

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/ FÍSICA
DOUTORADO EM CIÊNCIAS/ FÍSICA**

GUSTAVO MEHANNA UHDRE

**DEFORMAÇÕES QUÂNTICAS DE SISTEMAS RELATIVÍSTICOS E SUAS
CONEXÕES COM SISTEMAS ÓPTICOS**

PONTA GROSSA

2022

GUSTAVO MEHANNA UHDRE

**DEFORMAÇÕES QUÂNTICAS DE SISTEMAS RELATIVÍSTICOS E SUAS
CONEXÕES COM SISTEMAS ÓPTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências/Física.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade

PONTA GROSSA

2022

U29 Uhdre, Gustavo Mehanna
Deformações quânticas de sistemas relativísticos e suas conexões com
sistemas ópticos / Gustavo Mehanna Uhdre. Ponta Grossa, 2022.
86 f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

1. Oscilador de Dirac. 2. Álgebra k-Poincaré-Hopf. 3. Sistema de Jaynes-
Cummings. I. Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de Ponta
Grossa. Física. III.T.

CDD: 530.1

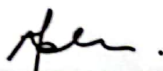
TERMO DE APROVAÇÃO

Gustavo Mehanna Uhdre

“DEFORMAÇÕES QUÂNTICAS DE SISTEMAS RELATIVÍSTICOS E SUAS CONEXÕES COM SISTEMAS ÓPTICOS”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção no grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências – Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

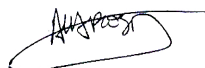
Orientador: _____



Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG – Presidente



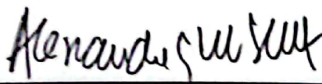
Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro – UEPG – Titular



Dr. Antonio Marcos Batista – UEPG – Titular



Dr. Dionísio Bazeia – UFPB – Titular



Dr. Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt – UFF – Titular

Ponta Grossa, 04 de abril de 2022.

Dedicado à minha Família e Amigos

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade pela orientação durante este período de doutorado.

Ao grupo de Física Quântica e Informação Quântica da UEPG (FQIQ - UEPG), pelas discussões e envolvimento.

Agradeço a todos os professores que de alguma forma contribuíram em minha formação, seja em aulas, conversas ou seminários.

Aos meus pais e familiares, principalmente pelo incentivo e apoio durante toda a minha formação.

Aos amigos e colegas pelo apoio e companheirismo durante estes anos.

Em especial minha esposa Milena, pelo apoio e incentivo durante estes anos.

Também agradeço a CAPES pelo fomento.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)

RESUMO

Nesta tese, temos por objetivo analisar os efeitos da deformação quântica na dinâmica de colapsos e ressurgimentos da inversão de *spin* de um sistema óptico. Essa deformação ocorre nas estruturas do espaço-tempo, chamada de deformação κ . Para realizar esta análise, faremos um mapeamento do Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado no Hamiltoniano de Jaynes-Cummings. Primeiramente, mostramos como fazer o mapeamento do oscilador de Dirac em $(2+1)$ dimensões no sistema de Jaynes-Cummings e anti-Jaynes-Cummings simultaneamente, sem a deformação. Mostramos que usando uma base adequada das matrizes de Dirac para escrever o sistema em $(2+1)$ dimensões, encontramos uma simetria de quiralidade do sistema. A partir disso, usamos a equação de Dirac κ -deformada obtidas dos geradores de Poincaré κ -deformado para escrever o Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado. Mostramos que o Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado é não hermitiano, porém seus autovalores são reais, o que caracteriza o Hamiltoniano como sendo quase hermitiano. Sendo o Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado quase hermitiano, podemos aplicar uma transformação de similaridade, chamada mapa de Dyson, o qual nos permite obter sua contrapartida hermitiana, deixando invariante os seus autovalores e valores esperados. Por fim, mostramos que a deformação adiciona novos estados emaranhados ao sistema o que causa uma modificação na frequência de *Zitterbewegung* e, como consequência disso os colapsos e ressurgimentos da inversão de *spin* sistema também são afetados. Mostramos também que o momento angular total do sistema na direção z não é conservado devido à presença da deformação.

Palavras-chave: Oscilador de Dirac. Álgebra κ -Poincaré-Hopf. Sistema Jaynes-Cummings.

ABSTRACT

In this thesis, we aim to analyze the effects of quantum deformation on the dynamics of collapses and revivals of the *spin* inversion of an optical system. This deformation occurs in the structures of spacetime, called the κ -deformation. To carry out this analysis, we will map the Hamiltonian of the κ -deformed Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings Hamiltonian. Firstly, we show how to map the Dirac oscillator in (2+1) dimensions in the Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings system simultaneously, without the deformation. We show that using a suitable basis of Dirac matrices to write the system in (2+1) dimensions, we find a chirality symmetry of the system. From this, we use the κ -deformed Dirac equation obtained from the κ -deformed Poincaré generators to write the Hamiltonian of the κ -deformed Dirac oscillator. We show that the Hamiltonian of the κ -deformed Dirac oscillator is non-Hermitian, but its eigenvalues are real, which characterizes the Hamiltonian as being quasi-Hermitian. Since the Hamiltonian of the κ -deformed Dirac oscillator is quasi-Hermitian, we can apply a similarity transformation, called Dyson map, which allows us to obtain its Hermitian counterpart, leaving its eigenvalues and expected values invariant. Finally, we show that the deformation adds new entangled states to the system which causes a change in the frequency of *Zitterbewegung* and, as a consequence of this, the collapses and revivals of the *spin* inversion of system are also affected. We also show that the total angular momentum in the z direction is not conserved anymore, as a direct consequence of the deformation.

Keywords: Dirac oscillator. κ -Poincaré-Hopf algebra. Jaynes-Cummings System.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema na frequência de ressonância JC. Em (a) temos o fóton interagindo com o sistema de dois níveis. Em (b) representa o sistema após a absorção do fóton.	21
Figura 2 – Sistema com a frequência de anti-ressonância AJC. Em (a) temos o sistema de dois níveis, o qual se encontra no estado excitado e um fóton é emitido. Em (b) representamos o estado fundamental sem a presença do fóton.	21
Figura 3 – O gráfico representa os colapsos e ressurgimentos da inversão de <i>spin</i> do sistema. Os valores dos parâmetros $m = c = \xi = 1$ e o número médio de fótons é $\langle n_s \rangle = 50$	28
Figura 4 – JC (linha sólida) e κ -JC (linha tracejada), os autovalores $E_{n_s}^{\epsilon+}$ como função do parâmetro relativístico ξ , as unidades $m = \hbar = c = 1$, para $n_s^+ = 0, \dots, 4$. O valor usado para o parâmetro de deformação adimensional é $\epsilon = 5.10^{-4}$	43
Figura 5 – Na figura (a) vemos o comportamento dos colapsos e ressurgimentos na inversão de <i>spin</i> $\langle \hat{S}_z \rangle$, na figura (b) vemos o valor esperado para o momento angular $\langle \hat{L}_z \rangle$ e na figura (c) o valor esperado do momento angular total $\langle \hat{J}_z \rangle$ em função do tempo. O número médio de fótons $\langle n_s \rangle = 25$, para $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ (linha azul e contínua) e $\epsilon = 0$ (linha laranja e tracejada), os valores das unidade $m = c = \omega = \hbar = 1$. Em (a), as duas curvas são sobrepostas e a inserção de $\Delta \langle \hat{S}_z^\epsilon \rangle$ mostra a diferença entre elas. Em (c), a inserção mostra o comportamento assintótico de $\Delta \langle \hat{J}_z^\epsilon \rangle$	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS	14
2.1	Equação de Weyl	14
2.2	Quiralidade	15
2.3	Equação de Dirac	16
2.4	Zitterbewegung	17
2.5	Oscilador de Dirac em (3+1)	18
3	MAPEAMENTO EXATO DO OSCILADOR DE DIRAC NO SISTEMA DE JAYNES-CUMMINGS	20
3.1	O Sistema de Jaynes-Cummings	20
3.2	Oscilador de Dirac em (2+1) dimensões	22
3.3	Mapeamento exato do oscilador de Dirac em (2+1) no sistema de Jaynes-Cummings	24
3.4	Autoestados do oscilador de Dirac em (2+1)	25
3.5	Colapsos e Ressurgimento da inversão de <i>spin</i> de um estado coerente	27
4	DEFORMAÇÃO κ DO ESPAÇO-TEMPO	29
4.1	Geradores de Poincaré	29
4.2	Álgebra de κ -Poincaré-Hopf	29
4.3	Equação de Dirac κ -deformada	31
4.4	Dirac-Coulomb κ -deformado	32
4.5	Oscilador de Dirac em (3+1) dimensões κ -deformado	33
4.6	Efeitos da deformação quântica no problema Aharanov-Bohm de <i>spin</i> -1/2	34
5	OSCILADOR DE DIRAC κ-DEFORMADO EM (2+1) DIMENSÕES	41
5.1	Oscilador de Dirac κ -deformado em (2+1) dimensões	41
5.2	Simetrias no sistemas κ -JC e κ -AJC	43
5.3	Mapa de Dyson	44
5.4	Dinâmica do sistema	47
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – OPERADOR HAMILTONIANO E VALORES ESPERADOS	67

1 INTRODUÇÃO

No começo do século XX havia alguns experimentos que não eram explicados a partir da mecânica clássica, tendo em vista que era a única teoria vigente na época. Um desses experimentos era o da radiação de corpo negro, em que a teoria clássica mostrava uma discrepância com os resultados experimentais (1). A teoria previa que a energia emitida por um corpo quando aquecido, divergia para o infinito a partir do comprimento de onda do ultra violeta. Foi então, que Max Planck propôs que a energia emitida pelo corpo não era contínua, mas sim discreta, e dada a partir de uma constante fundamental chamada de constante de Planck, $h = 6,63 \times 10^{-34} J.s$. Com esse resultado obtido por Planck, Albert Einstein explicou o efeito fotoelétrico (2), propondo que a luz era composta por partículas, chamada de fótons, e sua energia é dada por $E = h\nu$, sendo ν a frequência da luz emitida. Outro experimento importante nessa época, foi o de Michelson-Morley (3), no qual tentava buscar evidência de um referencial absoluto, até então chamado de éter luminífero. A ideia de que deveria haver um referencial absoluto se encontra na teoria eletromagnética de Maxwell (4), a qual mostra que a luz se propaga no vácuo com uma velocidade constante $c \approx 3 \times 10^8 m/s$. O experimento de Michelson-Morley não apresentava evidências de tal referencial, e esse resultado estava de acordo com o primeiro postulado da relatividade restrita de Einstein, que foi proposta primeiramente por Poincaré, em que a luz se propagava com a mesma velocidade em todos os referenciais inerciais. A teoria de Einstein modificou a física newtoniana da época. Do ponto de vista newtoniano o nosso espaço é tridimensional $\mathbf{R}^3$, onde o tempo é um parâmetro universal, e suas simetrias são dadas pelo grupo de Galileu (5, 6). Do ponto de vista da teoria da relatividade restrita de Einstein, o espaço e o tempo formam um único ente, o espaço-tempo denominado de espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$, no qual o parâmetro universal é a velocidade da luz e suas simetrias são dadas pelo grupo de Poincaré $\mathcal{P} = ISO^+(1,3)$, em que 1 representa a dimensão temporal e 3 a dimensão espacial. Outra questão estava na teoria de gravitação de Newton. Na teoria de Newton a gravidade é uma força de atração entre dois corpos massivos que estão a uma distância r um do outro

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (1.1)$$

em que $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3/kg.s^2$, m_1 e m_2 são as massas dos corpos. Contudo, a teoria de Newton não explicava satisfatoriamente a causa dessa força de atração. Einstein propôs em sua teoria da relatividade geral, que a gravidade é uma curvatura do tecido do espaço-tempo, causada pela presença de um corpo massivo sobre ele (7), definindo assim a equação de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

em que $R^{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é o escalar de curvatura de Ricci, $g^{\mu\nu}$ é a métrica e $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia e momento. Do ponto de vista da teoria geral da relatividade de Einstein, a gravidade não é mais uma força de atração, mas sim, uma distorção do tecido do espaço-tempo, causada pela presença de matéria sobre ele. Sua equação mostra que o tensor de energia e momento, onde estão as grandezas físicas como matéria e energia, gera uma curvatura e uma métrica no espaço-tempo, sendo esse espaço quadridimensional (8). As ideias de Einstein deram uma nova visão de mundo. No entanto, as teorias da mecânica quântica, da relatividade restrita e da gravitação, não estão unificadas, de modo que não há uma teoria gravitacional quântica e relativística comprovada experimentalmente.

Na mecânica quântica, a equação de Schrödinger é uma equação que descreve muito bem sistemas não relativísticos (9)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\psi\rangle + V(\vec{r}, t) |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle, \quad (1.3)$$

em que m é a massa da partícula, $\hbar$ é a constante de Planck dividido por 2π , $V(\vec{r}, t)$ descreve o potencial de interação do sistema e $\psi(\vec{r}, t)$ é a função de onda. O grupo de simetria da equação de Schrödinger é o grupo de Galileu (10). Outra característica fundamental da equação de Schrödinger é que ela descreve uma partícula sem *spin*. A primeira descrição relativística de um sistema quântico, é a equação de Klein-Fock-Gordon (11)

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.4)$$

Aqui adotaremos a notação de Einstein para índices repetidos, em que os índices gregos $\mu = 0, \dots, 3$. O termo $\partial^\mu \partial_\mu = \square$ é operador D'Alembertiano. Apesar da equação ser covariante sobre transformações de Poincaré, ou seja descreve um sistema relativístico, ela também descreve partículas sem *spin*. Por outro lado, a equação que descreve um sistema de *spin*-1/2 é a equação de Pauli (12)

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) \right) + q\phi \right] |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle, \quad (1.5)$$

em que $\vec{p}$ é o momentum linear, q é a carga da partícula, $\vec{\sigma}$ é um vetor representado pelas matrizes de Pauli, $\vec{A}$ é o potencial vetor magnético, ϕ é o potencial escalar elétrico e $|\psi\rangle$ é um espinor de duas componentes. Porém, apesar da equação de Pauli descrever um sistema de *spin*-1/2, ela não é relativística. A primeira descrição relativística de uma partícula de *spin*-1/2, foi feita por Dirac (13, 11). A equação de Dirac é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = (-i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi(\vec{r}, t), \quad (1.6)$$

em que $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ e $\beta = \gamma_0$ são matrizes de dimensão 4×4 chamadas matrizes de Dirac. A equação de Dirac foi a primeira unificação da teoria quântica com a teoria da relatividade restrita, a qual representa uma partícula de *spin*-1/2 e possui como grupo de simetria o

grupo de Poincaré. Até então, temos a unificação de uma teoria que descreve um sistema quântico relativístico e uma teoria de gravitação relativística. A equação de Einstein da forma apresentada na equação (1.2), descreve um espaço-tempo quadridimensional. Porém, observações da radiação cósmica de fundo, das super novas Ia, o efeito das lentes gravitacionais e o mapeamento das estruturas cósmicas em grande escala, mostram que o universo se expande de forma acelerada (14, 15, 16, 17). Desse modo, a equação de Einstein precisa de um termo relacionado a constante cosmológica Λ . Assim, a equação de Einstein é modificada para

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - g^{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT^{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Entre os modelos propostos para explicar a expansão acelerada do universo, temos a relatividade de de Sitter, que propõe mudar o grupo de Poincaré como grupo de covariância, pelo grupo de de Sitter $dS = SO(4, 1)/\mathcal{L}$ e anti de Sitter $AdS = SO(3, 2)/\mathcal{L}$, conhecida como relatividade especial de de Sitter (18, 19, 20, 21, 22). No espaço de de Sitter a constante cosmológica surge como uma consequência cinemática e, a expansão do universo se dá naturalmente como uma consequência da geometria. No grupo de de Sitter, as translações são acrescidas de transformações conformes próprias, o qual possui termos adicionais que são parametrizados por uma nova escala invariante $1/l^2$, em que l é o pseudo raio de de Sitter (23, 24). Este termo invariante no grupo de de Sitter, pode ser um passo na direção de um descrição quântica da relatividade geral. Um problema que surge na tentativa de fazer essa descrição, onde assume-se que as simetrias de Lorentz sejam violadas na escala de Planck (25, 26, 27, 28, 29, 30). O comprimento de Planck pode ser definido a partir das constantes fundamentais $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$, o que faz dele também uma constante fundamental. Este fato, leva a inclusão de um segundo parâmetro invariante além da velocidade da luz, e o comprimento de de Sitter satisfaz essa condição (31, 32). Seguindo está linha várias teorias propõe que a cinemática seja governada por um grupo mais geral que o grupo de Poincaré. Sendo essas teorias de deformação do espaço-tempo (33, 34). Nesta tese, estamos interessados na deformação κ do espaço-tempo (35, 36). A deformação κ é uma deformação da álgebra de Poincaré, a qual é derivada pela contração da álgebra de Hopf no grupo de de Sitter $SO_q(3, 2)$, em que q é um parâmetro real de deformação. Descobriu-se que o parâmetro de deformação da álgebra resultante tem por construção dimensional dimensão de massa (37, 38, 39, 40). Contudo, a deformação do espaço-tempo não é um observável, e seu valor deve ser inferido através de alguma medida indireta (41). No contexto da teoria κ -deformada, as propriedades físicas da mecânica quântica relativísticas podem ser inferidas resolvendo a equação de Dirac κ -deformada (42, 43, 44, 45).

Tendo em vista que a equação de Dirac κ -deformada pode ser resolvida usando um *gauge* apropriado (42, 46), trabalhos envolvendo o oscilador de Dirac κ -deformado em (3+1) e (2+1) dimensões, foram feitos e obtidos os autovalores e autofunções desse sistema (47, 48). Contudo, realizar medições diretas de fenômenos quânticos relativístico

não é uma tarefa fácil. Uma maneira de se testar esses efeitos veio das simulações de efeitos relativístico em sistemas ópticos (49, 50, 51). Nestes trabalhos foi apresentado um mapeamento exato entre o oscilador de Dirac (52) e o sistema de Jaynes-Cummings (53). Nosso trabalho então, tem como objetivo fazer o mapeamento entre o oscilador de Dirac κ -deformado, em um sistema de Jaynes-Cummings κ -deformado. Tendo em vista que esses sistemas ópticos de armadilhas permitem um amplo controle coerente dos graus de liberdade internos e externos (54).

Durante o processo de desenvolvimento do trabalho, obtivemos um Hamiltoniano do oscilador Dirac κ -deformado em (2+1), e mostramos que o Hamiltoniano não é hermitiano, mas seu espectro é real (55). O trabalho de sistemas não hermitianos com espectro real, teve início com Bender e Boettcher (56). Nas últimas duas décadas, Hamiltonianos não hermitianos vem sendo discutidos no contexto da simetria- $\mathcal{PT}$ (57, 58), em que $\mathcal{P}$ é a reflexão espacial e $\mathcal{T}$ a reversão temporal. Na mecânica quântica usual, a hermiticidade, ou mais precisamente, a auto-adjunticidade dos observáveis físicos, especialmente dos Hamiltonianos, garante que a evolução do sistema seja unitária e seus autovalores sejam reais, desde que os Hamiltonianos não possuam singularidades. Se os autoestados do Hamiltoniano são os mesmos do operador $\mathcal{PT}$, diz-se que ele tem uma simetria $\mathcal{PT}$, e o Hamiltoniano é quase hermitiano (59, 60). A mecânica quântica de sistemas não hermitianos, tem um forte atividade de pesquisa desde a sua fundação (61, 62) e suas aplicações hoje em dia são encontradas em uma ampla variedade de fenômenos, como em caos de sistemas optomecânicos (63, 64), metrologia de cavidades (65), supercondutividade (66). Sabendo que nosso Hamiltoniano tem autovalores reais, o que o torna quase hermitiano, não podemos realizar a evolução temporal do sistema, sendo ela não unitária. Porém, para Hamiltonianos quase hermitianos independentes do tempo, é possível fazer uma evolução unitária, aplicando uma transformação de similaridade, um mapa de Dyson, que não afeta seus autovalores e os valores esperados (62, 67).

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2 apresentamos a equação de Weyl, junto do conceito de helicidade e quiralidade. Também apresentamos a equação de Dirac, e o efeito *Zitterbewegung*. Depois, apresentamos o oscilador de Dirac e o seu limite não relativístico. No capítulo 3, mostramos a conexão entre o oscilador de Dirac em (2+1) e o sistema de Jaynes-Cummings, e o resultado dos colapsos e ressurgimentos na dinâmica de inversão de *spin* do sistema. No capítulo 4, apresentamos a deformação κ do espaço-tempo e a equação de Dirac κ -deformada, junto de exemplos de aplicações em sistemas. Por fim, no capítulo 5, onde se encontra a contribuição original deste trabalho, fazemos o mapeamento entre o oscilador de Dirac κ -deformado e o sistema de Jaynes-Cummings, em que usamos um mapa de Dyson para encontrar sua contraparte hermitiana, e mostramos o efeitos da deformação no sistema. O trabalho está publicado em (55).

2 EQUAÇÕES RELATIVÍSTICAS

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos relativísticos que serão necessários para descrever o sistema físico que desejamos trabalhar. Primeiramente introduzimos a equação de Weyl, junto do conceito de helicidade, depois introduzimos o conceito de quiralidade e a equação de Dirac. Em seguida apresentamos o efeito *Zitterbewegung* e o oscilador de Dirac juntamente com o seu limite não relativístico.

2.1 EQUAÇÃO DE WEYL

Partículas relativísticas de $spin-1/2$ sem massa, possuem um operador de helicidade $\hat{h}$, que é representado pela projeção do $spin$ na direção do momentum linear $\vec{p}$ da partícula (11)

$$\hat{h} = \frac{\hat{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (2.1)$$

Este operador possui duas possíveis projeções para uma partícula com $spin-1/2$, a helicidade positiva o qual chamamos de “*right handed*”, e a negativa de “*left handed*”. Também chamadas de projeções quirais, essa grandeza é fixa para partículas que não possuem massa, dado o fato de que a partícula se move com uma velocidade c , para qualquer referencial inercial,

$$\hat{h} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2} \mathbf{I}_2, \quad (2.2)$$

$$\hat{h} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = -\frac{\hbar}{2} \mathbf{I}_2, \quad (2.3)$$

em que as matrizes $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$ são as matrizes de Pauli e $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade 2×2 . Para uma partícula de massa nula temos que $|\vec{p}| = E/c$, de modo que ficamos com

$$E \mathbf{I}_2 |\Phi\rangle - (c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) |\Phi\rangle = 0, \quad (2.4)$$

e

$$E \mathbf{I}_2 |\chi\rangle + (c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) |\chi\rangle = 0, \quad (2.5)$$

em que $|\Phi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são espinores dados pela representação de Weyl. Escrevendo as equações (2.4) e (2.5) em uma única equação matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & E \mathbf{I}_2 - c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E \mathbf{I}_2 + c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = 0, \quad (2.6)$$

definimos as matrizes de Dirac na representação de Weyl, que são escritas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

também conhecida como representação quirál, que nos leva a equação de Weyl

$$(\gamma^0 E + c\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) |\psi\rangle = 0, \quad (2.8)$$

em que $|\psi\rangle$ é um espinor de 4 componentes. As propriedades das matrizes de Dirac são dadas pela álgebra de Clifford

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{I}_4, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{I}_4, \quad (2.9)$$

de modo que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbf{I}_4, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski.

2.2 QUIRALIDADE

A quiralidade é um conceito complementar da helicidade. Definimos a matriz de quiralidade γ^5 como (68)

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (2.11)$$

A quiralidade é definida como a propriedade de dois objetos que podem ser convertidos entre si por combinação de translações, rotações e reflexões em planos especiais combinadas, mas não por rotações combinadas a translações somente. Todavia, o lema de Schur mostra que não é possível obter uma matriz de quiralidade para sistemas em dimensões ímpares (69).

Como a matriz de quiralidade anti-comuta com todos as matrizes da base $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ podemos definir dois operadores de projeção quirál

$$P_+ = \frac{\mathbf{I}_4 + \gamma^5}{2}, \quad P_- = \frac{\mathbf{I}_4 - \gamma^5}{2}, \quad (2.12)$$

no caso da representação de Weyl, temos que

$$P_+ |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_- |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

O operador de projeção quiral para um sistema de partículas sem massa, separa os setores de quiralidade “*left*” e “*right*”. Já para o caso de sistemas que possuem massa, a quiralidade fica “misturada”, não podendo separar esses setores, como no caso da equação de Dirac, que passamos a discutir.

2.3 EQUAÇÃO DE DIRAC

Em 1928, o físico teórico Paul Andrien Maurice Dirac propôs uma equação relativística para uma partícula massiva de *spin*-1/2 (13, 11). A equação para um elétron é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = (-i\hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi(\vec{r}, t), \quad (2.14)$$

em que $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ e $\beta = \gamma_0$ são matrizes de dimensão 4×4 chamadas matrizes de Dirac, c é a velocidade da luz no vácuo, m é a massa da partícula e $\psi(\vec{r}, t)$ é a função do onda. A equação de Dirac pode ser escrita também em sua forma Hamiltoniana

$$\hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle = (c\vec{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \beta mc^2) |\psi\rangle, \quad (2.15)$$

em que $|\psi\rangle$ é um espinor de 4 componentes

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

em que

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

e

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

A equação de Dirac é uma equação diferencial de primeira ordem definida sobre o espaço-tempo. Uma das características da equação de Dirac é que ela descreve um sistema relativístico de *spin* 1/2. As soluções da equação de Dirac apresentam um espectro de energia positiva e negativa. Os autoestados do sistema podem ser representados pela superposição dos autoestados de energia. Essas características do sistema, fazem com que efeitos puramente relativísticos surjam no sistema, um desses é o efeito *Zitterbewegung* (11).

2.4 ZITTERBEWEGUNG

O efeito *Zitterbewegung* ou movimento trêmulo de uma partícula relativística, causada pela superposição das soluções de energia positiva e negativa, é uma das previsões da equação de Dirac. O primeiro a chegar a esse resultado foi Schrödinger, ao obter a evolução temporal do operador velocidade de uma partícula. Ele observou que mesmo na ausência de campos externos, o operador velocidade não é uma constante de movimento.

Para evidenciar o efeito *Zitterbewegung*, escrevemos o operador posição da partícula na representação de Heisenberg (11). Assim, usando a equação de Heisenberg, temos

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_i(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{x}_i(t)] = \frac{i}{\hbar}[c\alpha_j\hat{p}_j - \beta mc^2, \hat{x}_i(t)], \quad (2.19)$$

ou

$$\begin{aligned} [c\alpha_j\hat{p}_j - \beta mc^2, \hat{x}_i(t)] &= c\alpha_j\hat{p}_j\hat{x}_i(t) - \beta mc^2\hat{x}_i(t) - c\alpha_j\hat{x}_i(t)\hat{p}_j + \beta mc^2\hat{x}_i(t) \\ &= c\alpha_j(\hat{p}_j\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t)\hat{p}_j) \\ &= -i\hbar c\alpha_j(t). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_i(t) = c\alpha_j(t). \quad (2.20)$$

Essa equação nos diz que $\alpha_j(t)$ é uma velocidade em unidades de c . Desse modo, escrevemos então a equação de Heisenberg para o operador velocidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\alpha} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\alpha}] \\ &= \frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{\mathcal{H}}) - \frac{2i}{\hbar}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{H}} \\ &= -\frac{2ic\hat{p}}{\hbar} - \frac{2i}{\hbar}\hat{\alpha}\hat{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo $\hat{p}$ e $\hat{\mathcal{H}}$ constantes no tempo, podemos integrar a equação (2.21) obtendo

$$\hat{\alpha}(t) = \left(\hat{\alpha}(0) - \frac{c\hat{p}}{\hat{\mathcal{H}}} \right) e^{-\frac{2i\hat{\mathcal{H}}}{\hbar}t} + \frac{c\hat{p}}{\hat{\mathcal{H}}}. \quad (2.22)$$

Substituindo a forma do operador velocidade (2.22) na equação da posição (2.20) e integrando obtemos

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{c^2\hat{p}}{\hat{\mathcal{H}}}t + \left(\hat{\alpha}(0) - \frac{c\hat{p}}{\hat{\mathcal{H}}} \right) \frac{i\hbar c}{2\hat{\mathcal{H}}} e^{-\frac{2i\hat{\mathcal{H}}}{\hbar}t}. \quad (2.23)$$

Desta forma, vemos que os dois primeiros termos da equação (2.23) representam a dinâmica de uma partícula clássica. Já o último termo, adiciona uma característica puramente relativística do sistema. Essa adição extra no sistema faz com que ele tenha um movimento oscilatório, com uma alta frequência de oscilação, mesmo para o sistema no referencial de repouso $\omega = 2E/\hbar \approx 10^{21}\text{Hz}$, e uma pequena amplitude de oscilação da ordem do comprimento de onda de Compton.

2.5 OSCILADOR DE DIRAC EM (3+1)

Oscilador de Dirac foi proposto em 1989 por Monshinsky e Szczepaniak (52). Esse sistema baseia-se em um acoplamento vetorial sobre o *momentum* linear do sistema, o qual é dado por

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} \pm im\omega\beta\vec{r}, \quad (2.24)$$

em que $\vec{p}$ é o operador *momentum*, m é a massa, ω é a frequência de oscilação do sistema, $\vec{r}$ é o vetor posição e β é uma matriz de Dirac. O sinal do acoplamento ficará mais claro quando fizermos o mapeamento entre oscilador de Dirac e o sistema de Jaynes-Cummings (JC). Esse tipo de interação vetorial descreve uma partícula neutra com momento anômalo magnético interagindo com um campo elétrico (70).

As matrizes de Dirac possuem diferentes representações e, a escolha dessa representação pode facilitar o acesso a certas propriedades físicas do sistema (71). A representação de Dirac (representação padrão) é usada quando queremos o limite não-relativístico. Nesse caso elas são dadas por

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Definimos $\pi^i = p_i - im\omega\beta r_i$, $\beta = \gamma_0$ e aqui manteremos apenas o sinal negativo no acoplamento com o intuito de apresentar os resultados obtidos por Monshinsky e Szczepaniak (52). Desse modo, temos

$$\alpha^i \pi^i = \alpha^1 \pi^1 + \alpha^2 \pi^2 + \alpha^3 \pi^3. \quad (2.26)$$

Assim, a equação de Dirac (2.15), fica

$$\begin{pmatrix} mc^2 \mathbf{I}_2 & c\sigma_i \pi^i \\ c\sigma_i \pi^i & -mc^2 \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 E & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

em que obtemos o conjunto de equações acopladas

$$\mathbf{I}_2(E + mc^2) |\Phi\rangle = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) |\chi\rangle, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{I}_2(E - mc^2) |\chi\rangle = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) |\Phi\rangle. \quad (2.29)$$

Substituindo a equação (2.29) na equação (2.28), temos

$$\mathbf{I}_2(E + mc^2) |\Phi\rangle = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) \frac{c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r})}{(E - mc^2)} |\Phi\rangle, \quad (2.30)$$

usando a propriedade

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (2.31)$$

obtemos a seguinte equação

$$\mathbf{I}_2(E^2 - m^2c^4)|\Phi\rangle = c^2(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{r}^2 - 3m\hbar\omega - 2m\omega\vec{\sigma} \cdot \vec{L})\mathbf{I}_2|\Phi\rangle. \quad (2.32)$$

A equação (2.32) representa a equação diferencial do oscilador de Dirac. Fazendo o limite não-relativístico, em que $E = \epsilon + mc^2$, de modo que $\epsilon \ll mc^2$, ficamos com

$$\hat{\mathcal{H}}_{OD}|\Phi\rangle = \left(\mathbf{I}_2 \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mathbf{I}_2 \frac{m}{2} \omega^2 \hat{r}^2 - \mathbf{I}_2 \frac{3}{2} \hbar \omega - \frac{2\omega}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{L} \right) |\Phi\rangle. \quad (2.33)$$

Na equação (2.33) observamos que no limite não-relativístico, aparecem os termos do oscilador ligados a energia cinética e potencial do oscilador harmônico quântico não relativístico e dois termos extras. O terceiro termo a direita da equação (2.33) representa deslocamento no espectro do sistema, o quarto termo representa um forte acoplamento spin-órbita. A primeira verificação experimental do oscilador de Dirac foi realizada em 2013 (72).

3 MAPEAMENTO EXATO DO OSCILADOR DE DIRAC NO SISTEMA DE JAYNES-CUMMINGS

Neste capítulo, apresentamos o sistema de Jaynes-Cummings (JC) e anti-Jaynes-Cummings (AJC), o qual é obtido do sistema de Rabi através da aproximação de onda girante. Também abordaremos o mapeamento entre o Hamiltoniano do oscilador de Dirac em (2+1) dimensões no sistema de JC. Depois, faremos uma análise da dinâmica do sistema, demonstrando os colapsos e ressurgimentos da inversão de *spin* usando um estado coerente.

3.1 O SISTEMA DE JAYNES-CUMMINGS

O sistema de Rabi descreve a interação de um sistema de dois níveis com um campo elétrico (53). O Hamiltoniano do sistema de Rabi pode ser escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_{JC} = \hat{\mathcal{H}}_c + \hat{\mathcal{H}}_a + \hat{\mathcal{H}}_i, \quad (3.1)$$

em que $\hat{\mathcal{H}}_c$ é o Hamiltoniano do campo (fóton, cavidade), $\hat{\mathcal{H}}_a$ é o Hamiltoniano do sistema de dois níveis (átomo, spin) e $\hat{\mathcal{H}}_i$ é o Hamiltoniano de interação entre o campo e o átomo. Os Hamiltonianos tanto do átomo como do campo podem ser chamados de Hamiltoniano livre $\hat{\mathcal{H}}_f = \hat{\mathcal{H}}_c + \hat{\mathcal{H}}_a$, de modo que

$$\hat{\mathcal{H}}_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \quad \hat{\mathcal{H}}_c = \hbar\omega_c\hat{a}^+\hat{a}^-, \quad (3.2)$$

em que $\hat{a}^+$ e $\hat{a}^-$ são os operadores bosônicos de criação e aniquilação no espaço de Fock (12), ω_0 e ω_c são as frequências do átomo e do campo elétrico, respectivamente. Os termos livres do Hamiltoniano que atuam no sistema contribuem apenas com uma fase na evolução temporal. O Hamiltoniano de interação entre os sistemas, conhecido como sistema de Rabi, é a chave para a sua dinâmica, o qual determina a troca entre o campo e o átomo e é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_i = \hbar(g\sigma_+\hat{a}^- + g^*\sigma_-\hat{a}^+) + \hbar(g^*\sigma_+\hat{a}^+ + g\sigma_-\hat{a}^-), \quad (3.3)$$

em que σ_+ e σ_- são operadores fermiônicos de levantamento e abaixamento do sistema de dois níveis, e g é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo elétrico. O Hamiltoniano de interação (3.3), apresenta dois termos, o primeiro é chamado de Jaynes-Cummings, e o segundo chamado de anti-Jaynes-Cummings. O que determina qual dos termos de interação estarão presentes no sistema, é a frequência do campo elétrico. Essa característica, pode ser observada se escrevermos o Hamiltoniano (3.3), na representação

de Heisenberg. Fazendo isso, temos

$$\hat{\mathcal{H}}_i(t) = \hbar(g^*\sigma_+\hat{a}^+e^{i(\omega_c+\omega_0)t} + g\sigma_-\hat{a}^-e^{-i(\omega_c+\omega_0)t} + g\sigma_-\hat{a}^+e^{-i(\omega_0-\omega_c)t} + g^*\sigma_+\hat{a}^-e^{i(\omega_0-\omega_c)t}). \quad (3.4)$$

Podemos ver na equação (3.4) que a frequência do campo elétrico determina qual dos termos de interação estarão presentes no sistema. O regime de ressonância em que $\omega_c = \omega_0$, os termos que dependem da soma das frequências oscilam muito rapidamente, e os termos de subtração das frequências ficam independentes do tempo. Assim, obtemos o Hamiltoniano do sistema JC

$$\hat{\mathcal{H}}_i^{JC} = \hbar(g\sigma_-\hat{a}^+ + g^*\sigma_+\hat{a}^-). \quad (3.5)$$

Matematicamente, podemos fazer que $\omega_c = -\omega_0$, assim os termos que dependem da subtração é que oscilam rapidamente, e isso nos leva ao sistema AJC

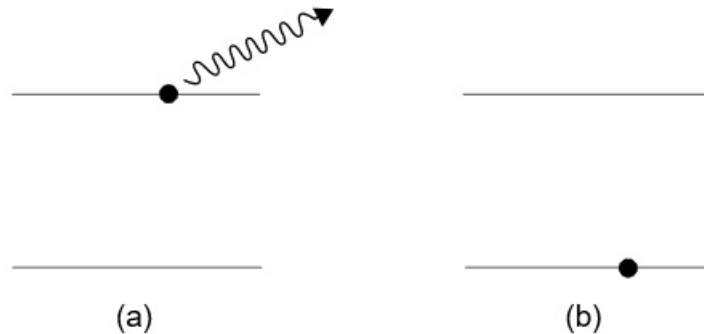
$$\hat{\mathcal{H}}_i^{AJC} = \hbar(g\sigma_+\hat{a}^+ + g^*\sigma_-\hat{a}^-). \quad (3.6)$$

A equação (3.5), representa o sistema JC, na qual é dada a troca de energia entre o átomo e o campo representado na Figura 1. A equação (3.6), representa o sistema AJC, a qual apresenta um dinâmica menos intuitiva, e está representada na Figura 2.

Figura 1 – Sistema na frequência de ressonância JC. Em (a) temos o fóton interagindo com o sistema de dois níveis. Em (b) representa o sistema após a absorção do fóton.



Figura 2 – Sistema com a frequência de anti-ressonância AJC. Em (a) temos o sistema de dois níveis, o qual se encontra no estado excitado e um fóton é emitido. Em (b) representamos o estado fundamental sem a presença do fóton.



Apesar do sistema AJC apresentar uma dinâmica não intuitiva, o sistema é conservativo, seu Hamiltoniano é independente do tempo de modo que sua evolução é unitária.

3.2 OSCILADOR DE DIRAC EM (2+1) DIMENSÕES

Para o estudo do oscilador de Dirac em (2+1) dimensões, usamos uma representação das matrizes de Dirac que se encontra em (73),

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & -i\sigma_y \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_x & 0 \\ 0 & i\sigma_x \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Essa representação das matrizes de Dirac formam uma base do espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$, em que os índices (1, 3) representam as coordenadas do sistema de referência. As matrizes de Dirac (3.7) obedecem todas as propriedades da álgebra de Clifford,

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{I}_4, \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbf{I}_4, \quad \gamma_i = \gamma_i^\dagger, \quad (3.8)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}\mathbf{I}_4, \quad (3.9)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski, o que indica que nosso sistema está em uma base de dimensão (3+1).

Usando as representações das matrizes de Dirac (3.7) na equação de Dirac (2.15), para o oscilador de Dirac

$$\mathbf{I}_4 E |\psi\rangle = c(\alpha \cdot \boldsymbol{\pi}^\pm - mc^2 \beta) |\psi\rangle, \quad (3.10)$$

em que $\boldsymbol{\pi}^\pm = \vec{p} \pm im\omega\beta\vec{r}$, a forma matricial da Hamiltoniana é

$$\begin{pmatrix} c\sigma_x\pi_x^\pm + c\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z & c\sigma_z\pi_z^\pm \\ c\sigma_z\pi_z^\pm & c\sigma_x\pi_x^\pm - c\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix} = E\mathbf{I}_4 \begin{pmatrix} |\Phi\rangle \\ |\chi\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Vemos que a representação das matrizes de Dirac (3.7), na equação (3.11), coloca o termo π_z na diagonal secundária das matrizes, de modo que ao fazer esse termo igual a zero, desacoplamos o sistema em duas equações com quiralidades opostas. No caso de trabalharmos com o sistema em (2+1), escolhemos $p_z = 0$ e $z = 0$. Essa escolha permite desacoplar a equação com um espinor de 4 componentes, em duas equações com dois espinores de duas componentes, e cada um deles com sua correspondente quiralidade.

$$(c\sigma_x\pi_x^\pm + c\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z) |\Phi\rangle = E\mathbf{I}_2 |\Phi\rangle, \quad (3.12)$$

$$(c\sigma_x\pi_x^\pm - c\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z)|\chi\rangle = E\mathbf{I}_2|\chi\rangle. \quad (3.13)$$

Podemos ver que existe uma troca de sinal no termo $c\sigma_y\pi_y^\pm$. Este sinal, como veremos, representa a quiralidade do sistema. Assim, podemos escrever as duas equações em uma única

$$(c\sigma_x\pi_x^\pm + sc\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z)|\psi\rangle = E\mathbf{I}_2|\psi\rangle, \quad (3.14)$$

em que foi introduzido o s e este pode assumir os valores de $s = 1$ com quiralidade *right*, $s = -1$ para quiralidade *left*. O parâmetro s foi introduzido pela primeira vez no contexto da dependência da projeção de *spin*-1/2 no sistema de Aharanov-Bohm (74). Porém, para o oscilador de Dirac em (2+1), s representa a quiralidade do sistema. Assim, escrevendo $|\psi\rangle = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle)^T$ a equação (3.14) nos fornece o seguinte conjunto de equações

$$(E - mc^2)|\psi_1\rangle = c[\pi_x^\mp - is\pi_y^\mp]|\psi_2\rangle, \quad (3.15)$$

$$(E + mc^2)|\psi_2\rangle = c[\pi_x^\pm + is\pi_y^\pm]|\psi_1\rangle. \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) podem ser escritas em termos dos operadores bosônicos de criação e aniquilação

$$\hat{a}_i^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\Delta} \hat{r}_i \mp i \frac{\Delta}{\hbar} \hat{p}_i \right), \quad (3.17)$$

em que $\Delta = \sqrt{\hbar/m\omega}$ é denominada “largura” do estado fundamental. Usando os operadores (3.17), nas equações (3.15) e (3.16), obtemos as seguintes formas (51)

$$c[(\hat{p}_x \mp im\omega\hat{x}) - is(\hat{p}_y \mp im\omega\hat{y})] = \mp 2imc^2\sqrt{\xi}(\hat{a}_{\pm s}^\mp), \quad (3.18)$$

$$c[(\hat{p}_x \pm im\omega\hat{x}) + is(\hat{p}_y \pm im\omega\hat{y})] = \pm 2imc^2\sqrt{\xi}(\hat{a}_{\pm s}^\pm), \quad (3.19)$$

em que

$$\hat{a}_s^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x^\pm \mp is\hat{a}_y^\pm), \quad (3.20)$$

são os operadores quirais. De modo que $\hat{a}_1^\pm = \hat{a}_r^\pm$ para $s = 1$ e $\hat{a}_{-1}^\pm = \hat{a}_l^\pm$ para $s = -1$. Esses operadores quirais estão ligados ao momento angular do sistema na direção z . Assim, as equações podem ser escritas como

$$(E - mc^2)|\psi_1\rangle = \mp 2imc^2\sqrt{\xi}(\hat{a}_{\pm s}^\mp)|\psi_2\rangle, \quad (3.21)$$

$$(E + mc^2)|\psi_2\rangle = \pm 2imc^2\sqrt{\xi}(\hat{a}_{\pm s}^\pm)|\psi_1\rangle, \quad (3.22)$$

sendo $\xi = \hbar\omega/mc^2$, o parâmetro para o limite não-relativístico, o qual é obtido fazendo $\xi \rightarrow 0$. Podemos substituir uma equação na outra e obter

$$(E^2 + m^2c^4)|\psi_1\rangle = 4m^2c^4\xi\hat{a}_{\pm s}^\mp\hat{a}_{\pm s}^\pm|\psi_1\rangle, \quad (3.23)$$

$$(E^2 - m^2 c^4) |\psi_2\rangle = 4m^2 c^4 \xi \hat{a}_{\pm s}^{\pm} \hat{a}_{\pm s}^{\mp} |\psi_2\rangle. \quad (3.24)$$

Considerando a base de quiralidade quântica de momento angular dada por

$$|n_{\pm s}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\pm s}^{\pm}!}} (\hat{a}_{\pm s}^{\pm})^{n_{\pm s}^{\pm}} |0\rangle, \quad (3.25)$$

em que $n_{\pm s}^+ = 0, 1, 2, \dots$ e $n_{\pm s}^- = 1, 2, 3, \dots$ representam os autovalores do operador número $\hat{N}_{\pm s} = \hat{a}_{\pm s}^+ \hat{a}_{\pm s}^-$. Escolhemos por conveniência $|\psi_1\rangle = |n_{\pm s}^{\pm}\rangle$ e $|\psi_2\rangle = |\bar{n}_{\pm s}^{\pm}\rangle$. O fato desses dois vetores estarem associados a mesma energia $E^{\pm}$ nos leva à condição de que $\bar{n}_{\pm s}^{\pm} = n_{\pm s}^{\pm} \pm 1$. Assim, os seus autovalores de energia positiva e negativa são dados por

$$E = \pm E_{n_{\pm s}^{\pm}} = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4\xi(n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm))}, \quad (3.26)$$

em que $\Theta(\pm) = (1 \pm 1)/2$ é a função degrau de Heaviside. A equação (3.26) pode ser comparada com resultado obtido do oscilador de Dirac em (2+1) via resolução da equação diferencial de segunda ordem em coordenadas polares (75), a qual é dada por

$$E = E_{n^{\pm}} = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4\xi[n^{\pm} + \Theta(\pm) + (|l| - sl)/2]}, \quad (3.27)$$

em que $n^+ = 0, 1, 2, \dots$ e $n^- = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico radial e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é número quântico angular. Desse modo, comparando os dois resultados, encontramos que $n_s^{\pm} = n^{\pm} + (|l| - sl)/2$, e assim, observamos a dependência do espectro no parâmetro s .

3.3 MAPEAMENTO EXATO DO OSCILADOR DE DIRAC EM (2+1) NO SISTEMA DE JAYNES-CUMMINGS

Nesta seção, mostramos que é possível mapear o Hamiltoniano $\hat{H}^{\pm}$ do oscilador de Dirac em (2+1) no Hamiltoniano JC ou AJC. A equação (3.14) pode ser reescrita como

$$\hat{H}^{\pm} = \begin{pmatrix} mc^2 & \mp 2imc^2 \sqrt{\xi} (\hat{a}_{\pm s}^{\mp}) \\ \pm 2imc^2 \sqrt{\xi} (\hat{a}_{\pm s}^{\pm}) & -mc^2 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Assim, observamos que o oscilador de Dirac possui a mesma estrutura matemática do Hamiltoniano do sistema JC quando o acoplamento é positivo e AJC quando é negativo. De fato,

$$\begin{aligned} \hat{H}^+ &= 2imc^2 \sqrt{\xi} (\hat{a}_s^+ \sigma_- - \hat{a}_s^- \sigma_+) + mc^2 \sigma_z \\ &= \hbar(g \hat{a}_s^+ \sigma_- + g^* \hat{a}_s^- \sigma_+) + mc^2 \sigma_z \\ &= H_{JC}^s \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que $g = i2mc^2\sqrt{\xi}/\hbar$ é a constante de acoplamento, $\sigma_{\pm}$ são operadores fermiônicos associados ao sistema de dois níveis. O termo da energia ligada a massa pode ser interpretada como o parâmetro de “*detuning*”(76, 53). O Hamiltoniano de anti-Jaynes-Cummings para o acoplamento negativo é dado por

$$\begin{aligned}\hat{H}^- &= 2imc^2\sqrt{\xi}(\hat{a}_{-s}^-\sigma_- - \hat{a}_{-s}^+\sigma_+) + mc^2\sigma_z \\ &= \hbar(g\hat{a}_{-s}^-\sigma_- + g^*\hat{a}_{-s}^+\sigma_+) + mc^2\sigma_z \\ &= H_{AJC}^{-s}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Assim, vemos que a mudança no acoplamento do oscilador faz com que o sistema de AJC se torne um sistema JC, com quiralidade oposta. Se o sistema AJC possui quiralidade *left*, ao trocar o sinal do acoplamento o sistema se torna JC e possuirá quiralidade *right*.

3.4 AUTOESTADOS DO OSCILADOR DE DIRAC EM (2+1)

Os autoestados de energia normalizados do sistema são dados por

$$\left|\pm E_{n_{\pm s}^{\pm}}\right\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_{n_{\pm s}^{\pm}} \pm mc^2}{2E_{n_{\pm s}^{\pm}}}} |n_{\pm s}^{\pm}\rangle \\ \mp i \sqrt{\frac{E_{n_{\pm s}^{\pm}} \mp mc^2}{2E_{n_{\pm s}^{\pm}}}} |n_{\pm s}^{\pm} \pm 1\rangle \end{pmatrix},\tag{3.31}$$

em que

$$\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}} = \sqrt{\frac{E_{n_{\pm s}^{\pm}} + mc^2}{2E_{n_{\pm s}^{\pm}}}}, \quad \beta_{n_{\pm s}^{\pm}} = \sqrt{\frac{E_{n_{\pm s}^{\pm}} - mc^2}{2E_{n_{\pm s}^{\pm}}}},\tag{3.32}$$

sendo $|\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}}|^2 + |\beta_{n_{\pm s}^{\pm}}|^2 = 1$. Podemos escrever os autoestados de energia em termos dos espinores de Pauli na forma

$$\left|+E_{n_{\pm s}^{\pm}}\right\rangle = \alpha_{n_{\pm s}^{\pm}} |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle - i\beta_{n_{\pm s}^{\pm}} |n_{\pm s}^{\pm} \pm 1, \downarrow\rangle,\tag{3.33}$$

e

$$\left|-E_{n_{\pm s}^{\pm}}\right\rangle = \beta_{n_{\pm s}^{\pm}} |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle + i\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}} |n_{\pm s}^{\pm} \pm 1, \downarrow\rangle.\tag{3.34}$$

Para fazer a evolução temporal, escolhemos o estado inicial do sistema como sendo

$$\left|\Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(0)\right\rangle = |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle.\tag{3.35}$$

Este estado pode ser escrito em termos dos autoestados de energia (3.33) e (3.34), uma vez que

$$\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}} \left|+E_{n_{\pm s}^{\pm}}\right\rangle = (\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}})^2 |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle - i\alpha_{n_{\pm s}^{\pm}}\beta_{n_{\pm s}^{\pm}} |n_{\pm s}^{\pm} \pm 1, \downarrow\rangle,\tag{3.36}$$

$$\beta_{n_{\pm s}} \left| -E_{n_{\pm s}} \right\rangle = (\beta_{n_{\pm s}})^2 \left| n_{\pm s}, \uparrow \right\rangle + i\beta_{n_{\pm s}} \alpha_{n_{\pm s}} \left| n_{\pm s} \pm 1, \downarrow \right\rangle. \quad (3.37)$$

Assim, somando temos

$$\left| \Psi_{n_{\pm s}}(0) \right\rangle = \alpha_{n_{\pm s}} \left| +E_{n_{\pm s}} \right\rangle + \beta_{n_{\pm s}} \left| -E_{n_{\pm s}} \right\rangle. \quad (3.38)$$

Aplicando o operador de evolução temporal no estado (3.38) tal que

$$\left| \Psi_{n_{\pm s}}(t) \right\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \left| \Psi_{n_{\pm s}}(0) \right\rangle, \quad (3.39)$$

resultando na forma

$$\left| \Psi_{n_{\pm s}}(t) \right\rangle = \alpha_{n_{\pm s}} \left| +E_{n_{\pm s}} \right\rangle e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} + \beta_{n_{\pm s}} \left| -E_{n_{\pm s}} \right\rangle e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t}, \quad (3.40)$$

em que

$$\omega_{n_{\pm s}} = \frac{mc^2 \sqrt{1 + 4\xi(n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm))}}{\hbar}. \quad (3.41)$$

Note que o estado na equação (3.40) é uma superposição dos autoestados de energia positiva e negativa, o que caracteriza o efeito *Zitterbewegung* para o qual $\omega_{n_{\pm s}}^{\pm}$ é a frequência de *Zitterbewegung*. Esse efeito é uma assinatura do sistema relativístico.

Escrevendo (3.40) em termos das equações (3.33) e (3.34), temos

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{n_{\pm s}}(t) \right\rangle &= \alpha_{n_{\pm s}} \left(\alpha_{n_{\pm s}} \left| n_{\pm s}, \uparrow \right\rangle - i\beta_{n_{\pm s}} \left| n_{\pm s} \pm 1, \downarrow \right\rangle \right) e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} \\ &+ \beta_{n_{\pm s}} \left(\beta_{n_{\pm s}} \left| n_{\pm s}, \uparrow \right\rangle + i\alpha_{n_{\pm s}} \left| n_{\pm s} \pm 1, \downarrow \right\rangle \right) e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

organizando os termos

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{n_{\pm s}}(t) \right\rangle &= \left[(\alpha_{n_{\pm s}})^2 e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} + (\beta_{n_{\pm s}}^2) e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t} \right] \left| n_{\pm s}, \uparrow \right\rangle \\ &+ i\alpha_{n_{\pm s}} \beta_{n_{\pm s}} (e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} - e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t}) \left| n_{\pm s} \pm 1, \downarrow \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Definindo

$$\begin{aligned} g_{n_{\pm s}}(t) &= i\alpha_{n_{\pm s}} \beta_{n_{\pm s}} (e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} - e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t}) \\ &= \sqrt{\frac{4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm)]}{1 + 4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm)]}} \text{sen}(\omega_{n_{\pm s}} t), \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned} f_{n_{\pm s}}(t) &= \left[(\alpha_{n_{\pm s}})^2 e^{i\omega_{n_{\pm s}} t} + (\beta_{n_{\pm s}}^2) e^{-i\omega_{n_{\pm s}} t} \right] \\ &= \left(\cos(\omega_{n_{\pm s}} t) - \frac{i \text{sen}(\omega_{n_{\pm s}} t)}{\sqrt{1 + 4\xi(n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm))}} \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

em que $|f_{n_{\pm s}^{\pm}}(t)|^2 + |g_{n_{\pm s}^{\pm}}(t)|^2 = 1$, temos

$$\left| \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \right\rangle = f_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle + g_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) |n_{\pm s}^{\pm} \mp 1, \downarrow\rangle. \quad (3.46)$$

Agora podemos calcular o valor esperado dos observáveis do sistema e mostrar que o momento angular total é conservado

$$[H^{\pm}, \hat{J}_z] = 0, \quad (3.47)$$

em que $\hat{J}_z$ é o operador de momento angular total na direção z , o qual é dado por

$$\hat{J}_z = \hat{S}_z + \hat{L}_z, \quad \hat{L}_z = \hbar(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}), \quad (3.48)$$

em que $\hat{S}_z$ é o operador de *spin*, e $\hat{L}_z$ é o operador de momento angular. O valor esperado do sistema de dois níveis é

$$\left\langle \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \left| \hat{S}_z \right| \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \right\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \mp \hbar \frac{4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm)]}{1 + 4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm)]} \sin^2(\omega_{n_{\pm s}^{\pm}} t). \quad (3.49)$$

O valor esperador para o momento angular é

$$\left\langle \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \left| L_z \right| \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \right\rangle = \pm \hbar(n_{\pm s}^{\pm} - 1 + \Theta(\pm)) \pm \hbar \frac{4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \Theta(\pm)]}{1 + 4\xi[n_{\pm s}^{\pm} + \theta(\pm)]} \sin^2(\omega_{n_{\pm s}^{\pm}} t). \quad (3.50)$$

Assim, o valor esperado do momento angular total do sistema é dado por

$$\left\langle \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \left| \hat{J}_z \right| \Psi_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) \right\rangle = \pm \hbar(n_{\pm s}^{\pm} + \frac{1}{2}). \quad (3.51)$$

Se tomarmos o limite não relativístico do sistema $\xi \rightarrow 0$ as componentes de energia negativa podem ser negligenciadas e o efeito *Zitterbewegung* desaparece do sistema.

3.5 COLAPSOS E RESSURGIMENTO DA INVERSÃO DE *SPIN* DE UM ESTADO COERENTE

Para que possamos ver o efeito de colapsos e ressurgimento da população atômica do sistema precisamos de um estado coerente (77, 78). Este estado pode ser obtido fazendo a escolha do estado inicial como

$$|\Psi_{n_s}(0)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n_{\pm s}^{\pm}=\Theta(\mp)}^{\infty} \frac{\alpha^{n_{\pm s}^{\pm}}}{\sqrt{n_{\pm s}^{\pm}}!} |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle, \quad (3.52)$$

em que $\alpha = \langle n_{\pm s}^{\pm} \rangle$ Aplicando a evolução temporal, temos

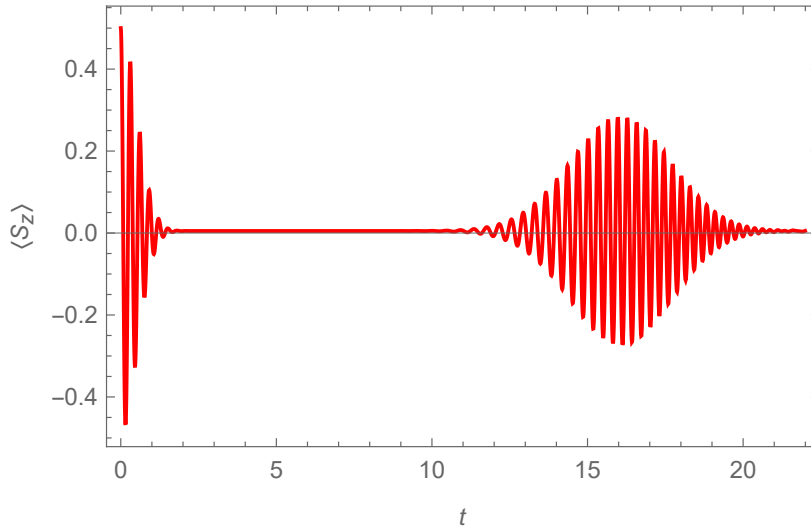
$$|\Psi_{n_s}(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n_{\pm s}^{\pm}=\Theta(\mp)}^{\infty} \frac{\alpha^{n_{\pm s}^{\pm}}}{\sqrt{n_{\pm s}^{\pm}}!} \left[f_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) |n_{\pm s}^{\pm}, \uparrow\rangle + g_{n_{\pm s}^{\pm}}(t) |n_{\pm s}^{\pm} \mp 1, \downarrow\rangle \right]. \quad (3.53)$$

Calculando o valor esperado do *spin*

$$\begin{aligned}\langle \Psi_{n_s}(t) | \hat{S}_z | \Psi_{n_s}(t) \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sum_{n_{\pm s}^{\pm} = \Theta(\mp)}^{\infty} \frac{\alpha^{2n_{\pm s}^{\pm}}}{n_{\pm s}^{\pm}!} \left[|f_{n_{\pm s}^{\pm}}(t)|^2 - |g_{n_{\pm s}^{\pm}}(t)|^2 \right] \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{n_{\pm s}^{\pm} = \Theta(\mp)}^{\infty} \frac{\alpha^{2n_{\pm s}^{\pm}}}{n_{\pm s}^{\pm}!} \left[1 - 2|g_{n_{\pm s}^{\pm}}(t)|^2 \right].\end{aligned}\quad (3.54)$$

O gráfico da equação (3.54) está representado na Figura 3.

Figura 3 – O gráfico representa os colapsos e ressurgimentos da inversão de *spin* do sistema. Os valores dos parâmetros $m = c = \xi = 1$ e o número médio de fótons é $\langle n_s \rangle = 50$.



Fonte: O autor

Podemos observar na Figura 3, que o sistema apresenta logo em seu início uma troca entre o campo e o sistema de dois níveis, logo após um tempo o sistema fica em “repouso”, que chamamos de colapsos, depois o sistema volta a fazer a sua troca em que há os ressurgimentos. Esse resultado é fundamental para o sistema JC, o qual apresenta uma evidência direta da quantização do campo eletromagnético.

No próximo capítulo, apresentamos a deformação κ do espaço-tempo, a qual será a base para fazer o mapeamento entre o oscilador de Dirac e o sistema de Jaynes-Cummings.

4 DEFORMAÇÃO κ DO ESPAÇO-TEMPO

Neste capítulo, apresentamos os geradores de Poincaré e sua versão deformada. Também mostramos como é obtida a equação de Dirac κ -deformada, e mostramos alguns exemplos de aplicações.

4.1 GERADORES DE POINCARÉ

A álgebra de Poincaré é uma das estruturas mais importante da física moderna de altas energias. Dizemos que seus geradores infinitesimais representam as simetrias do espaço-tempo plano, o espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$. Elas são compostas pelos geradores de rotação M_i , geradores de energia e momento P_0 e P_i , e os *boosts* L_i , responsáveis por dar um “empurrão” no referencial

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (4.1a)$$

$$[M_i, P_\mu] = (1 - \delta_{0\mu})i\epsilon_{ijk}P_k, \quad (4.1b)$$

$$[L_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0, \quad (4.1c)$$

$$[L_i, P_0] = iP_i, \quad (4.1d)$$

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad (4.1e)$$

$$[M_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad (4.1f)$$

$$[L_i, L_j] = -i\epsilon_{ijk}M_k, \quad (4.1g)$$

em que ϵ_{ijk} , é o tensor de Levi-Civita. As partículas elementares podem ser pensadas como representações desta álgebra e esta é a razão pela qual a álgebra de Poincaré desempenha um papel importante para a física.

4.2 ÁLGEBRA DE κ -POINCARÉ-HOPF

A deformação κ consiste em uma deformação algébrica do espaço-tempo, chamada de álgebra κ -Poincaré-Hopf (35, 36). Seu início foi nos anos 90, com os trabalhos de Lukierski

(37, 39). Essa deformação é desenvolvida sobre o grupo de Poincaré, a qual é derivada pela contração de Inönü-Wigner (79) da álgebra de Hopf em um espaço anti de Sitter deformado, $SO_q(3, 2)$. Descobriu-se que o parâmetro de deformação de álgebra resultante, denotado por κ , tem por construção dimensional, dimensão de massa $M \sim 10^{19} GeV$ (35, 80). Os geradores do espaço-tempo de Poincaré κ -deformados são dados por

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (4.2a)$$

$$[M_i, P_\mu] = (1 - \delta_{0\mu}) i\epsilon_{ijk} P_k, \quad (4.2b)$$

$$[L_i, P_\mu] = i[P_i]^{\delta_{0\mu}} [\delta_{ij} \varepsilon^{-1} \sinh(\varepsilon P_0)]^{(1-\delta_{0\mu})}, \quad (4.2c)$$

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k, \quad (4.2d)$$

$$[M_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad (4.2e)$$

$$[L_i, L_j] = -i\epsilon_{ijk} \left[M_k \cosh(\varepsilon P_0) - \frac{\varepsilon^2}{4} P_k P_l M_l \right], \quad (4.2f)$$

em que $\epsilon = \kappa^{-1} = \lim_{R \rightarrow \infty} (R \ln q)$, sendo R a curvatura de de Sitter, e q um parâmetro real de deformação. Sendo P_μ o gerador de energia e momento κ -deformado, M_i e L_i são os geradores de rotações e boosts κ -deformados (40). Como a simetria de Poincaré é uma simetria do espaço-tempo plano, acredita-se que sua deformação, simetria κ -Poincaré, tem uma ligação com a gravidade quântica (36, 41, 80), dado o fato que a deformação tem dimensão de massa e deforma os geradores do espaço-tempo plano.

A álgebra de Hopf-Poincaré, aplicada ao geradores de Poincaré são dados por

$$\Delta M_i = M_i \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes M_i, \quad (4.3a)$$

$$\Delta P_0 = P_0 \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2 \otimes P_0, \quad (4.3b)$$

$$\Delta P_i = P_i \otimes \exp\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) \otimes P_i, \quad (4.3c)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_i = & L_i \otimes \exp\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) \otimes L_i \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \epsilon_{ijk} \left[P_i \otimes M_k \exp\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) M_j \otimes P_k \right], \end{aligned} \quad (4.3d)$$

$$S(P_\mu) = -P_\mu \quad S(M_i) = -M_i, \quad (4.3e)$$

$$S(L_i) = -L_i + \varepsilon \frac{3i}{2} P_i, \quad (4.3f)$$

em que Δ é a co-multiplicação da co-álgebra e S é a antípoda, que tem um papel análogo a inversa. As álgebras de Hopf surgiram na topologia algébrica em 1964 (81), e tem uma enorme importância no tratamento de grupos quânticos. Dizemos que a álgebra de Hopf é uma álgebra universal envelopante do grupo de Lie (82).

4.3 EQUAÇÃO DE DIRAC κ -DEFORMADA

A equação de Dirac κ -deformada é obtida através da fatoração do operador de Casimir bi-quadrático. O grupo κ -Poincaré possui dois invariantes, um quadrático e um bi-quadrático que foram obtidos primeiramente em (42). Os operadores deformados invariantes do grupo κ -Poincaré são

$$C_1 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) \right]^2 - P_i P_i, \quad (4.4)$$

$$C_2 = \left(\cosh\left(\varepsilon P_0 - \frac{\varepsilon^2 P_i P_i}{4}\right) \right) W_0^2 - W_i W_i, \quad (4.5)$$

em que $W_0 = P_0 M_i$ e $W_i = (1/\varepsilon) \sinh(\varepsilon P_0) M_i + \epsilon_{ijk} P_j L_k$. Esta representação também cumpre as relações de comutação do grupo quântico κ -Poincaré. Podemos então escrever uma representação a partir da co-multiplicação do grupo quântico de Poincaré para obter a representação espinorial desejada. Assim, a representação para $spin-1/2$ é dada por (43)

$$\mathbf{P}_\mu = P_\mu, \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{M}_i = M_i + m_i, \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{L}_i = L_i + \exp\left(-\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) l_i - \frac{\varepsilon}{2} \epsilon_{ijk} m_j P_k, \quad (4.6c)$$

em que $m_i = \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \gamma_i \gamma_k$ e $l_i = -\frac{i}{2} \gamma_0 \gamma_i$. O operador de Dirac κ -deformado deve comutar com a representação de $spin$, de modo que $[\mathbf{P}_\mu, \mathcal{D}] = [\mathbf{M}_i, \mathcal{D}] = [\mathbf{L}_i, \mathcal{D}] = 0$, em que chamamos o operador de Dirac de $\mathcal{D}$, o qual é dado por

$$\mathcal{D} \equiv -\exp\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) \gamma_i P_i + \frac{\gamma_4}{\varepsilon} \sinh(\varepsilon P_0) - \frac{i\varepsilon}{2} \gamma_4 P_i P_i. \quad (4.7)$$

Portanto, o operador de Dirac $\mathcal{D}$ elevado ao quadrado é escrito como

$$\mathcal{D}^2 = C_1 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4} C_1 \right) = -\frac{3}{4} C_2. \quad (4.8)$$

Assim, a equação de Dirac κ -deformada pode ser escrita de forma explícita como

$$\left[-\exp\left(\frac{\varepsilon P_0}{2}\right) \gamma_i P_i + \frac{\gamma_4}{\varepsilon} \sinh(\varepsilon P_0) - \frac{i\varepsilon}{2} \gamma_4 P_i P_i \right] \psi = m \left(1 + \frac{\varepsilon^2 m^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \psi. \quad (4.9)$$

Vemos que ao tomar $\varepsilon = 0$, recuperamos a equação de Dirac usual. Existem outras abordagens para se obter a equação de Dirac κ -deformada (83), contudo, a equação de Dirac que abordamos é a mais usada. A seguir, veremos alguns exemplos de aplicações da equação de Dirac κ -deformada.

4.4 DIRAC-COULOMB κ -DEFORMADO

Para descrever a equação de Dirac com um potencial coulombiano (43) são necessários dois passos, o primeiro é escrever a equação de Dirac κ -deformada (4.9) com aproximação em primeira ordem em $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ($\varepsilon^2 = 0$), para isso fazemos a multiplicação de $\exp(-\varepsilon P_0/2)$ em ambos os lados da equação (4.9) e fazemos a expansão de modo que obtemos

$$\{(\gamma_0 P_0 - c\gamma_i P_i) + \frac{\varepsilon}{2} [\gamma_0(P_0^2 - P_i P_i) - mc^2 P_0]\} |\psi\rangle = mc^2 |\psi\rangle. \quad (4.10)$$

O segundo passo, consista na escolha de um *gauge* adequado, de tal modo a solucionar o problema de não comutatividade do sistema sem a necessidade de aplicar a transformação de Syberg-Wintten (84). O *gauge* adequado escolhido $P_0 \rightarrow H + \alpha Z/r$ introduz um potencial Coulombiano atrativo. Assim, a equação de κ Dirac-Coulomb em primeira ordem fica

$$H\psi = \left\{ \left(\gamma_4 \gamma_i P_i + m\gamma_4 - \frac{\alpha Z}{r} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(H + \frac{\alpha Z}{r} \right)^2 - P_i P_i - \gamma_4 m \left(H + \frac{\alpha Z}{r} \right) \right] \right\} \psi, \quad (4.11)$$

em que H nos termos de perturbação é identificado como o Hamiltoniano de Dirac sem deformação. Neste contexto, a perturbação causada pela deformação conserva o momento angular e a paridade do sistema. Normalmente, aplicaríamos a teoria de perturbação não degenerada para o cálculo dos níveis de energia perturbados. No entanto, pelo fato da paridade ser preservada no sistema, a matriz se torna diagonal, permitindo considerar a perturbação em uma forma mais conveniente no Hamiltoniano quadrático $P_i P_i$, multiplicando por $\varepsilon/2$, e escrevendo o Hamiltoniano perturbado como H_{pert} , encontramos

$$H_{pert} = m^2 - \frac{i\alpha Z}{r^2} \gamma_4 \vec{\gamma} \cdot \vec{r} - E_D m \gamma_4 - m \gamma_4 \frac{\alpha Z}{r}, \quad (4.12)$$

em que E_D é a energia no problema de Dirac-Coulomb sem perturbação ($H_D \psi = E_D \psi$). Vemos que nessa forma, os termos de deformação são nulos, o que mostra que as correções em primeira ordem no sistema são identicamente zero. Isso é bastante notável e indica que o grupo quântico κ -Poincaré tende a fazer mudanças mínimas nas estruturas padrão do espaço-tempo. Desta forma no sistema κ Dirac-Coulomb não é possível determinar um limite experimental para a deformação, uma vez que em primeira ordem não há correções para o sistema e, as correções em segunda ordem são singulares, como mostrado em (43).

4.5 OSCILADOR DE DIRAC EM (3+1) DIMENSÕES κ -DEFORMADO

Para escrever o oscilador de Dirac κ -deformado em (3+1), partimos da equação de Dirac κ -deformada com correção em primeira ordem (4.10). O *gauge* escolhido para descrever o sistema é dado por $P_0 = H_0$ e $P_i = p_i - im\omega\beta r_i$ (48), de modo que a equação de Dirac κ -deformada fica escrita como

$$H = H_0 - \frac{\varepsilon}{2} [p_0^2 - (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r})(\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) - \beta mp_0], \quad (4.13)$$

em que H_0 representa o operador de Dirac não deformado

$$H_0 = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}) + \beta m. \quad (4.14)$$

A representação das matrizes γ e α são dadas por

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Nesta representação podemos escrever ψ em termos de dois *espinores* $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$, em que ψ_1 e ψ_2 são *espinores* de duas componentes, assim, a equação de Dirac κ -deformada equivale a duas equações, uma para cada espinor, dadas por

$$\left(1 + \frac{m\varepsilon}{2}\right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}^+) \psi_2 = (E - m) \psi_1 + \varepsilon \left[im\omega(\vec{r} \cdot \vec{p}) + m\omega(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) + m^2\omega^2 r^2 \right] \psi_1, \quad (4.16)$$

$$\left(1 + \frac{m\varepsilon}{2}\right) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}^-) \psi_1 = (E - m) \psi_2 - \varepsilon \left[im\omega(\vec{r} \cdot \vec{p}) + m\omega(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) - m^2\omega^2 r^2 \right] \psi_2, \quad (4.17)$$

em que $\pi^\pm = \vec{p} \pm im\omega\vec{r}$. Essas equações podem ser resolvidas em coordenadas esféricas. Para isso, usamos a seguinte propriedade

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}^\pm = (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left(\hat{r} \cdot \vec{p} + i \frac{\hat{K} - \mathbf{I}_2}{r} \pm im\omega r \right), \quad (4.18)$$

em que $\hat{K}$ está relacionado com o operador de momento angular orbital $\hat{L}$ segundo a equação

$$\hat{K} = \vec{\sigma} \cdot \hat{L} + \mathbf{I}_2. \quad (4.19)$$

A solução do sistema pode ser expressa em termos das coordenadas esféricas na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r) \chi_k^{m_j}(\theta, \phi) \\ ig(r) \chi_{-k}^{m_j}(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} u(r) \chi_k^{m_j}(\theta, \phi) \\ iv(r) \chi_{-k}^{m_j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

em que $\chi_{\pm k}^{m_j}(\theta, \phi)$ são funções angulares de *spin* (48, 85), com

$$k = \begin{cases} -(l+1), & \text{para } j = l + 1/2, \\ l, & \text{para } j = l - 1/2. \end{cases} \quad (4.21)$$

A solução (4.20) conduz a um sistema de duas equações diferenciais radiais acopladas

$$\left(1 + \frac{m\varepsilon}{2}\right) \left[-v' + \left(\frac{k}{r} + m\omega r\right) v\right] = \varepsilon m\omega r u' + \{(E - m) + \varepsilon [m\omega k + m^2\omega^2 r^2] u\}, \quad (4.22)$$

$$\left(1 - \frac{m\varepsilon}{2}\right) \left[u' + \left(\frac{k}{r} + m\omega r\right) u\right] = -\varepsilon m\omega r v' + \{(E + m) + \varepsilon [m\omega k + m^2\omega^2 r^2] v\}. \quad (4.23)$$

Assim, essas duas equações podem ser desacopladas, o que leva a uma equação de segunda ordem para $u(r)$, na forma

$$u'' + 2m^2\varepsilon\omega r u' - \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + (1 - 2E\varepsilon)m^2\omega^2 r^2 - \mu_\varepsilon\right] u = 0, \quad (4.24)$$

em que

$$\mu_\varepsilon = (E^2 - m^2) - [(2k - 1)(1 - E\varepsilon) - m\varepsilon] m\omega. \quad (4.25)$$

A solução da equação diferencial (4.24) pode ser escrita como

$$u(r) = e^{-[z + \varepsilon m^2\omega r^2]m/2} [z]^{l+1/2} M(a, b, z), \quad (4.26)$$

em que $M(a, b, z)$ é a função hipergeométrica confluyente de primeira espécie, com

$$a = \frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{2}\right) - a_\varepsilon, \quad b = l + \frac{3}{2}, \quad z = (1 - E\varepsilon)m\omega r^2, \quad (4.27)$$

e

$$a_\varepsilon = \frac{\mu_\varepsilon + m^2\varepsilon\omega^2}{2(1 - E\varepsilon)m\omega}. \quad (4.28)$$

Assim os autovalores de energia do sistema são dados por

$$E_\pm = \pm \sqrt{m^2 + 2m\omega(N + k + 1)} - m\varepsilon\omega(N + k + 1). \quad (4.29)$$

Da equação (4.29) conclui-se que as energias negativas e positivas do sistemas deformado não são simétricas.

4.6 EFEITOS DA DEFORMAÇÃO QUÂNTICA NO PROBLEMA AHARANOV-BOHM DE *SPIN*-1/2

O efeito Aharanov-Bohm, previsto teoricamente por Aharanov e Bohm em 1959 (86), consiste em um solenóide - cujo em seu interior contém um campo magnético $\vec{B}$ - ao seu redor do lado exterior um feixe de elétrons percorre a região até atingirem um anteparo, onde é formada uma figura de interferência. O resultado surpreendente deste fenômeno

é que mesmo os elétrons não tendo contato direto com o campo magnético no interior do solenóide, as franjas de interferências são afetadas por um fator proporcional ao fluxo do campo magnético. Para fazer a descrição do efeito Aharonov-Bohm κ -deformado para $spin-1/2$ em $(2+1)$ dimensões, usaremos a equação de Dirac κ -deformada, com aproximação de primeira ordem (4.10), em que o *gauge* escolhido para esse sistema é dado por

$$P_0 \longrightarrow P_0 = H = E, \quad (4.30)$$

$$P_i \longrightarrow P_i = P_i - eA_i, \quad (4.31)$$

em que e é a carga do elétron e A_i é o potencial vetor magnético. Usando as matrizes de Dirac definidas na seção 3, equação (3.7), a equação de Dirac κ -deformada fica (87)

$$H\psi = \left[\beta \vec{\gamma} \cdot \vec{\Pi} + \beta M + \frac{\varepsilon}{2} \left(M \vec{\gamma} \cdot \vec{\Pi} + es \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \right] \psi = \bar{E} \psi, \quad (4.32)$$

em que ψ é um espinor de duas componentes, $\vec{\Pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ é o momento generalizado, e s diferente da interpretação feita para o sistema JC, em que s representa a quiralidade, aqui passa a representar os valores para o *spin*, $s = +1$ *spin* para cima, e $s = -1$ *spin* para baixo.

Tomando o limite não relativístico, em que $\bar{E} = E + M$, de modo que $E \ll M$, o espinor de duas componentes pode ser escrito em termos da componente forte e fraca χ e ϕ respectivamente, com $\psi = (\chi, \phi)^T$. Assim, escrevendo a componente fraca em termos da componente forte, temos a equação de Schrödinger-Pauli para a componente forte

$$H\chi = E\chi, \quad (4.33)$$

com

$$H = \frac{1}{2M} \left[\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - (1 - M\varepsilon)esB_3 \right]. \quad (4.34)$$

Note que o momento magnético do sistema é modificado por um parâmetro proporcional à deformação. Outra característica que a deformação causa neste sistema é o efeito anômalo do momento magnético do elétron. O momento magnético do elétron interagindo com um campo magnético é definido como

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{g\mu}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}), \quad (4.35)$$

em que $\mu = e/2M$. O fator giromagnético g obtido por Dirac se apresenta como 2. Todavia, desde 1947 sabe-se que o fator giromagnético é ligeiramente diferente de 2 (88), e pode ser escrito como $g = 2(1 + a)$, com $a = \alpha/2\pi = 0.00115965218279$, em que α é a constante de estrutura fina, este efeito é conhecido como efeito anômalo. Portanto, a interação magnética fica

$$\bar{H} = \mu(1 + a)(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}). \quad (4.36)$$

Assim, podemos escrever o momento magnético total κ -deformado como

$$H_{mag} = (1 - M\varepsilon)s(\vec{\mu} \cdot \vec{B}). \quad (4.37)$$

Conforme os resultados experimentais e os cálculos para o fator giromagnético previstos pela eletrodinâmica quântica (89), as correções para o valores de a são avaliadas em 1 parte em 10^{-11} , ou seja, $\Delta a \leq 3.10^{-11}$. Para o caso da interação magnética κ -deformada a contribuição não deve ser maior que $a = 0.00116$. Assim, pode se estimar um limite superior para o valor da deformação $M\varepsilon$, sendo M definido no começo do capítulo, então $\varepsilon = 2.27 \times 10^{-9}(eV)^{-1}$.

Para estudar a equação de Schrödinger-Pauli κ -deformada, escrevemos o potencial vetor com o *gauge* Coulombiano como

$$\vec{A} = -\frac{\alpha}{r}\vec{\varphi}, \quad A_0 = 0, \quad (4.38)$$

em que $\alpha = \Phi/\Phi_0$ é o parâmetro do fluxo magnético com $\Phi_0 = 2\pi/e$. Assim, o campo magnético pode ser escrito como

$$e\vec{B} = e\nabla \times \vec{A} = -\alpha\frac{\delta(r)}{r}\hat{z}. \quad (4.39)$$

Desse modo, a equação (4.33) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2M} \left[H_0 + \eta\frac{\delta(r)}{r} \right] \chi = E\chi, \quad (4.40)$$

em que

$$H_0 = \left(\frac{1}{i}\nabla - e\vec{A} \right)^2, \quad (4.41)$$

e $\eta = (1 - M\varepsilon)\alpha s$ é a constante de acoplamento do potencial $\delta(r)/r$. Podemos expressar as autofunções do Hamiltoniano em termos do operador de momento angular $\hat{J}_z$, definido como

$$\hat{J}_z = -i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\sigma_z. \quad (4.42)$$

Assim, as autofunções do sistema são

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m(r)e^{i(m_j-1/2)\varphi} \\ g_m(r)e^{i(m_j+1/2)\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

em que $m_j = m + 1/2 = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ com $m \in \mathbb{Z}$. Substituindo na equação (4.40), obtemos a função radial $f_m(r)$

$$hf_m(r) = k^2 f_m(r), \quad (4.44)$$

em que

$$k^2 = 2ME, \quad (4.45)$$

$$h = h_0 + \eta \frac{\delta(r)}{r}, \quad (4.46)$$

$$h_0 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \alpha)^2}{r^2}. \quad (4.47)$$

O Hamiltoniano apresentado na equação (4.46) possui uma singularidade na origem, representada pelo termo $\delta(r)/r$. Para resolver esse problema é possível usar o método de extensão auto-adjunta. Contudo, não temos o objetivo de explicar esse método aqui e, para mais informações (87, 90, 91, 92). De forma sucinta, dizemos que embora o operador Hermitiano possua autovalores reais e autofunções ortogonais, os mesmos nem sempre possuem uma evolução temporal unitária e nem sempre possuem adjuntos bem definidos. Assim, o método de extensão auto-adjunta consiste na análise funcional de um operador $\hat{O}$, de modo que ele satisfaça a condição de simetria em relação ao produto interno definido no espaço de Hilbert $\mathbf{H}$. Assim, o operador h_0 , com o domínio $D(h_0)$, é auto-adjunto se $h_0^\dagger = h_0$ e $D(h_0^\dagger) = D(h_0)$. Desse modo, podemos fazer a transformação unitária U sobre o operador h_0 em que $(U\varsigma)(r) = r^{1/2}\varsigma(r)$, sendo ς uma função suave $\varsigma \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, com $\varsigma(0) = 0$. Assim,

$$\bar{h}_0 = U h_0 U^{-1} = -\frac{d^2}{dr^2} - \left[(m + \alpha)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{r^2}, \quad (4.48)$$

o qual é essencialmente auto-adjunto para $|m + \alpha| \geq 1$, enquanto para $|m + \alpha| < 1$ admite-se uma família de parâmetros de extensões auto-adjuntas, h_{0,λ_m} , em que λ_m é o parâmetro de extensão auto-adjunta, que pode ser caracterizado a partir das condições de contorno em torno da origem (87)

$$f_{0,\lambda_m} = \lambda_m f_{1,\lambda_m}, \quad (4.49)$$

para as quais

$$f_{0,\lambda_m} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{|m+\alpha|} f_m(r), \quad (4.50)$$

$$f_{1,\lambda_m} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{|m+\alpha|}} \left[f_m(r) - f_{0,\lambda_m} \frac{1}{r^{|m+\alpha|}} \right], \quad (4.51)$$

com $\lambda_m \in \mathbb{R}$. A solução da equação (4.44), na região onde $r \neq 0$, pode ser expressa como

$$f_m(r) = a_m J_{|m+\alpha|}(kr) + b_m Y_{|m+\alpha|}(kr), \quad (4.52)$$

em que a_m e b_m são constantes e $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente. Substituindo $f_m(r)$ na condição de contorno definido em (4.49), obtemos

$$\lambda_m a_m \vartheta k^{|m+\alpha|} = b_m \left[\xi k^{-|m+\alpha|} - \lambda_m \left(\beta k^{|m+\alpha|} + \xi v k^{-|m+\alpha|} \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{2-2|m+\alpha|} \right) \right], \quad (4.53)$$

em que

$$\vartheta = \frac{1}{2^{|m+\alpha|} \Gamma(1 + |m + \alpha|)}, \quad (4.54)$$

$$\xi = -\frac{2^{|m+\alpha|}\Gamma(|m+\alpha|)}{\pi}, \quad (4.55)$$

$$\beta = -\frac{\cos(\pi|m+\alpha|)\Gamma(-|m+\alpha|)}{\pi 2^{|m+\alpha|}}, \quad (4.56)$$

$$v = \frac{k^2}{4(1-|m+\alpha|)}. \quad (4.57)$$

A equação (4.53), diverge se escolhermos $|m+\alpha| \geq 1$, de modo que b_m deve ser zero. Por outro lado se $|m+\alpha| < 1$ isso não ocorre e temos contribuições irregulares do termo $Y_{|m+\alpha|}(r)$. Essa contribuição decorre do operador h não ser auto-adjunto quando $|m+\alpha| < 1$. Portanto, a solução irregular está associada a extensão auto-adjunta de h_0 . Assim, a solução para $|m+\alpha| < 1$ é escrita como

$$\lambda_m a_m \vartheta k^{|m+\alpha|} = b_m (\xi k^{-|m+\alpha|} - \lambda_m \beta k^{|m+\alpha|}). \quad (4.58)$$

Substituindo as expressões de ϑ , ξ e β , temos

$$b_m = -\frac{\lambda_m k^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\sinh(\pi|m+\alpha|)}{\lambda_m k^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\cos(\pi|m+\alpha|) + 4^{|m+\alpha|}\Gamma(1+|m+\alpha|)} a_m. \quad (4.59)$$

A função δ para o potencial tem um curto alcance de interação, de modo que a função $f_m(r)$ deve ter um comportamento assintótico quando $r \rightarrow \infty$ e é dado por

$$f_m(r) \sim a_m \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cos\left(kr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\lambda_m}(k, \alpha)\right), \quad (4.60)$$

em que $\delta_m^{\lambda_m}(k, \alpha)$ representa a mudança de fase do espalhamento. Esse deslocamento na fase pode ser observado no comportamento assintótico da função de Bessel $J_{|m|}(kr)$ (93) na equação (4.52), que fica

$$f_m(r) \sim a_m \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \left[\cos\left(kr - \frac{\pi|m+\alpha|}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \mu_m^{\lambda_m} \sin\left(kr - \frac{\pi|m+\alpha|}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (4.61)$$

em que

$$\mu_m^{\lambda_m} = \frac{\lambda_m k^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\sinh(\pi|m+\alpha|)}{\lambda_m k^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\cos(\pi|m+\alpha|) + 4^{|m+\alpha|}\Gamma(1+|m+\alpha|)}. \quad (4.62)$$

Comparando as expressões (4.61) e (4.60), temos

$$\delta_m^{\lambda_m}(k, \alpha) = \Delta_m^{AB}(\alpha) + \theta_{\lambda_m}, \quad (4.63)$$

em que $\Delta_m^{AB} = \frac{\pi}{2}(|m| - |m+\alpha|)$ é a mudança de fase usual e, $\theta_{\lambda_m} = \arctan(\mu_m^{\lambda_m})$. Portanto, podemos escrever o operador de espalhamento auto-adjunto $S_{\alpha, m}^{\lambda_m}$ (matriz S) como

$$S_{\alpha, m}^{\lambda_m} = e^{2i\delta_m^{\lambda_m}(k, \alpha)} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\alpha)} \left[\frac{1 + i\mu_m^{\lambda_m}}{1 - i\mu_m^{\lambda_m}} \right]. \quad (4.64)$$

Assim, para qualquer valor do parâmetro de extensão auto-adjunta λ_m , há um espalhamento adicional. Se $\lambda_m = 0$, obtemos o resultado correspondente para o problema AB usual com condição de contorno de Dirichlet; neste caso, recuperamos a expressão para a matriz de espalhamento encontrada em (94). Assim, a teoria geral de espalhamento, mostra que os polos da matriz determinam as posições dos estados ligados na escala de energia. Esses polos ocorrem no denominador da equação (4.64) com a substituição de $k \rightarrow i\kappa$

$$B_{ik} = +i\lambda_m(ik)^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\sin(\pi|m+\alpha|) = 0, \quad (4.65)$$

em que

$$B_k = \lambda_m k^{2|m+\alpha|}\Gamma(1-|m+\alpha|)\cos(\pi|m+\alpha|) + 4^{|m+\alpha|}\Gamma(1+|m+\alpha|). \quad (4.66)$$

Resolvendo a equação para E , encontramos a energia de estado ligado

$$E = -\frac{2}{M} \left[-\frac{1}{\lambda_m} \frac{\Gamma(1+|m+\alpha|)}{\Gamma(1-|m+\alpha|)} \right]^{1/|m+\alpha|}. \quad (4.67)$$

Os polos da matriz de espalhamento só ocorrem para valores negativos do parâmetro de extensão auto-adjunta $\lambda_m < 0$. Neste último caso, o operador de espalhamento pode ser expresso em termos da energia do estado ligado

$$S_{\alpha,m}^{\lambda_m} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\alpha)} \left[\frac{e^{2i\pi|m+\alpha|} - (\kappa/k)^{2|m+\alpha|}}{1 - (\kappa/k)^{2|m+\alpha|}} \right], \quad (4.68)$$

em que κ vem da substituição de $k \rightarrow i\kappa$. A amplitude de espalhamento $f_\alpha(k, \varphi)$ usando método padrão de espalhamento

$$f_\alpha(k, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{2i\delta_m^{\lambda_m}(\alpha,k)} - 1) e^{im\varphi}, \quad (4.69)$$

fica escrita como

$$f_\alpha(k, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{2i\Delta_m(\alpha)} \left[\frac{1 + i\mu_m^{\lambda_m}}{1 - i\mu_m^{\lambda_m}} \right] - 1 \right) e^{im\varphi}. \quad (4.70)$$

O fato dessa equação depender da energia do estado ligado, faz com que ela fique diferente do caso usual AB de um solenóide fino. A única escala de comprimento no problema não relativístico é definida por $1/k$, então segue que a amplitude de espalhamento seria uma função que depende apenas do ângulo multiplicado por $1/k$. Essa característica se manifesta na conservação da helicidade (95), de modo que o Hamiltoniano deve comutar com o operador helicidade

$$[\hat{H}, \hat{h}] = e\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

o qual é diferente de zero, para $\varepsilon \neq 0$. Essa falha na conservação da helicidade está diretamente ligada a deformação ε e, esta relacionado ao parâmetro de extensão auto-adjunta, pois a amplitude de espalhamento está diretamente ligado ao parâmetro λ_m .

De fato, como mostrado em (96), é possível encontrar uma relação entre o parâmetro de extensão auto-adjunta e a constante de acoplamento η , dada por

$$\frac{1}{\lambda_m} = -\frac{1}{r_0^{2|m+\alpha|}} \left(\frac{\eta + |m + \alpha|}{\eta - |m + \alpha|} \right), \quad (4.72)$$

em que r_0 é um raio pequeno menor que o comprimento de onda de Compton λ_c do elétron (97), que vem da regularização da função δ (98). Contudo, a relação acima só é válida para $\lambda_m < 0$, para estados ligados. Consequentemente, temos $|\eta| \geq |m + \alpha|$ como $|m + \alpha| < 1$ é suficiente considerar $|\eta| \geq 1$, o que garante que $\lambda_m < 0$. Uma condição necessária para que uma função δ gere um potencial atrativo, capaz de suportar estados ligados, é que a constante de acoplamento seja negativa. Assim, a existência de estados ligados requer $\eta \geq -1$. Essa mudança na helicidade em um campo magnético representa uma medida do desvio da razão giromagnética do elétron, portanto, a não conservação da helicidade está relacionada ao valor não evanescente de $g - 2 \neq 0$, neste caso a deformação está fazendo o papel do momento anômalo magnético.

5 OSCILADOR DE DIRAC κ -DEFORMADO EM (2+1) DIMENSÕES

Neste capítulo apresentamos o oscilador de Dirac κ -deformado e mostramos que o Hamiltoniano do sistema não é hermitiano. Depois, aplicaremos uma transformação de similaridade conhecida como mapa de Dyson para obter seu correspondente hermitiano. Por fim, faremos uma análise dos efeitos da deformação na dinâmica dos colapsos e ressurgimentos da inversão de *spin* do sistema. Os resultados apresentados neste capítulo são as contribuições inéditas desta tese, publicadas na Ref. (55).

5.1 OSCILADOR DE DIRAC κ -DEFORMADO EM (2+1) DIMENSÕES

A equação de Dirac κ -deformada (4.9), pode ser multiplicada por $\exp(-\varepsilon P_0/2)$ e, levando em conta apenas os termos de primeira ordem na deformação $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ($\varepsilon^2 = 0$), é dada por (43)

$$\{(\gamma_0 P_0 - c\gamma_i P_i) + \frac{\epsilon}{mc^2} [\gamma_0(P_0^2 - P_i P_i) - mc^2 P_0]\} |\psi\rangle = mc^2 |\psi\rangle, \quad (5.1)$$

em que definimos o parâmetro de deformação adimensional como $\epsilon = mc^2 \varepsilon/2$. Para resolver a não comutatividade dessa equação não precisamos aplicar a transformação de Syberg-Witten (84), para isso podemos usar o *gauge* de operadores comutativos dados em (48) $P_0 = H = E$, $P_i = \pi_i^\pm = p_i \pm im\omega\beta r_i$, sendo $i = x, y$. Assim, a equação (5.1) pode ser escrita como

$$\{(\gamma_0 H - c\gamma_i \pi_i^\pm) + \frac{\epsilon}{mc^2} [\gamma_0(H^2 - \pi_i^\pm \pi_i^\pm) - mc^2 H]\} |\psi\rangle = mc^2 |\psi\rangle, \quad (5.2)$$

e multiplicando por γ_0 , temos

$$\left[(\gamma_0 mc^2 + c\gamma_0 \gamma_i \pi_i^\pm) - \frac{\epsilon}{mc^2} (H - \pi_i^\pm \pi_i^\pm - \gamma_0 mc^2 H) \right] |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (5.3)$$

Definindo $H^\pm = (\gamma_0 mc^2 + c\gamma_0 \gamma_i \pi_i^\pm)$ como na equação (3.28), ficamos com

$$\left[H^\pm - \frac{\epsilon}{mc^2} (H^2 - \pi_i^\pm \pi_i^\pm - \gamma_0 mc^2 H) \right] |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (5.4)$$

Para podermos escrever a equação em termos do Hamiltoniano do oscilador de Dirac, realizamos uma interação na equação (5.4), e desprezamos os termos em segunda ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ ($\epsilon^2 = 0$) (48).

$$\left[H^\pm - \frac{\epsilon}{mc^2} ((H^\pm)^2 - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm - \gamma_0 mc^2 H^\pm) \right] |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (5.5)$$

assim

$$\left[H^\pm (1 + \epsilon \gamma_0) - \frac{\epsilon}{mc^2} (H^{\pm 2} - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm) \right] |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (5.6)$$

Vemos que ao usar a representação (3.7) das matrizes de Dirac, a equação (3.14), mostra que elas podem ser escritas como

$$\gamma_0 = \sigma_z, \quad \gamma_1 = i\sigma_y, \quad \gamma_2 = -is\sigma_x. \quad (5.7)$$

O Hamiltoniano (5.6) pode ser escrito como (48)

$$(1 + \epsilon\beta) (c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2) |\psi\rangle = E |\psi\rangle + 2\epsilon\omega \left[m\omega \hat{r}^2 - s\hat{L}_z + i\beta(\vec{r} \cdot \vec{p}) + \frac{mc^2}{2\omega} \right] |\psi\rangle. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é resolvida usando coordenadas polares, seus níveis de energia deformados são explicitamente dadas por

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4\xi[n^\pm + \Theta(\pm) + (|l| - sl)/2]} - 4mc^2 \epsilon \xi [n^\pm + \Theta(\pm) + (|l| - sl)/2]. \quad (5.9)$$

O resultado do espectro de energia (5.9), mostra um deslocamento na energia do sistema devido a deformação do espaço-tempo. Podemos observar que a deformação quebra a simetria da energia do sistema, de modo que a energia positiva é diferente da energia negativa, $+E_{n_s}^\epsilon \neq -E_{n_s}^\epsilon$. Essa quebra de simetria na energia, se dá pelo fato da deformação quebrar a simetria de conjugação da carga $\mathcal{C} = i\gamma_0\gamma_2$ (47), assim como também, o sistema não possui simetria temporal $\mathcal{T} = i\gamma_1\gamma_3$. Porém, as simetrias $\mathcal{CT}$ e $\mathcal{CPT}$ não são quebradas, em que $\mathcal{P} = i\gamma_0$ é a simetria de paridade.

A equação de Dirac κ -deformada (5.6), pode ser escrita usando os operadores de criação e aniquilação, e o primeiro termo da equação $H^\pm(1 + \epsilon\gamma_0)$ pode ser escrito como

$$(1 + \epsilon\sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Multiplicando

$$H^\pm(1 + \epsilon\sigma_z) = \begin{pmatrix} mc^2 & \mp i2mc^2\sqrt{\xi}\hat{a}_{\pm s}^\mp(1 + \epsilon) \\ \pm 2imc^2\sqrt{\xi}\hat{a}_{\pm s}^\pm(1 - \epsilon) & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Assim, podemos notar que o termo (5.11) é responsável pela não hermiticidade do Hamiltoniano, dado o fato que aparece $(1 \pm \epsilon)$ na diagonal secundária. O segundo termo da equação (5.6) $(H^\pm)^2 - c^2\pi_i^\pm\pi_i^\pm$, pode ser escrito como

$$(H^\pm)^2 - c^2\pi_i^\pm\pi_i^\pm = 2m^2c^2\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)\mathbf{I} \pm 2smc^2\omega\hat{L}_z\mathbf{I} \mp 2imc^2\omega(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y)\sigma_z + m^2c^4\mathbf{I}. \quad (5.12)$$

Assim, podemos escrever o Hamiltoniano deformado pra o sistema (A)JC κ -deformado como, (os detalhes dos cálculos para se obter esse resultado estão no apêndice (A))

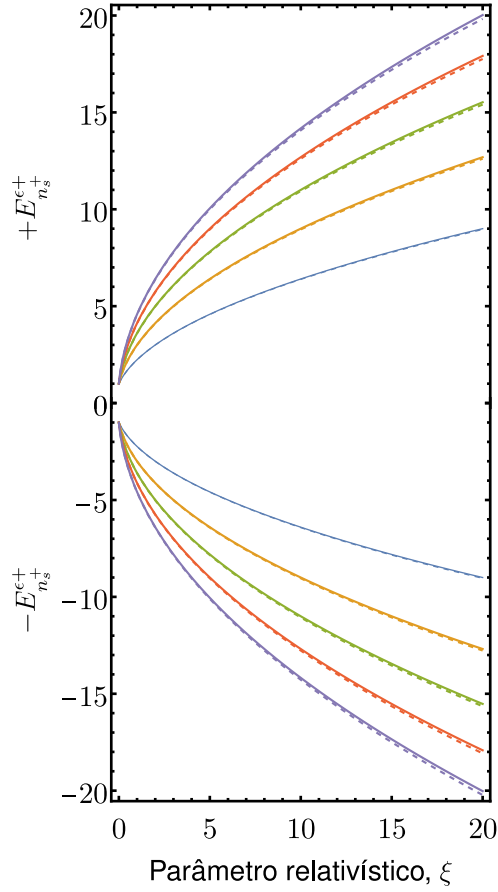
$$H_\epsilon^\pm = \hbar (g^*\hat{a}_{\pm s}^-\sigma_\pm\mu_\epsilon^\mp + g\hat{a}_{\pm s}^+\sigma_\mp\mu_\epsilon^\pm) + \delta_\epsilon^\pm\sigma_z - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{\pm s} + 1)\mathbf{I}_2, \quad (5.13)$$

Cujo seus autovalores de energia são

$$E_{n_{\pm s}}^{\epsilon \pm} = \pm E_{n_{\pm s}}^{\pm} - 4mc^2\epsilon\xi(n_{\pm s}^{\pm} + \theta(\pm)). \quad (5.14)$$

Vemos que apesar do Hamiltoniano (5.13) não ser hermitiano, os seus autovalores são reais. Dizemos assim que o sistema é quase hermitiano. Podemos ver que tomando $\epsilon = 0$, obtemos o resultado não deformado obtido em (3.26). A Figura 4 apresenta o espectro de energia do sistema JC e κ -JC em função do parâmetro relativístico ξ . Os gráficos para os sistemas AJC e κ -AJC são idênticos. O valor para $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ (48, 55), as unidades $m = \hbar = c = 1$ e $n_s^+ = 0, \dots, 4$.

Figura 4 – JC (linha sólida) e κ -JC (linha tracejada), os autovalores $E_{n_s}^{\epsilon+}$ como função do parâmetro relativístico ξ , as unidades $m = \hbar = c = 1$, para $n_s^+ = 0, \dots, 4$. O valor usado para o parâmetro de deformação adimensional é $\epsilon = 5.10^{-4}$.



Fonte: O autor

5.2 SIMETRIAS NO SISTEMAS κ -JC E κ -AJC

Como vimos, o Hamiltoniano (5.13) não é hermitiano. Por conta disso, não podemos fazer a evolução temporal do sistema, pois sua dinâmica não é unitária. Contudo, seus

autovalores são reais e dizemos então que o Hamiltoniano é pseudo hermitiano (59). Podemos ver o efeito da deformação do espaço-tempo nas simetrias discretas $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ dadas por (57)

$$\mathcal{P}\hat{a}_s^\pm\mathcal{P}^{-1} = \hat{a}_{-s}^\pm, \quad \mathcal{P}\sigma_z\mathcal{P}^{-1} = \sigma_z, \quad \mathcal{P}\sigma^\pm\mathcal{P}^{-1} = \sigma^\pm, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{T}\hat{a}_s^\pm\mathcal{T}^{-1} = -\hat{a}_s^\pm, \quad \mathcal{T}\sigma_z\mathcal{T}^{-1} = -\sigma_z, \quad \mathcal{T}\sigma^\pm\mathcal{T}^{-1} = \sigma^\mp. \quad (5.16)$$

Podemos então aplicar estas simetrias aos operadores do Hamiltoniano (5.13), o qual fica escrito como

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H_\epsilon^\pm(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = \hbar \left(g^*\hat{a}_{\mp s}^+\sigma_\pm\mu_\epsilon^\pm + g\hat{a}_{\mp s}^-\sigma_\pm\mu_\epsilon^\mp \right) - \delta_\epsilon^\pm\sigma_z + 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{\pm s} + 1)\mathbf{I}_2, \quad (5.17)$$

vemos então que o Hamiltoniano não é $\mathcal{PT}$ -simétrico, pois

$$\mathcal{P}\mathcal{T}H_\epsilon^\pm(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} \neq H_\epsilon^\pm. \quad (5.18)$$

Contudo, o Hamiltoniano é invariante sob aplicação do operador $\mathcal{P}\sigma_z$

$$\mathcal{P}\sigma_zH_\epsilon^\pm(\mathcal{P}\sigma_z)^{-1} = H_\epsilon^\pm. \quad (5.19)$$

O que indica uma simetria desse sistema. Outra simetria interessante do sistema é dada por

$$\mathcal{T}\sigma_xH_\epsilon^\pm(\mathcal{T}\sigma_x)^{-1} = \hbar \left(g\hat{a}_{\mp s}^+\sigma_\mp\mu_\epsilon^\pm + g^*\hat{a}_{\mp s}^-\sigma_\mp\mu_\epsilon^\mp \right) + \delta_\epsilon^\pm\sigma_z + 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{\mp s} + 1)\mathbf{I}_2, \quad (5.20)$$

em que obtemos o Hamiltoniano original com a quiralidade oposta. Portanto, vemos que o Hamiltoniano é quase hermitiano e satisfaz a relação (60)

$$H_\epsilon^{\pm\dagger} = \eta_\pm H_\epsilon^\pm \eta_\pm^{-1}, \quad (5.21)$$

em que $\eta_\pm$ é um operador positivo semi definido, chamado de operador métrico, ou mapa de Dyson (84).

5.3 MAPA DE DYSON

Sendo o Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado quase hermitiano, podemos aplicar sobre ele uma transformação de similaridade, afim de obter um Hamiltoniano hermitiano. O qual nos permitirá fazer a evolução temporal do sistema. Sendo o produto interno definido como

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\eta_\pm} = \langle \cdot, \eta_\pm \cdot \rangle, \quad (5.22)$$

dizemos que o Hamiltoniano é hermitiano se

$$\begin{aligned}\langle \phi, H_\epsilon^\pm \psi \rangle_{\eta_\pm} &= \langle \phi | \eta_\pm H_\epsilon^\pm | \psi \rangle \\ &= \langle \phi | H_\epsilon^{\pm\dagger} \eta_\pm | \psi \rangle \\ &= \langle H_\epsilon^\pm \phi, \psi \rangle_{\eta_\pm},\end{aligned}\tag{5.23}$$

para ϕ e ψ pertencente ao domínio de $H_\epsilon^\pm$. Assim, decompondo o operador métrico como $\eta_\pm = \rho_\pm^\dagger \rho_\pm$, nos permite definir uma contraparte hermitiano do Hamiltoniano (5.21)

$$h_\epsilon^\pm = \rho_\pm H_\epsilon^\pm \rho_\pm^\dagger,\tag{5.24}$$

de tal modo que o Hamiltoniano transformado seja hermitiano, $h_\epsilon^\pm = h_\epsilon^{\pm\dagger}$. Os autovalores e os valores esperados em ambas as representações são os mesmos

$$\begin{aligned}\langle H_\epsilon^\pm \rangle_{\eta_\pm, \Phi} &= \langle \Phi | \eta_\pm H_\epsilon^\pm | \Phi \rangle \\ &= \langle \Phi | \rho_\pm^\dagger h_\epsilon^\pm \rho_\pm | \Phi \rangle \\ &= \langle \Psi | h_\epsilon^\pm | \Psi \rangle \\ &= \langle h_\epsilon^\pm \rangle_\Psi,\end{aligned}\tag{5.25}$$

em que $|\Psi\rangle = \rho_\pm |\Phi\rangle$. Desse modo, podemos então definir um mapa ρ , para obter a versão hermitiana do Hamiltoniano do oscilador de Dirac κ -deformado em (2+1). A escolha do mapa é arbitrária e não há uma escolha específica para a sua forma. Ela pode ser escrita de uma forma que faça com que o Hamiltoniano se torne hermitiano, dado o fato que não é qualquer mapa que hermitiza o Hamiltoniano. Definimos o mapa para o nosso sistema da seguinte forma

$$\rho = e^{\alpha\epsilon\hat{a}_s^-\hat{a}_s^- + \beta\epsilon\hat{a}_s^+\hat{a}_s^+ + \gamma\epsilon\hat{a}_s^+\hat{a}_s^-}.\tag{5.26}$$

Neste ponto escrevemos ρ no lugar de $\rho_\pm$, porque iremos definir qual é o sinal para os parâmetros α , β e γ para o sistema κ -JC e κ -AJC. Primeiro faremos para o sistema κ -JC

$$H_\epsilon^{JC} = \hbar (g^* \hat{a}_s^- \sigma_+ \mu_\epsilon^- + g \hat{a}_s^+ \sigma_- \mu_\epsilon^+) + \delta_\epsilon^+ \sigma_z - 2mc^2 \epsilon \xi (2\hat{N}_s + 1) \mathbf{I}_2.\tag{5.27}$$

Usando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH), dada por

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \dots\tag{5.28}$$

podemos aplicar a transformação nos operadores

$$\begin{aligned}\rho \hat{a}_s^+ \rho^\dagger &= e^{\epsilon(\alpha\hat{a}_s^+\hat{a}_s^+ + \beta\hat{a}_s^+\hat{a}_s^- + \gamma\hat{a}_s^+\hat{a}_s^-)} \hat{a}_s^+ e^{\epsilon(\alpha\hat{a}_s^-\hat{a}_s^- + \beta\hat{a}_s^+\hat{a}_s^+ + \gamma\hat{a}_s^+\hat{a}_s^-)} \\ &= \hat{a}_s^+ + \epsilon(\alpha[\hat{a}_s^-\hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+] + \beta[\hat{a}_s^+\hat{a}_s^+, \hat{a}_s^+] + \gamma[\hat{a}_s^+\hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+]).\end{aligned}\tag{5.29}$$

Agora usando a identidade

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C],\tag{5.30}$$

temos que

$$[\hat{a}_s^-, \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+] = \hat{a}_s^-, \quad [\hat{a}_s^-, \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^-] = 0, \quad (5.31)$$

$$[\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^+, \hat{a}_s^+] = 0, \quad [\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^+, \hat{a}_s^-] = -\hat{a}_s^+, \quad (5.32)$$

$$[\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^-] = \hat{a}_s^-, \quad [\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+] = -\hat{a}_s^+. \quad (5.33)$$

Assim a transformação fica

$$\begin{aligned} \rho \hat{a}_s^+ \rho^\dagger &= \hat{a}_s^+ + \epsilon(\alpha[\hat{a}_s^- \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+] + \beta[\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^+, \hat{a}_s^+] + \gamma[\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^-, \hat{a}_s^+]) \\ &= \hat{a}_s^+ + 2\alpha\epsilon\hat{a}_s^- - \gamma\epsilon\hat{a}_s^+ + \frac{\epsilon^2}{2}[(\alpha\hat{a}_s^- \hat{a}_s^- + \beta\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^+ + \gamma\hat{a}_s^+ \hat{a}_s^-), (-\alpha\hat{a}_s^- - \gamma\hat{a}_s^+)]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Desprezando os termos de segunda ordem em ϵ , temos então a transformação sobre os operadores

$$\rho \hat{a}_s^+ \rho^{-1} = \hat{a}_s^+ + 2\alpha\epsilon\hat{a}_s^- - \gamma\epsilon\hat{a}_s^+ \quad \rho \hat{a}_s^- \rho^{-1} = \hat{a}_s^- - 2\beta\epsilon\hat{a}_s^+ + \gamma\epsilon\hat{a}_s^-. \quad (5.35)$$

Assim, o termo de interação do Hamiltoniano h_ϵ^{JC} pode ser escrito como

$$h_\epsilon^{JC} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g^* [\hat{a}_s^- (1 + \gamma\epsilon) - 2\beta\epsilon\hat{a}_s^+] \mu_\epsilon^- \\ \hbar g [\hat{a}_s^+ (1 - \gamma\epsilon) + 2\alpha\epsilon\hat{a}_s^-] \mu_\epsilon^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

e seu conjugado hermitiano é

$$h_\epsilon^{JC\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g^* [\hat{a}_s^- (1 - \gamma^*\epsilon) + 2\alpha^*\epsilon\hat{a}_s^+] \mu_\epsilon^+ \\ \hbar g [\hat{a}_s^+ (1 + \gamma^*\epsilon) - 2\beta^*\epsilon\hat{a}_s^-] \mu_\epsilon^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Assim, dado que o Hamiltoniano precisa ser hermitiano, então $h_\epsilon^{JC} = h_\epsilon^{JC\dagger}$. Isso nos permite determinar os valores para os parâmetros do mapa

$$[\hat{a}_s^- (1 + \gamma\epsilon) - 2\beta\epsilon\hat{a}_s^+] \mu_\epsilon^- - [\hat{a}_s^- (1 - \gamma^*\epsilon) + 2\alpha^*\epsilon\hat{a}_s^+] \mu_\epsilon^+ = 0, \quad (5.38)$$

$$(1 + \gamma\epsilon)(1 - \epsilon) = (1 - \gamma^*\epsilon)(1 + \epsilon), \quad -\beta\epsilon\mu_\epsilon^+ = \alpha^*\epsilon\mu_\epsilon^-, \quad (5.39)$$

$$1 - \epsilon + \gamma\epsilon = 1 + \epsilon - \gamma^*\epsilon \quad -\beta = \alpha^*, \quad (5.40)$$

$$-2\epsilon + \gamma\epsilon + \gamma^*\epsilon = 0, \quad (5.41)$$

$$\gamma + \gamma^* = 2, \quad (5.42)$$

Desse modo determinamos os valores como $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\gamma = 1$, para o sistema κ -JC. Desta forma

$$h_\epsilon^{JC} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g^* [\hat{a}_s^- (1 + 1\epsilon) - 2(-1)\epsilon\hat{a}_s^+] (1 - \epsilon) \\ \hbar g [\hat{a}_s^+ (1 - 1\epsilon) + 2(1)\epsilon\hat{a}_s^-] (1 + \epsilon) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

ou ainda

$$h_\epsilon^{JC} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar g^*(\hat{a}_s^- + 2\epsilon\hat{a}_s^+) \\ \hbar g(\hat{a}_s^+ + 2\epsilon\hat{a}_s^-) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Assim o Hamiltoniano fica

$$h_\epsilon^{JC} = \delta_\epsilon^+ \sigma_z + \hbar [g\sigma^-(\hat{a}_{+s}^+ + 2\epsilon\hat{a}_{+s}^-) + g^*\sigma^+(\hat{a}_{+s}^- + 2\epsilon\hat{a}_{+s}^+)] - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{+s} + 1)\mathbf{I}_2. \quad (5.45)$$

Vemos que essa transformação nos leva a um Hamiltoniano hermitiano. Esse Hamiltoniano além de ter um sistema κ -JC, agora temos um termo extra de interação, que depende da deformação do espaço-tempo, o que caracteriza um sistema de Rabi com os termos de interação JC e AJC.

De forma análoga, podemos determinar a transformação para o sistema κ -AJC. Os parâmetros do mapa ficam dados por $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\gamma = -1$. Assim o Hamiltoniano fica

$$h_\epsilon^{AJC} = \delta_\epsilon^- \sigma_z + \hbar [g\sigma^+(\hat{a}_{-s}^+ + 2\epsilon\hat{a}_{-s}^-) + g^*\sigma^-(\hat{a}_{-s}^- + 2\epsilon\hat{a}_{-s}^+)] - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{-s} + 1)\mathbf{I}_2. \quad (5.46)$$

Desse modo, temos o operador de transformação

$$\rho_\pm = e^{\epsilon\hat{a}_s^-\hat{a}_s^- - \epsilon\hat{a}_s^+\hat{a}_s^+ \pm \epsilon\hat{a}_s^+\hat{a}_s^-}, \quad (5.47)$$

e o Hamiltoniano hermitiano do sistema, fica dado por

$$h_\epsilon^\pm = \delta_\epsilon^\pm \sigma_z + \hbar [g\sigma^\mp(\hat{a}_{\pm s}^+ + 2\epsilon\hat{a}_{\pm s}^-) + g^*\sigma^\pm(\hat{a}_{\pm s}^- + 2\epsilon\hat{a}_{\pm s}^+)] - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_{\pm s} + 1)\mathbf{I}_2. \quad (5.48)$$

5.4 DINÂMICA DO SISTEMA

Até agora, nós tratamos os sistemas de JC e AJC simultaneamente, porém, para realizar a dinâmica dos estados, nós teremos que aplicar a transformação ρ nos autoestados do Hamiltoniano. Desse modo, não será mais possível manter uma única notação para os dois sistemas. Por conta disso, a partir desse momento focaremos no sistema JC. Para simplificar a notação, não utilizaremos o sinal $+$ em nossas equações. Assim, nosso Hamiltoniano será definido como $H_\epsilon^+ = H_{\kappa-JC}^s$, e sua versão hermitiana dada por (5.45), pode ser escrita como

$$h_{\kappa-JC}^s = (1 - 2\epsilon\xi)mc^2\sigma_z + \hbar [g\sigma^-(\hat{a}_s^+ + 2\epsilon\hat{a}_s^-) + g^*\sigma^+(\hat{a}_s^- + 2\epsilon\hat{a}_s^+)] - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_s + 1)\mathbf{I}_2. \quad (5.49)$$

O espectro desse Hamiltoniano é dado por (5.14), ou seja

$$E_{n_s}^\epsilon = \pm E_{n_s} - 4mc^2\epsilon\xi(n_s + 1). \quad (5.50)$$

Para encontrar os autoestados de energia deformados do Hamiltoniano (5.49), podemos primeiro achar os autoestados do Hamiltoniano não hermitiano $H_{\kappa-JC}^s |E_s^\epsilon\rangle = E_{n_s}^\epsilon |E_{n_s}^\epsilon\rangle$, e então aplicar a transformação ρ . Assim, os autoestados de energia são

$$|+E_{n_s}^\epsilon\rangle = N |n_s, \uparrow\rangle + N \frac{i2mc^2 \sqrt{\xi(n_s+1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2} \mu^+ |n_s+1, \downarrow\rangle, \quad (5.51)$$

$$|-E_{n_s}^\epsilon\rangle = N |n_s, \uparrow\rangle - N \frac{i2mc^2 \sqrt{\xi(n_s+1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2} \mu^+ |n_s+1, \downarrow\rangle, \quad (5.52)$$

em que N é uma constante de normalização. Aplicando a transformação ρ , temos

$$|\pm \bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle = \rho |\pm E_{n_s}^\epsilon\rangle. \quad (5.53)$$

Expandindo ρ e, pegando os termos em primeira ordem, temos

$$\rho = e^{\epsilon((\hat{a}_s^-)^2 - (\hat{a}_s^+)^2 + \hat{N}_s)} = \mathbf{I}_2 + \epsilon \left[(\hat{a}_s^-)^2 - (\hat{a}_s^+)^2 + \hat{N}_s \right], \quad (5.54)$$

aplicando aos vetores da base

$$\rho |n_s, \uparrow\rangle = \left(\mathbf{I}_2 + \epsilon \left[(\hat{a}_s^-)^2 - (\hat{a}_s^+)^2 + \hat{N}_s \right] \right) |n_s, \uparrow\rangle, \quad (5.55)$$

$$\rho |n_s+1, \downarrow\rangle = \left(\mathbf{I}_2 + \epsilon \left[(\hat{a}_s^-)^2 - (\hat{a}_s^+)^2 + \hat{N}_s \right] \right) |n_s+1, \downarrow\rangle, \quad (5.56)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \rho |n_s, \uparrow\rangle &= (1 + \epsilon n_s) |n_s, \uparrow\rangle \\ &+ \epsilon \sqrt{n_s(n_s-1)} |n_s-2, \uparrow\rangle - \epsilon \sqrt{(n_s+1)(n_s+2)} |n_s+2, \uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (5.57)$$

e

$$\begin{aligned} \rho |n_s+1, \downarrow\rangle &= [1 + \epsilon(n_s+1)] |n_s+1, \downarrow\rangle \\ &+ \epsilon \sqrt{n_s(n_s+1)} |n_s-1, \downarrow\rangle - \epsilon \sqrt{(n_s+2)(n_s+3)} |n_s+3, \downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Para os autoestados de energia, ficamos com

$$\begin{aligned} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= N(1 + \epsilon n_s) |n_s, \uparrow\rangle + N\epsilon \sqrt{n_s(n_s-1)} |n_s-2, \uparrow\rangle \\ &- N\epsilon \sqrt{(n_s+1)(n_s+2)} |n_s+2, \uparrow\rangle \\ &+ N \frac{i2mc^2 \sqrt{\xi(n_s+1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2} \mu^+ \left[[1 + \epsilon(n_s+1)] |n_s+1, \downarrow\rangle + \epsilon \sqrt{n_s(n_s+1)} |n_s-1, \downarrow\rangle \right] \\ &- N \frac{i2mc^2 \sqrt{\xi(n_s+1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2} \mu^+ \epsilon \sqrt{(n_s+2)(n_s+3)} |n_s+3, \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
|-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= N(1 + \epsilon n_s) |n_s, \uparrow\rangle + N\epsilon\sqrt{n_s(n_s - 1)} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
&\quad - N\epsilon\sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\
&\quad - N\frac{i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2}\mu^+ \left[[1 - \epsilon(n_s + 1)] |n_s + 1, \downarrow\rangle - \epsilon\sqrt{n_s(n_s + 1)} |n_s - 1, \downarrow\rangle \right] \\
&\quad + N\frac{i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2}\mu^+\epsilon\sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} |n_s + 3, \downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{5.60}$$

desprezando os termos com ϵ^2

$$\begin{aligned}
|+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= N(1 + \epsilon n_s) |n_s, \uparrow\rangle + N\epsilon\sqrt{n_s(n_s - 1)} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
&\quad - N\epsilon\sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\
&\quad + N\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}\sqrt{n_s(n_s + 1)} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\
&\quad - N\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}\sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} |n_s + 3, \downarrow\rangle \\
&\quad + N\frac{i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}(1 + \epsilon n_s) |n_s + 1, \downarrow\rangle,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
|-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= N(1 + \epsilon n_s) |n_s, \uparrow\rangle + N\epsilon\sqrt{n_s(n_s - 1)} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
&\quad - N\epsilon\sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\
&\quad - N\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2}\sqrt{n_s(n_s + 1)} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\
&\quad + N\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2}\sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} |n_s + 3, \downarrow\rangle \\
&\quad - N\frac{i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - mc^2}(1 + \epsilon n_s) |n_s + 1, \downarrow\rangle.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Para fazer a normalização dos estados precisamos dos seus bras

$$\begin{aligned}
\langle +\bar{E}_{n_s}^\epsilon | &= N^*(1 + \epsilon n_s) \langle n_s, \uparrow | + N^*\epsilon\sqrt{n_s(n_s - 1)} \langle n_s - 2, \uparrow | \\
&\quad - N^*\epsilon\sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} \langle n_s + 2, \uparrow | \\
&\quad - N^*\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}\sqrt{n_s(n_s + 1)} \langle n_s - 1, \downarrow | \\
&\quad + N^*\frac{\epsilon i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}\sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} \langle n_s + 3, \downarrow | \\
&\quad - N^*\frac{i2mc^2\sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + mc^2}(1 + \epsilon n_s) \langle n_s + 1, \downarrow |,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\bar{E}_{n_s}^\epsilon | &= N^*(1 + \epsilon n_s) \langle n_s, \uparrow | + N^* \epsilon \sqrt{n_s(n_s - 1)} \langle n_s - 2, \uparrow | \\
&- N \epsilon \sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} \langle n_s + 2, \uparrow | \\
&+ N^* \frac{\epsilon i 2 m c^2 \sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - m c^2} \sqrt{n_s(n_s + 1)} \langle n_s - 1, \downarrow | \\
&- N^* \frac{\epsilon i 2 m c^2 \sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - m c^2} \sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} \langle n_s + 3, \downarrow | \\
&+ N^* \frac{i 2 m c^2 \sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ - m c^2} (1 + \epsilon n_s) \langle n_s + 1, \downarrow |.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

A condição de normalização para o estado de energia positiva

$$\langle +\bar{E}_{n_s}^\epsilon | +\bar{E}_{n_s}^\epsilon \rangle = 1, \tag{5.65}$$

$$1 = N^2(1 + 2\epsilon n_s) \left[1 + \frac{4m^2 c^4 \xi(n_s + 1)}{[E_{n_s}^+ + m c^2]^2} \right], \tag{5.66}$$

$$N = \sqrt{\frac{[E_{n_s}^+ + m c^2]^2}{[E_{n_s}^+ + m c^2]^2 + 4m^2 c^4 \xi(n_s + 1)}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\epsilon n_s}}, \tag{5.67}$$

$$N = \alpha_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon, \tag{5.68}$$

em que α_{n_s} está definido em (3.32). Definimos β_{n_s} , como

$$\beta_{n_s} = \alpha_{n_s} \frac{2m c^2 \sqrt{\xi(n_s + 1)}}{E_{n_s}^+ + m c^2} = \sqrt{\frac{E_{n_s}^+ - m c^2}{2E_{n_s}^+}}. \tag{5.69}$$

Assim o autoestado de energia positiva fica dado por

$$\begin{aligned}
|+\bar{E}_{n_s}^\epsilon \rangle &= \alpha_{n_s} |n_s, \uparrow \rangle \\
&+ \alpha_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{n_s(n_s - 1)} |n_s - 2, \uparrow \rangle \\
&- \alpha_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} |n_s + 2, \uparrow \rangle \\
&+ i \beta_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{n_s(n_s + 1)} |n_s - 1, \downarrow \rangle \\
&- i \beta_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} |n_s + 3, \downarrow \rangle \\
&+ i \beta_{n_s} |n_s + 1, \downarrow \rangle.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Seguindo o mesmo procedimento para o autoestado de energia negativa, temos

$$\begin{aligned}
|-\bar{E}_{n_s}^\epsilon \rangle &= \beta_{n_s} |n_s, \uparrow \rangle \\
&+ \beta_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{n_s(n_s - 1)} |n_s - 2, \uparrow \rangle \\
&- \beta_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{(n_s + 1)(n_s + 2)} |n_s + 2, \uparrow \rangle \\
&+ i \alpha_{n_s} \epsilon \sqrt{(n_s + 2)(n_s + 3)} |n_s + 3, \downarrow \rangle \\
&- i \alpha_{n_s} \lambda_{n_s}^\epsilon \epsilon \sqrt{n_s(n_s + 1)} |n_s - 1, \downarrow \rangle \\
&- \alpha_{n_s} |n_s + 1, \downarrow \rangle,
\end{aligned} \tag{5.71}$$

em que definimos

$$c_{n_s} = \sqrt{n_s(n_s - 1)}, \quad \lambda_{n_s}^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\epsilon n_s}}. \quad (5.72)$$

Podemos expandir o termo $\lambda_{n_s}^\epsilon$ em primeira ordem, e encontramos

$$\lambda_{n_s}^\epsilon = (1 - \epsilon n_s). \quad (5.73)$$

Assim, os autoestados de energia normalizados, podem ser escritos de uma forma mais compacta

$$\begin{aligned} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= \alpha_{n_s} |n_s, \uparrow\rangle + i\beta_{n_s} |n_s + 1, \downarrow\rangle \\ &\quad + \epsilon\alpha_{n_s} (c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle - c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle) \\ &\quad + i\epsilon\beta_{n_s} (c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle - c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle), \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= \beta_{n_s} |n_s, \uparrow\rangle - i\alpha_{n_s} |n_s + 1, \downarrow\rangle \\ &\quad + \epsilon\beta_{n_s} (c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle - c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle) \\ &\quad - i\epsilon\alpha_{n_s} (c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle + c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Podemos notar que os estados são normalizados em primeira ordem em ϵ . Estes estados nos mostram que há um emaranhamento entre o grau de liberdade de *spin* e o momento angular do sistema. Contudo, podemos ver que a presença da deformação faz com que surjam novos estados emaranhados que dependem da deformação.

Tendo determinado os autoestados de energia, podemos realizar a evolução temporal. Escolhemos o estado inicial para este fim,

$$|\Psi_{n_s}(0)\rangle = |n_s, \uparrow\rangle. \quad (5.76)$$

Podemos escrever este estado inicial em termos de autoestados de energia, fazendo a soma

$$\begin{aligned} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle + |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle &= (\alpha_{n_s} + \beta_{n_s}) |n_s, \uparrow\rangle \\ &\quad + (\alpha_{n_s} + \beta_{n_s})\epsilon c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\ &\quad - (\alpha_{n_s} + \beta_{n_s})\epsilon c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\ &\quad + i(\beta_{n_s} - \alpha_{n_s}) |n_s + 1, \downarrow\rangle \\ &\quad + i(\beta_{n_s} - \alpha_{n_s})\epsilon c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\ &\quad - i(\beta_{n_s} - \alpha_{n_s})\epsilon c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} |+\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle + |-\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle &= (\alpha_{n_s+2} + \beta_{n_s+2}) |n_s + 2, \uparrow\rangle \\ &\quad + (\alpha_{n_s+2} + \beta_{n_s+2})\epsilon c_{n_s+2} |n_s, \uparrow\rangle \\ &\quad - (\alpha_{n_s+2} + \beta_{n_s+2})\epsilon c_{n_s+4} |n_s + 4, \uparrow\rangle \\ &\quad + i(\beta_{n_s+2} - \alpha_{n_s+2}) |n_s + 3, \downarrow\rangle \\ &\quad + i(\beta_{n_s+2} - \alpha_{n_s+2})\epsilon c_{n_s+3} |n_s + 1, \downarrow\rangle \\ &\quad - i(\beta_{n_s+2} - \alpha_{n_s+2})\epsilon c_{n_s+5} |n_s + 5, \downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
|+\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle + |-\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle &= (\alpha_{n_s-2} + \beta_{n_s-2}) |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
&+ (\alpha_{n_s-2} + \beta_{n_s-2}) \epsilon c_{n_s-2} |n_s - 4, \uparrow\rangle \\
&- (\alpha_{n_s-2} + \beta_{n_s-2}) \epsilon c_{n_s} |n_s, \uparrow\rangle \\
&+ i(\beta_{n_s-2} - \alpha_{n_s-2}) |n_s - 1, \downarrow\rangle \\
&+ i(\beta_{n_s-2} - \alpha_{n_s-2}) \epsilon c_{n_s-1} |n_s - 3, \downarrow\rangle \\
&- i(\beta_{n_s-2} - \alpha_{n_s-2}) \epsilon c_{n_s+1} |n_s + 1, \downarrow\rangle.
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Multiplicando pelas constantes, α_{n_s} e β_{n_s} , temos

$$\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle = |n_s, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle, \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n_s+2} |+\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s+2} |-\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle &= |n_s + 2, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s+2} |n_s, \uparrow\rangle \\
&- \epsilon c_{n_s+4} |n_s + 4, \uparrow\rangle,
\end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n_s-2} |+\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s-2} |-\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle &= |n_s - 2, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s-2} |n_s - 4, \uparrow\rangle \\
&- \epsilon c_{n_s} |n_s, \uparrow\rangle.
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Assim, podemos escrever o estado inicial como

$$\begin{aligned}
|\Psi_{n_s}(0)\rangle &= \alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle \\
&- \epsilon c_{n_s} [\alpha_{n_s-2} |+\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s-2} |-\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle] \\
&+ \epsilon c_{n_s+2} [\alpha_{n_s+2} |+\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle + \beta_{n_s+2} |-\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle].
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Vemos que há uma superposição dos autoestados de energia positiva e negativa, o que mostra uma assinatura do efeito *Zitterbewegung*, o qual está codificado no grau de liberdade do *spin*. Podemos observar que a deformação adiciona novos autoestados de superposição ao sistema e, tomando $\epsilon = 0$ obtemos o resultados obtidos no capítulo 3.

Aplicando o operador de evolução temporal, temos

$$\begin{aligned}
|\Psi_{n_s}(t)\rangle &= \alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}^+ t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}^- t} \\
&- \epsilon c_{n_s} [\alpha_{n_s-2} |+\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s-2}^+ t} + \beta_{n_s-2} |-\bar{E}_{n_s-2}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s-2}^- t}] \\
&+ \epsilon c_{n_s+2} [\alpha_{n_s+2} |+\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s+2}^+ t} + \beta_{n_s+2} |-\bar{E}_{n_s+2}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s+2}^- t}],
\end{aligned} \tag{5.84}$$

em que

$$\omega_{n_s}^{(\pm)} = \pm\omega_{n_s} - \phi_{n_s}^\epsilon, \tag{5.85}$$

é a frequência de *Zetterbewegung* κ -deformada, com $\omega_{n_s} = E_{n_s}/\hbar$ e $\phi_{n_s}^\epsilon = 4m^2 c^4 \epsilon \xi(n_s + 1)/\hbar$. Podemos escrever o estado evoluído em termos dos vetores da base. Assim, o primeiro termo da equação (5.84) pode ser escrito como

$$\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}^+ t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}^- t} = e^{i\phi_{n_s}^\epsilon t} [\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s} t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s} t}]. \tag{5.86}$$

Substituindo os vetores da base no autovetores de energia

$$\begin{aligned}\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} &= (\alpha_{n_s})^2 |n_s, \uparrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + \epsilon(\alpha_{n_s})^2 c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} \\ &\quad - \epsilon(\alpha_{n_s})^2 c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + i\alpha_{n_s}\beta_{n_s} |n_s + 1, \downarrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} \\ &\quad + i\epsilon\alpha_{n_s}\beta_{n_s}c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} - i\epsilon\alpha_{n_s}\beta_{n_s}c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle e^{-i\omega_{n_s}t},\end{aligned}\quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}\beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s}t} &= (\beta_{n_s})^2 |n_s, \uparrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t} + \epsilon(\beta_{n_s})^2 c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t} \\ &\quad - \epsilon(\beta_{n_s})^2 c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t} - i\beta_{n_s}\alpha_{n_s} |n_s + 1, \downarrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t} \\ &\quad - i\epsilon\beta_{n_s}\alpha_{n_s}c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t} + i\epsilon\beta_{n_s}\alpha_{n_s}c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle e^{i\omega_{n_s}t},\end{aligned}\quad (5.88)$$

somando (5.88) com (5.89), temos

$$\begin{aligned}\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s}t} &= [(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] |n_s, \uparrow\rangle \\ &\quad + [(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] \epsilon c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\ &\quad - [(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] \epsilon c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\ &\quad + (e^{-i\omega_{n_s}t} - e^{i\omega_{n_s}t}) i\alpha_{n_s}\beta_{n_s} |n_s + 1, \downarrow\rangle \\ &\quad + (e^{-i\omega_{n_s}t} - e^{i\omega_{n_s}t}) i\alpha_{n_s}\beta_{n_s} \epsilon c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\ &\quad - (e^{-i\omega_{n_s}t} - e^{i\omega_{n_s}t}) i\alpha_{n_s}\beta_{n_s} \epsilon c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle,\end{aligned}\quad (5.89)$$

agrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}\alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s}t} &= [(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] \times \\ &\quad \times [|n_s, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle] \\ &\quad + (e^{-i\omega_{n_s}t} - e^{i\omega_{n_s}t}) i\alpha_{n_s}\beta_{n_s} \times \\ &\quad \times [|n_s + 1, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle].\end{aligned}\quad (5.90)$$

Podemos arrumar o primeiro termo dessa equação

$$\begin{aligned}[(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] &= [(\alpha_{n_s})^2 + (\beta_{n_s})^2] \cos(\omega_{n_s}t) \\ &\quad + i [(\beta_{n_s})^2 - (\alpha_{n_s})^2] \sin(\omega_{n_s}t),\end{aligned}\quad (5.91)$$

que pode ser escrito como

$$[(\alpha_{n_s})^2 e^{-i\omega_{n_s}t} + (\beta_{n_s})^2 e^{i\omega_{n_s}t}] = \cos(\omega_{n_s}t) - \frac{i \sin(\omega_{n_s}t)}{\sqrt{1 + 4\xi(n_s + 1)}}. \quad (5.92)$$

No segundo termo, usamos a propriedade trigonométrica

$$\sin(\omega_{n_s}t) = \frac{e^{i\omega_{n_s}t} - e^{-i\omega_{n_s}t}}{2i}. \quad (5.93)$$

Assim, o primeiro termo da evolução temporal fica escrito como

$$\begin{aligned} \alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s}t} = & \left(\cos(\omega_{n_s}t) - \frac{i \sin(\omega_{n_s}t)}{\sqrt{1+4\xi(n_s+1)}} \right) \times \\ & \times [|n_s, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s} |n_s-2, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+2} |n_s+2, \uparrow\rangle] \\ & + 2 \sin(\omega_{n_s}t) \alpha_{n_s} \beta_{n_s} \times \\ & \times [|n_s+1, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s+1} |n_s-1, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+3} |n_s+3, \downarrow\rangle]. \end{aligned} \quad (5.94)$$

definimos

$$f_{n_s}(t) = \left(\cos(\omega_{n_s}t) - \frac{i \sin(\omega_{n_s}t)}{\sqrt{1+4\xi(n_s+1)}} \right), \quad g_{n_s}(t) = 2 \sin(\omega_{n_s}t) \alpha_{n_s} \beta_{n_s}. \quad (5.95)$$

Uma vez que

$$|f_{n_s}(t)|^2 + |g_{n_s}(t)|^2 = 1, \quad (5.96)$$

podemos escrever finalmente

$$\begin{aligned} \alpha_{n_s} |+\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{-i\omega_{n_s}t} + \beta_{n_s} |-\bar{E}_{n_s}^\epsilon\rangle e^{i\omega_{n_s}t} = & f_{n_s}(t) [|n_s, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s} |n_s-2, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+2} |n_s+2, \uparrow\rangle] \\ & + g_{n_s}(t) [|n_s+1, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s+1} |n_s-1, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+3} |n_s+3, \downarrow\rangle]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Para os outros termos da evolução temporal dependentes da deformação, o resultado é o mesmo, muda apenas os valores de n_s . Assim, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_{n_s}(t)\rangle = & e^{i\phi_{n_s, \epsilon}t} f_{n_s}(t) [|n_s, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s} |n_s-2, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+2} |n_s+2, \uparrow\rangle] \\ & + e^{i\phi_{n_s, \epsilon}t} g_{n_s}(t) [|n_s+1, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s+1} |n_s-1, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+3} |n_s+3, \downarrow\rangle] \\ & - \epsilon c_{n_s} e^{i\phi_{n_s-2, \epsilon}t} f_{n_s-2}(t) [|n_s-2, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s-2} |n_s-4, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s} |n_s, \uparrow\rangle] \\ & - \epsilon c_{n_s} e^{i\phi_{n_s-2, \epsilon}t} g_{n_s-2}(t) [|n_s-1, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s-1} |n_s-3, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+1} |n_s+1, \downarrow\rangle] \\ & + \epsilon c_{n_s+2} e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon}t} f_{n_s+2}(t) [|n_s+2, \uparrow\rangle + \epsilon c_{n_s+2} |n_s, \uparrow\rangle - \epsilon c_{n_s+4} |n_s+4, \uparrow\rangle] \\ & + \epsilon c_{n_s+2} e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon}t} g_{n_s+2}(t) [|n_s+3, \downarrow\rangle + \epsilon c_{n_s+3} |n_s+1, \downarrow\rangle - \epsilon c_{n_s+5} |n_s+5, \downarrow\rangle]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Desprezando os termos em segunda ordem em ϵ

$$\begin{aligned} |\Psi_{n_s}(t)\rangle = & e^{i\phi_{n_s, \epsilon}t} (f_{n_s}(t) |n_s\rangle |\uparrow\rangle + g_{n_s}(t) |n_s+1\rangle |\downarrow\rangle) \\ & + \epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon}t} [c_{n_s} f_{n_s}(t) |n_s-2\rangle |\uparrow\rangle + c_{n_s+1} g_{n_s}(t) |n_s-1\rangle |\downarrow\rangle] \\ & - \epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon}t} [c_{n_s+2} f_{n_s}(t) |n_s+2\rangle |\uparrow\rangle - c_{n_s+3} g_{n_s}(t) |n_s+3\rangle |\downarrow\rangle] \\ & - \epsilon c_{n_s} e^{i\phi_{n_s-2, \epsilon}t} (f_{n_s-2}(t) |n_s-2\rangle |\uparrow\rangle + g_{n_s-2}(t) |n_s-1\rangle |\downarrow\rangle) \\ & + \epsilon c_{n_s+2} e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon}t} (f_{n_s+2}(t) |n_s+2\rangle |\uparrow\rangle + g_{n_s+2}(t) |n_s+3\rangle |\downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Surpreendentemente, a deformação do espaço-tempo, mesmo modificando os autovalores de energia, a frequência de *Zetterbewegung* e fazendo com que novos estados emaranhados com diferentes números quânticos surjam no sistema, não há correção dos valores esperados em primeira ordem para o sistema κ -JC. Esse resultado já foi observado no sistema κ -Dirac-Coulomb discutido na seção 4.4, em que as correções em primeira ordem são nulas.

Por outro lado, podemos ver os efeitos da deformação no cenário dos colapsos e ressurgimentos da população atômica no sistema κ -JC usando um estado coerente. Assim, vamos considerar o estado inicial como

$$|\Psi_{n_s}(0)\rangle = |\alpha, \uparrow\rangle, \quad |\alpha\rangle = e^{-\frac{\langle n_s \rangle}{2}} \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} |n_s\rangle, \quad (5.100)$$

em que $|\alpha|^2 = \langle n_s \rangle$. Assim, podemos calcular o valor esperado dos observáveis definidos em (3.48). Os termos que contribuirão em primeira ordem em ϵ para o valor esperado, são dados por

$$\begin{aligned} \langle O^\epsilon \rangle &= \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s} e^{-\langle n_s \rangle}}{n_s!} \langle \Psi_{n_s}(t) | \hat{O} | \Psi_{n_s}(t) \rangle \\ &+ \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{\sqrt{n_s!}(n_s+2)!} \left[\langle \Psi_{n_s+2}(t) | \hat{O} | \Psi_{n_s}(t) \rangle + \langle \Psi_{n_s}(t) | \hat{O} | \Psi_{n_s+2}(t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Os valores esperados para os operadores $\hat{S}_z^\epsilon$, $\hat{L}_z^\epsilon$ e $\hat{J}_z^\epsilon$ são dados abaixo, os detalhes das contas podem ser encontrados no apêndice (A)

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_z^\epsilon \rangle &= \frac{\hbar}{2} - \hbar \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s} e^{-\langle n_s \rangle}}{n_s!} \mathcal{S}_{n_s}(t) \\ &+ \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} [\mathcal{S}_{n_s}(t) - \mathcal{S}_{n_s+2}(t)], \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z^\epsilon \rangle &= \hbar \langle n_s \rangle + \hbar \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s} e^{-\langle n_s \rangle}}{n_s!} \mathcal{S}_{n_s}(t) \\ &- \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} [\mathcal{S}_{n_s}(t) - \mathcal{S}_{n_s+2}(t)] \\ &+ \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} \mathcal{L}_{n_s}^\epsilon(t), \end{aligned} \quad (5.103)$$

e

$$\langle \hat{J}_z^\epsilon \rangle = \hbar \left[\langle n_s \rangle + \frac{1}{2} \right] + \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} \mathcal{L}_{n_s}^\epsilon(t), \quad (5.104)$$

em que

$$\mathcal{S}_{n_s}(t) = \frac{4\xi(n_s+1)}{[1+4\xi(n_s+1)]} \sin^2(\omega_{n_s} t), \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{n_s}^\epsilon(t) &= \frac{4c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} - \frac{2c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} w_{n_s}(t) \cos(\Phi^\epsilon t) \\ &\quad - \frac{2c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} s_{n_s}(t) \sin(\Phi^\epsilon t) - \frac{2c_{n_s+3}}{\sqrt{(n_s+2)!}} p_{n_s}(t) \cos(\Phi^\epsilon t).\end{aligned}\quad (5.106)$$

$$w_{n_s}(t) = 2 \cos(\omega_{n_s} t) \cos(\omega_{n_s+2} t) + \frac{2 \sin(\omega_{n_s} t) \sin(\omega_{n_s+2} t)}{a_{n_s} a_{n_s+2}}, \quad (5.107)$$

$$s_{n_s}(t) = \frac{2 \cos(\omega_{n_s+2} t) \sin(\omega_{n_s} t)}{a_{n_s}} - \frac{2 \cos(\omega_{n_s} t) \sin(\omega_{n_s+2} t)}{a_{n_s+2}}, \quad (5.108)$$

$$p_{n_s}(t) = 2g_{n_s}(t)g_{n_s+2}(t) \cos(\Phi^\epsilon t), \quad (5.109)$$

com

$$\Phi^\epsilon = \phi_{n_s}^\epsilon - \phi_{n_s+2}^\epsilon = -8m^2 c^4 \xi \epsilon. \quad (5.110)$$

Podemos ver que a deformação modifica os valores esperados do sistema. Para que possamos visualizar melhor os efeitos da deformação, definimos

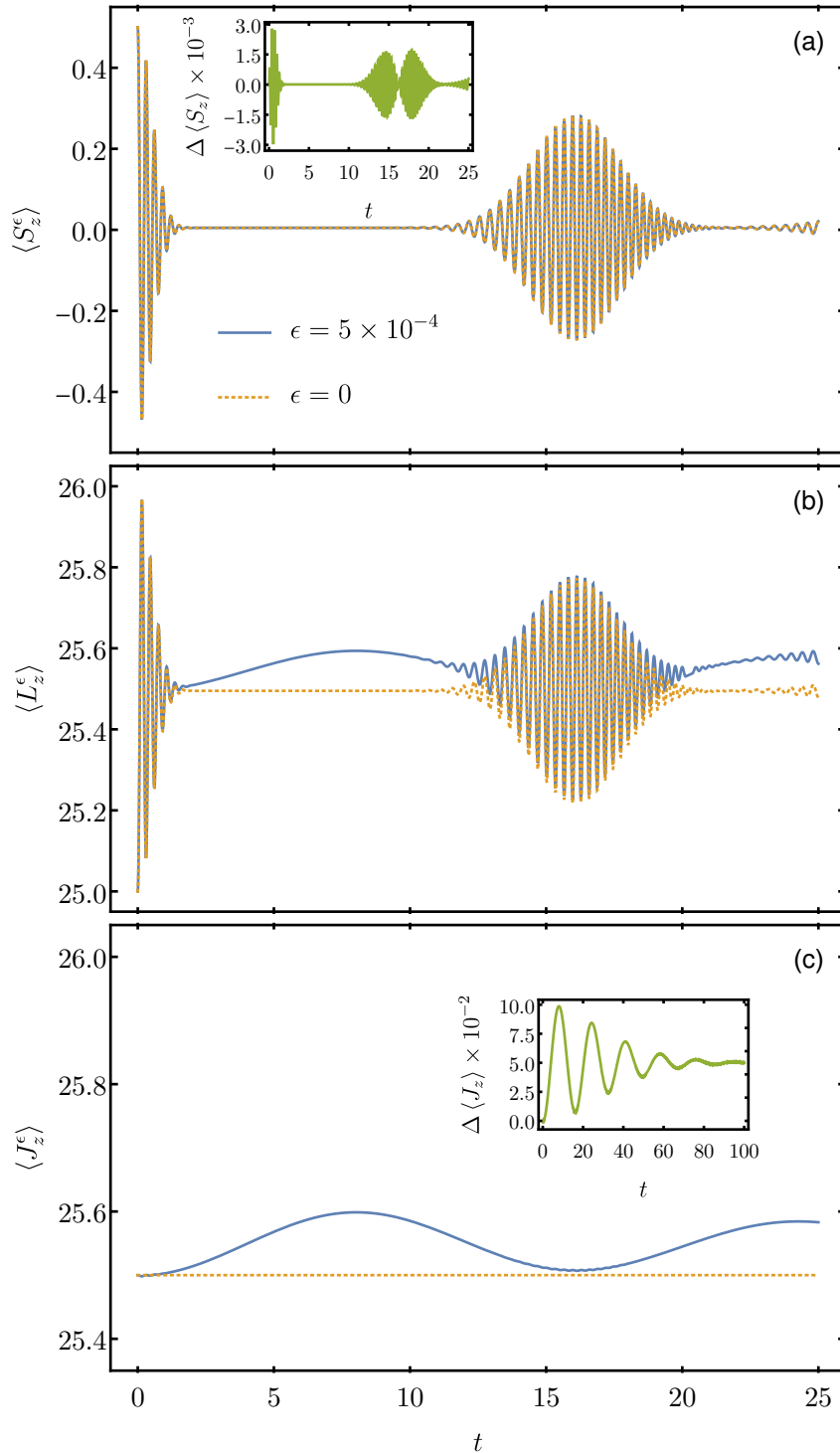
$$\Delta \langle \hat{O} \rangle = \langle \hat{O}^\epsilon \rangle - \langle \hat{O} \rangle, \quad (5.111)$$

como sendo a diferença entre o valor esperado κ -deformado do observável $\hat{O}$ e seu usual sem deformação. Os resultados são mostrados na Figura 5, em que o número médio de fótons $\langle n_s \rangle = 25$, as unidades $m = c = \hbar = \omega = 1$, a deformação $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ (linha azul e contínua) e $\epsilon = 0$ (linha laranja e tracejada). Na Figura 5(a) mostramos o valor esperado de $\langle \hat{S}_z^\epsilon \rangle$, o qual apresenta o efeito dos colapsos e ressurgimentos, como apresentado no capítulo 3. A inserção de $\Delta \langle \hat{S}_z \rangle$ na parte superior da Figura 5(a), mostra que o valor esperado é ligeiramente modificado pela deformação. A Figura 5(b), mostra o valor esperado de $\langle \hat{L}_z^\epsilon \rangle$, em que podemos observar que os colapsos e ressurgimentos são afetados de forma mais evidente pela deformação do que a inversão de *spin*. Já na Figura 5(c), podemos observar que a deformação afeta a conservação do momento angular total $\langle \hat{J}_z^\epsilon \rangle$. Assim, vemos então, que a deformação do espaço-tempo faz com que o valor esperado do momento angular total $\hat{J}_z$ não seja mais uma constante de movimento. Este resultado pode ser verificado na comutação de $\hat{J}_z$ com o Hamiltoniano $h_{\kappa-JC}^\epsilon$, ou seja

$$[h_{\kappa-JC}^s, \hat{J}_z] = 4\epsilon \hbar g (\sigma^- \hat{a}_s^- + \sigma^+ \hat{a}_s^+). \quad (5.112)$$

Assim, vemos que esse resultado é uma consequência direta da deformação. Podemos também observar na Figura 5(c) que a deformação causa um deslocamento no momento angular total após um intervalo de tempo, convergindo para um valor aproximado $\Delta \langle \hat{J}_z \rangle|_{t \rightarrow \infty} \sim 5 \times 10^{-2}$. É fácil ver que para $\epsilon = 0$, $\hat{J}_z$ comuta com o Hamiltoniano e recuperamos o resultado do sistema JC usual, como deve ser.

Figura 5 – Na figura (a) vemos o comportamento dos colapsos e ressurgimentos na inversão de *spin* $\langle \hat{S}_z \rangle$, na figura (b) vemos o valor esperado para o momento angular $\langle \hat{L}_z \rangle$ e na figura (c) o valor esperado do momento angular total $\langle \hat{J}_z \rangle$ em função do tempo. O número médio de fótons $\langle n_s \rangle = 25$, para $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$ (linha azul e contínua) e $\epsilon = 0$ (linha laranja e tracejada), os valores das unidade $m = c = \omega = \hbar = 1$. Em (a), as duas curvas são sobrepostas e a inserção de $\Delta \langle \hat{S}_z^\epsilon \rangle$ mostra a diferença entre elas. Em (c), a inserção mostra o comportamento assintótico de $\Delta \langle \hat{J}_z^\epsilon \rangle$.



6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho apresentamos o oscilador de Dirac em (2+1) dimensões e o seu mapeamento no sistema JC e AJC. Fizemos um mapeamento de modo mais transparente levando em conta o sinal do acoplamento $+$ ($-$) do Hamiltoniano do oscilador de Dirac e o sistema JC (AJC). Também introduzimos o parâmetro $s = \pm 1$, que caracteriza as duas possíveis quiralidades do sistema, permitindo discutí-las simultaneamente. Considerando o oscilador de Dirac em (2+1) no contexto da álgebra κ -deformada e usando o mapeamento, propusemos os modelos κ -JC e κ -AJC. Mostramos que a deformação κ leva naturalmente a um Hamiltoniano não Hermitiano, o que possui uma evolução temporal não unitária. Além disso, o hamiltoniano κ -(A)JC não é $\mathcal{PT}$ simétrico, mas é quase-hermitiano, pois possui um espectro real e, empregando a teoria dos hamiltonianos quase-hermitianos, encontramos sua contrapartida hermitiana, permitindo-nos estudar a dinâmica do sistema κ -deformado. Embora o deslocamento tenha sido causado pela deformação nas autoenergias e, conseqüentemente, nas frequências de *Zitterbewegung*, não observamos efeitos de primeira ordem nos valores esperados de $\hat{S}_z$, $\hat{L}_z$ e $\hat{J}_z$ quando consideramos o estado inicial $|\Psi_{n_s}(0)\rangle = |n_s, \uparrow\rangle$. Por outro lado, ao considerar um estado inicial coerente, observamos modificações no conhecido comportamento de colapso e ressurgimento da inversão de *spin*, bem como nos valores esperados do momento angular na direção z , $\hat{L}_z$. Especialmente, observamos que o valor esperado do momento angular total na direção z , $\hat{J}_z$, não é mais uma constante de movimento e isso se apresenta como uma consequência direta da deformação κ .

Comentamos que o mapeamento entre sistema quânticos ópticos e quânticos relativísticos (49), levou a um grande avanço nos experimentos de simulação quântica de efeito quânticos relativísticos (50), uma vez que medições diretas de fenômenos quânticos relativísticos apresentam um grau de complexidade devido a o sistema estar a grandes velocidade. Exemplos significativos de efeitos quânticos relativísticos simulados através de configurações ópticas, são as simulações experimentais do efeito *Zitterbewegung* em íons aprisionados (99) e outros (100, 101). Como mostrado em (51), a dinâmica do oscilador de Dirac em (2+1) pode ser implementada em um único íon aprisionado dentro de uma armadilha de Paul e, dado que esses sistemas permitem um amplo controle coerente dos graus de liberdade iônicos internos e externos (54), e a capacidade de ajustar parâmetros experimentais, o quais poderiam introduzir certas modificações que acarretariam em novos fenômenos, dessa forma nosso trabalho sugere que algum experimento futuro possa detectar os efeitos da deformação.

Seguindo a linha de pesquisa do oscilador de Dirac κ -deformado o qual nos permite explorar uma série de sistemas relativísticos, o primeiro que pretendemos explorar é o oscilador de Dirac κ -deformado com a inclusão de um campo magnético (76, 102, 103). A presença do campo magnético faz com que novos fônons com quiralidades opostas

surjam no sistema, fazendo que apareçam transições de fase quântica. Essas transições de fase podem ser responsáveis por mudanças abruptas nas propriedades físicas do sistema, mesmo próximo do zero absoluto, onde transições de fase clássicas não podem existir. A segunda característica que pretendemos analisar são os efeitos da deformação quântica nas propriedades térmicas do oscilador de Dirac (104, 105). Neste trabalho podemos analisar como a deformação afeta a função de partição do sistema, assim como a energia livre, capacidade térmica e entropia. Este trabalho está em fase de conclusão e será submetido para publicação.

Outro trabalho interessante é o oscilador de Dirac na corda cósmica magnética em $(2+1)$ dimensões (106). Porém, escrever os operadores de criação e aniquilação nesse sistema não é uma tarefa simples, dado que o sistema está escrito em coordenadas polares, onde se tem a conexão de *spin*. A equação de Dirac é relevante em diversas aplicações e com o avanço tecnológico para medidas experimentais principalmente em armadilhas ópticas, ela se torna de grande interesse para testar as previsões feitas pela relatividade.

REFERÊNCIAS

- 1 RESNICK, R.; EISBERG, R. Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. *São Paulo: Campus*, 1979.
- 2 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- 3 TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. Física moderna, 3ª edição. *Editora LTC, Rio de janeiro-RJ*, 2001.
- 4 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 5 ROCHA, A.; RIZZUTI, B.; MOTA, D. Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 35, 2013.
- 6 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 7 NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2003.
- 8 HARRISON, E. Book review: Cosmology: the science of the universe.-/cambridge u press, 2000. *Irish Astronomical Journal*, v. 27, p. 235, 2000.
- 9 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019.
- 10 ABREU, L. M. et al. Notas sobre o grupo de Galileu: Aspectos geométricos e recentes desenvolvimentos. *Sitientibus Série Ciências Físicas*, v. 5, p. 26–43, 2009.
- 11 GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3.
- 12 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- 13 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928.
- 14 OSTRIKER, J. P.; STEINHARDT, P. J. Cosmic concordance. *arXiv preprint astro-ph/9505066*, 1995.
- 15 GUPTA, A. *Dark Z'Search and (Un) Natural Supersymmetric Models*. Tese (Doutorado) — Johns Hopkins University, 2014.
- 16 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

- 17 WOOD-VASEY, W. M. et al. Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the essence supernova survey. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 666, n. 2, p. 694, 2007.
- 18 ALDROVANDI, R.; ALMEIDA, J. B.; PEREIRA, J. de Sitter special relativity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 24, n. 6, p. 1385, 2007.
- 19 CACCIATORI, S.; GORINI, V.; KAMENSHCHIK, A. Special relativity in the 21st century. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 17, n. 9-10, p. 728–768, 2008.
- 20 GUO, H.-Y. et al. On special relativity with cosmological constant. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 331, n. 1-2, p. 1–7, 2004.
- 21 GUO, H.-Y. et al. Snyder’s model—de Sitter special relativity duality and de Sitter gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 24, n. 16, p. 4009, 2007.
- 22 PEREIRA, J.; SAMPSON, A.; SAVI, L. de Sitter transitivity, conformal transformations and conservation laws. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 23, n. 04, p. 1450035, 2014.
- 23 BACRY, H.; LÉVY-LEBLOND, J.-M. Possible kinematics. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 9, n. 10, p. 1605–1614, 1968.
- 24 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. A second Poincaré group. *arXiv preprint gr-qc/9809061*, 1998.
- 25 MAGUELJO, J.; SMOLIN, L. Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 19, p. 190403, 2002.
- 26 AMELINO-CAMELIA, G. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 11, n. 01, p. 35–59, 2002.
- 27 AMELINO-CAMELIA, G. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Reviews in Relativity*, Springer, v. 16, n. 1, p. 1–137, 2013.
- 28 JACOBSON, T.; LIBERATI, S.; MATTINGLY, D. Lorentz violation at high energy: concepts, phenomena, and astrophysical constraints. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 321, n. 1, p. 150–196, 2006.
- 29 LIBERATI, S. Tests of Lorentz invariance: a 2013 update. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 30, n. 13, p. 133001, 2013.
- 30 HOSSENFELDER, S. A note on theories with a minimal length. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 23, n. 5, p. 1815, 2006.
- 31 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. De Sitter relativity: a new road to quantum gravity? *Foundations of Physics*, Springer, v. 39, n. 1, p. 1–19, 2009.
- 32 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. de Sitter special relativity: effects on cosmology. *Gravitation and Cosmology*, Springer, v. 15, n. 4, p. 287–294, 2009.
- 33 AMELINO-CAMELIA, G. Testable scenario for relativity with minimum length. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 510, n. 1-4, p. 255–263, 2001.

- 34 KOWALSKI-GLIKMAN, J. Introduction to doubly special relativity. In: *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 131–159.
- 35 KOWALSKI-GLIKMAN, J. A short introduction to κ -deformation. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 32, n. 35, p. 1730026, 2017.
- 36 KOVAČEVIĆ, D. et al. Generalized Poincaré algebras, hopf algebras and κ -Minkowski spacetime. *Physics letters B*, Elsevier, v. 711, n. 1, p. 122–127, 2012.
- 37 LUKIERSKI, J. et al. q-deformation of Poincaré algebra. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 264, n. 3-4, p. 331–338, 1991.
- 38 LUKIERSKI, J.; NOWICKI, A.; RUEGG, H. New quantum Poincaré algebra and κ -deformed field theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 293, n. 3-4, p. 344–352, 1992.
- 39 LUKIERSKI, J.; RUEGG, H. Quantum κ -Poincaré in any dimension. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 329, n. 2-3, p. 189–194, 1994.
- 40 LUKIERSKI, J.; RUEGG, H.; ZAKRZEWSKI, W. J. Classical and quantum mechanics of free κ -relativistic systems. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 243, n. 1, p. 90–116, 1995.
- 41 LIU, X. et al. Relativistic motion enhanced quantum estimation of κ -deformation of spacetime. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 8, p. 1–9, 2018.
- 42 NOWICKI, A.; SORACE, E.; TARLINI, M. The quantum deformed Dirac equation from the κ -Poincaré algebra. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 302, n. 4, p. 419–422, 1993.
- 43 BIEDENHARN, L. C.; MUELLER, B.; TARLINI, M. The Dirac-Coulomb problem for the κ -Poincare quantum group. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 318, n. 4, p. 613–616, 1993.
- 44 AGOSTINI, A.; AMELINO-CAMELIA, G.; ARZANO, M. Dirac spinors for doubly special relativity and κ -Minkowski noncommutative spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 8, p. 2179, 2004.
- 45 ALOISIO, R. et al. Particle and antiparticle sectors in dsr1 and κ -Minkowski space-time. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2004, n. 05, p. 028, 2004.
- 46 ROY, P.; ROYCHOUDHURY, R. Aharonov-Bohm interaction for a deformed non-relativistic spin 1/2 particle. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 359, n. 3-4, p. 339–342, 1995.
- 47 ANDRADE, F. et al. On the κ -Dirac oscillator revisited. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 731, p. 327–330, 2014.
- 48 ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O. The 2d κ -Dirac oscillator. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 738, p. 44–47, 2014.
- 49 ROZMEJ, P.; ARVIEU, R. The Dirac oscillator. a relativistic version of the Jaynes-Cummings model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 32, n. 28, p. 5367, 1999.
- 50 GERRITSMAN, R. et al. Quantum simulation of the Dirac equation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 463, n. 7277, p. 68–71, 2010.

- 51 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; SOLANO, E. Exact mapping of the $2+1$ Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 4, p. 041801, 2007.
- 52 MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The Dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 22, n. 17, p. L817, 1989.
- 53 GERRY, C.; KNIGHT, P.; KNIGHT, P. L. *Introductory quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005.
- 54 LEIBFRIED, D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 75, n. 1, p. 281, 2003.
- 55 UHDRE, G. M.; CIUS, D.; ANDRADE, F. M. Effects of quantum deformation on the jaynes-cummings and anti-jaynes-cummings models. *Physical Review A*, APS, v. 105, n. 1, p. 013703, 2022.
- 56 BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having pt symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998.
- 57 BENDER, C. M. Introduction to pt -symmetric quantum theory. *Contemporary physics*, Taylor e Francis, v. 46, n. 4, p. 27–292, 2005.
- 58 BENDER, C. M. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 70, n. 6, p. 947, 2007.
- 59 SCHOLTZ, F.; GEYER, H.; HAHNE, F. Quasi-hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 213, n. 1, p. 74–101, 1992.
- 60 CROKE, S. Pt -symmetric hamiltonians and their application in quantum information. *Physical Review A*, APS, v. 91, n. 5, p. 052113, 2015.
- 61 FRING, A.; MOUSSA, M. H. Non-hermitian swanson model with a time-dependent metric. *Physical Review A*, APS, v. 94, n. 4, p. 042128, 2016.
- 62 FRING, A.; MOUSSA, M. H. Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-hermitian systems with nonobservable hamiltonians. *Physical Review A*, APS, v. 93, n. 4, p. 042114, 2016.
- 63 WEST, C. T.; KOTTOS, T.; PROSEN, T. Pt -symmetric wave chaos. *Physical review letters*, APS, v. 104, n. 5, p. 054102, 2010.
- 64 LÜ, X.-Y. et al. Pt -symmetry-breaking chaos in optomechanics. *Physical review letters*, APS, v. 114, n. 25, p. 253601, 2015.
- 65 LIU, Z.-P. et al. Metrology with pt -symmetric cavities: enhanced sensitivity near the pt -phase transition. *Physical review letters*, APS, v. 117, n. 11, p. 110802, 2016.
- 66 CHTCHELKATCHEV, N. et al. Stimulation of the fluctuation superconductivity by pt symmetry. *Physical review letters*, APS, v. 109, n. 15, p. 150405, 2012.
- 67 DYSON, F. J. Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet. *Physical Review*, APS, v. 102, n. 5, p. 1230, 1956.

- 68 TINKHAM, M. *Group theory and quantum mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2003.
- 69 DARTORA, C.; JIMENEZ, M. J. S.; ZANELLA, F. Os fundamentos da física dos fermions de Dirac sem massa em $(1+2)$ -d e o grafeno. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 37, n. 3, p. 3301–1, 2015.
- 70 ROMERO, R. Martinez-y; NÚÑEZ-YÉPEZ, H.; SALAS-BRITO, A. Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 3, p. 135, 1995.
- 71 SMIRNOV, A.; JR, A. J. D. F. Representations of the Dirac equation in $1+1$ dimensions. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 38, n. 3, 2016.
- 72 NE, J. A. F.-V. et al. First experimental realization of the Dirac oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 111, p. 170405, Oct 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.170405>.
- 73 BRANDENBERGER, R. H.; DAVIS, A.-C.; MATHESON, A. M. Callan-Rubakov effect for strings. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 307, n. 4, p. 909–923, 1988.
- 74 HAGEN, C. Spin dependence of the Aharonov—Bohm effect. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 6, n. 18, p. 3119–3149, 1991.
- 75 ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O. Remarks on the Dirac oscillator in $(2+1)$ dimensions. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 108, n. 3, p. 30003, 2014.
- 76 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M.; A, L. Chirality quantum phase transition in the Dirac oscillator. *Physical review A*, APS, v. 77, n. 6, p. 063815, 2008.
- 77 WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- 78 AGARWAL, G. S. *Quantum optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- 79 INÖNÜ, E.; WIGNER, E. P. On the contraction of groups and their representations. In: *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*. [S.l.]: Springer, 1993. p. 488–502.
- 80 CIANFRANI, F. et al. Symmetries of quantum spacetime in three dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 8, p. 084044, 2016.
- 81 HOPF, H. Über die topologie der gruppen-mannigfaltigkeiten und ihrer verallgemeinerungen. In: *Selecta Heinz Hopf*. [S.l.]: Springer, 1964. p. 119–151.
- 82 MAJID, S. *Foundations of quantum group theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- 83 HARIKUMAR, E.; SIVAKUMAR, M.; SRINIVAS, N. κ -deformed Dirac equation. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 26, n. 15, p. 1103–1115, 2011.
- 84 SANTOS, J. et al. Non-hermitian noncommutative quantum mechanics. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 134, n. 7, p. 332, 2019.
- 85 STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics: with applications in condensed matter and atomic physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.

- 86 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959.
- 87 ANDRADE, F.; SILVA, E. Effects of quantum deformation on the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 719, n. 4-5, p. 467–471, 2013.
- 88 KUSCH, P.; FOLEY, H. Precision measurement of the ratio of the atomic values' in the $p\ 3\ 2\ 2$ and $p\ 1\ 2\ 2$ states of gallium. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 12, p. 1256, 1947.
- 89 GABRIELSE, G. et al. New determination of the fine structure constant from the electron g value and qed. *Physical review letters*, APS, v. 97, n. 3, p. 030802, 2006.
- 90 BROWNELL, F. Solvable models in quantum mechanics (s. albeverio, f. gesztesy, r. hoegh-krohn, and h. holden). *SIAM Review*, SIAM, v. 32, n. 1, p. 160–167, 1990.
- 91 GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V.; VORONOV, B. L. *Self-adjoint extensions in quantum mechanics: general theory and applications to Schrödinger and Dirac equations with singular potentials*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 62.
- 92 BONNEAU, G.; FARAUT, J.; VALENT, G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of physics*, American Association of Physics Teachers, v. 69, n. 3, p. 322–331, 2001.
- 93 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: US Government printing office, 1964. v. 55.
- 94 RUIJSENAARS, S. The Aharonov-Bohm effect and scattering theory. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 146, n. 1, p. 1–34, 1983.
- 95 SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2006.
- 96 ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. Physical regularization for the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem in conical space. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 4, p. 041701, 2012.
- 97 BORDAG, M.; VOROPAEV, S. Bound states of an electron in the field of the magnetic string. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 333, n. 1-2, p. 238–244, 1994.
- 98 ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. On the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem in conical space: bound states, scattering and helicity nonconservation. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 339, p. 510–530, 2013.
- 99 LAMATA, L. et al. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 25, p. 253005, 2007.
- 100 SCHLIEMANN, J.; LOSS, D.; WESTERVELT, R. Zitterbewegung of electronic wave packets in iii-v zinc-blende semiconductor quantum wells. *Physical review letters*, APS, v. 94, n. 20, p. 206801, 2005.
- 101 GARAY, L. J. et al. Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, APS, v. 85, n. 22, p. 4643, 2000.

- 102 PANELLA, O.; ROY, P. Quantum phase transitions in the noncommutative Dirac oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 4, p. 042111, 2014.
- 103 BOUMALI, A.; HASSANABADI, H. Exact solutions of the $(2+1)$ -dimensional Dirac oscillator under a magnetic field in the presence of a minimal length in the non-commutative phase space. *Zeitschrift für Naturforschung A*, De Gruyter, v. 70, n. 8, p. 619–627, 2015.
- 104 PACHECO, M.; LANDIM, R.; ALMEIDA, C. One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 311, n. 2-3, p. 93–96, 2003.
- 105 PACHECO, M. et al. Three-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 108, n. 1, p. 10005, 2014.
- 106 ANDRADE, F. M.; SILVA, E. O. Effects of spin on the dynamics of the 2d Dirac oscillator in the magnetic cosmic string background. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 12, p. 1–8, 2014.

APÊNDICE A – OPERADOR HAMILTONIANO E VALORES ESPERADOS

OPERADOR HAMILTONIANO κ -DEFORMADO

Neste apêndice, iremos calcular o termo $(H^\pm)^2 - c^2\pi_i\pi_i$ do Hamiltoniano κ -deformado (5.6)

$$(H_0^\pm)^2 = (c\sigma_x\pi_x^\pm + cs\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z)(c\sigma_x\pi_x^\pm + cs\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z). \quad (\text{A.1})$$

Fazendo as multiplicações

$$\begin{aligned} &= c\sigma_x\pi_x^\pm(c\sigma_x\pi_x^\pm + cs\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z) \\ &= c^2\sigma_x\pi_x^\pm\sigma_x\pi_x^\pm + c^2s\sigma_x\pi_x^\pm\sigma_y\pi_y^\pm + mc^3\sigma_x\pi_x^\pm\sigma_z, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} &= cs\sigma_y\pi_y^\pm(c\sigma_x\pi_x^\pm + cs\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z) \\ &= c^2s\sigma_y\pi_y^\pm\sigma_x\pi_x^\pm + c^2s^2\sigma_y\pi_y^\pm\sigma_y\pi_y^\pm + smc^3\sigma_y\pi_y^\pm\sigma_z, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= mc^2\sigma_z(c\sigma_x\pi_x^\pm + cs\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z) \\ &= mc^3\sigma_z\sigma_x\pi_x^\pm + smc^3\sigma_z\sigma_y\pi_y^\pm + m^2c^4\sigma_z\sigma_z \\ &= imc^3\sigma_y\pi_x^\pm - ismc^3\sigma_x\pi_y^\pm + m^2c^4\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Propriedades das matizes de Pauli $[\sigma_i, \sigma_j] = -2\epsilon_{ijk}\sigma_k$

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y. \quad (\text{A.7})$$

Calculando os termos

$$\begin{aligned} \sigma_x\pi_x^\pm\sigma_x\pi_x^\pm &= \sigma_x(p_x \pm im\omega\sigma_zx)\sigma_x(p_x \pm im\omega\sigma_zx) \\ &= (\sigma_xp_x \pm m\omega\sigma_yx)(\sigma_xp_x \pm m\omega\sigma_yx) \\ &= \sigma_xp_x\sigma_xp_x \pm m\omega\sigma_xp_x\sigma_yx \pm m\omega\sigma_yx\sigma_xp_x + m^2\omega^2\sigma_yx\sigma_yx \\ &= p_x^2\mathbf{I} \pm im\omega p_xx\sigma_z \mp im\omega xp_x\sigma_z + m^2\omega^2x^2\mathbf{I} \\ &= p_x^2\mathbf{I} + m^2\omega^2x^2\mathbf{I} \mp im\omega(xp_x - p_xx)\sigma_z \\ &= p_x^2\mathbf{I} + m^2\omega^2x^2\mathbf{I} \pm m\omega\hbar\sigma_z, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y \pi_y^\pm \sigma_y \pi_y^\pm &= \sigma_y (p_y \pm im\omega \sigma_z y) \sigma_y (p_y \pm im\omega \sigma_z y) \\
&= (\sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_x y) (\sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_x y) \\
&= \sigma_y p_y \sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_y p_y \sigma_x y \mp m\omega \sigma_x y \sigma_y p_y + m^2 \omega^2 \sigma_x y \sigma_x y \\
&= p_y^2 \mathbf{I} \pm im\omega p_y y \sigma_z \mp im\omega y p_y \sigma_z + m^2 \omega^2 y^2 \mathbf{I} \\
&= p_y^2 \mathbf{I} + m^2 \omega^2 y^2 \mathbf{I} \mp im\omega (y p_y - p_y y) \\
&= p_y^2 \mathbf{I} + m^2 \omega^2 y^2 \mathbf{I} \pm m\omega \hbar \sigma_z,
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x \pi_x^\pm \sigma_y \pi_y^\pm &= \sigma_x (p_x \pm im\omega \sigma_z x) \sigma_y (p_y \pm im\omega \sigma_z y) \\
&= (\sigma_x p_x \pm m\omega \sigma_y x) (\sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_x y) \\
&= \sigma_x p_x \sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_x p_x \sigma_x y \mp m\omega \sigma_y x \sigma_y p_y - m^2 \omega^2 \sigma_y x \sigma_x y \\
&= ip_x p_y \sigma_z \mp m\omega p_x y \mathbf{I} \pm m\omega x p_y \mathbf{I} + im^2 \omega^2 x y \sigma_z \\
&= ip_x p_y \sigma_z \pm m\omega (x p_y - p_x y) \mathbf{I} + im^2 \omega^2 x y \sigma_z,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y \pi_y^\pm \sigma_x \pi_x^\pm &= \sigma_y (p_y \pm im\omega \sigma_z y) \sigma_x (p_x \pm im\omega \sigma_z x) \\
&= (\sigma_y p_y \mp m\omega \sigma_x y) (\sigma_x p_x \pm m\omega \sigma_y x) \\
&= \sigma_y p_y \sigma_x p_x \pm m\omega \sigma_y p_y \sigma_y x \mp m\omega \sigma_x y \sigma_x p_x - m^2 \omega^2 \sigma_x y \sigma_y x \\
&= -ip_y p_x \sigma_z \pm m\omega x p_y \mathbf{I} \mp m\omega p_x y \mathbf{I} - im^2 \omega^2 y x \sigma_z \\
&= -ip_y p_x \sigma_z \pm m\omega (x p_y - p_x y) \mathbf{I} - im^2 \omega^2 y x \sigma_z,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x \pi_x^\pm \sigma_z &= \sigma_x (p_x \pm im\omega \sigma_z x) \sigma_z \\
&= \sigma_x \sigma_z p_x \pm im\omega \sigma_x \sigma_z \sigma_z x \\
&= -i\sigma_y p_x \pm im\omega \sigma_x x,
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y \pi_y^\pm \sigma_z &= \sigma_y (p_y \pm im\omega \sigma_z y) \sigma_z \\
&= \sigma_y \sigma_z p_y \pm im\omega \sigma_y \sigma_z \sigma_z y \\
&= i\sigma_x p_y \pm im\omega \sigma_y y.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Assim, podemos escrever os produtos como

$$\begin{aligned}
&= c\sigma_x \pi_x^\pm (c\sigma_x \pi_x^\pm + c\sigma_y \pi_y^\pm + mc^2 \sigma_z) \\
&= c^2 \sigma_x \pi_x^\pm \sigma_x \pi_x^\pm + c^2 s\sigma_x \pi_x^\pm \sigma_y \pi_y^\pm + mc^3 \sigma_x \pi_x^\pm \sigma_z \\
&= c^2 (p_x^2 \mathbf{I} + m^2 \omega^2 x^2 \mathbf{I}) \pm mc^2 \omega \hbar \sigma_z + c^2 s(ip_x p_y \sigma_z \pm m\omega L_z \mathbf{I} + im^2 \omega^2 x y \sigma_z) \\
&\quad - imc^3 (\sigma_y p_x \mp m\omega \sigma_x x),
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
&= c\sigma_y \pi_y^\pm (c\sigma_x \pi_x^\pm + c\sigma_y \pi_y^\pm + mc^2 \sigma_z) \\
&= c^2 \sigma_y \pi_y^\pm \sigma_y \pi_y^\pm + c^2 s\sigma_y \pi_y^\pm \sigma_x \pi_x^\pm + smc^3 \sigma_y \pi_y^\pm \sigma_z \\
&= c^2 (p_y^2 \mathbf{I} + m^2 \omega^2 y^2 \mathbf{I}) \pm mc^2 \omega \hbar \sigma_z + c^2 s(-ip_y p_x \sigma_z \pm m\omega L_z \mathbf{I} - im^2 \omega^2 y x \sigma_z) \\
&\quad + imc^3 (\sigma_x p_y \pm m\omega \sigma_y y),
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
&= mc^2\sigma_z(c\sigma_x\pi_x^\pm + c\sigma_y\pi_y^\pm + mc^2\sigma_z) \\
&= imc^3\sigma_y\pi_x^\pm - ismc^3\sigma_x\pi_y^\pm + m^2c^4\mathbf{I} \\
&= imc^3\sigma_y(p_x \pm im\omega\sigma_zx) - ismc^3\sigma_x(p_y \pm im\omega\sigma_zy) + m^2c^4\mathbf{I} \\
&= imc^3(\sigma_y p_x \mp m\omega\sigma_x x) - ismc^3(\sigma_x p_y \pm m\omega\sigma_y y) + m^2c^4\mathbf{I}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Realizando a soma, e agrupando os termos iguais

$$\begin{aligned}
&= c^2(p_x^2\mathbf{I} + m^2\omega^2x^2\mathbf{I}) + c^2(p_y^2\mathbf{I} + m^2\omega^2y^2\mathbf{I}) \pm 2mc^2\omega\hbar\sigma_z \\
&= c^2[(p_x^2 + p_y^2) + m^2\omega^2(x^2 + y^2)]\mathbf{I} \pm 2m^2c^4\xi\sigma_z,
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2s(ip_xp_y\sigma_z \pm m\omega L_z\mathbf{I} + im^2\omega^2xy\sigma_z) + c^2s(-ip_y p_x\sigma_z \pm m\omega L_z\mathbf{I} - im^2\omega^2yx\sigma_z) \\
&= \pm 2smc^2\omega L_z\mathbf{I},
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
&= -imc^3(\sigma_y p_x \mp m\omega\sigma_x x) + ismc^3(\sigma_x p_y \pm m\omega\sigma_y y) \\
&+ imc^3(\sigma_y p_x \mp m\omega\sigma_x x) - ismc^3(\sigma_x p_y \pm m\omega\sigma_y y) + m^2c^4\mathbf{I} \\
&= m^2c^4.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Assim, $(H^\pm)^2$, fica

$$(H^\pm)^2 = c^2[(p_x^2 + p_y^2) + m^2\omega^2(x^2 + y^2)]\mathbf{I} \pm 2smc^2\omega L_z\mathbf{I} \pm 2m^2c^4\xi\sigma_z + m^2c^4. \tag{A.20}$$

Agora calculando o termo $\pi_i^\pm \pi_i^\pm$

$$\pi_i^\pm \pi_i^\pm = \pi_x^\pm \pi_x^\pm + \pi_y^\pm \pi_y^\pm \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
\pi_x^\pm \pi_x^\pm &= (p_x \pm im\omega\sigma_zx)(p_x \pm im\omega\sigma_zx) \\
&= p_x^2\mathbf{I} \pm im\omega\sigma_zp_x x \pm im\omega\sigma_zxp_x - m^2\omega^2x^2\mathbf{I} \\
&= (p_x^2 - m^2\omega^2x^2)\mathbf{I} \pm im\omega\sigma_z(p_x x + xp_x),
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
\pi_y^\pm \pi_y^\pm &= (p_y \pm im\omega\sigma_zy)(p_y \pm im\omega\sigma_zy) \\
&= p_y^2\mathbf{I} \pm im\omega\sigma_zp_y y \pm im\omega\sigma_zyp_y - m^2\omega^2y^2\mathbf{I} \\
&= (p_y^2 - m^2\omega^2y^2)\mathbf{I} \pm im\omega\sigma_z(p_y y + yp_y).
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Usando a relação de comutação

$$[p, r] = -i\hbar, \tag{A.24}$$

$$(pr - rp) = -i\hbar, \tag{A.25}$$

$$pr = i\hbar + rp, \tag{A.26}$$

$$pr + rp = -i\hbar + 2rp. \quad (\text{A.27})$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \pi_i^\pm \pi_i^\pm &= \pi_x^\pm \pi_x^\pm + \pi_y^\pm \pi_y^\pm \\ &= (p_x^2 - m^2 \omega^2 x^2) \mathbf{I} \pm im\omega \sigma_z (-i\hbar + 2xp_x) + (p_y^2 - m^2 \omega^2 y^2) \mathbf{I} \pm im\omega \sigma_z (-i\hbar + 2yp_y) \\ &= (p_x^2 + p_y^2) \mathbf{I} - m^2 \omega^2 (x^2 + y^2) \mathbf{I} \pm 2\hbar m \omega \sigma_z \pm 2im\omega \sigma_z (xp_x + yp_y). \end{aligned}$$

Assim, o segundo termo fica

$$c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm = c^2 [(p_x^2 + p_y^2) - m^2 \omega^2 (x^2 + y^2)] \mathbf{I} \pm 2m^2 c^4 \xi \sigma_z \pm 2imc^2 \omega \sigma_z (xp_x + yp_y). \quad (\text{A.28})$$

$$(H^\pm)^2 = c^2 [(p_x^2 + p_y^2) + m^2 \omega^2 (x^2 + y^2)] \mathbf{I} \pm 2smc^2 \omega L_z \mathbf{I} \pm 2m^2 c^4 \xi \sigma_z + m^2 c^4. \quad (\text{A.29})$$

Podemos escrever o termo $(H^\pm)^2 - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm$

$$(H^\pm)^2 - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm = 2m^2 c^2 \omega^2 (x^2 + y^2) \mathbf{I} \pm 2smc^2 \omega L_z \mathbf{I} \mp 2imc^2 \omega (xp_x + yp_y) \sigma_z + m^2 c^4 \mathbf{I}. \quad (\text{A.30})$$

Podemos observar que este termo contribui apenas com termos na diagonal principal. Vamos colocar esse termos em forma de matriz

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{mc^2} ((H_0^\pm)^2 - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm) &= - \begin{pmatrix} 2m\omega^2 \epsilon (x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 2m\omega^2 \epsilon (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \\ &\mp \begin{pmatrix} 2\omega \hbar \epsilon (\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}) & 0 \\ 0 & 2\omega \hbar \epsilon (\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}) \end{pmatrix} \\ &\pm \begin{pmatrix} 2i\omega \epsilon (xp_x + yp_y) & 0 \\ 0 & -2i\omega \epsilon (xp_x + yp_y) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \epsilon mc^2 & 0 \\ 0 & \epsilon mc^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$-\frac{\epsilon}{mc^2} ((H_0^\pm)^2 - c^2 \pi_i^\pm \pi_i^\pm) = \epsilon \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

em que

$$m_{11} = -2m\omega^2 \epsilon (x^2 + y^2) \mp 2i\omega \epsilon (xp_x + yp_y) \mp 2\omega \hbar \epsilon (\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}) - \epsilon mc^2, \quad m_{12} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$m_{22} = -2m\omega^2 \epsilon (x^2 + y^2) \pm 2i\omega \epsilon (xp_x + yp_y) \mp 2\omega \hbar \epsilon (\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}) - \epsilon mc^2, \quad m_{21} = 0. \quad (\text{A.34})$$

Agora vamos escrever esses termos usando os operadores de criação e aniquilação

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right), \quad (\text{A.35})$$

$$\hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right), \quad (\text{A.36})$$

somando

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger), \quad (\text{A.37})$$

subtraindo

$$\hat{p}_x = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger). \quad (\text{A.38})$$

calculando x^2

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x\hat{a}_x + \hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Deixando a expressão escrita em termos do operador número $\hat{N}_x = \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x$

$$[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = \hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x = 1, \quad (\text{A.40})$$

$$\underbrace{\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger} = 1 + \hat{N}_x, \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x\hat{a}_x + \underbrace{\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger}_{1 + \hat{N}_x} + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger), \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_x\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger + 2\hat{N}_x + 1). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

O termo $\hat{y}^2$

$$\begin{aligned} \hat{y}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_y\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger + 2\hat{N}_y + 1). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Assim, o termo que tem a soma $(x^2 + y^2)$ fica

$$2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) = 2m\omega^2\epsilon\left(\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_x\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger + 2\hat{N}_x + 1) + \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_y\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger + 2\hat{N}_y + 1)\right), \quad (\text{A.45})$$

$$2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) = \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger + 2 + 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y). \quad (\text{A.46})$$

O termo que tem L_z está definido em (3.52). O terceiro termo com $(xp_x + yp_y)$,

$$\begin{aligned} \hat{x}\hat{p}_x &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) \right) \left(-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) \right) \\ &= -i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger), \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} \hat{y}\hat{p}_y &= \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger) \right) \left(-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) \right) \\ &= -i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger), \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} 2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) &= 2i\omega\epsilon\left(-i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) - i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger)\right) \\ &= \omega\hbar\epsilon[(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) + (\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger)]. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Fazendo a multiplicação

$$(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) = \hat{a}_x\hat{a}_x - \hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger, \quad (\text{A.50})$$

$$(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) = \hat{a}_y\hat{a}_y - \hat{a}_y\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger. \quad (\text{A.51})$$

Então

$$2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) = \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x\hat{a}_x - \hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger + \hat{N}_x - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y\hat{a}_y - \hat{a}_y\hat{a}_y^\dagger + \hat{N}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger). \quad (\text{A.52})$$

A relação de comutação dos operadores de criação e aniquilação

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger - \hat{N}_i = 1, \quad (\text{A.53})$$

$$\hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger = 1 + \hat{N}_i. \quad (\text{A.54})$$

Ficamos com

$$2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) = \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y^\dagger - 2). \quad (\text{A.55})$$

Assim, os 3 termos da deformação podem ser escritos como

$$2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) = mc^2\xi\epsilon(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 + \hat{a}_y^{\dagger 2} + 2 + 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y), \quad (\text{A.56})$$

$$2mc^2\xi\epsilon(N_s - N_{-s}) \quad (\text{A.57})$$

$$2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) = mc^2\xi\epsilon(\hat{a}_x^2 - \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 - \hat{a}_y^{\dagger 2} - 2). \quad (\text{A.58})$$

Assim, voltando aos termos da diagonal do Hamiltoniano, e somando com o termo do Hamiltoniano (5.11)

$$m_{11} = mc^2(1 + \epsilon) - 2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) \mp 2i\omega\epsilon(xp_x + yp_y) \mp 2s\omega\epsilon L_z - \epsilon mc^2, \quad (\text{A.59})$$

$$m_{22} = -mc^2(1 - \epsilon) - 2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) \pm 2i\omega\epsilon(xp_x + yp_y) \mp 2s\omega\epsilon L_z - \epsilon mc^2. \quad (\text{A.60})$$

Para o sistema JC (+), o termo m_{11}^{JC} , olhando para a soma

$$\begin{aligned} &= -2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) - 2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) \\ &= -\omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 + \hat{a}_y^{\dagger 2} + 2 + 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y) - \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 - \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 - \hat{a}_y^{\dagger 2} - 2) \\ &= -\omega\hbar\epsilon(2(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2) + 2(\hat{N}_x + \hat{N}_y)), \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Escrevendo os operadores de criação e aniquilação quirais, temos

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_{-s}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - is\hat{a}_y^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + is\hat{a}_y^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger + is\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger - is\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^{\dagger 2}), \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_s \hat{a}_{-s} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + is\hat{a}_y) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - is\hat{a}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x \hat{a}_x - is\hat{a}_x \hat{a}_y + is\hat{a}_y \hat{a}_x + \hat{a}_y \hat{a}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2). \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

O operador número pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{N}_s &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - is\hat{a}_y^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + is\hat{a}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + is\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - is\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{N}_x + is(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x) + \hat{N}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{N}_x + \hat{N}_s - \hat{N}_{-s} + \hat{N}_y), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$2\hat{N}_s = \hat{N}_x + \hat{N}_y + \hat{N}_s - \hat{N}_{-s}, \quad (\text{A.65})$$

$$2(\hat{N}_s + \hat{N}_{-s}) = 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y. \quad (\text{A.66})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&= -2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) - 2i\omega\epsilon(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_y) \\
&= -\omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 + \hat{a}_y^{\dagger 2} + 2 + 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y) - \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 - \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 - \hat{a}_y^{\dagger 2} - 2) \\
&= -\omega\hbar\epsilon(2(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2) + 2(\hat{N}_x + \hat{N}_y)), \tag{A.67}
\end{aligned}$$

Voltando ao termo m_{11}^{JC} e, levando em conta que $\hat{a}_s\hat{a}_{-s}|n_s\rangle = 0$

$$m_{11}^{JC} = mc^2 - \omega\hbar\epsilon(2(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2) + 2(\hat{N}_x + \hat{N}_y)) - 2\omega\hbar\epsilon(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}). \tag{A.68}$$

Escrevendo em termo do parâmetro relativístico $\xi = \omega\hbar/mc^2$

$$m_{11}^{JC} = mc^2 - 2mc^2\xi\epsilon(\hat{N}_s + \hat{N}_{-s}) - 2mc^2\xi\epsilon(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}), \tag{A.69}$$

$$m_{11}^{JC} = mc^2 - 4mc^2\xi\epsilon\hat{N}_s \tag{A.70}$$

$$m_{11}^{JC} = mc^2(1 - 4\epsilon\xi\hat{N}_s) \tag{A.71}$$

Para o termo m_{22}^{JC} , somando com o termo da equação (5.11) temos

$$m_{22}^{JC} = -mc^2 - 2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) + 2i\omega\epsilon(xp_x + yp_y) - 2\omega\hbar\epsilon(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}). \tag{A.72}$$

A soma

$$\begin{aligned}
&= -2m\omega^2\epsilon(x^2 + y^2) + 2i\omega\epsilon(xp_x + yp_y) \\
&= -\omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 + \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 + \hat{a}_y^{\dagger 2} + 2 + 2\hat{N}_x + 2\hat{N}_y) + \omega\hbar\epsilon(\hat{a}_x^2 - \hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2 - \hat{a}_y^{\dagger 2} - 2) \\
&= -\omega\hbar\epsilon(2(\hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2) + 2(\hat{N}_x + \hat{N}_y) + 4), \tag{A.73}
\end{aligned}$$

$$m_{22}^{JC} = -mc^2 - \omega\hbar\epsilon(2(\hat{a}_x^{\dagger 2} + \hat{a}_y^2) + 2(\hat{N}_x + \hat{N}_y) + 4) - 2\omega\hbar\epsilon(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}). \tag{A.74}$$

Escrevendo em termo do parâmetro relativístico $\xi = \omega\hbar/mc^2$

$$m_{22}^{JC} = -mc^2 - 2mc^2\epsilon\xi(\hat{N}_s + \hat{N}_{-s}) - 4mc^2\epsilon\xi - 2mc^2\epsilon\xi(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}), \tag{A.75}$$

$$m_{22}^{JC} = -mc^2 - 4mc^2\epsilon\xi\hat{N}_s - 4mc^2\epsilon\xi \tag{A.76}$$

$$m_{22}^{JC} = -mc^2(1 + 4\epsilon\xi(\hat{N}_s + 1)). \tag{A.77}$$

Assim, podemos escrever o Hamiltoniano de JC

$$H_\epsilon^+ = \begin{pmatrix} mc^2(1 - 4\epsilon\xi\hat{N}_s) & -i2mc^2\sqrt{\xi}\hat{a}_s^-(1 - \epsilon) \\ 2imc^2\sqrt{\xi}\hat{a}_s^+(1 + \epsilon) & -mc^2(1 + 4\epsilon\xi(\hat{N}_s + 1)) \end{pmatrix}, \tag{A.78}$$

$$H_\epsilon^+ = g\hbar\hat{a}_s^+\sigma_-(1+\epsilon) + g^*\hbar\hat{a}_s^-\sigma_+(1-\epsilon) + mc^2\sigma_z - 4mc^2\epsilon\xi\hat{N}_s\mathbf{I} - 2mc^2\epsilon\xi\mathbf{I} + 2mc^2\epsilon\xi\sigma_z, \quad (\text{A.79})$$

$$H_\epsilon^+ = g\hbar\hat{a}_s^+\sigma_-(1+\epsilon) + g^*\hbar\hat{a}_s^-\sigma_+(1-\epsilon) + (1+2\epsilon\xi)mc^2\sigma_z - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_s+1)\mathbf{I}. \quad (\text{A.80})$$

Seguindo o mesmo procedimento para o sistema AJC, temos

$$H_\epsilon^- = g\hbar\hat{a}_s^-\sigma_-(1+\epsilon) + g^*\hbar\hat{a}_s^+\sigma_+(1-\epsilon) + (1-2\epsilon\xi)mc^2\sigma_z - 2mc^2\epsilon\xi(2\hat{N}_s+1)\mathbf{I}. \quad (\text{A.81})$$

VALORES ESPERADOS

Neste apêndice iremos calcular o valor esperado para $\hat{J}_z$, o primeiro termo que precisamos calcular é $\langle\psi_{n_s}(t)|\hat{S}_z|\psi_{n_s+2}(t)\rangle$

$$\begin{aligned} |\psi_{n_s+2}(t)\rangle &= e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}f_{n_s+2}(t)|n_s+2,\uparrow\rangle \\ &+ \epsilon e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}f_{n_s+2}(t)c_{n_s+2}|n_s,\uparrow\rangle \\ &- \epsilon e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}f_{n_s+2}(t)c_{n_s+4}|n_s+4,\uparrow\rangle \\ &+ e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}g_{n_s+2}(t)|n_s+3,\downarrow\rangle \\ &+ \epsilon e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}g_{n_s+2}(t)c_{n_s+3}|n_s+1,\downarrow\rangle \\ &- \epsilon e^{i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}g_{n_s+2}(t)c_{n_s+5}|n_s+5,\downarrow\rangle \\ &- \epsilon e^{i\phi_{n_s,\epsilon}t}f_{n_s}(t)c_{n_s+2}|n_s,\uparrow\rangle \\ &- \epsilon e^{i\phi_{n_s,\epsilon}t}g_{n_s}(t)c_{n_s+2}|n_s+1,\downarrow\rangle \\ &+ \epsilon\lambda_{n_s+4}^\epsilon e^{i\phi_{n_s+4,\epsilon}t}f_{n_s+4}(t)c_{n_s+4}|n_s+4,\uparrow\rangle \\ &+ \epsilon\lambda_{n_s+4}^\epsilon e^{i\phi_{n_s+4,\epsilon}t}g_{n_s+4}(t)c_{n_s+4}|n_s+5,\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_{n_s}(t)| &= e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}f_{n_s}^*(t)\langle n_s,\uparrow| \\ &+ \epsilon e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}f_{n_s}^*(t)c_{n_s}\langle n_s-2,\uparrow| \\ &- \epsilon e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}f_{n_s}^*(t)c_{n_s+2}\langle n_s+2,\uparrow| \\ &+ e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}g_{n_s}^*(t)\langle n_s+1,\downarrow| \\ &+ \epsilon e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}g_{n_s}^*(t)c_{n_s+1}\langle n_s-1,\downarrow| \\ &- \epsilon e^{-i\phi_{n_s,\epsilon}t}g_{n_s}^*(t)c_{n_s+3}\langle n_s+3,\downarrow| \\ &- \epsilon e^{-i\phi_{n_s-2,\epsilon}t}f_{n_s-2}^*(t)c_{n_s}\langle n_s-2,\uparrow| \\ &- \epsilon e^{-i\phi_{n_s-2,\epsilon}t}g_{n_s-2}^*(t)c_{n_s}\langle n_s-1,\downarrow| \\ &+ \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}f_{n_s+2}^*(t)c_{n_s+2}\langle n_s+2,\uparrow| \\ &+ \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2,\epsilon}t}g_{n_s+2}^*(t)c_{n_s+2}\langle n_s+3,\downarrow|. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

A multiplicação dos termos $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t)] [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.84}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t)] [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}(t) c_{n_s+2}] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.85}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t)] [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3}] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.86}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t)] [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t) c_{n_s+2}] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.87}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t)] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.88}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t)] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.89}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t) c_{n_s+3}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t)] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.90}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t)] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.91}$$

Fazendo o produto $\langle \psi_{n_s+2}(t) | \hat{S}_z | \psi_{n_s}(t) \rangle$

$$\begin{aligned}
|\psi_{n_s}(t)\rangle = & e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}(t) |n_s, \uparrow\rangle \\
& + \epsilon e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}(t) c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
& - \epsilon e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}(t) c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\
& + e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} g_{n_s}(t) |n_s + 1, \downarrow\rangle \\
& + \epsilon e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} g_{n_s}(t) c_{n_s+1} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\
& - \epsilon e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} g_{n_s}(t) c_{n_s+3} |n_s + 3, \downarrow\rangle \\
& - \epsilon e^{i\phi_{n_s-2}, \epsilon t} f_{n_s-2}(t) c_{n_s} |n_s - 2, \uparrow\rangle \\
& - \epsilon e^{i\phi_{n_s-2}, \epsilon t} g_{n_s-2}(t) c_{n_s} |n_s - 1, \downarrow\rangle \\
& + \epsilon e^{i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} |n_s + 2, \uparrow\rangle \\
& + \epsilon e^{i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} g_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} |n_s + 3, \downarrow\rangle, \tag{A.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{n_s+2}(t) | = & e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} f_{n_s+2}^*(t) \langle n_s + 2, \uparrow | \\
& + \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2} \langle n_s, \uparrow | \\
& - \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+4} \langle n_s + 4, \uparrow | \\
& + e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} g_{n_s+2}^*(t) \langle n_s + 3, \downarrow | \\
& + \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3} \langle n_s + 1, \downarrow | \\
& - \epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+5} \langle n_s + 5, \downarrow | \\
& - \epsilon e^{-i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}^*(t) c_{n_s+2} \langle n_s, \uparrow | \\
& - \epsilon e^{-i\phi_{n_s}, \epsilon t} g_{n_s}^*(t) c_{n_s+2} \langle n_s + 1, \downarrow | \\
& + \epsilon e^{-i\phi_{n_s+4}, \epsilon t} f_{n_s+4}^*(t) c_{n_s+4} \langle n_s + 4, \uparrow | \\
& + \epsilon e^{-i\phi_{n_s+4}, \epsilon t} g_{n_s+4}^*(t) c_{n_s+4} \langle n_s + 5, \downarrow |. \tag{A.93}
\end{aligned}$$

A multiplicação do termo $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\hbar}{2} [e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}(t)] [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] \\
& = \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s}, \epsilon - \phi_{n_s+2}, \epsilon)t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}, \tag{A.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\hbar}{2} [e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}(t)] [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s}, \epsilon t} f_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] \\
& = -\frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}. \tag{A.95}
\end{aligned}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{\hbar}{2} [e^{i\phi_{n_s}, \epsilon t} g_{n_s}(t)] [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2}, \epsilon t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3}] \\
& = -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s}, \epsilon - \phi_{n_s+2}, \epsilon)t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3}, \tag{A.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t)] [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] \\
&= \frac{\hbar}{2} |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.97}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t)] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.98}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2} [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t)] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.99}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t) c_{n_s+3}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t)] \\
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.100}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar}{2} [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t)] \\
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.101}$$

Realizando a soma

$$= \langle \psi_{n_s}(t) | \hat{S}_z | \psi_{n_s+2}(t) \rangle + \langle \psi_{n_s+2}(t) | \hat{S}_z | \psi_{n_s}(t) \rangle, \tag{A.102}$$

os termos com $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} \\
&\quad - \frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&\quad + \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2} \\
&\quad - \frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.103}$$

somando

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+2} (e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t)) \\
&\quad - \hbar\epsilon |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.104}$$

Os termos com $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3} \\
&+ \frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3} \\
&+ \frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.105}$$

somando

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+3} (e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t)) \\
&+ \hbar\epsilon |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.106}$$

Os termos com $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} \\
&\frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2} \\
&\frac{\hbar\epsilon}{2} |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.107}$$

somando

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+2} (e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t)) \\
&+ \hbar\epsilon |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.108}$$

Os termos com $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&+ \frac{\hbar\epsilon}{2} e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.109}$$

somando

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+3} (e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t)) \\
&- \hbar\epsilon |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.110}$$

Agora, somando tudo

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+2} (e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t)) \\
&- \hbar\epsilon |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+3} (e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t)) \\
&+ \hbar\epsilon |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+2} (e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t)) \\
&+ \hbar\epsilon |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&+ \frac{\hbar\epsilon}{2} c_{n_s+3} (e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) + e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t)) \\
&- \hbar\epsilon |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}, \tag{A.111}
\end{aligned}$$

ficamos com

$$= \hbar\epsilon c_{n_s+2} (|f_{n_s+2}(t)|^2 - |g_{n_s+2}(t)|^2) - \hbar\epsilon c_{n_s+2} (|f_{n_s}(t)|^2 - |g_{n_s}(t)|^2). \tag{A.112}$$

Assim, o valor esperado fica

$$\begin{aligned}
\langle S_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n_s}}{n_s!} [(f_{n_s}(t))^2 - (g_{n_s}(t))^2] \\
&+ \hbar\epsilon e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n_s+2} c_{n_s+2}}{\sqrt{n_s!(n_s+2)!}} (|f_{n_s+2}(t)|^2 - |g_{n_s+2}(t)|^2) \\
&- \hbar\epsilon e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n_s+2} c_{n_s+2}}{\sqrt{n_s!(n_s+2)!}} (|f_{n_s}(t)|^2 - |g_{n_s}(t)|^2).
\end{aligned}$$

Que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle S_z^\epsilon \rangle &= \frac{\hbar}{2} - \hbar \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s} e^{-\langle n_s \rangle}}{n_s!} \mathcal{S}_{n_s}(t) \\
&+ \hbar\epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} [\mathcal{S}_{n_s}(t) - \mathcal{S}_{n_s+2}(t)], \tag{A.113}
\end{aligned}$$

em que

$$\mathcal{S}_{n_s}(t) = \frac{4\xi(n_s+1)}{[1+4\xi(n_s+1)]} \sin^2(\omega_{n_s} t). \tag{A.114}$$

Agora o momento angular L_z

$$L_z = \hbar(\hat{N}_s - \hat{N}_{-s}). \tag{A.115}$$

Fazendo a multiplicação $\langle \psi_{n_s+2}(t) | \hat{N}_s | \psi_{n_s}(t) \rangle$, o termo $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar n_s [e^{i\phi_{n_s,\epsilon}t} f_{n_s}(t)] [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2,\epsilon}t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] \\
&= \hbar\epsilon n_s e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}, \tag{A.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar n_s [e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}(t)] [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] \\
&= -\hbar \epsilon n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.117}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 1) [e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t)] [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3}] \\
&= \hbar \epsilon (n_s + 1) e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.118}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 1) [e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t)] [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] \\
&= -\hbar \epsilon (n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.119}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 2) [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t)] \\
&= -\hbar \epsilon (n_s + 2) e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.120}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 2) [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t)] \\
&= \hbar \epsilon (n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.121}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 3) [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t) c_{n_s+3}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t)] \\
&= -\hbar \epsilon (n_s + 3) e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.122}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 3) [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] [e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t)] \\
&= \hbar \epsilon (n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.123}$$

Agora, fazendo a multiplicação do termo $\langle \psi_{n_s}(t) | \hat{N}_s | \psi_{n_s+2}(t) \rangle$ o termo $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar n_s [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t)] [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}] \\
&= \hbar n_s e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar n_s [e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t)] [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}(t) c_{n_s+2}] \\
&= -\hbar n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.125}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 1) [e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t)] [\epsilon e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3}] \\
&= \hbar \epsilon (n_s + 1) e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3},
\end{aligned} \tag{A.126}$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar(n_s + 1) [e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t)] [-\epsilon e^{i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}(t) c_{n_s+2}] \\
&= -\hbar \epsilon (n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.127}$$

A multiplicação do termo $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned} &= \hbar(n_s + 2) [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} f_{n_s}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t)] \\ &= -\hbar\epsilon(n_s + 2) e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2}, \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

$$\begin{aligned} &= \hbar(n_s + 2) [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} f_{n_s+2}(t)] \\ &= \hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}. \end{aligned} \quad (\text{A.129})$$

A multiplicação do termo $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned} &= \hbar(n_s + 3) [-\epsilon e^{-i\phi_{n_s, \epsilon} t} g_{n_s}^*(t) c_{n_s+3}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t)] \\ &= -\hbar\epsilon(n_s + 3) e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3}, \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

$$\begin{aligned} &= \hbar(n_s + 3) [\epsilon e^{-i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2}] [e^{i\phi_{n_s+2, \epsilon} t} g_{n_s+2}(t)] \\ &= \hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}. \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

A soma dos termos

$$\langle \psi_{n_s+2}(t) | \hat{N}_s | \psi_{n_s}(t) \rangle + \langle \psi_{n_s}(t) | \hat{N}_s | \psi_{n_s+2}(t) \rangle, \quad (\text{A.132})$$

os termos de $|n_s, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned} &= \hbar\epsilon n_s e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2} \\ &\quad - \hbar\epsilon n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\ &\quad + \hbar n_s e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} \\ &\quad - \hbar n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}, \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

$$\begin{aligned} &= \hbar\epsilon n_s c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\ &\quad - 2\hbar\epsilon n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}. \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

Os termos de $|n_s + 1, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned} &= \hbar\epsilon(n_s + 1) e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3} \\ &\quad - \hbar\epsilon(n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\ &\quad + \hbar\epsilon(n_s + 1) e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3} \\ &\quad - \hbar\epsilon(n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}, \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

$$\begin{aligned} &= \hbar\epsilon(n_s + 1) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\ &\quad - 2\hbar\epsilon(n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2}. \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

Os termos de $|n_s + 2, \uparrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar\epsilon(n_s + 2)e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+2} \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 2)e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) c_{n_s+2} \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.137}$$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar\epsilon(n_s + 2) c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&+ 2\hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.138}$$

Os termos de $|n_s + 3, \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar\epsilon(n_s + 3)e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) c_{n_s+3} \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 3)e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) c_{n_s+3} \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2},
\end{aligned} \tag{A.139}$$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar\epsilon(n_s + 3) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&+ 2\hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.140}$$

Agora, somando tudo

$$\begin{aligned}
&= \hbar\epsilon n_s c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&- 2\hbar\epsilon n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 1) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&- 2\hbar\epsilon(n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 2) c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&+ 2\hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 3) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&+ 2\hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2}.
\end{aligned} \tag{A.141}$$

Separando os termos com exponencial

$$\begin{aligned}
&= -2\hbar\epsilon n_s |f_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} - 2\hbar\epsilon(n_s + 1) |g_{n_s}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&+ 2\hbar\epsilon(n_s + 2) |f_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} + 2\hbar\epsilon(n_s + 3) |g_{n_s+2}(t)|^2 c_{n_s+2} \\
&+ \hbar\epsilon n_s c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&+ \hbar\epsilon(n_s + 1) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 2) c_{n_s+2} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s + 3) c_{n_s+3} (e^{i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s, \epsilon} - \phi_{n_s+2, \epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)).
\end{aligned} \tag{A.142}$$

Colocando em evidencia os termos que possuem os mesmos c_{n_s}

$$\begin{aligned}
&= -2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s|f_{n_s}(t)|^2 + (n_s+1)|g_{n_s}(t)|^2) \\
&+ 2\hbar\epsilon c_{n_s+2}((n_s+2)|f_{n_s+2}(t)|^2 + (n_s+3)|g_{n_s+2}(t)|^2) \\
&+ \hbar\epsilon n_s c_{n_s+2}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&+ \hbar\epsilon(n_s+1)c_{n_s+3}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s+2)c_{n_s+2}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s+3)c_{n_s+3}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)).
\end{aligned} \tag{A.143}$$

Aplicando o fato que $|f(t)|^2 + |g(t)|^2 = 1$

$$\begin{aligned}
&= -2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + |g_{n_s}(t)|^2) \\
&+ 2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + 2 + |g_{n_s+2}(t)|^2) \\
&+ \hbar\epsilon n_s c_{n_s+2}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&+ \hbar\epsilon(n_s+1)c_{n_s+3}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s+2)c_{n_s+2}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&- \hbar\epsilon(n_s+3)c_{n_s+3}(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)).
\end{aligned} \tag{A.144}$$

Colocando em evidencia o termos iguais no restante

$$\begin{aligned}
&= -2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + |g_{n_s}(t)|^2) \\
&+ 2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + 2 + |g_{n_s+2}(t)|^2) \\
&+ \hbar\epsilon(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t))(n_s c_{n_s+2} - (n_s+2)c_{n_s+2}) \\
&+ \hbar\epsilon(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t))((n_s+1)c_{n_s+3} - (n_s+3)c_{n_s+3}).
\end{aligned} \tag{A.145}$$

Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
&= -2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + |g_{n_s}(t)|^2) \\
&+ 2\hbar\epsilon c_{n_s+2}(n_s + 2 + |g_{n_s+2}(t)|^2) \\
&- 2c_{n_s+2}\hbar\epsilon(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t)) \\
&- 2c_{n_s+3}\hbar\epsilon(e^{i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\phi_{n_s,\epsilon}-\phi_{n_s+2,\epsilon})t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t)).
\end{aligned} \tag{A.146}$$

Podemos arrumar os dois últimos termos, fazendo

$$\Phi^\epsilon = \phi_{n_s}^\epsilon - \phi_{n_s+2}^\epsilon = -8m^2 c^4 \xi \epsilon, \tag{A.147}$$

$$e^{i(\Phi^\epsilon)t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\Phi^\epsilon)t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t), \tag{A.148}$$

$$[f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) + f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t)] \cos(\Phi^\epsilon t) + i[f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) - f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t)] \sin(\Phi^\epsilon t). \quad (\text{A.149})$$

Fazendo $\sqrt{1 + 4\xi(n_s + 1)} = a_{n_s}$, a multiplicação

$$f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) = \left(\cos(\omega_{n_s}t) - \frac{i \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} \right) \left(\cos(\omega_{n_s+2}t) + \frac{i \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}} \right), \quad (\text{A.150})$$

$$\begin{aligned} f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) &= \cos(\omega_{n_s}t) \cos(\omega_{n_s+2}t) + \frac{i \cos(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}} \\ &\quad - \frac{i \cos(\omega_{n_s+2}t) \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} + \frac{\sin(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s} a_{n_s+2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

Outro termo

$$f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t) = \left(\cos(\omega_{n_s}t) + \frac{i \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} \right) \left(\cos(\omega_{n_s+2}t) - \frac{i \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}} \right), \quad (\text{A.152})$$

$$\begin{aligned} f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t) &= \cos(\omega_{n_s}t) \cos(\omega_{n_s+2}t) - \frac{i \cos(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}} \\ &\quad + \frac{i \cos(\omega_{n_s+2}t) \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} + \frac{\sin(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s} a_{n_s+2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.153})$$

Somando

$$f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) + f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t) = 2 \cos(\omega_{n_s}t) \cos(\omega_{n_s+2}t) + \frac{2 \sin(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s} a_{n_s+2}}. \quad (\text{A.154})$$

Subtraindo

$$i[f_{n_s}(t)f_{n_s+2}^*(t) - f_{n_s}^*(t)f_{n_s+2}(t)] = \frac{2 \cos(\omega_{n_s+2}t) \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} - \frac{2 \cos(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}}. \quad (\text{A.155})$$

Assim, chamamos os termos

$$w_{n_s}(t) = 2 \cos(\omega_{n_s}t) \cos(\omega_{n_s+2}t) + \frac{2 \sin(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s} a_{n_s+2}}, \quad (\text{A.156})$$

$$s_{n_s}(t) = \frac{2 \cos(\omega_{n_s+2}t) \sin(\omega_{n_s}t)}{a_{n_s}} - \frac{2 \cos(\omega_{n_s}t) \sin(\omega_{n_s+2}t)}{a_{n_s+2}}. \quad (\text{A.157})$$

De modo que ficamos com

$$\begin{aligned} &= e^{i(\Phi^\epsilon)t} f_{n_s}(t) f_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\Phi^\epsilon)t} f_{n_s}^*(t) f_{n_s+2}(t) \\ &= w_{n_s}(t) \cos(\Phi^\epsilon t) + s_{n_s}(t) \sin(\Phi^\epsilon t). \end{aligned} \quad (\text{A.158})$$

O último termo

$$\begin{aligned}
&= e^{i(\Phi^\epsilon)t} g_{n_s}(t) g_{n_s+2}^*(t) + e^{-i(\Phi^\epsilon)t} g_{n_s}^*(t) g_{n_s+2}(t) \\
&= g_{n_s}(t) g_{n_s+2}(t) (e^{i\Phi^\epsilon t} + e^{-i\Phi^\epsilon t}) \\
&= 2g_{n_s}(t) g_{n_s+2}(t) \cos(\Phi^\epsilon t) \\
&= p_{n_s}(t).
\end{aligned} \tag{A.159}$$

Assim, o valor esperado para o momento angular na direção z

$$\begin{aligned}
\langle L_z^\epsilon \rangle &= \hbar \langle n_s \rangle + \hbar \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s} e^{-\langle n_s \rangle}}{n_s!} \mathcal{S}_{n_s}(t) \\
&\quad - \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} [\mathcal{S}_{n_s}(t) - \mathcal{S}_{n_s+2}(t)] \\
&\quad + \hbar \epsilon \sum_{n_s=0}^{\infty} \frac{\langle n_s \rangle^{n_s+1} e^{-\langle n_s \rangle}}{n!} \mathcal{L}_{n_s}^\epsilon(t),
\end{aligned} \tag{A.160}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{n_s}^\epsilon(t) &= \frac{4c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} - \frac{2c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} w_{n_s}(t) \cos(\Phi^\epsilon t) \\
&\quad - \frac{2c_{n_s+2}}{\sqrt{(n_s+2)!}} s_{n_s}(t) \sin(\Phi^\epsilon t) - \frac{2c_{n_s+3}}{\sqrt{(n_s+2)!}} p_{n_s}(t) \cos(\Phi^\epsilon t).
\end{aligned} \tag{A.161}$$