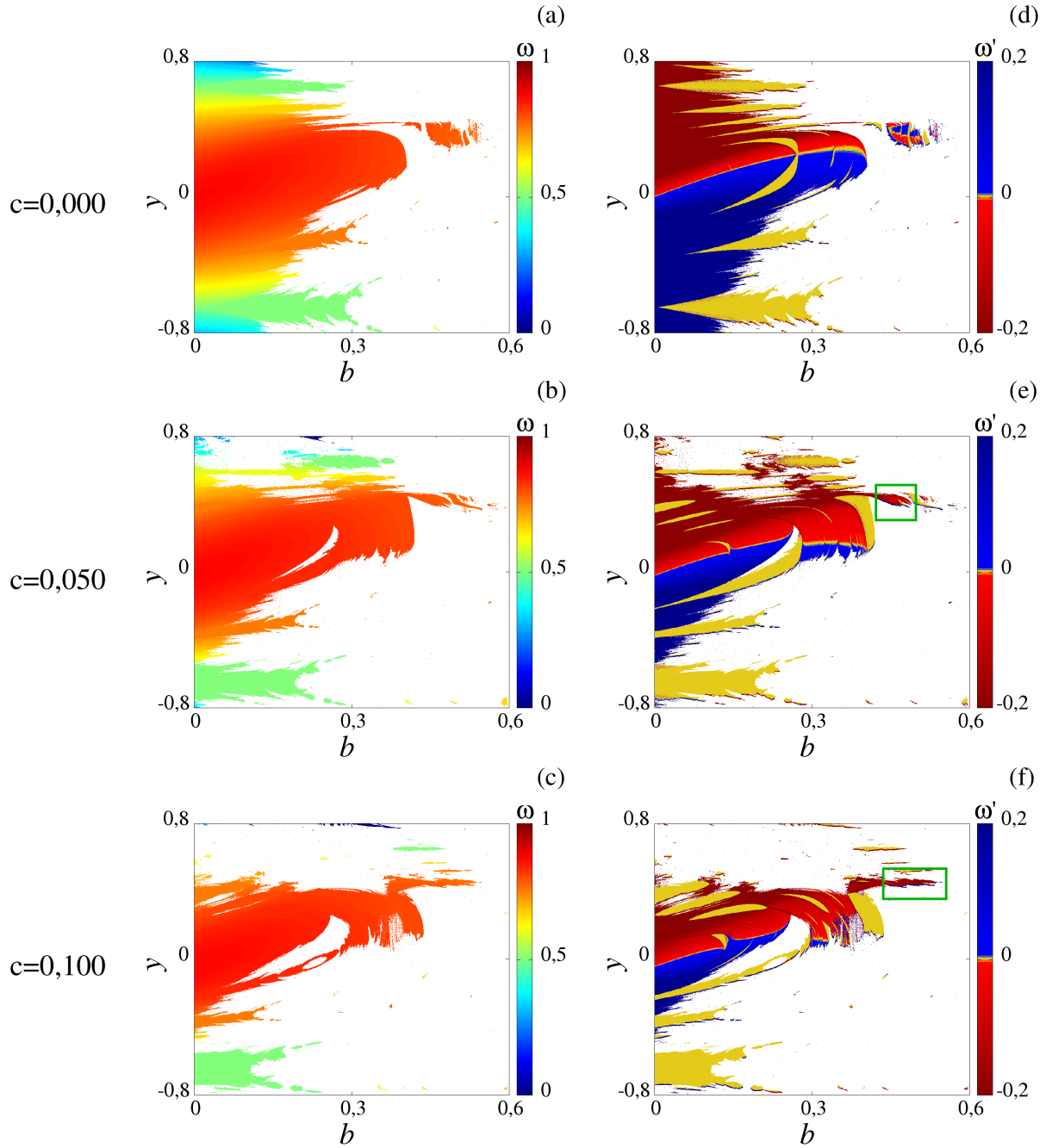
De acordo com Wurm *et al*⁵⁵, a natureza da última barreira em sistemas não *twist* não é algo definido ainda. Não existe certeza se a última barreira no espaço de fase é uma curva *shearless* ou não. Para estudar a natureza da última barreira precisamos calcular o perfil de número de rotação do espaço de fase e identificar a presença de extremos: caso exista algum, existe a curva *shearless*. A quebra desta curva ocorre quando o perfil de ω não apresenta mais extremos.

Uma vez que o parâmetro b é a amplitude da perturbação, escolhemos estudar o comportamento das barreiras e a natureza da última barreira em relação a este parâmetro. Fixando $a = 0,87$ analisamos os perfis de número de rotação para $b \in [0, 0; 0, 6]$. Os números de rotação do perfil foram calculados para 2000 condições iniciais sobre a linha $x = 0,5$ evoluídas em $n = 5000$ iteradas. Foi escolhido um número maior de iteradas devido a lenta convergência do número de rotação. A coleção de todos estes perfis é apresentada nos mapas de cor nas figuras 31 (a)-(d), onde o eixo das abscissas é o valor do parâmetro b , o eixo das ordenadas indica a posição y da condição inicial e a cor o valor do número de rotação da condição inicial ($x = 0,5; y = 0$).

Apenas pelos valores do número de rotação não conseguimos ver se existe um ponto de extremo ou não pois a variação ao redor dele é muito suave. Calculamos então, numericamente, a derivada de cada perfil de rotação: se o ponto de extremo for um máximo (mínimo) antes deste ponto a derivada será positiva (negativa) pois a função é crescente (decrecente) e após, a derivada será negativa (positiva). No ponto de extremo a derivada é nula assim como nas ilhas, onde o número de rotação é constante. Nas figuras 31 (e)-(f) podemos ver o resultado das derivadas para cada perfil onde a cor representa o valor da derivada ω' .

Nas figuras 31 (a)-(d) todos os pontos coloridos indicam órbitas regulares, elas podem ser ilhas ou barreiras totais. Podemos ver que para valores maiores de b tanto as barreiras quanto as ilhas são destruídas. Pelo mapa de cor da derivada ω' nas figuras 31 (e)-(f) vemos três cores: vermelha indicando a derivada negativa, azul para a derivada positiva e amarela para a derivada nula. Como dito anteriormente, uma derivada nula pode indicar ou a curva *shearless* ou as ilhas do espaço de fase. Quando temos um região amarela, elas indicam um platô no perfil de número de rotação, logo, indicam as ilhas. Quando temos uma linha amarela na separação entre a região azul e vermelha, esta linha indica os pontos de extremo do perfil, ou seja, a curva *shearless*.

Figura 31 – Mapa de cor para o número de rotação calculado na linha $x = 0,5$ e a respectiva derivada em relação a y para (a),(d) $c = 0,000$, (b),(e) $c = 0,050$ e (c),(f) $c = 0,100$.



Fonte: A autora.

Para $c = 0,000$, vemos que entre a região azul e vermelha sempre há uma linha amarela, indicando que para qualquer b existe um extremo no número de rotação, a curva *shearless*. Para $c = 0,050$ e $c = 0,100$ observamos que para b pequeno existe a linha amarela entre a transição das regiões azul-vermelha, indicando a presença da curva *shearless*, mas para b maior, vemos que esse cenário não existe mais. Se observamos a região dentro do quadro verde (b

maior) observamos apenas uma região vermelha, o que representa uma região de barreira e a recuperação da monotonicidade: a função é apenas decrescente (derivada negativa). Sendo assim, podemos ver que para o caso simétrico, a última barreira a ser quebrada é a curva *shearless* enquanto que para valores maiores de c , o cenário monotônico é recuperado e a natureza da última barreira não é necessariamente *shearless*. Outra conclusão importante que é interessante frisar é a recuperação do cenário monotônico com a presença da nova perturbação de amplitude c .

5.6 TRANSPORTE NO ESPAÇO DE FASE

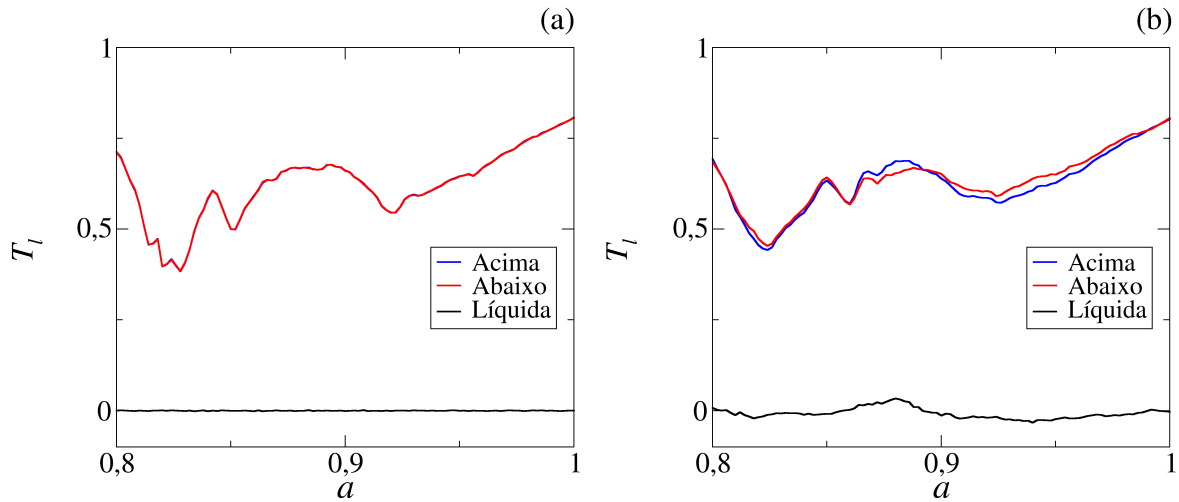
Quando analisamos o transporte para o mapa SNM, analisamos apenas as condições iniciais que estavam na parte inferior do espaço de fase ($y = -0,8$) e que atravessavam o espaço até chegarem na parte superior ($y = 0,8$). Uma vez que o mapa é simétrico, se analisássemos a direção contrária, i.e., as condições que começam em $y = 0,8$ e chegam em $y = -0,8$, o resultado da transmissividade seria o mesmo. De fato, este resultado está expresso na figura 32 (a) onde a curva azul representa a transmissividade acima, a curva em vermelho representa a transmissividade abaixo e a curva preta corresponde a diferença entre estas duas transmissividades. Para a transmissividade acima (abaixo) analisamos as trajetórias que começam em $y = -1,0$ ($y = 1,0$) e chegam em $y = 1,0$ ($y = -1,0$). Ambas as transmissividades foram calculadas para um tempo $n = 1000$. No caso apresentado na figura 32 (a), a diferença de transmissividade é nula para qualquer a e, neste exemplo, $b = 0,78$, mas este resultado é válido para qualquer b no caso simétrico $c = 0,000$.

Quando o sistema apresenta assimetria, podemos ter o caso onde as transmissividades para cima e para baixo, no espaço de fase, não são iguais e há uma transmissividade líquida: a diferença entre as transmissividades não é mais nula e há uma direção preferencial de transporte. Esta transmissividade líquida é um fenômeno semelhante à corrente de catraca mencionada no capítulo 2.

O mapa padrão estendido (a versão *twist* do mapa ESNM, estudado em ^{57, 58}) apresenta uma quebra de simetria e o transporte direcionado é um fenômeno possível no espaço de fase. O sistema do mapa padrão estendido não satisfaz a relação $MT_S = T_S M$ com a transformação de simetria $T_S(x, y) = (-x, -y)$, proposta por ^{59, 60} para o mapa padrão, semelhante ao nosso caso onde o mapa ESNM não satisfaz a relação de simetria com a transformação T_S que é vigente para o mapa SNM. Sendo assim, podemos questionar a existência de transporte direto para o

mapa ESNM. Reproduzindo os mesmos cálculos que foram feitos para obter a figura 32 (a) para $c = 0,050$ obtemos a figura 32 (b).

Figura 32 – Transmissividade acima (azul) e abaixo (vermelha) em função do parâmetro a para $b = 0,78$ e (a) $c = 0,000$ e (b) $c = 0,050$. A diferença entre as duas transmissividade (transmissividade líquida) está representada pela linha preta. A transmissividade foi calculada para um tempo $n = 1000$.



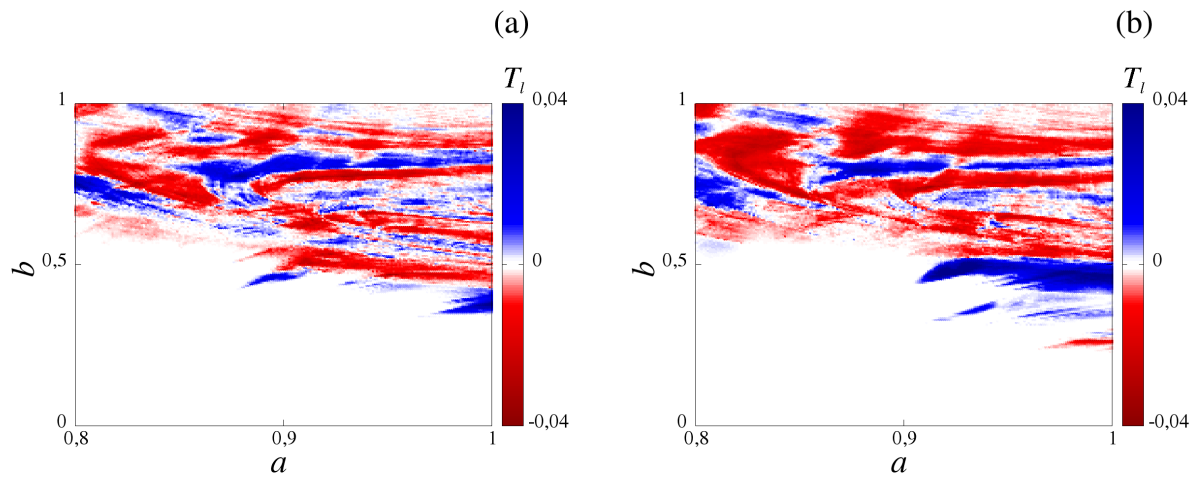
Fonte: A autora.

Para $c = 0,050$ observamos uma transmissividade líquida não nula para alguns parâmetros de b . A transmissividade líquida é calculada por $T_l = T_{acima} - T_{abaixo}$, sendo assim, a transmissividade líquida positiva indica uma direção preferencial para cima, para $b \in [0,85; 0,9]$, e a transmissividade líquida negativa em $b \in [0,9; 1,0]$ revela uma direção preferencial para baixo.

Na figura 32 analisamos a existência de um transporte líquido em função do parâmetro a com um b fixo em $b = 0,78$. A seguir, analisamos a dependência em função dos dois parâmetros, calculando a transmissividade líquida, para $n = 1000$ iteradas, para os pares (a, b) onde $a \in [0,8; 1,0]$ e $b \in [0,1]$ e para dois valores de c , $c = 0,050$ e $0,100$. O resultado é demonstrado nos espaços de parâmetros da figura 33.

Para $c = 0,000$, nós verificamos que a transmissividade líquida é nula para qualquer par de parâmetros (a, b) . Já para os valores de c escolhidos, nós podemos observar algumas estruturas no espaço de parâmetro onde a transmissividade líquida é positiva e para outras, ela é negativa. Se compararmos estes espaços de parâmetro com os das figuras 30 (c) e (d) observamos que a região branca inferior corresponde aos pontos onde existe barreira, logo, não existe transporte. Mas, na região onde não há mais barreira, ainda observamos pontos brancos

Figura 33 – Espaços de parâmetros para a transmissividade líquida para os valores (a) $c = 0,050$ e (b) $c = 0,100$.



Fonte: A autora.

indicando parâmetros (a, b) onde não há transporte líquido. Sendo assim, não podemos afirmar que a assimetria tem como consequência direta a presença de transporte direcionado no espaço de fase, temos que analisar cada conjunto de parâmetros (a, b, c) individualmente para assegurar a presença desse fenômeno, que exibe comportamento semelhante ao fenômeno de catraca na presença de um transporte líquido.

6 CONCLUSÕES

O mapa padrão não *twist* (SNM) foi proposto por Castillo-Negrete e Morrison como um exemplo simples de mapa conservativo que viola a condição *twist*. Este mapa tem uma dependência de dois parâmetros, a e b , e apresenta fenômenos particulares de sistemas não *twist* como a presença da curva *shearless*, a reconexão e colisão de separatrizes e um perfil de número de rotação não monotônico.

Os fenômenos de transporte em sistemas Hamiltonianos são uma questão de grande interesse no estudo de sistemas dinâmicos. Para sistemas que satisfazem a condição *twist*, estes fenômenos são bem conhecidos e compreendidos, e são estudados pela análise de regiões acessíveis no espaço de fase e pelo acompanhamento de grupos de trajetórias. Para sistemas não *twist*, a presença de ilhas gemêas altera a configuração de barreiras no espaço de fase e torna a questão de transporte algo de grande relevância.

Estudando a dependência do transporte no espaço de fase com o parâmetro a , observamos, para $b = 0,6$, um pico de transporte para $a = 0,80543$ e um transporte nulo para $0,802 < a < 0,804$. Os espaços de fase para o caso de alto transporte e o caso escolhido para baixo transporte ($a = 0,8042$) são semelhantes, e compostos apenas por ilhas e mar caótico. A falta de barreiras totais para o transporte baixo nos faz questionar como ocorre a passagem das trajetórias de uma região do espaço de fase para a outra, em outras palavras, o que diferencia os casos de alto e baixo transporte.

Segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff, a quebra de uma barreira leva a uma cadeia de ilhas, um conjunto de pontos hiperbólicos e elípticos. Para as cadeias gêmeas, características do mapa SNM, temos dois conjuntos de pontos hiperbólicos e elípticos, logo, temos dois pares de variedades estável-instável, uma para cada cadeia: superior e inferior. A interseção das variedades de um ponto hiperbólico formam o mecanismo de *turnstile* responsável pelo aprisionamento e, no caso do mapa SNM, também pelo transporte das trajetórias pela barreira parcial existente no espaço de fase.

O alto transporte é explicado pela proximidade dos pontos homoclínicos e heteroclínicos das duas cadeias e pela intersecção das variedades superiores com as inferiores, um cenário denominado *intercrossing*. Esta proximidade interfere nos *turnstile* e zonas de ressonância, permitindo que as trajetórias que seguem a variedade superior troquem e comecem a acompanhar

a variedade inferior. Este mecanismo é o responsável pelo fluxo através do espaço de fase. Já para o baixo transporte, não observamos o cenário de *intercrossing*, mas sim o cenário de *intracrossing*, onde não há a intersecção das variedades de cadeias diferentes, apenas as variedades de uma mesma cadeia se interseccionam e formam os pontos homoclínicos, heteroclínicos e os *turnstile*s, mas nesse caso ele não age como um mecanismo que facilita o transporte.

O sistema SNM é um sistema simétrico, consequentemente, o fluxo e o transporte de baixo para cima no espaço de fase é igual ao transporte de cima para baixo. A simetria é comprovada pela transformação de simetria que é satisfeita no sistema. Esta transformação permite conhecer, a partir dos pontos indicadores, os parâmetros que apresentam barreiras totais no espaço de fase, ou seja, os parâmetros onde o transporte é nulo. Assim como as barreiras totais, a existência da curva *shearless*, que é particular de sistemas não *twist*, também é estabelecida pelos pontos indicadores.

Além da transmissividade e do espaço de parâmetros obtido pelos pontos indicadores, as bacias de escape e as entropias associadas às bacias mostraram ser uma boa ferramenta para o estudo da imprevisibilidade associada ao transporte. As bacias de escape são conjuntos de pontos no espaço de fase que são condições iniciais para as trajetórias que escapam por uma saída específica. Para o transporte baixo, observamos bacias bem definidas, enquanto que para o transporte alto, as bacias apresentam uma mistura, regiões de incerteza no espaço de fase. Além de um pico na transmissividade, o transporte alto também é representado por um pico na entropia de bacia S_b . O transporte baixo é identificado por um máximo local em S_b , mas com uma amplitude significativamente menor se compararmos com o caso de transporte alto. A presença de barreiras totais no espaço de fase (região $0,802 < a < 0,804$) tem a entropia de borda de bacia nula uma vez que não há mistura, sendo assim, a borda é suave. Após a quebra da barreira e à medida que o transporte aumenta, há a mistura entre as bacias e a borda entre as duas bacias é complexa, representando pela fractabilidade da fronteira.

A simetria presente no mapa SNM pode ser quebrada pela ação de uma nova perturbação, com a forma $c \sin(2\pi mx)$. O mapa adicionado desta nova perturbação é denominado mapa padrão não *twist* estendido (ESNM). Para m ímpar, verificamos que a simetria do sistema é conservada, mas para m par a simetria é destruída, e, como consequência, o cenário de ilhas gêmeas desaparece uma vez que as cadeias bifurcam para parâmetros diferentes. A procura pela última barreira é prejudicada, uma vez que a transformação de simetria não é mais válida e não há mais pontos indicadores. Utilizando o expoente de Lyapunov para tempo finito e a distribuição da

trajetória pelo domínio de x , conseguimos identificar as órbita regulares, diferenciar as barreiras de ilhas e então verificar para quais parâmetros as barreiras existem no espaço de fase. Com este método, reproduzimos o espaço de parâmetro para o caso simétrico ($c = 0,000$) e construímos os novos espaços para o caso assimétrico ($c > 0,000$ e m par) e então verificamos que a nova perturbação altera a curva crítica da quebra de última barreira, em alguns casos aumentando e em outros diminuindo o valor crítico.

Um novo comportamento observado com a adição da perturbação externa de amplitude c é a volta do cenário monotônico do número de rotação. Na figura 31 (e) e (f) podemos observar que não há mais um extremo no perfil de número de rotação para as últimas barreiras, ou seja, ainda existe barreira mas ela não é uma curva *shearless*. Este resultado é diferente do observado para o caso simétrico na figura 31 (d), a última barreira é a curva *shearless*.

Devido a quebra de simetria, o transporte direcionado é um fenômeno possível no espaço de fase para o mapa ESNM. De fato, para $c > 0$ e m par, observamos uma transmissividade líquida para alguns parâmetros a e b . Definindo a transmissividade líquida como a diferença entre as transmissividades para cima e para baixo, temos que se ela for positiva (negativa) o transporte é direcionado para cima (para baixo), e assim, conseguimos distinguir algumas estruturas no espaço de parâmetro para a transmissividade onde ela é positiva e outras onde é negativa, assim como regiões, entre estas estruturas, onde ela é nula. Assim, podemos afirmar que a assimetria resulta em um transporte direcionado para alguns pares de parâmetros (a, b) mas a direção deste transporte não é algo previsível sem a realização das simulações numéricas para cada caso. Este fenômeno é semelhante ao fenômeno de catraca (*ratchet*), observado em vários sistemas físicos, químicos e biológicos.

Como trabalhos futuros, podemos citar o estudo e a análise das bacias de escape e das entropias associadas a elas para o mapa ESNM, o papel dos *turnstile*s no transporte direcionado no espaço de fase do mapa ESNM e em outros mapas que descrevem sistemas Hamiltonianos.

REFERÊNCIAS

- 1 BARROW-GREEN, J. Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, v. 48, n. 2, p. 107–131, 1994. [11](#)
- 2 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006. [11](#), [25](#), [26](#)
- 3 DIACU, F. Poincaré and the Three-Body Problem. By June Barrow-Green. *Historia Mathematica*, Academic Press, v. 26, n. 2, p. 175–178, 1999. [11](#)
- 4 STEWART, I. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. [S.l.]: Zahar, 1991. [11](#)
- 5 WISDOM, J. Urey prize lecture: Chaotic dynamics in the solar system. *Icarus*, Elsevier, v. 72, n. 2, p. 241–275, 1987. [12](#)
- 6 AGUIAR, M. A. de. Tópicos de Mecânica Clássica. *Livraria da Física, 1a edição*, 2011. [12](#)
- 7 KOON, W.; LO, M.; MARSDEN, J.; ROSS, S. Resonance and capture of Jupiter comets. In: *Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies*. [S.l.]: Springer, 2001. p. 27–38. [12](#)
- 8 AREF, H.; BLAKE, J. R.; BUDIŠIĆ, M.; CARDOSO, S. S.; CARTWRIGHT, J. H.; CLERCX, H. J.; OMARI, K. E.; FEUDEL, U.; GOLESTANIAN, R.; GOUILLART, E. et al. Frontiers of chaotic advection. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 89, n. 2, p. 025007, 2017. [12](#)
- 9 MACKAY, R.; MEISS, J.; PERCIVAL, I. Stochasticity and transport in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 52, n. 9, p. 697, 1984. [12](#), [14](#), [41](#)
- 10 ZASLAVSKY, G. M. *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. [S.l.]: World Scientific, 2007. [13](#), [18](#), [21](#)
- 11 ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, 1989. [13](#), [21](#)
- 12 MORRISON, P. Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems. *Physics of Plasmas*, AIP, v. 7, n. 6, p. 2279–2289, 2000. [13](#), [34](#), [35](#), [56](#)
- 13 CASTILLO-NEGRET, D. del; GREENE, J.; MORRISON, P. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 91, n. 1-2, p. 1–23, 1996. [13](#), [24](#), [35](#), [46](#), [47](#), [56](#)
- 14 CASTILLO-NEGRET, D. del; MORRISON, P. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, AIP, v. 5, n. 4, p. 948–965, 1993. [13](#), [35](#)
- 15 MACKAY, R.; MEISS, J.; PERCIVAL, I. Transport in Hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 13, n. 1-2, p. 55–81, 1984. [13](#), [28](#)
- 16 MEISS, J. Thirty years of turnstiles and transport. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing, v. 25, n. 9, p. 097602, 2015. [14](#)

- 17 DAZA, A.; WAGEMAKERS, A.; GEORGEOT, B.; GUÉRY-ODELIN, D.; SANJUÁN, M. A. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 6, p. 31416, 2016. [14](#), [29](#), [30](#), [31](#), [32](#)
- 18 CELESTINO, A.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 19, n. 1, p. 139–149, 2014. [14](#), [32](#), [33](#)
- 19 CELESTINO, A.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. Ratchet transport and periodic structures in parameter space. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 23, p. 234101, 2011. [14](#), [33](#)
- 20 DITTRICH, T.; KETZMERICK, R.; OTTO, M.-F.; SCHANZ, H. Classical and quantum transport in deterministic Hamiltonian ratchets. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 9, n. 9-10, p. 755–763, 2000. [14](#), [33](#)
- 21 NEUMANN, E.; PIKOVSKY, A. Quasiperiodically driven Josephson junctions: strange nonchaotic attractors, symmetries and transport. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 26, n. 2, p. 219–228, 2002. [14](#), [33](#)
- 22 PORTELA, J. S.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; MORRISON, P. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 17, n. 05, p. 1589–1598, 2007. [14](#), [56](#)
- 23 WURM, A.; MARTINI, K. Breakup of inverse golden mean shearless tori in the two-frequency standard nontwist map. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 8, p. 622–627, 2013. [14](#), [56](#)
- 24 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. [16](#), [17](#), [22](#), [24](#), [38](#)
- 25 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: Perseus Books Publishing, 1994. [16](#), [34](#)
- 26 TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. [16](#), [18](#), [20](#), [21](#), [22](#), [23](#), [24](#), [32](#)
- 27 MACKAY, R. Exact results for an approximate renormalisation scheme and some predictions for the breakup of invariant tori. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 240–265, 1988. [16](#)
- 28 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos*. [S.l.]: Springer, 1996. [16](#)
- 29 MEISS, J. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 64, n. 3, p. 795, 1992. [16](#), [17](#), [27](#)
- 30 ZASLAVSKY, G. M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2005. [17](#), [18](#), [20](#)
- 31 ZASLAVSKY, G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, Elsevier, v. 371, n. 6, p. 461–580, 2002. [17](#)
- 32 CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979. [19](#)

- 33 LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. Regular and Chaotic Dynamics, vol. 38 of *Applied Mathematical Sciences*, 1992. [21](#), [22](#), [23](#)
- 34 WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. [25](#)
- 35 BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, Springer, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980. [25](#)
- 36 ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. In: *The Theory of Chaotic Attractors*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 273–312. [26](#), [27](#)
- 37 SANDRI, M. Numerical calculation of Lyapunov exponents. *Mathematica Journal*, Redwood City, Ca.: Advanced Book Program, Addison-Wesley Pub. Co., c1990-, v. 6, n. 3, p. 78–84, 1996. [26](#)
- 38 GEIST, K.; PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 83, n. 5, p. 875–893, 1990. [27](#)
- 39 CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; ABUD, C. V.; FONSECA, J. C. D. d.; FILHO, Z. d. O. G.; KROETZ, T.; MARCUS, F. A.; SCHELIN, A. B.; JR, J. S.; TOUFEN, D. L. et al. Shearless transport barriers in magnetically confined plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, v. 54, n. 12, p. 124035, 2012. [28](#), [36](#)
- 40 MCDONALD, S. W.; GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Fractal basin boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 125–153, 1985. [31](#)
- 41 GREBOGI, C.; MCDONALD, S. W.; OTT, E.; YORKE, J. A. Final state sensitivity: an obstruction to predictability. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 99, n. 9, p. 415–418, 1983. [31](#), [52](#)
- 42 MUGNAINE, M.; MATHIAS, A.; SANTOS, M.; BATISTA, A.; JR, J. S.; VIANA, R. Dynamical characterization of transport barriers in nontwist Hamiltonian systems. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 1, p. 012214, 2018. [31](#), [39](#), [41](#)
- 43 CAVALLASCA, L.; ARTUSO, R.; CASATI, G. Directed deterministic classical transport: Symmetry breaking and beyond. *Physical Review E*, APS, v. 75, n. 6, p. 066213, 2007. [32](#)
- 44 HUTCHINGS, N.; ISHERWOOD, M.; JONCKHEERE, T.; MONTEIRO, T. Chaotic Hamiltonian ratchets for pulsed periodic double-well potentials: Classical correlations and the ratchet current. *Physical Review E*, APS, v. 70, n. 3, p. 036205, 2004. [33](#)
- 45 KULA, J.; CZERNIK, T.; ŁUCZKA, J. Brownian ratchets: transport controlled by thermal noise. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 7, p. 1377, 1998. [33](#)
- 46 WANG, L.; BENENTI, G.; CASATI, G.; LI, B. Ratchet effect and the transporting islands in the chaotic sea. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 24, p. 244101, 2007. [33](#)
- 47 SZEZECH, J. D.; CALDAS, I. L.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; MORRISON, P. J. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 19, n. 4, p. 043108, 2009. [34](#)

- 48 GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2011. [34](#)
- 49 APTE, A.; WURM, A.; MORRISON, P. Renormalization and destruction of $1/\gamma^2$ tori in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 13, n. 2, p. 421–433, 2003. [35](#)
- 50 PETRISOR, E. Nontwist area preserving maps with reversing symmetry group. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 11, n. 02, p. 497–511, 2001. [35](#)
- 51 PORTELA, J. S. E.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L. Tokamak magnetic field lines described by simple maps. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 165, n. 1, p. 195–210, 2008. [35](#)
- 52 ROM-KEDAR, V.; LEONARD, A.; WIGGINS, S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 214, p. 347–394, 1990. [41](#)
- 53 FUKUDA, H.; PETROSKY, T.; KONISHI, T. Analytical investigation of an isomerization system using the resonance overlap criterion. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2016, n. 9, p. 093A01, 2016. [41](#)
- 54 SHINOHARA, S.; AIZAWA, Y. Indicators of reconnection processes and transition to global chaos in nontwist maps. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 100, n. 2, p. 219–233, 1998. [48](#)
- 55 WURM, A.; APTE, A.; MORRISON, P. On reconnection phenomena in the standard nontwist map. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 34, n. 4B, p. 1700–1706, 2004. [48](#), [49](#), [65](#)
- 56 SHINOHARA, S.; AIZAWA, Y. The breakup condition of shearless KAM curves in the quadratic map. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 97, n. 3, p. 379–385, 1997. [48](#)
- 57 CHEON, T.; EXNER, P.; ŠEBA, P. Extended standard map with spatio-temporal asymmetry. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 72, n. 5, p. 1087–1091, 2003. [67](#)
- 58 WANG, L.; BENENTI, G.; CASATI, G.; LI, B. Ratchet effect and the transporting islands in the chaotic sea. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 24, p. 244101, 2007. [67](#)
- 59 PIÑA, E.; LARA, L. J. On the symmetry lines of the standard mapping. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 26, n. 1-3, p. 369–378, 1987. [67](#)
- 60 KETOJA, J.; MACKAY, R. Fractal boundary for the existence of invariant circles for area-preserving maps: observations and renormalisation explanation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 318–334, 1989. [67](#)