

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS**

HENRIQUE GABRIEL GUTIERRE

DINAMICA QUÂNTICA COM SIMETRIA $SU(2)$ E $SU(1, 1)$

PONTA GROSSA

2026

HENRIQUE GABRIEL GUTIERRE

DINAMICA QUÂNTICA COM SIMETRIA $SU(2)$ E $SU(1, 1)$

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro

PONTA GROSSA

2026

G984 Gutierre, Henrique Gabriel
Dinâmica quântica com simetrias $SU(2)$ e $SU(1,1)$ / Henrique Gabriel Gutierre. Ponta Grossa, 2026.
104 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro.

1. Simetria dinâmica. 2. Operador de evolução temporal. 3. Modelo de Jaynes-Cummings. I. Castro, Antônio Sérgio Magalhães de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

HENRIQUE GABRIEL GUTIERRE

DINÂMICA QUÂNTICA COM SIMETRIAS $SU(2)$ E $SU(1,1)$

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física Teórica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador -

Documento assinado digitalmente
 **ANTONIO SERGIO MAGALHAES DE CASTRO**
Data: 27/03/2026 16:20:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Antonio Sérgio Magalhães de Castro – UEPG – Presidente

Documento assinado digitalmente
 **FABIANO MANOEL DE ANDRADE**
Data: 27/03/2026 18:54:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Fabiano Manoel de Andrade – UEPG – Titular

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL ZINI ROSSATTO**
Data: 27/03/2026 16:36:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Daniel Zini Rossatto – UNESP – Titular

Ponta Grossa, 27 de março de 2026

*Dedico este trabalho a todos aqueles que desejam aprofundar seus conhecimentos em mecânica
quântica.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Professor Dr. Antonio Sérgio, pela orientação e por todo conhecimento compartilhado comigo. Agradeço também a Universidade Estadual de Ponta Grossa por possibilitar a realização deste trabalho.

Sou grato também por cada professor que tive em minha vida, desde a escola primária até a pós-graduação. Cada um deles desempenhou um papel muito importante em minha jornada até aqui, seja pelo conhecimento compartilhado ou pelo encorajamento.

“Descobri que são as pequenas coisas, as atitudes diárias de pessoas comuns que mantêm o mal afastado. Simples atos de bondade e amor. ”
Gandalf (J.R.R. Tolkien, O Hobbit)

RESUMO

Nesta dissertação, apresentam-se os principais resultados de uma revisão dos procedimentos teóricos e numéricos para o tratamento dinâmico de sistemas quânticos não estacionários com simetrias dinâmicas $SU(2)$. Como modelo de estudo, considera-se um sistema quântico de dois níveis de "spin $1/2$ ", sujeito a um campo magnético temporalmente dependente, com simetria dinâmica $SU(2)$. Analisam-se os aspectos conceituais e operacionais associados aos diferentes tipos de parametrizações admissíveis para o operador de evolução temporal do sistema, aplicadas para obter a descrição exata da dinâmica de "spin $1/2$ " sob a ação do campo magnético $\vec{B}(t)$. A partir das soluções, é possível identificar dois tipos de parametrização: a do tipo I correspondente a uma solução em um contexto dinâmico mais amplo, porém dependente de soluções de uma equação integro-diferencial, que até o presente momento não foi resolvida analiticamente; A do tipo II diz respeito à solução com uma condição de ressonância generalizada que estabelece uma relação de vínculo entre os diferentes parâmetros do operador hamiltoniano associado, apresentada como uma solução restritiva. Para a parametrização do tipo II, é possível discutir diferentes cenários dinâmicos que obedecem à condição de ressonância generalizada, para os quais a dinâmica do "spin" é perfeitamente descrita. Além disso, o estudo do modelo de dois níveis foi estendido para a simetria dinâmica $SU(1, 1)$, visando à compreensão dos aspectos conceituais e operacionais da dinâmica de sistemas descritos por operadores hamiltonianos não-hermitianos. Finalmente, como uma aplicação das soluções conhecidas para a dinâmica do grupo $SU(2)$, considera-se a análise da dinâmica do modelo de Jaynes-Cummings para um caso onde os parâmetros do operador hamiltoniano dependem explicitamente do tempo.

Palavras-chave: Simetria dinâmica. Operador de evolução temporal. Modelo de Jaynes-Cummings.

ABSTRACT

This dissertation presents the main results of a review of theoretical and numerical procedures for the dynamic treatment of non-stationary quantum systems with $SU(2)$ dynamic symmetries. As a model of study, we consider a quantum system of two levels of spin $1/2$, subject to a time-dependent magnetic field, with dynamic symmetry $SU(2)$. The conceptual and operational aspects associated with the different types of admissible parameterisations for the system's time evolution operator are analysed, applied to obtain an exact description of the dynamics of spin $1/2$ under the action of the magnetic field $\vec{B}(t)$. From the solutions, it is possible to identify two types of parameterisation: type I corresponds to a solution in a broader dynamic context, but depends on solutions to an integro-differential equation, which has not yet been solved analytically. Type II concerns the solution with a generalised resonance condition that establishes a link between the different parameters of the associated Hamiltonian operator, presented as a restrictive solution. For type II parameterisation, it is possible to discuss different dynamic scenarios that obey the generalised resonance condition, for which the dynamics of the spin are perfectly described. Furthermore, the study of the two-level model was extended to the dynamic symmetry $SU(1, 1)$, aiming at understanding the conceptual and operational aspects of the dynamics of systems described by non-Hermitian Hamiltonian operators. Finally, as an application of the known solutions for the dynamics of the $SU(2)$ group, we consider the analysis of the dynamics of the Jaynes-Cummings model for a case where the parameters of the Hamiltonian operator depend explicitly on time.

Keywords: Dynamical symmetry. Time evolution operator. Jaynes-Cummings model

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 Gráfico de $P_e(t)$ para valores de Δ a partir da equação (4.44), assumindo o valor de $\eta = 1$ na escala de tempo dinâmica $\omega_R t$. A curva azul refere-se ao valor de $\Delta = 0$, correspondendo a condição de ressonância, enquanto as condições de dissonância são dadas pelas curvas laranja ($\Delta = 0.5$) com menor dissonância e verde ($\Delta = 1$) com maior dissonância. 63
- Figura 2 Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional $\tau = \xi_0 t$, começando com o campo na superposição ímpar do estado coerente (4.104), o que significa $s = -1$. Para $\bar{n} = 5$ e $\alpha = |\alpha|$, o átomo no estado excitado, com $\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$, e considerando $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\mu = 5$ (painel (a)) e $\mu = 10$ (painel (b)), obtêm-se as curvas azul e verde que correspondem, respectivamente, a $\delta = 5$ e $\delta = 10$. Para o átomo no estado fundamental, $\zeta_e = 0$, $\zeta_g = 1$, as curvas marrom e magenta correspondem a $\delta = 5$ e $\delta = 10$. Além disso, as curvas preta e vermelha correspondem, respectivamente, a $\delta = 5$ e a $\delta = 10$, com $\zeta_e = \zeta_g = \sqrt{2}/2$, o átomo em um estado de superposição. Aqui, a série trunca-se em (4.112) no estado de Fock correspondente a $n = 100$ 80
- Figura 3 Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional $\tau = \xi_0 t$, começando com o campo na superposição ímpar do estado coerente (4.104), o que significa $s = -1$. Para $\bar{n} = 10$ e $\alpha = |\alpha|$, o átomo no estado de superposição com $\zeta_e = \zeta_g = \sqrt{2}/2$ assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, obtêm-se as curvas azul e vermelha que correspondem, respectivamente, a $\mu = 5$ e $\mu = 10$. Série do estado de Fock está truncada em $n = 500$ 81
- Figura 4 O número médio de fótons $\bar{n}_1(\tau)$ para o modo da cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e parâmetro universal $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104). 82
- Figura 5 O fator de Mandel $\mathcal{Q}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104). 83
- Figura 6 O fator de Mandel $\mathcal{Q}(t)$ para o campo no modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 10$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104). 84

Figura 7	A compressão do estado quântico no modo de cavidade $\mathcal{Z}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).	85
Figura 8	A compressão do estado quântico no modo de cavidade $\mathcal{Z}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 10$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).	86
Figura 9	Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$	90
Figura 10	Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental com o estado do campo na superposição par do estado coerente (4.104), onde $s = 1$. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$	91
Figura 11	Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um valor elevado do número médio de fótons $\bar{n} = 50$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$	91
Figura 12	Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva vermelha corresponde a $\mu = 1$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$	93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Descrição de exemplos de GL	24
----------	---------------------------------------	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GL	Grupo de Lie
AL	Álgebra de Lie
JCDT	Jaynes-Cummings Dependente do Tempo
JCIT	Jaynes-Cummings Independente do Tempo
CC	Coeficiente de Compressão
CQI	Cavidade Quântica Ideal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	ELEMENTOS DA TEORIA DE GRUPOS E ÁLGEBRAS EM FÍSICA QUÂNTICA	16
2.1	UM SISTEMA QUÂNTICO ESTACIONÁRIO NO ESPAÇO DE HILBERT	16
2.2	CONCEITOS DA TEORIA DE GRUPOS	19
2.3	GRUPOS DE LIE	22
2.4	TEORIA DE REPRESENTAÇÕES	24
2.5	ÁLGEBRAS DE LIE	26
2.6	ÁLGEBRA DE LIE DE UM GRUPO UNITÁRIO	28
3	SISTEMAS QUÂNTICOS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(2)$ E $SU(1, 1)$	33
3.1	SISTEMA DE DOIS NÍVEIS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(2)$	33
3.1.1	Parametrização tipo I - simetria dinâmica $SU(2)$	37
3.1.2	Parametrização tipo II - simetria dinâmica $SU(2)$	40
3.2	SISTEMA DE DOIS NÍVEIS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(1, 1)$. .	45
3.2.1	Parametrização tipo I - simetria dinâmica $SU(1, 1)$	48
3.2.2	Parametrização do tipo II - simetria dinâmica $SU(1, 1)$	51
4	INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA	57
4.1	A DINÂMICA DO ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	57
4.1.1	Átomo de dois níveis e campo eletromagnético clássico	59
4.2	A DINÂMICA DO ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	64
4.3	MODELO DE JAYNES-CUMMINGS DEPENDENTE DO TEMPO	68
4.4	SOLUÇÃO ANALÍTICA NO MODELO DE JAYNES-CUMMINGS DEPENDENTE DO TEMPO	71
4.5	UM EXEMPLO CONCRETO FORA DA RESSONÂNCIA	79
4.6	A ESCALA DE TEMPO DINÂMICO PARA O MODELO DE JC DT	82
4.6.1	A dinâmica na condição de ressonância	88
4.6.2	Uma parametrização alternativa na ressonância	92
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	94
	REFERÊNCIAS	97

1 INTRODUÇÃO

A física quântica tem um papel relevante nos dias de hoje como teoria fundamental para uma compreensão disruptiva da natureza e teve como marco inicial a conferência de Solvay, na qual grandes mentes, presentes no início do século XX, estabeleceram o ponto de partida para a consolidação de suas bases conceituais e operacionais (1, 2). A mecânica quântica revolucionou a compreensão da teoria de campos quando associada à teoria da relatividade (3, 4), bem como impulsionou o desenvolvimento tanto da física nuclear (5) quanto da compreensão do funcionamento microscópico da matéria. O seu papel no contexto do estado sólido implicou um grande avanço na teoria de semicondutores, alavancando o desenvolvimento da eletrônica e da microeletrônica, de grande relevância para o desenvolvimento de computadores de alta performance. Isto contribuiu significativamente para a capacidade de processamento de informações e de computação clássicas, promovendo o rápido desenvolvimento de diversas áreas da ciência e aprimorando a interdisciplinaridade no cenário científico. Além disso, a combinação da mecânica quântica com a teoria estatística permitiu o avanço na compreensão da natureza intrínseca das partículas, promovendo avanços na teoria de supercondutividade e superfluidez, bem como outros fenômenos da física moderna. Sistemas magnéticos e ópticos foram sistematicamente estudados no contexto da mecânica quântica, dando início a uma revolução tecnológica na teoria da informação quântica e na computação quântica (6).

Para a implementação da informação quântica e da computação quântica em dispositivos microscópicos, tornou-se essencial o controle preciso da dinâmica quântica bem como de operações quânticas em íons aprisionados, cavidades ópticas, sistemas magnéticos, "squid" supercondutores, átomos de N níveis, entre outros. Há uma grande diversidade de sistemas quânticos a serem estudados, e métodos analíticos e computacionais são essenciais para compreender como esses sistemas se comportam no tempo e podem ser controlados com alta precisão. Fenômenos como tunelamento quântico, transição de fase quântica, criação de emaranhamento, troca de estados quânticos e controle de processos de perda de coerência quântica podem ser descritos de forma exata e aproximada, desde que métodos matemáticos adequados sejam desenvolvidos para a análise de sistemas quânticos (7).

A mecânica quântica é uma teoria que descreve a natureza de uma forma que contraria o senso de realidade, quando comparada às descrições intuitivas observadas no comportamento dos sistemas clássicos. Assim, a sua praticidade operacional está fundamentada na existência de uma formulação matemática consistente, envolvendo a análise funcional e a teoria de representações por meio de matrizes, a partir das quais se podem inferir resultados significativos e corretos, visando ao interesse tecnológico: a mecânica quântica é a base da engenharia quântica, que dominará o século XXI (8). De qualquer livro-texto de mecânica quântica (9, 10), pode-se facilmente inferir que a mecânica quântica é essencialmente uma teoria de representações de operadores que atuam no espaço de estados normados, conhecido como espaço de Hilbert, e a teoria pode ser tratada do ponto de vista analítico (11), algébrico (12) e geométrico (13).

Portanto, neste cenário, esta dissertação serviu de ponto de partida para o estudo de alguns aspectos do formalismo matemático que fundamenta a teoria de representações e para a identificação dos elementos necessários para determinar o comportamento dinâmico de um sistema. Obviamente, não se trata de um estudo aprofundado dos conceitos necessários, mas sim de um primeiro contato com alguns elementos matemáticos para tratar problemas da dinâmica quântica (visando ao controle temporal de sistemas quânticos simples), intercalando conceitos relacionados a estruturas algébricas e analíticas que surgem na estrutura formal da mecânica quântica. Neste sentido, consideraram-se conceitos associados à teoria de grupos, às álgebras de Lie e à teoria de representações em sistemas de baixa dimensionalidade, o que facilita o tratamento analítico da dinâmica quântica. Para isso, considerou uma pequena introdução aos conceitos de grupos no seu sentido matemático, visando compreender como os conceitos de grupo de Lie e de álgebra de Lie surgem em sistemas quânticos. Para tal propósito, consideraram-se dois sistemas particulares em espaços de Hilbert bidimensionais com simetrias dinâmicas $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, para os quais identificaram-se as representações adequadas do operador de evolução temporal, necessárias à descrição completa da dinâmica quântica. Nestas simetrias, estudou-se como obter soluções analíticas exatas para os elementos de matrizes do operador de evolução temporal.

Ressalta-se que o presente estudo se baseia em resultados de estudos realizados em (14), onde foi elaborada uma proposta de se obter soluções analíticas para operadores hamiltonianos dependentes do tempo com simetrias dinâmicas $SU(2)$. Este trabalho é uma extensão do problema seminal de Rabi (15), fundamental para a compreensão da dinâmica de "spin" sob ação de um campo magnético clássico, um sistema com simetria dinâmica $SU(2)$ e associado à álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Incluir a dependência temporal arbitrária no modelo de Rabi semiclássico resulta no chamado modelo semiclássico de Rabi generalizado. Resultados fundamentais caracterizando a dinâmica de um sistema de "spin" no problema de Rabi, para dependências temporais arbitrárias, são apresentados em (16), com extensões para o caso de simetria dinâmica $SU(1, 1)$ em (17). Complementando os resultados já obtidos nos referidos estudos, nesta dissertação considera-se um estudo analítico das parametrizações do operador de evolução temporal com simetria $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, por meio de um tratamento analítico diferente do proposto em (16, 17), obtendo resultados similares.

Além disso, considerando o problema da interação da radiação com a matéria, fez-se um breve estudo do modelo de Jaynes-Cummings (18), modelo fundamental para compreender o funcionamento do laser, um sistema físico de grande relevância para o avanço tecnológico para a implementações tecnológicas quânticas. Trata-se de um modelo descrevendo a interação de um átomo de dois níveis (associado a álgebra $\mathfrak{su}(2)$) com um modo quantizado de uma cavidade eletromagnética com grau de liberdade associado à álgebra de Weyl-Heisenberg. Neste sistema, baseado nos estudos realizados em (19), é identificada uma estrutura de subespaços invariantes devido à existência de quantidades conservadas, de modo que o operador de evolução temporal, descrevendo a evolução temporal do vetor de estado do sistema, pode ser escrito como uma composição de sistemas com simetria $SU(2)$ sob ação de um campo semiclássico, similar ao modelo de Rabi generalizado. Neste problema, considera-se a aplicação das soluções analíticas

para o problema semiclássico de Rabi já previamente determinadas considerando o modelo de Jaynes-Cummings onde o operador hamiltoniano depende explicitamente do tempo. Neste caso, fez-se um estudo dos resultados obtidos em (19) confirmando o comportamento temporal da dinâmica de população atômica, complementando os resultados com a análise das propriedades relativas ao modo da cavidade.

Esta dissertação está estruturada como se segue. No capítulo (2), faz-se uma revisão dos conceitos de grupos e de álgebras de Lie, e apresentam-se os elementos essenciais da teoria de representações necessários ao estudo de sistemas quânticos. No capítulo (3), considerando-se um sistema de dois níveis com simetrias dinâmicas $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, apresenta-se um tratamento analítico diferenciado original para a construção de soluções analíticas do operador de evolução temporal, uma proposta alternativa ao método desenvolvido em (14) e sistematizado em (16, 17). No capítulo (4), revisa-se o modelo de Jaynes-Cummings independente do tempo, analisando-se como ele surge no processo de quantização do campo eletromagnético da cavidade. Considerando o modelo de Jaynes-Cummings dependente do tempo, analisa-se a estrutura do modelo apresentado em (19), observando-se a importância do conceito de simetria e da estrutura de subespaços invariantes, bem como a estrutura do grupo $SU(2)$ do modelo semiclássico de Rabi generalizado surge na construção da solução do modelo de Jaynes-Cummings dependente do tempo. Para um exemplo específico, num contexto matemático, analisa-se a dinâmica do modelo, considerando o campo com estados pares e ímpares coerentes. Uma breve discussão de solução numérica é considerada. No capítulo (5), apresenta-se uma breve conclusão referente aos problemas abordados nesta dissertação e apontam-se caminhos futuros.

2 ELEMENTOS DA TEORIA DE GRUPOS E ÁLGEBRAS EM FÍSICA QUÂNTICA

Neste capítulo, faz-se uma breve revisão dos elementos essenciais para a descrição da dinâmica quântica de um sistema de dois níveis de energia no contexto da mecânica quântica. Apresentam-se os elementos conceituais necessários para compreender como os conceitos de grupos e álgebras se encontram no formalismo da mecânica quântica. Não se tem a pretensão de uma abordagem ampla sobre toda a formulação existente na literatura, tratando da formulação da teoria de grupos no contexto da mecânica quântica, o que demandaria uma extensa revisão da vasta literatura desenvolvida nos últimos cem anos, a partir do advento da mecânica quântica. O foco principal está em identificar os conceitos fundamentais e os elementos operacionais da teoria de grupos e álgebras de Lie presentes na mecânica quântica, que, no seu sentido moderno, pode ser interpretada essencialmente como uma teoria de representações de operadores atuando no espaço de estados de um sistema quântico (20).

2.1 UM SISTEMA QUÂNTICO ESTACIONÁRIO NO ESPAÇO DE HILBERT

Um sistema quântico estacionário é aquele cuja descrição física não muda no tempo. Do ponto de vista formal, sua evolução temporal não altera as probabilidades associadas às medições de quaisquer observáveis (10). No contexto da mecânica quântica um sistema de dois níveis estacionário está descrito por um operador hamiltoniano H que não depende explicitamente do tempo, sendo um operador hermitiano, e está caracterizado pelo seu correspondente espaço de Hilbert ter duas dimensões, isto é, a base desse sistema pode ser representada por dois autoestados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ do operador hamiltoniano H , e cujos autovalores são os números reais $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, respectivamente (10). Uma vez que o operador H é hermitiano, os autovalores $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são números reais, em concordância com os postulados da mecânica quântica (10). Isto equivale a dizer que as equações de autovalores são representadas na forma

$$H |1\rangle = \mathcal{E}_1 |1\rangle, \quad H |2\rangle = \mathcal{E}_2 |2\rangle, \quad (2.1)$$

para as quais os autovetores $|1\rangle$ e $|2\rangle$ formam uma base ortonormal, isto é (10):

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Considerando o caso estacionário, no qual os parâmetros do operador hamiltoniano são independentes do tempo, o hamiltoniano H tem sua representação matricial na forma (9):

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

na qual os elementos de matrizes são definidos como $h_{ij} = \langle i|H|j\rangle$. Um vetor de estado para um sistema de dois níveis pode ser escrito como uma combinação linear (21) dada por

$$|\psi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle, \quad (2.4)$$

na qual os coeficientes $c_1 = \langle 1|\psi\rangle$ e $c_2 = \langle 2|\psi\rangle$ são as amplitudes de probabilidade associadas aos estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$, respectivamente. Tais coeficientes obedecem à condição de normalização $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, na qual $|c_k|^2$ é a probabilidade de encontrar o sistema no estado "k" (21). Em uma representação na qual

$$|1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

um estado puro arbitrário $|\psi\rangle$ é descrito por um vetor complexo bidimensional

$$|\psi\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Na mesma representação, um operador arbitrário A atuando em um sistema de dois níveis tem uma matriz de representada na forma (21):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

com $a_{ij} = \langle i|A|j\rangle$. Além disso, a matriz A também pode ser escrita na forma (22):

$$A = l_0 1 + l_1 \sigma_1 + l_2 \sigma_2 + l_3 \sigma_3, \quad (2.8)$$

onde $l_j \in \Re$ e a escolha padrão dos elementos de base é (22)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

σ_j são chamadas de "matrizes de Pauli", e a escolha dessa base é convencional; um aspecto dessa convenção é tomar o elemento de base na direção 3 na forma diagonal (22). Um exemplo bastante usual de um sistema de dois níveis é um átomo que apresenta dois estados possíveis, $|g\rangle$ e $|e\rangle$, que correspondem ao estado fundamental (do inglês "ground state") e ao estado excitado, respectivamente (23). A diferença de energia entre estes estados é caracterizada pela frequência de transição $\omega_0 = \mathcal{E}_e - \mathcal{E}_g$, ($\hbar = 1$) e o estado do átomo é representado por (23):

$$|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle. \quad (2.10)$$

Considerando a representação padrão

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

é possível diagonalizar o operador hamiltoniano para o átomo de dois níveis através da equação de autovalores:

$$H |g\rangle = \mathcal{E}_g |g\rangle, \quad (2.12)$$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_e \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_g \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

de onde se obtêm os números representativos $h_{11} = \mathcal{E}_e$ e $h_{21} = 0$. De maneira similar, para o vetor de estado $|g\rangle$, verifica-se que $h_{12} = 0$ e $h_{22} = \mathcal{E}_g$. Desse modo, a forma diagonal da matriz representando o operador hamiltoniano para um átomo de dois níveis se escreve na forma

$$H = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_e & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_g \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Além disso, em termos das matrizes de Pauli, tem-se que

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sigma_3, \quad (2.15)$$

com os correspondentes autovalores de energias na forma

$$\mathcal{E}_e = \frac{\omega_0}{2}, \quad \mathcal{E}_g = -\frac{\omega_0}{2}. \quad (2.16)$$

Outro exemplo, amplamente estudado na literatura, de sistema de dois níveis é o de spin $1/2$, em que o termo spin está associado a uma propriedade quântica intrínseca das partículas que compõem a matéria comum (prótons, nêutrons e elétrons), bem como de todos os quarks e léptons (24). Um sistema de spin $1/2$ possui dois autoestados possíveis: $|+\rangle$ (chamado informalmente de "spin pra cima") e $|-\rangle$ (chamado informalmente de "spin pra baixo"), cujos autovalores são $+1/2$ e $-1/2$, respectivamente (9). Como o spin é uma observável física, possui um operador correspondente, o qual chamamos de S_z (que fornece a projeção do spin na direção z), e as equações de autovalores são então (9):

$$S_z |+\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle, \quad S_z |-\rangle = -\frac{1}{2} |-\rangle, \quad (2.17)$$

com os produtos internos $\langle i|j\rangle$, definindo as propriedades de ortogonalidade dos vetores de estado do sistema, dados por

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1, \quad (2.18)$$

$$\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Um vetor de estado escrito na base $|+\rangle, |-\rangle$ será dado por

$$|\psi\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle, \quad (2.20)$$

com a condição de normalização expressa pela equação

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1, \quad (2.21)$$

Considerando, para um espaço bidimensional, a representação adequada na forma

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

com o operador S_z representado na forma matricial

$$S_z = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

As equações de autovalores são escritas (considerando $\hbar = 1$) na forma

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

de onde se extraem $s_{11} = -\frac{1}{2}$, $s_{12} = s_{21} = 0$ e $s_{22} = -\frac{1}{2}$. Deste modo, o operador S_z está representado na forma diagonal

$$S_z = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Além disso, em termos das matrizes de Pauli, tem-se que

$$S_z = \frac{1}{2} \sigma_3, \quad (2.26)$$

enquanto as demais componentes do spin são dadas por (9):

$$S_x = \frac{1}{2} \sigma_1, \quad S_y = \frac{1}{2} \sigma_2. \quad (2.27)$$

O exemplo discutido anteriormente é uma descrição elementar que apresenta os elementos que compõem o estudo de um sistema quântico em um espaço de Hilbert bidimensional. Os conceitos que surgem são pertinentes aos abordados no contexto da álgebra linear, em que elementos como a base de estados, os vetores de estados e os operadores são essenciais para a compreensão dos aspectos físicos do estudo de um sistema quântico. O que realmente chama a atenção é a natureza matricial explícita, cuja ideia é representar tanto os operadores, que, no contexto da mecânica quântica, estão associados a observáveis físicas, quanto os vetores de estado, que carregam toda a informação dinâmica do sistema. Pode-se dizer, de modo geral, que a mecânica quântica tem por base, essencialmente, uma teoria de representação de operadores em espaços vetoriais, aos quais se associam os conceitos de grupos e álgebras, inter-relacionando a dinâmica com simetrias.

Poderiam-se estender as discussões, explorando diversos aspectos formais e práticos da estrutura de um sistema quântico, mas neste estudo a ideia é ter um primeiro contato com os elementos matemáticos essenciais para se entender a estrutura da mecânica quântica de um ponto de vista matemático no que diz respeito ao grupos e álgebras. Visando justificar este estudo, tem-se que sistemas quânticos de dois níveis são de grande importância na mecânica quântica e vêm assumindo um papel significativo no controle exato da dinâmica associada a eles. Aplicações significativas estão presentes na computação quântica (6), criptografia quântica (25), simulação quântica (26), sensores quânticos (27) e teletransporte quântico (25).

2.2 CONCEITOS DA TEORIA DE GRUPOS

A teoria de grupos e representações fornece uma linguagem matemática para a descrição de simetrias no mundo físico (28), e suas aplicações são a base das operações na mecânica quântica

(29). Pode-se afirmar com toda certeza que a mecânica quântica tem sua formulação estabelecida a partir da teoria de representações de operadores, que representam, ou não, quantidades observáveis associadas a elementos de uma álgebra. Na física, a teoria de grupos e representações é utilizada, por exemplo, na quantização do momento angular (30), nos estados coerentes do campo eletromagnético (31) e em sistemas de spin (28). No que se segue, discute-se a formulação matemática correspondente a um grupo, bem como suas propriedades fundamentais, alguns aspectos da teoria de representações, álgebras de Lie, com o objetivo de compreender a sua relevância no contexto da mecânica quântica.

No contexto da Matemática, um conjunto G e uma operação $\cdot$ definem um ente matemático denominado grupo desde que as seguintes propriedades sejam obedecidas (29):

- **Associatividade:** Para quaisquer três elementos $g_1, g_2, g_3 \in G$, tem-se $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
- **Elemento de identidade:** Existe um único elemento e de G tal que, para qualquer elemento $g \in G$, $e \cdot g = g \cdot e = g$.
- **Elemento inverso:** Para qualquer elemento $g \in G$, existe um único elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$, onde g^{-1} é chamado de inverso de g .

É importante destacar que $g_1 \cdot g_2$ não significa necessariamente g_1 sendo multiplicado por g_2 , mas sim, g_1 sendo "operado" com g_2 , sendo que essa operação pode ou não ser um produto no sentido usual (29). A seguir, apresentam-se alguns exemplos para que o leitor compreenda melhor o conceito de grupo. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) definido como (32)

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad (2.28)$$

que define um grupo com relação à operação de soma $+$, uma vez que as propriedades definindo o conceito de grupo podem ser verificadas, como se segue:

1. O conjunto possui propriedade associativa, pois $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
2. O conjunto também possui um elemento de identidade (o número zero), haja vista que $a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.
3. O inverso aditivo também está presente no conjunto, pois $a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

Pode-se afirmar, então, que o conjunto dos números inteiros forma um grupo com relação à operação de adição usual. Verifica-se agora se o mesmo conjunto forma um grupo em relação à operação de multiplicação usual uma vez que:

1. A lei associativa é respeitada, pois $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.
2. O elemento neutro da operação de multiplicação é o número 1, pois $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.
3. O inverso multiplicativo de um número a é $\frac{1}{a}$, pois $\frac{1}{a} \cdot a = 1$, porém, o conjunto dos inteiros não contém o inverso multiplicativo de todos os seus elementos. Sem mencionar, é claro, que o número zero não possui inverso multiplicativo. Sendo assim, o conjunto dos números

inteiros forma um grupo com relação à operação de soma, mas não à de multiplicação. Tem-se, então, que um grupo é, por definição, um conjunto com operação associativa, tal que o conjunto possua um elemento de identidade, bem como um elemento inverso de cada elemento (22). Quando um grupo possui também a propriedade de comutatividade, isto é, $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, é chamado de grupo abeliano. Como esta dissertação foca em grupos de matrizes (cujos elementos são representados por matrizes) que não são comutativos, não se dá muita atenção aos grupos abelianos. Além das condições citadas, os grupos também possuem algumas propriedades, listadas e demonstradas a seguir.

1. O inverso de cada elemento é único.

Prova: Sejam a e b elementos inversos de g . Sendo assim,

$$a \cdot g = e. \quad (2.29)$$

Operando b pela esquerda em ambos os lados,

$$b \cdot a \cdot g = b \cdot e. \quad (2.30)$$

Aplicando a equação $e = g \cdot a$,

$$b \cdot a \cdot g = b \cdot g \cdot a. \quad (2.31)$$

Como $a \cdot g = b \cdot g = e$, verifica-se que a igualdade

$$b = a. \quad (2.32)$$

2. Se $a, b, c \in G$ e $c \cdot a = b$, então $c = b \cdot a^{-1}$.

Prova: operando a^{-1} pela direita em ambos os lados,

$$(c \cdot a) \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}, \quad (2.33)$$

que pela associatividade, torna-se

$$c \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}, \quad (2.34)$$

onde $a \cdot a^{-1} = e$. Logo

$$c = b \cdot a^{-1}. \quad (2.35)$$

3. Se $a, b, c \in G$ e $a \cdot c = b$, então $c = a^{-1} \cdot b$. A prova desta propriedade é semelhante à anterior; basta operar a^{-1} à esquerda. O leitor pode achar que estes dois últimos itens tratam da mesma propriedade, porém, em geral, os grupos não são abelianos, isto é, $g_1 \cdot g_2 \neq g_2 \cdot g_1$.

4. Se $a, b \in G$, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Prova: primeiramente, calcula-se

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}), \quad (2.36)$$

que pela propriedade da associatividade se torna

$$a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = a \cdot e \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e. \quad (2.37)$$

Por outro lado, tem-se que

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b = b^{-1} \cdot b = e. \quad (2.38)$$

Dessa forma, conclui-se que $(b^{-1} \cdot a^{-1})$ é o elemento inverso de $(a \cdot b)$, isto é, $(a \cdot b)^{-1}$.

5. Se $a, b, c \in G$ e $a \cdot b = a \cdot c$, então $b = c$.

Prova: Multiplicando a^{-1} pela esquerda, verifica-se que

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c), \quad (2.39)$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c, \quad (2.40)$$

$$e \cdot b = e \cdot c, \quad (2.41)$$

que implica em

$$b = c. \quad (2.42)$$

2.3 GRUPOS DE LIE

Quando um subconjunto H de G forma um grupo com respeito aos produtos de G , é chamado de subgrupo de G ; quando o número de elementos de um grupo é finito, o grupo é chamado de grupo finito, e o número de elementos é chamado de ordem do grupo G , denotado por $|G|$ (29). Embora os grupos finitos tenham diversas aplicações na física, este trabalho dará ênfase aos grupos de Lie, que possuem um número infinito de elementos.

Um grupo é chamado de Grupo de Lie (LG) quando seus elementos são caracterizados por parâmetros contínuos. Alguns exemplos de grupos de Lie são os grupos matriciais (cujos elementos são matrizes) $GL(n, R)$ e $GL(n, C)$ que são grupos de transformações lineares em um espaço vetorial n -dimensional real e complexo, respectivamente (21). O determinante das matrizes dos grupos $GL(n, R)$ e $GL(n, C)$ é 1 ou -1 , e os elementos com determinante 1 formam um subgrupo chamado especial, denotado pelo prefixo S e escrito como $SL(n, R)$ e $SL(n, C)$ (21). Outro exemplo de grupos de Lie é o grupo de matrizes ortogonais n -dimensionais $O(n, R)$ e seu subgrupo $SO(n, R)$. Um grupo de grande importância na mecânica quântica é o

grupo de rotação no espaço vetorial de 3 dimensões, isto é, o grupo $SO(3, R)$ (29). Os grupos unitários $U(p, q)$ e $SU(p, q)$ são grupos de transformação de um espaço vetorial complexo n -dimensional (com $n = p + q$) que preservam a forma quadrática (21)

$$|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_{p+q}|^2, \quad (2.43)$$

onde x_n são elementos das matrizes que formam o correspondente ao grupo. O grupo $U(n)$ é formado por matrizes $n \times n$ tal que

$$U^{-1} = U^\dagger,$$

sendo $U^\dagger$ a "transposta conjugada" ou "adjunta" de U (22). Como consequência direta, tem-se que

$$UU^\dagger = I. \quad (2.44)$$

Já o grupo $SU(p, q)$ é formado pelas matrizes de ordem n com $n = p + q$ tal que

$$USU^\dagger = S, \quad (2.45)$$

onde S é uma matriz métrica diagonal com p entradas 1 e q entradas -1. Por exemplo, para o grupo $SU(2, 3)$, tem-se

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Vale notar que, se $p = 0$ ou $q = 0$, isto é, para $SU(0, q)$ ou $SU(p, 0)$, $S = \pm I$, e a equação (2.45) se torna (2.44), sendo I a matriz métrica de $SU(n)$. Isso quer dizer que o grupo $SU(n)$ possui uma métrica euclidiana, enquanto o grupo $SU(p, q)$ possui uma métrica não euclidiana. As matrizes de $SU(n)$ atuam em vetores em um espaço vetorial de dimensão n de modo que preservam o produto interno de dois vetores; isto é, a norma dos vetores, bem como o ângulo entre eles, permanecem inalterados sob a atuação de $SU(n)$. O produto interno preservado é

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i. \quad (2.47)$$

Uma vez que o grupo $SU(p, q)$ atua em vetores de um espaço vetorial de dimensão n (com $n = p + q$), preservando um produto interno não euclidiano a depender da matriz S . O produto interno preservado em $SU(p, q)$ é (33)

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^* S v_1 + \dots + u_p^* S v_p - u_{p+1}^* S v_{p+1} - \dots - u_{p+q}^* S v_{p+q}, \quad (2.48)$$

o que diz que a norma de um vetor pode ser positiva, negativa ou nula, mesmo que o vetor não seja nulo. Novamente, para o caso em que $p = 0$, a equação (2.48) reduz-se à (2.47). Assim, o grupo $SU(n)$ é um caso especial do grupo $SU(p, q)$. O quadro (2.3) é uma adaptação do quadro apresentado em (29) e apresenta alguns exemplos de grupos de Lie com suas respectivas definições.

Quadro 1. Descrição de exemplos de GL

Nome do grupo	Notação	Definição
Grupo geral linear complexo	$GL(n, C)$	{matrix regular complexa $n \times n$ }
Grupo especial linear complexo	$SL(n, C)$	$\{g \in GL(n, C) \det g = 1\}$
Grupo ortogonal complexo	$O(n)$	$\{g \in GL(n, C) g^T g = I\}$
Grupo especial ortogonal complexo	$SO(n, C)$	$\{O(n, C) \cap SL(n, C)\}$
Grupo unitário	$U(n)$	$\{g \in GL(n, C) g^\dagger g = I\}$
Grupo especial unitário	$SU(n)$	$\{U(n) \cap SL(n, C)\}$
Grupo ortogonal real	$O(n, R)$	$\{O(n, C) \cap GL(n, R)\}$
Grupo especial ortogonal real	$SO(n, R)$	$\{SO(n, C) \cap GL(n, R)\}$

Fonte: adaptação do quadro apresentado em (29)

Grupos geralmente aparecem como "grupos de transformação", isto é, grupos de elementos que atuam como transformações de um objeto geométrico. Por exemplo, no grupo de rotação tridimensional, as rotações são transformações lineares no $\mathbf{R}^3$ (22).

2.4 TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

No contexto da teoria de grupos, uma representação de um grupo é uma forma de abstrair um grupo como uma matriz de transformações lineares, tornando seus elementos concretos e manipuláveis por meio de álgebra linear. A representação permite estudar um grupo G por meio de matrizes e operadores lineares, sendo a ferramenta fundamental da mecânica quântica. A representação de um grupo é uma correspondência existente entre cada elemento $g \in G$ e um operador (matriz) que atua em um espaço vetorial $V : g \rightarrow T(g)$, tal que (21):

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1 \cdot g_2) \quad (2.49)$$

a partir da qual a seguintes correspondências são observadas

1. $T(e) = \mathbf{1}$ - a representação do elemento identidade é a identidade na representação;
2. $T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$ - a representação da inversa de g é a inversa da representação de g ;
3. $\det T(g) \neq 0$.

Assim, uma representação pode ser compreendida como a expressão de um elemento g de um grupo G por meio de uma matriz. A atuação deste grupo em um espaço vetorial V é dada pela multiplicação de tal matriz por um vetor $v \in V$.

Uma representação (T, V) em um espaço vetorial complexo V é considerada unitária quando conserva o produto interno, isto é (29):

$$\langle T(g)v_1, T(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad (2.50)$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ e $g \in G$. Neste caso,

$$T^{-1}(g) = T(g^{-1}), \quad (2.51)$$

é satisfeita.

A relação fundamental entre a teoria de representação e a mecânica quântica é que, sempre que se tem um sistema quântico com um grupo G atuando sobre ele, o espaço de estados $\mathcal{H}$ carrega uma representação unitária de G . Fisicamente, isso significa que a teoria de representação fornece informações sobre o espaço de estados quânticos quando G atua sobre um sistema. Matematicamente, quer dizer que a física é uma fonte muito rica de representações unitárias para se estudar, pois qualquer sistema físico com G atuando sobre ele, gera uma representação unitária (22). Para uma representação T e um grupo de elementos g perto da identidade, a exponencial pode ser usada para expressar a matriz $T(g) \in GL(n, \mathbf{C})$ na seguinte forma

$$T(g) = e^A, \quad (2.52)$$

onde A é uma matriz próxima da matriz nula. No caso especial em que $T(g)$ é unitária, isto é, pertence ao subgrupo $U(n) \in GL(n, \mathbf{C})$, o operador A é contra-adjunto (22):

$$A^\dagger = -A, \quad (2.53)$$

onde $A^\dagger$ é o conjugado transposto de A . Definindo $B = iA$, nota-se que B é autoadjunto (ou hermitiano)

$$B^\dagger = B. \quad (2.54)$$

Em mecânica quântica, os observáveis de um sistema físico são representados por operadores matriciais hermitianos que atuam no espaço de Hilbert por meio da multiplicação dessas matrizes pelos vetores de estado do sistema. Assim, uma representação unitária T de G em $\mathcal{H}$, derivada de uma ação de G em nosso sistema físico, não fornece apenas as matrizes unitárias $T(g)$, mas também os operadores autoajuntos correspondentes B em $\mathcal{H}$. As ações dos grupos de Lie, portanto, produzem uma classe de observáveis quânticos, com a propriedade autoadjunta desses operadores correspondente à unitariedade da representação no espaço de estados (22). Um exemplo bastante usual disso é a operação de translação no tempo, cujo grupo é $G = \mathbf{R}$, com uma representação unitária U no espaço de estados $\mathcal{H}$. O operador hermitiano é o hamiltoniano H e a representação é dada por (22)

$$t \in \mathbf{R} \rightarrow U(t) = e^{-iHt}. \quad (2.55)$$

Esta representação unitária descreve a dinâmica do sistema quântico modelado por H (assumindo por enquanto como sendo independente do tempo), com a equação de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.56)$$

significando que $-iH\Delta t$ é o operador hermitiano que, exponenciado, dá a transformação unitária que translada no tempo o estado do sistema de uma quantidade Δt (22).

2.5 ÁLGEBRAS DE LIE

Uma álgebra de Lie (AL) é uma ferramenta matemática de grande relevância na física quântica, pois sua formulação é essencial para descrever simetrias contínuas presentes em sistemas físicos. Essas simetrias estão ligadas a leis de conservação importantes que, no contexto da mecânica quântica, estruturam os chamados subespaços invariantes no espaço de Hilbert dos vetores de estado (34). No estudo da teoria de grupos contínuos, é natural surgir o conceito de álgebra de Lie, cuja definição formal é apresentada no que se segue (22). Para um grupo de Lie G formado por matrizes inversíveis de ordem n , a álgebra de Lie de G (escrita $\mathfrak{g}$) é o espaço de matrizes X de ordem n tais que $e^{tX} \in G$ para $t \in \mathcal{R}$. Além disso, um espaço vetorial $\mathcal{L}$ é chamado de álgebra de Lie se, para cada $L_k, L_j \in \mathcal{L}$, uma combinação bilinear chamada de brackets de Lie é definida tal que $(L_k, L_j) \rightarrow [L_k, L_j] = L_k L_j - L_j L_k \in \mathcal{L}$ satisfaz as seguintes relações (21):

1. Propriedade de anticomutatividade:

$$[L_k, L_j] = -[L_j, L_k], \quad (2.57)$$

cuja consequência direta implica em $[L_j, L_j] = 0$ para qualquer $L_j \in \mathcal{L}$.

2. Propriedade de Bilinearidade:

$$\begin{aligned} [L_k, aL_j + bL_m] &= a[L_k, L_j] + b[L_k, L_m], \\ [bL_k + aL_j, L_m] &= b[L_k, L_m] + a[L_j, L_m]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

3. Identidade de Jacobi:

$$[L_k, [L_j, L_m]] + [L_m, [L_k, L_j]] + [L_j, [L_m, L_k]] = 0. \quad (2.59)$$

Vale notar que todas estas condições são satisfeitas se os brackets de Lie possuírem a forma de um comutador, isto é, $[L_k, L_j] = L_k L_j - L_j L_k$. Como $\mathcal{L}$ é um espaço linear, uma base $\{E_j\}$ pode ser escolhida nesse espaço tal que

$$[E_k, E_j] = \sum_m c_{kjm} E_m,$$

onde c_{kjm} é chamado de constante de estrutura e satisfaz as condições:

1. $c_{kjm} = -c_{jkm}$, antissimetria;
2. $\sum_m c_{kjm} c_{mpq} + \sum_m c_{mjp} c_{mkp} + \sum_m c_{pkm} c_{mj q} = 0$, (identidade de Jacobi).

Uma álgebra de Lie é chamada comutativa se $[L_k, L_j] = 0$ para todo $L_k, L_j \in \mathcal{L}$, e o centro de uma álgebra é o conjunto dos elementos que comutam com todos os demais. Note que a definição de álgebra de Lie envolve a exponencial de uma matriz, o que torna esta operação

particularmente importante para o estudo da teoria de grupos, da representação e da álgebra. Por isso, analisam-se brevemente as exponenciais de matrizes antes de prosseguirmos com o estudo das álgebras de Lie.

Para realizar o cálculo de uma exponencial matricial e^X , podemos usar a expansão de Taylor para a exponencial e assim escrever (35)

$$e^X = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \quad (2.60)$$

sendo I a matriz identidade e o primeiro termo da série com a matriz X sendo nula. Para uma compreensão adequada, calcula-se como um exemplo ilustrativo a exponencial da matriz

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

O primeiro passo será calcular algumas potências de X para então usar a expansão de Taylor, então

$$X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^3 = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad n \neq 0. \quad (2.62)$$

Usando então a fórmula de Taylor

$$e^X = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Portanto, forma exponencial resulta em

$$e^X = \begin{bmatrix} e^2 & \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Existem outras formas de obter a exponencial de uma matriz, como o método dos autovalores e o teorema de Cayley-Hamilton, apresentados em (36). É importante frisar também, que para o caso onde X é uma matriz diagonal, isto é

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

então

$$e^X = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Como toda operação matemática, a exponencial matricial tem suas propriedades, válidas para matrizes arbitrárias X e Y de ordem n (37):

1. $e^0 = I$.
2. $(e^X)^* = e^{X^*}$.

3. e^X é inversível e $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X}e^{\beta X}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
5. Se $XY = YX$, então $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.
6. Se C é inversível, então $e^{CXC^{-1}} = Ce^XC^{-1}$.
7. $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$.

Sendo $\|X\|$ calculado pela expressão

$$\|X\| = \left(\sum_{i,j}^n X_{i,j}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.67)$$

Através da definição de álgebra, podemos escrever um elemento g de um grupo G com valor próximo da identidade e que depende de n parâmetros contínuos na forma

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \exp \left(-i \sum_k^n \alpha_k L_k \right), \quad (2.68)$$

onde o operador

$$L_k = i \frac{\partial g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha=0},$$

é chamado de gerador infinitesimal do grupo G . O conjunto de geradores linearmente independentes de um grupo de Lie é a álgebra de Lie correspondente. Por outro lado, os elementos $\exp(-i \sum_k \alpha_k L_k)$ formam o grupo de Lie correspondente (21). É importante destacar também, que os geradores de uma álgebra formam a base do espaço vetorial, e portanto, qualquer elemento da álgebra pode ser obtido através de uma combinação linear entre os seus geradores (38). As álgebras de Lie são denotadas por letras minúsculas, por exemplo, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ é a álgebra de Lie do grupo $GL(n, \mathbb{C})$. Da mesma forma, $\mathfrak{su}(p, q)$ é a álgebra de Lie do grupo $SU(p, q)$.

2.6 ÁLGEBRA DE LIE DE UM GRUPO UNITÁRIO

Uma matriz X é chamada unitária se, e somente se, $X^* = X^{-1}$, logo, uma matriz e^{tX} será unitária se, e somente se,

$$(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}. \quad (2.69)$$

Pelas propriedades das matrizes exponenciais vistas anteriormente, tem-se que $(e^{tX})^* = e^{tX^*}$. Logo,

$$e^{tX^*} = e^{-tX}, \quad (2.70)$$

de maneira que

$$X^\dagger = -X. \quad (2.71)$$

Podemos dizer, então, que a álgebra $\mathfrak{u}(n)$ do grupo $U(n)$ é o espaço das matrizes complexas X de ordem n tais que $X^\dagger = -X$. O subgrupo $SU(n)$ de $U(n)$ é o conjunto de elementos cujo determinante é 1. Levando isso em consideração, temos que, para matrizes diagonais

$$\det[e^X] = e^{\text{Tr}[X]} = 1. \quad (2.72)$$

Conclui-se, então, que a álgebra $\mathfrak{su}(n)$ do grupo $SU(n)$ é o espaço de todas as matrizes X de ordem n tais que $X^* = X^{-1}$ e $\text{Tr}[X] = 0$. Para encontrar a álgebra de Lie do grupo $SU(p, q)$, aplica-se a equação (2.45) juntamente com (2.60) e assim pode se escrever

$$\begin{aligned} USU^\dagger &= S, \\ (I + X)^\dagger S(I + X) &= S, \\ (I + X^\dagger)S(I + X) &= S, \\ S + X^\dagger S + SX + X^\dagger SX &= S. \end{aligned}$$

Desprezando os termos de segunda ordem uma vez que X é uma variação infinitesimal, resulta que

$$X^\dagger S = -SX. \quad (2.73)$$

Essa é a condição fundamental da álgebra de $SU(p, q)$. Ela mostra que os elementos da álgebra não são hermitianos a menos que p ou q sejam iguais a zero, caso em que a métrica se torna a identidade. A condição de que o determinante dos elementos do grupo seja igual a 1 também impõe que $\text{Tr}[X] = 0$.

Além do exemplo mostrado, verifica-se haver outras classes de grupos de Lie e suas respectivas álgebras:

- Grupo Linear Geral $GL(n, R)$ e $GL(n, C)$ são grupos de todas as matrizes inversíveis com elementos reais e complexos, respectivamente. Suas álgebras são $\mathfrak{gl}(n, R) = M(n, R)$ e $\mathfrak{gl}(n, C) = M(n, C)$. Estes são os espaços vetoriais de todas as matrizes de ordem n com o colchete de Lie como comutador.
- Grupo Especial Linear $SL(n, R)$ e $SL(n, C)$ são grupos de matrizes de ordem n inversíveis com determinante 1. Suas respectivas álgebras $\mathfrak{sl}(n, R)$ e $\mathfrak{sl}(n, C)$ são os espaços de todas as matrizes $n \times n$ com traço zero.
- O grupo Ortogonal $O(n) \subset GL(n, R)$ é o grupo de matrizes reais Ω de ordem n que satisfazem $\Omega^T = -\Omega$. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ é o espaço das matrizes X de ordem n tal que $X^T = -X$.
- O grupo Especial Ortogonal $SO(n) \subset SL(n, R)$ é o subgrupo de $O(n)$ com determinante 1. Sua álgebra de Lie é a mesma que a de $O(n)$, isto é, $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$.

- O grupo Unitário $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo formado por matrizes complexas Ω $n \times n$ que satisfazem $\Omega^\dagger = \Omega^{-1}$. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ é o espaço das matrizes complexas anti-hermitianas X tal que $X^\dagger = -X$.
- O Grupo Especial Unitário $SU(n) \subset SL(n, \mathbb{C})$ é o subgrupo de $U(n)$ de matrizes com determinante 1. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$ é o espaço das matrizes anti-hermitianas $n \times n$ com traço zero.
- O Grupo Especial Unitário $SU(p, q)$ é o grupo formado por matrizes complexas Ω de ordem n que satisfazem $\Omega S \Omega^\dagger = S$. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(p, q)$ é o espaço das matrizes complexas não hermitianas X tais que $X^\dagger S = -SX$.

O grupo $SU(2)$ é formado por matrizes de ordem 2 com determinante unitário na forma

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (2.74)$$

onde a e b são números complexos com a^* e b^* seus respectivos complexos conjugados. Os elementos de centro são as matrizes I e $-I$, e os geradores do grupo, que formam a base da álgebra $\mathfrak{su}(2)$, são os operadores de spin S_x, S_y, S_z , os quais obedecem às relações de comutação (35)

$$[S_x, S_y] = iS_z, \quad [S_z, S_x] = iS_y, \quad [S_y, S_z] = iS_x,$$

onde $S_j = \frac{\sigma_j}{2}$, $j = x, y, z$, sendo σ_j as matrizes de Pauli vistas anteriormente. Dos operadores S_x, S_y e S_z , é possível construir os operadores de levantamento e abaixamento

$$S_\pm = S_x \pm iS_y,$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[S_z, S_\pm] = \pm S_\pm, \quad [S_+, S_-] = 2S_z.$$

Já o grupo $SU(1, 1)$ é formado por matrizes de ordem 2 tais que (35)

$$U S U^\dagger = S,$$

onde U é a representação do elemento do grupo $SU(1, 1)$ dada pela matriz

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{bmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

e S é uma matriz definida como

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os geradores do grupo $SU(1, 1)$ são os operadores K_x, K_y e K_z que satisfazem a relação de comutação

$$[K_x, K_y] = -iK_z, \quad [K_y, K_z] = iK_x, \quad [K_z, K_x] = iK_y,$$

e formam a álgebra $\mathfrak{su}(1, 1)$. Assim, podemos definir os operadores de levantamento e abaixamento $K_{\pm}$, sendo

$$K_{\pm} = K_x \pm K_y, \quad K_+ = K_-^\dagger,$$

que juntamente com as relações de comutação mostradas anteriormente, é possível obter

$$[K_z, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_+, K_-] = -2K_z.$$

Desse modo, identificaram-se os geradores tanto do grupo $SU(2)$ quanto do grupo $SU(1, 1)$, que permitem determinar a simetria dinâmica de um modelo quântico que descreve o sistema de dois níveis, o objeto de interesse deste trabalho. Então um dado sistema quântico no espaço de Hilbert bidimensional com simetria dinâmica tem o seu operador hamiltoniano $H_{\mathfrak{su}(2)}$ escrito em termos dos geradores do grupo $SU(2)$ na forma

$$H_{\mathfrak{su}(2)} = h_+(t)S_+ + h_-(t)S_- + h_z(t)S_z, \quad (2.75)$$

onde, para um sistema quântico dependente do tempo, descrevendo um sistema quântico não-estacionário¹, os coeficientes $h_k(t)$ são funções reais arbitrárias no tempo. De forma similar, para um sistema quântico com simetria $SU(1, 1)$, focando em sistemas bidimensionais, o operador hamiltoniano se escreve na forma

$$H_{\mathfrak{su}(1,1)} = \mathfrak{h}_+(t)K_+ + \mathfrak{h}_-(t)K_- + \mathfrak{h}_z(t)K_z, \quad (2.76)$$

com $\mathfrak{h}_k(t)$ funções reais no tempo. Para ambos os sistemas descritos acima, o estudo da dinâmica quântica associado à evolução dos vetores de estado correspondentes implica na solução da equação diferencial para o correspondente operador de evolução $U(t)$, que, para ambas as simetrias, satisfazem a equação de Schrödinger na forma ($\hbar = 1$)

$$i \frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t), \quad (2.77)$$

com a matriz representando o operador hamiltoniano $H(t)$ na sua forma geral

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

carregando as propriedades relativas às correspondentes simetrias dinâmicas, o que fixa as formas dos coeficientes $h_{ij}(t)$. Devido aos princípios da mecânica quântica, tem-se a condição inicial para a matriz representando $U(0) = I$, sendo I a matriz identidade no espaço de Hilbert bidimensional. Esta é a equação fundamental da dinâmica quântica para sistemas quânticos com evolução unitária em perfeita concordância com a ideia de grupo unitário, para o qual $U(t)U^\dagger(t) = I$.

¹ Um sistema quântico não estacionário é caracterizado, essencialmente, pelo fato de que seu estado quântico depende do tempo de forma não trivial. As probabilidades de medir determinadas grandezas variam ao longo do tempo.

Determinar sua solução exatamente permite descrever como as propriedades físicas do sistema variam ao longo do tempo. Para ambas as simetrias, as parametrizações para o operador de evolução temporal são estabelecidas a partir da forma geral para o operador de evolução temporal escrito como

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

onde os coeficientes $u_{ij}(t)$ devem obedecer as propriedades relativas a cada uma das simetrias consideradas para o sistema. Uma vez explorados os aspectos formais associados aos conceitos de grupos e álgebras, no que se segue, identificamos sistemas quânticos simples de grande relevância para o estudo da dinâmica quântica com simetrias dinâmicas $SU(2)$ e $SU(1, 1)$.

3 SISTEMAS QUÂNTICOS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(2)$ E $SU(1, 1)$

Uma vez compreendida a estrutura de um sistema quântico em um espaço de Hilbert bidimensional com simetrias dinâmicas $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, considera-se agora a análise das possíveis soluções para ambos os sistemas considerando operadores hamiltonianos hermitianos e não-hermitianos onde os parâmetros dos operadores possam ter dependência explícita no tempo arbitrária. Para tais sistemas, a aplicação do método de Messina Nakazato (MMN) é o protocolo para se determinar as soluções admissíveis e resultou em uma série de trabalhos importantes com soluções exatas para sistemas quânticos não estacionários (39–41). Obviamente, o foco neste capítulo está na análise da estrutura das soluções construídas de forma geral; no entanto, não se segue o procedimento usual devido ao (MMN). Trata-se de uma análise da estrutura das equações diferenciais associadas a cada simetria, que dão origem aos respectivos problemas de Liouville-Cauchy, para os quais é possível obter os mesmos resultados por meio do MMN. O estudo deste procedimento, conforme será apresentado, foi uma ideia proposta inicialmente por Grimaudo et al. (16), porém não foi detalhado na literatura, tornando-se objeto de um estudo sistemático e de análise crítica neste capítulo.

Não serão considerados exemplos físicos correspondentes aos modelos $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, pois o foco principal aqui é uma abordagem no sentido Físico-Matemático, ilustrando um modo diferente de obter os resultados em (16, 42). Considera-se esta etapa relevante para se compreender o procedimento, fornecendo subsídio operacional para se estender essa ideia para outras simetrias dinâmicas correspondentes a álgebras de dimensões maiores, como, por exemplo, a álgebra do Grupo $SU(3)$ necessária para o estudo de sistemas de três níveis com dinâmica generalizada.

3.1 SISTEMA DE DOIS NÍVEIS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(2)$

O problema de um sistema de spin $1/2$ sujeito a um campo magnético dependente do tempo $B(t)$ é investigado considerando um hamiltoniano na forma

$$H(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) & \omega(t) \\ \omega^*(t) & -\Omega(t) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde as componentes longitudinal $\Omega(t)$ (função real do tempo) e transversal $\omega(t)$ (função complexa do tempo) do campo magnético aplicado no sistema de spin $1/2$ podem ser escritas na forma (16)

$$\Omega(t) = \frac{\mu_b g}{2} B_z(t), \quad \omega(t) = \frac{\mu_b g}{2} [B_x(t) - i B_y(t)] = |\omega(t)| e^{i\phi_\omega(t)}. \quad (3.2)$$

Nas equações (3.2) $\mu_b g$ é o momento magnético associado ao spin $1/2$, g o fator de Landé e μ_b corresponde ao magneton de Bohr. Também é considerado um operador de evolução temporal

unitário do grupo $SU(2)$ representado na forma

$$U(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ -b^*(t) & a^*(t) \end{bmatrix}, \quad |a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1, \quad (3.3)$$

onde os coeficientes complexos $a(t)$ e $b(t)$ no operador de evolução temporal podem ser escritos na forma polar como

$$a(t) = |a(t)|e^{i\phi_a(t)}, \quad (3.4)$$

$$b(t) = |b(t)|e^{i\phi_b(t)}. \quad (3.5)$$

O sistema modelado pelo operador hamiltoniano (3.1) obedece a uma evolução temporal unitária governada pela equação de Schrödinger:

$$i\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = I_2. \quad (3.6)$$

Portanto, a equação (3.6) implica que

$$i \begin{bmatrix} \dot{a}(t) & \dot{b}(t) \\ -\dot{b}^*(t) & \dot{a}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega(t) & \omega(t) \\ \omega^*(t) & -\Omega(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ -b^*(t) & a^*(t) \end{bmatrix}.$$

Realizando o produto das matrizes e igualando os elementos das mesmas, obtém-se que

$$\dot{a}(t) = \frac{\Omega(t)a(t)}{i} - \frac{\omega(t)b^*(t)}{i}, \quad (3.7)$$

$$\dot{b}(t) = \frac{\Omega(t)b(t)}{i} + \frac{\omega(t)a^*(t)}{i}. \quad (3.8)$$

Note que este conjunto de equações diferenciais de primeira ordem tem coeficientes dependentes do tempo, o que dificulta a obtenção de uma solução analítica exata para valores arbitrários de $\Omega(t)$ e $\omega(t)$ pelos métodos usuais abordados no contexto da teoria das equações diferenciais ordinárias (43–45). A condição inicial aplicada ao operador de evolução implica em $U(0) = I_2$, que na forma de matrizes está representada por

$$\begin{bmatrix} a(0) & b(0) \\ -b^*(0) & a^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Isto, implica para os coeficientes $a(0)$ e $b(0)$ a condição definindo o problema de valor inicial das equações de Liouville-Cauchy

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 0. \quad (3.10)$$

O propósito do desenvolvimento a seguir é compreender do ponto de vista operacional as consequências da simetria dinâmica $SU(2)$ presente na estrutura do operador hamiltoniano (3.1). Neste sentido, o ponto de partida da análise consiste em aplicar as parametrizações (3.4) e (3.5) na estrutura das equações diferenciais do problema de Liouville-Cauchy e explorar as consequências resultantes. Derivando $a(t)$ em relação ao tempo, obtém-se a forma

$$\dot{a}(t) = |\dot{a}(t)|e^{i\phi_a(t)} + i|a(t)|\dot{\phi}_a(t)e^{i\phi_a(t)}. \quad (3.11)$$

Combinando este resultado com a equação (3.7) resulta em sistema de equações diferenciais envolvendo as derivadas dos módulos e fases dos coeficientes complexos $a(t)$ e $b(t)$:

$$\frac{\Omega(t)|a(t)|e^{i\phi_a(t)}}{i} - \frac{|\omega(t)|e^{i\phi_\omega(t)}|b(t)|e^{-i\phi_b(t)}}{i} = |\dot{a}(t)|e^{i\phi_a(t)} + i|a(t)|\dot{\phi}_a(t)e^{i\phi_a(t)}, \quad (3.12)$$

que multiplicado em ambos os lados por $e^{-i\phi_a(t)}$, assume a forma

$$\frac{\Omega(t)|a(t)|}{i} - \frac{|\omega(t)||b(t)|e^{-i(\phi_\omega(t)-\phi_b(t)-\phi_a(t))}}{i} = |\dot{a}(t)| + i|a(t)|\dot{\phi}_a(t). \quad (3.13)$$

À primeira vista, parece uma equação com uma forma um tanto mais complicada do que as equações originais do problema. No entanto, igualando-se as partes reais e complexas de cada lado da equação (3.13), obtém-se então duas equações diferenciais para a fase e o módulo do coeficiente $a(t)$:

$$|a(t)|\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t)|a(t)| + |\omega(t)||b(t)|\cos(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.14)$$

$$|\dot{a}(t)| = |\omega(t)||b(t)|\sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)). \quad (3.15)$$

Procedimento similar pode ser aplicado para o coeficiente complexo $b(t)$ para o qual se verifica

$$\dot{b}(t) = |\dot{b}(t)|e^{i\phi_b(t)} + i|b(t)|\dot{\phi}_b(t)e^{i\phi_b(t)}, \quad (3.16)$$

com a equação (3.8) assumindo a forma

$$|\dot{b}(t)| + i|b(t)|\dot{\phi}_b(t) = \frac{\Omega(t)|b(t)|}{i} + \frac{|\omega(t)||a(t)|e^{i(\phi_\omega(t)-\phi_a(t)-\phi_b(t))}}{i}, \quad (3.17)$$

e, finalmente, resultando nas duas equações

$$|\dot{b}(t)| = |\omega(t)||a(t)|\sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.18)$$

$$|b(t)|\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t)|b(t)| - |\omega(t)||a(t)|\cos(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)). \quad (3.19)$$

Desta forma, o problema de Liouville-Cauchy para o operador de evolução temporal, um sistema de duas equações diferenciais lineares ordinárias a coeficientes variáveis no tempo, é substituído por um sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem. Do ponto de vista matemático, resta a questão da razão desta substituição, que será analisada em seguida. Assim o sistema de equações a ser analisado consiste nas quatro equações

$$|\dot{a}(t)| = -|\omega(t)||b(t)|\sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.20)$$

$$|\dot{b}(t)| = |\omega(t)||a(t)|\sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.21)$$

$$|a(t)|\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t)|a(t)| + |\omega(t)||b(t)|\cos(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.22)$$

$$|b(t)|\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t)|b(t)| - |\omega(t)||a(t)|\cos(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.23)$$

para o qual pode se determinar o correspondente problema de valor inicial, aplicando-se as condições iniciais nas equações (3.7) e (3.8). Isto significa que

$$\dot{a}(0) = \frac{\Omega(0)}{i}, \quad \dot{b}(0) = \frac{\omega(0)}{i}, \quad (3.24)$$

Tomando o valor da equação (3.11) em $t = 0$ e aplicando a equação (3.24), tem-se que

$$|\dot{a}(0)| + i\dot{\phi}_a(0) = \frac{\Omega(0)}{i}, \quad (3.25)$$

e como $\Omega(0)$ é um número real com todo o lado direito da equação sendo um número imaginário, conclui-se de imediato que

$$|\dot{a}(0)| = 0, \quad \dot{\phi}_a(0) = -\Omega(0). \quad (3.26)$$

Fazendo $t = 0$ na equação (3.16) e usando a equação (3.24)

$$\frac{\omega(0)}{i} = |\dot{b}(0)|e^{i\phi_b(0)}. \quad (3.27)$$

Uma vez que $\omega(0) = |\omega(0)|e^{i\phi_\omega(0)}$, $1/i = -i$ e $\exp[-i\pi/2] = -i$, de onde se verifica a condição

$$|\dot{b}(0)|e^{i\phi_b(0)} = |\omega(0)|e^{i(\phi_\omega(0) - \frac{\pi}{2})}. \quad (3.28)$$

Por comparação direta, tem-se então a seguinte condição inicial para os elementos da função complexa $b(t)$ na forma

$$|\dot{b}(0)| = \omega(0), \quad \phi_b(0) = \phi_\omega(0) - \frac{\pi}{2}. \quad (3.29)$$

Nesta seção, para um sistema hamiltoniano dependente do tempo com simetria $SU(2)$ estabelecem-se as equações (3.20)-(3.23), a partir das quais se pode, em princípio, determinar as soluções para as duas funções complexas $a(t)$ e $b(t)$ definindo o correspondente operador de evolução temporal. Note que as equações não podem ser resolvidas pelos métodos tradicionais, o que parece um obstáculo à determinação da solução para valores arbitrários de $\omega(t)$ e $\Omega(t)$. No entanto, a condição de normalização do operador de evolução temporal na forma

$$|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1, \quad (3.30)$$

sugere para $|a(t)|$ e $|b(t)|$ as seguintes formas generalizadas

$$|a(t)| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 \cos^2 \gamma(t)}, \quad (3.31)$$

$$|b(t)| = \sqrt{k_2^2 \sin^2 \gamma(t)}, \quad (3.32)$$

para uma dada função $\gamma(t)$, a ser determinada por uma equação a ser estabelecida a posteriori, desde que para os coeficientes reais k_1 e k_2 a condição $k_1^2 + k_2^2 = 1$ seja verificada. O que se observa nestas equações é a generalidade da solução para a parametrização característica da simetria dinâmica $SU(2)$ para a qual a condição $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$ é necessária e suficiente.

3.1.1 Parametrização tipo I - simetria dinâmica $SU(2)$

Desvendar a natureza dinâmica do modelo em estudo, com simetria dinâmica $SU(2)$, implica fazer escolhas adequadas para os parâmetros k_1 e k_2 e explorar as consequências decorrentes das equações (3.20)-(3.23), que determinam a dinâmica do sistema quântico para escolhas arbitrárias dos parâmetros $\omega(t)$ e $\Omega(t)$. Classifica-se como a parametrização do primeiro tipo (16) a escolher $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$. Esta escolha é motivada para estabelecer uma defasagem de $\pi/2$ na escala de tempo dinâmico determinada pela função $\gamma(t)$ entre ambas as funções $|a(t)|$ e $|b(t)|$. Obviamente ocorre uma perda de generalidade na estrutura da solução, porém a escolha permite escrever uma parametrização de forma mais simples dada por

$$|a(t)| = \sqrt{\cos^2 \gamma(t)}, \quad |b(t)| = \sqrt{\sin^2 \gamma(t)}, \quad (3.33)$$

a partir da qual se verifica as formas

$$\frac{d|a(t)|}{dt} = -\frac{\cos \gamma(t)}{\sqrt{\cos^2 \gamma(t)}} \sin \gamma(t) \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad (3.34)$$

$$\frac{d|b(t)|}{dt} = \frac{\sin \gamma(t)}{\sqrt{\sin^2 \gamma(t)}} \cos \gamma(t) \frac{d\gamma(t)}{dt}. \quad (3.35)$$

Dado que a função $\gamma(t)$ está a ser determinada a posteriori, pode-se impor a condição adicional de que $\gamma(t) \in [0, \pi/2]$ sem perder a generalidade da forma. Tal condição deve ser consistente com a solução obtida a partir da equação que determina a função $\gamma(t)$.

A partir das equações (3.20) e (3.22), verifica-se que

$$\frac{\cos \gamma(t)}{\sqrt{\cos^2 \gamma(t)}} \sin \gamma(t) \frac{d\gamma(t)}{dt} = |\omega(t)| \sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)), \quad (3.36)$$

$$\frac{\sin \gamma(t)}{\sqrt{\sin^2 \gamma(t)}} \cos \gamma(t) \frac{d\gamma(t)}{dt} = |\omega(t)| \sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)). \quad (3.37)$$

Isso significa que existe somente uma equação diferencial para $\gamma(t)$ dada na forma

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = |\omega(t)| \sin(\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)). \quad (3.38)$$

Note que o argumento da função seno contém as fases associadas ao campo transversal do operador hamiltoniano e as fases correspondentes às soluções do operador de evolução temporal. Neste ponto, pode-se admitir a existência de uma função real $\Theta(t)$ a ser determinada e um parâmetro real arbitrário θ_0 tal que

$$\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t) = \Theta(t) + \theta_0. \quad (3.39)$$

Deste modo a equação diferencial para a função $\gamma(t)$ assume uma forma que depende de $|\omega(t)|$, da função $\Theta(t)$ e da constante θ_0 , escrita como

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = |\omega(t)| \sin[\Theta(t) + \theta_0]. \quad (3.40)$$

Por integração direta tem-se que para a função

$$\gamma(t) = \int_0^t |\omega(t')| \sin[\Theta(t') + \theta_0] dt', \quad (3.41)$$

determinada em termos da função $\Theta(t)$ a ser determinada. Como consequências das soluções (3.41), obtém-se para as funções $|a(t)|$ e $|b(t)|$ as formas

$$|a(t)| = \sqrt{\cos^2 \left[\int_0^t |\omega(t')| \sin[\Theta(t') + \theta_0] dt' \right]}, \quad (3.42)$$

$$|b(t)| = \sqrt{\sin^2 \left[\int_0^t |\omega(t')| \sin[\Theta(t') + \theta_0] dt' \right]}. \quad (3.43)$$

Observando a estrutura das soluções (3.39) e (3.40), pode-se fazer a escolha $\theta_0 = \pi/2$, o que implica para a função $\gamma(t)$ a forma

$$\gamma(t) = \int_0^t |\omega(t')| \cos[\Theta(t')] dt', \quad (3.44)$$

e para as funções $|a(t)|$ e $|b(t)|$ as parametrizações

$$|a(t)| = \sqrt{\cos^2 \left[\int_0^t \omega(t') \cos[\Theta(t')] dt' \right]}, \quad (3.45)$$

$$|b(t)| = \sqrt{\sin^2 \left[\int_0^t \omega(t') \cos[\Theta(t')] dt' \right]}, \quad (3.46)$$

desde que $\Theta(0) = 0$. Assim, estabelece-se a condição inicial para a função $\Theta(t)$ para a qual é necessário estabelecer a equação que a determina em função dos parâmetros do operador hamiltoniano. Por outro lado, para uma função arbitrária $\gamma(t)$ as equações (3.22) e (3.23) podem ser escritas como

$$|a(t)| \dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t)|a(t)| + |\omega(t)||b(t)| \cos \left(\Theta(t) + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.47)$$

$$|b(t)| \dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t)|b(t)| - |\omega(t)||a(t)| \cos \left(\Theta(t) + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.48)$$

a partir das quais se estabelece equações diferenciais para as soma e diferença $\dot{\phi}_a(t) \pm \dot{\phi}_b(t)$ dadas por

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = -2\Omega(t) - \frac{|a(t)|^2 - |b(t)|^2}{|a(t)||b(t)|} |\omega(t)| \sin[\Theta(t)], \quad (3.49)$$

$$\dot{\phi}_a(t) - \dot{\phi}_b(t) = \frac{|a(t)|^2 + |b(t)|^2}{|a(t)||b(t)|} |\omega(t)| \sin[\Theta(t)]. \quad (3.50)$$

Além disso, pode-se verificar da equação (3.39) que se pode escrever a soma $\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t)$ em termos das funções $\dot{\phi}_\omega(t)$ e $\dot{\Theta}(t)$ como

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = \dot{\phi}_\omega(t) - \dot{\Theta}(t), \quad (3.51)$$

com as seguintes identidades

$$|a(t)|^2 - |b(t)|^2 = \cos^2 \gamma(t) - \sin^2 \gamma(t) = \cos 2\gamma(t), \quad (3.52)$$

$$|a(t)||b(t)| = \sqrt{\cos^2 \gamma(t) \sin^2 \gamma(t)} = \frac{1}{2} \sin 2\gamma(t). \quad (3.53)$$

Deste modo a equação diferencial para a soma $\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t)$ pode ser reescrita como sendo

$$\frac{\dot{\Theta}(t)}{2} - \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} = \Omega(t) - \frac{\cos 2\gamma(t)}{\sin 2\gamma(t)} |\omega(t)| \sin[\Theta(t)], \quad (3.54)$$

equivalente a forma

$$\frac{\dot{\Theta}(t)}{2} + |\omega(t)| \sin[\Theta(t)] \cot \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right] = \Omega(t) + \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2}. \quad (3.55)$$

Note que esta equação é uma equação integro-diferencial fixando a função $\Theta(t)$ em termos dos parâmetros do operador hamiltoniano, $\Omega(t)$, $|\omega(t)|$ e $\phi_\omega(t)$. Não é uma equação cuja solução analítica foi determinada explicitamente para $\Omega(t)$, $|\omega(t)|$ e $\phi_\omega(t)$ arbitrários, tratando-se de um problema em aberto no contexto da Física-Matemática, a ser considerado em trabalho futuro.

No intuito de se determinar as soluções para as fases $\phi_{a,b}(t)$, foca-se a atenção nas equações diferenciais que pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a(t) &= -\Omega(t) + |\omega(t)| \sin[\Theta(t)] \cot \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right] \\ &\quad - \frac{|\omega(t')| \sin[\Theta(t)]}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_b(t) &= \Omega(t) + |\omega(t)| \sin[\Theta(t)] \cot \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right] \\ &\quad + \frac{|\omega(t')| \sin[\Theta(t)]}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Da equação integro-diferencial para a função $\Theta(t)$, pode-se facilmente verificar que

$$-\Omega(t) + |\omega(t)| \sin[\Theta(t)] \cot \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right] = \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2},$$

de modo que as equações diferenciais para as fases $\phi_{a,b}(t)$ assumem a forma

$$\dot{\phi}_a(t) = \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2} - \frac{|\omega(t')| \sin[\Theta(t)]}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]}, \quad (3.58)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2} + \frac{|\omega(t')| \sin[\Theta(t)]}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]}. \quad (3.59)$$

Uma vez que $\phi_a(0) = 0$, $\phi_b(0) = -\pi/2$, $\Theta(0) = 0$ e $\phi_\omega(0)$ pode ser ajustado a assumir um valor nulo quando se prepara o sistema de forma adequada, por integração direta, obtém-se que as fases são determinadas a partir da função $\Theta(t)$ dos parâmetros do hamiltoniano do sistema por meio das equações

$$\phi_a(t) = \frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} - \int_0^t \frac{|\omega(t')|}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]} \sin [\Theta(t')] dt', \quad (3.60)$$

$$\phi_b(t) = \frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} + \int_0^t \frac{|\omega(t')|}{\sin \left[2 \int_0^t |\omega(t')| \cos \Theta(t') dt' \right]} \sin [\Theta(t')] dt' - \frac{\pi}{2}. \quad (3.61)$$

Embora os resultados discutidos para a parametrização do primeiro tipo produzam uma solução exata para o operador de evolução temporal do sistema de dois níveis com simetria $SU(2)$, verifica-se que tal solução depende da função $\Theta(t)$, que pode ser obtida apenas por meio da resolução de uma equação integro-diferencial. Determinar a solução desta equação para dependências arbitrárias dos parâmetros do operador hamiltoniano é o grande entrave na proposta de solução apresentada e define um problema de grande importância do ponto de vista matemático no contexto da dinâmica quântica de sistemas de dois níveis com simetria $SU(2)$. Uma vez desenvolvido um método que permite a solução exata da equação integro-diferencial nas condições anteriormente discutidas, o controle da dinâmica de sistemas de dois níveis será preciso, o que terá um impacto significativo na descrição de modelos quânticos que possam ser mapeados em sistemas de dois níveis com simetria dinâmica $SU(2)$.

3.1.2 Parametrização tipo II - simetria dinâmica $SU(2)$

Uma segunda forma de abordar o problema da parametrização das soluções do operador de evolução temporal com simetria dinâmica $SU(2)$ consiste em ampliar a generalidade na definição dos correspondentes parâmetros k_j^2 que podem admitidos na forma

$$k_1^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}, \quad (3.62)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{\mu^2 + 1}. \quad (3.63)$$

Note que a parametrização do primeiro tipo, considerada na subseção (3.1.1), corresponde ao caso particular em que $\mu = 0$. Além disso, o sinal do parâmetro μ não tem relevância para a forma da parametrização, que pode ser tomada positiva para manter a consistência com o MMN (14). Nesta formulação, as funções $|a_\mu(t)|$ e $|b_\mu(t)|$ são determinadas a partir de uma função real $\Phi_\mu(t)$ dependente do tempo e do parâmetro μ conforme as equações:

$$|a_\mu(t)| = \sqrt{\frac{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + 1}}, \quad (3.64)$$

$$|b_\mu(t)| = \sqrt{\frac{\sin^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + 1}}, \quad (3.65)$$

onde a condição $|a_\mu(t)|^2 + |b_\mu(t)|^2 = 1$ é necessária e suficiente para qualquer função real $\Phi_\mu(t)$ admissível, consistente com a estrutura do grupo $SU(2)$. Conforme deduzido anteriormente, as equações diferenciais para $|a_\mu(t)|$ e $|b_\mu(t)|$ têm as formas

$$\frac{d|a_\mu(t)|}{dt} = |\omega(t)| |b_\mu(t)| \sin[\phi_a(t) + \phi_b(t) - \phi_\omega(t)], \quad (3.66)$$

$$\frac{d|b_\mu(t)|}{dt} = |\omega(t)| |a_\mu(t)| \sin[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.67)$$

que são sempre as mesmas quaisquer que sejam as parametrizações consideradas. A partir das parametrizações (3.64) e (3.65), verifica-se que

$$\frac{d|a_\mu(t)|}{dt} = -\frac{1}{|a_\mu(t)|} \frac{\sin[\Phi_\mu(t)] \cos[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + 1} \frac{d\Phi_\mu(t)}{dt}, \quad (3.68)$$

$$\frac{d|b_\mu(t)|}{dt} = \frac{1}{|b_\mu(t)|} \frac{\sin[\Phi_\mu(t)] \cos[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + 1} \frac{d\Phi_\mu(t)}{dt}, \quad (3.69)$$

de tal modo que a seguinte equação se verifica

$$\frac{\sin[2\Phi_\mu(t)]}{2(\mu^2 + 1)} \frac{d\Phi_\mu(t)}{dt} = |\omega(t)| |a_\mu(t)| |b_\mu(t)| \sin[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)]. \quad (3.70)$$

A equação acima estabelece uma relação entre $\dot{\Phi}_\mu(t)$ e $\Phi_\mu(t)$ em função de $|a_\mu(t)|$, $|b_\mu(t)|$ e das fases $\phi_k(t)$, e implica na forma

$$\frac{d\Phi_\mu(t)}{dt} = \sqrt{\mu^2 + 1} |\omega(t)| \frac{2\sqrt{\mu^2 + 1} |a_\mu(t)| |b_\mu(t)|}{\sin[2\Phi_\mu(t)]} \sin[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)]. \quad (3.71)$$

Na equação diferencial (3.71) surge uma questão relativa ao grau de arbitrariedade que se pode considerar para a função $\Phi_\mu(t)$: neste sentido, ao se verificar atentamente a forma da equação diferencial, uma simplificação pode ser feita, assumindo uma função campo $\Phi_\mu(t)$ dependente unicamente do valor absoluto do campo transversal $|\omega(t)|$, com um coeficiente de proporcionalidade $\sqrt{\mu^2 + 1}$. Isto equivale a supor que a equação diferencial para a função $\Phi_\mu(t)$ tenha a forma

$$\frac{d\Phi_\mu(t)}{dt} = \sqrt{\mu^2 + 1} |\omega(t)|, \quad (3.72)$$

cujas solução é dada por

$$\Phi_\mu(t) = \sqrt{\mu^2 + 1} \int_0^t |\omega(t')| dt' + \Phi_\mu(0), \quad (3.73)$$

estabelecida unicamente pela componente transversal na simetria $SU(2)$. Note que a condição inicial para os parâmetros do operador de evolução temporal impõe que $\Phi_\mu(0) = 0$ o que está de acordo com a condição imposta pelo MMN (46). Como consequência direta desta simplificação, tem-se a seguinte condição como necessária:

$$2\sqrt{\mu^2 + 1} |a_\mu(t)| |b_\mu(t)| \sin[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = \sin[2\Phi_\mu(t)]. \quad (3.74)$$

A principal tarefa agora é analisar a condição da equação (3.74) e explorar suas consequências.

Das equações (3.64) e (3.65), verifica-se que

$$|a_\mu(t)||b_\mu(t)| = \frac{1}{\mu^2 + 1} [(\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)]) \operatorname{sen}^2[\Phi_\mu(t)]^{1/2}, \quad (3.75)$$

que escrita de uma forma mais adequada, lê-se como

$$|a_\mu(t)||b_\mu(t)| = \frac{|\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]|}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} \left[1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)] \right]^{1/2}. \quad (3.76)$$

A condição (3.74) implica na equação

$$\operatorname{sen}[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = \frac{\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]}{|\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]|} \left[1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)] \right]^{-1/2}. \quad (3.77)$$

Esta equação é interessante porque fixa o valor da argumento $\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)$ unicamente em termos de $\Phi_\mu(t)$ e valor de μ . Além disso, considerando as relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}[\operatorname{tg}^{-1}(x)] = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (3.78)$$

$$\cos[\operatorname{tg}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (3.79)$$

considerando o argumento na forma $x = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)]$, tem-se que

$$\operatorname{sen}[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = \frac{\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]}{|\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]|} \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)] \right) \right]. \quad (3.80)$$

Deste modo, pode-se escrever o argumento $\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)$ em termos de $\operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)]$ como

$$\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)] \right) + \frac{\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]}{|\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]|} \frac{\pi}{2}. \quad (3.81)$$

Note que o fator $\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]/|\operatorname{sen}[2\Phi_\mu(t)]|$ define uma função sinal, mas pode-se assumir o sinal positivo sem perda de generalidade. Além disso, nota-se que

$$\dot{\phi}_\omega(t) - \dot{\phi}_a(t) - \dot{\phi}_b(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left[\frac{\sec^2[\Phi_\mu(t)]}{1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)]} \right] \dot{\Phi}_\mu(t). \quad (3.82)$$

Considerando a equação (3.72), tem-se que a equação (3.82) assume a forma

$$\dot{\phi}_\omega(t) - \dot{\phi}_a(t) - \dot{\phi}_b(t) = \mu |\omega(t)| \left[\frac{\sec^2[\Phi_\mu(t)]}{1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)]} \right]. \quad (3.83)$$

Da soma $\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t)$ na equação

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = -2\Omega(t) - \frac{|a_\mu(t)|^2 - |b_\mu(t)|^2}{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|} |\omega(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.84)$$

tem-se como resultado a equação

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\omega(t) + 2\Omega(t) &= \mu |\omega(t)| \left[\left(\frac{\sec^2[\Phi_\mu(t)]}{1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)]} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu} \frac{|a_\mu(t)|^2 - |b_\mu(t)|^2}{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

O lado direito desta equação pode ser explicitamente determinado em termos de $\Phi_\mu(t)$. Aplicando os seguintes resultados

$$|a_\mu(t)|^2 - |b_\mu(t)|^2 = \frac{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)] - \sin^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + 1}, \quad (3.86)$$

$$\frac{1}{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|} = \frac{2\sqrt{\mu^2 + 1}}{|\sin[2\Phi_\mu(t)]|} \left[1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)] \right]^{-1/2}, \quad (3.87)$$

$$\cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\sin[2\Phi_\mu(t)]}{|\sin[2\Phi_\mu(t)]|} \frac{\mu \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)]}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left[1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)] \right]^{-1/2}, \quad (3.88)$$

Deste modo, a partir desta identidade, própria da parametrização sendo considerada, verifica-se que a condição

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sec^2[\Phi_\mu(t)]}{1 + \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1} \operatorname{tg}^2[\Phi_\mu(t)]} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{|a_\mu(t)|^2 - |b_\mu(t)|^2}{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \right] = 1.$$

Deste modo, como resultado desta identidade, verifica-se que a condição (3.85) toma a forma

$$\frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} + \Omega(t) = \mu |\omega(t)|, \quad (3.89)$$

como uma condição necessária a parametrização considerada que depende explicitamente de μ .

A equação (3.89) relaciona a intensidade da componente transversal $|\omega(t)|$, a componente longitudinal $\Omega(t)$ e a derivada temporal da fase da componente transversal $\dot{\phi}_\omega(t)$. Considerando a parametrização tipo II, a equação (3.89) surge do problema geral de Cauchy-Liouville na parametrização $a_\mu(t)$ e $b_\mu(y)$ como uma consequência da restrição sobre a função $\Phi_\mu(t)$, impondo que satisfaça a equação (3.72).

Dando continuidade ao procedimento para se determinar a solução para o operador de evolução temporal com simetria $SU(2)$, considerando a parametrização $a_\mu(t)$ e $b_\mu(y)$, o objetivo neste ponto da discussão consiste em se determinar as formas explícitas para as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$. Para tal propósito, inspeciona-se as equações

$$\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t) + |\omega(t)| \frac{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|}{|a_\mu(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.90)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t) - |\omega(t)| \frac{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|}{|b_\mu(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)]. \quad (3.91)$$

Além disso, uma vez que

$$|a_\mu(t)||b_\mu(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\mu}{\mu^2 + 1} \sin^2[\Phi_\mu(t)], \quad (3.92)$$

que implica nas formas

$$\frac{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|}{|a_\mu(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\mu \sin^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)]}, \quad (3.93)$$

$$\frac{|a_\mu(t)||b_\mu(t)|}{|b_\mu(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\mu, \quad (3.94)$$

tem-se as equações diferenciais para as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ dadas na forma

$$\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t) - |\omega(t)| \frac{\mu \sin^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)]}, \quad (3.95)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t) + \mu |\omega(t)|. \quad (3.96)$$

Essas equações podem ser solucionadas de forma direta e simples. A solução da equação para $\phi_b(t)$ tem a forma

$$\phi_b(t) = \phi_b(0) - \int_0^t \Omega(t') dt' + \mu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.97)$$

que em se aplicando a condição inicial $\phi_b(0)$ resulta na forma

$$\phi_b(t) = \phi_\omega(0) - \frac{\pi}{2} - \int_0^t \Omega(t') dt' + \mu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.98)$$

de onde se verifica que tal solução é linear no parâmetro μ . Além disso, a equação diferencial para $\phi_a(t)$ tem a forma

$$\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t) - \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \frac{\mu \sin^2[\Phi_\mu(t)]}{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t)]} \frac{d\phi_\mu(t)}{dt}, \quad (3.99)$$

cuja solução é dada por

$$\phi_a(t) = - \int_0^t \Omega(t') dt' - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \int_0^t \frac{\sin^2[\Phi_\mu(t')]}{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t')]} \frac{d\Phi_\mu(t')}{dt'} dt'. \quad (3.100)$$

Note que, diferentemente da solução para a fase $\phi_b(t)$, a solução (3.100) ainda apresenta uma dependência explícita em $\Phi_\mu(t)$, que pode ser simplificada. Isto é possível uma vez que

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \int_0^t \frac{\sin^2[\Phi_\mu(t')]}{\mu^2 + \cos^2[\Phi_\mu(t')]} \frac{d\Phi_\mu(t')}{dt'} dt' = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \text{tg}[\Phi_\mu(t)] \right] \\ & - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \Phi_\mu(t). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Desta forma, resulta que

$$\phi_a(t) = - \int_0^t \Omega(t') dt' + \mu \int_0^t |\omega(t')| - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)] \right]. \quad (3.102)$$

Porém, considerando que

$$\Phi_\mu(t) = \sqrt{\mu^2 + 1} \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.103)$$

e da condição (3.89) que pode ser escrita na forma

$$\frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\phi_\omega(0)}{2} = - \int_0^t \Omega(t') dt' + \mu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.104)$$

resulta para a fase $\phi_a(t)$ a forma final

$$\phi_a(t) = \frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\phi_\omega(0)}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \operatorname{tg}[\Phi_\mu(t)] \right]. \quad (3.105)$$

Finalmente, tem-se a parametrização discutida como uma segunda possível solução para o operador de evolução temporal para um hamiltoniano com simetria $SU(2)$.

3.2 SISTEMA DE DOIS NÍVEIS COM SIMETRIA DINÂMICA $SU(1, 1)$

Uma vez familiarizados com o problema da construção da solução do operador de evolução temporal para o operador hamiltoniano de um sistema de dois níveis com simetria dinâmica $SU(2)$ e identificadas as possíveis soluções para os elementos de matrizes da representação do operador de evolução temporal, a questão a seguir consiste em identificar como se procede para o caso em que a simetria dinâmica é alterada considerando o grupo de simetria dinâmica $SU(1, 1)$. No caso bidimensional, considerando uma representação finita para a estrutura das representações no contexto de operadores hamiltonianos não-hermitianos, a resposta desta questão se encontra na forma como o operador de evolução temporal $U_{SU(1,1)}$ está representado e sujeito a condição $\det[U_{SU(1,1)}] = 1$, uma consequência das propriedades do grupo $SU(1, 1)$. Note que, tratando-se de uma representação adequada para um operador de evolução temporal associado a um operador não-hermitiano, no momento não se faz qualquer consideração a respeito do tipo de sistema físico a ser representado.

O interesse é traçar um paralelo ao que se fez para o operador de evolução temporal associado ao grupo $SU(2)$, que obviamente tem representação física direta devido ao fato de estar associado a um operador naturalmente hermitiano. Conforme discutido em (17), um sistema quântico de dois níveis com simetria $SU(1, 1)$ tem seu operador hamiltoniano representado por uma matriz bidimensional na forma

$$H(t) = \begin{bmatrix} \Omega(t) & -\omega(t) \\ \omega^*(t) & -\Omega(t) \end{bmatrix}, \quad (3.106)$$

se tratando de um operador não-hermitiano, uma vez que se verifica a identidade

$$H(t)M = MH^\dagger(t), \quad (3.107)$$

com a matriz M dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Para a simetria dinâmica $SU(1, 1)$ a parametrização do operador de evolução temporal segue a forma de Cayley-Klein na qual

$$U(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) & -\mathbf{b}(t) \\ -\mathbf{b}^*(t) & \mathbf{a}^*(t) \end{bmatrix}, \quad U^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^*(t) & \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{b}^*(t) & \mathbf{a}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

com as funções complexas $\mathbf{a}(t)$ e $\mathbf{b}(t)$ satisfazendo a relação $\det U(t) = |\mathbf{a}(t)|^2 - |\mathbf{b}(t)|^2 = 1$. Similarmente ao considerado para o grupo $SU(1, 1)$, estas funções complexas possuem a forma polar dada por $\mathbf{a}(t) = |\mathbf{a}(t)| \exp\{i\phi_a(t)\}$ e $\mathbf{b}(t) = |\mathbf{b}(t)| \exp\{i\phi_b(t)\}$. O operador de evolução U , gerado pelo hamiltoniano não-hermitiano H , satisfaz o problema de Cauchy-Liouville $i\dot{U}(t) = H(t)U(t)$ com $U(0) = I$ o que implica no seguinte problema de Cauchy-Liouville:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{\Omega}{i}\mathbf{a} + \frac{\omega}{i}\mathbf{b}^*, \quad \mathbf{a}(0) = 1, \quad (3.110)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{\omega}{i}\mathbf{a}^* + \frac{\Omega}{i}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}(0) = 0. \quad (3.111)$$

A condição inicial $U(0) = I$ aplicada a esse par de equações implica que

$$\dot{\mathbf{a}}(0) = \frac{\Omega(0)}{i}, \quad \dot{\mathbf{b}}(0) = \frac{\omega(0)}{i}, \quad (3.112)$$

desde que $\phi_a(0) = 0$ devido a $\mathbf{a}(0) = 1$. Assim, para o sistema com simetria dinâmica $SU(1, 1)$ se verifica

$$\frac{d|\mathbf{a}(0)|}{dt} + i\dot{\phi}_a(0) = \frac{\Omega(0)}{i}, \quad (3.113)$$

$$\frac{d|\mathbf{b}(0)|}{dt} \exp[i\phi_b(0)] = \omega(0) \exp\left[i\left(\phi_\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (3.114)$$

De forma similar ao que se faz para a simetria dinâmica $SU(2)$, assume-se $\Omega(0)$ como um parâmetro real, o que implica em

$$\frac{d|\mathbf{a}(0)|}{dt} = 0, \quad \dot{\phi}_a(0) = -\Omega(0), \quad (3.115)$$

Para a função $b(t)$, verifica-se

$$\frac{d|\mathbf{b}(0)|}{dt} = |\omega(0)|, \quad \exp[i\phi_b(0)] = \exp\left[i\left(\phi_\omega(0) - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (3.116)$$

Essas equações implicam que

$$\phi_a(0) = 0, \quad \phi_b(0) = \phi_\omega(0) - \frac{\pi}{2}. \quad (3.117)$$

Note que as condições obtidas acima são similares as que foram obtidas para os seus equivalentes na simetria $SU(2)$. A diferença que se observa ao desenvolver o procedimento na simetria $SU(1, 1)$ está na forma do problema de Cauchy-Liouville e, principalmente, na condição $|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = 1$, a assinatura fundamental do grupo $SU(1, 1)$ no contexto de sua representação. Isto tem um significado profundo no contexto das funções que determinam as soluções do operador de evolução temporal. Enquanto, para a simetria dinâmica $SU(2)$, as funções trigonométricas atendem à condição $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$, seria a condição $|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = 1$ um indicativo de que as funções correspondentes na simetria $SU(1, 1)$ são funções hiperbólicas, dado que a condição $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ é uma identidade verificável no contexto das funções hiperbólicas (47).

Desta forma, dando sequência à discussão e procurando seguir a linha de raciocínio do desenvolvimento analítico realizado para a representação do grupo $SU(2)$, verifica-se facilmente que as formas possíveis para as funções reais $|\alpha(t)|$ e $|\beta(t)|$ correspondentes ao problema de Cauchy-Liouville com simetria $SU(1, 1)$ e compatíveis com a condição $|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = 1$ podem ser dadas em termos das funções hiperbólicas $\cosh \Lambda(t)$ e $\sinh \Lambda(t)$, considerando uma função real $\Lambda(t)$ real a ser determinada em função dos parâmetros do hamiltoniano do sistema. No entanto, os resultados apresentados em (17, 48) demonstram que, para a simetria $SU(1, 1)$, há duas possibilidades: o operador de evolução temporal pode ser parametrizado tanto em termos de soluções hiperbólicas quanto de funções trigonométricas. Isto é possível pela generalização do MMN para a simetria $SU(1, 1)$, conforme apontado pelos autores, mas não consta do objeto deste trabalho de revisão. No entanto, é possível considerar o desenvolvimento semelhante ao realizado para o grupo $SU(2)$ e identificar como pequenas diferenças entre os dois problemas alteram profundamente a natureza das soluções do operador de evolução temporal.

Neste estudo, verifica-se que no problema com simetria $SU(2)$ se tem a dinâmica quântica de um operador hamiltoniano hermitiano, enquanto no caso da simetria dinâmica $SU(1, 1)$ a física a ser descrita está associada a um problema envolvendo não-Hermiticidade, e isto tem um impacto significativo nas formas das soluções admissíveis. Assim, pensando em soluções para o operador de evolução temporal com simetria $SU(1, 1)$, pode-se considerar ambas as possibilidades de parametrização, incluindo tanto soluções trigonométricas quanto hiperbólicas. Neste sentido, pode-se pensar nas formas conforme será visto a seguir.

Verifica-se que a representação geral em termos de funções trigonométricas assume a forma

$$|\alpha(t)| = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \cos^2 \Lambda(t)}, \quad (3.118)$$

$$|\beta(t)| = \sqrt{k_2^2 \sin^2 \Lambda(t)}, \quad (3.119)$$

desde que a condição abaixo seja verificada

$$|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = k_1^2 - k_2^2 \cos^2 \Lambda(t) - k_2^2 \sin^2 \Lambda(t) = k_1^2 - k_2^2 = 1, \quad (3.120)$$

o que ocorre quando k_1 e k_2 satisfazem a condição

$$k_1^2 - k_2^2 = 1. \quad (3.121)$$

Por outro lado, pode-se considerar uma representação geral em termos de funções hiperbólicas na forma

$$|\mathfrak{a}(t)| = \sqrt{k_1'^2 \cosh^2 \Lambda'(t) - k_2'^2}, \quad (3.122)$$

$$|\mathfrak{b}(t)| = \sqrt{k_1'^2 \sinh^2 \Lambda'(t)}, \quad (3.123)$$

que deve obedecer a condição

$$|\mathfrak{a}(t)|^2 - |\mathfrak{b}(t)|^2 = k_1'^2 \cosh^2 \Lambda'(t) - k_2'^2 - k_1'^2 \sinh^2 \Lambda'(t) = k_1'^2 - k_2'^2 = 1, \quad (3.124)$$

e que implica na condição (3.121). Isto demonstra que ambas as parametrizações são possíveis, confirmando os dois regimes de soluções, conforme apresentado em (17,48). O que se faz a seguir sem considerar a aplicação do MMN, é indicar como a solução do problema de Cauchy-Liouville para a representação do grupo $SU(1, 1)$ produz os resultados originalmente desenvolvidos em (17,48).

Seguindo o procedimento similar ao desenvolvido para a simetria dinâmica $SU(2)$, o mais óbvio é considerar a situação mais simples, em que se assume $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$. Isto equivale ao que tem sido denominado "parametrização do tipo I".

3.2.1 Parametrização tipo I - simetria dinâmica $SU(1, 1)$

Assumindo $k_1^2 = 1$ e $k_2^2 = 0$, exclui-se necessariamente a solução trigonométrica, uma vez que se obtém $\mathfrak{a}(t) = 1$ e $\mathfrak{b}(t) = 0$. Trata-se de uma solução trivial de um problema estacionário. Algo restritivo para o problema dinâmico de interesse a expressar a generalidade das soluções com simetria dinâmica $SU(1, 1)$. Neste caso, com a condição previamente assumida, somente faz sentido a parametrização em termos de funções hiperbólicas dadas por

$$|\mathfrak{a}(t)| = \sqrt{\cosh^2 \Lambda(t)} = \cosh \Lambda(t), \quad (3.125)$$

$$|\mathfrak{b}(t)| = \sqrt{\sinh^2 \Lambda(t)} = |\sinh \Lambda(t)|. \quad (3.126)$$

O procedimento é similar ao que fora realizado para o grupo $SU(2)$, e portanto, alguns detalhes operacionais serão omitidos, evidenciando somente as diferenças relevantes para as diferentes simetrias dinâmicas em estudo. Estas formas de parametrização aplicadas nas equações

$$\frac{d|\mathfrak{a}(t)|}{dt} = |\omega(t)| |\mathfrak{b}(t)| \sin[\phi_\omega(t) - \phi_\mathfrak{a}(t) - \phi_\mathfrak{b}(t)], \quad (3.127)$$

$$\frac{d|\mathfrak{b}(t)|}{dt} = |\omega(t)| |\mathfrak{a}(t)| \sin[\phi_\omega(t) - \phi_\mathfrak{a}(t) - \phi_\mathfrak{b}(t)], \quad (3.128)$$

$$\frac{d\phi_\mathfrak{a}(t)}{dt} |\mathfrak{a}(t)| = -\Omega(t) |\mathfrak{a}(t)| - |\omega(t)| |\mathfrak{b}(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_\mathfrak{a}(t) - \phi_\mathfrak{b}(t)], \quad (3.129)$$

$$\frac{d\phi_\mathfrak{b}(t)}{dt} |\mathfrak{b}(t)| = -\Omega(t) |\mathfrak{b}(t)| - |\omega(t)| |\mathfrak{a}(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_\mathfrak{a}(t) - \phi_\mathfrak{b}(t)], \quad (3.130)$$

implicam para a função $\Lambda(t)$ a ser determinada pela equação diferencial

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = |\omega(t)| \operatorname{sen}[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad 0 < \Lambda(t) \leq \infty. \quad (3.131)$$

Sem perda de generalidade é possível restringir-se as funções $\Lambda(t)$ para que tenha valores reais e positivos, uma vez que esta escolha evita o problema do sinal na parametrização para solução $b(t)$ em termos $\Lambda(t)$. Para o modelo $SU(2)$, considera-se a função $\Phi(t)$ restrita ao intervalo $[0, \pi/2]$ sem perda de generalidades.

Similarmente, pode-se considerar tal restrição aplicada a $\Lambda(t)$ e como feito para o caso da simetria $SU(2)$, introduz-se a função $\Theta(t)$ de tal forma que

$$\Theta(t) + \frac{\pi}{2} = \phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t), \quad (3.132)$$

que implica na forma adequada para $\Lambda(t)$ dada por

$$\Lambda(t) = \int_0^t |\omega(t')| \cos[\Theta(t')] dt', \quad 0 < \Lambda(t) \leq \infty. \quad (3.133)$$

Consequentemente, para as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ se tem as equações diferenciais na forma

$$\frac{d\phi_a(t)}{dt} = -\Omega(t) + |\omega(t)| \frac{|b(t)|}{|a(t)|} \operatorname{sen}[\Theta(t)], \quad (3.134)$$

$$\frac{d\phi_b(t)}{dt} = -\Omega(t) + |\omega(t)| \frac{|a(t)|}{|b(t)|} \operatorname{sen}[\Theta(t)], \quad (3.135)$$

a partir das quais se obtém as formas

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = -2\Omega(t) + |\omega(t)| \left(\frac{|a(t)|^2 + |b(t)|^2}{|a(t)||b(t)|} \right) \operatorname{sen}[\Theta(t)], \quad (3.136)$$

$$\dot{\phi}_a(t) - \dot{\phi}_b(t) = -|\omega(t)| \left(\frac{|a(t)|^2 - |b(t)|^2}{|a(t)||b(t)|} \right) \operatorname{sen}[\Theta(t)]. \quad (3.137)$$

Levando-se em conta que

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = \dot{\phi}_\omega(t) - \dot{\Theta}(t), \quad (3.138)$$

$$\cosh^2 \Lambda(t) + \sinh^2 \Lambda(t) = \cosh 2\Lambda(t), \quad (3.139)$$

$$4 \cosh^2 \Lambda(t) \sinh^2 \Lambda(t) = \operatorname{sen}^2 2\Lambda(t), \quad (3.140)$$

tem-se como resultado a equação diferencial para a função $\Theta(t)$

$$\frac{\dot{\Theta}(t)}{2} - \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} = \Omega(t) - \frac{\cosh[2\Lambda(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]} |\omega(t)| \operatorname{sen}[\Theta(t)], \quad 0 < \Lambda(t) \leq \infty, \quad (3.141)$$

que é equivalente a forma

$$\frac{\dot{\Theta}(t)}{2} + \frac{\cosh[2\Lambda(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]} |\omega(t)| \operatorname{sen}[\Theta(t)] = \Omega(t) + \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2}, \quad 0 < \Lambda(t) \leq \infty. \quad (3.142)$$

Considerando uma função arbitrária $\Lambda(t)$, pode-se determinar as formas das soluções nas fases $\phi_{a,b}(t)$. As equações diferenciais para $\phi_{a,b}(t)$ assumem a forma

$$\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t) + \frac{2|\omega(t)| \sinh^2 \Lambda(t)}{2 \cosh \Lambda(t) \sinh \Lambda(t)} \text{sen}[\Theta(t)], \quad (3.143)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t) + \frac{2|\omega(t)| \cosh^2 \Lambda(t)}{2 \cosh \Lambda(t) \sinh \Lambda(t)} \text{sen}[\Theta(t)], \quad (3.144)$$

que podem ser reescritas na forma

$$\dot{\phi}_a(t) = -\Omega(t) + \frac{|\omega(t)|}{\sinh[2\Lambda(t)]} \text{sen}[\Theta(t)] - |\omega(t)| \frac{\text{sen}[\Theta(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]}, \quad (3.145)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = -\Omega(t) + \frac{|\omega(t)|}{\sinh[2\Lambda(t)]} \text{sen}[\Theta(t)] + |\omega(t)| \frac{\text{sen}[\Theta(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]}. \quad (3.146)$$

Uma vez que

$$\frac{\cosh[2\Lambda(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]} |\omega(t)| \text{sen}[\Theta(t)] = \Omega(t) + \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2}, \quad (3.147)$$

estabelece-se as equações diferenciais para as fases $\phi_{a,b}(t)$ dadas como

$$\dot{\phi}_a(t) = \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2} - \frac{|\omega(t)| \text{sen}[\Theta(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]}, \quad (3.148)$$

$$\dot{\phi}_b(t) = \frac{\dot{\phi}_\omega(t)}{2} - \frac{\dot{\Theta}(t)}{2} + \frac{|\omega(t)| \text{sen}[\Theta(t)]}{\sinh[2\Lambda(t)]}. \quad (3.149)$$

Neste ponto da construção das soluções, considera-se que $\phi_a(0) = 0$, com a condição $\Theta(0) = 0$ (similar ao que se faz para a simetria $SU(2)$), e $\phi_\omega(0) \neq 0$. Isto implica que $\phi_b(0) = \phi_\omega(0) - \pi/2$. Nesse sentido, para uma função geral positiva $\Lambda(t)$, as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ são determinadas a partir das equações

$$\phi_a(t) - \phi_a(0) = \frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} - \int_0^t \frac{|\omega(t')| \text{sen}[\Theta(t')]}{\sinh 2\Lambda(t')} dt', \quad (3.150)$$

$$\phi_b(t) - \phi_b(0) = \frac{\phi_\omega(t)}{2} - \frac{\phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} + \int_0^t \frac{|\omega(t')| \text{sen}[\Theta(t')]}{\sinh 2\Lambda(t')} dt', \quad (3.151)$$

e que devem satisfazer as condições

$$\phi_a(0) = 0, \quad \phi_b(0) = \phi_\omega(0) - \pi/2. \quad (3.152)$$

Isto implica que

$$\phi_a(t) = \frac{\phi_\omega(t) - \phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} - \int_0^t \frac{|\omega(t')| \text{sen}[\Theta(t')]}{\sinh 2\Lambda(t')} dt', \quad (3.153)$$

$$\phi_b(t) = \frac{\phi_\omega(t) + \phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\Theta(t)}{2} + \int_0^t \frac{|\omega(t')| \text{sen}[\Theta(t')]}{\sinh 2\Lambda(t')} dt' - \frac{\pi}{2}. \quad (3.154)$$

Assim como no caso da simetria $SU(2)$, note que para uma função arbitrária $\Lambda(t)$, a função $\Theta(t)$ é determinada através da equação integro-diferencial

$$2\dot{\Theta}(t) = \dot{\phi}_\omega(t) + 2\Omega(t) - 2|\omega(t)| \frac{\cosh 2\Lambda(t)}{\sinh 2\Lambda(t)} \sin[\Theta(t)], \quad 0 < \Lambda(t) \leq \infty, \quad (3.155)$$

cuja solução geral determina a solução do problema de Cauchy-Liouville em termos da função $\Theta(t)$ para a simetria dinâmica $SU(1, 1)$. Trata-se de um resultado obtido pela aplicação direta do MMN, mas apresentado por meio de um procedimento alternativo, como objeto de estudo e revisão. Assim, como na simetria dinâmica $SU(2)$, a solução desta equação integro-diferencial constitui um problema matemático em aberto.

3.2.2 Parametrização do tipo II - simetria dinâmica $SU(1, 1)$

Considerando a parametrização do tipo II em ambos os regimes trigonométrico e hiperbólico, a rota correta a seguir é executar o procedimento similar ao que foi desenvolvido para o caso de simetria dinâmica $SU(2)$, construindo-se a solução das equações diferenciais tanto para as funções $|\mathfrak{a}(t)|$ e $|\mathfrak{b}(t)|$ quanto para as fases $\phi_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}(t)$, de modo similar ao desenvolvido na seção 3.1.2. Para não tornar a apresentação cansativa, uma vez que o procedimento para o caso do grupo $SU(2)$ está desenvolvido com os detalhes que permitem ao leitor compreender adequadamente os procedimentos operacionais, apresentam-se, nessa seção, os resultados de forma resumida.

O regime trigonométrico da parametrização do tipo II é caracterizado pelas seguintes escolhas das constantes k_1 e k_2 :

$$k_1^2 = \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1}, \quad k_2^2 = \frac{1}{\nu^2 - 1}, \quad (3.156)$$

de tal forma que

$$|\mathfrak{a}(t)| = \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1}}, \quad |\mathfrak{b}(t)| = \sqrt{\frac{\sin^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1}}, \quad (3.157)$$

onde o parâmetro real ν (equivalente ao parâmetro μ da simetria $SU(2)$) satisfaz a condição $\nu > 1$, em concordância com os resultados apresentados em (17, 48). Para as equações (3.127) e (3.128), tem-se que

$$\frac{d|\mathfrak{a}(t)|}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \cos^2 \Lambda_\nu(t)}} \frac{\sin 2\Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1} \frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt}, \quad (3.158)$$

$$\frac{d|\mathfrak{b}(t)|}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\sin^2 \Lambda_\nu(t)}} \frac{\sin 2\Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1} \frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt}, \quad (3.159)$$

de tal forma que ambas implicam em

$$\frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt} = 2(\nu^2 - 1) |\omega(t)| \frac{|\mathfrak{a}(t)||\mathfrak{b}(t)|}{\sin 2\Lambda_\nu(t)} \sin[\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)], \quad \nu > 1. \quad (3.160)$$

Define-se, então, a equação diferencial para a função $\Lambda_\nu(t)$ na forma

$$\frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt} = \sqrt{\nu^2 - 1} |\omega(t)|, \quad \nu > 1, \quad (3.161)$$

com a sua solução na forma

$$\Lambda_\nu(t) = \sqrt{\nu^2 - 1} \int_0^t |\omega(t')| dt'. \quad (3.162)$$

Esta solução tem uma certa similaridade com a equivalente obtida na simetria dinâmica $SU(2)$, exceto que necessariamente se deve verificar $\nu > 1$. Além disso, note que a condição $\nu > 1$ mantém $\Lambda_\nu(t)$ como uma função real positiva ao longo do tempo, ao passo que também garante a positividade das funções $|\mathfrak{a}(t)|$ e $|\mathfrak{b}(t)|$. De toda essa operacionalização surge a restrição

$$2\sqrt{\nu^2 - 1} \frac{|\mathfrak{a}(t)| |\mathfrak{b}(t)|}{\sin 2\Lambda_\nu(t)} \sin[\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)] = 1, \quad (3.163)$$

com o produto $|\mathfrak{a}(t)| |\mathfrak{b}(t)|$ dado por

$$|\mathfrak{a}(t)| |\mathfrak{b}(t)| = \frac{\sin 2\Lambda_\nu(t)}{2\sqrt{\nu^2 - 1}} \left[1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \operatorname{tg}^2 \Lambda_\nu(t) \right]^{1/2}. \quad (3.164)$$

A condição (3.163) implica que

$$\sin[\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)] = \left[1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \operatorname{tg}^2 \Lambda_\nu(t) \right]^{-1/2}, \quad (3.165)$$

que com o auxílio das relações trigonométricas

$$\sin[\operatorname{tg}^{-1}(x)] = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (3.166)$$

$$\cos[\operatorname{tg}^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad (3.167)$$

obtem-se que

$$\sin[\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)] = \cos \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg} \Lambda_\nu(t) \right) \right], \quad \nu > 1. \quad (3.168)$$

Isto implica para a fase $\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)$ a relação

$$\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg} \Lambda_\nu(t) \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (3.169)$$

de modo que

$$\cos[\phi_\omega(t) - \phi_{\mathfrak{a}}(t) - \phi_{\mathfrak{b}}(t)] = \sin \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg} \Lambda_\nu(t) \right) \right]. \quad (3.170)$$

Note que se pode assumir, sem perda de generalidade, a condição

$$0 \leq \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg}[\Lambda_\nu(t)] \right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.171)$$

o que implica na relação estabelecendo um vínculo entre a fase $\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)$ e a função $\Lambda_\nu(t)$ na forma

$$\sin[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = \cos \left[\text{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \text{tg} \Lambda_\nu(t) \right) \right]. \quad (3.172)$$

Portanto, verifica-se que

$$\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \text{tg} \Lambda_\nu(t) \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (3.173)$$

assim estabelecendo a equação diferencial na forma

$$\dot{\phi}_a(t) + \dot{\phi}_b(t) = \dot{\phi}_\omega(t) - \nu |\omega(t)| \left[\frac{(\nu^2 - 1) \sec^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} \right]. \quad (3.174)$$

Além disso, a partir da equação

$$\frac{d\phi_a(t)}{dt} + \frac{d\phi_b(t)}{dt} = -2\Omega(t) - \frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{|\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} |\omega(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.175)$$

resulta que

$$\dot{\phi}_\omega(t) + 2\Omega(t) = \nu |\omega(t)| \left[\left(\frac{(\nu^2 - 1) \sec^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} \right) - \frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{\nu |\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \right]. \quad (3.176)$$

Baseando-se nas equações

$$|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2 = \frac{\nu^2 - \cos^2 \Lambda_\nu(t) + \sin^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1}, \quad (3.177)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} = \frac{2\sqrt{\nu^2 - 1}}{|\sin 2\Lambda_\nu(t)|} \left[1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t) \right]^{-1/2}, \quad (3.178)$$

$$\cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\sin 2\Lambda_\nu(t)}{|\sin 2\Lambda_\nu(t)|} \frac{\nu \text{tg} \Lambda_\nu(t)}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \left[1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t) \right]^{-1/2}, \quad (3.179)$$

pode-se concluir que

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{\nu |\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \\ &= - \left(\frac{\nu^2 - \cos^2 \Lambda_\nu(t) + \sin^2 \Lambda_\nu(t)}{(\nu^2 - 1) \cos^2 \Lambda_\nu(t)} \right) \left[1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Então, isto implica na identidade

$$-\frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{\nu |\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = \frac{\nu^2 \sec^2 \Lambda_\nu(t) - 1 + \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)}. \quad (3.181)$$

A partir de todos esses resultados, verifica-se que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sec^2 \Lambda_\nu(t)}{1 + \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} \right) - \frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{\nu |\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \\ &= \frac{(\nu^2 - 1) \sec^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} + \frac{\nu^2 \sec^2 \Lambda_\nu(t) - 1 + \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} \\ &= \frac{2\nu^2 - 2 + 2\nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)}{\nu^2 - 1 + \nu^2 \text{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} = 2, \end{aligned} \quad (3.182)$$

o que implica na identidade

$$\left[\left(\frac{\sec^2 \Lambda_\nu(t)}{1 + \frac{\nu^2}{\nu^2-1} \operatorname{tg}^2 \Lambda_\nu(t)} \right) - \frac{|\mathbf{a}(t)|^2 + |\mathbf{b}(t)|^2}{\nu |\mathbf{a}(t)| |\mathbf{b}(t)|} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] \right] = 2. \quad (3.183)$$

Então, aplicando a identidade (3.183) na equação (3.176), tem-se como resultado a equação

$$\dot{\phi}_\omega(t) + 2\Omega(t) = 2\nu|\omega(t)|, \quad \nu > 1. \quad (3.184)$$

Note que a equação (3.184) é similar à equação (3.89), embora pertençam a simetrias diferentes. Essa similaridade é devida à natureza bidimensional das representações para os operadores de evolução temporal associados às simetrias $SU(2)$ e $SU(1, 1)$. No entanto, observe que enquanto $0 \leq \mu \leq \infty$ se tem $1 \leq \nu \leq \infty$, o que naturalmente implica naturalmente na questão relativa ao parâmetro ν poder estar definido no intervalo $[0, 1]$.

Dando sequência à análise das equações associadas ao regime $\nu \in [1, \infty[$, as equações diferenciais para as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ assumem a forma

$$\frac{d\phi_a(t)}{dt} = -\Omega(t) - |\omega(t)| \frac{|\mathbf{a}(t)||\mathbf{b}(t)|}{|\mathbf{a}(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.185)$$

$$\frac{d\phi_b(t)}{dt} = -\Omega(t) - |\omega(t)| \frac{|\mathbf{a}(t)||\mathbf{b}(t)|}{|\mathbf{b}(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)], \quad (3.186)$$

para as quais se pode verificar que

$$|\mathbf{a}(t)||\mathbf{b}(t)| \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\nu}{\nu^2 - 1} \operatorname{sen}^2[\Lambda_\nu(t)], \quad (3.187)$$

resultando nas igualdades

$$\frac{|\mathbf{a}(t)||\mathbf{b}(t)|}{|\mathbf{a}(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\frac{\nu \operatorname{sen}^2[\Lambda_\nu(t)]}{\nu^2 - \cos^2[\Lambda_\nu(t)]}, \quad (3.188)$$

$$\frac{|\mathbf{a}(t)||\mathbf{b}(t)|}{|\mathbf{b}(t)|^2} \cos[\phi_\omega(t) - \phi_a(t) - \phi_b(t)] = -\nu. \quad (3.189)$$

Finalmente, vê-se que considerando essas igualdades, têm-se as equações diferenciais para as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ dadas por

$$\frac{d\phi_a(t)}{dt} = -\Omega(t) + |\omega(t)| \frac{\nu \operatorname{sen}^2[\Lambda_\nu(t)]}{\nu^2 - \cos^2[\Lambda_\nu(t)]}, \quad (3.190)$$

$$\frac{d\phi_b(t)}{dt} = -\Omega(t) + \nu|\omega(t)|. \quad (3.191)$$

A solução da equação diferencial para a fase $\phi_b(t)$ é direta e tem a forma

$$\phi_b(t) = \phi_b(0) - \int_0^t \Omega(t') dt' + \nu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.192)$$

onde deve-se ter em consideração que

$$\frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt} = \sqrt{\nu^2 - 1} |\omega(t)|. \quad (3.193)$$

Agora, a equação diferencial para a fase $\phi_a(t)$ assume a forma

$$\frac{d\phi_a(t)}{dt} = -\Omega(t) + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \left[\frac{\sin^2[\Lambda_\nu(t)]}{\nu^2 - \cos^2[\Lambda_\nu(t)]} \right] \frac{d\Lambda_\nu(t)}{dt}. \quad (3.194)$$

A solução de $\phi_a(t)$ é obtida como

$$\phi_a(t) = \phi_a(0) - \int_0^t \Omega(t') dt' + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \int_0^t \frac{\sin^2[\Lambda_\nu(t')]}{\nu^2 - \cos^2[\Lambda_\nu(t')]} \frac{d\Lambda_\nu(t')}{dt'} dt', \quad (3.195)$$

assumindo a condição inicial $\phi_a(0) = 0$. Note que a segunda integral do lado direito da equação (3.194) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \int_0^t \frac{\sin^2[\Lambda_\nu(t')]}{\nu^2 - \cos^2[\Lambda_\nu(t')]} \frac{d\Lambda_\nu(t')}{dt'} dt' &= -\operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg}[\Lambda_\nu(t)] \right] \\ &+ \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \Lambda_\nu(t), \end{aligned} \quad (3.196)$$

o que implica para (3.194) a solução na forma

$$\phi_a(t) = - \int_0^t \Omega(t') dt' + \nu \int_0^t |\omega(t')| dt' - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg}[\Lambda_\nu(t)] \right], \quad (3.197)$$

uma vez que

$$\Lambda_\nu(t) = \sqrt{\nu^2 - 1} \int_0^t |\omega(t')| dt'. \quad (3.198)$$

Uma vez que $\phi_b(0) = \phi_\omega^{(0)} - \pi/2$, têm-se que

$$\phi_a(t) = - \int_0^t \Omega(t') dt' + \nu \int_0^t |\omega(t')| dt' - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg}[\Lambda_\nu(t)] \right], \quad (3.199)$$

$$\phi_b(t) = \phi_\omega^{(0)} - \int_0^t \Omega(t') dt' + \nu \int_0^t |\omega(t')| dt' - \frac{\pi}{2}. \quad (3.200)$$

Além disso, da condição de ressonância (3.184) que deve sempre ser considerada neste regime, verifica-se que

$$\int_0^t \dot{\phi}_\omega(t') dt' = -2 \int_0^t \Omega(t') dt' + 2\nu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad \nu > 1, \quad (3.201)$$

o que implica em

$$\phi_\omega(t) - \phi_\omega^{(0)} = -2 \int_0^t \Omega(t') dt' + 2\nu \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad \nu > 1, \quad (3.202)$$

e que conduz as formas de $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ dadas por

$$\phi_a(t) = \frac{\phi_\omega(t) - \phi_\omega^{(0)}}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \operatorname{tg}[\Lambda_\nu(t)] \right], \quad (3.203)$$

$$\phi_b(t) = \frac{\phi_\omega(t) + \phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\pi}{2}. \quad (3.204)$$

Dessa forma, têm-se as soluções completas para o operador de evolução temporal da dinâmica no espaço de Hilbert de um sistema de dois níveis com simetria dinâmica $SU(1, 1)$. No entanto, toda a construção da solução tem como ponto de partida a parametrização (3.157) na qual o parâmetro ν , presente na condição de ressonância (3.184), está restrito ao intervalo $[1, \infty[$. No entanto, naturalmente surge a questão relativa a parametrização em termos de funções hiperbólicas conforme discutido anteriormente e esperado na representação do grupo $SU(1, 1)$. Para tal propósito, pode-se assumir uma forma adequada da parametrização na forma (3.122) e (3.123) e repetir todo o procedimento para esta parametrização. No entanto, isso não é necessário porque observando atentamente as equações (3.118), (3.119), (3.122) e (3.123), pode-se ver que por meio da transformação

$$k_1 = ik'_2, \quad k_2 = ik'_1, \quad \Lambda(t) = -i\Lambda'(t), \quad (3.205)$$

uma parametrização é mapeada na outra. A condição $\Lambda(t) = -i\Lambda'(t)$ implica que

$$\Lambda'_\nu(t) = \sqrt{1 - \nu^2} \int_0^t |\omega(t')| dt', \quad (3.206)$$

que é válida para o intervalo $0 \leq \nu \leq 1$.

A análise da estrutura analítica da solução $SU(1, 1)$ permite determinar o regime hiperbólico da parametrização do tipo II, evitando a reprodução dos resultados já apresentados para o caso trigonométrico. Assim, o regime hiperbólico se caracteriza pelas soluções na forma

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{\frac{\cosh^2 \Lambda'_\nu(t) - \nu^2}{1 - \nu^2}}, \quad (3.207)$$

$$|\mathbf{b}(t)| = \sqrt{\frac{\sinh^2 \Lambda'_\nu(t)}{1 - \nu^2}}, \quad (3.208)$$

com $\Lambda'_\nu(t)$ na forma (3.206) e as fases $\phi_a(t)$ e $\phi_b(t)$ determinadas de acordo com

$$\phi_a(t) = \frac{\phi_\omega(t) - \phi_\omega^{(0)}}{2} - \text{tg}^{-1} \left[\frac{\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \tanh \left[\Lambda'_\nu(t) \right] \right], \quad (3.209)$$

$$\phi_b(t) = \frac{\phi_\omega(t) + \phi_\omega^{(0)}}{2} - \frac{\pi}{2}, \quad (3.210)$$

nas quais as constantes k'_1 and k'_2 são definidas em termos do parâmetro ν de acordo com

$$k'^2_1 = \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad (3.211)$$

$$k'^2_2 = \frac{\nu^2}{1 - \nu^2}, \quad (3.212)$$

obdecendo a condição (3.184) para ν pertencente ao intervalo $[0, 1]$. Portanto, têm-se determinado as soluções gerais para o operador de evolução temporal com simetria $SU(1, 1)$ para ambos os regimes hiperbólico e trigonométrico.

4 INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA

Neste capítulo, faz-se um estudo de um modelo matemático simples para entender como a mecânica quântica pode ser aplicada ao tratamento semiclássico e quântico da interação da radiação com a matéria, considerando o caso bem simplificado da matéria representada por um átomo de dois níveis. O campo de radiação interagente pode ser descrito por um campo clássico ou por sua versão quantizada, que é representada por um modo do campo. É neste modelo que será identificada a presença da simetria dinâmica $SU(2)$ considerada no contexto dos sistemas quânticos não estacionários e identificado na literatura como o modelo JCDT. Será mostrado como as soluções estudadas no capítulo (3) surgem para descrever o comportamento do átomo como abordado em (19), porém estendido para o estudo das propriedades do átomo, quando o operador hamiltoniano correspondente tem seus parâmetros dependentes do tempo. Porém, antes de se discutir os resultados inéditos para as propriedades do campo, tem-se como ponto de partida um estudo simples de como se construir o modelo JC independente do tempo, a partir de conceituações básicas e de resultados já estabelecidos na literatura da física teórica (49).

4.1 A DINÂMICA DO ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Tem-se como discussão inicial o tema referente a interação da radiação com a matéria, considerando um átomo interagindo com um campo eletromagnético externo. Para entender a dinâmica desse sistema, considera-se primeiramente o hamiltoniano do átomo livre da presença do campo na forma

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}(r), \quad (4.1)$$

onde $V(r)$ é a interação coulombiana entre o elétron e o núcleo para o qual a coordenada radial r é dada por $r = |\mathbf{r}|$ e o símbolo $\hat{\mathbf{p}}$ corresponde ao operador momentum do elétron (9), que na representação de Schrödinger é proporcional ao operador diferencial ∇ . Na presença de um campo eletromagnético externo, o operador hamiltoniano assume a forma

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$ são os potenciais vetor e escalar do campo, respectivamente, operando como quantidades escalares, de modo que a dependência em $(\mathbf{r}, t)$ é interpretada como a dependência nas coordenadas espaciais e temporal. Além disso, $-e$ corresponde à carga do elétron, onde o símbolo e corresponde a uma quantidade positiva (23).

Os campos elétricos e magnéticos obtidos a partir dos potenciais escalar e vetorial como sendo (50)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (4.4)$$

que são invariantes sob as transformações de calibre (49)

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$

A equação de Schrödinger associada ao elétron do átomo dependente do tempo tem a forma dada por

$$\hat{H}(t)\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.7)$$

com o operador hamiltoniano escrito na forma

$$\hat{H}'(t) = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)]^2 - e\phi' + V(\mathbf{r}, t), \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ e $\phi'(\mathbf{r}, t)$ são dados pelas equações (4.6) e (4.5), respectivamente. Aqui, assume-se o calibre de Coulomb no qual se assume $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ obedecendo à condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$, uma vez que os fótons são tratados como excitações de campos transversos (49). Além disso, potencial vetor na ausência de fontes nas proximidades do átomo satisfaz a equação de onda (23)

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.9)$$

cuja solução tem a forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}. \quad (4.10)$$

Aqui a frequência do campo eletromagnético é dada por ω_0 e $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ é o vetor de onda da radiação (23). Neste modelo, na escala das dimensões atômicas, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ e o potencial pode ser considerado espacialmente uniforme de modo que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t)$, essa aproximação é referida como aproximação de dipolo (49).

Desta forma o operador hamiltoniano descrevendo o sistema está dado na forma

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2m}[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{m}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para tal modelo se escolhe a função de calibre $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$, o que implica em

$$\begin{aligned} \nabla \chi(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{A}(t), \\ \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

resultando para o operador hamiltoniano do modelo a forma

$$\hat{H}'(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r) + e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (4.13)$$

No operador hamiltoniano (4.13), a quantidade $\mathbf{d} = -e\hat{\mathbf{r}}$ corresponde ao operador de momento dipolar que no quadro de Schrödinger é proporcional às coordenadas (x, y, z) (23). Dessa maneira, pode-se escrever que

$$\hat{H}'(t) = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (4.14)$$

onde $\hat{H}_0$ é dado pela equação (4.1). Deste modo, a forma do operador hamiltoniano descrevendo a interação de um elétron com o átomo na aproximação está perfeitamente estabelecida no contexto semiclássico.

4.1.1 Átomo de dois níveis e campo eletromagnético clássico

No modelo de interação da radiação com a matéria, no qual o campo eletromagnético é assumido clássico, denomina-se modelo semiclássico de Rabi, similar ao que se considera para o estudo de um sistema de spin $1/2$ sob a ação de um campo magnético. Considerando um átomo no qual a interação entre o elétron e o campo promove transições entre dois níveis quaisquer, define-se, desta forma, um sistema de dois níveis sob a ação de um campo eletromagnético clássico. Neste cenário o vetor de estado correspondente ao átomo e pertencente a um espaço vetorial de Hilbert bidimensional, está dado na forma

$$|\psi\rangle = c_e |e\rangle + c_g |g\rangle, \quad (4.15)$$

onde $|g\rangle$ representa o estado fundamental (ground state) e $|e\rangle$ representa o estado excitado (excited state). A diferença de energia entre os estados é dada por $\omega_0 = E_e - E_g$. Para o átomo de dois níveis quantizado, o correspondente operador hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_a = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (4.16)$$

já indicando a estrutura da álgebra $SU(2)$. Na ausência de interação com o campo eletromagnético, o estado do campo evolui no tempo de acordo com a equação

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi\rangle, \quad (4.17)$$

onde o operador de evolução temporal $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}}$, e neste caso o átomo é considerado um sistema quântico estacionário dado a ausência da dependência temporal no operador hamiltoniano $\hat{H}_a$. Portanto, tem-se que

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t) e^{-iE_e t} |e\rangle + c_g(t) e^{-iE_g t} |g\rangle, \quad (4.18)$$

sujeito à condição de normalização

$$|c_e(t)|^2 + |c_g(t)|^2 = 1. \quad (4.19)$$

Uma vez considerando a interação deste átomo com um campo eletromagnético clássico na aproximação de dipolo, o termo do operador hamiltoniano correspondente à interação entre o átomo e o campo é dado por

$$\hat{H}_{ac}(t) = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\varpi_0 t), \quad (4.20)$$

definindo a um sistema quântico não estacionário. Na sua forma simplificada, tem-se que

$$\hat{H}_{ac}(t) = \hat{V}_0 \cos(\varpi_0 t), \quad (4.21)$$

onde o operador $\hat{V}_0 = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0$ possui uma dependência temporal explícita. A equação de Schrödinger tem a forma

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (4.22)$$

na qual se tem

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_a + \hat{V}_0 \cos(\varpi_0 t). \quad (4.23)$$

Para o modelo em estudo, está estabelecido, por enquanto, que $\langle g | \hat{V}_0 | e \rangle = -\langle g | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | e \rangle = \eta$ (49), de modo que a equação diferencial (4.22) implica nas equações diferenciais para os coeficientes $c_g(t)$ e $c_e(t)$ na forma

$$\dot{c}_g(t) = -i\eta \cos(\varpi_0 t) e^{-i\omega_0 t} c_e(t), \quad (4.24)$$

$$\dot{c}_e(t) = -i\eta \cos(\varpi_0 t) e^{i\omega_0 t} c_g(t). \quad (4.25)$$

Considerando a relação

$$\cos(\varpi_0 t) = \frac{e^{i\varpi_0 t} + e^{-i\varpi_0 t}}{2},$$

verifica-se facilmente que

$$\dot{c}_g(t) = -\frac{i\eta}{2} e^{i(\varpi_0 - \omega_0)t} c_e(t), \quad (4.26)$$

$$\dot{c}_e(t) = -\frac{i\eta}{2} e^{-i(\varpi_0 - \omega_0)t} c_g(t). \quad (4.27)$$

É importante frisar que os termos associados às oscilações rápidas, correspondentes à frequência $\varpi_0 + \omega_0$, foram desconsiderados, o que constitui a chamada aproximação de onda girante RWA ("Rotational Wave Approximation"). Derivando (4.27) e combinando com (4.26) para eliminar $\dot{c}_g(t)$, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para o coeficiente $\dot{c}_e(t)$ na forma

$$\ddot{c}_e + i(\varpi_0 - \omega_0)\dot{c}_e + \frac{\eta^2}{4} c_e = 0. \quad (4.28)$$

Trata-se de uma equação diferencial com coeficientes constantes cuja solução pode ser determinada assumindo a forma particular

$$C_e = e^{i\lambda_e t},$$

para a qual o correspondente polinômio característico tem a forma

$$\lambda_e^2 + (\varpi_0 - \omega_0)\lambda_e - \frac{\eta^2}{4} = 0.$$

As correspondentes raízes são dadas por

$$\lambda_{e,\pm} = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \eta^2}}{2},$$

onde o fator $\Delta = \varpi_0 - \omega_0$ é a dissonância entre as frequências do átomo e do campo. Realizando procedimento similar para coeficiente $c_g(t)$, obtém-se a equação diferencial

$$\ddot{c}_g - i(\varpi_0 - \omega_0)\dot{c}_g + \frac{\eta^2}{4} = 0, \quad (4.29)$$

com solução particular também na forma

$$c_g(t) = e^{i\lambda_g t}. \quad (4.30)$$

O correspondente polinômio característico está dado por

$$\lambda_g^2 - (\varpi_0 - \omega_0)\lambda_g - \frac{\eta^2}{4} = 0, \quad (4.31)$$

com as raízes na forma

$$\lambda_{g,\pm} = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \eta^2}}{2}, \quad (4.32)$$

e onde também se verifica a presença do parâmetro de dissonância Δ . Para ambas as equações diferenciais de segunda ordem, as soluções são construídas a partir da solução geral

$$c_k(t) = A_1^{(k)} e^{i\lambda_{k,+}t} + A_2^{(k)} e^{i\lambda_{k,-}t}, \quad k = e, g. \quad (4.33)$$

Supondo que inicialmente o átomo esteja no estado fundamental $|g\rangle$, define-se as condições iniciais como

$$c_e(0) = 0, \quad c_g(0) = 1, \quad (4.34)$$

que combinada com as equações (4.26) e (4.27), fixa-se as condições iniciais para as derivadas dos coeficientes $c_g(t)$ e $c_e(t)$ conforme

$$\dot{c}_e(0) = -\frac{i}{2}\eta, \quad \dot{c}_g(0) = 0. \quad (4.35)$$

Aplicando as condições iniciais nas formas (4.33), estabelecem-se os sistemas lineares nos coeficientes $A_1^{(k)}$ e $A_2^{(k)}$, tanto para $k = e$ quanto para $k = g$. Portanto, para $k = e$, tem-se

$$A_1^{(e)} + A_2^{(e)} = 0, \quad (4.36)$$

$$i\lambda_+ A_1^{(e)} + i\lambda_- A_2^{(e)} = -i\eta, \quad (4.37)$$

cujas soluções são dadas na forma

$$A_1^{(e)} = \frac{\eta}{2}(\Delta^2 + \eta^2)^{-1/2}, \quad (4.38)$$

$$A_2^{(e)} = -\frac{\eta}{2}(\Delta^2 + \eta^2)^{-1/2}, \quad (4.39)$$

nas quais, considerando a frequência de Rabi dada por $\omega_R = (\Delta^2 + \eta^2)^{1/2}$, verificam-se

$$A_1^{(e)} = \frac{\eta}{2\omega_R}, \quad (4.40)$$

$$A_2^{(e)} = -\frac{\eta}{2\omega_R}. \quad (4.41)$$

Com isso, pode-se determinar a solução final para o coeficiente $c_e(t)$ que na sua forma simplificada é

$$c_e(t) = \frac{i\eta}{\omega_R} \sin\left(\frac{\omega_R t}{2}\right) e^{\frac{i\Delta t}{2}}. \quad (4.42)$$

O procedimento para se obter a solução de c_g é similar ao realizado para o coeficiente $c_e(t)$, de modo que a solução para é dada na forma

$$c_g(t) = e^{\frac{i\Delta t}{2}} \left[\cos\left(\frac{\omega_R t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\omega_R} \sin\left(\frac{\omega_R t}{2}\right) \right]. \quad (4.43)$$

A partir das formas explícitas dos coeficientes $c_k(t)$, podem-se determinar as propriedades físicas do sistema dinâmico quântico descrito pelo átomo de dois níveis interagindo com um campo clássico. Por exemplo, a probabilidade do átomo estar no estado $|e\rangle$ no decorrer do tempo sob efeito do campo eletromagnético é dada por

$$P_e(t) = |c_e(t)|^2 = \frac{\eta^2}{\omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{\eta^2}} \sin^2\left(\frac{\omega_R t}{2}\right). \quad (4.44)$$

Na condição de ressonância, caracterizada por $\varpi_0 = \omega_0$ ou $\Delta = 0$, a probabilidade do átomo estar no estado $|e\rangle$ está dada por

$$P_e(t) = \sin^2\left(\frac{\eta t}{2}\right). \quad (4.45)$$

A figura 1 ilustra o comportamento de $P_e(t)$ para diferentes valores de Δ . A curva azul corresponde ao valor de $\Delta = 0$ e ilustra a condição de ressonância, enquanto as curvas laranja $\Delta = 0.5$ e verde $\Delta = 1$ são condições fora da ressonância. Está evidente que quanto maior e o valor da dissonância Δ menor é a probabilidade de transição atômica, o que também está evidente na forma da equação (4.44). O efeito da dissonância é tornar o átomo "invisível" à presença do campo eletromagnético, de modo que a dinâmica do átomo tem a influência do campo eletromagnético diminuída.

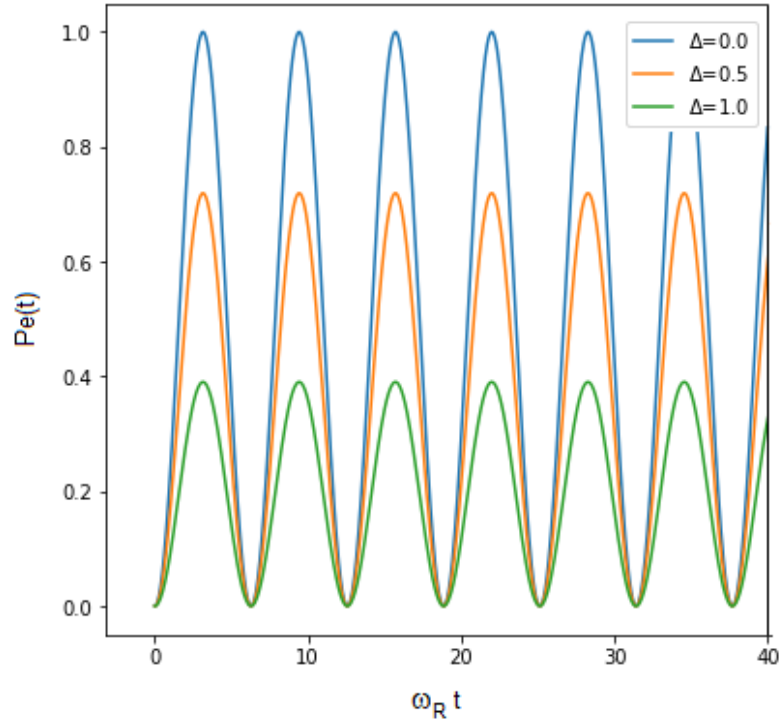
Para finalizar a análise da dinâmica do sistema, a probabilidade do átomo estar no estado $|g\rangle$ é dada por

$$P_g(t) = |c_g(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega_R t}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{\omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\omega_R t}{2}\right), \quad (4.46)$$

que na condição de ressonância assume a forma

$$P_g(t) = \cos^2\left(\frac{\eta t}{2}\right). \quad (4.47)$$

Figura 1. Gráfico de $P_e(t)$ para valores de Δ a partir da equação (4.44), assumindo o valor de $\eta = 1$ na escala de tempo dinâmica $\omega_R t$. A curva azul refere-se ao valor de $\Delta = 0$, correspondendo a condição de ressonância, enquanto as condições de dissonância são dadas pelas curvas laranja ($\Delta = 0.5$) com menor dissonância e verde ($\Delta = 1$) com maior dissonância.



Fonte: O autor

A dinâmica da inversão de população é determinada pela diferença entre as populações (23), isto é

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t), \quad (4.48)$$

que na condição de ressonância assume a forma

$$W(t) = \sin^2\left(\frac{\eta t}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\eta t}{2}\right) = -\cos(\eta t), \quad (4.49)$$

evidenciando um caráter oscilatório na escala de tempo ηt que inicia-se com o valor -1, uma vez que átomo inicia-se no estado fundamental, e oscila entre intervalo $[1, -1]$. Isto significa que a população do átomo alterna entre o estado fundamental $|g\rangle$ (condição inicial) e o estado excitado $|g\rangle$. Uma vez que se ilustrou a descrição semiclássica da interação entre o átomo e o campo clássico, na próxima subseção será considerado o modelo em que o átomo interage com um campo quantizado.

4.2 A DINÂMICA DO ÁTOMO DE DOIS NÍVEIS NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O modelo de Jaynes-Cummings trata da interação de um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético quantizado (18, 51). Neste modelo, o hamiltoniano do sistema átomo-campo é composto pelo hamiltoniano do átomo, hamiltoniano do campo e hamiltoniano de interação do átomo com o campo, isto é (23, 49):

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{ac} \quad (4.50)$$

onde $\hat{H}_a$ é o hamiltoniano do átomo dado pela equação (4.16). Para se determinar o hamiltoniano do campo, faz-se necessário quantizar o campo eletromagnético. Para tal propósito, considera-se um campo eletromagnético que se propaga na direção do eixo z em uma cavidade ótica perfeitamente condutora, com condições de contorno definidas pelos pontos $z = 0$ e $z = L$. As componentes elétrica e magnética de um modo do campo nesta situação são dadas respectivamente por (23, 49)

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\varpi_0^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz), \quad (4.51)$$

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\varpi_0^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (4.52)$$

onde ϖ_0 é a frequência do modo, k é o número de onda, V é o volume efetivo da cavidade, enquanto $q(t)$ é o coordenada canônica. Nesta formulação, o termo $\dot{q}(t)$ é o momento canônico "por partícula", isto é, $\dot{q}(t) = p(t)$, e é válida a relação clássica de comutação $\{q(t), p(t)\} = 1$. Basicamente, o que se faz nesta formulação é definir a estrutura simplética clássica do campo eletromagnético da cavidade (49). Portanto, do ponto de vista clássico, a energia total de um único modo do campo eletromagnético, ou o hamiltoniano "clássico" do sistema, é dado por (50)

$$\mathcal{H}_c(q(t), p(t)) = \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right], \quad (4.53)$$

que, por meio das formas explícitas dos campos clássicos em (4.51) e (4.52), assume a forma

$$\mathcal{H}_c(q(t), p(t)) = \int dV \left[\frac{\varpi_0^2}{V} q(t)^2 \sin^2(kz) + \frac{1}{V} p(t)^2 \cos^2(kz) \right]. \quad (4.54)$$

A forma do hamiltoniano (4.54) corresponde a uma energia no volume da cavidade. Efetuando a integral de volume onde se considera o valor médio de $\sin^2(kz)$ e $\cos^2(kz)$ ao longo do volume V que resulta em $V/2$, pode-se "trocar" a integral volumétrica por uma constante proporcional ao volume, de modo que $\mathcal{H}_c$ assume a forma

$$\mathcal{H}_c(q(t), p(t)) = \frac{\varpi_0^2}{V} q(t)^2 \frac{V}{2} + \frac{1}{V} p(t)^2 \frac{V}{2}. \quad (4.55)$$

Desse modo, uma Hamiltoniana "clássica" nas coordenadas $q(t)$ e $p(t)$, correspondente à cavidade eletromagnética, surge nesta formulação com a forma

$$\mathcal{H}_c(q(t), p(t)) = \frac{1}{2} (\varpi_0^2 q(t)^2 + p(t)^2). \quad (4.56)$$

A Hamiltoniana clássica $\mathcal{H}_c(q(t), p(t))$ corresponde à função de Hamilton de um oscilador harmônico clássico de frequência ϖ_0 e massa unitária. Aplicar os princípios da quantização canônica (9) equivale a substituir as coordenadas canonicamente conjugadas $q(t)$ e $p(t)$ pelos operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$, que obedecem à relação de comutação $[\hat{q}, \hat{p}] = i$, assumindo-se $\hbar = 1$. Então, obtém-se um operador hamiltoniano no espaço de Hilbert associado ao modo da cavidade com frequência ϖ_0 , cuja forma é dada por

$$\hat{H}_c = \frac{1}{2}(\varpi_0 \hat{q}^2 + \hat{p}^2), \quad (4.57)$$

e corresponde ao operador hamiltoniano do oscilador harmônico quântico com frequência ϖ_0 e massa unitária.

Neste ponto da discussão, é mais adequado considerar os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, representados por $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, que podem ser escritos em termos dos operadores $\hat{p}$ e $\hat{q}$ por meio das equações

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\varpi_0}}(\varpi_0 \hat{q} + i\hat{p}), \quad (4.58)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\varpi_0}}(\varpi_0 \hat{q} - i\hat{p}). \quad (4.59)$$

Isto permite determinar os operadores $\hat{p}$ e $\hat{q}$ em termos de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ como

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{1}{2\varpi_0}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (4.60)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\varpi_0}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (4.61)$$

Aplicando as equações (4.60) e (4.61) na forma do operador (4.57) e considerando que a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, obtém-se a forma do operador hamiltoniano de um modo do campo quantizado na forma

$$\hat{H}_c = \varpi_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.62)$$

É relevante mencionar que, na interação entre o campo quantizado e o átomo, o interesse está nas trocas de energia e de propriedades quânticas, de modo que o ponto de referência de menor energia não tem relevância no processo. Com isso, é equivalente escrever o hamiltoniano do campo quantizado na forma

$$\hat{H}_c = \varpi_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (4.63)$$

Na formulação semiclássica da interação do átomo com o campo, o campo eletromagnético é tratado como uma função escalar. Com a quantização do campo eletromagnético, tanto o campo elétrico quanto o magnético passam a ser tratados como operadores que atuam no espaço de Hilbert de estados do campo quantizado, de dimensão infinita. Portanto, deve-se escrever o termo de interação do hamiltoniano total considerando a forma do campo quantizado. Partindo da expressão

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\varpi_0^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz),$$

troca-se o campo clássico $E_x(z, t)$ pelo operador $\hat{E}_x(z, t)$ da mesma forma que se troca a função $q(t)$ pelo operador $\hat{q}(t)$, Isto implica no campo elétrico quantizado dado por

$$\hat{E}_x(z) = \left(\frac{2\varpi_0^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{q} \sin(kz), \quad (4.64)$$

que em termos dos operadores de criação e aniquilação fica dado por

$$\hat{E}_x(z) = \left(\frac{\varpi_0}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz). \quad (4.65)$$

Para o campo elétrico na sua forma quantizada e com o operador de momento de dipolo já determinado anteriormente, obtém-se a forma explícita do termo de interação $\hat{H}_{ac}$. Uma vez que

$$\hat{H}_{ac} = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (4.66)$$

definindo a constante g_0 na forma

$$g_0 = - \left(\frac{\varpi_0}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \sin(kz), \quad (4.67)$$

pode-se escrever o operador $\hat{H}_{ac}$ na forma

$$\hat{H}_{ac} = g_0 \hat{d} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (4.68)$$

Neste ponto da discussão, é importante frisar que o operador hamiltoniano total do sistema está definido em um espaço de Hilbert total $\mathcal{H}_{ac}$ composição do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_a$ do átomo (bidimensional com base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$) e do campo $\mathcal{H}_c$ (infinito dimensional com base dada pelos estados de Fock $|n\rangle$). Os operadores do campo são elementos de uma álgebra $\mathfrak{su}(2)$ enquanto os operadores de aniquilação e criação compõem a álgebra de Weyl-Heisenberg (52). Na forma do operador (4.68), é necessário compreender detalhadamente como se define a representação do operador de momento de dipolo elétrico no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_a$, o que não foi considerado explicitamente na seção anterior. Focando atenção na estrutura da álgebra $\mathfrak{su}(2)$, analisam-se os operadores de transição $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ que "transitam" o átomo do estado $|g\rangle$ para o estado $|e\rangle$ e do estado $|e\rangle$ para o estado $|g\rangle$, respectivamente (23):

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|. \quad (4.69)$$

Define-se o operador de inversão de população atômica $\hat{\sigma}_3$ cuja forma é dada por (21, 23, 49)

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|. \quad (4.70)$$

Estes operadores satisfazem a álgebra do $\mathfrak{su}(2)$ conforme as relações

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_3, \quad (4.71)$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_+] = (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) |e\rangle \langle g| - |e\rangle \langle g| (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) = 2 |e\rangle \langle g| = 2\hat{\sigma}_+, \quad (4.72)$$

$$[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_-] = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)|g\rangle\langle e| - |g\rangle\langle e|(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = 2|g\rangle\langle e| = 2\hat{\sigma}_-, \quad (4.73)$$

sendo a mesma estrutura algébrica presente no sistema de spin 1/2 tratada nos capítulos 2 e 3. Dessa forma, tem-se a representação do operador $\hat{d}$ em $\mathcal{H}_a$ escrita por meio da matriz

$$d = \begin{pmatrix} \langle g|\hat{d}|g\rangle & \langle g|\hat{d}|e\rangle \\ \langle e|\hat{d}|g\rangle & \langle e|\hat{d}|e\rangle \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

cujos elementos definem as transições atômicas entre os níveis de energia do átomo. Por simetria, os elementos $\langle i|\hat{d}|j\rangle$ desaparecem se i e j estiverem no mesmo estado de modo que $\langle g|\hat{d}|g\rangle = \langle e|\hat{d}|e\rangle = 0$. Isto implica que

$$d = \begin{pmatrix} 0 & \langle g|\hat{d}|e\rangle \\ \langle e|\hat{d}|g\rangle & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Denominando $\langle g|\hat{d}|e\rangle = d$ e $\langle e|\hat{d}|g\rangle = d^*$ mas assumindo d um número real, pode-se então representar o operador $\hat{d}$ na forma

$$d = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Isto implica que o operador $\hat{d}$ pode ser escrito em termos dos operadores $\hat{\sigma}_\pm$ como

$$\hat{d} = d|e\rangle\langle g| + d|g\rangle\langle e| = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (4.77)$$

A partir da análise precedente, está claro que o hamiltoniano de interação $\hat{H}_{ac}$ pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_{ac} = l_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad l_0 = gd, \quad (4.78)$$

e o hamiltoniano total $\hat{H} = H_a + H_c + \hat{H}_{ac}$ tem sua forma completa dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \varpi_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + l_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (4.79)$$

Aqui, é importante fazermos a seguinte observação com relação ao hamiltoniano de interação: o termo $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ significa que o campo perde um fóton enquanto o átomo vai para o estado excitado; o termo $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-$ significa que o campo ganha um fóton enquanto o átomo retorna ao estado fundamental; o termo $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+$ significa o campo ganhando um fóton enquanto o átomo vai par o estado excitado e, por fim, o termo $\hat{a}\hat{\sigma}_-$ significa o campo perdendo um fóton enquanto o átomo retorna ao estado fundamental. Isto implica que os dois últimos fatores não conservam o número total de excitações no sistema, o que é inconsistente com o processo de troca de fótons entre o campo e o átomo. A chamada aproximação de onde rotativa ou RWA (do inglês, Rotating Wave Approximation), consiste em desprezar os termos de oscilações rápidas ¹ do operador

¹ Há um entendimento equivocado quando se diz que estes termos não conservam a energia. Estes termos correspondem à criação simultânea de um fóton e de uma excitação atômica, e vice-versa. Trata-se de um processo não ressonante e pode-se dizer, corretamente, que não satisfaz a conservação de energia no nível do processo elementar. Tanto o sistema de Rabi completo quanto o sistema JC evoluem unitariamente e conservam a energia. Na condição $l_0 \ll \varpi_0, \omega_0$ os termos contragirantes respondem por flutuações virtuais e contribuem de forma perturbativa (7,53).

hamiltoniano (54), de modo que

$$H = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_z + \varpi_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + l_0(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (4.80)$$

denominado como sendo o operador hamiltoniano de Jaynes-Cummings independente do tempo (23, 51). Note que no operador hamiltoniano (4.80), as frequências associadas ao átomo e ao campo são constantes no tempo, assim como o parâmetro de acoplamento entre o campo e o átomo.

Trata-se de um sistema quântico estacionário, no qual o problema de autovalores e autovetores associados ao sistema é independente do tempo, de modo que a solução analítica pode ser obtida diretamente. Neste ponto deste trabalho, poderia-se desenvolver todo o procedimento operacional para se determinar a estrutura dos estados permitidos para o modelo JCID e analisar aspectos da dinâmica associados ao campo e átomo. Porém, optou-se por concentrar a atenção no caso no qual os parâmetros do operador hamiltoniano são dependentes do tempo e verificar como os resultados apresentados anteriores podem ser aplicados para analisar um caso particular da dinâmica do átomo-campo no contexto de sistemas quânticos não-estacionários. Na seção seguinte será discutido um exemplo particular do modelo JC com dependência temporal no operador hamiltoniano, revisando e aplicando resultados obtidos em trabalho recente para o estudo de um exemplo particular de interação do átomo com o campo de radiação.

4.3 MODELO DE JAYNES-CUMMINGS DEPENDENTE DO TEMPO

Nesta seção é abordado um exemplo particular de hamiltoniano de um sistema quântico não estacionário no cenário da interação de um átomo de dois níveis com um campo quantizado. De início, serão apresentadas a motivação e justificativa para o estudo em questão. Os sistemas quânticos não estacionários são um tema central na física quântica atual, no estudo de sistemas em óptica quântica, que inclui a interação entre diferentes sistemas, tais como modos de cavidade, osciladores nanomecânicos e átomos ou íons aprisionados. Quando tratadas no contexto de sistemas quânticos estacionários nos quais os parâmetros do operador hamiltoniano são independentes do tempo, as equações que descrevem a evolução temporal do estado quântico do sistema são caracterizadas por problemas de valor inicial nos quais os coeficientes do problema de Cauchy-Liouville são independentes do tempo.

Note que, no caso de sistemas interagentes com até quatro graus de liberdade, soluções analíticas exatas podem ser determinadas, permitindo uma análise precisa da dinâmica. No entanto, em alguns sistemas quânticos não estacionários, soluções analíticas podem ser obtidas por meio de métodos como os invariantes quânticos (55), que permitem determinar com precisão a evolução temporal do sistema. Além disso, métodos no contexto da teoria de perturbação (56) podem ser aplicados para determinar soluções analíticas aproximadas que descrevem, com boa precisão, a evolução temporal do sistema quântico em tempos curtos.

No entanto, o domínio dos procedimentos para o controle exato da dinâmica quântica de sistemas em que os parâmetros dependem do tempo é mais adequado no que diz respeito às aplicações tecnológicas para o processamento de informações quânticas (57–62) e para o desenvolvimento de dispositivos quânticos mais promissores para fins práticos (63, 64). Por exemplo, em configurações experimentais que analisam a dinâmica de spin em um campo magnético temporalmente dependente, possibilitadas por dispositivos de Ressonância Magnética Nuclear, o controle da dinâmica é alcançado por meio da aplicação de um campo clássico externo, também temporalmente dependente. Isto reporta à generalização do problema seminal de Rabi considerado nos primórdios da mecânica quântica (15). Nesse sentido, é tentador evitar métodos analíticos aproximados para se determinar soluções de problemas de valor inicial do modelo semiclássico de Rabi dependente do tempo.

Verificou-se, neste estudo, que para um sistema de dois níveis impulsionado por um campo magnético clássico temporalmente dependente, foram propostas duas formas de parametrizar as soluções para o operador de evolução temporal (16) baseadas no procedimento estabelecido em (14), e diretamente associadas à simetria dinâmica $SU(2)$ que está presente no modelo JCIT conforme observado. O modelo JC desempenha um papel relevante no contexto da óptica quântica no estudo da interação da radiação com a matéria (18). É fundamental para compreender o funcionamento do laser na óptica quântica e figura entre as pedras angulares da teoria quântica, desempenhando papel fundamental em implementações experimentais da computação quântica (58, 65).

Ao longo de cinco décadas, muitos outros estudos foram considerados no modelo JC e em seus descendentes (51). Colapsos espontâneos e renascimentos no modelo de JCIT são demonstrados por meio de soluções analíticas para a inversão da população atômica (66, 67). As equações de movimento de Heisenberg no modelo JCIT são resolvidas exatamente (68). No modelo de interação entre modo de cavidade e átomo de dois níveis, em que a força de acoplamento depende do número médio de fótons do campo (69), as propriedades estatísticas dos fótons são descritas, observando-se que o número médio de fótons apresenta decaimento e renascimentos de coerência, semelhantes aos da inversão atômica no modelo JC padrão, no caso de estados coerentes. Uma explicação intuitiva dos colapsos e renascimentos é discutida em (70), e como se obtêm estados comprimidos no modo de cavidade é descrito em (71).

Em uma configuração experimental com uma cavidade supercondutora, Rempe e colaboradores observam colapsos e renascimentos em um maser de átomo (72). Considera-se uma generalização do modelo JCIT, na qual se assume que a cavidade é preenchida por um meio do tipo Kerr (73). Verifica-se o fenômeno de colapso e renascimento na dinâmica da inversão da população atômica, com a ocorrência de compressão no modo de cavidade. O formalismo de fase de Pegg e Barnett é aplicado ao estudo do modelo JCIT, no qual a dinâmica de colapso e renascimento, bem como as propriedades de fase, são investigadas (74). A dinâmica nos modelos JCIT e JCDDT, nos quais os efeitos não lineares são levados em consideração, pode ser encontrada na literatura (75–82).

Superestruturas, renascimentos fracionários e estados ópticos do gato de Schrödinger no

modelo JC são discutidos em (83), e observa-se que a decoerência intrínseca no modelo JC (84) é responsável pela deterioração dos efeitos de coerência quântica, bem como pelos renascimentos da inversão atômica. A geração de estados coerentes pares e ímpares é detectada no modelo JCIT dependente da intensidade de acoplamento (85). Uma realização clássica do modelo Jaynes-Cummings (JC), que descreve a interação de um átomo de dois níveis com um modo de cavidade quantizado, baseada no transporte de luz em superredes de guias de onda projetadas, é proposta em (86). Um tratamento exato do modelo JC sob a ação de um campo clássico externo é apresentado em (87). Soluções exatas para o modelo JC, sem a aproximação de onda girante, aplicada ao sistema eletrodinâmico quântico do circuito, são desenvolvidas em (88).

Para compreender o procedimento de solução do modelo JC dependente do tempo, é necessário entender como as soluções são construídas em um conjunto infinito de subespaços invariantes. Essa estrutura de subespaços invariantes decorre das propriedades de simetria, que determinam a evolução quântica. Tal estudo foi considerado em (89), no qual se descobriu que, para um operador linearmente dependente de um conjunto de parâmetros, a estrutura dos subespaços invariantes está fortemente ligada às propriedades do espectro do modelo correspondente. Também, o conceito de invariante aplicado à solução da equação de Schrödinger com base na formulação da álgebra de Lie para hamiltonianos dependentes do tempo foi evidenciado em (90), destacando que a mecânica quântica se baseia na teoria dos grupos e muitos de seus aspectos são compreendidos em termos de fundamentos algébricos (91–94). É notável o fato de que o modelo JC é também amplamente estudado no contexto algébrico (95–108). Por exemplo, na Ref. (109), a dinâmica do modelo JC é analisada quando ele exibe duas simetrias dinâmicas caracterizadas pelas álgebras de Lie $SU(2) \otimes SU(2)$ e $SU(3)$, enfatizando que ocorre uma correlação não clássica entre o átomo e o modo da cavidade.

Modelos do tipo JC já foram considerados em muitos estudos, cada um com suas próprias formulações para se determinar a evolução temporal exata do estado quântico do sistema, e esses resultados demonstram a importância de conhecer soluções analíticas que permitam uma descrição exata de um sistema quântico evidenciando todas as suas particularidades (103, 104, 107, 110). O modelo JCDT, em sua forma mais generalizada, pode ser tratado no contexto de subespaços invariantes com base nas ideias apresentadas pela primeira vez em (89). Motivados por esses resultados anteriores e na referência (19) onde nesta seção considerou-se um estudo para explorar uma maneira de determinar as soluções exatas de um modelo Jaynes-Cummings dependente do tempo, em que a frequência do modo, a frequência de Bohr do átomo de dois níveis e a constante de acoplamento são todas funções genéricas do tempo.

O espaço de Hilbert do sistema total, átomo e modo da cavidade eletromagnética é particionado em um subespaço de Hilbert unidimensional e em infinitos subespaços bidimensionais dinamicamente invariantes, para os quais as soluções da dinâmica são semelhantes às determinadas para o problema semiclássico de Rabi discutido em (16). Nos estudos realizados em (19), os autores consideram a solução na condição de ressonância, em que as energias do campo e do modo coincidem ao longo do tempo, com foco apenas nas propriedades do átomo. Portanto, deve-se considerar necessária uma discussão mais ampla, tendo em vista a condição de fora de

ressonância, que caracteriza as propriedades genéricas do campo no modo da cavidade, para uma melhor compreensão da dinâmica do sistema quântico em análise. Resalta-se aqui que parte dos resultados inéditos apresentados a seguir está sendo considerada na elaboração de artigo científico para a submissão a periódico especializado, em colaboração com o grupo de física teórica da Università di Studio di Palermo, Sicília, Itália.

4.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA NO MODELO DE JAYNES-CUMMINGS DEPENDENTE DO TEMPO

O modelo JCDT na sua forma generalizada está modelado pelo operador hamiltoniano $H(t)$

$$\hat{H}(t) = \varpi(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\omega_0(t)}{2}\hat{\sigma}_z + l(t)\hat{a}\hat{\sigma}_+ + l^*(t)\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \quad (4.81)$$

Neste modelo, as energias correspondentes ao campo e ao átomo são dadas em termos das funções reais analíticas do tempo $\varpi(t)$ e $\omega_0(t)$, enquanto $l(t) = |l(t)| \exp[i\phi_l(t)]$ é uma função complexa geralmente regular do tempo que descreve a força de acoplamento entre o átomo e o modo da cavidade. O termo de interação em (4.81) apenas acopla os estados $|g, n+1\rangle$ e $|e, n\rangle$, o que implica a existência de um conjunto infinito de subespaços invariantes bidimensionais, $\mathcal{S}_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ gerado pela base $\mathcal{B}_n = \{|e, n\rangle; |g, n+1\rangle\}$. Devido à conservação do número total de excitação associado ao operador conservado (19)

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \frac{1}{2}, \quad (4.82)$$

surge uma estrutura de subespaços invariantes $\mathcal{S}_n$ nos quais se pode definir um operador de evolução temporal $U_n(t)$ que determina a evolução temporal do sistema dentro destes subespaços invariantes.

O operador $\hat{N}$ determina os números quânticos $n = n + \frac{\sigma}{2} + 1/2$, $\sigma = \pm 1$ como os indexadores dos subespaços invariantes. O operador de evolução temporal total do sistema $\hat{U}(t)$ determinando a evolução temporal do vetor de estado do sistema $\Psi(t) = U(t)\Psi(t_0)$ é determinado como uma composição dos operadores de evolução temporal de cada um dos subespaços invariantes, conforme discutido em (19):

$$\hat{U}(t) = \sum_n \hat{U}_n(t). \quad (4.83)$$

Então, determinando-se cada um dos operadores $\hat{U}_n(t)$ em $\mathcal{S}_n$ de forma exata, determina-se a evolução completa do sistema. No entanto, de Castro *et al* mostram explicitamente que para cada um dos subespaços invariantes, o modelo descrito pelo operador (4.81) pode ser mapeado em modelo de Rabi semiclássico com simetria $SU(2)$, herdada da estrutura algébrica do átomo de dois níveis, no qual o procedimento sistematizado por (16), pode ser aplicado para se determinar o correspondente operador de evolução temporal $\hat{U}_n(t)$. Isso significa que as parametrizações construídas no capítulo (3) são aplicadas a cada um dos subespaços invariantes.

Neste trabalho, serão utilizados diretamente estes resultados na construção da solução para determinar a evolução do estado quântico do sistema. Seguindo os procedimentos desenvolvidos em (19), verifica-se que a dinâmica correspondente a cada subespaço bidimensional $\mathcal{S}_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é determinada por um operador hamiltoniano representado pela matriz

$$H_n(t) = \begin{pmatrix} \Omega_+^{(n)}(t) & \omega_n(t) \\ \omega_n^*(t) & \Omega_-^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

onde seus elementos estão definidos na forma

$$\Omega_+^{(n)}(t) = n\varpi(t) + \frac{\omega_0(t)}{2}, \quad (4.85)$$

$$\Omega_-^{(n)}(t) = (n+1)\varpi(t) - \frac{\omega_0(t)}{2}, \quad (4.86)$$

$$\omega_n(t) = \sqrt{n+1}|l(t)| \exp[i\phi_l(t)]. \quad (4.87)$$

A correspondente matriz de evolução temporal tem a forma geral dada por

$$U_n(t) = c_n(t) \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ -b_n^*(t) & a_n^*(t) \end{pmatrix}, \quad (4.88)$$

com $c_n(t)$ dado em termos da fase $\varphi_n(t)$ de acordo com

$$c_n(t) = \exp[-i\varphi_n(t)], \quad \varphi_n(t) = \frac{(2n+1)}{2} \int_0^t \varpi(t') dt'. \quad (4.89)$$

As funções $a_n(t) \equiv |a_n(t)| \exp\{i\phi_{a_n}(t)\}$ e $b_n(t) \equiv |b_n(t)| \exp\{i\phi_{b_n}(t)\}$ na equação (4.88) estão associadas ao operador hamiltoniano sem traço

$$h_n(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \omega_n(t) \\ \omega_n^*(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

com a forma $\Omega(t)$ dada por

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} (\omega_0(t) - \varpi(t)), \quad (4.91)$$

O problema de valores iniciais $a_n(0) = 1$ e $b_n(0) = 0$ é verificado em cada subespaço invariante e está associado a cada problema de Cauchy-Liouville.

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \dot{a}_n(t) = -i\Omega(t)a_n(t) + i\sqrt{n+1}l(t)b_n^*(t), \\ \dot{b}_n(t) = -i\sqrt{n+1}l(t)a_n^*(t) - i\Omega(t)b_n(t). \end{cases} \quad (4.92)$$

As soluções correspondentes ao operador de evolução temporal dependem de um parâmetro $\mu \in [0, \infty)$ válido para todos subespaços invariantes com a seguinte condição (16)

$$\mu|l(t)| = \Omega(t) + \frac{\dot{\phi}_l(t)}{2}, \quad (4.93)$$

para funções analíticas arbitrárias $\Omega(t)$ e $l(t)$. As soluções determinadas em (19) se escrevem na forma

$$|a_n(\mu; t)| = \sqrt{\frac{\mu^2 + (n+1) \cos^2 \Phi_n(\mu; t)}{\mu^2 + n + 1}}, \quad (4.94)$$

$$|b_n(\mu; t)| = \sqrt{\frac{(n+1) \sin^2 \Phi_n(\mu; t)}{\mu^2 + n + 1}}, \quad (4.95)$$

com as respectivas fases $\phi_{a_n}(\mu; t)$ e $\phi_{b_n}(\mu; t)$ dadas por

$$\phi_{a_n}(\mu; t) = \frac{\phi_l(t)}{2} - \text{tg}^{-1} \left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + n + 1}} \text{tg} \Phi_n(\mu; t) \right], \quad (4.96)$$

$$\phi_{b_n}(\mu; t) = \frac{\phi_l(t)}{2} - \text{sgn}[\sin \Phi_n(\mu; t)] \frac{\pi}{2}, \quad (4.97)$$

na qual pode-se assumir $\phi_l(0) = 0$ por simplicidade, sem afetar a generalidade da solução. O uso da equação (4.96) em todos os instantes de tempo requer que a tangente inversa seja tratada como uma função de múltiplos valores e estendida por continuação analítica em pontos onde a função trigonométrica não é definida (111). A função real $\Phi_n(\mu; t)$ depende de n , t e do parâmetro μ como

$$\Phi_n(\mu; t) = \sqrt{\mu^2 + n + 1} \kappa(t), \quad n \geq 0, \quad (4.98)$$

com a função dependente do tempo $\kappa(t)$ definida como

$$\kappa(t) = \int_0^t |l(t')| dt', \quad (4.99)$$

determinado a partir da forma temporal da intensidade de acoplamento entre o átomo e o modo da cavidade. Observe que escolhendo $\mu = 0$, as soluções anteriores de Cauchy-Liouville ainda são aplicáveis (111). Neste caso limite, a condição (4.93) assume a forma

$$\Omega(t) = -\frac{\dot{\phi}_l(t)}{2}, \quad (4.100)$$

e a fase $\phi_l(t)$ do acoplamento dependente do tempo é dada, consequentemente, por

$$\phi_l(t) = -2 \int_0^t \Omega(t') dt', \quad (4.101)$$

para energias arbitrárias $\varpi(t)$ e $\omega_0(t)$.

Além disso, para estender o tratamento a qualquer momento, a tangente inversa na equação (4.97) deve ser tratada como uma função plurívoca (47) de seu argumento ou, equivalentemente, seu valor deve alternar entre 0 e π , o que produz o sinal da função cosseno na expressão para a_n ². Portanto, considerando o valor $\mu = 0$, as funções $a_n(\mu; t)$ e $b_n(\mu; t)$ são lidos na forma

$$a_n(0; t) = \cos[\sqrt{n+1} \kappa(t)] \exp \left[-i \int_0^t \Omega(t') dt' \right], \quad (4.102)$$

$$b_n(0; t) = -i \sin[\sqrt{n+1} \kappa(t)] \exp \left[-i \int_0^t \Omega(t') dt' \right]. \quad (4.103)$$

² É recomendável a referência (111) na qual o leitor pode encontrar uma discussão completa bem como referências citadas que justificam claramente a sistemática aplicada na solução da dinâmica com simetria $SU(2)$.

Como se obtém uma forma parametrizada da solução analítica para o problema de Cauchy, torna-se possível explorar com precisão as propriedades dinâmicas do modelo JCDT, considerando diferentes tipos de estados iniciais no modo de cavidade, por exemplo, assumindo o átomo de dois níveis em superposição, com estados fundamental e excitado. Além disso, as estatísticas de campo no cenário dinâmico do modelo JCDT generalizado, conforme discutido em (69), e a inversão da população atômica são importantes para nossos objetivos. Isso nos motiva a explorar como a distribuição de fótons e o número médio de fótons, para tipos distintos de estados clássicos e não clássicos do modo, afetam a dinâmica do sistema, conforme as soluções em (4.94)-(4.97).

A estatística do estado inicial do modo da cavidade afeta a dinâmica da inversão da população atômica e as propriedades que caracterizam o estado quântico do modo da cavidade, que, no cenário considerado, dependem do parâmetro μ . Por exemplo, pode-se supor que o átomo e o modo da cavidade sejam inicialmente não correlacionados e que assumam estados de superposição par e ímpar de estado coerente no modo da cavidade. Por uma questão de generalidade, indo além do que é considerado em (19), também se admite que o átomo se encontra inicialmente num estado de superposição e se analisam as propriedades dinâmicas do modelo JCDT, centrando a atenção nos efeitos sobre a dinâmica decorrentes do parâmetro μ . A superposição de um estado coerente é a seguinte

$$|\alpha\rangle_s = A_s^{1/2}(|\alpha\rangle + s|-\alpha\rangle), \quad (4.104)$$

com

$$A_s^{-1} = [1 + s^2 + 2s \exp(-2\bar{n})], \quad (4.105)$$

onde $s = 1$ e $s = -1$ significam, respectivamente, estados coerentes pares e ímpares, e $s = 0$ recupera o estado coerente $|\alpha\rangle$ com número médio de fótons $\bar{n}$. Para o átomo, assume-se que o mesmo está preparado em um estado de superposição na forma

$$|Y_a\rangle = (\zeta_e|e\rangle + \zeta_g|g\rangle), \quad (4.106)$$

com $\zeta_{e,g}$ constantes complexas que obedecem à condição de normalização $|\zeta_e|^2 + |\zeta_g|^2 = 1$.

Devido a ausência de dissipação no sistema em estudo, isto é, uma vez que não se está levando os efeitos devido a reservatórios tanto para o átomo quanto para o campo, o estado total do sistema $|\Psi_{ac}(t)\rangle$ evolui de forma unitária. Isto significa dizer que o estado quântico do sistema global (átomo-campo) evolui no tempo t como (19)

$$\begin{aligned} |\Psi_{ac}(t)\rangle = & A_s^{1/2} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left\{ \zeta_e \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \eta_n}{\sqrt{n!}} c_n(t) [a_n(t) |e, n\rangle \right. \right. \\ & - \left. \left. b_n^*(t) |g, n+1\rangle \right] \right] + \zeta_g \left[e^{i\theta(t)} (1+s) |g, 0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1} \eta_{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \right. \\ & \times \left. c_n(t) [a_n^*(t) |g, n+1\rangle + b_n(t) |e, n\rangle] \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (4.107)$$

para o qual o fator $\eta_q = (1 + s(-1)^q)$. A fase $\theta(t)$ no estado quântico (4.107), correspondente à evolução livre do estado $|g, 0\rangle$, é dada por

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \omega_0(t') dt'. \quad (4.108)$$

O estado quântico puro entrelaçado do campo atômico no espaço de Hilbert composto $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_c$, que evolui unitariamente no tempo, leva ao operador de densidade linear obtido a partir do produto externo do estado $|\Psi_{ac}(t)\rangle$ consigo mesmo, e é expresso como

$$\rho_{ac}(t) = |\Psi_{ac}(t)\rangle\langle\Psi_{ac}(t)|. \quad (4.109)$$

O operador $\rho_{ac}(t)$ obedece à equação $\text{Tr}_{ac}[\hat{\rho}_{ac}(t)] = 1$, em que Tr_{ac} denota o traço sobre os graus de liberdade do átomo e do campo no espaço de Hilbert composto. O operador de densidade $\rho_{ac}(t)$ também é um operador de projeção de grau um e idempotente, o que implica que $\rho_{ac}(t) = \rho_{ac}^2(t)$. Na ausência de perdas, a dinâmica geral é unitária, o que implica que a pureza é sempre igual a 1; ou seja, para o operador de densidade verifica-se que $\text{Tr}_{ac}[\hat{\rho}_{ac}^2(t)] = 1$ (112). Para cada subsistema, os operadores de densidade reduzidos correspondentes obtidos a partir dos traços parciais são determinados como

$$\hat{\rho}_a(t) = \text{Tr}_c[|\Psi_{ac}(t)\rangle\langle\Psi_{ac}(t)|], \quad (4.110)$$

$$\hat{\rho}_c(t) = \text{Tr}_a[|\Psi_{ac}(t)\rangle\langle\Psi_{ac}(t)|], \quad (4.111)$$

a partir do qual as propriedades relativas ao átomo e ao campo podem ser determinadas separadamente.

Os operadores de densidade são todos hermitianos, o que implica que satisfazem as condições $\rho_{ac}^\dagger(t) = \rho_{ac}(t)$, $\hat{\rho}_a^\dagger(t) = \hat{\rho}_a(t)$ e $\hat{\rho}_c^\dagger(t) = \hat{\rho}_c(t)$. A forma explícita dos operadores de densidade (4.109) para o sistema átomo-campo é a seguinte:

$$\begin{aligned} \rho_{ac}(t) = & A_s e^{-|\alpha|^2} \left\{ \zeta_g \zeta_g^* (1+s)^2 |g, 0\rangle\langle g, 0| \right. \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\mathcal{A}_{n,m}^{(e,e)} |e, n\rangle\langle e, m| + \mathcal{A}_{n,m}^{(e,g)} |e, n\rangle\langle g, m+1| \right. \\ & + \mathcal{A}_{m,n}^{(g,e)} |g, m+1\rangle\langle e, n| + \mathcal{A}_{n,m}^{(g,g)} |g, n+1\rangle\langle g, m+1| \Big] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{B}_n^{(e,g)} |e, n\rangle\langle g, 0| + \mathcal{B}_n^{(g,e)} |g, 0\rangle\langle e, n| \right. \\ & + \left. \mathcal{B}_n^{(g,g)} |g, 0\rangle\langle g, n+1| + \bar{\mathcal{B}}_n^{(g,g)} |g, n+1\rangle\langle g, 0| \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Define-se os coeficientes $\mathfrak{z}_{q,p}$ e $\mathfrak{z}_q$ na forma

$$\mathfrak{z}_n = \frac{(\alpha)^n \eta_n}{\sqrt{n!}}, \quad \mathfrak{z}_{n,m} = \frac{(\alpha)^n (\alpha^*)^m \eta_n \eta_m}{\sqrt{n!m!}}, \quad \mathfrak{z}_{n,m}^* = \mathfrak{z}_{m,n}, \quad (4.113)$$

de tal forma que os coeficientes dependentes do tempo $\mathcal{A}$ possam ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,m}^{(e,e)} = & c_n c_m^* [\zeta_e \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n,m} a_n a_m^* + \zeta_e \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n,m+1} a_n b_m^* \\ & + \zeta_g \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n+1,m} b_n a_m^* + \zeta_g \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1,m+1} b_n b_m^*], \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{n,m}^{(e,g)} &= c_n c_m^* [\zeta_e \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n,m+1} a_n a_m - \zeta_e \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n,m} a_n b_m \\ &+ \zeta_g \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1,m+1} b_n a_m - \zeta_g \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n+1,m} b_n b_m],\end{aligned}\quad (4.115)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{n,m}^{(g,e)} &= c_n c_m^* [\zeta_g \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n+1,m} a_n^* a_m^* - \zeta_e \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n,m} b_n^* a_m^* \\ &+ \zeta_g \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1,m+1} a_n^* b_m^* - \zeta_e \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n,m+1} b_n^* b_m^*],\end{aligned}\quad (4.116)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{n,m}^{(g,g)} &= c_n c_m^* [\zeta_g \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1,m+1} a_n^* a_m - \zeta_e \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n,m+1} b_n^* a_m \\ &- \zeta_g \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n+1,m} a_n^* b_m + \zeta_e \zeta_e^* \mathfrak{z}_{n,m} b_n^* b_m].\end{aligned}\quad (4.117)$$

Devido à propriedade $\rho_{ac}^\dagger(t) = \rho_{ac}(t)$, verifica-se que $\mathcal{A}_{n,m}^{(g,e)} = (\mathcal{A}_{m,n}^{(e,g)})^*$. Os coeficientes $\mathcal{B}$ assumem as formas

$$\mathcal{B}_n^{(g,e)} = (1+s)e^{i\theta} c_n^* \zeta_g [\zeta_e^* \mathfrak{z}_n^* a_n^* + \zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1}^* b_n^*], \quad (4.118)$$

$$\mathcal{B}_n^{(e,g)} = (1+s)e^{-i\theta} c_n \zeta_g^* [\zeta_e \mathfrak{z}_n a_n + \zeta_g \mathfrak{z}_{n+1} b_n], \quad (4.119)$$

$$\mathcal{B}_n^{(g,g)} = (1+s)e^{i\theta} c_n^* \zeta_g [\zeta_g^* \mathfrak{z}_{n+1}^* a_n - \zeta_e^* \mathfrak{z}_n^* b_n], \quad (4.120)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_n^{(g,g)} = (1+s)e^{-i\theta} c_n \zeta_g^* [\zeta_g \mathfrak{z}_{n+1} a_n^* - \zeta_e \mathfrak{z}_n b_n^*], \quad (4.121)$$

Traçando o grau de liberdade do átomo, obtém-se o operador de densidade reduzido correspondente ao campo no modo da cavidade como

$$\begin{aligned}\rho_c(t) &= A_s e^{-|\alpha|^2} \left\{ [\zeta_g \zeta_g^* (1+s)^2 + \mathcal{A}_{0,0}^{(e,e)}] |0\rangle\langle 0| + \sum_{n,m=1}^{\infty} [\mathcal{A}_{n,m}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n-1,m-1}^{(g,g)}] |n\rangle\langle m| \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{A}_{0,n}^{(e,e)} + \mathcal{B}_{n-1}^{(g,g)}] |0\rangle\langle n| + [\mathcal{A}_{n,0}^{(e,e)} + \bar{\mathcal{B}}_{n-1}^{(g,g)}] |n\rangle\langle 0| \right\}.\end{aligned}\quad (4.122)$$

Da mesma forma, o operador de densidade reduzida para o átomo é

$$\rho_a(t) = A_s e^{-|\alpha|^2} \left[\lambda_{ee} |e\rangle\langle e| + \lambda_{eg} |e\rangle\langle g| + \lambda_{ge} |g\rangle\langle e| + \lambda_{gg} |g\rangle\langle g| \right], \quad (4.123)$$

onde se verifica

$$\lambda_{ee} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)}, \quad \lambda_{gg} = \zeta_g \zeta_g^* (1+s)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{n,n}^{(g,g)}, \quad (4.124)$$

$$\lambda_{eg} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{n+1,n}^{(e,g)} + \mathcal{B}_0^{(e,g)}, \quad \lambda_{ge} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_{n,n+1}^{(g,e)} + \mathcal{B}_0^{(g,e)}. \quad (4.125)$$

Por exemplo, determina-se a forma exata da inversão da população atômica, definida como a diferença entre as probabilidades do estado excitado e do estado fundamental, que é obtida a partir do operador de densidade $\rho_a(t)$ usando a equação $D_\zeta^{(s)}(\bar{n}, t) = \text{Tr}_a[\rho_a(t) \hat{\sigma}_z]$. Em termos dos coeficientes dependentes do tempo $\mathcal{A}$, a forma funcional de $D_\zeta^{(s)}(\bar{n}, t)$ é escrita como

$$D_\zeta^{(s)}(\bar{n}, t) = A_s e^{-\bar{n}} \left\{ -\zeta_g \zeta_g^* (1+s)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} [\mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)} - \mathcal{A}_{n,n}^{(g,g)}] \right\}, \quad (4.126)$$

que pode ser explicitamente expresso em termos das entradas a_n e b_n como

$$D_\zeta^{(s)}(\bar{n}, t) = A_s e^{-\bar{n}} \left\{ |\zeta_e|^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n [1 + s(-1)^n]^2}{n!} \mathcal{F}_n(t) \right] - |\zeta_g|^2 \left[(1+s)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+1} [1 - s(-1)^n]^2}{(n+1)!} \mathcal{F}_n(t) \right] + 4(1-s^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{\sqrt{n!(n+1)!}} \text{Re}[\alpha \zeta_e^* \zeta_g a_n^*(t) b_n(t)] \right\}, \quad (4.127)$$

com a função $\mathcal{F}_n(t)$ dada em termos de $a_n(t)$ e $b_n(t)$ como

$$\mathcal{F}_n(t) = |a_n(t)|^2 - |b_n(t)|^2. \quad (4.128)$$

No terceiro fator da equação (4.127), verifica-se que a fase dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ deve ser considerada na inversão da população atômica quando o átomo inicia em um estado de superposição. No entanto, o último termo em (4.127) é zero se o estado inicial do campo for uma superposição par ou ímpar de estados coerentes quando $s = \pm 1$. Além disso, é adequado explorar a influência do parâmetro universal μ sobre as propriedades quânticas que caracterizam o estado do modo da cavidade.

A função estatística do fóton $\mathcal{P}_n(t)$ é determinada a partir dos operadores de densidade reduzida $\rho_c(t)$ como

$$\mathcal{P}_n(t) = \langle n | \rho_c(t) | n \rangle, \quad (4.129)$$

e descreve a natureza estatística intrínseca dos fótons no estado quântico do modo da cavidade. Então, a partir da equação (4.122), encontra-se

$$\mathcal{P}_0 = A_s e^{-\bar{n}} [\zeta_g \zeta_g^* (1+s)^2 + \mathcal{A}_{0,0}^{(e,e)}], \quad (4.130)$$

$$\mathcal{P}_n = A_s e^{-\bar{n}} [\mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n-1,n-1}^{(g,g)}], \quad n \geq 1, \quad (4.131)$$

onde a forma explícita dos coeficientes $\mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)}$ e $\mathcal{A}_{n,n}^{(g,g)}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)} &= \frac{\bar{n}^n}{n!} \left\{ |\zeta_e|^2 [1 + s(-1)^n]^2 |a_n(t)|^2 + \frac{\bar{n}}{n+1} |\zeta_g|^2 [1 - s(-1)^n]^2 |b_n(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1-s^2)}{\sqrt{n+1}} \text{Re}[\zeta_e \zeta_g^* \alpha^* a_n(t) b_n^*(t)] \right\}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n}^{(g,g)} &= \frac{\bar{n}^n}{n!} \left\{ \frac{\bar{n}}{n+1} |\zeta_g|^2 [1 - s(-1)^n]^2 |a_n(t)|^2 + |\zeta_e|^2 [1 + s(-1)^n]^2 |b_n(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(1-s^2)}{\sqrt{n+1}} \text{Re}[\zeta_e \zeta_g^* \alpha^* a_n(t) b_n^*(t)] \right\}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Além disso, também pode-se determinar a evolução temporal do número médio de fótons $\bar{n}_1(t)$ no modo da cavidade, que muda devido à interação com o átomo, bem como o fator de

Mandel $\mathcal{Q}(t)$ definido como (113)

$$\mathcal{Q}(t) = \frac{\bar{n}_2(t) - \bar{n}_1^2(t)}{\bar{n}_1(t)} - 1, \quad (4.134)$$

onde $\bar{n}_k(t) = \text{Tr}_c[\rho_c(t)(\hat{a}^\dagger \hat{a})^k]$. Usando a equação (4.134), é possível identificar a existência de estados não clássicos no modo da cavidade quando $\mathcal{Q}(t)$ assume um valor negativo, o que indica uma estatística sub-poissoniana e não tem uma contrapartida clássica. Para o modelo em análise, verifica-se que

$$\bar{n}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{P}_n = A_s e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} n (\mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n-1,n-1}^{(g,g)}), \quad (4.135)$$

$$\bar{n}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathcal{P}_n = A_s e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\mathcal{A}_{n,n}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n-1,n-1}^{(g,g)}). \quad (4.136)$$

Enquanto o estado coerente é definido como um estado clássico ou macroscópico do campo eletromagnético no modo da cavidade, o estado comprimido é um estado com propriedades não clássicas caracterizadas pela compressão na componente quadratura do campo. A superposição do estado coerente do tipo par ou ímpar é um estado não clássico do campo eletromagnético quantizado. Uma vez considerado o estado inicial do sistema átomo-campo, é viável analisar a quantidade mensurável que caracteriza o grau de compressão do estado e como uma dinâmica específica, dependente do tempo, que impulsiona a interação entre o campo e o átomo influencia a compressão do modo ao longo do tempo. A compressão é uma propriedade não clássica dos estados quânticos da luz (114) e é relevante em processos de informação quântica, pois aumenta as correlações quânticas em sistemas acoplados.

O grau de compressão no estado quântico do modo da cavidade pode ser medido através do coeficiente de compressão principal $\mathcal{Z}$ definido por (115, 116)

$$\mathcal{Z} = 1 + 2\langle \Delta \hat{a}^\dagger \Delta \hat{a} \rangle - |\langle (\Delta \hat{a})^2 \rangle|, \quad (4.137)$$

onde se tem $\Delta \hat{o} = \hat{o} - \langle \hat{o} \rangle$ with $\langle \hat{o} \rangle = \text{Tr}_c[\hat{\rho}_c(t) \hat{o}]$, e

$$\langle \Delta \hat{a}^\dagger \Delta \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle, \quad \langle (\Delta \hat{a})^2 \rangle = \langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2 \quad (4.138)$$

O coeficiente de compressão principal pode ser escrito na forma

$$\mathcal{Z} = 1 + 2\bar{n}_1(t) - 2\langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle - 2|\langle \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a} \rangle^2|, \quad (4.139)$$

com

$$\langle \hat{a} \rangle = A_s e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} [\mathcal{A}_{n+1,n}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n,n-1}^{(g,g)}] + \mathcal{A}_{1,0}^{(e,e)} + \bar{\mathcal{B}}_0^{(g,g)} \right], \quad (4.140)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \rangle = A_s e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} [\mathcal{A}_{n,n+1}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n-1,n}^{(g,g)}] + \mathcal{A}_{0,1}^{(e,e)} + \mathcal{B}_0^{(g,g)} \right], \quad (4.141)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = A_s e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} [\mathcal{A}_{n+2,n}^{(e,e)} + \mathcal{A}_{n+1,n-1}^{(g,g)}] + \sqrt{2} [\mathcal{A}_{2,0}^{(e,e)} + \bar{\mathcal{B}}_1^{(g,g)}] \right]. \quad (4.142)$$

Assume o valor $\mathcal{Z} = 1$ para estados coerentes e $\mathcal{Z} < 1$ se o estado for comprimido (115).

4.5 UM EXEMPLO CONCRETO FORA DA RESSONÂNCIA

Para ilustrar a dinâmica quântica do campo atômico, considera-se uma escolha específica para $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$, que restringe a dependência temporal de $|l(t)|$ e nos permite aplicar as soluções de acordo com as equações (4.94)-(4.97). Para esse fim, assumimos estados de superposição coerentes para o campo com frequência variável no tempo, o que também foi considerado em (117) apenas para estados coerentes iniciais. Em seguida, assume-se que a frequência do modo varia no tempo como

$$\varpi(t) = \xi_0 [1 + \epsilon \sin(q\xi_0 t)], \quad q > 0, \quad (4.143)$$

com energia atômica $\omega_0 = p\xi_0$ assumida como independente do tempo e p positivo. A fase $\phi_l(t) = \delta t$ é considerada linear no tempo t com os parâmetros ξ_0 , ϵ e δ positivos. Para esta escolha específica de $\varpi(t)$ e $\omega_0(t)$, a função real $\Omega(t)$ assume a forma

$$\Omega(t) = \frac{\xi_0}{2} [p - 1 - \epsilon \sin(q\xi_0 t)]. \quad (4.144)$$

A solução de Cauchy-Liouville parametrizada na forma (4.94)-(4.97) implica que a força de acoplamento $|l(t)|$ deve obedecer à equação

$$|l(t)| = \frac{1}{2\mu} [\xi_0 (p - 1 - \epsilon \sin(q\xi_0 t)) + \delta], \quad (4.145)$$

sob as restrições $\mu \neq 0$ e $\xi_0 (p - 1 - \epsilon) + \delta > 0$ para garantir a positividade de $|l(t)|$. A função $\Phi_n(\mu; t)$ correspondente a (4.145) é dada por

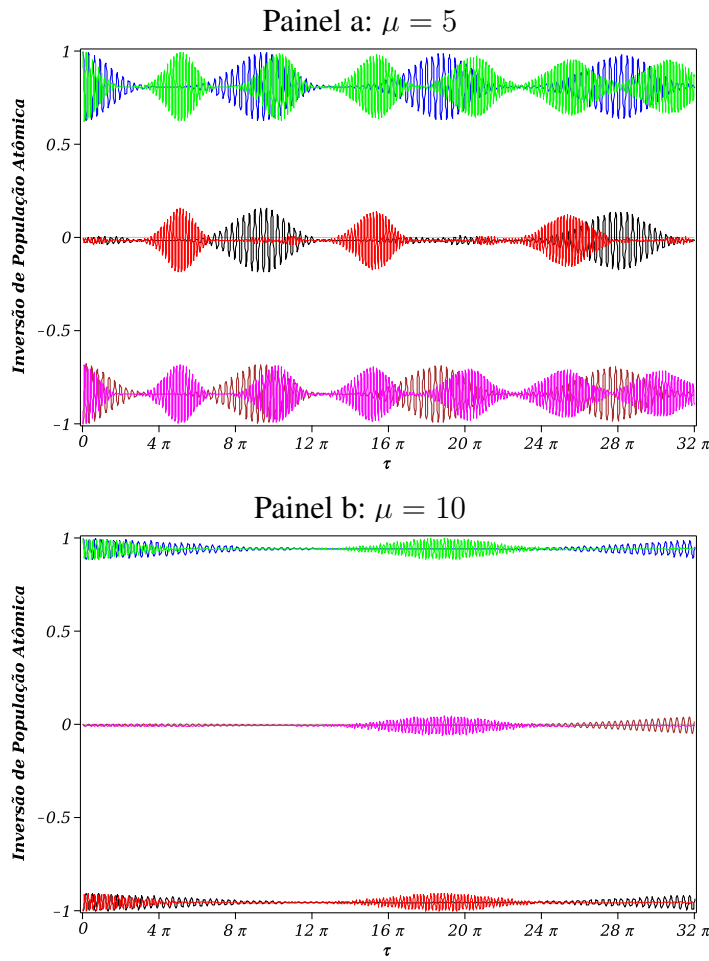
$$\Phi_n(\mu; t) = \frac{\sqrt{\mu^2 + n + 1}}{2\mu q} [((p - 1)\xi_0 + \delta)qt + \epsilon (\cos(q\xi_0 t) - 1)]. \quad (4.146)$$

Em particular, as fases $\varphi_n(t)$ que aparecem nos coeficientes $c_n(t)$, conforme definido pela equação (4.89), assumem a forma

$$\varphi_n(t) = \frac{(2n + 1)}{2q} [q\xi_0 t + \epsilon (1 - \cos(q\xi_0 t))], \quad (4.147)$$

enquanto $\omega_0 = p\xi_0$ implica $\theta(t) = p\xi_0 t/2$. A partir dos resultados anteriores, é possível analisar os aspectos dinâmicos da interação átomo-campo considerando diferentes valores dos parâmetros do sistema e do estado quântico inicial. Assim, a partir das fórmulas apresentadas anteriormente, é possível escrever as soluções para as entradas $a_n(t)$ e $b_n(t)$ e, assim, por diante, para todos os coeficientes (4.114)-(4.121) que aparecem nos operadores de densidade $\rho_{ac}(t)$, $\rho_a(t)$ e $\rho_c(t)$. Em relação ao átomo, as figuras 2 correspondentes a $\mu = 5$ (topo) e $\mu = 10$ (em baixo) mostram o comportamento dinâmico da inversão da população atômica na escala de tempo $\tau = \xi_0 t$ para estados iniciais distintos do átomo. Em todas as curvas, o campo está em um estado de superposição coerente ímpar ($s = -1$) com número médio de fótons $\bar{n} = |\alpha|^2 = 5$, onde os parâmetros do sistema são $\epsilon = 0, 25$, $q = p = 2$. As curvas verdes e vermelhas correspondem a $\delta = 5$ e $\delta = 10$ com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$). Para valores mais altos de δ ,

Figura 2. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional $\tau = \xi_0 t$, começando com o campo na superposição ímpar do estado coerente (4.104), o que significa $s = -1$. Para $\bar{n} = 5$ e $\alpha = |\alpha|$, o átomo no estado excitado, com $\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$, e considerando $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\mu = 5$ (painel (a)) e $\mu = 10$ (painel (b)), obtêm-se as curvas azul e verde que correspondem, respectivamente, a $\delta = 5$ e $\delta = 10$. Para o átomo no estado fundamental, $\zeta_e = 0$, $\zeta_g = 1$, as curvas marrom e magenta correspondem a $\delta = 5$ e $\delta = 10$. Além disso, as curvas preta e vermelha correspondem, respectivamente, a $\delta = 5$ e a $\delta = 10$, com $\zeta_e = \zeta_g = \sqrt{2}/2$, o átomo em um estado de superposição. Aqui, a série trunca-se em (4.112) no estado de Fock correspondente a $n = 100$.

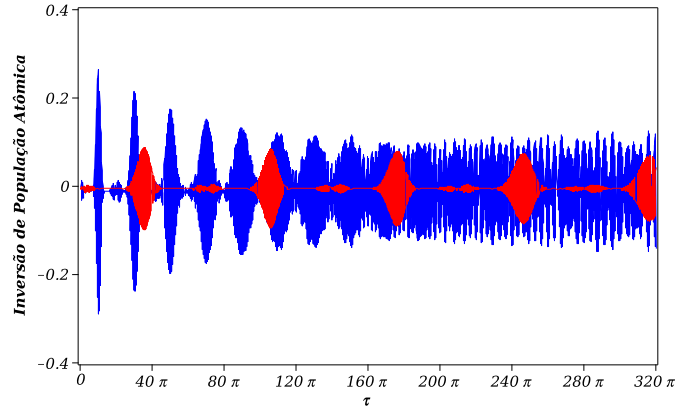


Fonte: O autor.

observa-se um aumento no número de colapsos e renascimentos locais, com um número médio de população diferente de zero, o que indica que um aumento na velocidade de fase $\dot{\phi}_l$ melhora a natureza quântica do sistema.

Para o átomo em um estado de superposição ($\zeta_e = \zeta_g = \sqrt{2}/2$), as curvas vermelha e preta, correspondentes a $\delta = 5$ e $\delta = 10$, respectivamente, apresentam um comportamento semelhante à dinâmica atômica em comparação com o caso anterior, exceto que agora o número médio de população está próximo de zero e os colapsos e renascimentos são mais esparsos, um resultado também observado em (19). Além disso, fixando a velocidade de fase em $\delta = 5$, têm-se as curvas

Figura 3. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional $\tau = \xi_0 t$, começando com o campo na superposição ímpar do estado coerente (4.104), o que significa $s = -1$. Para $\bar{n} = 10$ e $\alpha = |\alpha|$, o átomo no estado de superposição com $\zeta_e = \zeta_g = \sqrt{2}/2$ assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, obtêm-se as curvas azul e vermelha que correspondem, respectivamente, a $\mu = 5$ e $\mu = 10$. Série do estado de Fock está truncada em $n = 500$.



Fonte: O autor.

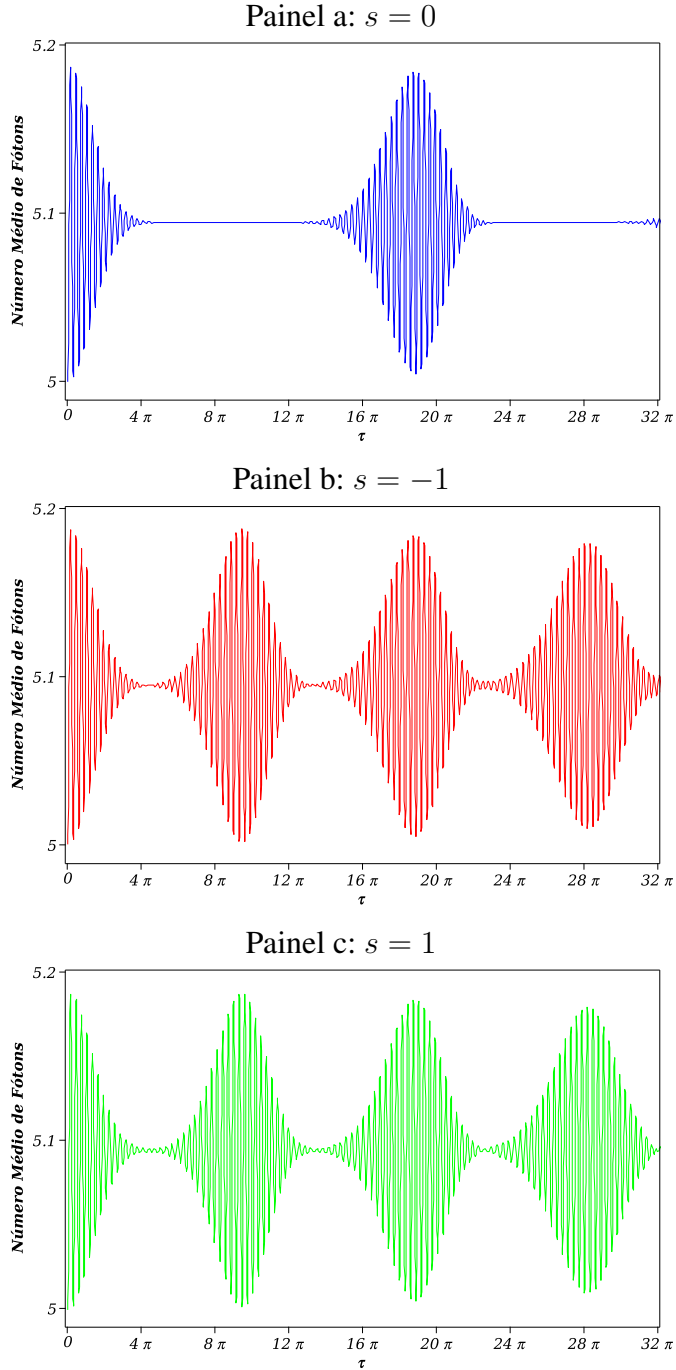
azul ($\mu = 5$) e vermelha ($\mu = 10$) na figura 3, revelando que um aumento de μ resulta em um comportamento regular dos colapsos e renascimentos por um longo intervalo de tempo. A figura 4 mostra o comportamento temporal do número médio de fótons do modo da cavidade, que corresponde ao fator Mandel descrito na figura 5 para o qual $\mu = 5$. Ao aumentar μ , obtém-se a figura 6, que apresenta o fator de Mandel para $\mu = 10$. A figura 4 mostra oscilações do número médio de fótons em torno de um valor superior a $\bar{n} = 5$, o que é esperado, uma vez que o átomo está no estado excitado. Observe que o envelope das oscilações está igualmente espaçado tanto para os casos de superposições pares quanto para os ímpares. No entanto, para o estado coerente que representa um estado clássico, verifica-se regiões onde o número médio de fótons no campo da cavidade permanece estacionário.

Um comportamento semelhante é verificado para o fator de Mandel na figura 5, onde se identificam os intervalos de tempo em que o estado do campo da cavidade assume uma estatística subpoissoniana sem contrapartida clássica.

Para o estado coerente, o intervalo de tempo em que o número médio de fótons é constante, o fator de Mandel também é constante ao longo do tempo. Neste intervalo de tempo, a estatística do campo da cavidade é então poissoniana. Conclui-se, então, que os estados não-clássicos no modo da cavidade aumentam as excitações atômicas no sistema átomo-campo.

A figura 6 mostra que aumentar o valor do parâmetro universal μ , altera o comportamento do fator Mandel, tornando-o mais regular ao longo do tempo e reduzindo o intervalo de tempo em que as estatísticas do campo da cavidade são sub-Poissonianas. As figuras 7 e 8 descrevem a compressão do estado quântico no modo da cavidade.

Figura 4. O número médio de fótons $\bar{n}_1(\tau)$ para o modo da cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e parâmetro universal $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).

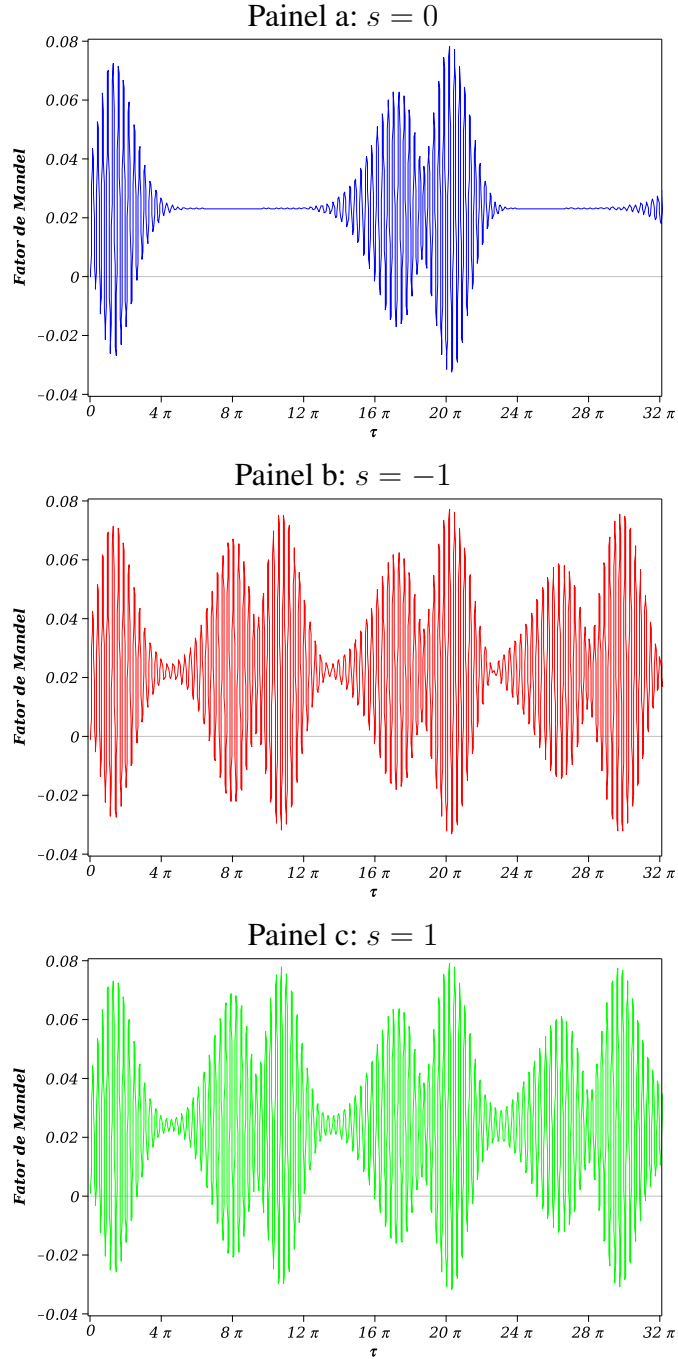


Fonte: O autor.

4.6 A ESCALA DE TEMPO DINÂMICO PARA O MODELO DE JCDT

A função $\Phi_n(\mu; t)$ é a pedra angular das soluções (4.94)-(4.97) e pode ser vista como dependente da nova coordenada temporal κ definida como

Figura 5. O fator de Mandel $\mathcal{Q}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).

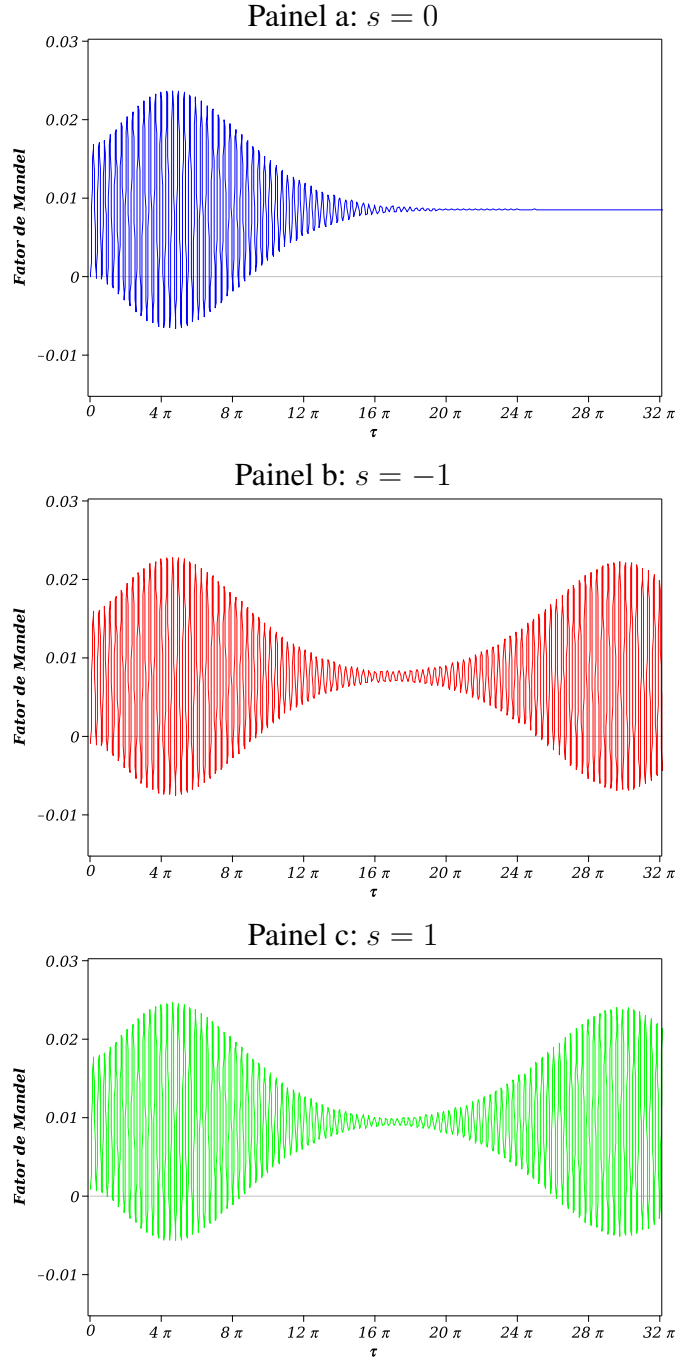


Fonte: o autor.

$$\kappa = \int_0^t |l(t')| dt', \quad (4.148)$$

que a partir de agora denomina-se *escala de tempo dinâmica* para o modelo Jaynes-Cummings dependente do tempo. Observe que a escala κ está relacionada ao tempo comum e depende da

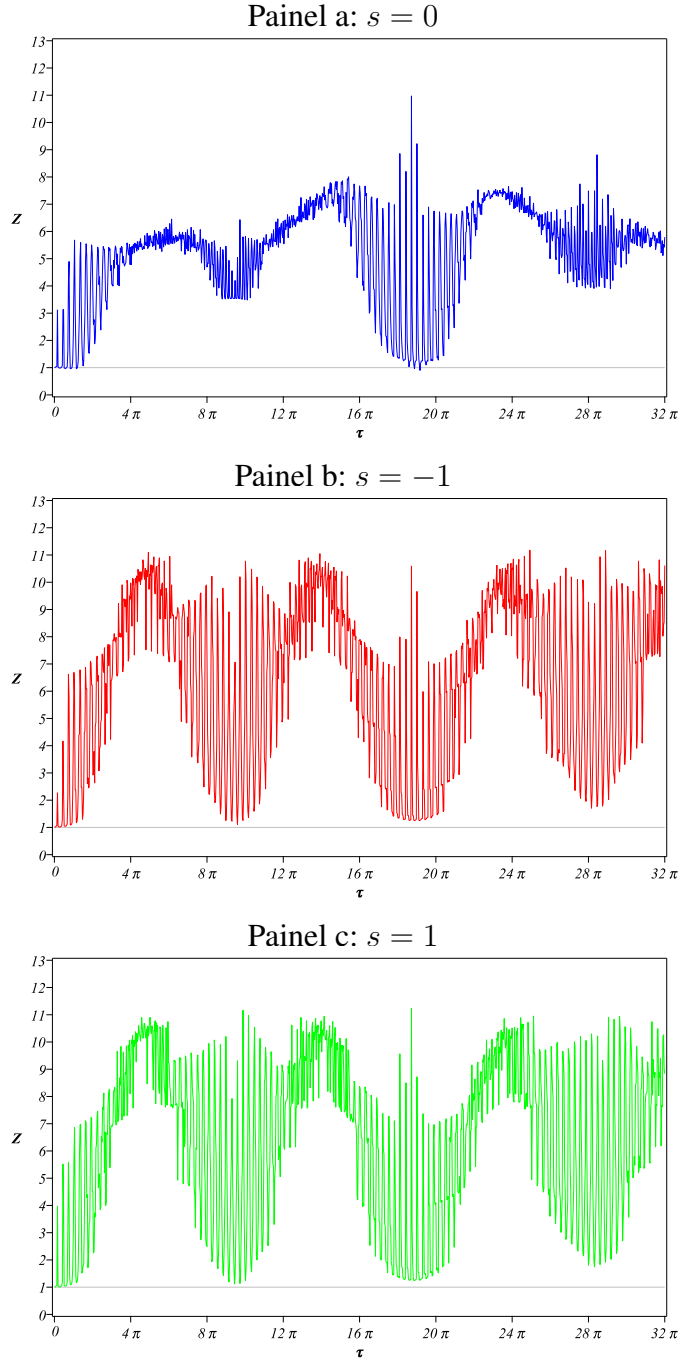
Figura 6. O fator de Mandel $\mathcal{Q}(t)$ para o campo no modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 10$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).



Fonte: o autor.

forma específica da força de acoplamento, que é função do tempo, $|l(t)|$. Para o caso específico de um acoplamento de força constante com $|l(t)| = l_0$ e dependência temporal arbitrária em $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$, a escala de tempo dinâmica é linear em t ($\kappa = l_0 t$), o que não passa de uma transformação de escala do tempo t . Isso implica que $t = l_0^{-1} \kappa$ e que as funções $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$ se

Figura 7. A compressão do estado quântico no modo de cavidade $\mathcal{Z}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 5$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).

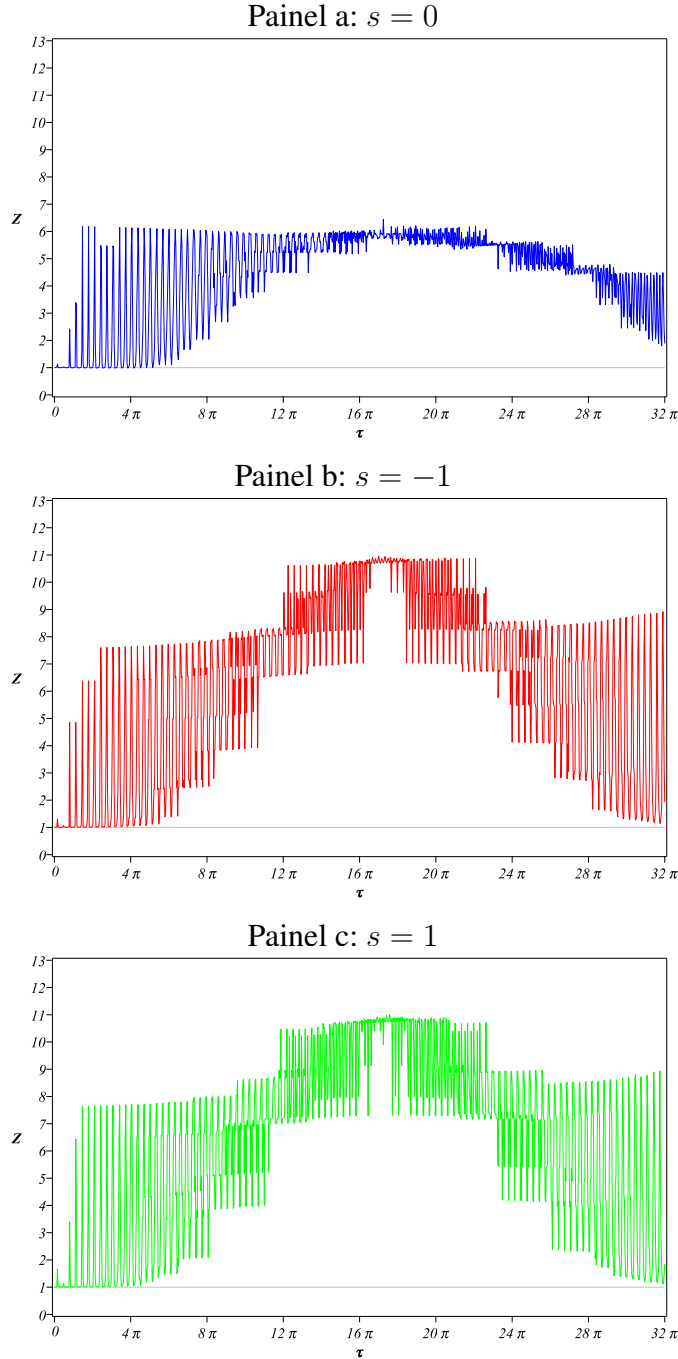


Fonte: o autor.

transformam em $\tilde{\Omega}(\kappa) = \Omega(l_0^{-1}\kappa)$ e $\varphi_l(\kappa) = \phi_l(l_0^{-1}\kappa)$.

Neste caso simples, as equações (4.93)-(4.98), bem como o problema de Cauchy-Liouville, podem ser definidos em termos da escala de tempo dinâmica κ . Por outro lado, para uma

Figura 8. A compressão do estado quântico no modo de cavidade $\mathcal{Z}(t)$ para o modo de cavidade com o átomo no estado excitado ($\zeta_e = 1$ e $\zeta_g = 0$) assumindo que $\epsilon = 0,25$, $q = p = 2$, $\delta = 5$, $\bar{n} = 5$ e o parâmetro universal dado por $\mu = 10$. As curvas azul (painel a), vermelha (painel b) e verde (painel c) correspondem a $s = 0$, $s = -1$ e $s = 1$ na superposição (4.104).



Fonte: o autor.

dependência temporal arbitrária de $|l(t)|$, pode-se estender os resultados anteriores se o tempo comum t for mapeado em κ por um inverso admissível. Nesse sentido, pode-se assumir que a equação (4.148) seja escrita como $\kappa = \mathcal{L}(t)$ de tal forma que $t = \mathcal{L}^{-1}(\kappa)$. Por exemplo, se

$|l(t)| = |\cos(t)|$, a variável κ depende de t , conforme o que se denomina *escala de tempo dinâmica* do modelo Jaynes-Cummings dependente do tempo. Observe que a escala κ está relacionada ao tempo comum e depende da forma particular da força de acoplamento dependente do tempo $|l(t)|$. Para o caso específico de acoplamento forte com $|l(t)| = l_0$ e dependência temporal arbitrária em $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$, a escala de tempo dinâmica é linear em t ($\kappa = l_0 t$), o que não passa de uma transformação de escala do tempo t . Isso implica que $t = l_0^{-1} \kappa$ e as funções $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$ se transformam em $\tilde{\Omega}(\kappa) = \Omega(l_0^{-1} \kappa)$ e $\varphi_l(\kappa) = \phi_l(l_0^{-1} \kappa)$. Neste caso simples, as equações (4.93)-(4.98), bem como o problema de Cauchy-Liouville (4.92), podem ser definidos em termos da escala de tempo dinâmica κ .

Por outro lado, para uma dependência temporal arbitrária de $|l(t)|$, pode-se estender os resultados anteriores se o tempo comum t for mapeado em κ por um inverso admissível. Nesse sentido, assume-se que a equação (4.148) é escrita como $\kappa = \mathfrak{L}(t)$ de tal forma que $t = \mathfrak{L}^{-1}(\kappa)$. Por exemplo, se $|l(t)| = |\cos(t)|$, a variável κ depende de t de acordo com

$$\kappa = \mathfrak{L}(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \sin(\tau)^2} d\tau, \quad (4.149)$$

o que implica em

$$t = \mathfrak{L}^{-1}(\kappa) = \begin{cases} \arcsin(\kappa), & 0 < \kappa \leq 1, \\ \arcsin(p+1-\kappa), & p < \kappa \leq p+1, \\ \arcsin(p+1+\kappa), & p+1 < \kappa \leq p+2, \end{cases} \quad (4.150)$$

onde $p = 1, 3, 5, \dots$, ilustrando um exemplo simples de como se pode discutir toda a dinâmica em termos da variável κ . Assim, em princípio, as funções $\varphi(\kappa)$ e $\tilde{\Omega}(\kappa)$ podem ser determinadas independentemente da forma das funções $\Omega(t)$ e $\phi_l(t)$ que obedecem à condição (4.93), e as soluções na escala de tempo dinâmica podem ser explicitamente dadas por (4.94)-(4.97).

Observe que, independentemente da forma de $\mathfrak{L}^{-1}(\kappa)$, a condição (4.93) leva à equação

$$\varphi_l(\kappa) = 2\mu\kappa - 2 \int_0^\kappa \frac{\tilde{\Omega}(\kappa')}{|\mathfrak{l}(\kappa')|} d\kappa'. \quad (4.151)$$

Aqui, denomina-se $\mathfrak{l}(\kappa) = l(\mathfrak{L}^{-1}(\kappa))$ e deve-se usar símbolos distintos para as funções, pois as formas funcionais são diferentes quando escritas em variáveis de tempo t e κ . Além disso, do ponto de vista matemático, observando a equação (4.151), pode-se supor que existe uma classe de funções $\tilde{\Omega}(\kappa)$ que pode ser escrita na forma $\tilde{\Omega}(\kappa) = \mathfrak{g}(\kappa) |\mathfrak{l}(\kappa)|$, para funções integrais reais arbitrárias $\mathfrak{g}(\kappa)$.

Essa classe de funções $\mathfrak{g}(\kappa)$ determina um conjunto de soluções de Liouville-Cauchy parametrizadas na forma (4.94)-(4.98) na escala de tempo κ , e para essas soluções, a fase $\varphi_l(\kappa)$ depende de κ de acordo com:

$$\varphi_l(\kappa) = 2\mu\kappa - 2 \int_0^\kappa \mathfrak{g}(\kappa') d\kappa'. \quad (4.152)$$

Por exemplo, do ponto de vista matemático, pode-se supor que $\mathfrak{g}(\kappa) = \nu \sin(\kappa)$ para ν positivo, o que leva à fase $\varphi_l(\kappa)$ na forma

$$\varphi_l(\kappa) = 2\mu\kappa + 2\nu \cos(\kappa). \quad (4.153)$$

Este exemplo simples ilustra uma solução admissível parametrizada pelas funções

$$\Phi_n(\mu; \kappa) = \sqrt{\mu^2 + n + 1} \kappa, \quad n \geq 0, \quad (4.154)$$

na condição fora de ressonância, onde a fase não está restrita à dependência linear de κ . Por outro lado, pela inspeção direta da equação (4.151), pode-se observar que, na condição de ressonância, definida quando $\Omega(t) = (\omega_0(t) - \varpi(t))/2 = 0$, obtêm-se soluções tais que a dependência de $\varphi_l(\kappa)$ em relação a κ é necessariamente linear.

4.6.1 A dinâmica na condição de ressonância

Quando se assume o modelo JC dependente do tempo na ressonância, isso implica que $\Omega(t) = 0$ nas equações (4.92) e (4.93). Neste caso, o problema de Cauchy-Liouville toma a forma

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \frac{d\mathbf{a}_n(\kappa)}{d\kappa} = i\sqrt{n+1} \frac{\mathbf{l}(\kappa)}{|\mathbf{l}(\kappa)|} \mathbf{b}_n^*(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{a}_n^*(\kappa)}{d\kappa} = -i\sqrt{n+1} \frac{\mathbf{l}^*(\kappa)}{|\mathbf{l}(\kappa)|} \mathbf{b}_n(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{b}_n(\kappa)}{d\kappa} = -i\sqrt{n+1} \frac{\mathbf{l}(\kappa)}{|\mathbf{l}(\kappa)|} \mathbf{a}_n^*(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{b}_n^*(\kappa)}{d\kappa} = i\sqrt{n+1} \frac{\mathbf{l}^*(\kappa)}{|\mathbf{l}(\kappa)|} \mathbf{a}_n(\kappa), \end{cases} \quad (4.155)$$

onde é suposto que todas as funções complexas em (4.155) dependam regularmente de κ . Para um acoplamento real positivo dependente do tempo $|\mathbf{l}(\kappa)| = \mathbf{l}(\kappa)$, as equações (4.155) reduzem-se a um sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes. A função real arbitrária $\mathbf{l}(\kappa)$ implica na função de sinal $\text{sgn}_l(\kappa) = \mathbf{l}(\kappa)/|\mathbf{l}(\kappa)|$ no lado direito de (4.155), e o conhecimento da forma explícita de $\mathbf{l}(t)$ é necessário para determinar a solução de (4.155). No entanto, para $\mathbf{l}(t)$ positivo, as soluções são muito simples e têm a forma

$$|a_n(0, \mathfrak{L}^{-1}(\kappa))| = |\mathbf{a}_n(0, \kappa)| = \sqrt{\cos^2 [\sqrt{n+1} \kappa]}, \quad (4.156)$$

$$|b_n(0, \mathfrak{L}^{-1}(\kappa))| = |\mathbf{b}_n(0, \kappa)| = \sqrt{\sin^2 [\sqrt{n+1} \kappa]}, \quad (4.157)$$

com as respectivas fases $\phi_{\mathbf{a}_n}(0, \mathfrak{L}^{-1}(\kappa)) = \varphi_{\mathbf{a}_n}(0, \kappa)$ e $\phi_{\mathbf{b}_n}(0, \mathfrak{L}^{-1}(\kappa)) = \varphi_{\mathbf{b}_n}(0, \kappa)$ na forma

$$\varphi_{\mathbf{a}_n}(0, \kappa) = 0, \quad (4.158)$$

$$\varphi_{\mathbf{b}_n}(0, \kappa) = -\text{sgn} [\sin[\sqrt{n+1} \kappa]] \frac{\pi}{2}. \quad (4.159)$$

Estas são as soluções diretas em termos da escala de tempo dinâmica κ , e nota-se a semelhança com a solução do modelo Rabi independente do tempo no quadro rotativo. Para a

constante de acoplamento complexa $\mathbf{l}(\kappa) = |\mathbf{l}(\kappa)| \exp[i\varphi_l(\kappa)]$ com $\varphi_l(\kappa) = \phi_l(\mathfrak{L}^{-1}(\kappa))$, o problema de Cauchy-Liouville assume a forma

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \frac{d\mathbf{a}_n(\kappa)}{d\kappa} = i\sqrt{n+1} \exp[i\varphi_l(\kappa)] \mathbf{b}_n^*(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{a}_n^*(\kappa)}{d\kappa} = -i\sqrt{n+1} \exp[-i\varphi_l(\kappa)] \mathbf{b}_n(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{b}_n(\kappa)}{d\kappa} = -i\sqrt{n+1} \exp[i\varphi_l(\kappa)] \mathbf{a}_n^*(\kappa), \\ \frac{d\mathbf{b}_n^*(\kappa)}{d\kappa} = i\sqrt{n+1} \exp[-i\varphi_l(\kappa)] \mathbf{a}_n(\kappa), \end{cases} \quad (4.160)$$

com $\varphi_l(\kappa)$ uma função real arbitrária em κ . No entanto, embora se possa considerar as equações (4.160) para uma forma arbitrária de $\varphi_l(\kappa)$, vale a pena notar que a dependência linear para $\varphi(\kappa)$ é uma consequência direta da condição (4.93), que é uma condição necessária para as soluções parametrizadas na forma (4.94)-(4.97). A dependência linear $\phi_l(\mathfrak{L}^{-1}(\kappa)) = \varphi_l(\kappa) = 2\mu\kappa$ implica nas formas explícitas das soluções para as entradas na matriz de evolução U_n :

$$|\mathbf{a}_n(\mu, \kappa)| = \sqrt{\frac{\mu^2 + (n+1) \cos^2 \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right]}{\mu^2 + n+1}}, \quad (4.161)$$

$$|\mathbf{b}_n(\mu, \kappa)| = \sqrt{\frac{(n+1) \sin^2 \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right]}{\mu^2 + n+1}}, \quad (4.162)$$

com as fases $\varphi_{\mathbf{a}_n}(\mu, \kappa)$ e $\varphi_{\mathbf{b}_n}(\mu, \kappa)$ escritas como

$$\varphi_{\mathbf{a}_n}(\mu, \kappa) = \mu\kappa - \text{tg}^{-1} \left[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + n+1}} \text{tg} \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right] \right], \quad (4.163)$$

$$\varphi_{\mathbf{b}_n}(\mu, \kappa) = \mu\kappa - \text{sgn} \left[\sin \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right] \right] \frac{\pi}{2}. \quad (4.164)$$

Essas soluções foram aplicadas na referência (19), considerando estados coerentes que impulsionam as transições atômicas, em que uma interpretação adequada para o parâmetro μ surge naturalmente. Aqui, a expressão para a inversão da população atômica, que descreve a diferença entre as probabilidades de ocupação dos estados atômicos excitados e fundamentais, depende de κ por meio dos valores absolutos de $\mathbf{a}_n(\mu; \kappa)$ e $\mathbf{b}_n(\mu; \kappa)$.

Em particular, verifica-se a inversão da população atômica dependendo de κ para o átomo inicialmente no estado fundamental ($\zeta_g = 1$) e nos estados excitados ($\zeta_e = 1$), que são:

$$D_g^{(s)}(\bar{n}, \kappa) = -A_s e^{-\bar{n}} \left[(1+s)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+1} \eta_n^2}{(n+1)!} \left[|\mathbf{a}_n(\mu; \kappa)|^2 - |\mathbf{b}_n(\mu; \kappa)|^2 \right] \right], \quad (4.165)$$

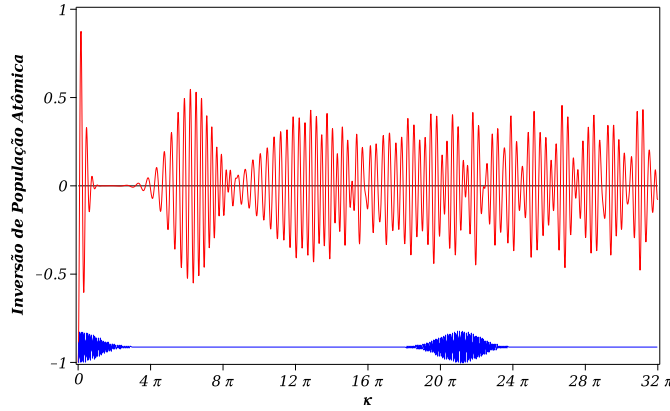
$$D_e^{(s)}(\bar{n}, \kappa) = A_s e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n \eta_n^2}{n!} \left[|\mathbf{a}_n(\mu; \kappa)|^2 - |\mathbf{b}_n(\mu; \kappa)|^2 \right] \right]. \quad (4.166)$$

Por exemplo, as inversões populacionais para o sistema a partir do estado coerente $|g, \alpha\rangle$, obtido ao definir $s = 0$ em (4.104), são determinadas a partir de

$$\mathcal{D}_{g,\alpha}(\mu, \kappa) = -e^{-\bar{n}} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+1}}{(n+1)!} \left[|\mathbf{a}_n(\mu; \kappa)|^2 - |\mathbf{b}_n(\mu; \kappa)|^2 \right] \right). \quad (4.167)$$

A figura 9 mostra a inversão da população atômica (4.167) como uma função de κ , considerando $\mu = 0$ (curva magenta) e $\mu = 10$ (curva azul) com $\bar{n} = 10$. Aqui, a soma representada em (4.167) foi truncada no estado de Fock $|n\rangle = |500\rangle$. Para $\mu = 0$, são evidentes o colapso e o renascimento da transição da população atômica, que são semelhantes aos do modelo JC padrão, independentes do tempo. Por outro lado, para $\mu = 10$, a inversão da população atômica evolui em torno de um valor distinto de zero, que se aproxima mais de -1 à medida que o valor de μ aumenta, e os colapsos e renascimentos das oscilações tornam-se mais esparsos. Valores elevados de μ protegem o átomo contra transições atômicas, tornando-o transparente ao campo no modo de cavidade. Isso pode ser facilmente verificado pela inspeção das soluções (4.168) e (4.169),

Figura 9. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$.



Fonte: o autor.

para as quais

$$|a_n(\mu, \kappa)| = 1 - \frac{(n+1)}{2} \frac{\text{sen}^2 \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right]}{\mu^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\mu^4} \right), \quad (4.168)$$

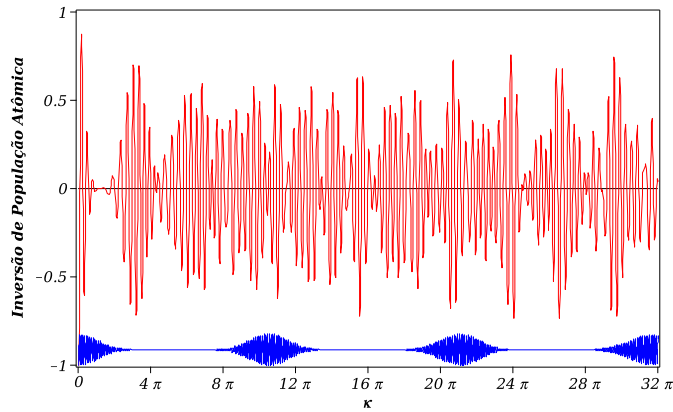
$$|b_n(\mu, \kappa)| = \frac{\sqrt{n+1} \left| \text{sen} \left[\sqrt{\mu^2 + n+1} \kappa \right] \right|}{\mu} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\mu^3} \right). \quad (4.169)$$

Em vez do estado coerente, se o campo for inicialmente preparado em uma superposição par ou ímpar do estado coerente e o átomo no estado fundamental, a dinâmica da inversão da população atômica é descrita conforme a figura 10. Neste caso, para o valor de $\mu = 0$, nota-se que os colapsos e renascimentos ocorrem mais rapidamente do que no caso em que o campo estava inicialmente no estado coerente. Para $\mu = 10$, a inversão da população atômica está mais próxima de -1, enquanto os colapsos e renascimentos das oscilações aparecem agrupados.

Por fim, a figura 11 corresponde à equação (4.166), assumindo um grande número médio de fótons, $\bar{n} = 50$, no estado coerente inicial no modo da cavidade. Ao aumentar o número

médio de fótons, os colapsos e renascimentos na inversão da população atômica tornam-se mais regulares (curva vermelha) em torno do zero. Para $\mu = 10$, a diferença no número de ocupação

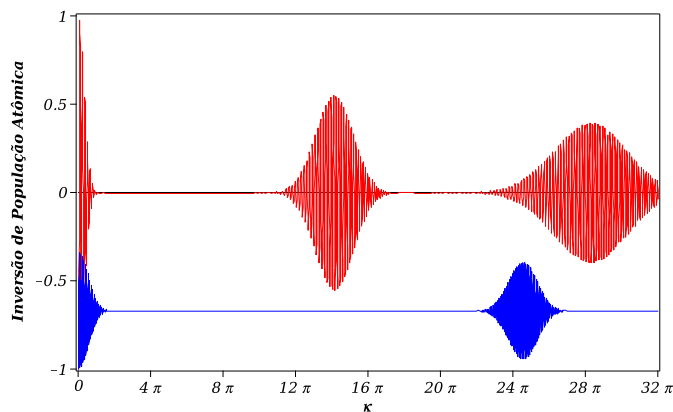
Figura 10. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental com o estado do campo na superposição par do estado coerente (4.104), onde $s = 1$. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$.



Fonte: o autor.

afasta-se do valor -1. Ao mesmo tempo, observa-se um aumento na amplitude das oscilações de Rabi localizadas (curva azul), o que significa que uma maior energia disponível no campo produz uma grande amplitude das oscilações de Rabi.

Figura 11. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um valor elevado do número médio de fótons $\bar{n} = 50$. A curva magenta corresponde a $\mu = 0$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$.



Fonte: o autor.

4.6.2 Uma parametrização alternativa na ressonância

De maneira mais geral, mesmo na ressonância, pode-se assumir uma dependência não linear da fase $\varphi_l(\kappa)$ em κ e considerar o problema de Cauchy-Liouville para encontrar soluções não prescritas nas formas (4.94)-(4.97). A partir das equações (4.160), pode-se facilmente construir uma equação diferencial para $\mathbf{b}_n(\kappa)$. O primeiro problema de Cauchy-Liouville é então mapeado para uma equação diferencial de segunda ordem na forma

$$\frac{d^2 \mathbf{b}_n(\kappa)}{d\kappa^2} - i \frac{d\varphi_l(\kappa)}{d\kappa} \frac{d\mathbf{b}_n(\kappa)}{d\kappa} + (n+1)\mathbf{b}_n(\kappa) = 0, \quad (4.170)$$

sob a condição inicial

$$\mathbf{b}_n(0) = 0, \quad \dot{\mathbf{b}}_n(0) = -i\sqrt{n+1} \exp[-i\varphi_l(0)]. \quad (4.171)$$

Além disso, a função $\mathbf{a}_n(\kappa)$ é determinada a partir de

$$\mathbf{a}_n(\kappa) = -\frac{i}{\sqrt{n+1}} \exp[i\varphi_l(\kappa)] \frac{d\mathbf{b}_n^*(\kappa)}{d\kappa}, \quad (4.172)$$

para o qual $|\mathbf{a}_n(\kappa)|^2 + |\mathbf{b}_n(\kappa)|^2 = 1$. No entanto, obter a solução da equação diferencial (4.170) para um $\varphi_l(\kappa)$ especificado não é uma tarefa trivial, e a viabilidade de determinar a solução do problema depende de sua forma específica. Enquanto isso, as entradas $\mathbf{a}_n(\kappa)$ e $\mathbf{b}_n(\kappa)$ para o problema de ressonância de Cauchy-Liouville para alguma fase arbitrária $\varphi_l(\kappa)$ são parametrizadas da seguinte forma (48):

$$|\mathbf{a}_n(\kappa)| = \sqrt{\cos^2 [\Gamma_n(\kappa)]}, \quad (4.173)$$

$$|\mathbf{b}_n(\kappa)| = \sqrt{\sin^2 [\Gamma_n(\kappa)]}, \quad (4.174)$$

onde $\Gamma_n(\kappa)$ é definido em termos de $\Xi_n(\kappa)$ usando

$$\Gamma_n(\kappa) = \sqrt{n+1} \int_0^\kappa \cos [\Xi_n(\kappa')] d\kappa'. \quad (4.175)$$

As fases $\varphi_{\mathbf{a}_n}(\kappa)$ e $\varphi_{\mathbf{b}_n}(\kappa)$ são lidas como

$$\phi_{\mathbf{a}_n}(\kappa) = \frac{\varphi_l(\kappa) - \varphi_l(0)}{2} - \frac{\Xi_n(\kappa)}{2} - \mathcal{Y}_n(\kappa), \quad (4.176)$$

$$\phi_{\mathbf{b}_n}(\kappa) = \frac{\varphi_l(\kappa) + \varphi_l(0)}{2} - \frac{\Xi_n(\kappa)}{2} + \mathcal{Y}_n(\kappa) - \text{sgn} [\sin[\Gamma_n(\kappa)]] \frac{\pi}{2}, \quad (4.177)$$

com a função $\mathcal{Y}_n(\kappa)$ dependente de $\Xi_n(\kappa)$ como

$$\frac{\mathcal{Y}_n(\kappa)}{\sqrt{n+1}} = \int_0^\kappa \frac{\sin[\Xi_n(\kappa')]}{\sin \left[2\sqrt{n+1} \int_0^{\kappa'} \cos[\Xi_n(\kappa'')] d\kappa'' \right]} d\kappa'. \quad (4.178)$$

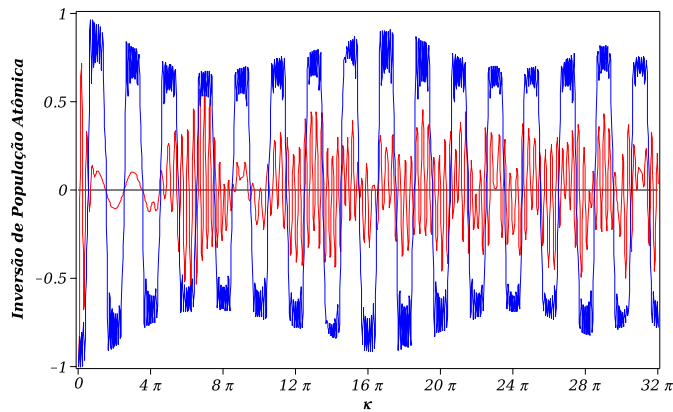
Além disso, a função $\Xi_n(\kappa)$ é da classe C^1 onde $\Xi_n(0) = 0$, e satisfaz a equação integro-diferencial não-linear de Cauchy (48):

$$\frac{1}{2} \dot{\Xi}_n(\kappa) + \sqrt{n+1} \sin \Xi_n(\kappa) \cot \left[2\sqrt{n+1} \int_0^\kappa \cos \Xi_n(\kappa') d\kappa' \right] = \frac{\dot{\varphi}_l(\kappa)}{2}. \quad (4.179)$$

Esses resultados parecem interessantes porque, para qualquer fase específica $\varphi_l(\kappa)$ para a qual a solução de (4.170) possa ser determinada analiticamente, a solução correspondente $\Xi_n(\kappa)$ da equação integro-diferencial (4.179) pode, em princípio, ser obtida. Observe que, na escala de tempo dinâmica κ , o que é relevante na dinâmica de ressonância é a dependência de κ da fase $\varphi_l(\kappa)$, o que implica que fases distintas correspondem a dinâmicas distintas para a inversão da população atômica.

Aqui há um problema em aberto: determinar a classe de funções $\varphi_l(\kappa)$ para as quais a equação (4.179) tem uma solução analítica. Por outro lado, as soluções numéricas são mais

Figura 12. Inversão da população atômica em função da escala de tempo dinâmica adimensional κ , para o átomo inicialmente preparado em seu estado fundamental. Ambas as curvas correspondem a um número médio de fótons $\bar{n} = 10$. A curva vermelha corresponde a $\mu = 1$, enquanto a curva azul é obtida para $\mu = 10$.



Fonte: o autor.

adequadas para ilustrar a dinâmica da inversão da população atômica em $\varphi_l(\kappa)$ arbitrário, o que difere do caso de dependência linear, descrito na figura 9. Ao aplicar um procedimento numérico adequado (118), as soluções numéricas para ambas as equações (4.170) e (4.179) podem ser obtidas para uma ampla classe de $\varphi_l(\kappa)$. A figura 12 mostra o comportamento dinâmico da inversão da população atômica, considerando o caso de $\varphi_l(\kappa) = 2\mu \sin(\kappa)$ com $\mu = 1$ (curva vermelha) e $\mu = 10$ (curva azul), obtido a partir da solução numérica da equação (4.170). Aqui, assume-se o modo de cavidade no estado coerente, com número médio de fótons $\bar{n} = 10$, e o átomo no estado fundamental.

Do ponto de vista numérico, implementa-se o cálculo aplicando o método Runge-Kutta (118), onde leva-se em consideração o conjunto de estados numéricos $\{|n\rangle\}$ até $n = 100$ com boa precisão. A partir da figura 12, observa-se que, para a fase que varia periodicamente no tempo, o aumento do parâmetro μ melhora a regularidade temporal (comportamento quase periódico) da inversão da população atômica. Um pequeno valor de μ torna a dinâmica do sistema próxima daquela obtida no modelo JCIT padrão (correspondente a $\mu = 0$) no campo no estado coerente.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta dissertação de mestrado, estudaram-se os conceitos fundamentais associados à teoria de grupos e às álgebras de Lie, com o objetivo de compreender sua importância no contexto da mecânica quântica, na qual a teoria de representações de operadores e vetores é essencial tanto do ponto de vista matemático quanto das implicações físicas na descrição da dinâmica de sistemas quânticos simples.

Identificam-se diferentes tipos de grupos aplicados no contexto da mecânica quântica, bem como os conceitos abstratos relacionados com a teoria de representações. Em sistemas quânticos cujos vetores de estado pertencem a um espaço de Hilbert bidimensional, existem dois sistemas de interesse físico com simetrias dinâmicas $SU(2)$ e $SU(1, 1)$, para os quais se consideram aspectos dinâmicos do problema, com o interesse de determinar soluções analíticas exatas do operador de evolução temporal quando a matriz, que representa os respectivos operadores hamiltonianos, depende explicitamente do tempo. Neste caso, trata-se os chamados sistemas quânticos não estacionários, para os quais o desenvolvimento de métodos de solução exata é essencial. Neste contexto, foi discutida uma rota alternativa para determinar as soluções exatas do problema com simetrias $SU(2)$ e $SU(1, 1)$ já conhecidas na literatura. Fez-se uma discussão detalhada dos aspectos operacionais envolvidos na determinação da solução do operador de evolução temporal, com o objetivo de compreender os procedimentos necessários para estender esse estudo a outras simetrias dinâmicas presentes no contexto da física quântica e da computação quântica.

Para se compreender a relevância deste estudo, aplicou-se o formalismo estudado, revisando o método para determinar soluções do problema de Cauchy-Liouville do modelo Jaynes-Cummings dependente do tempo. Neste modelo, as soluções do operador de evolução temporal foram obtidas a partir de uma parametrização adequada de seus elementos matriciais. Considerou-se uma das duas parametrizações que surgem no problema de Cauchy-Liouville correspondente. A partir de propriedades de simetria e das leis de conservação no modelo de Jaynes-Cummings, as soluções obtidas são definidas em um número infinito de subespaços invariantes bidimensionais que compõem o espaço de Hilbert total do sistema. Tais soluções dependem de um parâmetro universal μ no espaço de Hilbert total, que modula sensivelmente a dinâmica do sistema e é definido em todos os subespaços invariantes. Existe uma relação universal entre os elementos dependentes do tempo do operador hamiltoniano, válida em todos os subespaços invariantes. A solução para a equação de Cauchy-Liouville, definindo $\mu = 0$, foi brevemente discutida, na qual se observa uma semelhança com a solução correspondente ao modelo JCIT padrão, porém escrita em termos da escala de tempo dinâmica κ , válida para dependência arbitrária do tempo de $|l(t)|$.

Encontrando a solução exata para o operador de evolução temporal correspondente ao modelo JCDT, assumiu-se estados iniciais fatorados, nos quais o modo da cavidade está em superposição de estados coerentes pares ou ímpares, e o átomo em superposição de estados

fundamentais e excitados, para descrever a interação entre o átomo e o campo, inicialmente em um estado quântico não clássico. Determinou-se explicitamente o operador de densidade total e os operadores de densidade reduzida correspondentes ao campo e ao modo, a forma exata da inversão da população atômica, o comportamento temporal das estatísticas do campo, o número médio de fótons e o fator de Mandel correspondente. Além disso, o tratamento analítico do caso fora de ressonância é considerado um exemplo específico, no qual foram assumidas dependências temporais arbitrárias nas funções de energia. Ilustrou-se a dinâmica da inversão da população atômica para duas configurações de estado do átomo e descrevem-se as propriedades relativas ao campo do modo da cavidade. O comportamento dinâmico da inversão da população atômica é semelhante tanto para superposições pares quanto para ímpares, e discutimos a dinâmica para diferentes valores do parâmetro universal μ e da velocidade de fase $\dot{\phi}$. Verifica-se que, para o estado coerente, no intervalo de tempo em que o número médio de fótons é constante, o fator de Mandel também o é. Nesta região, as estatísticas do campo da cavidade são, então, assumidas como poissonianas. Assim, os estados não clássicos no modo da cavidade aumentam as excitações atômicas no sistema átomo-campo.

Uma abordagem geral foi aplicada para descrever a dinâmica átomo-campo na estrutura da escala de tempo dinâmica κ . Apresentou-se o caso de acoplamento constante entre o átomo e o campo e explorou-se um exemplo em que o acoplamento é periódico no tempo padrão t . O objetivo principal foi apontar que, fora de ressonância, a fase de acoplamento geralmente depende de κ . Em contrapartida, apresentou-se a solução de Cauchy-Liouville para o caso de ressonância na escala de tempo dinâmico, que descreve a inversão da população atômica quando o átomo começa no estado excitado ou fundamental. A partir das soluções analíticas, verificou-se que, para valores mais altos de μ , a matriz de evolução é próxima do operador unitário. Para acoplamentos dependentes do tempo e arbitrários, discutiu-se a dinâmica do átomo-campo em uma escala temporal κ . Esse aspecto destaca que, na condição de ressonância, independentemente da forma temporal do acoplamento entre o modo e o campo, o que diferencia o comportamento dinâmico da inversão da população atômica, por exemplo, é o valor do parâmetro universal μ , o que confirma resultados já considerados por outros autores. Além disso, na condição de ressonância, a parametrização das soluções determinadas em função da escala de tempo dinâmica implica que a fase de acoplamento é necessariamente linear em κ . Confirmando resultados já estabelecidos na literatura, destaca-se que, para valores mais altos de μ , a matriz que representa o operador de evolução temporal tende à matriz identidade, ilustrando a condição dinâmica em que o átomo se torna invisível ao campo na cavidade.

Conclui-se neste estudo, considerando uma ilustração de um caso específico de ressonância, no qual se assume uma dependência não linear da fase em função de κ , caracterizando uma situação em que a parametrização proposta anteriormente não pode ser aplicada. As soluções são determinadas a partir de uma solução de uma equação integro-diferencial de Cauchy, que constitui outra parametrização decorrente do problema generalizado de Rabi. Uma análise numérica pode ilustrar bem o comportamento dinâmico da inversão da população atômica para parâmetros do operador hamiltoniano com dependência temporal arbitrária, mas a motivação

maior deste estudo foi preparar a base matemática necessária para tratar o problema do ponto de vista analítico, tanto na solução da equação integro-diferencial quanto extender a análise considerando modelos com simetria $SU(3)$, tarefa a ser considerada no projeto de doutorado.

REFERÊNCIAS

- 1 HOLLAND, P. A quantum of history. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 52, n. 4, p. 355–358, 2011.
- 2 BACCIAGALUPPI, G.; VALENTINI, A. *Quantum theory at the crossroads: reconsidering the 1927 Solvay conference*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- 3 FROLOV, I.; SCHWARZ, A. Quantum mechanics and quantum field theory: algebraic and geometric approaches. *Universe*, MDPI, v. 9, n. 7, p. 337, 2023.
- 4 MAGGIORE, M. *A modern introduction to quantum field theory*. [S.l.]: Oxford university press, 2005. v. 12.
- 5 BETHE, H. A. Nuclear physics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 71, n. 2, p. S6, 1999.
- 6 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- 7 LOUNDON, R. *The Quantum Theory of Light, 3^a Ed.* [S.l.]: Oxford University Press, 2000.
- 8 ZAGOSKIN, A. M. *Quantum engineering: theory and design of quantum coherent structures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- 9 BUSSEY, P. J. *Modern quantum mechanics: by JJ Sakurai and Jim Napolitano, Cambridge, Cambridge University Press, 2020, 566 pp., £ 59.99 (hardback), ISBN: 978-1-10858-728-0. Scope: textbook. Level: advanced undergraduate. postgraduate.* [S.l.]: Taylor & Francis, 2021.
- 10 TANNOUDJI, C. C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.
- 11 RANADE, K. S. Functional analysis and quantum mechanics: an introduction for physicists. *Fortschritte der Physik*, Wiley Online Library, v. 63, n. 9-10, p. 644–658, 2015.
- 12 BÖHM, A. *Quantum mechanics: foundations and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- 13 ANANDAN, J. A geometric approach to quantum mechanics. *Foundations of Physics*, Springer, v. 21, n. 11, p. 1265–1284, 1991.
- 14 MESSINA, A.; NAKAZATO, H. Analytically solvable Hamiltonians for quantum two-level systems and their dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 44, p. 445302, 2014. ISSN 17518121.
- 15 RABI, I. I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Physical Review*, APS, v. 51, n. 8, p. 652–654, 1937. ISSN 0031899X.
- 16 GRIMAUDO, R. et al. Classes of Exactly Solvable Generalized Semi-Classical Rabi Systems. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 530, n. 12, p. 1800198, 2018. ISSN 15213889.
- 17 GRIMAUDO, R. et al. Analytically solvable 2×2 PT -symmetry dynamics from su(1,1)-symmetry problems ANALYTICALLY SOLVABLE 2×2 PT- SYMMETRY ... R. GRIMAUDO et al. *Physical Review A*, APS, v. 99, n. 5, p. 52103, 2019. ISSN 24699934.

- 18 JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963. ISSN 15582256.
- 19 CASTRO, A. S. M. de et al. Analytically solvable hamiltonian in invariant subspaces. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 138, n. 8, p. 1–11, 2023.
- 20 LÃ-WDIN, P. O. Group algebra, convolution algebra, and applications to quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 39, n. 2, p. 259–287, 1967. ISSN 00346861.
- 21 KLIMOV, A. B.; CHUMAKOV, S. M. *A group-theoretical approach to quantum optics: models of atom-field interactions*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2009. v. 10.
- 22 WOIT, P.; WOIT; BARTOLINI. *Quantum theory, groups and representations*. [S.l.]: Springer, 2017. v. 4.
- 23 GERRY, C. C.; KNIGHT, P. L. *Introductory quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2023.
- 24 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. [S.l.]: Pearson/Addison-Wesley, 2011.
- 25 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 13, p. 1895–1899, 1993. ISSN 00319007.
- 26 LLOYD, S. Universal quantum simulators. *Science*, v. 273, n. 5278, p. 1073–1078, 1996. ISSN 00368075.
- 27 CRAWFORD, S. E. et al. Quantum sensing for emerging energy technologies. *Nature Reviews Clean Technology*, Nature Publishing Group UK London, p. 1–16, 2025.
- 28 TUNG, W.-K. *Group theory in physics*. [S.l.]: World Scientific, 1985. v. 1.
- 29 HAYASHI, M. *Group representation for quantum theory*. [S.l.]: Springer, 2017.
- 30 VARSHALOVICH, D. *Quantum theory of angular momentum*. [S.l.: s.n.].
- 31 ZHANG, W.-M.; GILMORE, R. et al. Coherent states: Theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 62, n. 4, p. 867, 1990.
- 32 BIRKHOFF, G.; LANE, S. M. *A survey of modern algebra*. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2017.
- 33 BIEDENHARN, L. C.; NUYTS, J.; STRAUMANN, N. On the unitary representations of $su(1, 1)$ and $su(2, 1)$. In: *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*. [S.l.: s.n.], 1965. v. 3, n. 1, p. 13–39.
- 34 LÖWDIN, P.-O. Group algebra, convolution algebra, and applications to quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 39, n. 2, p. 259, 1967.
- 35 PURI, R. R. et al. *Mathematical methods of quantum optics*. [S.l.]: Springer, 2001. v. 79.
- 36 SODRÉ, U. Monografia (Graduação em Matemática), *Exponencial de Matriz: uma introdução e aplicações em equações diferenciais*. Londrina, PR: [s.n.], 2001. Acesso em: 4 ago. 2025. Disponível em: <<https://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/expa.pdf>>.

- 37 HALL, B. C. Lie groups, lie algebras, and representations. In: *Quantum Theory for Mathematicians*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 333–366.
- 38 GEORGI, H. *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2000.
- 39 GRIMAUDO, R. $su(2)$ -symmetric exactly solvable models of two interacting qubits. *Physics*, MDPI, v. 6, n. 3, p. 1111–1123, 2024.
- 40 GRIMAUDO, R. et al. Spin-1/2 sub-dynamics nested in the quantum dynamics of two coupled qutrits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 50, n. 17, p. 175301, 2017. ISSN 17518121.
- 41 GRIMAUDO, R. et al. Time evolution of a pair of distinguishable interacting spins subjected to controllable and noisy magnetic fields. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 392, p. 242–259, 2018. ISSN 1096035X.
- 42 GRIMAUDO, R. et al. Analytically solvable 2×2 pt-symmetry dynamics from $su(1,1)$ -symmetry problems. *Physical Review A*, APS, v. 99, n. 5, p. 052103, 2019.
- 43 HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. [S.l.]: Courier Corporation, 2014.
- 44 ZWILLINGER, D.; DOBRUSHKIN, V. *Handbook of differential equations*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2021.
- 45 MAGNUS, R. *Essential ordinary differential equations*. [S.l.]: Springer, 2023.
- 46 MESSINA, A. et al. Classes of exactly solvable generalized semi-classical rabi systems. *Annalen der Physik*, Wiley, v. 530, 2018.
- 47 ABLOWITZ, M.; FOKAS, A. *Complex Variables: Introduction and Applications*. [s.n.]. (Cambridge texts in applied mathematics). Acesso em: 6 ago. 2025. ISBN 9780521534291. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=SFqbV3i3hO0C>>.
- 48 GRIMAUDO, R. et al. Exactly solvable time-dependent pseudo-Hermitian $su(1,1)$ Hamiltonian models. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 3, p. 33835, 2018. ISSN 24699934.
- 49 LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D. *Fundamentals of quantum optics and quantum information*. [S.l.]: Springer, 2007.
- 50 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021.
- 51 LARSON, J.; MAVROGORDATOS, T. *The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants*. [S.l.]: IoP Publishing, 2021.
- 52 CANTUBA, R. R. S. Lie structure of the heisenberg-weyl algebra. *International Electronic Journal of Algebra*, v. 35, n. 35, p. 32 – 60, 2024. Acesso em: 4 ago. 2025. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85183200977&doi=10.24330%2fieja.1326849&partnerID=40&md5=e98c55d673ae46d57fc128782f913534>>.
- 53 COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Atom-photon interactions: basic processes and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2024.

- 54 FUJII, K. Introduction to the Rotating Wave Approximation (RWA): Two Coherent Oscillations. *Journal of Modern Physics*, v. 08, n. 12, p. 2042–2058, 2017. ISSN 2153-1196.
- 55 Jr. Lewis, H. R.; RIESENFELD, W. B. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 10, n. 8, p. 1458–1473, 11 2003. ISSN 0022-2488. Acesso em: 15 set. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1664991>>.
- 56 FERNANDEZ, F. *Introduction to Perturbation Theory in Quantum Mechanics*. Taylor & Francis, 2000. Acesso em: 22 set. 2025. ISBN 9780849318771. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ibPonQEACAAJ>>.
- 57 NIEMCZYK, T. et al. Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime. *Nature Physics*, v. 6, n. 10, p. 772–776, 2010. ISSN 17452481.
- 58 AZUMA, H. Quantum computation with the Jaynes-Cummings model. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 126, n. 3, p. 369–385, 2011. ISSN 0033068X.
- 59 ABDEL-KHALEK, S. et al. Evolution of the entanglement, photon statistics and quantum Fisher information of a single qubit parity deformed JCM. *Optical and Quantum Electronics*, v. 55, n. 2, 2023. ISSN 1572817X.
- 60 STANCHEV, S. G.; VITANOV, N. V. Coherent interaction of multistate quantum systems possessing the Wigner–Majorana and Morris–Shore dynamic symmetries with pulse trains. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 1, p. 014001, 2023. ISSN 0953-4075.
- 61 DONG, D.; PETERSEN, I. R. Quantum estimation, control and learning: Opportunities and challenges. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, v. 54, p. 243–251, 2022. ISSN 13675788.
- 62 JAHANBAKHSH, F.; TAVASSOLY, M. K. The Influence of Counter Rotating Terms on the Entanglement Dynamics of Two Dipole-Coupled Qutrits Interacting with a Two-Mode Field: Intensity-Dependent Coupling Approach. *International Journal of Theoretical Physics*, SPRINGER/PLENUM PUBLISHERS, 233 SPRING ST, NEW YORK, NY 10013 USA, v. 61, n. 5, 2022. ISSN 15729575.
- 63 KOCH, C. P. et al. Quantum optimal control in quantum technologies. Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe. *EPJ Quantum Technology*, Springer Berlin Heidelberg, v. 9, n. 1, p. 19, 2022. ISSN 21960763.
- 64 DESTEFANI, C. F. et al. Resonant tunneling diodes in semiconductor microcavities: Modeling polaritonic features in the terahertz displacement current. *Physical Review B*, v. 106, n. 20, nov 2022. ISSN 24699969.
- 65 WANG, Z. S. Geometric quantum computation and dynamical invariant operators. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 79, n. 2, 2009. ISSN 10502947.
- 66 EBERLY, J. H.; NAROZHNY, N. B.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*, APS, v. 44, n. 20, p. 1323–1326, 1980. ISSN 00319007.
- 67 NAROZHNY, N. B.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J.; EBERLY, J. H. Coherence versus incoherence: Collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review A*, APS, v. 23, n. 1, p. 236–247, 1981. ISSN 10502947.

- 68 SUKUMAR, C. V.; BUCK, B. Multi-phonon generalisation of the Jaynes-Cummings model. *Physics Letters A*, v. 83, n. 5, p. 211–213, 1981. ISSN 03759601.
- 69 SINGH, S. Field statistics in some generalized Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, v. 25, n. 6, p. 3206–3216, 1982. ISSN 10502947.
- 70 KNIGHT, P. L.; RADMORE, P. M. Quantum origin of dephasing and revivals in the coherent-state Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 26, n. 1, p. 676–679, 1982. ISSN 10502947.
- 71 MEYSTRE, P.; ZUBAIRY, M. S. Squeezed states in the Jaynes-Cummings model. *Physics Letters A*, v. 89, n. 8, p. 390–392, 1982. ISSN 03759601.
- 72 REMPE, G.; WALTHER, H.; KLEIN, N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Physical Review Letters*, v. 58, n. 4, p. 353–356, 1987. ISSN 00319007.
- 73 BUŽEK, V.; JEX, I. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Optics Communications*, v. 78, n. 5-6, p. 425–435, 1990. ISSN 00304018.
- 74 Trung Dung, H.; TANÁŠ, R.; SHUMOVSKY, A. S. Collapses, revivals, and phase properties of the field in Jaynes-Cummings type models. *Optics Communications*, v. 79, n. 6, p. 462–468, 1990. ISSN 00304018.
- 75 KOCHETOV, E. A. Exactly solvable non-linear generalisations of the Jaynes-Cummings model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 20, n. 9, p. 2433–2442, 1987. ISSN 03054470.
- 76 ABDALLA, M. S.; AHMED, M. M.; OBADA, A. S. Dynamics of a non-linear Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 162, n. 2, p. 215–240, 1990. ISSN 03784371.
- 77 VIDIELLA-BARRANCO, A.; MOYA-CESSA, H.; BUŽEK, V. Interaction of superpositions of coherent states of light with two-level atoms. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 39, n. 7, p. 1441–1459, 1992.
- 78 BUŽEK, V. et al. Schrödinger-cat states in the resonant jaynes-cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution. *Physical review A*, APS, v. 45, n. 11, p. 8190, 1992.
- 79 ČRNUGELJ, J.; MARTINIS, M.; MIKUTA-MARTINIS, V. Jaynes-Cummings model and the deformed-oscillator algebra. *Physics Letters A*, v. 188, n. 4-6, p. 347–354, 1994. ISSN 03759601.
- 80 SINGH, S.; SINHA, A. Solutions of two-mode Jaynes-Cummings models. *Pramana - Journal of Physics*, v. 70, n. 5, p. 887–900, 2008. ISSN 03044289.
- 81 SINGH, S.; GILHARE, K. Dynamical Properties of Intensity Dependent Two-Mode Raman Coupled Model in a Kerr Medium. *International Journal of Theoretical Physics*, SPRINGER/PLENUM PUBLISHERS, 233 SPRING ST, NEW YORK, NY 10013 USA, v. 58, n. 6, p. 1721–1744, jun 2019. ISSN 15729575.
- 82 SINGH, S.; Raymond Ooi, C. H. Dynamics of Kerr-like medium with two-mode intensity-dependent cavity fields. *Laser Physics*, IOP PUBLISHING LTD, TEMPLE CIRCUS, TEMPLE WAY, BRISTOL BS1 6BE, ENGLAND, v. 29, n. 1, jan 2019. ISSN 15556611.

- 83 GÓRA, P. F.; JEDRZEJEK, C. Superstructures, fractional revivals, and optical Schrödinger-cat states in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 48, n. 4, p. 3291–3300, 1993. ISSN 10502947.
- 84 MOYA-CESSA, H. et al. Intrinsic decoherence in the atom-field interaction. *Physical Review A*, v. 48, n. 5, p. 3900–3905, 1993. ISSN 10502947.
- 85 ZAHEER, K.; WAHIDDIN, M. R. Generation of even and odd coherent states in the intensity dependent jaynes-cummings model. *Journal of Modern Optics*, v. 41, n. 1, p. 151–161, 1994. ISSN 13623044.
- 86 LONGHI, S. Jaynes–Cummings photonic superlattices. *Optics Letters*, v. 36, n. 17, p. 3407, 2011. ISSN 0146-9592.
- 87 ABDALLA, M. S.; KHALIL, E. M.; OBADA, A. S. Exact treatment of the Jaynes-Cummings model under the action of an external classical field. *Annals of Physics*, v. 326, n. 9, p. 2486–2498, 2011. ISSN 00034916.
- 88 CHEN, Q. H. et al. Exact solutions to the Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation. *Epl*, IOP Publishing, v. 96, n. 1, p. 14003, 2011. ISSN 02955075.
- 89 SALMISTRARO, F. Quantum evolution and invariant subspaces. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, v. 105, n. 1, p. 65–73, 1990. ISSN 03693554.
- 90 SALMISTRARO, F.; ROSSO, R. Invariants and Lie algebraic solutions of Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 34, n. 9, p. 3964–3979, 1993. ISSN 00222488.
- 91 HEINE, V. *Group Theory in Quantum Mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 1960.
- 92 LÄ-WDIN, P. O. Group algebra, convolution algebra, and applications to quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 39, n. 2, p. 259–287, 1967. ISSN 00346861.
- 93 BONATSOS, D.; DASKALOYANNIS, C.; LALAZISSIS, G. A. Unification of Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, v. 47, n. 4, p. 3448–3451, 1993. ISSN 10502947.
- 94 KLIMOV, A. B.; CHUMAKOV, S. M. *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics: Models of Atom-Field Interactions*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2009. 1–322 p. ISBN 9783527408795.
- 95 ARAVIND, P. K.; HIRSCHFELDER, J. O. Two-state systems in semiclassical and quantized fields. In: *Journal of Physical Chemistry*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 88, n. 21, p. 4788–4801. ISSN 00223654.
- 96 KARASEV, V. P. Invariant-algebraic approach to problems of quantum optics. *Journal of Soviet Laser Research*, v. 12, n. 2, p. 147–164, 1991. ISSN 02702010.
- 97 GRUVER, J. L. et al. Exact solution of the generalized time-dependent Jaynes-Cummings Hamiltonian. *Physics Letters A*, v. 178, n. 3-4, p. 239–244, jul 1993. ISSN 03759601.
- 98 LU, J. fa; YE, Z. xiong. The exactly solvable Jaynes-Cummings model and its quantum deformation. *Physics Letters A*, v. 182, n. 2-3, p. 261–264, 1993. ISSN 03759601.
- 99 YU, S.; RAUCH, H.; ZHANG, Y. Algebraic approach to the Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. 2585–2590, 1995. ISSN 10502947.

- 100 ALIAGA, J.; GRUVER, J. L. Ξ and Λ non-degenerate two-photon time-dependent Jaynes-Cummings model: An exact algebraic solution. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 221, n. 1-2, p. 19–28, 1996. ISSN 03759601.
- 101 CEN, L. X. et al. Some important quantum systems with a $su(N)$ dynamical structure. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 256, n. 5-6, p. 329–333, 1999. ISSN 03759601.
- 102 ALHAIDARI, A. D. The supersymmetric Jaynes-Cummings model and its solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 50, p. 15391–15401, 2006. ISSN 03054470.
- 103 CORDERO, S.; RÉCAMIER, J. Algebraic treatment of the time-dependent Jaynes-Cummings Hamiltonian including nonlinear terms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 45, n. 38, p. 385303, aug 2012. ISSN 17518113.
- 104 KUMAR, A.; SAROVAR, M. On model reduction for quantum dynamics: Symmetries and invariant subspaces. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 1, p. 15301, 2015. ISSN 17518121.
- 105 WAKAYAMA, M.; YAMASAKI, T. The quantum Rabi model and Lie algebra representations of sl_2 . *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 47, n. 33, p. 335203, 2014. ISSN 17518121.
- 106 KEYL, M.; ZEIER, R.; SCHULTE-HERBRÜGGEN, T. Controlling several atoms in a cavity. *New Journal of Physics*, v. 16, 2014. ISSN 13672630.
- 107 JAMIOŁKOWSKI, A.; KAMIZAWA, T.; PASTUSZAK, G. On Invariant Subspace In Quantum Control Systems and Some Concepts of Integrable Quantum Systems. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 54, n. 8, p. 2662–2674, 2015. ISSN 15729575.
- 108 Abd El-Wahab, N. H.; ZAIT, R. A. Intensity-dependent and multi-photon Hamiltonian of two two-level atoms and two-mode field in a Kerr medium solved by virtue of supersymmetric unitary transformation. *Modern Physics Letters A*, v. 36, n. 9, 2021. ISSN 02177323.
- 109 HU, G.; ARAVIND, P. K. Dynamical symmetries of the vacuum field Jaynes–Cummings model. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 6, n. 9, p. 1757, 1989. ISSN 0740-3224.
- 110 JOSHI, A.; LAWANDE, S. V. Generalized Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling. *Physical Review A*, APS, v. 48, n. 3, p. 2276–2284, 1993. ISSN 10502947.
- 111 MIGLIORE, A.; MESSINA, A. Controlling the charge-transfer dynamics of the two-level systems around avoided crossings. Submitted.
- 112 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2002.
- 113 MANDEL, L. Sub-poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Optics letters*, Optica Publishing Group, v. 4, n. 7, p. 205–207, 1979.
- 114 DRUMMOND, P.; FICEK, Z. *Quantum Squeezing*. [s.n.]. (Physics and Astronomy Online Library). Acesso em: 20 out. 2025. ISBN 9783540659891. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=OmvY7-IKLgUC>>.

- 115 PEŘINOVÁ, J. K. V.; PEŘINA, J. Photon statistics weof non-classical fields. *Optica Acta: International Journal of Optics*, Taylor & Francis, v. 33, n. 10, p. 1263–1278, 1986. Acesso em: 15 set. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/713821872>>.
- 116 PRINCIPAL squeezing of vacuum fluctuations. *Optics Communications*, v. 67, n. 2, p. 149–151, 1988. ISSN 0030-4018. Acesso em: 15 set. 2025. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401888903227>>.
- 117 YANG, Y. et al. Interactions of a two-level atom and a field with a time-varying frequency. *Physical Review A*, APS, v. 69, n. 5, p. 053406, 2004.
- 118 BUTCHER, J. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. [s.n.]. Acesso em: 25 set. 2025. ISBN 9781119121503. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JISvDAAAQBAJ>>.