

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/FÍSICA

VAGNER DOS SANTOS

FRAGMENTALIDADE E CRIVAMENTO NA BACIA DE ATRAÇÃO DE
ESTADOS QUIMERA

PONTA GROSSA
2019

VAGNER DOS SANTOS

FRACTALIDADE E CRIVAMENTO NA BACIA DE ATRAÇÃO DE
ESTADOS QUIMERA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Ciências, área de concentração Física, da
Universidade Estadual de Ponta Grossa, como
requisito para a obtenção do grau de Doutor em
Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

PONTA GROSSA

2019

S237 Santos, Vagner dos
Fractalidade e crivamento na bacia de atração de estados quimera /
Vagner dos Santos. . Ponta Grossa, 2019.
99 f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior.

1. Quimera. 2. Bacia de atração. 3. Redes. 4. Bacia fractal. 5. Bacia
crivada. I. Szezech Junior, José Danilo. II. Universidade Estadual de Ponta
Grossa. Física. III.T.

CDD: 530.1

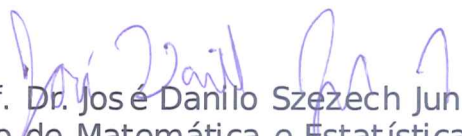
TERMO DE APROVAÇÃO

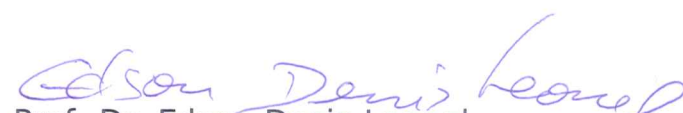
VAGNER DOS SANTOS

“Fractabilidade e crivamento na bacia de atração de estados quimera”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR


Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Departamento de Física - UNESP/SP


Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza
Departamento de Física - UFSJ/MG


Prof. Dr. Rafael Ribaski Borges
Departamento Acadêmico de Matemática - UTFPR/PR


Prof. Dr. Gelson Biscaia de Souza
Departamento de Física - UEPG/PR

Ponta Grossa, 25 de abril de 2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus amados pais Gabriel Renato dos Santos e Lourdes Vilczak dos Santos por toda a dedicação, carinho e educação que recebi ao longo de minha vida.

À minha esposa Bruna Kriks dos Santos pelo incentivo e apoio emocional ao longo desses anos, e por ter me dado o maior presente de todos.

Ao meu filho Henrique Kriks dos Santos, que está começando a gostar de assistir desenhos que o pai dele também gosta, por iluminar meus dias com sua alegria infinita.

Ao prof. Dr. José Danilo Szezech Jr. pela paciência e amizade, e por toda a valiosa orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos Silvio Henrique Gonsalves e Virgínia Moreira Justo pela amizade e cumplicidade, e por sempre estarem presentes nas horas de insegurança e indecisão.

Aos colegas da sala 105 Ewandson Luiz Lameu, Fabiano Ferrari, Fernando da Silva Borges, José Trobia, Michele Mugnaine, Moisés Souza Santos, Paulo Ricardo Protachevich, Ricardo Sovek Oyarzabal e Robson Conrado Bonetti, pelos momentos de descontração.

Agradeço aos professores Dr. Antônio Marcos Batista (UEPG), Dra. Kelly C. Iarosz (USP), Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR), Dr. Iberê Luiz Caldas (USP), Dr. Murilo S. Baptista (*University of Aberdeen*), Dr. Jürgen Kurths (*Humboldt University*), Dr. Celso Grebogi (*University of Aberdeen*), Dr. Yuri L. Maistrenko (*National Academy of Sciences of Ukraine*) e Dr. Hai Peng Ren (*Xian Technological University*) por todas as significativas contribuições que deram ao resultado final desse trabalho.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa e à Universidade de São Paulo pelo suporte computacional.

Ao Programa de Pós-Graduação de Ciências/Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa pela oportunidade e pela infraestrutura disponibilizada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de

Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001 - e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Fundação Araucária e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Lasciate ogni speranza, voi ch'entrate.

Dante Alighieri

Resumo

Neste trabalho investigamos as propriedades da bacia de atração de estados quimera e de suas fronteiras em uma rede de mapas de Hénon e de sistemas de Roessler com acoplamento não local e condições de contorno periódicas. Sabe-se que a coexistência de bacias de atração de estados distintos leva a comportamentos histeréticos nos diagramas em que se plota a densidade de estados finais em função da variação de um parâmetro. Estados quimera acontecem quando domínios coerentes e incoerentes ocorrem em uma rede simultaneamente, acredita-se que eles emergem como consequência da coexistência de bacias de atração de estado distintos. Consequentemente, a distribuição de estados quimera pode permanecer invariante por uma perturbação de parâmetro, bem como pode sofrer mudanças súbitas caso uma das bacias deixe de existir. Um fenômeno similar é observado quando perturbações são aplicadas nas condições iniciais. Nesse caso o efeito resultante no estado final da rede está relacionado à forma com que as bacias de atração estão organizadas. Caracterizamos a fronteira entre as bacias de atração dos estados coerente e quimera, e entre as bacias dos estados incoerente e quimera por meio do expoente de incerteza. Estimando o volume da bacia de atração por meio do cálculo da estabilidade da bacia, mostramos que a densidade de estados quimera pode ser não apenas moderadamente sensível às condições iniciais, consequência da existência de estruturas fractais na bacia, como também pode ser altamente sensível às condições iniciais, devido ao crivamento nas bacias de atração.

Palavras-chave: Quimera; Bacia de atração; Redes; Bacia Fractal; Bacia crivada.

Abstract

In this work we investigate the properties of the basin of attraction and its boundaries for chimera states in a network of nonlocally coupled Hénon maps and Roessler systems with periodic boundary conditions. It is known that coexisting basins of attraction of distinct states lead to hysteretic behaviour in diagrams in which the density of states is plotted as a function of a varying parameter. Chimera states happen when coherent and incoherent domains occur simultaneously in a network, it is believed that they emerge as a consequence of the coexistence of basins of attraction of distinct states. Consequently, the distribution of chimera states can remain invariant by a parameter modification, as well as may undergo sudden changes if one of the basins ceases to exist. A similar phenomenon is observed when perturbations are applied in the initial conditions. In this case the resulting effect on the final state of the network depends on to how the basins of attraction are organised. By means of the uncertainty exponent, we characterise the basin boundaries between the coherent and chimera states, and between the incoherent and chimera states. Estimating the volume of the basin of attraction via the basin stability calculation, we show that the density of chimera states can be not only moderately sensitive to the initial conditions, as a consequence of the existence of fractal structures in the basin, but can also be highly sensitive to initial conditions, due to the riddling in the basins of attraction.

Keywords: Chimera; Basin of attraction; Networks; Fractal Basin; Riddled basin.

Lista de Figuras

1.1	(a) Representação do problema de 3 corpos e (b) trajetória caótica no sistema de três corpos.	14
2.1	Série temporal do mapa logístico com (a) $a = 0,5$, (b) $a = 0,9$, (c) $a = 1,5$, (d) $a = 2,5$, (e) $a = 2,8$ e (f) $a = 3,1$	21
2.2	Diagrama de bifurcação do mapa logístico.	24
2.3	Expoente de Lyapunov do mapa logístico.	26
2.4	Série temporal das primeiras iteradas do mapa de Hénon com parâmetros (a) $\alpha = 1,0$ e $\beta = 0,1$, (b) $\alpha = 1,5$ e $\beta = 0,16$, (c) $\alpha = 1,25$ e $\beta = 0,3$ e (d) $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$	27
2.5	Localização das órbitas periódicas e atrator caótico do mapa de Hénon. . .	28
2.6	Espaço de parâmetros e diagrama de órbitas do mapa de Hénon	30
2.7	Esquema representativo da evolução de um disco de condições iniciais no espaço de fase	31
2.8	Maior expoente de Lyapunov (a) no espaço de parâmetros do mapa de Hénon e (b) fixando $\beta = 0,164$	32
2.9	Esquema representativo de variedades em mapas bidimensionais.	33
2.10	Variedades no mapa de Hénon.	34
2.11	Potencial de Duffing de poço duplo e retrato de fase de uma partícula sujeita a esse potencial.	39
2.12	Esquema ilustrativo dos tipos de pontos fixos presentes em fluxos bidimensionais.	41
2.13	Trajetoórias da Eq. (2.32) com (a) $\mu = 0,05$ e (a) $\mu = 6,0$	43
2.14	Potencial $V(\theta) = -0,25\theta - \cos(\theta)$ e trajetórias no espaço de fase de uma partícula sujeita a esse potencial.	45
2.15	Atratores e seção de Poincaré do sistema de Duffing de poço duplo amortecido com forçamento periódico.	46
2.16	Série temporal de duas trajetórias da Eq. (2.41) com diferença de 10^{-6} em suas condições iniciais.	47
2.17	Segmentos das variedades do ponto de sela da Eq. (2.32).	48
2.18	Primeiras iteradas do conjunto de Cantor.	51

2.19	Primeiras iteradas da poeira de Cantor, da curva de Koch e do triângulo de Sierpinski.	53
2.20	Representação da dimensão de similaridade utilizando um quadrado.	53
2.21	Representação do processo para o cálculo da dimensão de contagem de caixas para o atrator de Hénon e gráfico $\ln(N(\varepsilon)) \times \ln(1/\varepsilon)$	55
2.22	Bacias de atração com fronteiras suaves dos sistemas de Duffing amortecido e de Hénon.	56
2.23	Bacias de atração com fronteiras fractais dos sistemas de Duffing amortecido com forçamento periódico e no mapa de Hénon.	57
2.24	Esquema representativo de um ponto de incerteza na bacia de atração e $f(\varepsilon)$ em função de ε para as bacias fractais da Figura 2.23.	59
2.25	Seção de Poincaré do atrator caótico presente no plano invariante da Eq. (2.47).	61
2.26	(a) Corte da bacia de atração da Eq. (2.47). (b) Ampliação de uma região de (a). (c) $f(\varepsilon) \times \varepsilon$ para a bacia crivada da Eq. (2.47)	62
3.1	Distribuição espacial instantânea das fases de uma rede de osciladores de Ginzburg-Landau.	65
3.2	Esquema representativo do comportamento do raio do acoplamento r	67
3.3	Regiões coerentes no espaço de parâmetros $r \times \sigma$	68
3.4	Perfis espaciais da dinâmica da rede de mapas logísticos acoplados.	69
3.5	Perfis espaciais da dinâmica da rede de sistemas Roessler acoplados.	69
3.6	Bacia de atração para o sistema de $N = 2$ populações de osciladores acoplados.	73
3.7	Perfis espaciais da rede de sistema de Mackey-Glass acoplados.	74
3.8	SI em função de σ para a rede de Mackey-Glass com atraso.	75
3.9	Corte da bacia de atração para a rede acoplada de sistemas de Mackey-Glass com atraso e estabilidade da bacia (EB) em função de σ para a mesma rede.	77
4.1	Ampliação do espaço de parâmetros isoperiódico $\alpha \times \beta$ do mapa de Hénon e bacia de atração para $(\alpha, \beta) = (1,44; 0,164)$	81
4.2	Estado quimera para $\sigma = 0,30$	81
4.3	SI e EB em relação a σ para a rede de mapas de Hénon acoplados.	83
4.4	Estados quimera obtidos para uma rede de mapas de Hénon. Os parâmetros utilizados: $\alpha = 1,44$, $\beta = 0,164$, $\sigma = 0,24$ e $r = 0,3$	83
4.5	SI na bacia de atração da rede de mapas de Hénon com $\sigma = 0,18$	84
4.6	Estados quimera para a rede de mapas de Hénon com $\sigma = 0,18$	85
4.7	Bacia de atração da rede de mapas de Hénon com $\sigma = 0,12$, $\sigma = 0,18$, $\sigma = 0,24$ e $\sigma = 0,30$	86

4.8	Ampliações da Figura 4.7 enfatizando a fronteira entre estados coerente e quimera.	86
4.9	Ampliações da Figura 4.7 enfatizando a fronteira entre estados quimera e incoerente.	87
4.10	$f(\varepsilon) \times \varepsilon$ para a fronteira entre as bacias de atração da rede de mapas de Hénon	88
4.11	Perfis espaciais da dinâmica da rede de sistemas de Roessler.	89
4.12	SI e EB em relação à σ para a rede de osciladores de Roessler.	90
4.13	Bacias de atração dos estados incoerentes, quimera e coerentes para a rede de sistemas de Roessler acoplados com $\sigma = 0,07$ e $\sigma = 0,05$	91
4.14	Ampliação das bacias de atração da Figura 4.13.	92

Sumário

1	Introdução	12
2	Fundamentação Teórica	18
2.1	Mapas	18
2.1.1	Pontos Fixos e Periódicos	19
2.1.2	Variedades Estáveis e Instáveis	32
2.2	Fluxos	36
2.2.1	Pontos Fixos e Órbitas Periódicas	37
2.2.2	Variedades Estáveis e Instáveis	48
2.3	Fractais	49
2.3.1	Conjunto de Cantor	50
2.3.2	Dimensão Fractal	51
2.4	Bacias de Atração	55
2.4.1	Bacias com Fronteiras Suaves	56
2.4.2	Bacias com Fronteiras Fractais	56
2.4.3	Bacias Crivadas	59
2.5	Conclusão	62
3	Estados Quimera	64
3.1	Estados Quimera em Redes de Osciladores e Mapas Acoplados	64
3.2	Condições Iniciais para Estados Quimera	70
3.3	Conclusão	77
4	Resultados	79
4.1	Rede de Mapas de Hénon Acoplados	79
4.2	Rede de Osciladores de Roessler Acoplados	88
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	93
	Referências	95

1 Introdução

A área de sistemas dinâmicos trabalha com diversos tipos de modelos que mudam com o passar do tempo. O ponto de partida para essa área pode ser atribuído aos experimentos de Galileu Galilei (1564 - 1642) sobre a cinemática da queda dos corpos e de oscilações de pêndulos [1]. Posteriormente, com a formulação do cálculo diferencial e integral de forma independente por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716), e das leis do movimento, novamente por Isaac Newton, a modelagem da dinâmica de sistemas físicos passou a ser fundamentada em bases matemáticas mais sólidas, como consequência de um conjunto de leis. Esses desenvolvimentos científicos também serviram de base para uma corrente filosófica chamada determinismo, defendida por Pierre-Simon, Marquês de Laplace (1749 - 1827), segundo a qual existe uma relação de causalidade que faz com que o futuro possa ser determinado a partir do estado atual do objeto analisado, desde que se conheça as equações que governam as partículas no presente.

A partir das suas três leis do movimento, Newton concluiu que existe uma força de atração que governa a dinâmica dos corpos celestes e que é responsável por manter a Lua orbitando ao redor da Terra, assim como mantém a Terra e os demais planetas orbitando ao redor do Sol, a equação dessa força é denominada lei da gravitação universal. Segundo Newton, dois corpos de massas m_1 e m_2 se atraem segundo uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, e que atua na direção da linha imaginária que liga os dois objetos. Em termos matemáticos é expressa por

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \hat{r}_{21}, \quad (1.1)$$

em que $\vec{F}_{12}$ é a força sobre m_1 exercida por m_2 , $\hat{r}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ é o vetor unitário que aponta no sentido saindo de m_2 em direção à m_1 e $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ é a constante de gravitação universal, determinada apenas em 1797 por Henry Cavendish (1731-1810) [2].

Utilizando a lei da gravitação universal, as leis da dinâmica e o cálculo diferencial e integral, passou-se a analisar as órbitas dos planetas. Na formulação mais geral, esse problema é conhecido como problema dos N corpos e pode ser enunciado da seguinte forma: dados N corpos que interagem entre si apenas por meio da força gravitacional, qual a função que descreve suas trajetórias para um instante de tempo qualquer a partir de seus estados iniciais?

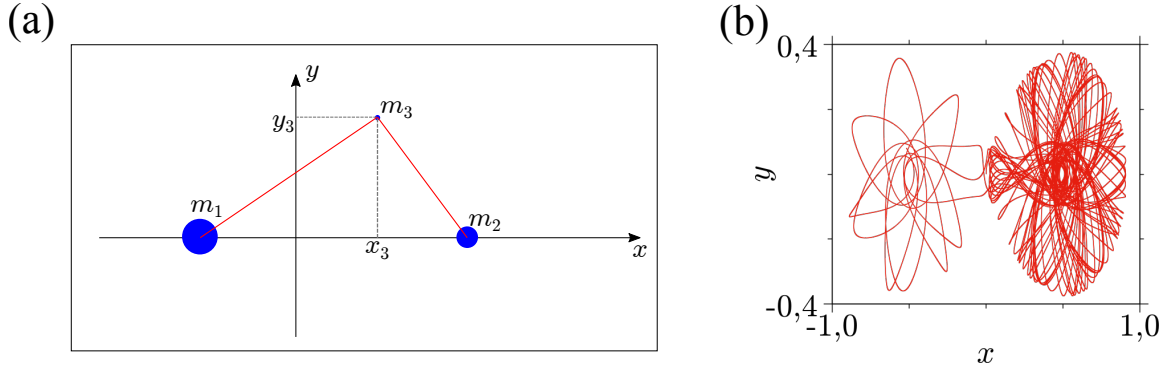
Esse problema se tornou de grande importância ainda na época de Newton, pois já tinham sido observadas flutuações nas órbitas dos planetas e, adicionado a isso, a lei da gravitação diz que todos os corpos do sistema solar se atraem mutuamente. Devido a esses fatores a estabilidade das órbitas por longos períodos de tempo foi colocada em xeque. O problema com $N = 2$ foi resolvido pelo próprio Newton, porém obter a solução para $N = 3$ se mostrou um feito impossível à época. Grandes matemáticos como Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), além do próprio Laplace, fizeram contribuições para o problema de três corpos [1], mostrando que a expressão para a excentricidade e os eixos das órbitas não apresentam termos seculares (que podem crescer indefinidamente) para soluções em séries até segunda ordem. Porém, em 1878, Spiru C. Haret (1851 - 1912) mostrou que soluções de terceira ordem apresentam esses termos [1], e que, portanto, as órbitas não são estáveis como se havia pensado anteriormente.

O grande avanço seguinte na resolução ocorreu em consequência do aniversário de 60 anos do rei Óscar II da Suécia e Noruega em 1889. Em comemoração ao seu aniversário o rei estipulou uma premiação para quem apresentasse o melhor resultado de mecânica celestial tratando do problema dos N corpos [3]. O prêmio foi entregue ao físico e matemático Henry Poincaré (1854 - 1912), apesar de seus resultados iniciais apresentarem um erro (descoberto e corrigido pelo próprio Poincaré) e de ele não ter apresentado uma solução para o problema do sistema solar, mas sim para o problema mais simples com $N = 3$ corpos [3].

O sistema analisado por Poincaré apresentava diversas simplificações com relação ao do sistema solar. Ele considerou que a massa de dois corpos são muito maiores do que a do terceiro, $m_1, m_2 \gg m_3$, que m_1 e m_2 orbitam circularmente em torno do seu centro de massa, centrado na origem do sistema de coordenadas, que a trajetória dos três corpos são coplanares [4], e que o sistema de referência rotaciona de forma que m_1 e m_2 aparentam estar estáticos. A primeira simplificação é feita para que se possa desconsiderar a influência de m_3 sobre os outros dois corpos, a segunda parte do princípio de que se desconsideramos a influência da massa menor as órbitas dos corpos maiores é dada pelo problema com $N = 2$, cuja solução é conhecida, e a terceira e a quarta diminuem a dimensão do sistema e simplificam as equações. Assim, para resolver esse sistema simplificado basta encontrar a equação do movimento de x_3 e y_3 . Na Figura 1.1(a) podemos ver um esquema exemplificando o sistema utilizado por Poincaré.

Poincaré demonstrou que é impossível encontrar analiticamente uma fórmula que descreva o movimento a partir de um ponto inicial qualquer e, além disso, demonstrou que as soluções em séries não convergem [3]. Mesmo em sua versão simplificada do problema, a trajetória da massa m_3 pode resultar em um comportamento extremamente complicado, em que trajetórias inicialmente próximas divergem exponencialmente tornando impossível a previsão para tempos longos [1]. Utilizando um aparato geométrico que ele desenvolveu para tratar do problema de três corpos, com curvas

Figura 1.1: (a) Representação do problema de 3 corpos. (b) Exemplo de trajetória caótica quando $m_1 = m_2$. Os eixos estão em unidades adimensionais.



Fonte: O autor.

especiais que existem no espaço de fase chamadas variedades estáveis e instáveis, Henri Poincaré foi o primeiro a vislumbrar o que hoje é conhecido como teoria do caos [3]. Na Figura 1.1(b) mostramos um exemplo de uma trajetória caótica no caso do problema de três corpos. Na Figura admitimos $m_1 = m_2$ e os eixos estão em unidades adimensionais, de forma que a distância entre as duas massas maiores é igual à unidade.

Após os trabalhos de Poincaré, diversos outros matemáticos fizeram importantes contribuições para a compreensão fenômenos presentes em sistemas dinâmicos não-lineares, alguns que podemos citar são Aleksandr Lyapunov (1857 - 1918), George D. Birkhoff (1884 - 1944), John E. Littlewood (1885 - 1977) e Mary Cartwright (1900 - 1998), Andrei N. Kolmogorov (1903 - 1987) e seus alunos Vladmir I. Arnold (1937 - 2010)¹ e Yakov G. Sinai (1935), e Jürgen K. Moser (1928 - 1999). Nos anos 1960, haviam grupos de matemáticos em Berkeley e Moscou esforçando-se para entender o tipo de movimento que hoje denominamos caos [3], mas a presença do caos em uma grande variedade de áreas só pode ser percebida com o desenvolvimento dos computadores.

No final dos anos 1950, Edward Lorenz (1917 - 2008), um meteorologista e matemático estadunidense que foi aluno de George Birkhoff, estava estudando um sistema de equações diferenciais que modelavam uma atmosfera simplificada. Para realização dos cálculos ele contou com um computador Royal-McBee LGP-300 com 16 kB de memória interna [3]. Quando precisou reproduzir alguns resultados, Lorenz percebeu que após um certo tempo a série temporal do sistema divergia do resultado original, sendo que a diferença entre as duas séries dobrava a cada quatro dias simulados. Ele percebeu que a solução calculada do sistema de equações que ele estava utilizando era, além de aperiódica, sensível às condições iniciais. Inicialmente o sistema utilizado por Lorenz era composto por 12 equações, mas antes de apresentar seus resultados ele gostaria de um modelo mais conveniente com menos equações. A partir do modelo de 7 equações obtido por Barry Saltzman, Lorenz chegou

¹Kolmogorov e Arnold foram responsáveis pela solução do 13º problema da lista de problemas estipulada por David Hilbert [5].

a um sistema ainda mais simples, com 3 equações, dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{1.2}$$

em que a variável x está relacionada com a intensidade da convecção na atmosfera, y é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes ascendente e descendente e z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura [1]. Os parâmetros da equação são o número de Prandtl, σ , o número de Rayleigh, r , e b que depende da dimensão do sistema [1, 3]. Lorenz publicou seus resultados em 1963 no artigo intitulado *Deterministic Nonperiodic Flow* [6] e a Eq. (1.2) é hoje denominada sistema de Lorenz. A divergência exponencial de trajetórias próximas em sistemas atmosféricos ficou conhecido como efeito borboleta, após um seminário apresentado por Lorenz em 1972 intitulado: *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?* [1].

O termo caos utilizado para descrever essa nova forma de comportamento dinâmico foi definido matematicamente por James A. Yorke e Tien-Yen Li em 1975 em seu artigo *Period Three Implies Chaos* [7], em que foi demonstrada a existência de órbitas aperiódicas, não-divergentes e sensíveis às condições iniciais em um sistema chamado *mapa logístico*. Portanto, os resultados observados anteriormente não se deviam a possíveis erros numéricos ou computacionais, mas sim a um novo tipo de dinâmica.

A partir dos anos 1970, com o desenvolvimento de computadores mais acessíveis e capazes de realizar mais cálculos por segundo, o estudo do caos se tornou uma importante área de pesquisa, com exemplos de dinâmica caótica nos mais variados campos do conhecimento. Das contribuições feitas no desenvolvimento da teoria do caos, podemos destacar os trabalhos de Stephen Smale, Mitchell Feigenbaum, o trio OGY, formado por Edward Ott, Celso Grebogi e James A. Yorke, também realizaram importantes contribuições Ying-Cheng Lai, Otto Roessler, Leon O. Chua, Jürgen Kurths, Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, Tomasz Kapitaniak e Miguel Sanjuán, entre outros, sendo que grande parte continua pesquisando de forma ativa atualmente.

Na mesma época, começaram os estudos a respeito da sincronização em redes de osciladores que interagem entre si. Arthur T. Winfree descreveu em um artigo de 1967 alguns sistemas que macroscopicamente apresentam um comportamento periódico, mas que tal comportamento surge da interação de um grande número de elementos que são individualmente diferentes [8]. Entre os sistemas apontados por Winfree estão o ritmo da contração cardíaca dada pela interação de células marca-passo, a sincronização dos lampejos de algumas espécies de vagalumes asiáticos e os ritmos circadianos que regulam o metabolismo e são responsáveis pelo "relógio biológico" dos seres vivos.

Inspirado pelo trabalho de Winfree, Yoshiki Kuramoto passou a se interessar por redes de sistemas acoplados e formulou o sistema que hoje é conhecido como modelo de

Kuramoto [9, 10]. Esse modelo é composto por N osciladores acoplados, cuja dinâmica individual é dada por

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

em que θ_i é a fase do oscilador i , ω_i sua frequência natural, σ é a intensidade do acoplamento com seus vizinhos e N é o número de osciladores interagentes, também referido como sendo o tamanho da rede. Como o somatório na Eq. (1.3) abrange todos os osciladores da rede, esse tipo de conexão entre eles recebe o nome de acoplamento global. Esse sistema apresenta uma característica tal que, para certos valores de σ e das distribuições das frequências ω_i , todos os elementos da rede passam a oscilar de forma sincronizada.

A partir de então, modelos de osciladores e sistemas não-lineares acoplados têm sido utilizados no estudo de uma grande variedade de fenômenos e com uma vasta gama de aplicações, como redes de transmissão de energia elétrica [11, 12], simulações de redes neuronais [13, 14], dinâmica de populações [15] e sistemas oscilatórios quânticos [16]. Enquanto inicialmente o interesse maior era determinar sob quais condições ocorria a sincronização da dinâmica dos componentes da rede [17, 18], a partir do trabalho de 2002 de Kuramoto e Battogtokh [19] passou-se a ter grande interesse pelo estudo de estados em que regiões sincronizadas e dessincronizadas ocorrem simultaneamente, denominados estados quimera [20].

Estados quimera já foram identificados em diversos modelos teóricos, dentre os quais podemos citar modelos de redes acopladas de osciladores de Landau-Stuart [21], de mapas logísticos [22], de sistemas de Lorenz e de Roessler [23], de mapas de Hénon [24], de autômatos celulares [25], e mesmo experimentalmente em redes de osciladores mecânicos [26], utilizando modulador espacial de luz de cristal líquido [27] e em *lasers* acoplados [28], sendo que uma dificuldade que está sempre presente na obtenção de um estado quimera é a definição dos valores iniciais das variáveis do sistema.

No presente trabalho, investigamos a transição entre os regimes de sincronização e dessincronização em redes de mapas de Hénon acoplados e de sistemas de Roessler acoplados. Tais redes já foram utilizadas por outros pesquisadores em estudos que tratam de estados quimera [24, 22], porém com foco distinto. Analisamos a densidade de estados em termos das condições iniciais, examinamos de que forma as bacias de atração dos estados da rede estão organizadas e de que forma suas fronteiras são modificadas quando realizamos a variação de um parâmetro da rede. Tal caracterização se faz importante devido à escassez de resultados que tratam de bacias de atração para rede que exibem estados quimera. Uma contribuição extra obtida dos nossos resultados é a metodologia para obter estados quimera em uma rede, sendo que, de acordo com o que

observamos aqui, mesmo a perturbação de apenas um elemento é capaz de fazer com que toda a dinâmica deixe seu estado sincronizado e passe a um estado quimera.

Este trabalho está organizado na seguinte forma: no capítulo 2 introduzimos alguns conceitos chaves da dinâmica não-linear, tanto para sistemas de tempo discreto como para sistemas de tempo contínuo. Fazemos uma rápida introdução à objetos com geometria fractal, suas propriedades e formas de caracterizá-los. Então mostramos de que forma essas estruturas fractais se manifestam na bacia de atração. Por fim, apontamos as conclusões desse capítulo. No capítulo 3 fazemos uma introdução aos estados quimera, caracterizados pela coexistência de domínios coerente e incoerentes na dinâmica de uma rede de osciladores, apresentamos alguns resultados conhecidos que tratam da bacia de atração em sistemas que exibem esses estados e definimos o quantificador que utilizamos para detectá-los. No capítulo 4 apresentamos e discutimos os resultados obtidos para a rede de mapas de Hénon e de osciladores de Roessler. Os principais resultados desta tese foram publicados em agosto de 2018 sob o título *Riddling: Chimera's dilemma*, no volume 28 do periódico científico *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* [29]. No capítulo 5 colocamos as principais conclusões deste trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

Podemos definir de maneira geral um sistema dinâmico como um sistema em que o valor das variáveis é modificado com o passar do tempo de acordo com uma equação de evolução. A evolução pode ser descrita por equações diferenciais, em que o tempo é considerado de forma contínua, ou por mapas, em que varia de forma discreta [3].

Quando a equação de evolução apresenta termos não lineares raramente se obtém expressões analíticas para a função que descreve o comportamento futuro das variáveis. Esses sistemas podem apresentar diversos comportamentos distintos, como dinâmicas periódicas, aperiódicas e caóticas, e podem ainda convergir para diferentes estados finais dependendo dos valores iniciais das variáveis. Devido a isso, o estudo desses sistemas requer a utilização de conceitos e ferramentas de análise próprios da área conhecida como dinâmica não-linear. Neste capítulo, vamos introduzir alguns conceitos dessa área, tais como pontos fixos, variedades, bacias de atração, fractais e algumas ferramentas comumente utilizadas, como diagramas de órbitas, análise de estruturas no espaço de parâmetros e determinação da dimensão fractal.

Começaremos na próxima seção tratando de sistemas de tempo discreto, em seguida expandiremos as definições para sistemas de tempo contínuo, então faremos uma breve introdução à objetos fractais e, finalmente, mostraremos a dificuldade na previsibilidade do estado final causada pela fractalidade na bacia de atração. Por fim, apresentaremos as conclusões do capítulo.

2.1 Mapas

Quando o tempo é considerado como uma variável discreta o sistema dinâmico é denominado mapa. Em geral um mapa pode ser representado na forma

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t), \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{x}_t = [x_t^{(1)} \ x_t^{(2)} \ \dots \ x_t^{(N)}]^T$ é uma matriz coluna cujos elementos são os valores das variáveis no tempo t , N é a dimensão do sistema e $\mathbf{F}(\mathbf{x}_t) = [f_1(\mathbf{x}_t) \ f_2(\mathbf{x}_t) \ \dots \ f_N(\mathbf{x}_t)]^T$ é uma matriz coluna cujos elementos nos fornecem as funções que governam a evolução das variáveis.

A evolução temporal da Eq. (2.1) é feita da seguinte forma: definimos um vetor de condições iniciais $\mathbf{x}_0$, substituímos na Eq. (2.1) e obtemos $\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. Em seguida

inserimos esses valores como entrada na equação novamente e obtemos $\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{x}_3 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{x}_0)$ e assim por diante. Esse processo recebe o nome de *iterada*, ou também *iteração*.

Sistemas dinâmicos de tempo discreto também podem ser classificados como lineares e não-lineares, de acordo com as funções de evolução das variáveis. Considerando um mapa linear geral na forma

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_t, \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{M}$ é uma matriz quadrada de coeficientes constantes, é fácil ver que se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é um autovetor de $\mathbf{M}$ com autovalor correspondente Λ^t , então $\mathbf{x}_t = \Lambda^t \mathbf{x}_0$. Portanto, admitindo que os autovalores de $\mathbf{M}$ são reais e distintos, em um tempo t qualquer teremos

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^N c_i \Lambda_i^t \mathbf{u}_i, \quad (2.3)$$

em que os coeficientes c_i são determinados a partir da condição inicial. Assim, utilizando os autovetores da matriz dos coeficientes para definir uma base ortogonal, a solução da Eq. (2.2) pode ser facilmente determinada para qualquer condição inicial.

Na próxima subseção vamos definir e caracterizar pontos fixos e órbitas periódicas em mapas. Iniciaremos considerando um mapa unidimensional linear, seguido pelo exemplo do mapa logístico, e então passaremos ao mapa de Hénon, que é um mapa bidimensional que utilizamos no restante do trabalho.

2.1.1 Pontos Fixos e Periódicos

Mapas não-lineares nem sempre apresentam uma solução para um instante de tempo qualquer como na forma da Eq. (2.3). Nesses casos o comportamento dinâmico pode ser inferido a partir de pontos especiais presentes no espaço de fase desses mapas, os pontos fixos.

Definição 1 *Seja um mapa N -dimensional definido por $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$, um ponto $\mathbf{x}^*$ com a propriedade $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ é denominado **ponto fixo**, ou ponto crítico, do mapa.*

Para ver de que forma os pontos fixos auxiliam na compreensão da dinâmica, começaremos com a análise de um mapa linear unidimensional. A evolução temporal é dada por

$$x_{t+1} = g(x_t) = ax_t, \quad (2.4)$$

em que $a \neq 0$ é um parâmetro de controle. Esse modelo pode ser utilizado para representar o crescimento de uma população (de bactérias, por exemplo) considerando recursos disponíveis ilimitados [3]. Nesse caso x_t representa o tamanho da população no tempo t , $a \geq 0$ representa a taxa de crescimento da população e cada instante de tempo representa uma nova geração.

Tomando a Eq. (2.4) como um sistema dinâmico, ela tem um ponto fixo em $x^* = 0$ e derivada $g'(x) = a$. Iniciando o sistema com uma população x_0 , no tempo $t = 1$ teremos $x_1 = ax_0$. No instante $t = 2$ teremos $x_2 = ax_1 = a^2x_0$. Logo, a solução para um tempo t qualquer a partir de uma condição inicial $x_0 \neq 0$ é dada por $x_t = a^t x_0$. Então, o estado assintótico para $t \rightarrow \infty$ é:

- $x_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, se $|a| < 1$;
- $|x_{t \rightarrow \infty}| \rightarrow \infty$, se $|a| > 1$.

Apesar de simples, esse modelo nos permite observar que o estado assintótico do sistema está relacionado com o valor de $|g'(x)|$, com as condições iniciais se afastando ou se aproximando do ponto fixo dependendo do valor de a .

Definição 2 *Seja x^* um ponto fixo do mapa unidimensional $x_{t+1} = f(x_t)$. Se existe uma vizinhança em que x^* está contido tal que condições iniciais nessa vizinhança possuem a propriedade $x_{t \rightarrow \infty} \rightarrow x^*$, então ele é **assintoticamente estável**. Se existe uma vizinhança em que x^* está contido tal que $x_{t \rightarrow \infty}$ está fora dessa vizinhança, então ele é **instável**. Pontos assintoticamente estáveis também são chamados de **atratores**, por atraírem um conjunto não-nulo de condições iniciais.*

Teorema 1 *Seja x^* um ponto fixo do mapa unidimensional $x_{t+1} = f(x_t)$, com $f(x)$ sendo uma função suave.*

- *Se $|f'(x^*)| < 1$, então x^* é assintoticamente estável;*
- *Se $|f'(x^*)| > 1$, então x^* é instável;*
- *Se $|f'(x^*)| = 1$, então x^* pode ser estável, instável ou nenhum desses casos.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3, 30].

Portanto, se inicialmente a Eq. (2.4) apresenta $|a| < 1$ e o valor do parâmetro de controle é aumentado, ao passar do valor crítico $|a_c| = 1$ o ponto fixo na origem perde a estabilidade. Deixando de ser um ponto assintoticamente estável e para ser um ponto instável.

O Mapa Logístico

Um dos modelos mais simples de tempo discreto capaz de exibir dinâmica complexa é conhecido como mapa logístico. Assim como a Eq. (2.4), o mapa logístico também pode ser utilizado como um modelo para o crescimento populacional porém em um ambiente com recursos limitados [3, 31]. Sua evolução temporal é dada por

$$x_{t+1} = f(x_t) = ax_t(1 - x_t), \quad (2.5)$$

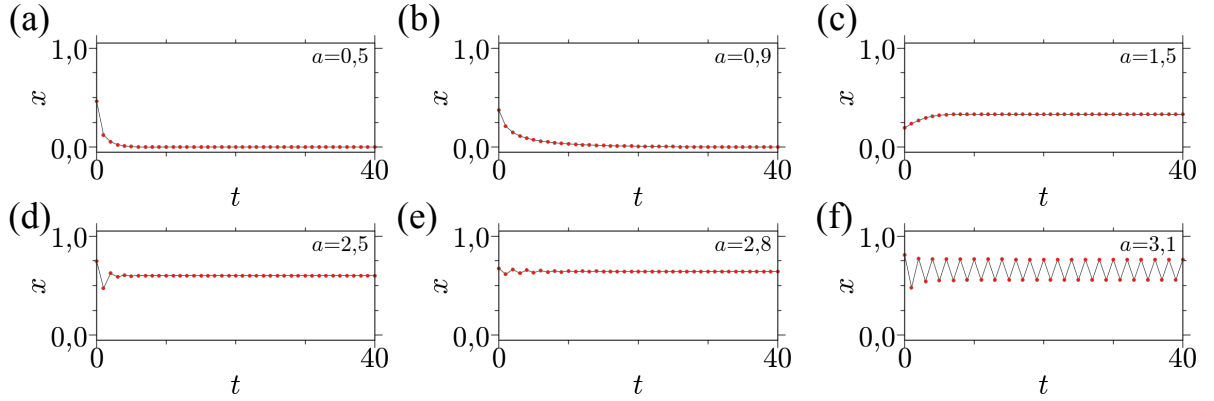
em que o parâmetro $0 \leq a \leq 4$ está relacionado com a taxa de crescimento da população, cada instante de tempo representa uma nova geração e $0 \leq x \leq 1$ é uma medida adimensional da população [32].

O mapa logístico apresenta dois pontos fixos, da Definição 1 sabemos que eles são $x_A^* = 0$ e $x_B^* = 1 - 1/a$, com derivadas $f'(x_A^*) = a$ e $f'(x_B^*) = 2 - a$. Utilizando o resultado do Teorema 1, temos

- Se $a < 1$, o ponto x_A^* é assintoticamente estável enquanto x_B^* é instável;
- Se $1 < a < 3$, o ponto x_A^* é instável enquanto x_B^* é assintoticamente estável;
- Se $a > 3$, ambos os pontos x_A^* e x_B^* são instáveis.

Na Figura 2.1 plotamos a série temporal da Eq. (2.5) para uma condição inicial escolhida de forma aleatória no intervalo unitário para diferentes valores de a . Em (a) e (b) o valor de x_t converge para o ponto fixo x_A^* , em (c)-(e) converge para o ponto fixo x_B^* , cujo valor muda de acordo com o valor do parâmetro a . Em (f) plotamos a série temporal para $a = 3,1$, valor para o qual tanto x_A^* quanto x_B^* são instáveis. Podemos notar que para esse valor de parâmetro a variável x_t , após um certo tempo, fica transitando entre dois valores.

Figura 2.1: 40 primeiras iteradas da série temporal da Eq. (2.5) para uma condição inicial aleatória $0 < x_0 < 1$. O valor dos parâmetros utilizados é (a) $a = 0,5$, (b) $a = 0,9$, (c) $a = 1,5$, (d) $a = 2,5$, (e) $a = 2,8$ e (f) $a = 3,1$.



Fonte: O autor.

Existem dois pontos importantes a serem destacados a partir das informações observadas até agora. A primeira é que se $a > 3$, então existem dois pontos x_P^* e x_Q^* tais que $x_P^* = f(x_Q^*)$ e $x_Q^* = f(x_P^*)$. A segunda é que a oscilação entre esses pontos é estável e atrai órbitas próximas.

Definição 3 Seja um mapa $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$. Um ponto $\mathbf{x}_P^*$ é denominado **ponto periódico de período k** se $\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}_P^*) = \mathbf{x}_P^*$, sendo k o menor inteiro positivo que satisfaz essa condição. Ao conjunto de pontos $\{\mathbf{x}_P^*, \mathbf{F}(\mathbf{x}_P^*), \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}_P^*), \dots, \mathbf{F}^{(k-1)}(\mathbf{x}_P^*)\}$ chamamos **órbita de período k** .

Da Definição 3 temos que os pontos x_P^* e x_Q^* são pontos periódicos de período 2.

Uma questão que surge naturalmente é sobre a determinação da estabilidade dos pontos periódicos. Tomando como exemplo o caso do mapa logístico, primeiramente temos que determinar os valores de x_P^* e x_Q^* . Para isso basta notar que ambos os pontos são pontos fixos do mapa $x_{t+1} = f(f(x_t)) = h(x_t)$. Daí temos:

$$\begin{aligned}
x^* &= f(ax^*(1 - x^*)), \\
&= a[ax^*(1 - x^*)][1 - ax^*(1 - x^*)], \\
&= (a^2x^* - a^2x^{*2})(1 - ax^* + ax^{*2}), \\
&= (a^2x^* - a^2x^{*2}) - ax^*(a^2x^* - a^2x^{*2}) + ax^{*2}(a^2x^* - a^2x^{*2}), \\
&= (a^2x^* - a^2x^{*2}) - (a^3x^{*2} - a^3x^{*3}) + (a^3x^{*3} - a^3x^{*4}), \\
&= -a^3x^{*4} + 2a^3x^{*3} - a^2(1 + a)x^{*2} + a^2x^*, \\
0 &= a^3x^{*4} - 2a^3x^{*3} + a^2(1 + a)x^{*2} - a^2x^* + x^*,
\end{aligned}$$

Para simplificar essa expressão basta notarmos que os pontos fixos x_A^* e x_B^* devem obrigatoriamente ser raízes da equação¹. Logo, podemos reescrever a equação como

$$ax^*(x^* - 1 + 1/a)[a^2x^{*2} - a(1 + a)x^{*2} + (a + 1)] = 0. \quad (2.6)$$

Resolvendo a expressão entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned}
x_P^* &= \frac{1+a}{2a} + \frac{\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \\
x_Q^* &= \frac{1+a}{2a} - \frac{\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Como o termo dentro da raiz deve ser positivo e $0 \leq a \leq 4$, então a órbita de período 2 só existe nesse sistema para $a > 3$. Do teorema 1, sabemos que a estabilidade está ligada à derivada da função do mapa calculada no ponto fixo. No caso de pontos periódicos, temos que calcular a derivada da função composta $h(x) = f(f(x))$. Do cálculo de funções de uma variável real sabemos que $|h'(x_P^*)| = |f'(f(x_P^*)) \cdot f'(x_P^*)| = |f'(x_Q^*)| \cdot |f'(x_P^*)|$. Portanto, basta multiplicarmos o valor da derivada da função calculada em cada um dos pontos da órbita.

Definição 4 *Seja x_P^* um ponto periódico de período k do mapa $x_{t+1} = f(x_t)$. Tal ponto é denominado **ponto periódico assintoticamente estável** se for um ponto fixo assintoticamente estável do mapa $x_{t+1} = f^{(k)}(x_t)$. Nesse caso a órbita $\{x_P^*, f(x_P^*), \dots, f^{(k-1)}(x_P^*)\}$ é dita assintoticamente estável, e x_P^* também pode ser chamado de **atrator de período k** .*

¹ Isso ocorre porque se $f(x^*) = x^*$, então $f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$.

Calculando a derivada do mapa logístico nos pontos de período 2 obtemos

$$\begin{aligned} f'(x_P^*) &= a - 2ax_P^*, & f'(x_Q^*) &= a - 2ax_Q^*, \\ f'(x_P^*) &= -1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}, & f'(x_Q^*) &= -1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}. \end{aligned}$$

Logo, a órbita será estável quando

$$|f'(x_P^*) \cdot f'(x_Q^*)| = |1 - (a+1)(a-3)| < 1. \quad (2.8)$$

Considerando os casos $f'(x_P^*) \cdot f'(x_Q^*) < 1$ e $f'(x_P^*) \cdot f'(x_Q^*) > -1$, chegamos em

$$\begin{aligned} 1 - (a+1)(a-3) - 1 &< 0, & -(a+1)(a-3) &> -2, \\ -(a+1)(a-3) &< 0, & (a+1)(a-3) &< 2, \\ (a+1)(a-3) &> 0, & a^2 - 2a - 5 &< 0, \\ (a+1)(a-3) &> 0, & [a - (1 + \sqrt{6})][a + (\sqrt{6} - 1)] &< 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da condição da esquerda obtemos que a órbita de período 2 é estável para $a > 3$ (o que coincide com o surgimento do período 2), enquanto que o limite superior é fornecido pela expressão da direita $a < (1 + \sqrt{6}) \approx 3,449$. Quando $a > (1 + \sqrt{6})$ a órbita de período 2 também passa a ser instável e a trajetória passa a convergir para outra órbita.

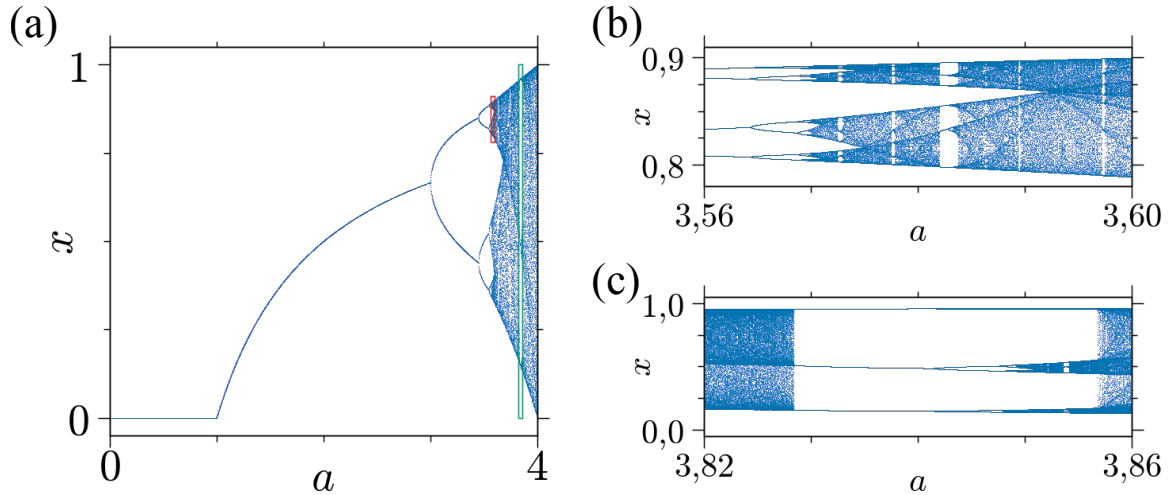
Na Figura 2.2 plotamos diagramas de órbitas para o mapa logístico. Esse tipo de diagrama facilita a visualização do estado assintótico para um determinado valor de parâmetro. Para construí-lo tomamos uma condição inicial aleatória no domínio de $f(x_t)$ com a fixo, iteramos o mapa por um longo tempo para que a trajetória se aproxime da órbita assintoticamente estável e então plotamos os próximos 100 valores de x_t (claramente órbitas de período maior necessitam de mais pontos), em seguida modificamos o valor de a e repetimos o procedimento.

Nas Figuras 2.2(a)-(c) construímos o diagrama de órbitas utilizando 2048 valores de a . Em (a) podemos ver o quadro geral da dinâmica do mapa logístico, com os pontos fixos e periódicos assintoticamente estáveis surgindo ou perdendo a estabilidade com o aumento de a . Em (b) fazemos a ampliação da região marcada com um retângulo vermelho em (a). Dos diagramas em (a) e (b) podemos ver que com o aumento de a o sistema passa a convergir de uma órbita de período 2 para uma de período 4, então para uma de período 8, então 16 e assim sucessivamente até o surgimento de um atrator caótico [3]. Esse tipo de rota para o caos é chamada cascata de dobra de período e está presente em uma grande quantidade de sistemas não lineares [4, 32].

Quando o mapa passa a convergir para um atrator caótico, a trajetória aparentemente preenche de forma aleatória o intervalo unitário ou um subconjunto dele. Esse tipo de atrator possui diversas características peculiares, como o fato de que trajetórias próximas apresentam divergência exponencial e eles podem desaparecer abruptamente [3]. Essa

última característica pode ser vista mesmo no mapa logístico, quando $a = 4$ é possível demonstrar que o atrator do mapa é caótico [3, 30], porém para $a > 4$ não existe conjunto atrator e qualquer condição inicial no intervalo unitário (exceto casos especiais como a condição inicial $x_0 = 1$) se comporta como $|x_{t \rightarrow \infty}| \rightarrow \infty$.

Figura 2.2: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico utilizando uma grade de 2048 pontos. Para construir o diagrama realizamos 1000 iterações a partir de uma condição inicial aleatória $x_0 \in (0, 1)$ e plotamos os últimos 100 valores obtidos. Em (b) e (c) fazemos ampliações de (a).



Fonte: O autor.

Apesar da predominância de atratores caóticos no intervalo $a \in [3,57; 4]$, janelas de dinâmica periódica de diferentes períodos são onipresentes em todo o intervalo e são caracterizadas por uma lei de escala [33, 34]. Na Figura 2.2(c) plotamos uma outra ampliação de (a), desta vez a região do retângulo verde. Neste diagrama podemos claramente ver o surgimento de uma órbita de período 3 estável. Apesar de não ficar tão definido na figura, a órbita de período 3 também passa por uma cascata de dobra de período, dando origem a uma órbita de período 6, seguida por uma de período 12, etc.

Seja a_k o valor de parâmetro em que a órbita de período 2^k deixa de ser estável e ocorre o surgimento de uma outra de período 2^{k+1} , e seja δ_k dada pela razão

$$\delta_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k}, \quad \text{com } k = 2, 3, \dots, \quad (2.10)$$

o físico e matemático Mitchell Feigenbaum [35] demonstrou que $\delta_\infty = 4,669202\dots$ é uma constante universal, presente em bifurcações dos mais variados modelos de sistemas dinâmicos. Em sua homenagem essa constante passou a ser chamada constante de Feigenbaum [30].

Apesar do diagrama de órbitas auxiliar na determinação de órbitas aperiódicas quando um parâmetro do sistema é variado, por meio dele não temos como garantir que tais órbitas aperiódicas apresentam sensibilidade às condições iniciais, que é o comportamento característico de atratores caóticos. Para determinar essa sensibilidade devemos definir o

expoente de Lyapunov.

Definição 5 *Seja $x_{t+1} = f(x_t)$ um mapa unidimensional e $f(x)$ uma função real e suave. Seja $\{x_1, x_2, \dots\}$ uma órbita do mapa. Definimos o **expoente de Lyapunov** dessa trajetória como*

$$\lambda_L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|. \quad (2.11)$$

Dado que o limite exista [3].

Em conjunto com a condição de estabilidade do Teorema 1, a definição de expoente de Lyapunov acima implica que pontos fixos e órbitas periódicas estáveis apresentarão $\lambda_L < 0$.

Definição 6 *Seja $x_{t+1} = f(x_t)$ um mapa unidimensional e $f(x)$ uma função real e suave. Seja, ainda, $\{x_0, x_1, \dots\}$ uma órbita do mapa confinada a uma região. Essa órbita será **caótica** se*

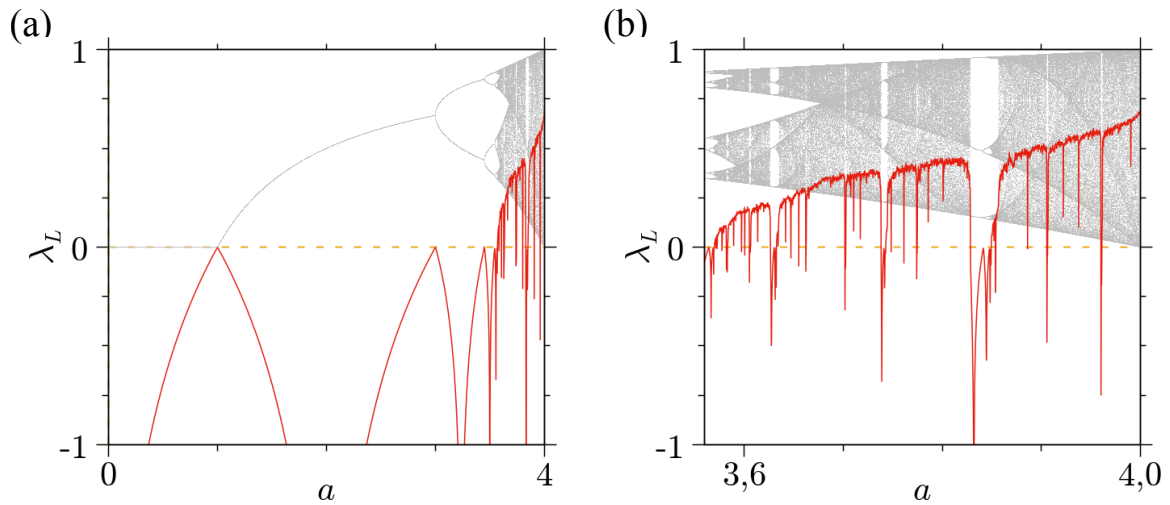
- $\{x_0, x_1, \dots\}$ não for assintoticamente periódica.
- O expoente de Lyapunov da órbita for positivo.

Na Figura 2.3 a linha vermelha fornece o valor calculado do expoente de Lyapunov para valores de a . Comparando o expoente de Lyapunov com o diagrama de órbitas, podemos notar que $\lambda_L = 0$ sempre que uma órbita periódica passa por uma bifurcação. Nota-se também que os valores de parâmetro em que as trajetórias preenchem uma determinada região do espaço apresentam expoente de Lyapunov positivo, o que as caracteriza como órbitas caóticas. Por fim, o surgimento de uma janela periódica faz com que λ_L passe novamente a ficar negativo.

Diferentemente das Definições 5 e 6 uma trajetória calculada numericamente apresenta comprimento finito. Por esse motivo, Figuras como a 2.3 não devem ser utilizadas como comprovações matemáticas rigorosas de que certas órbitas são caóticas. A caracterização de uma órbita como sendo caótica segundo o rigor matemático é por vezes uma tarefa de grande complexidade. Mesmo para o mapa logístico essa demonstração existe apenas para $a = 4$ [3, 30]. Ainda assim, em geral é aceito que uma órbita aperiódica confinada a um subconjunto do domínio de $f(x)$ e cujo expoente de Lyapunov obtido numericamente é positivo, seja considerada caótica.

Agora que definimos e exploramos conceitos como estabilidade de pontos fixos e periódicos e expoente de Lyapunov em mapas unidimensionais, vamos expandir essas ideias para mapas de maior dimensão utilizando como exemplo o mapa de Hénon.

Figura 2.3: A linha vermelha é o Expoente de Lyapunov do mapa logístico calculado utilizando 1000 iterações a partir de uma condição inicial aleatória $x_0 \in (0, 1)$. Os pontos cinza ao fundo fornecem o diagrama de órbitas. Em (b) fazemos uma ampliação de (a) no intervalo $a \in [3,56; 4]$.



Fonte: O autor.

O Mapa de Hénon

O mapa de Hénon é um sistema dinâmico bidimensional de tempo discreto proposto por Michel Hénon em 1976 a partir de uma seção de Poincaré do sistema de Lorenz [36]. A dinâmica do mapa de Hénon é dada por

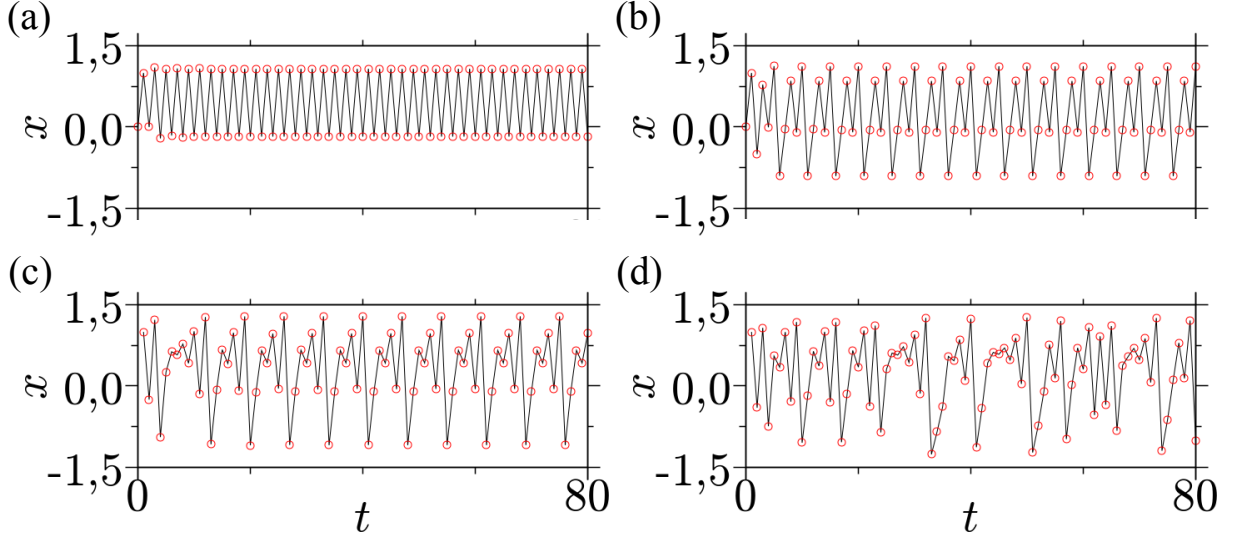
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \alpha x_t^2 + y_t, \\ y_{t+1} &= \beta x_t, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que α e β são parâmetros a serem definidos.

Assim como no mapa logístico, a dinâmica do mapa de Hénon pode apresentar comportamentos distintos dependendo do valor dos parâmetros α e β . Na Fig. 2.4 plotamos as primeiras 80 iterações para diferentes combinações de parâmetros, iniciando a Eq. (2.12) com $x_0 = y_0 = 0$. Na Fig. 2.4(a) utilizamos $\alpha = 1,0$ e $\beta = 0,1$, podemos notar a convergência para uma órbita de período 2. Nas Fig. 2.4(b) e (c) a dinâmica converge para atratores de período 5 e 7, respectivamente. Os parâmetros nesses casos são $\alpha = 1,5$ e $\beta = 0,16$, e $\alpha = 1,25$ e $\beta = 0,3$. Na Fig. 2.4(d) empregamos os mesmos valores de parâmetros utilizados por Michel Hénon no artigo de 1976 [36], $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$, e a dinâmica converge para um atrator caótico.

Na Fig. 2.5(a) plotamos as órbitas periódicas no espaço de fase do sistema. Aqui podemos visualizar os pontos periódicos de período 2 (círculos pretos), 5 (quadrados verdes) e 7 (asteriscos azuis) que o sistema exibe para os valores de parâmetros da Figura 2.4. Em (b) plotamos o atrator caótico com formato de bumerangue que existe para $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$. Ainda que esse atrator aparentemente exiba uma estrutura bem definida, por meio da ampliação de uma região podemos notar uma certa complexidade

Figura 2.4: Série temporal das primeiras iteradas do mapa de Hénon com diferentes parâmetros. A condição inicial utilizada foi a $x_0 = y_0 = 0$ em todos os casos. Em (a) a dinâmica converge para um atrator de período 2, em (b) para um atrator de período 5, em (c) para um atrator de período 7, e em (d) para um atrator caótico (não apresenta período). Parâmetros utilizados são: (a) $\alpha = 1,0$ e $\beta = 0,1$, (b) $\alpha = 1,5$ e $\beta = 0,16$, (c) $\alpha = 1,25$ e $\beta = 0,3$ e (d) $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$.



Fonte: O autor.

em escalas menores. Essa complexidade se deve ao fato de que o atrator caótico apresenta uma estrutura fractal, que será apresentada em mais detalhes na Seção 2.3. A seguir apresentaremos algumas definições e um teorema que são necessários para a análise da estabilidade em mapas bidimensionais.

Definição 7 *Seja um sistema de tempo discreto N -dimensional dado por $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$. Definimos a matriz Jacobiana (ou simplesmente Jacobiana) $\mathbf{L}$ do sistema como sendo*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x^{(1)} & \partial f_1 / \partial x^{(2)} & \dots & \partial f_1 / \partial x^{(N)} \\ \partial f_2 / \partial x^{(1)} & \partial f_2 / \partial x^{(2)} & \dots & \partial f_2 / \partial x^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial x^{(1)} & \partial f_N / \partial x^{(2)} & \dots & \partial f_N / \partial x^{(N)} \end{pmatrix}.$$

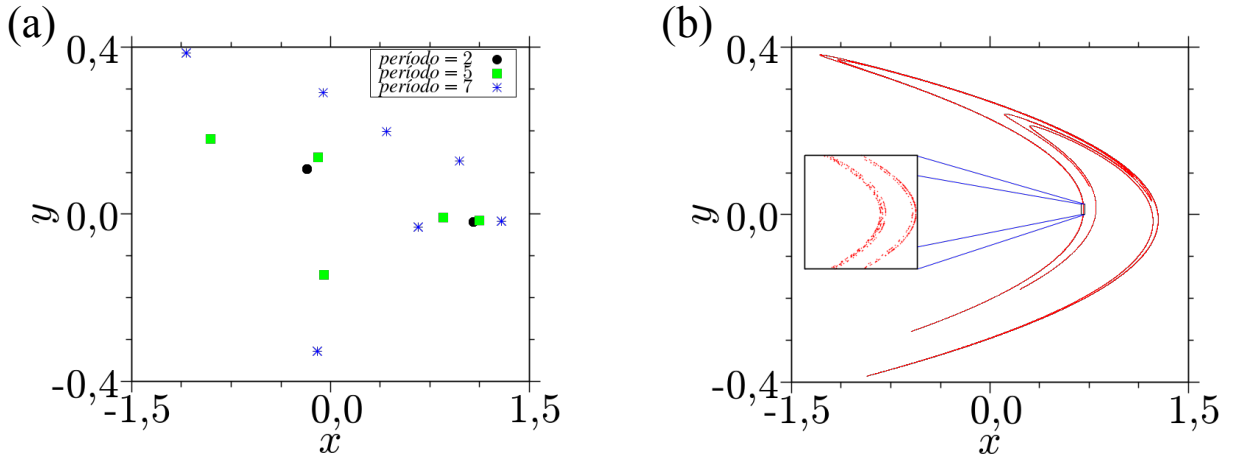
Teorema 2 *Seja um mapa N -dimensional dado por $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ e assumindo que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.*

- *Se o módulo de todos os autovalores da matriz Jacobiana do mapa calculada em $\mathbf{x}^*$ são menores do que 1, então $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável.*
- *Se o módulo de todos os autovalores da matriz Jacobiana do mapa calculada em $\mathbf{x}^*$ são maiores do que 1, então $\mathbf{x}^*$ é instável.*

Definição 8 *Seja um mapa N -dimensional dado por $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ e assumindo que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Então o ponto fixo $\mathbf{x}^*$ é dito **hiperbólico** se nenhum dos autovalores da*

Jacobiana do mapa calculada sobre $\mathbf{x}^*$ possui módulo igual à 1. Se $\mathbf{x}^*$ for hiperbólico e $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*)$ possuir ao menos um autovalor com módulo maior do que 1 e ao menos um autovalor com módulo menor do que 1, então $\mathbf{x}^*$ é um ponto de sela.

Figura 2.5: (a) Atratores periódicos do mapa de Hénon. Os pontos em preto denotam o atrator de período 2, os quadrados de cor verde denotam o atrator de período 5 e os asteriscos de cor azul denotam o período 7. Em (b) plotamos uma trajetória que converge para o atrator caótico. Na inserção fazemos uma ampliação de uma região da trajetória. Parâmetros utilizados são iguais ao da Figura 2.4.



Fonte: O autor.

Do Teorema 2, cuja demonstração pode ser encontrada em [3], e da Definição 8 vemos que o papel desempenhado pelos autovalores da matriz Jacobiana na classificação dos pontos fixos em mapas bidimensionais é similar ao do módulo da derivada no caso dos mapas unidimensionais. Seja um mapa bidimensional descrito por

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f_1(x_t, y_t), \\y_{t+1} &= f_2(x_t, y_t),\end{aligned}$$

cujas matriz Jacobiana calculada no ponto fixo (x^*, y^*) é

$$\mathbf{L}(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{bmatrix}_{x=x^*, y=y^*}.$$

Os autovalores de $\mathbf{L}$ são dados por

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{L}) \pm \sqrt{(\text{Tr}(\mathbf{L}))^2 - 4 \cdot \det(\mathbf{L})}}{2}, \quad (2.13)$$

e podem ser reais e distintos, reais e iguais, ou complexos. Na Tabela 2.1 sintetizamos a classificação dos pontos fixos em mapas bidimensionais com base nos autovalores de $\mathbf{L}$.

Tabela 2.1: Classificação dos pontos fixos em um sistema bidimensional de tempo discreto [4].

	$1 < \Lambda_{\pm} $	$ \Lambda_- < 1 < \Lambda_+ $	$ \Lambda_{\pm} < 1$	$ \Lambda_{\pm} = 1$
$\text{Im}(\Lambda_{\pm}) = 0$	nó repulsivo	ponto de sela	nó atrator	ponto marginal
$\text{Im}(\Lambda_{\pm}) \neq 0$	foco repulsivo	–	foco atrator	ponto elíptico

No caso do mapa de Hénon, encontramos os pontos fixos resolvendo

$$\begin{aligned} x^* &= 1 - \alpha x^{*2} + y^* \\ y^* &= \beta x^* \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha x^{*2} + (1 - \beta)x^* - 1 &= 0 \\ y^* &= \beta x^* \end{aligned},$$

do onde obtemos

$$\begin{aligned} x_{A,B}^* &= \frac{\beta-1}{2\alpha} \pm \frac{1}{2\alpha} \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha} \\ y_{A,B}^* &= \frac{\beta(\beta-1)}{2\alpha} \pm \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{(1-\beta)^2 + 4\alpha}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto o mapa de Hénon apresenta dois pontos fixos, desde que $\alpha > -(1-\beta)^2/4$. A matriz Jacobiana para o mapa de Hénon é

$$L = \begin{bmatrix} -2\alpha x^* & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Logo, $\text{Tr}(\mathbf{L}) = -2\alpha x^*$ e $\det(\mathbf{L}) = -\beta$. Substituindo na Eq. (2.13) obtemos a expressão para os autovalores

$$\Lambda_{\pm} = -\alpha x^* \pm \sqrt{\alpha^2 (x^*)^2 + \beta}. \quad (2.16)$$

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos, temos de estabelecer os valores de (x^*, y^*) para os quais $|\Lambda_{\pm}| < 1$. Fazendo isso obtemos que (x_A^*, y_A^*) é um ponto fixo assintoticamente estável se $\alpha \in \left(-\frac{(1-\beta)^2}{4}, \frac{3(1-\beta)^2}{4}\right)$, enquanto que (x_B^*, y_B^*) é um ponto de sela [30].

Quando $\alpha = \frac{3(1-\beta)^2}{4}$ o ponto fixo (x_A^*, y_A^*) deixa de ser estável, o sistema passa, então, por uma bifurcação e surge um atrator de período 2. Em seguida o sistema passa por uma cascata de dobra de período, análoga àquela observada no mapa logístico.

A princípio podemos utilizar a Definição 3 para encontrar a localização de pontos periódicos de qualquer período, mesmo para sistemas de alta dimensão. Porém quanto maior a dimensão do sistema ou o período desejado, mais trabalhosa se torna essa tarefa, devido ao aumento no número de variáveis a serem determinadas e ao aumento no grau do polinômio a ser solucionado.

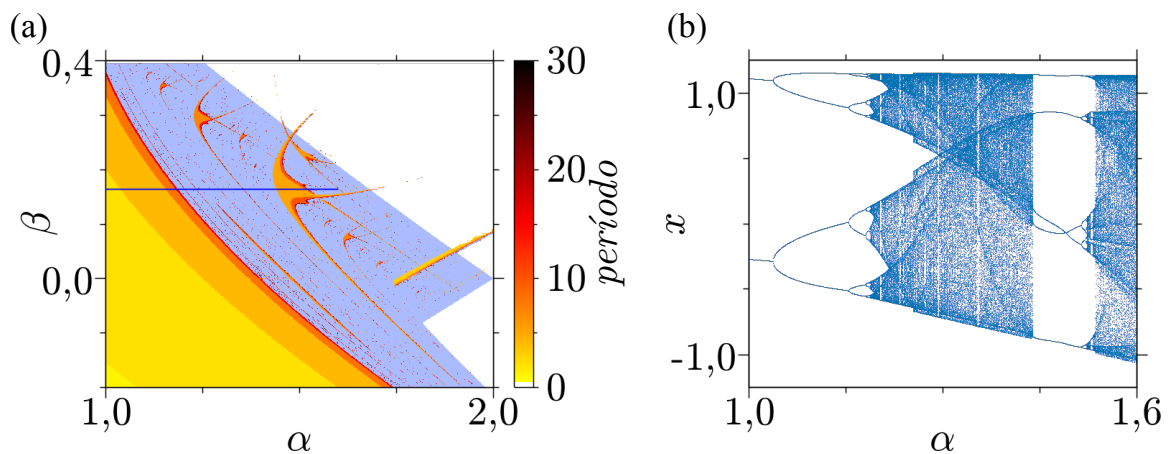
Para encontrar mudanças qualitativas no comportamento do mapa de Hénon, construímos o diagrama de órbitas modificando o valor do parâmetro a e observando a mudança no comportamento assintótico da variável x . Em alguns casos, porém, é possível realizar a variação de dois parâmetros simultaneamente, obtendo-se então um espaço de parâmetros bidimensional. Para o mapa de Hénon, o espaço de parâmetros foi investigado por Jason Gallas em um artigo de 1993 [37] utilizando diagramas isoperiódicos, em que valores de parâmetros para os quais o sistema converge para

órbitas de período igual são marcados com a mesma cor.

Na Figura 2.6(a) plotamos o espaço de parâmetros do mapa de Hénon utilizando uma grade de 1024×1024 pontos. Para cada ponto na grade iteramos a dinâmica do sistema por um tempo transiente de 2000 iteradas, então calculamos o período do atrator para o qual a órbita converge. O descarte de um valor de iteradas se faz necessário devido a um fenômeno denominado caos transiente, onde as trajetórias podem apresentar um comportamento caótico por um certo intervalo de tempo antes de convergirem para o atrator periódico. A escala de cores da Fig. 2.6(a) representa o período do atrator convergente, valores de parâmetros em que $x_t \rightarrow \infty$ são plotados em branco e órbitas aperiódicas em azul. Podemos perceber que as regiões periódicas se organizam em estruturas bem-definidas, os chamados camarões² [37].

Em seguida fixamos $\beta = 0,164$ (linha azul na Fig. 2.6(a)) e variamos o valor de α no intervalo $[1; 1,6]$ para construir o diagrama de órbitas do sistema. Novamente descartamos as primeiras 2000 iteradas, mas agora plotamos o valor de x pelas próximas 200 iteradas para cada valor de α . Podemos ver o diagrama de órbitas na Fig. 2.6(b), e a partir dele podemos notar a ocorrência da cascata de dobra de período e a existência de uma janela periódica de período 5 em $\alpha \approx 1,44$, relativa à estrutura periódica presente no espaço de parâmetros.

Figura 2.6: (a) Espaço de parâmetros do mapa de Hénon. A escala de cores é dada de acordo com o período do atrator. Na região branca $x_t \rightarrow \infty$, e na região azul o atrator é caótico. Em (b) traçamos o diagrama de órbitas fixando $\beta = 0,164$ e plotando os últimos 200 valores de x para cada valor de α .



Fonte: O autor.

Para uma definição mais rigorosa de órbitas caóticas em sistemas bidimensionais nos falta apenas definir a medida da taxa de separação de trajetórias vizinhas, ou seja, o expoente de Lyapunov. No caso de mapas unidimensionais essa medida é obtida, vide Definição 5, do módulo da derivada do mapa. A partir do comportamento da vizinhança de um ponto da trajetória após a iteração do mapa, podemos visualizar essa taxa de

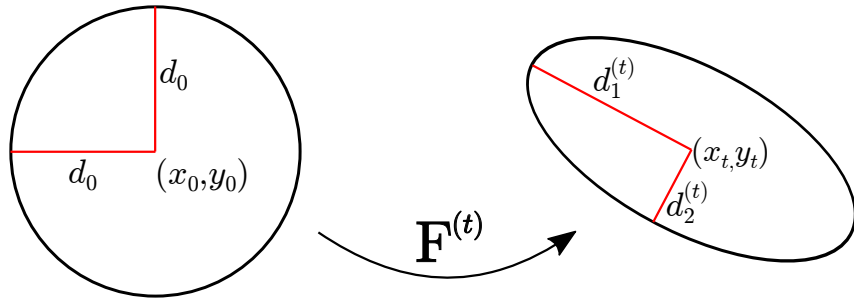
²*shrimp-shaped structures.*

separação em sistemas bidimensionais. Considerando uma disco de raio d_0 centrado no ponto (x_0, y_0) , após t iteradas do mapa esse disco se deformará em uma elipse com semi-eixos $d_1^{(t)}$ e $d_2^{(t)}$. Nesse caso, os expoentes de Lyapunov são obtidos por meio da equação [1]

$$d_j^{(t)} = d_0 e^{\lambda_j t} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d_j^{(t)}}{d_0} \right), \quad (2.17)$$

com $j = 1, 2$. Uma representação dessa situação pode ser vista no esquema da Figura 2.7.

Figura 2.7: Esquema representativo da evolução de um disco de condições iniciais no espaço de fase.



Fonte: O autor.

Definição 9 *Seja um mapa N -dimensional dado por $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$, com $\mathbf{F}$ suave em $\mathbb{R}^N$. Seja ainda $\mathbf{L}^{(t)}(\mathbf{x}_0)$ a matriz Jacobiana de $\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{x}_0)$. Definimos o k -ésimo expoente de Lyapunov como*

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{L}^{(t)}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_k\|, \quad (2.18)$$

em que $\mathbf{u}_k$ é um autovetor de $\mathbf{L}^{(t)}(\mathbf{x}_0)$ respectivo ao autovalor Λ_k e $\|\cdot\|$ é o módulo do vetor [38]. É convencional ordenar os expoentes de Lyapunov de modo que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$.

Definição 10 *Seja $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ uma órbita do mapa $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ confinada a uma região. Essa órbita será **caótica** se*

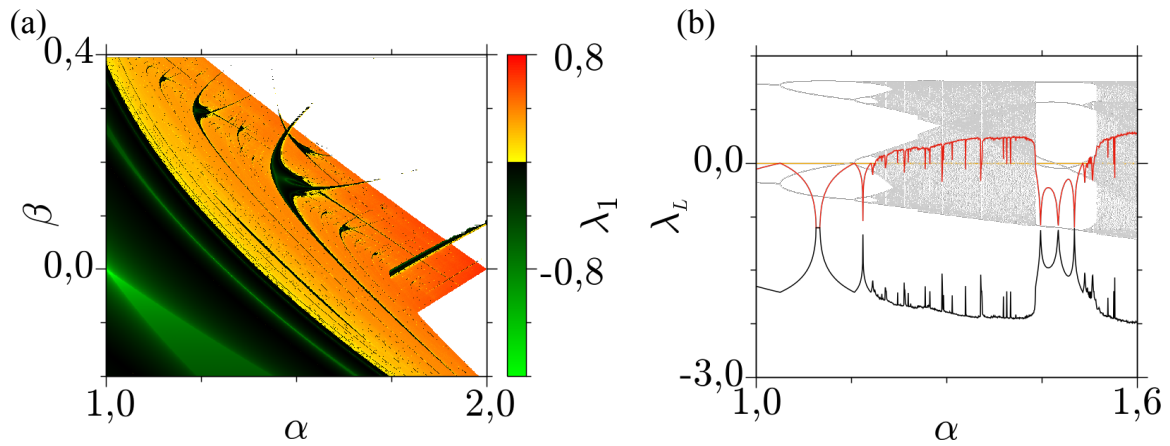
- Não for assintoticamente periódica.
- Não possuir nenhum expoente de Lyapunov nulo.
- $\lambda_1 > 0$.

Na Figura 2.8(a) plotamos o valor do maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Utilizamos uma grade de 1024 pontos para varrer os valores dos parâmetros α e β e, para cada combinação de parâmetros, iteramos o mapa por 12000 tempos. Dessas iteradas descartamos as primeiras 2000 para evitar comportamentos

transientes e utilizamos as restantes para obter uma boa convergência no valor do expoente de Lyapunov. A escala de cores da figura foi ajustada para contrastar as regiões periódicas ($\lambda_1 < 0$) e as regiões de dinâmica caótica ($\lambda_1 > 0$).

Na Figura 2.8(b) plotamos os dois expoentes de Lyapunov do sistema para uma linha dada por $\beta = 0,164$. A linha vermelha representa os valores de λ_1 e a linha preta representa os valores de λ_2 . Plotamos ainda uma linha auxiliar em laranja denotando $\lambda = 0$ para servir de guia, sendo que quando $\lambda_1 = 0$ o sistema passa por uma bifurcação. Novamente podemos comparar com o diagrama de órbitas e notar a ocorrência de órbitas caóticas quando o sistema possui um expoente de Lyapunov positivo. Outra característica que

Figura 2.8: (a) Maior expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros do mapa de Hénon. A escala de cores foi definida de modo a contrastar as regiões periódicas ($\lambda_1 < 0$) e caóticas ($\lambda_1 > 0$). Em (b) plotamos ambos os expoentes com o parâmetro $\beta = 0,164$ fixo.



Fonte: O autor.

pode ser notada é que $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Isso indica que o mapa de Hénon é um mapa dissipativo, o que tem como consequência a contração de área no espaço de fase [3, 4]. Um elemento de área A_0 no espaço de fase do sistema passa, após t iteradas do mapa, a ter uma área $A_t = A_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} < A_0$. Em mapas bidimensionais conservativos $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, nesse caso um disco de condições iniciais sofre distorções como na Figura 2.7 porém sua área permanece constante.

Agora que já temos as definições de pontos fixos e periódicos, classificação desses pontos e a definição de trajetórias caóticas, vamos seguir para o estudo das variedades e de que forma elas organizam o espaço de fase.

2.1.2 Variedades Estáveis e Instáveis

Como vimos anteriormente um ponto de sela é instável, o que significa que trajetórias próximas tendem a se afastar dele com o passar do tempo. Porém, da tabela 2.1, sabemos que o módulo de um dos autovalores no ponto de sela é menor do que a unidade. Logo, existe um conjunto de condições iniciais que podem convergir para o

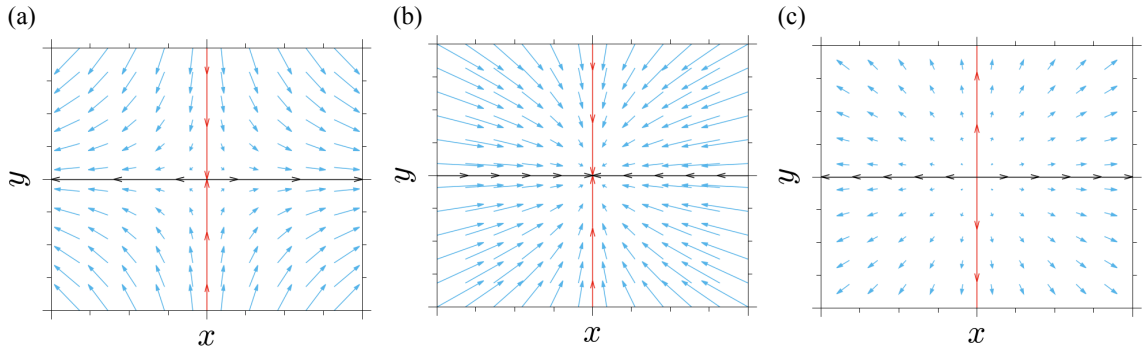
ponto de sela conforme iteramos o mapa, a esse conjunto denominamos a variedade estável da sela [3].

Para melhor visualizar como isso pode ocorrer, consideramos um mapa bidimensional linear com autovalores $|\Lambda_1| > 1 > |\Lambda_2|$ e autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, respectivamente. A solução geral para esse mapa linear, segundo a Eq. (2.3), é

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = c_1 \Lambda_1^t \mathbf{u}_1 + c_2 \Lambda_2^t \mathbf{u}_2. \quad (2.19)$$

Se iniciarmos o sistema em uma condição inicial tal que $c_1 = 0$, então $(x_t, y_t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, no caso de mapas lineares, os autovetores nos fornecem a direção em que as trajetórias se aproximam e se afastam do ponto de sela. Portanto, $\mathbf{u}_1$ está alinhada à variedade instável, que é a direção de afastamento, e $\mathbf{u}_2$ à variedade estável, a direção de aproximação. Na Figura 2.9 plotamos exemplos de variedades para pontos fixos do tipo sela, nó atrator e nó repulsivo.

Figura 2.9: Esquema representativo de variedades em mapas bidimensionais. Em (a) a origem é um ponto de sela e representamos a variedade estável pela linha vermelha, enquanto a variedade instável é a linha preta. Em (b) a origem é um nó atrator, com duas variedades estáveis. Em (c) a origem é um nó repulsivo, com duas variedades instáveis.



Fonte: O autor.

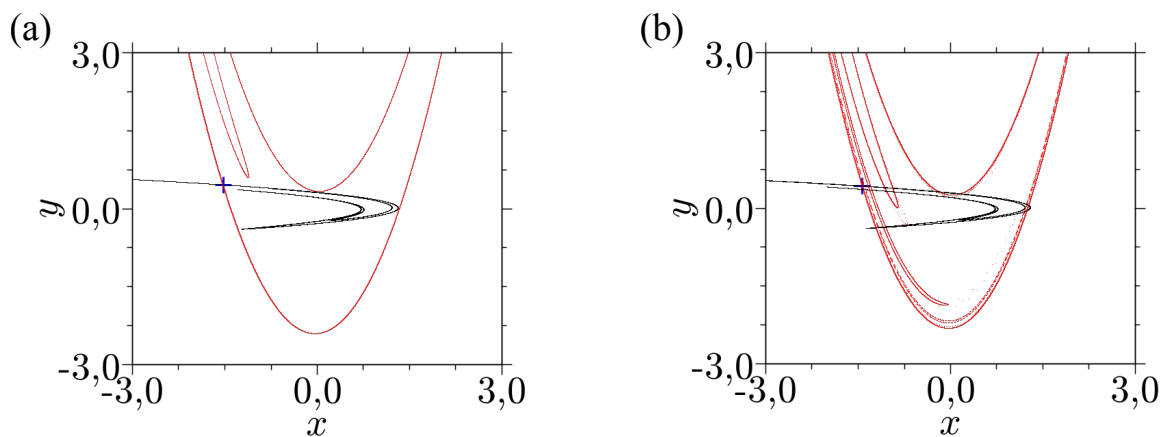
Definição 11 *Seja $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ um mapa suave invertível no $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo ou periódico do tipo sela. A **variedade estável** de $\mathbf{x}^*$ é formada pelo conjunto de pontos $\mathbf{x}^S$ tais que $|\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}^S) - \mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. A **variedade instável** de $\mathbf{x}^*$ é formada pelo conjunto de pontos $\mathbf{x}^U$ tais que $|\mathbf{F}^{(-k)}(\mathbf{x}^U) - \mathbf{F}^{(-k)}(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ [3].*

Enquanto em mapas bidimensionais lineares as variedades dos pontos de sela são linhas retas suaves que podem ser expressas por uma equação na forma $y = ax + b$, em mapas não-lineares as variedades passam a ser curvas e, na maioria das vezes, não é possível obter uma expressão analítica que as descreva, sendo necessária a aplicação de métodos numéricos para aproximá-las.

Para determinar numericamente as variedades em mapas invertíveis procedemos da seguinte forma. Primeiramente determinamos as coordenadas do ponto fixo ou periódico do tipo sela. Em seguida tomamos um pequeno quadrado ou disco de condições iniciais centrado nesse ponto. Ao iterar esse conjunto de condições iniciais a tendência é de que ele seja contraído ao longo da direção estável e seja esticado ao longo da direção instável. Após um certo tempo esse conjunto de pontos irá traçar segmentos cada vez mais longos da variedade instável. Para obter a variedade estável procedemos de forma análoga, porém iterando o mapa inverso.

Na Figura 2.10 plotamos as variedades para o ponto de sela dado pelas coordenadas (x_B^*, y_B^*) da Eq. (2.14). Os pontos vermelhos estão localizados ao longo da variedade estável e os pontos pretos ao longo da variedade instável. Em (a) a ramificação esquerda da variedade instável se prolonga de forma ilimitada em direção ao infinito, enquanto a ramificação direita se curva em direção ao atrator de período 2 e oscila em torno dele de forma errática [3]. Podemos notar que essa ramificação está inteiramente contida na região limitada pela variedade estável, não havendo cruzamento entre as variedades. Portanto, uma trajetória que inicia dentro da região limitada pela variedade estável, permanecerá no interior dessa região para tempos posteriores, convergindo para algum atrator contido ali. Os parâmetros nesse caso são $\alpha = 1,28$ e $\beta = -0,3$. Em (b) utilizamos $\alpha = 1,4$ e $\beta = -0,3$ e notamos que o comportamento qualitativo da ramificação esquerda permanece inalterado, porém a ramificação direita da variedade instável cruza a variedade estável em alguns pontos. O cruzamento de variedades estável e instável de um mesmo ponto fixo

Figura 2.10: Segmentos das variedades estáveis (em vermelho) e instáveis (em preto) do ponto de sela (cruz azul) no mapa de Hénon. Parâmetros utilizados são: (a) $\alpha = 1,28$ e $\beta = -0,3$, e (b) $\alpha = 1,4$ e $\beta = -0,3$.



Fonte: O autor.

é denominado *cruzamento homoclínico* e os pontos em que as variedades se cruzam são chamados *pontos homoclínicos*. Esses cruzamentos foram descobertos por Poincaré em suas correções ao artigo inicial que ele submeteu à premiação do Rei Oscar II [3]. Ele também notou que eles podem gerar uma grande complexidade na dinâmica do mapa.

Para ter um pequeno vislumbre do motivo dessa complexidade devemos notar que ambas as variedades são invariantes, o que significa que se um dado ponto $\mathbf{x}_h$ pertence à uma das variedades (seja ela estável ou instável) então todas as suas imagens e pré-imagens pertencem à mesma variedade. Como um ponto homoclínico pertence à ambas as variedades, logo toda a sua órbita também pertence. Da Definição 11 temos que a órbita de um ponto pertencente à variedade estável (instável) é infinita e se aproxima do ponto de sela quando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). A partir dessas informações, concluímos que se as variedades se cruzam ao menos uma vez, então elas se cruzam infinitas vezes. Dito de outra forma, se o mapa apresenta ao menos um ponto homoclínico, então ele possui infinitos pontos desse tipo.

Definição 12 *Seja $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$ um mapa suave invertível no $\mathbb{R}^N$ e sejam $\mathbf{x}_A^*$ e $\mathbf{x}_B^*$ dois pontos fixos ou periódicos distintos do tipo sela. Um ponto $\mathbf{x}_h \neq \mathbf{x}_A^*$ que pertence tanto à variedade estável quanto à variedade instável de $\mathbf{x}_A^*$ é denominado **ponto homoclínico**. Se $\mathbf{x}_h$ for um ponto homoclínico, então $\mathbf{F}^{(k)}(\mathbf{x}_h) \rightarrow \mathbf{x}_A^*$ e $\mathbf{F}^{(-k)}(\mathbf{x}_h) \rightarrow \mathbf{x}_A^*$ quando $k \rightarrow \infty$. A órbita de um ponto homoclínico é denominada **órbita homoclínica**. Um ponto na variedade estável de $\mathbf{x}_A^*$ e na variedade instável de $\mathbf{x}_B^*$ é chamado **ponto heteroclínico**, e sua órbita é denominada **órbita heteroclínica** [3].*

A complexidade que a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas gera na dinâmica do mapa se deve ao fato de que elas estendem a separação exponencial de trajetórias vizinhas, que ocorre em regiões próximas aos pontos de sela, à qualquer região do espaço de fase em que ocorram cruzamentos homoclínicos ou heteroclínicos. Portanto, esses cruzamentos possuem um papel fundamental na dinâmica caótica.

Na Definição 10 estabelecemos as características que definem uma órbita caótica. Porém, tomando como exemplo a Figura 2.5(b), iniciamos a órbita a partir de uma condição inicial e, após um certo tempo, ela converge para o atrator caótico. Ainda que a Figura 2.5(b) nos forneça uma visualização do atrator caótico, ela não é o atrator, até porque a trajetória calculada é finita enquanto o atrator é composto por infinitos pontos. Podemos definir um atrator caótico como [3, 4]

Definição 13 *Um **conjunto caótico** é o conjunto formado pela união de todos os pontos periódicos de sela e todos os pontos homoclínicos e heteroclínicos formados nos cruzamentos entre as variedades desses pontos. Um **atrator caótico** é um conjunto caótico que atrai um conjunto de condições iniciais de medida não nula, denominado **bacia de atração do atrator**.*

Na próxima seção vamos explorar e definir os pontos fixos e periódicos em sistemas de tempo contínuo. Nesse tipo de sistema, as condições necessárias para ocorrência de dinâmica caótica são diferentes, porém, como veremos, sob certas condições existem equivalências entre ambos os casos.

2.2 Fluxos

Sistemas em que o tempo é uma variável contínua são descritos por equações diferenciais. Aqui estamos interessados no comportamento de sistemas cuja dinâmica, para o caso N -dimensional, pode ser obtida resolvendo uma equação na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

em que utilizamos o ponto para representar a derivada temporal, $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_N]^T$ é um vetor cujos elementos são a taxa de variação das variáveis dependentes $x_1, x_2, \dots, x_N$, e o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ \dots \ f_N(\mathbf{x})]^T$ é uma matriz coluna cujos elementos nos fornecem as funções que governam as taxas de variação. Como podemos interpretar uma equação diferencial como um campo vetorial no espaço de fase [32], que acaba se assemelhando ao escoamento de um fluido, a Eq. (2.20) também é chamada de fluxo.

A Eq. (2.20) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, pois não apresenta termos derivados de ordem maior do que um. Nos casos em que $\mathbf{F}$ não depende explicitamente do tempo, a equação também é denominada como autônoma. Apesar de aparentemente essas qualificações restringirem o alcance da análise sobre funções na forma da Eq. (2.20), uma grande variedade de sistemas que apresentam termos derivados de ordens superiores ou são equações não-autônomas podem ser reescritos nessa forma por meio de mudanças de variáveis [3].

Equações diferenciais podem ainda ser classificadas como lineares e não-lineares, dependendo se $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ possui apenas termos lineares de $\mathbf{x}$ ou não. Seja uma equação diferencial linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.21)$$

em que $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes e $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_N]^T$ fornece a taxa de variação das variáveis dependentes na origem. Admitindo que $\mathbf{A}$ seja invertível e fazendo uma transformação de variáveis $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$, obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}},$$

e podemos reescrever a Equação (2.21) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Essa forma da equação é mais conveniente porque na origem temos $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Considerando uma solução na forma $\mathbf{x}(t) = e^{\Lambda t}\mathbf{u}$, sendo Λ uma constante e $\mathbf{u} \neq 0$ um vetor a serem determinados, chegamos em

$$\begin{aligned} \Lambda e^{\Lambda t}\mathbf{u} &= e^{\Lambda t}\mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \text{ou} \\ \Lambda\mathbf{u} &= \mathbf{A}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Portanto, a solução proposta satisfaz a Eq. (2.22) desde que Λ seja um autovalor de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{u}$ o autovetor correspondente.

Como $\mathbf{A}$ é uma matriz $N \times N$ não-singular, ela possui N autovalores. Considerando o caso mais simples, em que os autovalores possuem valores distintos e reais, a solução geral para a Eq. (2.22) é descrita por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\Lambda_i t} \mathbf{u}_i, \quad (2.24)$$

em que c_i são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais do sistema.

Mesmo que $\mathbf{A}$ apresente autovalores degenerados ou complexos, as equações diferenciais lineares apresentam soluções analíticas, entretanto as não-lineares nem sempre possuem esse tipo de solução, porém isso não significa que tais equações não tenham solução. Sua solução é garantida pelo teorema de existência e unicidade, enunciado a seguir.

Teorema 3 *Considere uma equação diferencial N -dimensional na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, com condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Suponha que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ seja contínua e que todas as suas derivadas parciais $\partial f_i / \partial x_j$, com $i, j = 1, \dots, N$, sejam contínuas para $\mathbf{x}$ em algum conjunto aberto conexo $D \subset \mathbb{R}^N$. Então para $\mathbf{x}_0 \in D$, a equação diferencial tem uma solução $\mathbf{x}(t)$ em um intervalo $(-\tau, \tau)$ centrado em $t = 0$, e essa solução é única [32].*

De maneira geral fluxos não-lineares são solucionados utilizando métodos de integração numérica. Em muitos casos é possível aproximar o comportamento de sistemas não-lineares por meio de uma linearização do fluxo nos pontos fixos. Contudo, ao fazermos isso acabamos perdendo certos comportamentos particulares ao sistema não-linear [39]. Na próxima seção apresentaremos esse método em mais detalhes.

2.2.1 Pontos Fixos e Órbitas Periódicas

Um sistema da forma da Eq. (2.20) pode apresentar pontos especiais, em que a taxa de variação das variáveis é nula. Assim como no caso dos mapas, tais pontos são denominados *pontos fixos*, e vamos utilizá-los para obter informações sobre a dinâmica dos sistemas.

Definição 14 *Dada uma equação diferencial na forma da Eq. (2.20), um ponto $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ x_2^* \ \dots \ x_N^*]^T$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = [f_1(\mathbf{x}^*) \ f_2(\mathbf{x}^*) \ \dots \ f_N(\mathbf{x}^*)]^T = \mathbf{0}$ é denominado **ponto fixo**, ou **ponto crítico**, da equação.*

Consideramos como exemplo o movimento de uma partícula sujeita a um potencial $V(x) = -ax^2 + bx^4$, também conhecido como potencial de Duffing³ [3] ou potencial de

³Em homenagem a Georg Duffing (1861-1944).

poço duplo. Admitindo uma partícula de massa unitária, a equação de movimento é dada por

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{dV}{dx}, \\ \ddot{x} &= -4bx^3 + 2ax, \end{aligned} \quad (2.25)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem e $a, b > 0$ são os parâmetros do potencial. Definindo uma nova variável $v = \dot{x}$, podemos reescrever a Eq. (2.25) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -4bx^3 + 2ax, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que passamos a ter um sistema de equações bidimensional não-linear (se $b = 0$ o sistema passa a ser linear) na forma da Eq. (2.20). A Eq. (2.26) apresenta três pontos fixos, localizados em $(x_{A,B}^*, v_{A,B}^*) = (\pm\sqrt{a/2b}, 0)$ e $(x_C^*, v_C^*) = (0, 0)$.

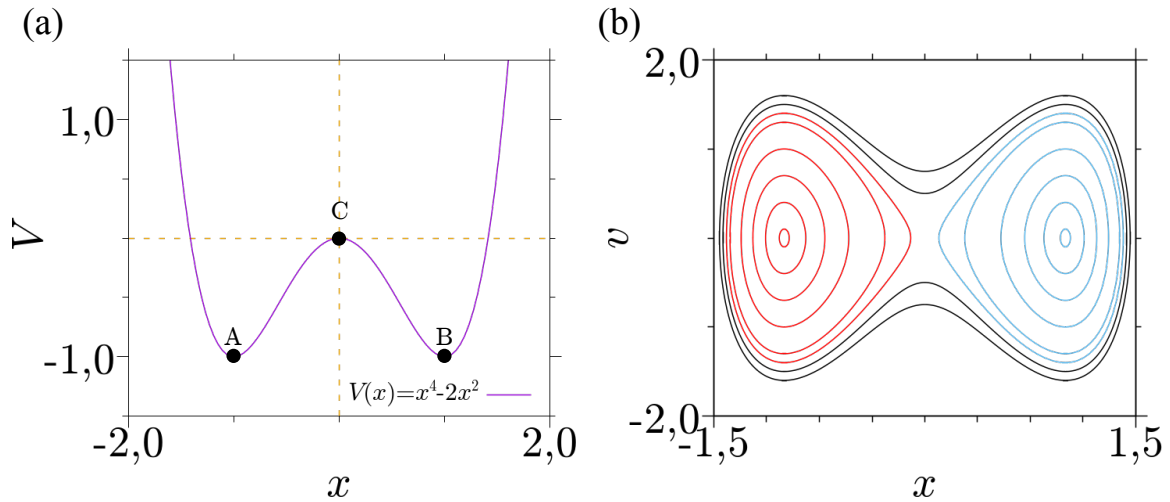
Na Figura 2.11(a) plotamos $V(x)$ considerando $a = 2, 0$ e $b = 1, 0$. Da figura podemos ver que os pontos fixos equivalem a pontos de máximo e mínimo do potencial. Intuitivamente sabemos que o ponto fixo C é mais instável que os pontos A e B . Isso ocorre porque C é um máximo local do potencial, enquanto A e B são mínimos. Essa instabilidade se apresenta ao aplicarmos uma perturbação à partícula inicialmente em C . Tal perturbação resultará no surgimento de uma força que faz com que a partícula se afaste do ponto fixo. Se a partícula está localizada inicialmente em A ou B , a aplicação de uma perturbação resulta em uma força que a direciona novamente ao ponto fixo.

Na Figura 2.11(b) plotamos o retrato de fase de uma partícula sujeita ao potencial ilustrado em (a). Esse tipo de diagrama é uma representação geométrica de todas as trajetórias de um sistema dinâmico no plano, sendo os eixos dados pelas variáveis do sistema. Na figura as linhas vermelhas (azuis) representam trajetórias de energia constante no espaço de fase que ficam oscilando em torno do ponto fixo localizado em $x^* = -1$ ($x^* = 1$) e $v^* = 0$, permanecendo confinadas ao poço esquerdo (direito) do potencial. As linhas pretas representam trajetórias com energia suficiente para superar a barreira entre os poços e, portanto, não ficam mais confinadas a um poço em particular. Da Figura 2.11(b) podemos notar ainda que o ponto fixo em $(0, 0)$ se caracteriza como divisor entre os diferentes tipos de trajetórias.

Para uma definição mais rigorosa de estabilidade utilizamos o método da estabilidade linear, em que analisamos os autovalores da matriz Jacobiana no ponto fixo. Assim como no caso dos mapas, a matriz Jacobiana, ou matriz de estabilidade [4], é uma matriz quadrada cujos elementos são derivadas parciais de primeira ordem da função que define o fluxo em relação às variáveis [3].

Definição 15 *Seja um sistema de equações diferenciais N -dimensional dado por (2.20).*

Figura 2.11: (a) O potencial $V(x) = x^4 - 2x^2$. (b) Retrato de fase de uma partícula sujeita a esse potencial. Em (b) as linhas vermelhas (azuis) representam trajetórias confinadas ao poço esquerdo (direito) do potencial, enquanto as linhas pretas representam as trajetórias com energia suficiente para transitar em ambos os poços. Os parâmetros utilizados são: $a = 2,0$ e $b = 1,0$.



Fonte: O autor.

Define-se a **matriz Jacobiana** (ou simplesmente *Jacobiana*) $\mathbf{J}$ do sistema como sendo

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \dots & \partial f_1 / \partial x_N \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \dots & \partial f_2 / \partial x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial x_1 & \partial f_N / \partial x_2 & \dots & \partial f_N / \partial x_N \end{pmatrix}.$$

Por se tratar de um método de primeira ordem, com a estabilidade linear obtemos informações a respeito de trajetórias em uma vizinhança ao redor dos pontos fixos. O motivo dessa limitação se torna mais aparente ao definirmos uma nova variável $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$. Substituindo na Eq. (2.20) obtemos

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{x}' + \dots, \quad (2.27)$$

onde realizamos a expansão em série de Taylor de $\mathbf{F}$, e $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ é a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo. Como, pela definição de ponto fixo, $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$, e visto que nas vizinhanças do ponto fixo $\mathbf{x}' \rightarrow 0$, podemos desprezar os termos de maior ordem da expansão e obter

$$\dot{\mathbf{x}}' \approx \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{x}'. \quad (2.28)$$

Definição 16 Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ é denominado **hiperbólico** se nenhum dos autovalores da matriz $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ tem parte real nula [3].

Comparando com a Eq. (2.22), notamos que nas vizinhanças de um ponto fixo hiperbólico os sistemas não lineares se comportam aproximadamente como um sistema

linear com $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$. De fato, isso é demonstrado no teorema:

Teorema 4 *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo hiperbólico de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Então existe uma vizinhança de $\mathbf{x}^*$ em que o retrato de fase do sistema não linear se assemelha ao do sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{x}$ [31].*

Apesar de garantir a existência de uma vizinhança do ponto hiperbólico em que existe uma correspondência entre os retratos de fase, o teorema 4 não indica o tamanho dessa vizinhança. Isso é importante porque os autovetores fornecem as direções das variedades no espaço de fase. Enquanto nos sistemas lineares o ângulo entre as variedades é constante, no caso não-linear isso é verdade apenas dentro da vizinhança do ponto fixo.

Definição 17 *Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ é dito **estável** se qualquer condição inicial $\mathbf{x}_0$ que esteja nas vizinhanças de $\mathbf{x}^*$ tem a propriedade de que sua trajetória permanece nessa vizinhança para qualquer $t \geq 0$. Caso a trajetória se aproxime de $\mathbf{x}^*$ quando $t \rightarrow \infty$, então o ponto fixo é **assintoticamente estável**. Um ponto fixo é denominado **instável** caso ele não seja estável [3].*

Novamente utilizaremos os autovalores da matriz Jacobiana para classificar os pontos fixos. Assim como nos mapas, os autovalores da Jacobiana de fluxos bidimensionais são obtidos resolvendo a equação

$$\Lambda_{\pm}^2 - \text{Tr}(\mathbf{J})\Lambda_{\pm} + \det(\mathbf{J}) = 0, \quad (2.29)$$

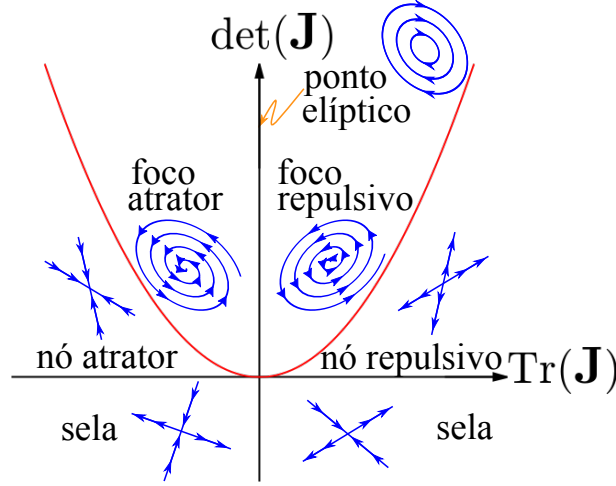
de onde chegamos em

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{J}) \pm \sqrt{(\text{Tr}(\mathbf{J}))^2 - 4 \cdot \det(\mathbf{J})}}{2}. \quad (2.30)$$

Teorema 5 *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Se a parte real dos autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ é estritamente negativa, então $\mathbf{x}^*$ é **assintoticamente estável**. Se a parte real de ao menos um autovalor for positiva, então ele é **instável** [3].*

Na Figura 2.12 apresentamos os principais tipos de pontos fixos em um sistema bidimensional, classificados de acordo com a Eq. (2.30). A parábola vermelha da figura é dada por $\text{Tr}(\mathbf{J})^2 - 4 \cdot \det(\mathbf{J}) = 0$. Quando a Jacobiana possui $\text{Tr}(\mathbf{J}) = 0$ o sistema é conservativo e são permitidos apenas pontos hiperbólicos e pontos elípticos no espaço de fase. Se $\text{Tr}(\mathbf{J}) < 0$ então o sistema passa a ser dissipativo e a contar com a presença de atratores, e se $\text{Tr}(\mathbf{J}) > 0$ então passam a existir pontos repulsivos. Existem, ainda, alguns casos especiais que ocorrem quando $4 \cdot \det(\mathbf{J}) = \text{Tr}(\mathbf{J})^2$, denominado nó impróprio, ou $\det(\mathbf{J}) = 0$, em que existem infinitos pontos fixos ao longo de uma reta no espaço de fase.

Figura 2.12: Esquema ilustrativo dos tipos de pontos fixos presentes em fluxos bidimensionais. A parábola vermelha é dada por $\text{Tr}(\mathbf{J})^2 - 4 \cdot \det(\mathbf{J}) = 0$.



Fonte: O autor.

Na Tabela 2.2 sintetizamos a classificação dos pontos fixos com base nos autovalores de $\mathbf{J}$. A partir da tabela e da Figura 2.12 vemos que um ponto fixo pode ser considerado instável quando ao menos um de seus autovalores possui parte real positiva, se a parte real dos autovalores for negativa então o ponto fixo é considerado estável. Caso ambos os autovalores sejam nulos o ponto fixo é denominado ponto marginal e sua estabilidade deve ser determinada utilizando métodos de ordem superior.

Tabela 2.2: Classificação dos pontos fixos em um sistema bidimensional de tempo contínuo.

	$\text{Re}(\Lambda_{\pm}) > 0$	$\text{Re}(\Lambda^{(1)}) > 0 > \text{Re}(\Lambda^{(2)})$	$\text{Re}(\Lambda_{\pm}) < 0$	$\text{Re}(\Lambda_{\pm}) = 0$
$\text{Im}(\Lambda_{\pm}) = 0$	nó repulsivo	ponto de sela	nó atrator	ponto marginal
$\text{Im}(\Lambda_{\pm}) \neq 0$	foco repulsivo	–	foco atrator	ponto elíptico

Analisando os pontos fixos da Eq. (2.26), a Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(v) & \frac{\partial}{\partial v}(v) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-4bx^3 + 2ax) & \frac{\partial}{\partial v}(-4bx^3 + 2ax) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-12bx^2 + 2a) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

cujos autovalores são dados por $\Lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-12bx^2 + 2a}$. Substituindo os valores de (x^*, v^*) para os três pontos fixos do sistema, obtemos $\Lambda_{\pm}^{A,B} = \pm 2i\sqrt{a}$ para os pontos A e B , e $\Lambda_{\pm}^C = \pm\sqrt{2a}$ para o ponto C , em que $i^2 = -1$ é a unidade imaginária. Portanto, os pontos fixos A e B são pontos *elípticos* (apresentam autovalores imaginários) enquanto que o ponto C é um ponto de sela (possui autovalores reais, sendo um positivo e outro negativo) [4].

Como na Equação (2.26), da partícula sujeita ao potencial de Duffing, não existe qualquer tipo de perda de energia, as trajetórias resultantes possuem energia constante e o sistema é conservativo. Ainda que não se observe dinâmica caótica na Equação (2.26),

consequência do teorema de Poincaré-Bendixson que veremos mais à frente, o estudo de caos em sistemas conservativos é um importante tópico de pesquisa dentro da área de sistemas dinâmicos. Porém neste trabalho não nos aprofundaremos na análise desse tipo de sistema, pois estamos mais interessados nos sistemas ditos dissipativos. Para transformar a dinâmica de uma partícula sujeita ao potencial de Duffing em um sistema dissipativo adicionamos um termo de dissipação na forma $-\mu v$ na função da taxa de variação da velocidade da Equação (2.26). A dinâmica passa a ser dada de acordo com

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\mu v - 4bx^3 + 2ax,\end{aligned}\tag{2.32}$$

em que $\mu > 0$ é o coeficiente de dissipação.

A localização dos pontos fixos permanece inalterada, porém devido a presença do termo de dissipação a trajetória da partícula eventualmente convergirá para o ponto fixo em A ou em B . Esse comportamento é característico de sistemas dissipativos e esses pontos fixos passam a ser assintoticamente estáveis, ou simplesmente *atratores*. A matriz Jacobiana nesse caso é

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-12bx^2 + 2a) & -\mu \end{bmatrix},\tag{2.33}$$

com autovalores dados por $\Lambda_{\pm} = [\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(12bx^2 - 2a)}]/2$. Substituindo novamente os valores de (x^*, v^*) para os três pontos fixos do sistema, obtemos

$$\Lambda_{\pm}^{A,B} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 4a},\tag{2.34}$$

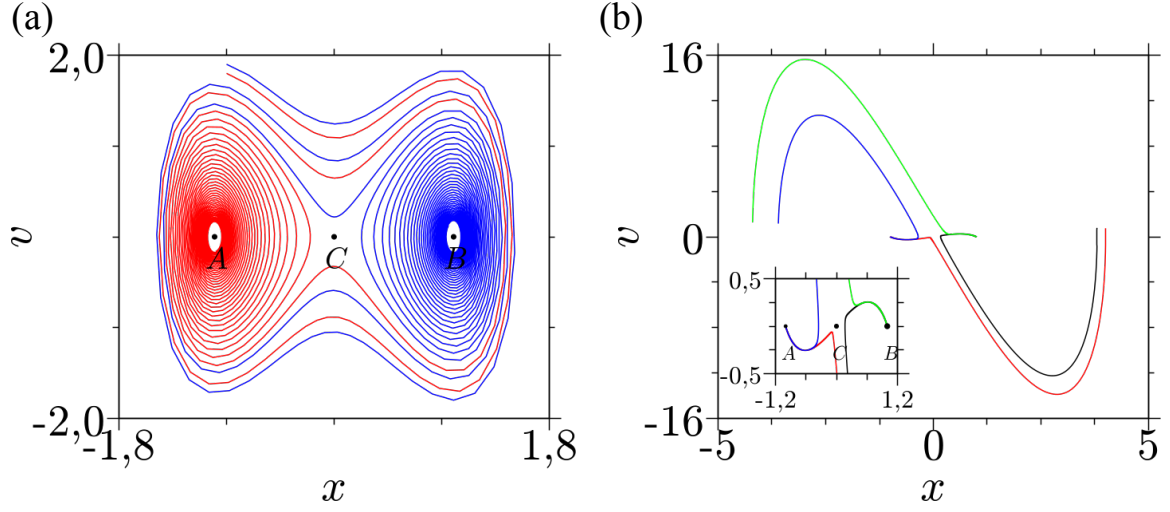
para os pontos A e B , e

$$\Lambda_{\pm}^C = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + 2a},\tag{2.35}$$

para o ponto C . Logo, o ponto C permanece sendo um ponto de sela, os pontos A e B , porém, não são mais pontos elípticos, visto que agora possuem parte real não-nula [4].

O fato de $\text{Re}(\Lambda_{\pm}^{A,B}) < 0$ mostra que ambos os pontos A e B atraem trajetórias em suas vizinhanças, o que confirma que são atratores. Se $\mu^2 < 16a$ eles são do tipo *foco atrator*, e se $\mu^2 \geq 16a$ eles são do tipo *nó atrator* [4]. Nas Figuras 2.13 (a) e (b) plotamos algumas trajetórias no espaço de fase quando os pontos fixos são, respectivamente, focos atratores e nós atratores. Novamente utilizamos os parâmetros $a = 2$ e $b = 1$, e coeficiente de dissipação $\mu = 0,05$ e $\mu = 6,0$, respectivamente. Em (a) podemos notar que as duas trajetórias, vermelha e azul, iniciam e permanecem próximas até se aproximarem do ponto de sela, a partir do qual elas divergem e passam a convergir aos atratores formando espirais, o que é uma característica de um foco atrator. Em (b) o valor do coeficiente de dissipação é tal que os pontos fixos passam a ser nós atratores, nesse caso ao se aproximar dos pontos fixos as trajetórias apresentam uma direção preferencial de convergência.

Figura 2.13: Trajetórias da Eq. (2.32). Em (a) ambos os pontos fixos A e B são do tipo foco atrator, enquanto em (b) são do tipo nó atrator. Parâmetros utilizados são: (a) $\mu = 0,05$ e (b) $\mu = 6,0$.



Fonte: O autor.

Sistemas que possuem mais de um atrator são denominados multiestáveis e seu estado assintótico depende da condição inicial. Nesses casos ocorre a coexistência das bacias de atração de cada um dos atratores no espaço de fase. A forma com que as bacias de atração se organizam será abordada com mais detalhes na Seção 2.4.

Além de pontos fixos, fluxos bidimensionais podem apresentar um outro tipo de atrator, chamado *ciclo limite*. Para ilustrá-lo consideramos uma partícula sujeita a um potencial $V(\theta) = -a\theta - b\cos(\theta)$, que representa a dinâmica de um pêndulo sujeito a um torque constante [4]. Novamente considerando uma massa unitária e uma dissipação $-\mu v_\theta$, a equação de movimento da partícula será

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= v_\theta, \\ \dot{v}_\theta &= -\mu v_\theta + a - b\sin(\theta).\end{aligned}\tag{2.36}$$

No caso em que $a = 0$ os pontos fixos estão localizados em $v_\theta^* = 0$ e $\theta^* = \sin^{-1}(0) = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. A presença do forçamento constante faz com que os pontos fixos sejam deslocados por uma quantidade $\Delta = \sin^{-1}(a/b)$ e a coordenada angular dos pontos fixos passa a ser $\theta_A^* = 2n\pi + \Delta$ e $\theta_B^* = (2n+1)\pi - \Delta$.

Procedendo de forma similar ao caso anterior, a matriz Jacobiana da Eq. (2.36) é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b\cos(\theta) & -\mu \end{bmatrix},\tag{2.37}$$

com autovalores $\Lambda_{\pm} = -\mu/2 \pm \sqrt{(\mu/2)^2 - b\cos(\theta)}$. Substituindo os valores de $\theta_{A,B}^*$,

podemos reescrever o termo do cosseno como

$$\begin{aligned}\cos(\theta_A^*) &= \cos(\Delta) = \sqrt{1 - \sin^2(\Delta)} = \sqrt{1 - (a/b)^2}, \quad \text{e} \\ \cos(\theta_B^*) &= -\cos(\Delta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\Delta)} = -\sqrt{1 - (a/b)^2}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}\Lambda_{\pm}^A &= -\mu/2 \pm \sqrt{(\mu/2)^2 - \sqrt{b^2 - a^2}}, \quad \text{e} \\ \Lambda_{\pm}^B &= -\mu/2 \pm \sqrt{(\mu/2)^2 + \sqrt{b^2 - a^2}}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Considerando $a < b$, então $\text{Re}(\Lambda_{\pm}^A) < 0$ e concluímos que o ponto A é um ponto fixo estável, enquanto que o ponto B é um ponto instável do tipo sela, pois $\Lambda_+^B > 0 > \Lambda_-^B$.

Na Figura 2.14(a) plotamos o potencial $V(\theta)$ para $a = 0,25$ e $b = 1,0$ no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$, podemos notar que o potencial se assemelha a uma descida irregular. Substituindo esses valores de parâmetros na Eq. (2.39), com coeficiente de dissipação $\mu = 0,15$, obtemos os autovalores $\Lambda_{\pm}^A \approx -0,075 \pm 0,981i$, $\Lambda_+^B \approx 0,912$ e $\Lambda_-^B \approx -1,062$, o que nos mostra que A é um foco atrator e B é um ponto de sela.

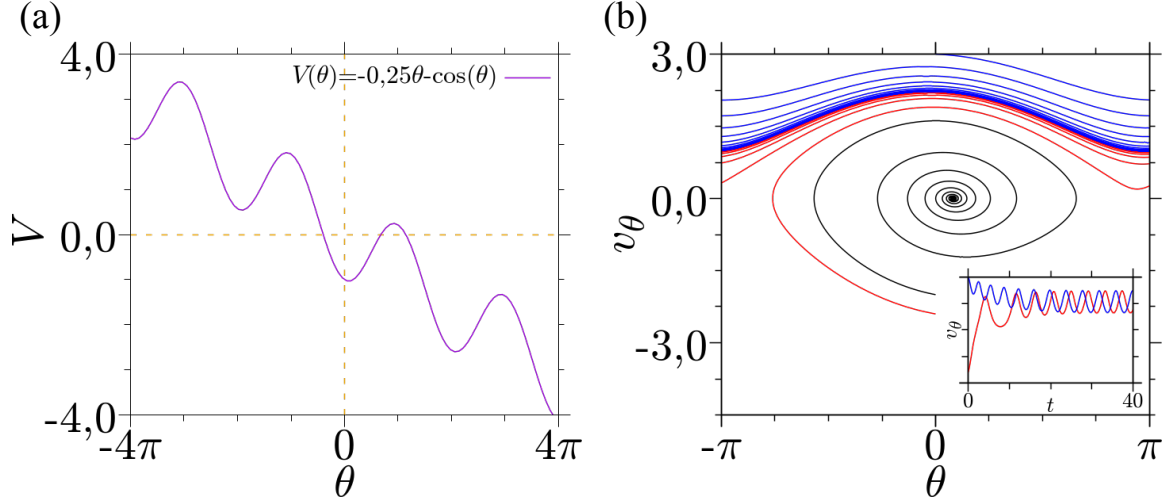
Na Figura 2.14(b) podemos ver a evolução temporal de três condições iniciais distintas no espaço de fase. Como a variável θ é periódica nos mantivemos no intervalo $[-\pi, \pi]$ por meio da transformação $\theta : \pi + \delta \rightarrow -\pi + \delta$. A linha preta representa uma trajetória que inicia no ponto $\theta_0 = 0$ e $v_\theta = -2,0$ e converge para o foco atrator no ponto A segundo uma trajetória espiral. As linhas vermelha e azul são trajetórias que começam no ponto $\theta_0 = 0$ e $v_\theta = -2,4$, e $\theta_0 = 0$ e $v_\theta = 3,0$, respectivamente, porém não convergem para o foco atrator. Na inserção da Figura 2.14(b) plotamos a série temporal da velocidade angular e podemos notar que, no caso das trajetórias representadas pelas linhas vermelha e azul, v_θ passa a oscilar periodicamente no tempo. Ao invés de convergir para o foco estável essas trajetórias passam a exibir um movimento periódico chamado *ciclo limite*.

Definição 18 *Uma solução periódica isolada de uma equação diferencial na forma da Eq. (2.20) é denominada ciclo limite [31]. Um ciclo limite pode ser classificado como:*

- *Estável* - atrai um conjunto de condições iniciais em ambos os lados do ciclo limite.
- *Instável* - repele as condições iniciais em ambos os lados do ciclo limite
- *Semiestável* - atrai um conjunto de condições iniciais em um dos lados do ciclo limite e repele as do outro.

Em fluxos bidimensionais o espaço de fase pode ser entendido em termos de pontos fixos e ciclos limites. Ao contrário dos sistemas de tempo discreto, não é possível a existência de órbitas caóticas no caso bidimensional [3, 32]. Porém, como sabemos da Eq. (1.2) do sistema de Lorenz, basta que o espaço de fase seja aumentado em uma dimensão para que passem a ser admitidas órbitas caóticas.

Figura 2.14: (a) O potencial $V(\theta) = -0,25\theta - \cos(\theta)$. Em (b) plotamos três trajetórias que iniciam em $\theta = 0$, a linha preta possui velocidade inicial $v_\theta(0) = -2,0$, a linha vermelha $v_\theta(0) = -2,4$ e a linha azul $v_\theta(0) = 3,0$. Na inserção plotamos a série temporal de v_θ para as trajetórias que convergem para o ciclo limite. Parâmetros utilizados são: $a = 0,25$ e $b = 1,0$.



Fonte: O autor.

Tomando como exemplo novamente o movimento da partícula sujeita ao potencial de Duffing, Eq. (2.32), se adicionarmos um forçamento dependente do tempo agindo sobre a partícula a dinâmica passa a ser governada por um sistema não-autônomo de equações (o tempo aparece de forma explícita). Considerando um forçamento periódico senoidal, a equação do movimento da partícula será

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\mu v - 4bx^3 + 2ax + f_0 \sin(\omega t),\end{aligned}\tag{2.40}$$

em que f_0 é a intensidade do forçamento e ω é a frequência. Esse sistema pode ser escrito na forma de um sistema autônomo por meio da definição de uma nova variável $\tau = \omega t$. Assim, a presença do forçamento faz com o fluxo passe a ser dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\mu v - 4bx^3 + 2ax + f_0 \sin(\tau), \\ \dot{\tau} &= \omega,\end{aligned}\tag{2.41}$$

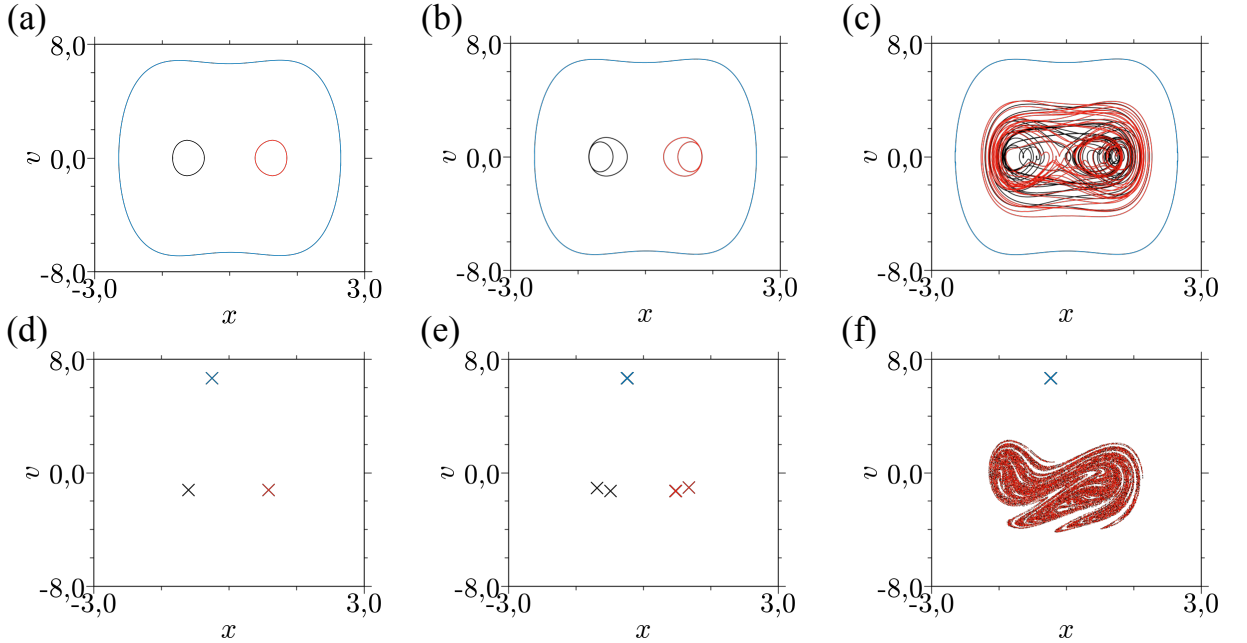
que é tridimensional. Ao contrário da Eq. (2.32), a equação (2.41) não apresenta pontos fixos (exceto para os casos em que $f_0 = 0$ ou $\omega = 0$, em que voltamos ao caso sem forçamento), e a trajetória resultante depende do conjunto de todos os parâmetros do sistema.

Nas Figuras 2.15(a)-(c) plotamos uma projeção dos atratores da Eq. (2.41) no plano $x \times v$ com diferentes valores da intensidade do forçamento, sendo os outros parâmetros fixados em $a = 2$, $b = 1$, $\mu = 0,05$ e $\omega = 3,5$. Quando $f_0 = 2,1$ o sistema possui três

atratores do tipo ciclo limite com período $T = 2\pi/\omega$, um em cada poço de potencial, que podemos ver como as linhas preta e vermelha em (a), e outro capaz de oscilar por ambos os poços. Aumentando a intensidade do forçamento para $f_0 = 2,2$ os atratores no interior do poços passam por uma bifurcação de dobra de período, Figura 2.15(b), e passam a ter período $T = 4\pi/\omega$, que é o dobro do caso anterior. Por esse motivo dizemos que essa é uma órbita de período 2. Apesar disso o ciclo-limite externo não sofre qualquer alteração. Para $f_0 = 2,3$ ambas as trajetórias em preto e vermelho não apresentam período. Plotamos essas órbitas na Figura 2.15(c) e podemos ver que é uma tarefa complicada compreendê-la observando apenas esse gráfico. Novamente o ciclo-limite externo permanece inalterado.

Uma técnica para auxiliar na compreensão de caos em fluxos é denominada seção de Poincaré, também chamado de mapa de Poincaré [3]. Um mapa de Poincaré é dado pela interseção da trajetória com uma seção transversal ao fluxo. Por meio do mapa de Poincaré podemos diminuir a dimensão das trajetórias no espaço de fase. Em sistemas com forçamento periódico uma escolha natural para a seção de Poincaré é a utilização do período do forçamento. Nas Figuras 2.15(d)-(f) plotamos o mapa de Poincaré das

Figura 2.15: Em (a)-(c) plotamos a projeção dos atratores da Eq. (2.41) no plano $x \times v$ com intensidade do forçamento (a) $f_0 = 2,1$, (b) $f_0 = 2,2$ e (c) $f_0 = 2,3$. Em (d)-(f) plotamos a seção de Poincaré, definida por $\tau \pmod{2\pi} = 0$, para os atratores de (a)-(c). Demais parâmetros utilizados são $a = 2$, $b = 1$, $\mu = 0,05$ e $\omega = 3,5$.



Fonte: O autor.

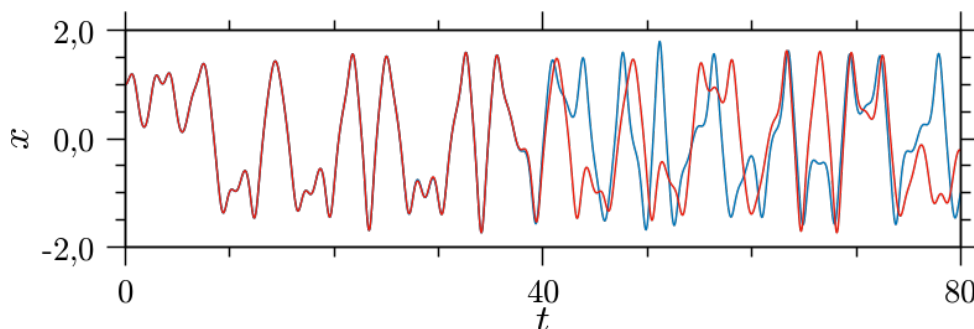
trajetórias presentes em (a)-(c). Para tal, plotamos os pontos em que as trajetórias cruzam o plano $\tau = 0 \pmod{2\pi}$. De forma geral, uma órbita de período n cruza a seção de Poincaré em n pontos distintos, então podemos caracterizar a dinâmica utilizando os valores de x e v quando a trajetória cruza a seção de Poincaré.

Nas Figuras 2.15(d) e (e) podemos notar a existência de um ponto correspondente

aos ciclos-limite de período 1 e dois pontos correspondentes ao de período 2. Na Figura 2.15(f) plotamos o mapa de Poincaré do atrator existente para $f_0 = 2,3$. Nesse caso utilizamos uma órbita muito mais longa da utilizada em (c), e visivelmente a estrutura observada é muito mais complexa que os casos anteriores, ocupando uma região muito maior do espaço. Essa complexidade se deve ao fato de que para esse valor de parâmetros a trajetória converge para um atrator caótico [40], que cruza a seção de Poincaré em infinitos pontos distintos.

Como vimos no caso dos mapas, atratores caóticos são caracterizados por não apresentarem período, possuírem estrutura fractal e exibirem um distanciamento exponencial de trajetórias vizinhas [3, 4]. Essa última condição se reflete na sensibilidade às condições iniciais presente nesses atratores. Na Figura 2.16 plotamos a série temporal para duas trajetórias com diferença de 10^{-6} no valor de x_0 e podemos notar que essa diferença cresce de forma que, em $t \approx 43$, as trajetórias passam a estar em poços diferentes do potencial. A partir deste instante de tempo elas passam a ficar descorrelacionadas. Mesmo com o distanciamento exponencial de trajetórias vizinhas,

Figura 2.16: Série temporal de duas trajetórias da Eq. (2.41) com diferença de 10^{-6} em suas condições iniciais. Parâmetros utilizados são: $a = 2$, $b = 1$, $\mu = 0,05$, $\omega = 3,5$ e $f_0 = 2,3$.



Fonte: O autor.

ambas as condições iniciais convergem para o mesmo atrator. O que significa que a seção de Poincaré em ambos os casos será qualitativamente igual à Figura 2.15(f).

Podemos estender a definição de expoente de Lyapunov de mapas para incluir fluxos utilizando o mesmo procedimento do disco de condições iniciais da Eq. (2.17), porém aqui considerando um volume. No caso de fluxos tridimensionais, que é o caso do sistema de Duffing amortecido com forçamento periódico, sempre existe um expoente de Lyapunov nulo, devido à expansão nula na direção do fluxo [3, 4], e o caos é definido quando o sistema apresenta um expoente de Lyapunov positivo. Em razão dessas definições não serem obrigatoriamente necessárias para a compreensão dos resultados do presente trabalho optamos por não nos prolongar nessas definições.

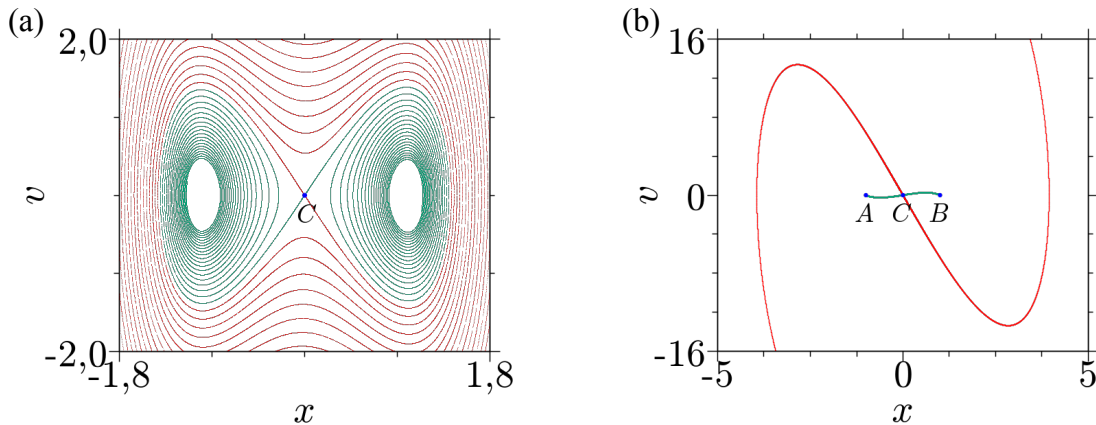
Assim como fizemos para os mapas bidimensionais, na próxima seção discutiremos o comportamento das variedades estáveis e instáveis em fluxos.

2.2.2 Variedades Estáveis e Instáveis

Em ambos os casos da Fig. 2.13 existe apenas um ponto fixo do tipo sela, o ponto C . Como vimos anteriormente, tal ponto possui duas linhas que definem as direções de atração e repulsão de trajetórias que se aproximam de C . Sobre o ponto C , as direções dessas linhas são dadas pelos autovetores da Jacobiana calculada em C . A essas linhas denominamos variedades estável e instável do ponto de sela, e elas são invariantes.

Na Figura 2.17(a) e (b) mostramos as variedades do ponto de sela da Eq. (2.25), sendo que a linha vermelha representa a variedade estável enquanto a linha verde representa a variedade instável. Os parâmetros utilizados são (a) $\mu = 0,05$ e (b) $\mu = 6,0$, com $a = 2,0$ e $b = 1,0$ em ambos os casos. Em (a) os pontos fixos A e B são focos atratores, e podemos ver que a variedade instável do ponto de sela converge para os atratores formando uma espiral. No segundo caso eles passam a ser nós atratores, e a convergência para os pontos fixos ocorre seguindo uma direção específica.

Figura 2.17: Segmentos das variedades do ponto de sela da Eq. (2.32). A linha vermelha representa a variedade estável enquanto que a linha verde representa a variedade instável. Em (a) utilizamos $\mu = 0,05$ e em (b) $\mu = 6,0$. Demais parâmetros utilizados são: $a = 2,0$, $b = 1,0$.



Fonte: O autor.

Comparando com a Figura 2.13, podemos notar que em ambos os casos as trajetórias no espaço de fase seguem ao longo da variedade estável em direção ao ponto de sela, mas ao se aproximarem dele são repelidos na direção da variedade instável e convergem para um dos atratores A ou B .

Ao contrário do que ocorre em mapas, em fluxos bidimensionais não ocorrem cruzamentos entre as variedades. Isso é uma consequência do teorema 3, da existência e unicidade das soluções de equações diferenciais. Se ocorresse um cruzamento entre as variedades estável e instável, isso significaria que existem duas soluções possíveis que iniciam no mesmo ponto no espaço de fase, o ponto em que ocorre o cruzamento. Ou seja, uma trajetória com início nesse ponto poderia seguir por dois caminhos distintos, o que seria um absurdo para um sistema determinístico.

Outra consequência do teorema de existência e unicidade é que se, em um fluxo

bidimensional, existe uma órbita fechada, qualquer trajetória que inicie dentro dessa órbita permanecerá em seu interior.

Segundo a Definição 13, um atrator caótico é formado pela união dos pontos de sela e dos pontos homoclínicos e heteroclínicos resultantes dos cruzamentos entre as variedades. Como não existe cruzamento entre variedades em fluxos bidimensionais, logo não existem pontos homoclínicos e heteroclínicos e, conseqüentemente, não existem atratores caóticos. A inexistência é formalmente demonstrada no teorema de Poincaré-Bendixson, que enunciamos a seguir.

Teorema 6 *Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto fechado e limitado do plano. Seja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ um fluxo com as suas derivadas parciais $\partial f_i / \partial x_j$, com $i, j = 1, 2$, contínuas em um conjunto aberto D , tal que $R \subset D$. Se R não contém pontos fixos e existe uma trajetória que inicia e permanece em R para tempos futuros, então ou essa trajetória é uma órbita fechada (um ciclo limite) ou então ela convergirá para uma órbita fechada em $t \rightarrow \infty$. Em ambos os casos, existe uma órbita fechada em R [32, 39].*

O teorema 6 é um importante resultado teórico da área de sistemas dinâmicos não-lineares. O que ele demonstra é que as trajetórias de fluxos no plano que não divergem quando $t \rightarrow \infty$ e não convergem para um ponto fixo, ou são um ciclo limite ou convergem para um. Elimina-se, assim, qualquer possibilidade de uma dinâmica distinta.

2.3 Fractais

Fractais são objetos difíceis de se definir formalmente. Geralmente são tidos como possuidores de uma geometria complicada, por apresentar uma similaridade que independe da escala, e por serem muito irregulares para serem descritos pela geometria tradicional. Em outras palavras, quando ampliamos uma pequena região de um objeto fractal, veremos estruturas similares ao todo e com o mesmo grau de complexidade. Em alguns casos essa similaridade é exata, mas na maioria das vezes é aproximada ou estatística [32]. Objetos fractais podem ser observados em diversos aspectos da natureza, como a costa marítima, as nuvens, em várias espécies de plantas⁴, cadeias de montanhas, e mesmo nos sistemas circulatório e nervoso do corpo humano.

O termo fractal foi popularizado por Benoit Mandelbrot na década de 1960 para descrever esses objetos com geometria ‘quebrada’ [3], cujas propriedades não são descritas pela geometria euclidiana. Ao invés disso, é necessária a utilização de ferramentas da geometria fractal. Aqui apresentamos algumas propriedades dos fractais e mostramos como eles aparecem em diversos aspectos dos sistemas não-lineares.

⁴Um belo exemplo que vale ressaltar é o brócolis romanesco.

2.3.1 Conjunto de Cantor

Iniciamos com o objeto geométrico que talvez seja o fractal mais simples, o *conjunto de Cantor*. Para obter o conjunto de Cantor procedemos da seguinte forma:

- Iniciamos com uma linha no intervalo unitário $[0, 1]$.
- No primeiro passo dividimos a linha em três subintervalos e removemos o intervalo intermediário $]1/3, 2/3[$.
- No segundo passo dividimos os intervalos restantes em três subintervalos cada, e removemos o intervalo intermediário de cada um deles, $]1/9, 2/9[$ e $]7/9, 8/9[$ respectivamente.
- No terceiro passo dividimos novamente os intervalos restantes em três subintervalos cada, e removemos o intervalo intermediário de cada um deles.
- Continuamos procedendo dessa forma indefinidamente.

Denominando o conjunto após n passos como S_n , temos que o conjunto inicial é $S_0 = [0, 1]$, o seguinte é $S_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, então $S_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, etc. Nessa notação o conjunto de Cantor é dado por S_∞ .

Na Figura 2.18(a) plotamos a linha unitária inicial e os três primeiros passos. A auto-similaridade nesse caso pode ser notada fazendo uma ampliação de 3x na ramificação esquerda de S_3 , obtemos S_2 . Duas características a serem notadas em S_∞ são o número de elementos de conjunto e seu comprimento. Da figura fica claro que após k passos o conjunto será formado por $N = 2^k$ segmentos, cada um com comprimento $l = (1/3)^k$. Logo, o conjunto de Cantor é formado por infinitos pontos e possui comprimento nulo. Para determinar quais números do intervalo unitário pertencem ao conjunto de Cantor, é útil escrevê-los utilizando base 3. Para isso, lembramos que sendo um número $x \in [0, 1]$, a representação de x em base 3 pode ser obtida por meio da expansão

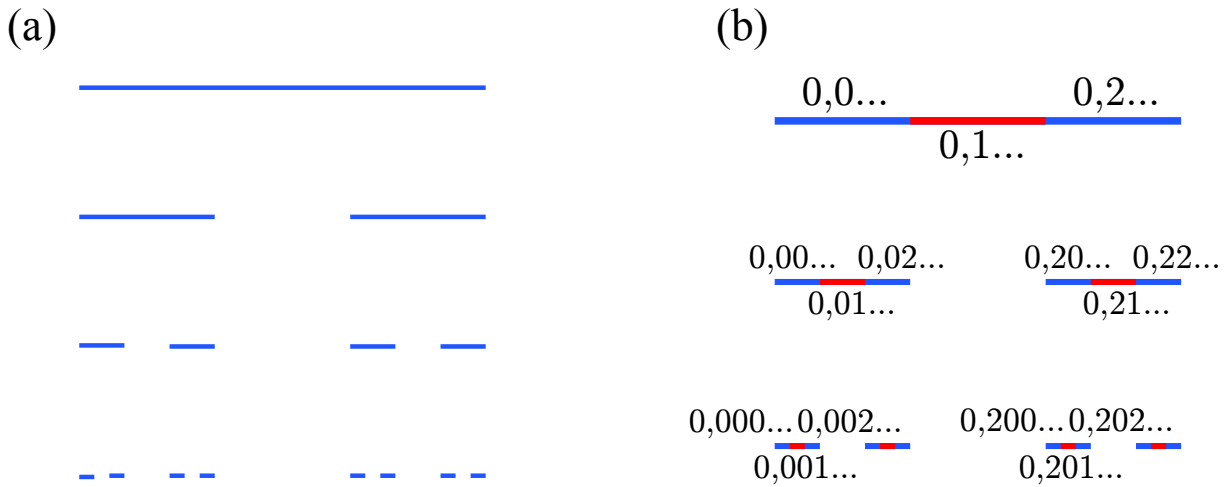
$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots \quad (2.42)$$

Portanto, podemos representar x em base 3 na forma $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, com $a_k = 0, 1$ ou 2 . A praticidade de se utilizar essa base fica evidenciada na Figura 2.18(b) em que podemos ver que em cada passo no processo de construção de S_∞ os intervalos eliminados são aqueles em que os números possuem algum algarismo $a_k = 1$ quando escritos em base 3.

Teorema 7 *O conjunto de Cantor S_∞ consiste de todos os números no intervalo $[0, 1]$ que podem ser escritos em base 3 utilizando apenas os algarismos 0 e 2 [3].*

O conjunto de Cantor apresenta três propriedades que são típicas de fractais. São elas:

Figura 2.18: Em (a) temos as primeiras iterações para obtenção do conjunto de Cantor. Em (b) retratamos como fica a representação dos intervalos para obtenção do conjunto de Cantor quando escritos em base 3.



Fonte: O autor.

- Possui estrutura complexa mesmo em escalas pequenas. Estruturas da geometria euclidiana, por outro lado, após seguidas ampliações apresentam-se cada vez mais suaves.
- Apresenta auto-similaridade, ou seja, contém partes menores de si próprio em escalas menores.
- A dimensão do conjunto de Cantor não é dada por um número inteiro. Como veremos na próxima seção, a dimensão é uma ferramenta útil para quantificar a estrutura de fractais, e objetos com essa geometria apresentam valores de dimensão fracionários.

2.3.2 Dimensão Fractal

Uma medida utilizada para caracterizar a complexidade de objetos fractais é sua dimensão. A dimensão de objetos geométricos euclidianos é claramente definida: o ponto tem dimensão zero, linhas e curvas têm dimensão um, planos e superfícies têm dimensão 2, sólidos têm dimensão 3, etc. Devido à isso, sabemos que a área de uma figura bidimensional A é proporcional à l^2 , enquanto seu perímetro é proporcional à l , sendo l um comprimento característico. Logo, a razão entre o perímetro e a área é $P/A \sim A^{-1/2}$, que se torna menor com o aumento da área. Um raciocínio similar nos mostra o motivo de fenômenos de superfície poderem ser negligenciados em sistemas termodinâmicos macroscópicos [4]. No entanto, no estudo de fenômenos de superfície o modelo fractal se mostra mais adequado em relação à aproximação termodinâmica.

Na Figura 2.19 plotamos as primeiras iterações da poeira de Cantor, da curva de Koch e do triângulo de Sierpinski, que são exemplos conhecidos de fractais auto-similares. Em

(a) plotamos as três primeiras iteradas da construção do fractal conhecido como poeira de Cantor. Sua área e perímetro em cada passo são:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= l^2, & P_0 &= 4l, \\
 A_1 &= 4 \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right) l^2, & P_1 &= 4 \left(\frac{4l}{3}\right) = 4l \left(\frac{4}{3}\right), \\
 A_2 &= 16 \left(\frac{l}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 l^2, & P_2 &= 16 \left(\frac{4l}{9}\right) = 4l \left(\frac{4}{3}\right)^2, \\
 A_3 &= 64 \left(\frac{l}{27}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^3 l^2, & P_3 &= 64 \left(\frac{4l}{27}\right) = 4l \left(\frac{4}{3}\right)^3, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 A_n &= 4 \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^n l^2, & P_n &= 4 \left(\frac{4l}{3}\right) = 4l \left(\frac{4}{3}\right)^n.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Portanto, a razão P_n/A_n fica,

$$\frac{P_n}{A_n} = \frac{4l \left(\frac{4}{3}\right)^n}{\left(\frac{4}{9}\right)^n l^2} = \frac{4 \cdot 3^n}{l} \sim \frac{2^n}{A_n^{1/2}}. \tag{2.44}$$

Então, no limite $n \rightarrow \infty$ a razão $P_n/A_n \rightarrow \infty$ para qualquer $l \neq 0$.

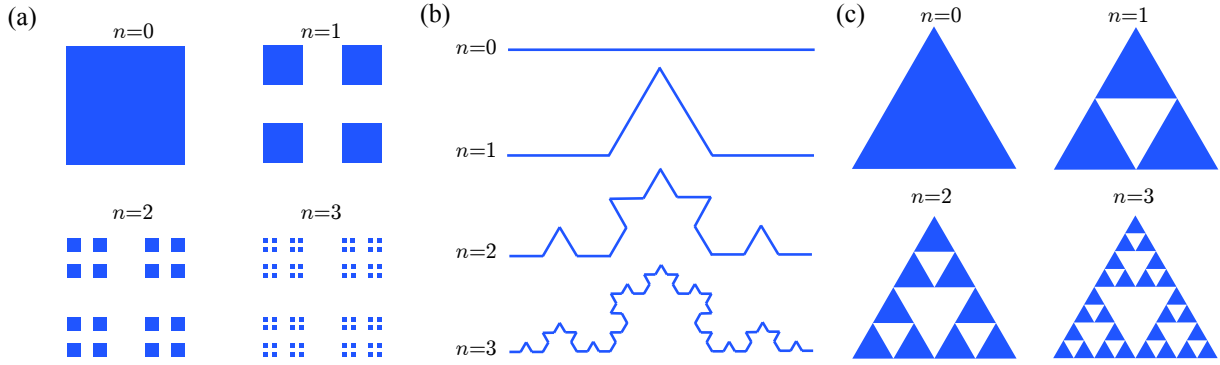
Outro objeto fractal que podemos utilizar como exemplo é a curva de Koch. Descoberta pelo matemático Niels F. Helge von Koch (1870 - 1924) ela é construída a partir de uma linha reta, sendo que em cada passo removemos a terça parte central e substituímos por dois lados de um triângulo equilátero [32]. Seja K_n a curva resultante após o n -ésimo passo, a curva de Koch é dada por K_∞ . Novamente plotamos os três primeiros passos na Figura 2.19(b).

Como a curva de Koch é obtida a partir de iterações utilizando uma linha reta, pode parecer natural atribuir a ela dimensão 1. Porém, se tentarmos determinar o valor de seu comprimento, vemos que é impossível. Seja l o comprimento da linha inicial em $n = 0$, após n passos o comprimento da curva é $P_n = (4/3)^n l$. Isso porque após cada iterada passamos a ter 4 vezes mais linhas que no passo anterior, porém cada linha têm $1/3$ do comprimento. Portanto para $n \rightarrow \infty$, $P_n \rightarrow \infty$. Pela propriedade de auto-similaridade dos fractais, a distância entre quaisquer dois pontos na curva de Koch é infinita, mesmo ela sendo uma curva contínua. Isso sugere que K_∞ pode ter dimensão maior do que 1, mas ao mesmo tempo sua área é nula, o que implica que sua dimensão é menor do que 2. Assim, necessitamos de uma definição de dimensão que nos forneça uma descrição de objetos fractais, e que possa apresentar valores fracionários.

Dimensão de Similaridade

Uma forma de definir é a chamada dimensão de similaridade. Essa dimensão se baseia no fato de que esses fractais são feitos de pequenas cópias de si próprios [32]. Podemos entendê-la também a partir de uma extensão da auto-similaridade de figuras geométricas regulares. Para visualizar a forma como definimos a dimensão de similaridade, consideramos um quadrado de lado l . Se reduzirmos o lado do quadrado

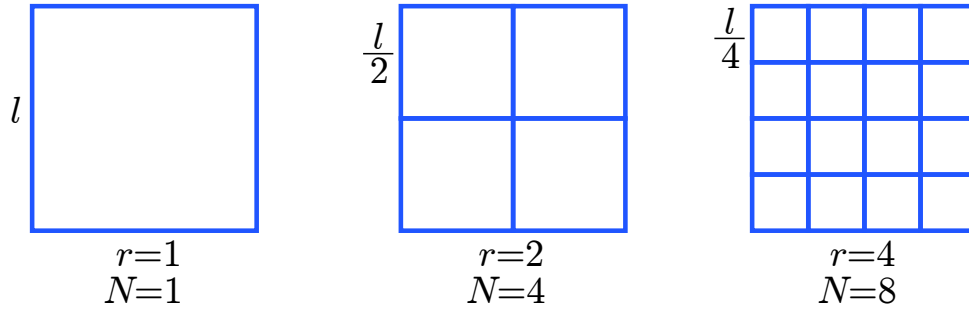
Figura 2.19: Primeiras iterações (a) da poeira de Cantor, (b) da curva de Koch e (c) do triângulo de Sierpinski.



Fonte: O autor.

por um fator $r = 2$, precisaremos de $N = 4$ quadrados para igualar o quadrado original. Se o fator de redução for $r = 4$, então são necessários $N = 16 = 4^2$ quadrados. Esse processo pode ser visto na Figura 2.20. Se procedermos da mesma forma com um cubo,

Figura 2.20: Representação da dimensão de similaridade utilizando um quadrado.



Fonte: O autor.

então ao reduzirmos o lado por um fator $r = 2$, necessitaremos $N = 8 = 2^3$ cubos menores para igualar ao original. Logo esses objetos seguem a relação $N = r^{D_s}$, em que D_s é a dimensão de similaridade.

Definição 19 *Seja K um conjunto auto-similar composto de N cópias de si mesmo reduzidas por um fator r . A **dimensão de similaridade** é dada por [32]*

$$D_s = \frac{\ln N}{\ln r}. \quad (2.45)$$

Na Tabela 2.3 colocamos os valores de D_s para os quatro fractais apresentados até agora. Como podemos ver na tabela a poeira de Cantor e a curva de Koch, apesar de serem construídos de maneira diferente, possuem o mesmo valor de D_s . Isso nos mostra que a dimensão de um fractal é uma medida de sua complexidade, mas não é um valor próprio dele.

Tabela 2.3: Dimensão de similaridade de alguns objetos fractais.

Objeto fractal	Dimensão de Similaridade (D_s)
Conjunto de Cantor (C_∞)	$\ln 2 / \ln 3 \approx 0,631$
Poeira de Cantor	$\ln 4 / \ln 3 \approx 1,261$
Curva de Koch (K_∞)	$\ln 4 / \ln 3 \approx 1,261$
Triângulo de Sierpinski	$\ln 3 / \ln 2 \approx 1,585$

A dimensão de similaridade pode ser utilizada para encontrar a dimensão de objetos que são auto-similares. Porém, fractais como os que vemos em atratores caóticos e bacias de atração não são exatamente auto-similares, mas apenas aproximadamente. Nesses casos não temos como utilizar a dimensão de similaridade para caracterizá-los, tendo que recorrer a outros métodos de calcular a dimensão fractal.

Dimensão de Contagem de Caixa

A dimensão de contagem de caixa é uma forma de generalizar ainda mais a noção de dimensão fractal. Como um fractal apresenta uma complexidade que não diminui com ampliações, imaginamos que ele esteja sobre uma grade de igual espaçamento e verificamos o número de caixas nessa grade necessárias para cobri-lo. Em seguida verificamos como esse valor se modifica quando o tamanho da grade é reduzido [3]. Formalmente, a dimensão de contagem de caixa é definida como:

Definição 20 *Um conjunto fechado K no $\mathbb{R}^n$ possui dimensão de contagem de caixa,*

$$D_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (2.46)$$

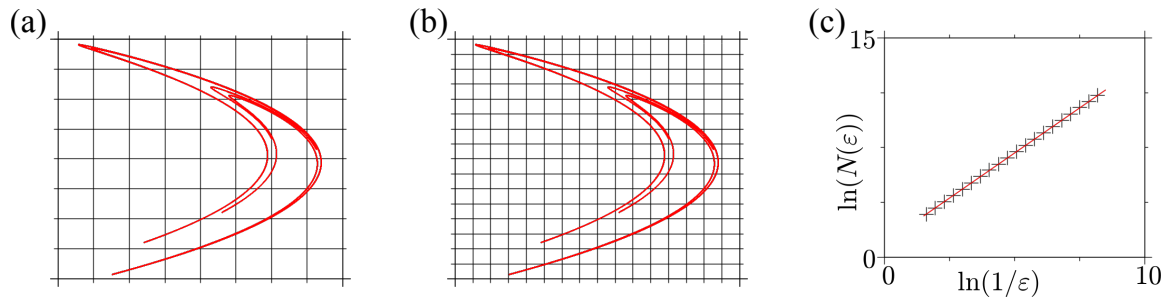
em que $N(\varepsilon)$ é o número de caixas de dimensão n e lado ε necessárias para cobrir o conjunto K , desde que o limite exista [3].

A vantagem da dimensão de contagem de caixas é que ela nos permite estimar a dimensão fractal a partir de um conjunto de dados do objeto fractal, ainda que não seja possível encontrar uma fórmula exata.

Na Figura 2.21 ilustramos o procedimento de contagem de caixas. Em (a) e (b) mostramos o atrator do mapa de Hénon, Fig. 2.5(b), em grades com $\varepsilon = 1/8$ e $\varepsilon = 1/16$, respectivamente. Se colocarmos em um gráfico os valores de $\ln N(\varepsilon)$ em função de $\ln(1/\varepsilon)$ conforme $\varepsilon \rightarrow 0$, o valor da dimensão é obtido por meio do ajuste linear. Na Figura 2.21(c) plotamos um gráfico com os resultados da contagem de caixas para o atrator de Hénon. Para esse cálculo utilizamos 10^6 pontos no atrator, e com o ajuste linear encontramos $D_B \approx 1,23$, valor bem próximo de 1,27 presente na literatura [3].

Alguns reverses da dimensão de contagem de caixas são a necessidade de um grande número de pontos para uma estimativa precisa, e o grande custo computacional quando utiliza-se valores pequenos de ε . Além disso, em alguns casos esse método pode fornecer

Figura 2.21: Representação do processo para o cálculo da dimensão de contagem de caixas para o atrator de Hénon. Em (a) $\varepsilon = 1/8$ e em (b) $\varepsilon = 1/16$. Em (c) plotamos o gráfico de $\ln(N(\varepsilon)) \times \ln(1/\varepsilon)$ para o atrator de Hénon com $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$.



Fonte: O autor.

valores imprecisos [32]. Para contornar essas dificuldades, algumas outras definições foram propostas, como a dimensão de correlação [3, 32], a dimensão de Lyapunov [30, 41], e a dimensão de informação [4]. Outra forma de encontrar a dimensão fractal é utilizando o *expoente de incerteza*. Essa metodologia é útil quando desejamos calcular a dimensão de bacias de atração [42] e espaços de parâmetros [34], e será melhor explorada na próxima seção, em que trataremos da fractalidade em bacias de atração.

2.4 Bacias de Atração

Desde os trabalhos de Henri Poincaré a respeito da estabilidade no problema de três corpos em 1890, e após um grande desenvolvimento do estudo do caos em sistemas dinâmicos facilitado pelo advento dos computadores, a ideia de que é possível se determinar a trajetória de uma partícula para um tempo qualquer a partir de seu estado atual teve de ser abandonada [3]. A divergência exponencial de trajetórias próximas presente em sistemas com dinâmica caótica torna impossível a previsão para períodos longos de tempo, pois uma pequena imprecisão na posição inicial cresce exponencialmente com o tempo. Apesar disso, ainda é possível uma previsão qualitativa da dinâmica visto que, em geral, ela tende a convergir para um atrator (ainda que caótico). Porém, algumas vezes a bacia de atração dos atratores pode apresentar estruturas fractais, o que dificulta ainda mais a previsão do estado futuro devido à complexidade invariante de escala.

Na seção anterior fizemos uma breve introdução aos fractais e às suas características de auto-similaridade e dimensão não-inteira. Nesta seção vamos explorar as formas de organização das bacias de atração em sistemas multiestáveis, implicações que a fronteira entre as bacias trazem para a previsibilidade do estado final do sistema, e como caracterizar regiões de fronteira por meio do expoente de incerteza.

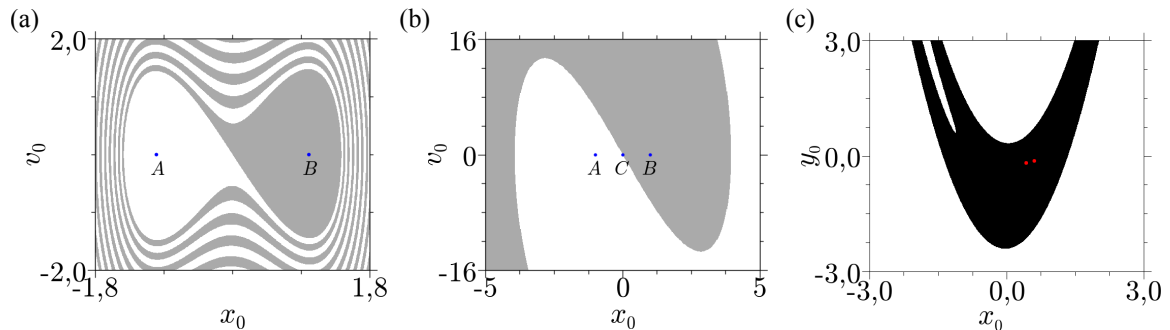
2.4.1 Bacias com Fronteiras Suaves

Uma partícula sujeita ao potencial de Duffing com amortecimento, Eq. (2.32), é um sistema biestável. Na Figura 2.13 podemos ver que o estado assintótico é dependente da região no espaço de fase em que o sistema é iniciado. Os pontos que convergem para um determinado atrator compõem sua bacia de atração.

Definição 21 *Ao conjunto de pontos $\mathbf{x}$ que converge assintoticamente para um atrator denominamos **bacia de atração** do atrator.*

Na Figura 2.22 podemos ver a bacia de atração dos atratores do sistema de Duffing amortecido e do mapa de Hénon. Em (a) e (b) as trajetórias que iniciam na região branca convergem para o ponto fixo atrator localizado em A , enquanto que aquelas que iniciam na região cinza convergem para B . Aqui os parâmetros utilizados são os mesmos da Figura 2.13. Em (c) as condições iniciais na região preta formam a bacia de atração do atrator de período 2 presentes no mapa de Hénon (identificados pelos pontos vermelhos), enquanto que trajetórias que iniciam na região branca crescem de forma ilimitada.

Figura 2.22: Em (a) e (b) plotamos a bacia de atração para os atratores da Eq. (2.32). A região branca denota as condições iniciais que convergem para o atrator A , enquanto a região cinza denota aqueles que convergem para B . Em (c) utilizamos o mapa de Hénon, Eq. (2.12) e as condições iniciais na região preta são atraídas para o atrator de período 2, dado pelos dois pontos vermelhos, enquanto que na região branca as condições iniciais crescem de forma ilimitada. Os parâmetros utilizados são: (a) $a = 2$, $b = 1$ e $\mu = 0,05$, (b) $a = 2$, $b = 1$ e $\mu = 6,0$, e (c) $\alpha = 1,28$ e $\beta = -0,3$.



Fonte: O autor.

Nos três casos o espaço de fase pode ser dividido em duas partes bem definidas, sendo cada uma a bacia de atração de algum dos atratores. Comparando com a Figura 2.17 é possível notar que a fronteira entre as bacias é dada pela variedade estável de um ponto de sela. O suavidade da fronteira entre as bacias se deve à não-ocorrência de cruzamento entre a variedade estável que define a fronteira da bacia com uma variedade instável.

2.4.2 Bacias com Fronteiras Fractais

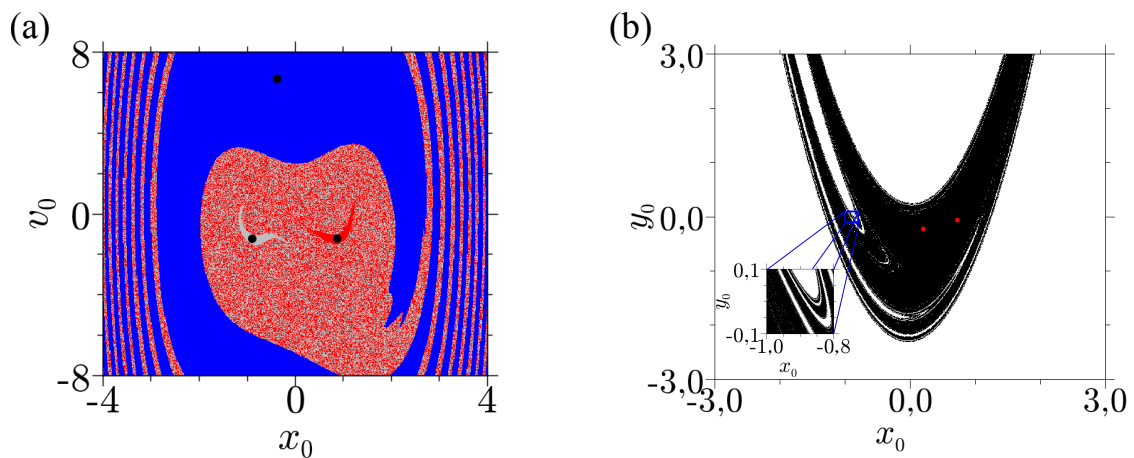
Nas Figuras 2.23(a) e (b) plotamos novamente a bacia de atração dos sistemas de Duffing e Hénon. Em (a) vemos a bacia de atração dos três ciclos limite atratores do sistema

de Duffing amortecido com forçamento periódico, Eq. (2.41). A região azul é a bacia de atração do ciclo limite mais externo, dado pela linha azul na Figura 2.15(a), enquanto as regiões cinza e vermelha são as bacias de atração dos ciclos limite nos poços esquerdo e direito, respectivamente. Os círculos pretos denotam os pontos em que os ciclos limite cruzam a seção de Poincaré.

Esse sistema possui três atratores e, conseqüentemente, três bacias de atração. Enquanto a bacia em azul possui fronteiras bem definidas, a fronteira entre as bacias vermelha e cinza é extremamente complicada. Logo, as variedades estáveis que delimitam as bacias são de órbitas distintas. A complexidade da fronteira entre as bacias vermelha e cinza é um indicativo de que sua estrutura é fractal, o que causa uma grande dificuldade em prever para qual atrator uma condição inicial será atraída.

Na Figura 2.23(b) vemos a bacia de atração do mapa de Hénon com os parâmetros $\alpha = 1,4$ e $\beta = -0,3$. Novamente as condições iniciais na região preta resultam em uma dinâmica que converge para o atrator de período 2 (denotado pelos pontos vermelhos na figura), enquanto que as condições iniciais na região branca divergem. Na inserção da Fig. 2.22(b) plotamos uma ampliação da bacia para mostrar que a complexidade da fronteira permanece para escalas menores. A fractalidade na bacia de atração ocorre porque, como vimos na Figura 2.10(b), para esses valores de parâmetros ocorre o cruzamento entre as variedades estável e instável dos pontos de sela em infinitos pontos homoclínicos.

Figura 2.23: Em (a) plotamos a bacia de atração para os três atratores da Eq. (2.41). A região azul denota as condições iniciais que convergem para ciclo limite mais externo da Figura 2.15(a), enquanto as regiões cinza e vermelha são as bacias de atração dos ciclos limite nos poços esquerdo e direito, respectivamente. Os pontos pretos representam a seção de Poincaré dos três atratores. Em (b) plotamos novamente a bacia ponto de período 2 do mapa de Hénon, Eq. (2.12), porém utilizando valores de parâmetros para os quais a fronteira da bacia possui estrutura fractal. Os parâmetros utilizados são: (a) $a = 2$, $b = 1$, $\mu = 0,05$, $f_0 = 2,1$ e $\omega = 3,5$, e (b) $\alpha = 1,4$ e $\beta = -0,3$.



Fonte: O autor.

A existência de estruturas fractais na bacia de atração afeta a previsibilidade do sistema, fazendo com que as condições iniciais nas regiões de fractalidade tenham de ser

definidas com uma grande precisão para que se possa conhecer o estado final da dinâmica. Para ilustrar esse efeito basta considerarmos um sistema biestável com dois atratores, A e B , em que deseja-se que a dinâmica do sistema tenda para o atrator A . Se iniciamos o sistema em uma região onde a fronteira entre as bacias é fractal, uma pequena mudança na condição inicial gera uma probabilidade não-nula de que o sistema passe a convergir para o atrator B . Esse fenômeno foi chamado de sensibilidade do estado final⁵ por Grebogi e colaboradores [43].

Na Fig. 2.24(a) retratamos uma bacia de atração de um sistema com dois estados finais possíveis, sendo que a região cinza pertence à bacia de atração de A e a região branca pertence à bacia de atração de B . Se uma condição inicial P possui uma precisão da ordem ε_1 , não temos como saber a priori para qual estado final o sistema irá convergir e esse ponto é um ponto de incerteza, também chamado de ponto ε_1 -incerto [42]. Se, no entanto, ele possui uma precisão de ordem ε_2 , então temos como prever o estado final e ele deixa de ser um ponto de incerteza.

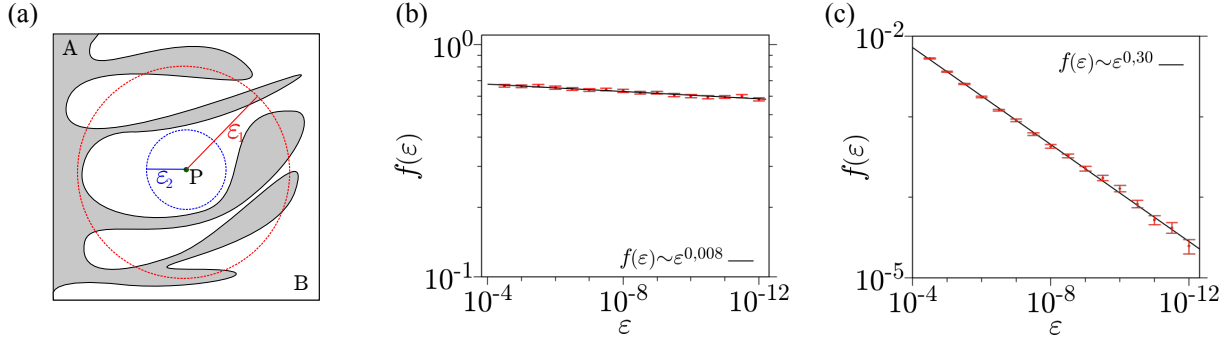
Grebogi e colaboradores [43, 42] mostraram que a incerteza no estado final está relacionada à fractalidade da bacia de atração por meio de uma lei de potência, cujo expoente, chamado expoente de incerteza, pode ser determinado por meio do cálculo da fração de pontos de incerteza da bacia. Para determinar a fração de incerteza, sorteamos um grande número de condições iniciais aleatórias N_0 em uma dada região da bacia e calculamos seu estado final. Tais condições iniciais passam, então, a ser o centro de círculos de condições iniciais de raio ε . A seguir, sorteamos dois vizinhos dentro dessa distância ε e calculamos o estado final de suas trajetórias. Se o estado final de ao menos um dos pontos na vizinhança é diferente do estado final do ponto no centro, então tal ponto é ε -incerto. A fração de incerteza é dada pela razão $f(\varepsilon) = N_\varepsilon/N_0$, sendo N_ε o número total de pontos ε -incertos.

Quando a fronteira entre as bacias é fractal, espera-se que a fração de incerteza tenha um comportamento na forma $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\gamma$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ [42]. Foi demonstrado por McDonald e colaboradores que o chamado *expoente de incerteza*, γ , relaciona-se com a dimensão da fronteira da bacia de acordo com $D_f = D - \gamma$, sendo D_f a dimensão da fronteira entre as bacias e D é a dimensão das caixas utilizadas para calcular D_f . No caso de um corte bidimensional feito na bacia de atração, $D = 2$. Devido a essa relação, o expoente de incerteza para uma bacia bidimensional estará sempre no intervalo $0 \leq \gamma \leq 1$. Como a dimensão fractal fornece a complexidade da estrutura e o quanto ela ocupa a área em que está inserida, quanto menor o valor de γ mais complexa é a fronteira entre as bacias [42, 43, 44].

Nas Figuras 2.24(b) e (c) plotamos o gráfico log-log da fração de incerteza $f(\varepsilon)$ em função de ε para a fronteira entre as bacias de atração cinza e vermelha da Figura 2.23(a) e da bacia do atrator de período 2 e a bacia do infinito da Figura 2.23(b). Na Figura

⁵*final state sensitivity.*

Figura 2.24: (a) Esquema representativo de uma região no espaço de fase dividido por duas bacias de atração, o ponto P representa uma condição inicial e os círculos vermelho e azul representam a incerteza no valor de P . Em (b) e (c) plotamos o gráfico log-log de $f(\varepsilon) \times \varepsilon$ para as bacias de atração com fronteiras fractais da Figura 2.23(a) e (b), respectivamente.



Fonte: O autor.

2.24(b) utilizamos $N_0 = 2^{13}$ condições iniciais para calcular $f(\varepsilon)$, enquanto que em (c) utilizamos $N_0 = 2^{20}$. A barra de erro em cada ponto é calculada considerando que as ocorrências de pontos de incerteza são eventos aleatórios e, portanto, o erro no número de pontos de incerteza N_ε é dado por $\sqrt{N_\varepsilon}$ [42]. Fazendo o ajuste da reta obtemos (b) $\gamma = 0,008 \pm 0,001$ e (c) $\gamma = 0,300 \pm 0,003$, o que nos fornece valores de $D_f \approx 1,992$ e $D_f \approx 1,7$, respectivamente, para a fronteira.

A existência de uma relação do tipo lei de escala apresenta grandes problemas na previsibilidade do estado final mesmo em termos qualitativos. No caso da Fig. 2.23(b) um aumento na precisão inicial por um fator de 1000 faria com que a incerteza do estado final do sistema diminuísse a aproximadamente 12,5% da incerteza inicial, ou seja, uma melhora da ordem de 10^3 na precisão da medida inicial resulta em uma melhora apenas da ordem de 10^1 na previsibilidade. Para as bacias vermelha e cinza do atrator de Duffing o ganho de previsibilidade é ainda menor.

O expoente de incerteza nos permite caracterizar a fronteira entre as bacias em três casos. Quando a fronteira é uma linha suave e bem definida sua dimensão é 1, o que implica em um expoente de incerteza $\gamma = 1$. Quando a fronteira é dada por um fractal formado a partir de uma linha que ocupa o plano, então sua dimensão fica entre a de uma linha e a do plano, logo $0 < \gamma < 1$. Existe ainda mais um caso, onde $\gamma = 0$ e a fronteira entre as bacias possui a dimensão da própria bacia. Esse último é um caso extremo de imprevisibilidade chamado de bacia crivada, e será apresentado a seguir.

2.4.3 Bacias Crivadas

Em 1993, John C. Sommerer e Edward Ott publicaram um artigo na revista Nature [45] onde reportaram que, na bacia de atração de um sistema físico, ocorre um fenômeno denominado bacia crivada⁶. Bacias crivadas têm a propriedade de que na vizinhança de

⁶O primeiro relato do fenômeno de bacia crivada se deve a Alexander e colaboradores [46].

cada ponto na bacia de atração de um atrator, sempre está presente um ponto pertencente à bacia de atração de um outro atrator. Tal propriedade mostra que um sistema inteiramente determinístico pode apresentar uma total falta de previsibilidade [47].

O sistema utilizado por Sommerer e Ott representa a trajetória de uma partícula de massa unitária sujeita ao potencial $V(x, y) = (1 - x^2)^2 + (x - \bar{x})y^2$, com dissipação e um forçamento periódico na direção x . A dinâmica da partícula é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{v}_x &= -\mu v_x + 4x(1 - x^2) - y^2 + f_0 \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_y &= -\mu v_y - 2y(x - \bar{x}),\end{aligned}\tag{2.47}$$

em que f_0 é a intensidade do forçamento periódico, ω é a frequência e $\bar{x}$ é o parâmetro que controla a forma do potencial fora do plano $y = 0$. Devido à simetria do potencial, $V(x, -y) = V(x, y)$, existe um plano invariante dado por $y = v_y = 0$, tal que a trajetória de uma condição inicial nesse plano permanecerá nele indefinidamente.

Substituindo $y = 0$ e $v_y = 0$ na Eq. (2.47), a equação de movimento da partícula será dada por

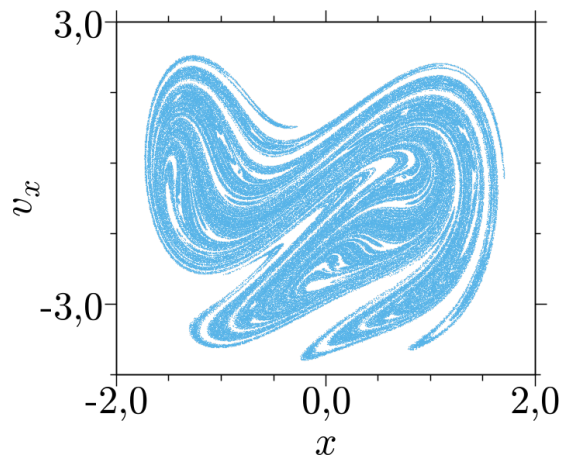
$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{v}_x &= -\mu v_x - 4x^3 + 4x + f_0 \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{v}_y &= 0.\end{aligned}\tag{2.48}$$

Ou seja, a dinâmica da partícula no plano invariante é dada pela equação de Duffing de poço duplo com amortecimento, Eq. (2.41) com $b = 1$ e $a = 2$ [45].

Os valores de parâmetros μ , f_0 e ω utilizados por Sommerer e Ott são os mesmos da Figura 2.15(c), portanto o plano invariante possui um atrator caótico. Na Figura 2.25 plotamos a seção de Poincaré dada por $\omega t \pmod{2\pi} = 0$ do atrator.

Considerando que a partícula inicia seu movimento fora do plano invariante, uma questão que surge é se ela converge ou não para o atrator caótico da Figura 2.25. Colocando de outra forma, deseja-se saber se $y \rightarrow 0$ e $v_y \rightarrow 0$ para condições iniciais tais que $y(0) \neq 0$ ou $v_y(0) \neq 0$. Para responder essa questão, plotamos uma seção da bacia de atração do sistema. Para tal, fixamos $v_x(0) = v_y(0) = 0$ e varremos os valores de $x(0)$ e $y(0)$ no intervalo $[0; 1,2] \times [0; 1,2]$ em uma grade de 1024×1024 valores. O resultado para $\bar{x} = -1,9$ pode ser visto na Figura 2.26(a). Nessa Figura os pontos pretos representam as condições iniciais em que $y \rightarrow \pm\infty$ e a região branca são pontos que convergem para o atrator no plano invariante. Podemos ver que a fronteira entre as bacias não é facilmente estabelecida, apresentando novamente uma estrutura complexa. O termo crivamento é utilizado porque considera-se que a região branca está crivada de

Figura 2.25: Seção de Poincaré, definida por $\omega t \pmod{2\pi} = 0$, do atrator caótico presente no plano invariante da Eq (2.47). Parâmetros utilizados são $\mu = 0,05$, $f_0 = 2,3$, $\omega = 3,5$ e $\bar{x} = -1,9$, e condições iniciais $x_0 = 0,96$, $v_{x0} = 0,52$ e $y_0 = v_{y0} = 0$.



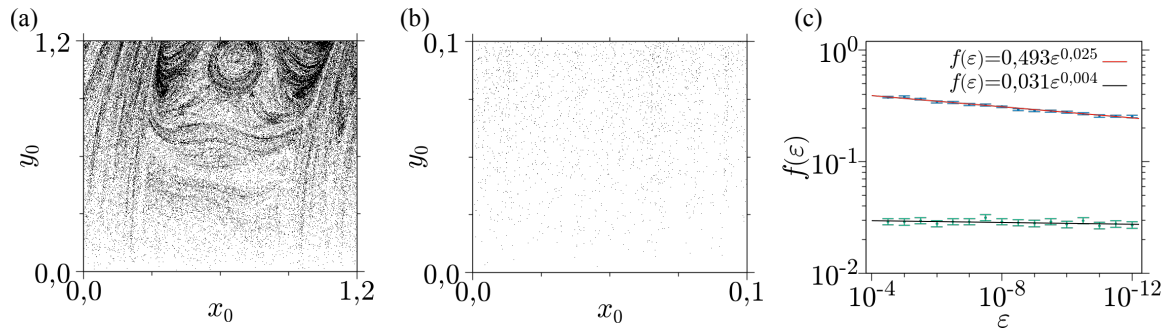
Fonte: O autor.

buracos referentes à bacia do outro atrator. Diferentemente do que acontece na Figura 2.23, sempre existe a probabilidade positiva de que uma condição inicial aleatória convergir para qualquer um dos atratores do sistema [45, 48]. Sendo que a incerteza não diminui com o aumento da precisão.

Na Fig. 2.26(b) plotamos a ampliação de uma pequena região do corte na bacia. Realizamos a ampliação nessa região por não haver crivamento aparente. Contudo, na ampliação podemos notar que, apesar da densidade do crivamento ser menor do que na Fig. 2.26(a), ainda assim a presença de pontos da bacia de atração do atrator em $y \rightarrow \infty$ pode ser vista em todos os lugares. Na Fig. 2.26(c) plotamos a fração de incerteza para a fronteira nas Figuras 2.26 (a) e (b), estimada utilizando $N_0 = 2^{13}$ condições iniciais aleatórias. Por meio do ajuste obtemos os valores $\gamma = 0,025 \pm 0,001$ para a fronteira entre as bacias em (a), e $\gamma = 0,004 \pm 0,003$ para (b), que fornecem os valores de dimensão $D_f \approx 1,975 \pm 0,001$ e $D_f \approx 1,996 \pm 0,003$, respectivamente. A diferença de valores se deve a mudanças na densidade do crivamento em algumas regiões de (a), que influencia no número de pontos de incerteza quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como em (b) a densidade de pontos é mais homogênea, $\gamma \approx 0$.

A ocorrência do crivamento na bacia de atração se deve à existência de infinitas órbitas periódicas instáveis no plano invariante [49], que compõem o atrator caótico. Dependendo do valor de $\bar{x}$ na Eq. (2.25) algumas dessas órbitas perdem a estabilidade na direção transversal, o que significa que passam a ter uma variedade instável que sai do plano invariante. Quando uma trajetória com $y \neq 0$ se aproxima dessa região de instabilidade transversal ela passa a ser expelida para longe do plano. A partir daí ela pode convergir para outro atrator (resultando no crivamento da bacia) ou, caso não exista um atrator estável nessa região, voltar a se aproximar do plano (resultando em um comportamento intermitente) [48]. Além disso, existe um valor crítico, $\bar{x}_c = -1,7887$ [40], para o qual o

Figura 2.26: (a) Corte da bacia de atração da Eq. (2.47). (b) Ampliação de uma região de (a). (c) Fração de incerteza $f(\varepsilon) \times \varepsilon$ para as bacia crivada de (a) e (b).



Fonte: O autor.

atrator caótico perde totalmente a estabilidade transversal e as trajetórias fora do plano deixam de convergir para ele. Essa perda de estabilidade transversal é chamada bifurcação *blowout* [48].

2.5 Conclusão

O objetivo principal desse capítulo era fazer uma introdução à dinâmica caótica, apresentando conceitos chave da área de sistemas não-lineares com ênfase nos sistemas dissipativos. Na Seção 2.1 mostramos como a dinâmica caótica pode ser observada mesmo em sistemas simples como o mapa logístico, inserimos os conceitos de pontos fixos e periódicos e definimos o expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais. Também ampliamos a abrangência desses conceitos para mapas bidimensionais utilizando a matriz Jacobiana e, utilizando como exemplo o mapa de Hénon, definimos as variedades estáveis e instáveis dos pontos de sela, os cruzamentos entre as variedades e, por fim, definimos o que é um atrator caótico em mapas.

Na Seção 2.2 expandimos os conceitos de ponto fixo para sistemas de tempo contínuo, classificando-os novamente por meio da matriz Jacobiana. Definimos ciclos limite e seção de Poincaré, e mostramos como a impossibilidade de cruzamentos homoclínicos e heteroclínicos em fluxos bidimensionais, como consequência do teorema de existência e unicidade, impede o surgimento de dinâmicas mais complexas nesses sistemas. O que é um resultado importante dado pelo teorema de Poincaré-Bendixson.

Na Seção 2.3 fizemos uma breve introdução à geometria dos objetos fractais, apresentando alguns fractais conhecidos na literatura como o conjunto de Cantor, a curva de Koch e o triângulo de Sierpinski. Constatamos que complexidades que não simplificam para escalas menores e auto-similaridade são propriedades características desses objetos e mostramos como podemos quantificar essa complexidade determinando a dimensão fractal.

Por fim, na Seção 2.4 nos dedicamos a mostrar como a estrutura das bacias de atração

determina a previsibilidade de um sistema dinâmico. Indicamos que nos casos em que um sistema dinâmico possui mais de um estado final possível, a ocorrência de cruzamentos entre a variedade estável do ponto de sela que limita a bacia de atração com uma variedade instável faz com que a fronteira da bacia de atração possua estrutura fractal. Nesses casos, mostramos como é possível utilizar o expoente de incerteza para estimar a dimensão fractal da fronteira entre as bacias.

Como foi possível de notar, as variedades dos pontos de sela desempenham um papel de grande importância na organização do espaço de fase dos sistemas dinâmicos. O cruzamento entre variedades é o que possibilita a existência de atratores caóticos tanto em mapas quanto em fluxos. Além disso, vimos que cruzamentos entre variedades podem gerar dificuldades extras na previsão do estado final de um sistema. Dada a complexidade em pequenas escalas inerente aos fractais, a fractalidade na bacia de atração faz com que mesmo um aumento significativo na precisão de uma condição inicial resulte em uma redução quase nula na incerteza do estado final. O caso mais extremo dessa fractalidade ocorre quando uma bacia de atração passa a ser crivada de pontos pertencentes à bacia de outro atrator. Nesse caso a incerteza no estado final permanece constante mesmo para escalas pequenas.

3 Estados Quimera

Christiaan Huygens (1629 - 1695) foi um físico, matemático e astrônomo holandês, conhecido principalmente por seus estudos sobre a ótica, teoria ondulatória da luz e a construção de telescópios e relógios [50]. Ele foi provavelmente o primeiro cientista a observar e descrever o fenômeno que hoje chamamos de sincronização em sistemas dinâmicos. Ele descobriu que dois relógios de pêndulo pendurados em um mesmo suporte passavam a oscilar com a mesma frequência após um período de tempo, e concluiu que o suporte estava transmitindo pequenas oscilações entre os relógios, causando interferência mútua entre eles [50].

Atualmente, utilizamos modelos de redes compostas por um grande número de elementos acoplados para compreender o funcionamento de diversos sistemas reais. Além da sincronização de frequência observada por Huygens, esses sistemas podem exibir uma grande variedade de comportamentos dinâmicos, como sincronização caótica, multiestabilidade, *cluster states*, entre outros. Em 2002, Yoshiki Kuramoto e Dorjsuren Battogtokh publicaram um artigo na revista *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* [19] onde reportaram a existência de um novo comportamento na dinâmica de osciladores da equação de Ginzburg-Landau complexa, que descreve o caso mais simples de um campo de osciladores não-lineares [9]. Seus resultados indicavam que, sob certas condições, é possível que parte dos elementos da rede oscilem de forma sincronizada, enquanto o restante apresenta uma dinâmica caótica sem correlação aparente. Tal comportamento foi posteriormente denominado estado quimera¹ por Abrams e Strogatz [20], devido à sua característica de coexistência de dinâmicas distintas ocorrendo simultaneamente. Desde então têm-se observados estados quimera em uma grande variedade de sistemas, tanto teóricos quanto experimentais. Neste capítulo explicitaremos algumas observações desse estado e formas de detectá-lo.

3.1 Estados Quimera em Redes de Osciladores e Mapas Acoplados

Em seu artigo de 2002, Kuramoto e Battogtokh [19] estenderam o modelo de oscilador de fase com acoplamento global para o caso de um acoplamento com alcance finito. Como

¹Monstro da mitologia grega constituído por uma cabeça de leão, o corpo de uma cabra e uma cauda de serpente [20].

modelo eles consideraram a equação de Ginzburg-Landau complexa com acoplamento não-local. Ela pode ser expressa, em uma dimensão, como

$$\frac{\partial}{\partial t}A(x, t) = (1 + i\omega_0)A - (1 + ib)|A|^2A + K(1 + ia)(Z(x, t) - A(x, t)), \quad (3.1)$$

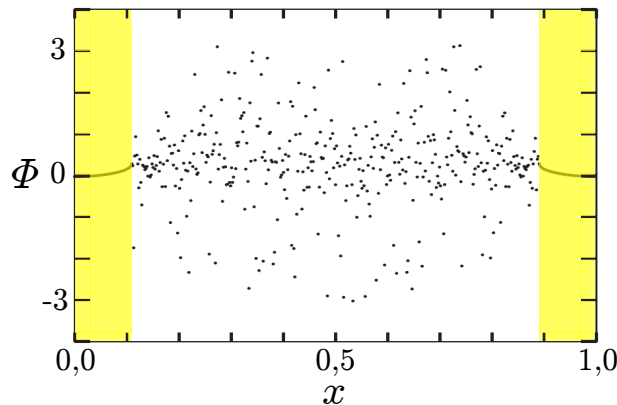
em que a quantidade $Z(x, t)$, denominada como campo médio, é dada por

$$Z(x, t) = \int G(x - x')A(x', t)dx', \quad (3.2)$$

com a função de acoplamento que diminui com a distância dada por $G(x) = \frac{\kappa}{2} \exp(-\kappa|x|)$. Ao todo esse sistema apresenta cinco parâmetros, ω_0 , a , b , K e κ .

Na Figura 3.1 podemos ver a fase dos osciladores, dada por $\Phi = \arg(A)$, em um instante de tempo fixo. Para obter essa figura, a Eq. (3.1) foi solucionada numericamente com $x \in [0, 1]$ considerando condições de contorno periódicas. Além disso, o espaço foi discretizado utilizando 512 osciladores distribuídos no intervalo unitário. Os valores de parâmetros utilizados foram $a = -1,0$, $b = 0,88$, $\kappa = 4,0$ e K é tomado como sendo relativamente pequeno [19]. A condição inicial utilizada é tal que $|A| = 1$ para todos os osciladores e suas fases são distribuídas aleatoriamente segundo uma distribuição aproximadamente simétrica sobre o ponto médio $x = 1/2$. Na figura é possível ver a distribuição espacial instantânea das fases dos osciladores após um tempo transiente, e pode-se identificar uma região de sincronização (pontos na região amarela da figura) e uma região de dessincronização (pontos na região branca da figura). Essa

Figura 3.1: Distribuição espacial instantânea das fases de uma rede de 512 osciladores distribuídos em um intervalo de comprimento 1 com condições de contorno periódicas, em que Φ é a fase de cada oscilador.



Fonte: Adaptado de [19].

coexistência de estados era um resultado inesperado, pois os osciladores da região branca e da região amarela são mutuamente influenciados e, apesar disso, apresentam dinâmicas temporais e espaciais distintas.

No ano de 2004, Abrams e Strogatz [20] publicaram um artigo em que analisaram o

modelo de um anel de osciladores de fase descritos pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, t) = \omega - \int_{-\pi}^{\pi} G(x - x') \times \sin(\Phi(x, t) - \Phi(x', t) + \alpha) dx', \quad (3.3)$$

em que ω é a frequência natural dos osciladores, a constante de fase α é também chamada *constante de Sakaguchi* e a função de acoplamento nesse caso é dada por $G(x) = (1 + A \cos x)/2\pi$, com $0 \leq A \leq 1$. Vale constatar que esse modelo já tinha sido utilizado por Kuramoto e Battogtokh, porém com o acoplamento exponencial. Utilizando o acoplamento dado por um cosseno, Abrams e Strogatz também encontraram estados em que a dinâmica apresentava domínios de sincronização e dessincronização coexistindo e os batizaram de estados quimera. Devido a forma da função $G(x)$ eles obtiveram ainda resultados analíticos que permitiram identificar em quais regiões do espaço de parâmetros $A \times \alpha$ esses estados ocorrem.

Em 2011 Omelchenko e colaboradores [22] obtiveram estados quimera em uma rede formando um anel de mapas acoplados. Foi o primeiro caso de um estado quimera obtido em um sistema de tempo discreto. A dinâmica dos mapas é dada por

$$x_{t+1}^{(i)} = f(x_t^{(i)}) + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_t^{(i)}) - f(x_t^{(j)})], \quad (3.4)$$

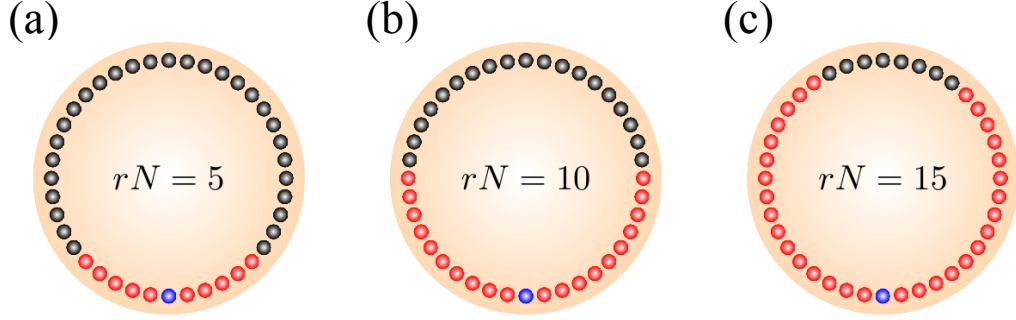
em que $f(x) = ax(1 - x)$ é a função do mapa logístico.

O parâmetro do mapa foi mantido fixo com valor $a = 3,8$, e os parâmetros σ e r são os parâmetros de controle, sendo σ a intensidade do acoplamento e $r = P/N$ o raio do acoplamento, onde P é o número de vizinhos acoplados em cada direção. No esquema da Fig. 3.2 podemos ver que o produto rN nos fornece o número de vizinhos de cada lado aos quais um dado mapa da rede se conecta. Então, se $r = 0$ a rede não possui acoplamento, se $rN = 1$ apenas os primeiros vizinhos estão acoplados (acoplamento local), se $rN = N/2$ todos os elementos da rede estão acoplados (acoplamento global) e se $1 < rN < N/2$ temos o acoplamento não-local. Portanto, r controla o alcance de influência de cada mapa na dinâmica da rede.

Eles analisaram os comportamentos presentes nessa rede utilizando o espaço de parâmetros $r \times \sigma$ e descobriram que, dependendo do valor dos parâmetros de acoplamento, o sistema pode apresentar padrões espaciais característicos, com perfis espaciais ondulatórios. Descobriram ainda que as regiões de dinâmica coerente se formam, no espaço de parâmetros, estruturas de coerência [22, 23]. Por meio do cálculo de um valor crítico para a intensidade do acoplamento, σ_c , conseguiram estabelecer uma linha de transição de estados incoerentes para coerentes em redes de osciladores acoplados.

Na Figura 3.3(a) vemos o espaço de parâmetros que eles obtiveram para a Eq. (3.4).

Figura 3.2: Esquema ilustrativo de uma rede com de tamanho $N = 39$. Para um dado elemento da rede (círculo azul), o parâmetro r controla quantos vizinhos estão conectados a ele (círculos vermelhos).



Fonte: O autor.

A região hachurada é onde ocorre a sincronização caótica, que é o caso mais simples de coerência espacial. Nesse caso tomando quaisquer dois mapas i e j da rede a condição $x^{(i)} = x^{(j)}$ é válida. A limitação da região de sincronização caótica é dada pela linha da bifurcação *blowout*, a partir da qual passamos a ter um expoente de Lyapunov positivo que é transversal à sincronização [17, 48].

As regiões coloridas da Figura 3.3(a) são chamadas de línguas de coerência. Podemos definir um estado espacialmente coerente como aquele em que no limite $N \rightarrow \infty$ é válida a relação $|x^{(i)} - x^{(i+1)}| \rightarrow 0$. Não sendo mais necessário, portanto, que todos os elementos da rede tenham exatamente o mesmo valor. Estados coerentes possuem um perfil espacial suave e os caracterizamos pelo número de onda k . Na figura podemos ver as regiões em que $k = 1, 2$ e 3 , os estados coerentes respectivos são colocados como inserções na figura. Pode ser notado que diminuindo o valor de r passamos a obter regiões cada vez mais finas com estados coerentes com números de onda cada vez maiores. Dentro da região das línguas de coerência, a dinâmica da rede é espacialmente coerente e temporalmente periódica e passa por uma cascata de dobra de período se r ou σ diminuem [23].

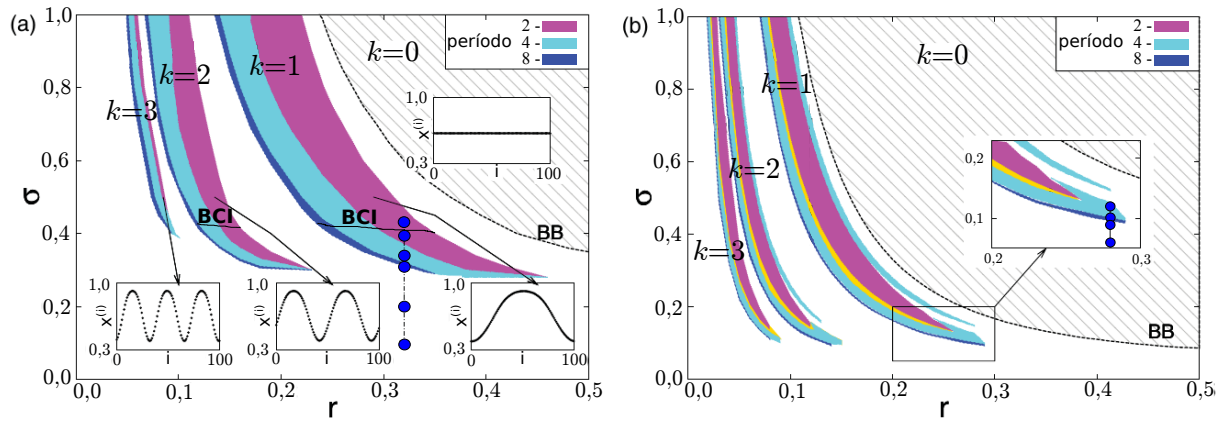
Com o intuito de mostrar a universalidade do cenário de transição de coerência para incoerência, Omelchenko e colaboradores utilizam também uma rede de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, em que a dinâmica individual dos elementos da rede é dada pelo sistema de Roessler [23]. Esse sistema foi proposto pelo cientista alemão Otto Roessler e é um sistema de equações mais simples do que o de Lorenz, Eq. (1.2), por apresentar apenas um termo não-linear. A equação de evolução dos sistemas acoplados é

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i)} &= -y^{(i)} - z^{(i)} + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x^{(j)} - x^{(i)}), \\ \dot{y}^{(i)} &= x^{(i)} + ay^{(i)} + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y^{(j)} - y^{(i)}), \\ \dot{z}^{(i)} &= b + z^{(i)}(x^{(i)} - c) + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-P}^{i+P} (z^{(j)} - z^{(i)}), \end{aligned} \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

com parâmetros $a = 0,42$, $b = 2,0$ e $c = 4,0$. Para esses valores de parâmetros a dinâmica do sistema de Roessler converge para um atrator caótico.

O espaço de parâmetros $r \times \sigma$ para essa rede pode ser visto na Figura 3.3(b), e pode-se notar a presença das mesmas estruturas observadas no caso da rede de mapas logísticos. Novamente as cores indicam o período da dinâmica nas línguas de coerência, exceto pelas regiões amarelas, que são regiões de multiestabilidade e comportamento mais complexo [23].

Figura 3.3: Regiões coerentes no espaço de parâmetros $r \times \sigma$ para (a) a rede de mapas logísticos da Eq. (3.4) e (b) a rede de sistemas de Roessler da Eq (3.5), classificadas pelo número de onda k . As cores nas estruturas coerentes separam as regiões de acordo com o período da dinâmica temporal. A linha de bifurcação de coerência-incoerência (BCI) define um limite acima do qual estados quimera não são possíveis. A região hachurada limitada pela curva da bifurcação *blowout* (BB) é onde ocorre a sincronização caótica. As inserções em (a) servem para ilustrar estados coerentes típicos observados. Parâmetros utilizados são (a) $a = 3,8$; (b) $a = 0,42$, $b = 2,0$ e $c = 4,0$.

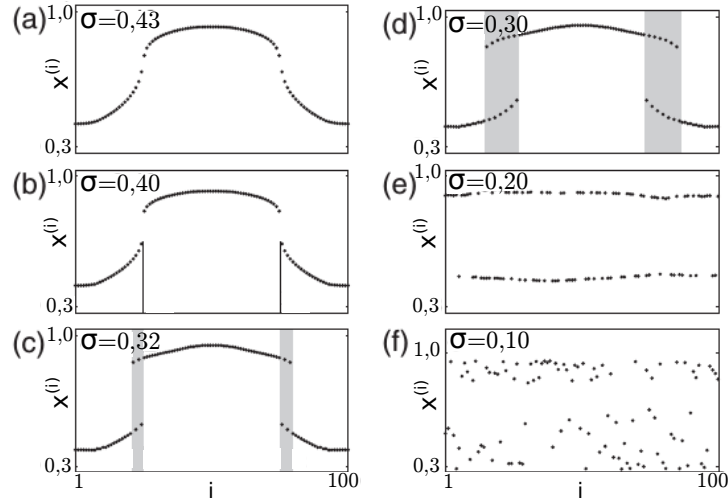


Fonte: Adaptado de [23].

Na Figura 3.4(a)-(f) vemos um cenário de transição de um estado coerente para um estado incoerente para o mapa logístico. Na Fig. 3.4(a) a rede está em um estado coerente com um perfil espacial dado por $k = 1$. Ao diminuirmos a intensidade do acoplamento, o estado coerente se divide em dois domínios, um superior e outro inferior. Além disso, ao diminuir ainda mais o valor de σ faz-se com que na região de fronteira entre as duas camadas comecem a surgir pequenas regiões espacialmente incoerentes (regiões cinzas na Figura 3.4(c)-(d)). A largura das regiões incoerentes cresce com a diminuição de σ até que a dinâmica se torna completamente incoerente, como visto nas Fig. 3.4(e)-(f). O estado quimera observado aqui é denominado quimera de fase, pois a incoerência espacial ocorre devido a uma diferença de fase entre os elementos da rede. No instante de tempo posterior ocorre a inversão do perfil espacial, com os elementos do plano superior passando ao inferior e vice-versa.

Procedendo de forma similar para a rede de sistemas de Roessler, iniciamos a partir de um valor de σ na língua de coerência e observamos os estados da rede para valores

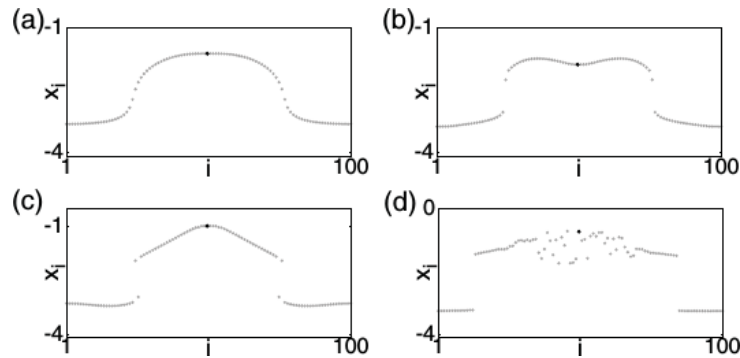
Figura 3.4: Perfis espaciais da dinâmica da Eq. (3.4) para diferentes valores de intensidade de acoplamento. (a) $\sigma = 0,43$, (b) $\sigma = 0,40$, (c) $\sigma = 0,32$, (d) $\sigma = 0,30$, (e) $\sigma = 0,20$, (f) $\sigma = 0,10$. Demais parâmetros utilizados são $a = 3,8$ e $r = 0,32$.



Fonte: Adaptado de [23].

menores de acoplamento. Na Fig. 3.5(a)-(d) vemos a transição para um estado quimera a partir de outro inicialmente coerente. Começamos em $\sigma = 0,12$, onde a rede converge para um estado coerente com $k = 1$, diminuindo para $\sigma = 0,10$ o estado coerente se divide em dois domínios, como no caso da rede de mapas, porém ainda sem incoerências espaciais. Diminuindo ainda mais, para $\sigma = 0,09$, já é possível observar pequenas regiões incoerentes na fronteira entre os dois domínios até que, quando $\sigma = 0,06$, passa a existir uma grande região espacialmente incoerente no centro combinada a uma outra coerente no restante da rede. Esse tipo de estado quimera, assim como o da Figura 3.1, é denominado quimera de amplitude.

Figura 3.5: Perfis espaciais da dinâmica da Eq. (3.5) para diferentes valores de intensidade de acoplamento. (a) $\sigma = 0,12$, (b) $\sigma = 0,10$, (c) $\sigma = 0,09$, (d) $\sigma = 0,06$. Demais parâmetros utilizados são $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 4,0$ e $r = 0,28$.



Fonte: Adaptado de [23].

Outro resultado importante do trabalho de Omelchenko e colaboradores [23] foi a metodologia para derivação do valor de σ na transição do coerência-incoerência. Para a

rede de mapas logísticos da Eq. (3.4) com $a = 3,8$ o valor determinado é $\sigma_c \approx 0,44$. Esse é o valor utilizado para traçar a linha da bifurcação de coerência-incoerência (BCI) na Figura 3.3(a).

3.2 Condições Iniciais para Estados Quimera

Abrams e Strogatz comentam em seus artigos de 2004 e 2006 [20, 51] que se depararam com uma grande dificuldade para obter estados quimera em suas simulações devido à definição das condições iniciais do sistema. Especificamente no artigo de 2006 [51], a seção 3 inicia com:

“Infelizmente, não pudemos encontrar o estado quimera em nossas simulações iniciais da Eq. (1). Não importava como iniciávamos o sistema, sempre convergia para o estado em fase. No relato que anunciou o estado quimera, Kuramoto [2003] não deu detalhes precisos das condições iniciais que ele utilizou. Ele a descreveu como um ‘padrão de fase inicial de lombada única adequado’ (...).

Por fim, nós pedimos ajuda ao Kuramoto (novamente!), e ele gentilmente explicou o que ele quis dizer (...)” (tradução própria).

Apenas em 2016 é que foi publicado o primeiro trabalho, por Martens e colaboradores [52], tratando especificamente de condições iniciais que levam a estados quimera, que até então tinham sido consideradas apenas por meio de medidas estatísticas. Tais medidas são baseadas na fração de condições iniciais, geradas a partir de uma distribuição aleatória, que resultam em estados quimera [53, 54].

O modelo utilizado por Martens e colaboradores [52] considera duas populações de osciladores, em que a intensidade do acoplamento entre os membros de uma população é maior do que com os membros da população vizinha. A dinâmica de cada oscilador é dada por

$$\dot{\theta}_k^\ell = \omega + \sum_{\ell'=1}^2 \frac{K_{\ell\ell'}}{N_{\ell'}} \sum_{l=1}^{N_{\ell'}} \sin(\theta_l^{\ell'} - \theta_k^\ell - \alpha), \quad (3.6)$$

onde θ_k^ℓ é a fase do k -ésimo oscilador pertencente à população ℓ , sendo $k = 1, 2, \dots, N_\ell$ e $\ell = 1, 2$, o parâmetro ω é a frequência natural dos osciladores, $K_{\ell\ell'}$ é a intensidade do acoplamento entre as populações ℓ e ℓ' , N_ℓ é o tamanho da população ℓ e α é a constante de Sakaguchi.

² *Unfortunately, we could not find the chimera state in our early simulations of Eq. (1). No matter how we started the system, it always converged to the in-phase state. In the report that announced the chimera state, Kuramoto [2003] did not give precise details of the initial condition he used. He described it as a “suitable single-humped initial phase pattern” (...).*

Eventually, we asked Kuramoto for help (again!), and he kindly explained what he meant (...).

No limite $N_\ell \rightarrow \infty$ a Eq. (3.6) dá lugar à uma equação de continuidade [55, 56] na forma

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial t} + \frac{\partial(v_\ell f_\ell)}{\partial \theta^\ell} = 0, \quad (3.7)$$

em que $f_\ell(\theta, t)$ é a função densidade de probabilidade dos osciladores em ℓ e $v_\ell(\theta, t)$ a função de velocidade, dada por

$$v_\ell(\theta^\ell, t) = \omega + \sum_{\ell'=1}^2 K_{\ell\ell'} \int \sin(\theta^{\ell'} - \theta^\ell - \alpha) f_{\ell'}(\theta^{\ell'}, t) d\theta^{\ell'}. \quad (3.8)$$

Seguindo o procedimento de Ott e Antonsen [56], expandimos a função densidade de probabilidade dos osciladores em uma série de Fourier, nos restringindo a uma classe especial de funções $f_\ell(\theta, t)$ que têm a forma de um *kernel* de Poisson [56]. Assim, temos

$$f_\ell(\theta^\ell, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} [a_\ell(t) e^{i\theta^\ell}]^n + [a_\ell^*(t) e^{-i\theta^\ell}]^n \right] \right\}, \quad (3.9)$$

denominado *ansatz* de Ott-Antonsen.

Multiplicando ambos os lados da Eq. (3.9) por $e^{i\theta^\ell}$ e integrando em relação à θ^ℓ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i\theta^\ell} f_\ell(\theta^\ell, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i\theta^\ell} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [a_\ell(t)]^n \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i(n+1)\theta^\ell} + [a_\ell^*(t)]^n \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{-i(n-1)\theta^\ell} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

As duas primeiras integrais do lado direito ficam,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i\theta^\ell} &= \frac{1}{i} (e^{i\pi} - e^{-i\pi}) = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i(n+1)\theta^\ell} &= \frac{1}{i(n+1)} (e^{i(n+1)\pi} - e^{-i(n+1)\pi}) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

enquanto que a terceira integral fica

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell &= 2\pi, \quad \text{se } n = 1, \text{ e} \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{-i(n-1)\theta^\ell} &= \frac{-1}{i(n-1)} (e^{-i(n-1)\pi} - e^{i(n-1)\pi}) = 0, \quad \text{se } n > 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo na Eq. (3.10), chegamos em

$$a_\ell^*(t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\ell e^{i\theta^\ell} f_\ell(\theta^\ell, t). \quad (3.13)$$

Então podemos reescrever a Eq. (3.8) como

$$\begin{aligned} v_\ell(\theta^\ell, t) &= \omega + \sum_{\ell'=1}^2 \frac{K_{\ell\ell'}}{2i} \int \left(e^{i(\theta^{\ell'} - \theta^\ell - \alpha)} - e^{-i(\theta^{\ell'} - \theta^\ell - \alpha)} \right) f_{\ell'}(\theta^{\ell'}, t) d\theta^{\ell'}, \\ v_\ell(\theta^\ell, t) &= \omega + \sum_{\ell'=1}^2 \frac{K_{\ell\ell'}}{2i} \left(a_{\ell'}^* e^{-i(\theta^\ell + \alpha)} - a_{\ell'} e^{i(\theta^\ell + \alpha)} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Calculando, em seguida, as derivadas $\partial f_\ell / \partial t$ e $\partial(f_\ell v_\ell) / \partial \theta^\ell$ e substituindo na equação da continuidade (3.7), chegamos na equação de evolução dos coeficientes [57]

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\omega a_1 - \frac{1}{2} (\mu a_1^* + \nu a_2^*) e^{-i\alpha} + \frac{1}{2} (\mu a_1 + \nu a_2) e^{i\alpha}, \\ \dot{a}_2 &= -i\omega a_2 - \frac{1}{2} (\mu a_2^* + \nu a_1^*) e^{-i\alpha} + \frac{1}{2} (\mu a_2 + \nu a_1) e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto, no limite $N \rightarrow \infty$ a distribuição final dos osciladores da Eq. (3.6) pode ser determinada resolvendo a equação dos coeficientes (3.15).

O modelo utilizado por Martens e colaboradores [52] considera, ainda, o acoplamento simétrico entre vizinhos $K_{12} = K_{21} = \nu$ e igual entre os membros da mesma população $K_{11} = K_{22} = \mu$, com a condição adicional $\mu + \nu = 1$ e o parâmetro $\beta = \pi/2 - \alpha$. Reescrevendo a Eq. (3.15) utilizando as coordenadas polares ρ_ℓ e ϕ_ℓ , definidas por $a_\ell(t) = \rho_\ell(t) e^{-i\phi_\ell(t)}$, e a diferença de fase $\psi = \phi_1 - \phi_2$, chegamos no sistema tridimensional

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{1-\rho_1^2}{2} [\mu \rho_1 \sin \beta + \nu \rho_2 \sin(\beta - \psi)], \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{1-\rho_2^2}{2} [\mu \rho_2 \sin \beta + \nu \rho_1 \sin(\beta + \psi)], \\ \dot{\psi} &= \frac{1+\rho_2^2}{2\rho_2} [\mu \rho_2 \cos \beta + \nu \rho_1 \cos(\beta + \psi)] - \frac{1+\rho_1^2}{2\rho_1} [\mu \rho_1 \cos \beta + \nu \rho_2 \cos(\beta - \psi)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

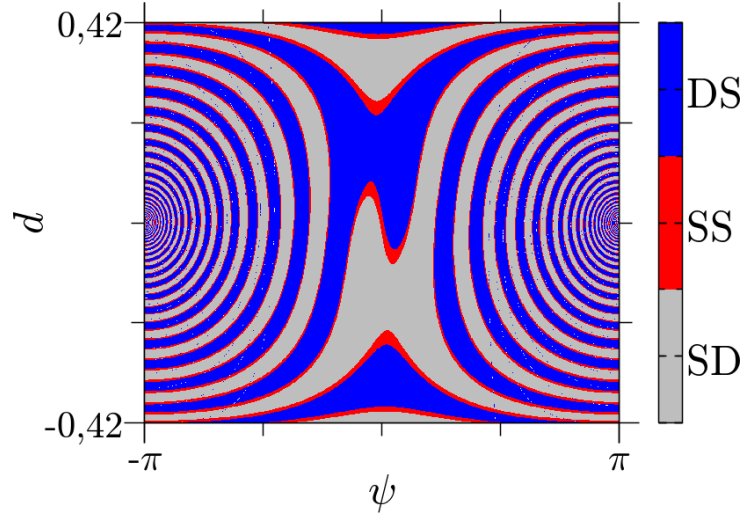
Da Eq. (3.13) temos que $\rho_\ell e^{-i\phi_\ell} = \int e^{i\theta^\ell} f_\ell(\theta^\ell, t) d\theta^\ell$, o que nos permite interpretar ρ_ℓ e ϕ_ℓ como parâmetros de ordem locais da população ℓ . Logo, ϕ_ℓ fornece o centro da distribuição $f_\ell(\theta^\ell, t)$ enquanto que ρ_ℓ mostra se as fases dos osciladores estão sincronizadas. Nessa rede de duas populações, um estado espacial da rede é considerado quimera quando uma das populações encontra-se sincronizada enquanto a outra está dessincronizada. O estado sincronizado global é dado por $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e é estável para os parâmetros considerados, enquanto que o estado $\rho_1 = \rho_2 = 0$, em que ambas as populações estão dessincronizadas, é instável [52].

Na Fig. 3.6 plotamos um corte da bacia de atração, definido pela superfície $s_0 = (\rho_{10} + \rho_{20})/2 = 0,56625$, para o sistema dado pela Eq. (3.16) utilizando as variáveis $d_0 = (\rho_{10} - \rho_{20})/2$ e ψ_0 . Para cada ponto na grade de 1024×1024 evoluímos o sistema numericamente utilizando o método de integração numérica de Ronge-Kutta de 4ª ordem até um tempo final de integração $t_f = 10^4$, com passo de 10^{-2} . Ao final desse tempo classificamos o estado final como sincronizado-dessincronizado (SD), sincronizado-sincronizado (SS) ou dessincronizado-sincronizado (DS).

Do corte feito na bacia de atração podemos notar que a bacia de atração dos estados quimera (regiões azul e cinza da Fig. 3.6) é praticamente dominante nesse sistema para

os parâmetros $A = 0,10$ e $\beta = 0,025$ utilizados. Também podemos notar que a fronteira entre as bacias é bem definida e suave, apresenta um formato espiral na região próxima ao ponto $(d, \psi) \approx (0, \pi)$ e a bacia do estado SS sempre aparece entre as bacias dos estados DS e SD.

Figura 3.6: Bacia de atração da Eq. (3.16), representando o sistema de $N = 2$ populações de osciladores acoplados. Condições iniciais na região cinza resultam em um estado sincronizado-dessincronizado, na região azul resultam em um estado dessincronizado-sincronizado e na região vermelha ambas as populações sincronizam.



Fonte: O autor.

Outro trabalho que trata especificamente de bacia de atração de estados quimera foi publicado em 2017 por Rakshit e colaboradores [58]. Em seu artigo eles analisaram uma rede com acoplamento não-local de raio finito formada por sistemas de Mackey-Glass com atraso. A evolução temporal da rede é dada por

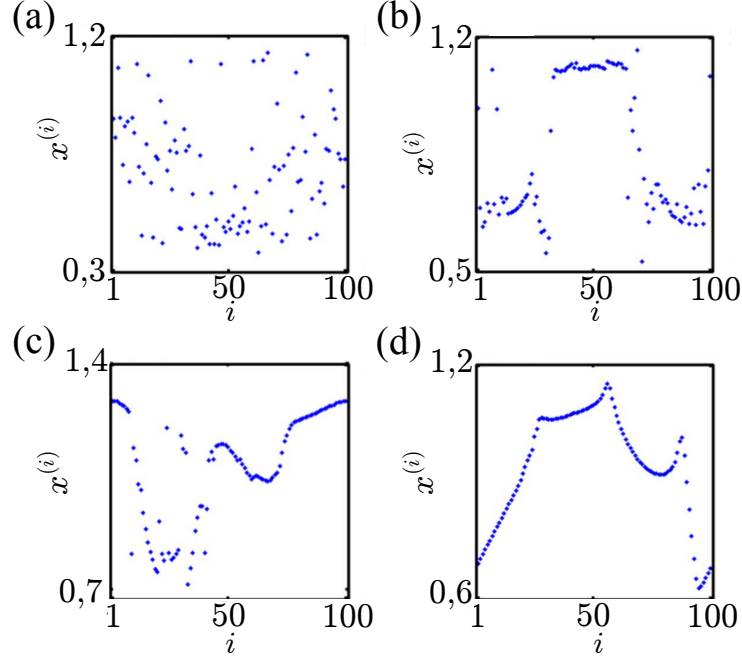
$$\dot{x}^{(i)} = -ax^{(i)} + \frac{bx^{(i)}(t - \tau)}{1 + (x^{(i)}(t - \tau))^{10}} + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x^{(j)} - x^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.17)$$

em que, novamente, os parâmetros σ e $r = P/N$ são a intensidade e o raio do acoplamento, respectivamente. Os demais parâmetros utilizados são $a = 1$, $b = 2$, $\tau = 2$ e $N = 100$.

Rakshit e colaboradores notam inicialmente que para alguns valores de σ a Eq. (3.17) converge para uma configuração espacialmente coerente, incoerente ou quimera, dependendo da condição inicial. Nas Figuras 3.7(a)-(d) plotamos perfis espaciais da rede obtidos por eles, em que para um instante fixo de tempo é plotado o valor de $x^{(i)}$ de cada um dos $N = 100$ osciladores. Nas Figuras 3.7(a) e (b) podemos observar estados incoerente e quimera, respectivamente, obtidos para $\sigma = 0,35$, enquanto que nas Figuras 3.7(c) e (d) observamos respectivamente perfis referentes a estados quimera e coerente obtidos para $\sigma = 0,56$.

A identificação dos estados espaciais da rede é feita de acordo com uma medida

Figura 3.7: Perfis espaciais da rede de sistema de Mackey-Glass acoplados. (a) e (b) mostram a coexistência de estados incoerente e quimera para $\sigma = 0,35$, enquanto que (c) e (d) mostram estados quimera e coerente para $\sigma = 0,56$. Demais parâmetros são: $a = 1$, $b = 2$, $\tau = 2$ e $r = 0,3$ [58].



Fonte: Adaptado de [58].

proposta por Gopal e colaboradores [59] chamada *strength of incoherence* (SI), que é uma medida estatística baseada na série temporal da rede. Para determiná-la, começamos introduzindo as variáveis de diferença $z^{(i)} = x^{(i)} - x^{(i+1)}$, com $i = 1, \dots, N$ e $x^{(N+1)} = x^{(1)}$. Nessas novas variáveis, se os osciladores i e $i + 1$ estão oscilando coerentemente, então $z^{(i)} \rightarrow 0$ para $N \rightarrow \infty$. Se, no entanto, estiverem oscilando incoerentemente, teremos $z^{(i)}$ entre $-|x_{max} - x_{min}|$ e $|x_{max} - x_{min}|$, em que x_{max} e x_{min} são, respectivamente, os limites superior e inferior da variável x . Dividimos, então, a rede em M (par) caixas contendo $n = N/M$ osciladores e, para cada uma dessas caixas, calculamos o desvio padrão local das variáveis $z^{(i)}$ de acordo com

$$\chi_m = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=n(m-1)+1}^{nm} [z^{(j)} - \langle z \rangle]^2} \right\rangle_t, \quad (3.18)$$

em que $\langle z \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=n(m-1)+1}^{nm} z_t^{(j)}$ é a média dos valores de z dos osciladores pertencentes à caixa m para um instante de tempo fixo, $\langle \dots \rangle_t$ é a média temporal e $m = 1, 2, \dots, M$ é o índice de cada caixa [59].

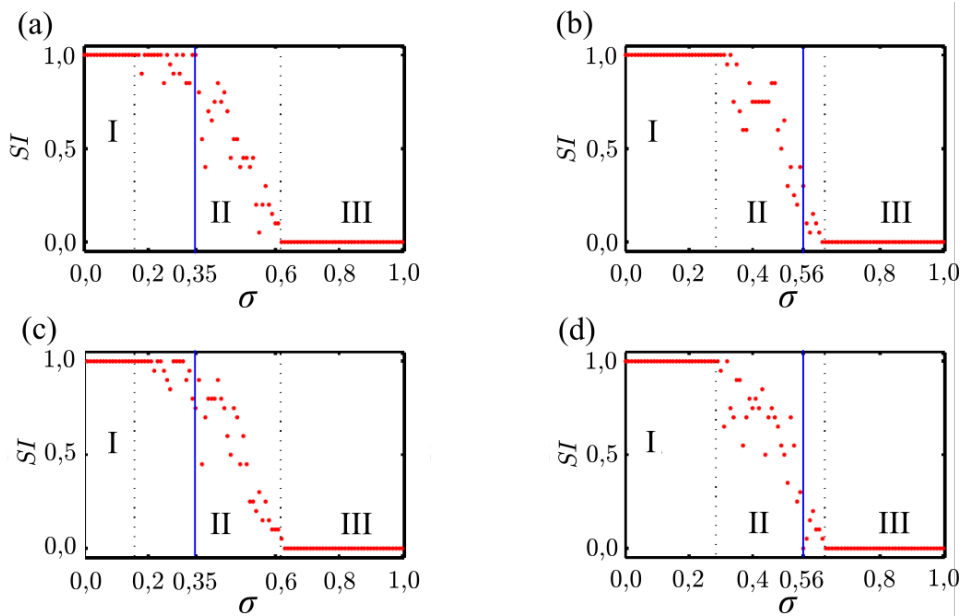
A partir da Eq. (3.18) introduzimos SI de acordo com

$$SI = 1 - \frac{\sum_{m=1}^M s_m}{M}, \quad s_m = \Theta(\delta - \chi_m), \quad (3.19)$$

sendo Θ a função degrau de Heaviside e δ um limiar pré-definido. Dependendo do valor de χ_m e do limiar $\delta > 0$, a variável s_m possui valor 1 ou 0, consoante com a condição de os osciladores na caixa m estarem todos coerentes ou não. Portanto quando todos os osciladores da rede estão coerentes $s_m = 1 \forall m$ e $SI = 0$, quando estão incoerentes $s_m = 0 \forall m$ e $SI = 1$, valores intermediários de SI representam uma coexistência de regiões coerentes e incoerentes [59, 58].

Rakshit e colaboradores utilizaram o SI para caracterizar os estados espaciais da rede ao modificar o valor de σ , para tal eles utilizaram $M = 20$ e $\delta = 0,05|x_{max} - x_{min}|$ [58]. Nas Figuras 3.8(a) e (c) vemos os estados obtidos utilizando as condições iniciais relativas aos estados incoerente e quimera das Fig. 3.7(a) e (b). As linhas azuis em $\sigma = 0,35$ indicam a região onde estados incoerentes e quimera coexistem. Por sua vez, as Figuras 3.8(b) e (d) mostram os estados obtidos utilizando as condições iniciais relativas aos estados quimera e coerente das Figuras 3.7(c) e (d), aqui as linhas azuis indicam a coexistência de estados quimera e coerente para $\sigma = 0,56$. As regiões I, II e III da Figura 3.8 denotam regiões de dinâmica espacial incoerente, quimera, e coerente. Podemos notar que as delimitações dessas regiões (linhas pontilhadas das figuras) dependem necessariamente da condição inicial utilizada, e que a coexistência dos diversos estados espaciais na rede surgem a partir de um determinado valor de σ .

Figura 3.8: SI em função de σ para a rede de Mackey-Glass com atraso. Em todos os casos foram utilizados os mesmos parâmetros para a rede, sendo alterada apenas a história inicial dos sistemas. As regiões I, II e III denotam regiões de dinâmica espacial incoerente, quimera e coerente. As linha azuis marcam os valores de σ e de SI das Figuras 3.7(a)-(d). Parâmetros utilizados são: $a = 1$, $b = 2$, $\tau = 2$, $r = 0,3$ e $N = 100$.



Fonte: Adaptado de [58].

A bacia de atração de sistemas com atraso é um espaço de funções com dimensão

infinita [58]. Para visualizar as bacias de atração dos estados coletivos da rede da Eq. (3.17) Rakshit e colaboradores fazem uma projeção do espaço de estados iniciais de dimensão infinita do i -ésimo oscilador em um espaço de dimensão finita. A função de história inicial do sistema é escrita como

$$x^{(i)}(t) = c^{(i)} \sum_{j=0}^{25} (-1)^j \frac{t^j}{j!}, \quad \text{com } t \in [-\tau, 0], \quad (3.20)$$

em que $c^{(i)}$ é um número aleatório. Apesar de a Eq. (3.20) simplificar um pouco o problema (projetando o espaço de estados iniciais para um espaço polinomial³ de dimensão 26), ainda assim não nos possibilita analisar a bacia de atração, visto que temos que determinar N valores de $c^{(i)}$ para a rede. Para contornar esse problema, consideramos a condição adicional $c^{(i)} = \frac{(i-1)c^{(1)} + c^{(2)}}{i}$, com $i \geq 3$, de modo que a história inicial de cada oscilador da rede é determinado a partir de $c^{(1)}$ e $c^{(2)}$.

Nas Figuras 3.9(a) e (b) são varridos os valores de $c^{(1)}$ e $c^{(2)}$ no intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$ para intensidade do acoplamento $\sigma = 0,33$ e $\sigma = 0,63$, respectivamente. Os pontos de cor azul denotam as condições iniciais que convergem para a dinâmica incoerente, pontos vermelhos resultam em estados quimera e pontos verdes em estados coerentes. Na Figura 3.9(a) fica evidente a coexistência de estados incoerente e quimera para a mesma intensidade de acoplamento, enquanto que em (b) verifica-se a coexistência de estados quimera e coerentes.

Para obter informações sobre o quão estável são os estados obtidos, Rakshit e colaboradores calculam estabilidade da bacia⁴ (EB) para os três estados da rede. Estabilidade da bacia é uma medida desenvolvida por Menck e colaboradores [60] e está relacionada com o volume da bacia de atração de um determinado estado. É uma medida que complementa o paradigma da estabilidade linear por ser não-local, não-linear e facilmente aplicável, mesmo em sistemas de dimensão alta [60].

O valor de EB é obtido evoluindo temporalmente um número N_0 de condições iniciais aleatórias de um dado intervalo na bacia de atração. Sendo N_{IN} , N_{QM} e N_{CO} o número dessas condições iniciais que convergem para os estados incoerente, quimera e coerente, a estabilidade da bacia de cada um dos casos é dada por

$$EB_{IN} = \frac{N_{IN}}{N_0}, \quad EB_{QM} = \frac{N_{QM}}{N_0} \quad \text{e} \quad EB_{CO} = \frac{N_{CO}}{N_0}. \quad (3.21)$$

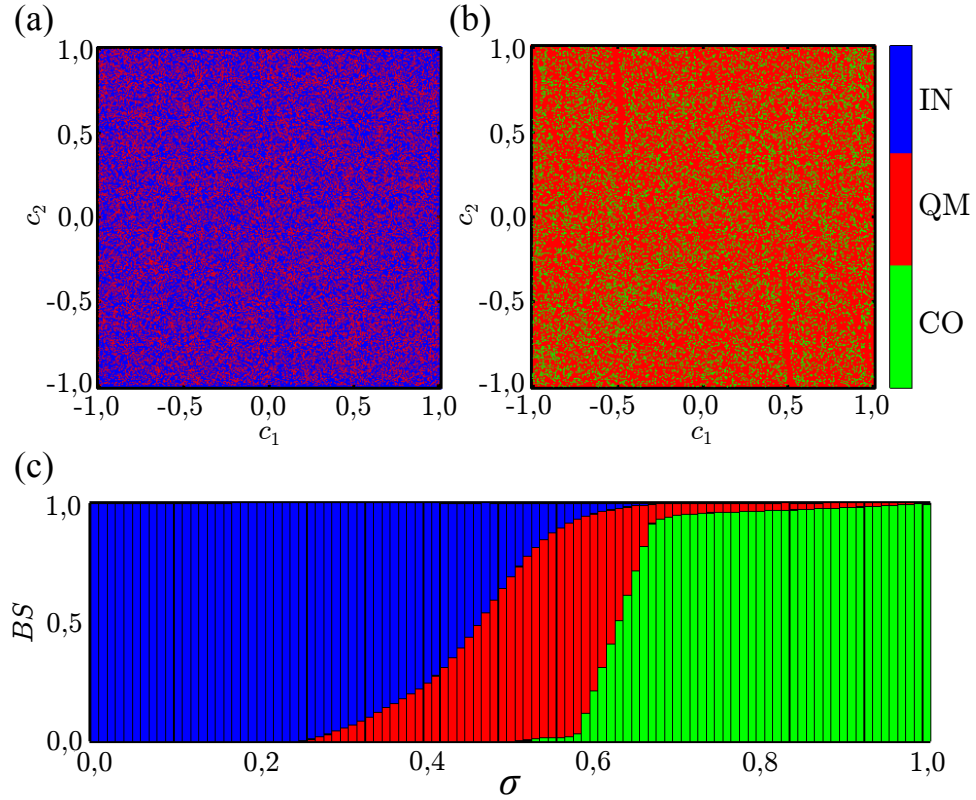
Sendo que $0 \leq EB \leq 1$. O erro em cada caso é estimado de acordo com $e = \sqrt{EB(1-EB)}/\sqrt{N_0}$ [60, 58] e a soma da estabilidade da bacia de todos os estados da rede é $EB_{IN} + EB_{QM} + EB_{CO} = 1$.

³O truncamento em P_{25} é feito porque as medidas de SI não apresentam flutuação significativa para polinômios de maior ordem [58].

⁴*Basin Stability*.

Na Figura 3.9(c) podemos ver a variação no valor da EB dos três estados da rede com relação à σ utilizando $N_0 = 5000$ [58]. Da figura pode-se perceber que para valores baixos de intensidade de acoplamento apenas o estado incoerente é observado. Conforme aumenta-se σ passa-se a ser possível observar também a ocorrência de estados quimera para um pequeno conjunto de condições iniciais. Aumentando σ ainda mais, ocorre um aumento no número de condições iniciais que resultam em estados quimera e começam a ser observados estados coerentes na rede, sendo que para $\sigma = 0,6$ os três estados coexistem. Prosseguindo com o aumento de σ , a estabilidade da bacia dos estados coerentes passa a ser dominante sobre os dois outros estados, o que indica uma probabilidade muito maior de se obter um estado coerente.

Figura 3.9: Corte da bacia de atração para a rede acoplada de sistemas de Mackey-Glass com atraso. Intensidade de acoplamento (a) $\sigma = 0,33$ e (b) $\sigma = 0,63$. O esquema de cores denota pontos azuis como condições iniciais que convergem para a estados incoerentes, pontos vermelhos resultam em estados quimera e pontos verdes em estados coerentes. Em (c) plotar-se o valor de ES para os três estados da rede com relação à σ . Demais parâmetros são: $a = 1$, $b = 2$, $\tau = 2$, $r = 0,3$ e $N = 100$.



Fonte: Adaptado de [58].

3.3 Conclusão

A pretensão deste capítulo era expor o fenômeno conhecido como estado quimera que ocorre em redes de osciladores acoplados, bem como alguns avanços consolidados no estudo

das bacias de atração de tais estados. Com isso em mente, na Seção 3.1 apresentamos o primeiro relato da coexistência de domínios de sincronização e dessincronização feito por Kuramoto e Battogtokh, em seguida comentamos os resultados obtidos por Abrams e Strogatz e, finalmente, mostramos como Omelchenko e colaboradores obtiveram estados quimera em redes de mapas logísticos e sistemas de Roessler caóticos a partir de um acoplamento não-local, com a presença de regiões de coerência bem definidas no espaço de parâmetros $\sigma \times r$.

Na Seção 3.2 comentamos os problemas relatados por Abrams e Strogatz para a obtenção de estados quimera em função da dificuldade na definição das condições iniciais da rede. Em seguida mostramos os resultados obtidos por Martens e colaboradores para a bacia de atração de um sistema composto de duas populações de osciladores interagentes, a partir de simplificações obtidas utilizando o *ansatz* de Ott-Antonsen, de onde verificamos que para esse sistema a fronteira entre as bacias de atração dos diferentes estados da rede é suave. Por fim, apresentamos os resultados obtidos por Rakshit e colaboradores para uma rede de sistemas de Mackey-Glass com atraso. Em seus resultados eles fazem uma projeção da história inicial do sistema em um espaço polinomial em função de dois parâmetros e mostram a coexistência de estados para determinados valores de intensidade de parâmetros, porém sem investigar a existência estruturas complexas nas bacias de atração.

Do que foi exposto é possível notar que, apesar de ainda não estarem bem estabelecidos os critérios suficientes e necessários para que uma rede de elementos acoplados suporte sua existência, os estados quimera podem ser obtidos a partir de redes compostas por diferentes sistemas dinâmicos com diversas topologias de acoplamento. A bacia de atração de cada estado desempenha um importante papel nesse quesito pois dependendo da forma como as condições iniciais são estabelecidas, talvez não se obtenha o estado final desejado para a rede, ainda que os parâmetros estejam corretos. Isso ocorre devido à multiestabilidade presente nesses sistemas, que fica clara nas Figuras 3.6, 3.8 e 3.9. Portanto, a análise do volume e da estrutura das bacias de atração é um item essencial para a determinação das condições de obtenção desses estados.

4 Resultados

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos para a análise da bacia de atração em uma rede de mapas de Hénon e também de uma rede de sistemas de Roessler, em ambos os casos o acoplamento é feito segundo uma topologia não-local. Os principais resultados foram publicados no volume 28 do periódico científico *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, em agosto de 2018 [29].

4.1 Rede de Mapas de Hénon Acoplados

De forma geral, uma rede de N mapas d -dimensionais acoplados pode ser escrita como

$$\mathbf{x}_{t+1}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t^{(i)}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(j)}), \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

Em que $\mathbf{x}_t^{(i)}$ nos dá o estado do mapa i no tempo discreto t , $\mathbf{F}(\mathbf{x}_t^{(i)})$ é responsável pela dinâmica do mapa na ausência de acoplamento e $\mathbf{G}(\mathbf{x}_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(j)})$ é a função de acoplamento.

Aqui a dinâmica dos mapas individuais é dada pela função do mapa de Hénon, Eq. (2.12), e o acoplamento é considerado a partir de uma topologia periódica, $x_{j+N} = x_j$, do tipo não-local e dado por

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(j)}) = \frac{\sigma \mathbf{E}}{2rN} \sum_{j=i-rN}^{i+rN} [\mathbf{F}(\mathbf{x}_t^{(j)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_t^{(i)})], \quad (4.2)$$

onde σ é a intensidade do acoplamento, r é o raio do acoplamento e $\mathbf{E}$ fornece quais variáveis do mapa estão acopladas. Como consideramos apenas o acoplamento na variável x do mapa de Hénon, temos

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Substituindo as equações (4.2), (4.3) e a expressão do mapa de Hénon em (4.1) e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(i)} &= (1 - \sigma)(1 - \alpha x_t^{(i)2} + y_t^{(i)}) + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{\substack{j=i-rN \\ j \neq i}}^{i+rN} (1 - \alpha x_t^{(j)2} + y_t^{(j)}) \\ y_{t+1}^{(i)} &= \beta x_t^{(i)} \end{aligned}, \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4)$$

A partir da Eq. (4.4) podemos notar como as variáveis σ e r atuam no acoplamento. O valor da intensidade do acoplamento, σ , está no intervalo $[0,1]$. Quando $\sigma = 0$ o segundo termo do lado direito da Eq. (4.4) não contribui para a dinâmica da rede, que então evolui de forma independente para cada mapa, sem acoplamento. Quando $\sigma = 1$, o primeiro termo do lado direito é que passa a ser nulo, sendo a dinâmica de cada mapa da rede dada pela contribuição média dos vizinhos aos quais está conectado. Assim, σ funciona como uma ponderação entre a contribuição individual e do acoplamento na dinâmica de cada mapa da rede.

A rede de mapas acoplados dada pela Eq. (4.4) foi utilizada por Semenova e colaboradores [24], com os valores de parâmetros $(\alpha, \beta) = (1,4; 0,3)$, com o intuito de investigar a dinâmica no espaço de parâmetros $\sigma \times r$ e a possível influência da não-hiperbolicidade na ocorrência de estados quimera. Aqui, utilizamos $(\alpha, \beta) = (1,44; 0,164)$ e $r = 0,3$ para todos os casos, mantendo o foco nas mudanças na bacia de atração em relação a σ .

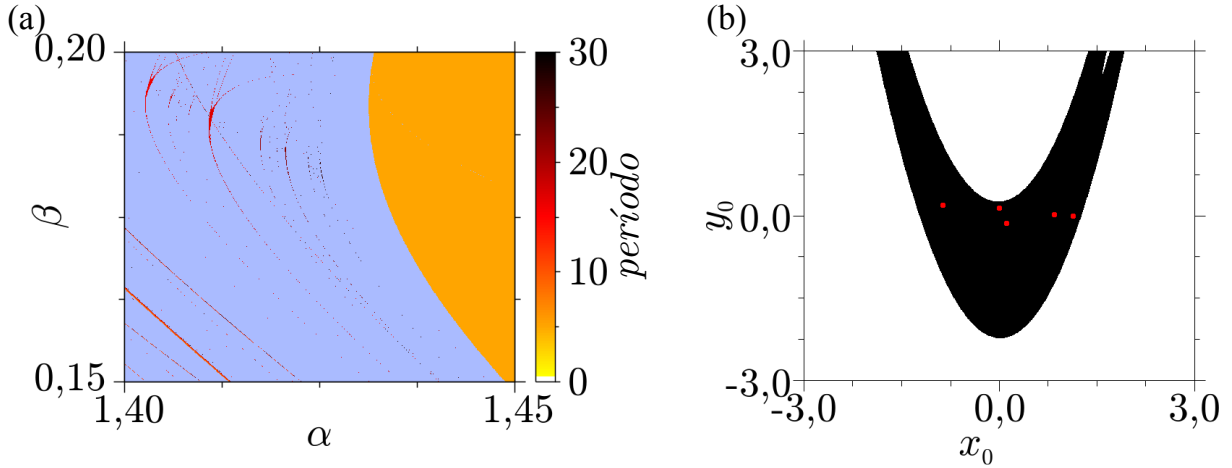
Na Fig. 4.1(a) plotamos uma ampliação do espaço de parâmetros do mapa de Hénon sem acoplamento. Novamente a escala de cor representa o período da órbita resultante para um dado conjunto de parâmetros, e órbitas com o mesmo período possuem a mesma cor. Nessa figura consideramos órbitas com período maior do que 30 como sendo caóticas. Da Fig. 4.1(a) podemos ver que o conjunto de parâmetros escolhido está no interior da grande região de período 5 presente no espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Na Fig. 4.1(b) plotamos a bacia de atração do mapa de Hénon para $(\alpha, \beta) = (1,44; 0,164)$, pontos na região preta convergem para o atrator de período 5 (pontos vermelhos na figura), enquanto pontos na região branca divergem para o infinito.

Na Fig. 4.2(a) mostramos a dinâmica espaço-temporal para a rede considerando $\sigma = 0,30$. Iteramos a rede de mapas com uma dada condição inicial e plotamos a dinâmica após um tempo transiente de 9000 iteradas. Consideramos um transiente longo com o objetivo de enfatizar os estados assintóticos. Podemos notar que a dinâmica é composta de regiões coerentes e incoerentes coexistindo, o que caracteriza o estado como um estado quimera. Na Fig. 4.2(b) plotamos o perfil espacial da rede no tempo $t = t_{trans} + 26$ onde é possível identificar a separação da dinâmica espacial em dois domínios e a região incoerente ao redor de $i = 250$.

O espectro de s_m dado pela Eq. (3.19), que nos fornece quais regiões da rede estão incoerentes, foi calculado para esse estado considerando 1500 iteradas após o tempo transiente. O valor do limiar utilizado é $\delta = 0,01|x_{max} - x_{min}|$, em que x_{max} e x_{min} são respectivamente o maior e menor valor da variável x de um dos mapas da rede no intervalo de tempo utilizado. Como a variável y do mapa de Hénon é linearmente dependente de x , utilizamos apenas a variável x para determinar o estado final.

Na Fig. 4.2(c) plotamos o espectro de s_m para a dinâmica da rede. Dessa figura podemos ver que nas regiões em que a dinâmica espacial apresenta uma descontinuidade

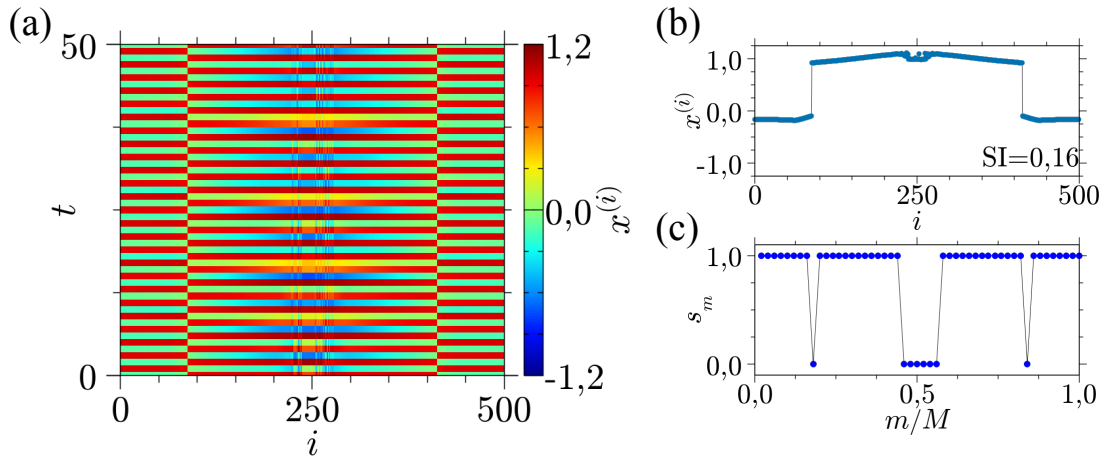
Figura 4.1: (a) Ampliação do espaço de parâmetros de um mapa de Hénon sem acoplamento. Regiões cuja dinâmica apresenta o mesmo período possuem a mesma cor. A grande região amarela no lado direito corresponde à uma estrutura periódica de período 5. Pontos na região azul possuem dinâmica caótica. Em (b) mostramos a bacia de atração para o caso $(\alpha, \beta) = (1,44; 0,164)$, condições iniciais na região preta convergem para o atrator de período 5 (pontos vermelhos) enquanto que na região branca a dinâmica diverge para o infinito.



Fonte: O autor.

o valor de s_m respectivo é igual à zero. Logo, em nossa rede os estados sincronizados apresentam $SI = 0$. Quando os estados coerentes estão divididos em dois platôs, ocorrem duas descontinuidades no perfil espacial da rede, produzindo um valor de $SI = 0,04$. Essa constatação nos dá um valor mínimo de SI para caracterizar um estado espacial da rede como estado quimera, pois se $SI > 0,04$ então existe uma região incoerente na rede além das duas descontinuidades. No caso da Fig. 4.2, $SI = 0,16$.

Figura 4.2: Estado quimera para a rede de mapas de Hénon acoplados com $\sigma = 0,30$. Em (a) mostramos o comportamento espaço-temporal após o tempo transiente, em que a escala de cores representa o valor da variável $x^{(i)}$ de cada mapa. Em (b) mostramos o perfil espacial da rede em $t = t_{trans} + 26$ e em (c) o espectro de s_m . Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1,44$, $\beta = 0,164$ e $r = 0,3$.



Fonte: O autor.

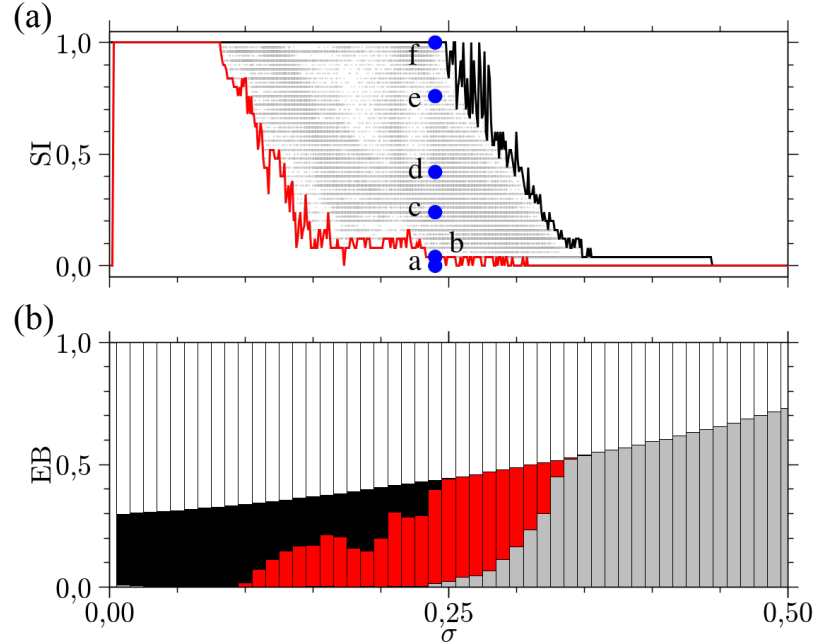
Como utilizamos a Eq. (4.4) com $N = 500$ mapas, a construção de um diagrama de órbitas como o da Figura 2.6(b) se torna uma tarefa complexa, visto que para tal é necessário escolher um mapa da rede e utilizar sua dinâmica temporal para obter o diagrama. Tal procedimento pode gerar resultados distintos dependendo do mapa utilizado para construir o diagrama. Então utilizamos a mesma ideia da Figura 3.8 e determinamos o estado assintótico a partir do valor de SI.

Na Figura 4.3(a) plotamos o valor de SI em relação a σ para 400 condições iniciais aleatórias. Atribuímos os valores iniciais das variáveis da seguinte forma: consideramos $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}) = (0, 0)$ para $i = 2, \dots, N$ e sorteamos os valores de $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ no intervalo $[-3, 3] \times [-3, 3]$. As linhas preta e vermelha traçam respectivamente os maiores e menores valores obtidos de SI. A figura mostra que quando $\sigma \in [0,08; 0,44]$ a rede admite a existência de estados em um amplo espectro de valores de SI. Para valores pequenos da intensidade do acoplamento são observados apenas estados espacialmente incoerentes, cuja bacia de atração ocupa uma grande porção do domínio de condições iniciais. Em $\sigma \approx 0,08$, a bacia dos estados incoerentes passa a coexistir com a bacia de estados quimera e estados finais com qualquer valor entre as linhas vermelha e preta podem ser obtidos alterando apenas as condições iniciais. A partir de $\sigma \approx 0,35$ passam a existir apenas a bacia dos estados coerentes/sincronizados. Com uma escolha adequada de condições iniciais, qualquer rota de transição de um estado incoerente para um coerente, e vice-versa, entre as linhas vermelha e preta é possível. Os pontos azuis da figura correspondem aos perfis espaciais da Figura 4.4.

Na Figura 4.3(b) plotamos a estabilidade da bacia em função de σ para os estados incoerentes (preto), quimera (vermelho), coerente (cinza) e divergente (branco). Como aqui sorteamos as condições iniciais efetuando a variação de apenas um dos elementos da rede, a rigor estamos calculando a estabilidade da bacia de um único nó [61], porém optamos por manter a nomenclatura por simplicidade. Do gráfico na Figura 4.3(b) podemos notar que a estabilidade da bacia complementa a Figura 4.3(a) fornecendo a probabilidade de se obter cada um dos estados para um dado valor de σ . Assim, ainda que a Figura 4.3(a) mostre que existem estados quimera no intervalo $[0,08; 0,1]$, por meio da Figura 4.3(b) notamos que o volume da bacia de tais estados é muito menor do que o dos estados incoerentes, de forma que esses últimos são muito mais prováveis de serem observados (considerando apenas os estados que não divergem).

Nas Figuras 4.4(a)-(f) plotamos o perfil espacial de estados gerados a partir de condições iniciais distintas para $\sigma = 0,24$. Os perfis espaciais da rede são: (a) estado sincronizado de período 5 para o qual $SI = 0$, (b) estado coerente com $k = 1$ e período 2 em que $SI = 0,04$, (c)-(e) estados quimera com $SI = 0,24$, $SI = 0,42$ e $SI = 0,76$, respectivamente, e (f) estado incoerente com $SI = 1,0$. Portanto, a rede de mapas de Hénon apresenta um grande número de estados assintóticos possíveis para o mesmo conjunto de parâmetros, similar ao que foi observado por Rakshit e colaboradores da

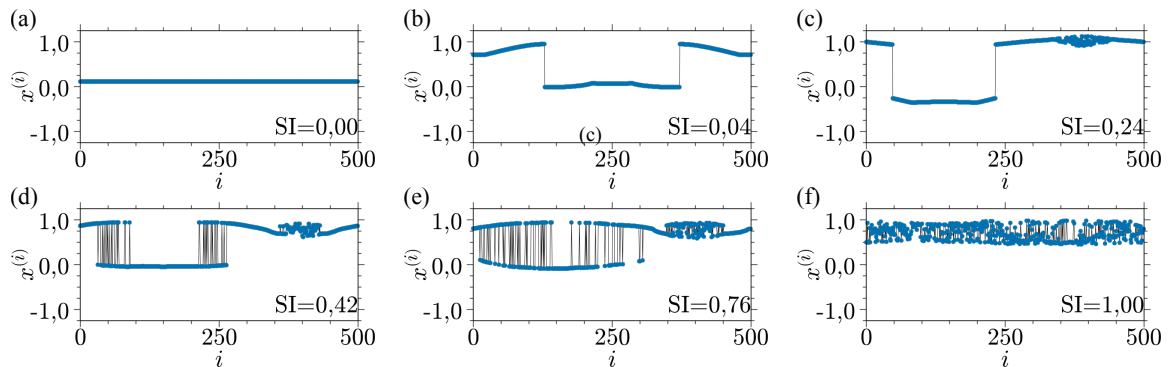
Figura 4.3: (a) SI em função de σ para 400 condições iniciais no intervalo $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$. As linhas preta e vermelha traçam respectivamente os maiores e menores valores obtidos de SI. Em (b) plotamos EB em relação a σ para os estados incoerentes (preto), quimera (vermelho), coerentes (cinza) e divergentes (branco). Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1,44$, $\beta = 0,164$ e $r = 0,3$.



Fonte: O autor.

rede de sistemas de Mackey-Glass [58]. Pela forma como atribuímos os valores iniciais das variáveis, vemos que mesmo a mudança na condição inicial de apenas um dos elementos da rede pode levar o sistema de uma dinâmica espacial sincronizada/coerente para um estado quimera ou até mesmo um estado incoerente, o que indica a coexistência de bacias de atração dos três estados para esse valor de parâmetro.

Figura 4.4: Diferentes estados possíveis na dinâmica da rede de mapas de Hénon. Os parâmetros utilizados são iguais em todos os casos, sendo que a diferença se encontra na condição inicial de apenas um mapa da rede. Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1,44$, $\beta = 0,164$, $\sigma = 0,24$ e $r = 0,3$.



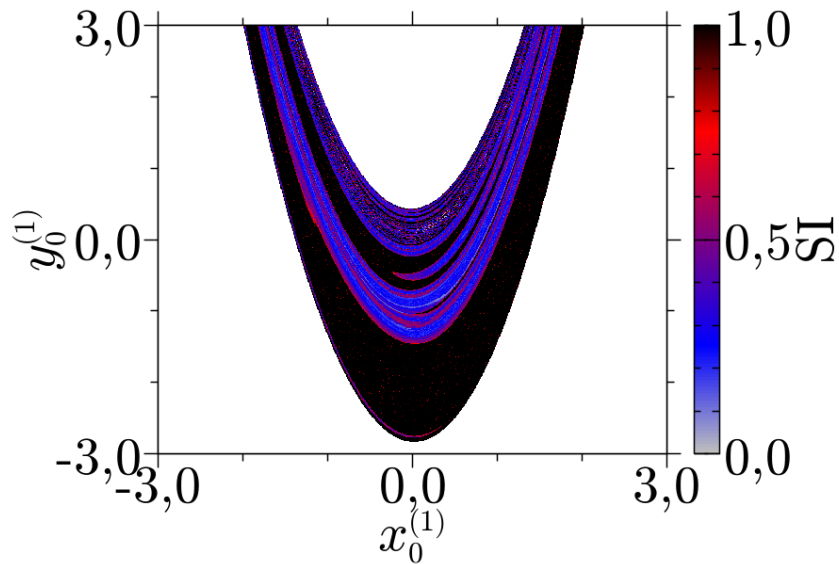
Fonte: O autor.

Com o intuito de aprofundar a investigação do grande número de estados observados na dinâmica espacial da rede, passamos para a análise direta da bacia de atração. Para

tal, tomamos uma grade de condições iniciais no intervalo $[-3, 3] \times [-3, 3]$ das variáveis $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ e calculamos o valor de SI da dinâmica resultante.

Na Figura 4.5 plotamos a fatia da bacia de atração para $\sigma = 0,18$ com os valores de SI representados pela escala de cor. No geral a seção da bacia possui o mesmo formato da bacia de atração do mapa individual (Figura 4.1(b)), porém é possível ver que região convergente apresenta uma estrutura interna separando a bacia de atração dos três estados finais. Nota-se ainda que a densidade de estados finais pode variar de acordo com a região em que são sorteadas as condições iniciais, além disso em algumas regiões a fronteira entre as bacias aparenta ter uma estrutura de fractal.

Figura 4.5: Corte da bacia de atração utilizando apenas um mapa da rede, sendo a escala de cor representativa do valor de SI. Pontos pretos correspondem a condições iniciais que resultam em estados incoerentes, pontos cinza resultam em estados coerentes/sincronizados, pontos que vão do azul ao vermelho resultam em estados quimera. Os parâmetros utilizados são $\alpha = 1,44$, $\beta = 0,164$, $\sigma = 0,18$ e $r = 0,3$.

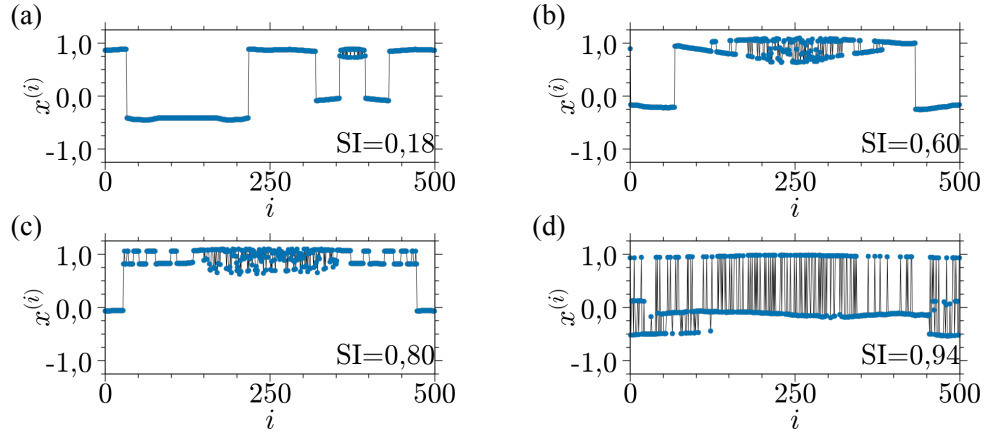


Fonte: O autor.

Na Figura 4.6(a)-(d) plotamos perfis espaciais da dinâmica temporal da rede para algumas condições iniciais tomadas da Figura 4.5. Novamente podemos notar uma grande variedade de estados na dinâmica espacial da rede. A partir da análise de uma grande quantidade de estados observados, definimos estados incoerentes como aqueles para os quais $SI \geq 0,90$. Esse limiar surge devido à constatação de que, nesses casos, os valores de m para os quais $s_m = 1$ não configuram uma região coerente bem definida na dinâmica espacial da rede, necessário para a determinação de um estado quimera.

Para analisar as fronteiras entre as bacias de atração, definimos $SI \leq 0,04$ como estados coerentes/sincronizados, $SI \geq 0,90$ como estados incoerentes, e valores intermediários como estados quimera. Aplicando esses limiares, plotamos a bacia de atração para $\sigma = 0,12$,

Figura 4.6: Exemplos de estados quimera obtidos de condições iniciais tomadas a partir do corte da bacia de atração da Figura 4.5.



Fonte: O autor.

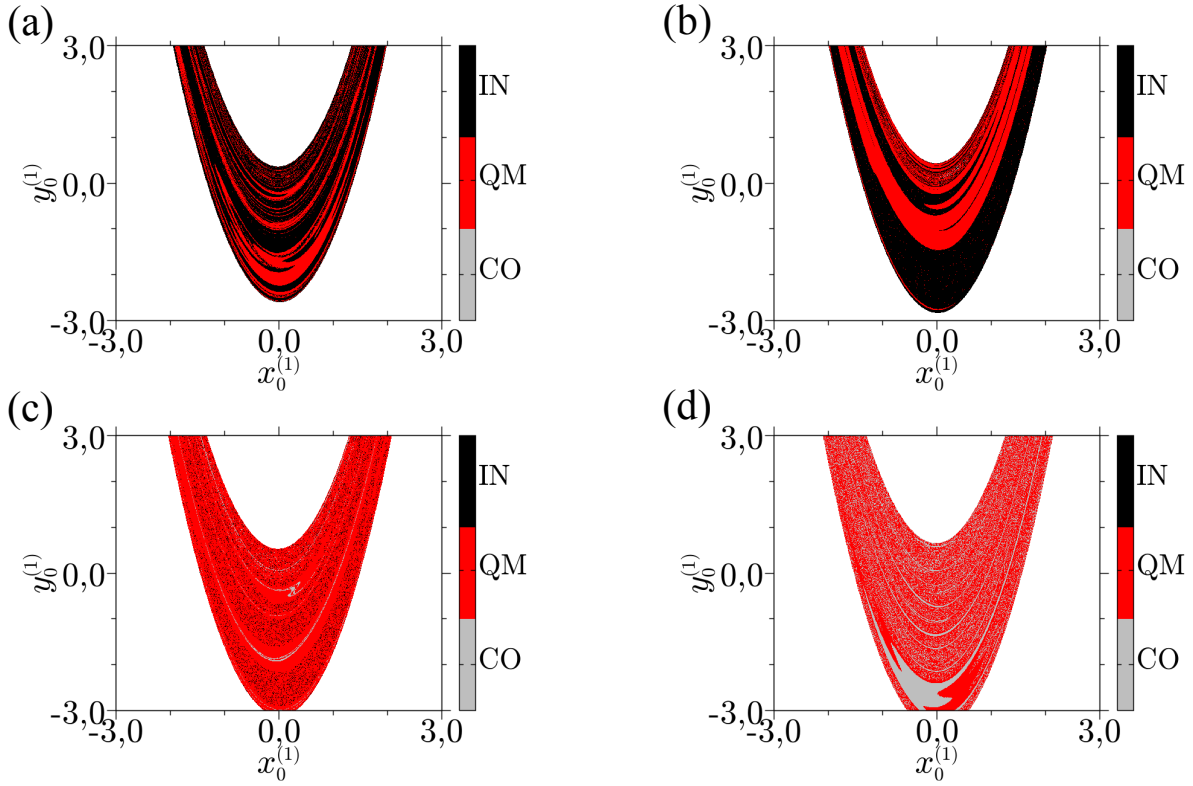
0,18, 0,24 e 0,30 na Figura 4.7, com cinza representando as condições iniciais que levam a uma dinâmica coerente/sincronizada, vermelho as que levam à estados quimera, preto representando as que levam a estados incoerentes e branco aquelas cuja dinâmica diverge.

Como já havia sido indicado pela Figura 4.3(b), quando a intensidade de acoplamento é pequena existe uma predominância da bacia de atração de estados incoerentes. Aumentando o valor de σ , nota-se uma diminuição na região preta e um crescente aumento das regiões vermelha e cinza. Para valores suficientemente grandes de σ não mais observamos uma região preta, restando apenas as bacias dos estados quimera e coerentes/sincronizados. Outro fato que podemos observar é que não existe uma região de fronteira entre as bacias cinza e preta nas Figuras 4.7(a)-(d).

Por meio das Figuras 4.7(a)-(d) podemos perceber que a alteração na intensidade do acoplamento muda drasticamente a organização das bacias de atração, de forma que elas se arranjam de uma maneira complexa com suas fronteiras exibindo características fractais. Como foi explanado na Seção 2.4, a fractalidade na bacia de atração leva a uma dificuldade na previsão do estado para o qual o sistema irá convergir. Esse fenômeno, chamado de sensibilidade do estado final [42, 44], é maior quanto maior for a dimensão fractal da fronteira entre as bacias de atração.

Na Figura 4.8 plotamos algumas ampliações em certas regiões da Figura 4.7(b)-(d) enfatizando a fronteira entre as bacias de atração cinza e vermelha. Para $\sigma = 0,12$ a bacia dos estados coerentes é relativamente muito pequena e pode ser desprezada. Nas três ampliações é possível notar que as bacias apresentam uma direção em que são suaves e outra em que apresentam uma fronteira complexa, sendo que essa complexidade permanece mesmo em ampliações. Tais características são próprias de fractais, em situação análoga àquelas da Seção 2.4.2. Nota-se ainda que a diminuição no valor de σ resulta não apenas na redução do volume da bacia de estados coerentes, mas também modifica a estrutura da bacia.

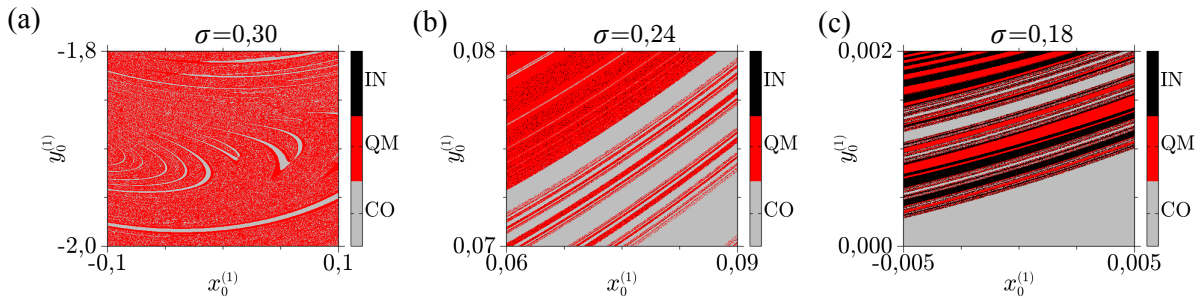
Figura 4.7: Bacia de atração da rede de mapas de Hénon acoplados para estados coerentes (cinza), quimera (vermelho), incoerentes (preto) e divergentes (branco). Em (a) $\sigma = 0,12$, (b) $\sigma = 0,18$, (c) $\sigma = 0,24$ e (d) $\sigma = 0,30$. Demais parâmetros são iguais aos das figuras anteriores.



Fonte: O autor.

Uma consequência da fractalidade na fronteira das bacias de atração é que um estado quimera pode ser substituído por um estado coerente, e vice-versa, aplicando uma perturbação nas condições iniciais. Entretanto, dependendo da direção na bacia de atração em que a perturbação é aplicada, o estado final pode ser preservado, sendo ele quimera ou coerente, pois existem direções específicas ao longo das quais a bacia é contínua.

Figura 4.8: Em (a), (b) e (c) plotamos ampliações da bacia para os casos $\sigma = 0,30$, $\sigma = 0,24$ e $\sigma = 0,18$, respectivamente, enfatizando a fronteira entre estados coerente e quimera. Tais regiões foram utilizadas para calcular $f(\varepsilon)$. A escala de cores é a mesma da Figura 4.7.

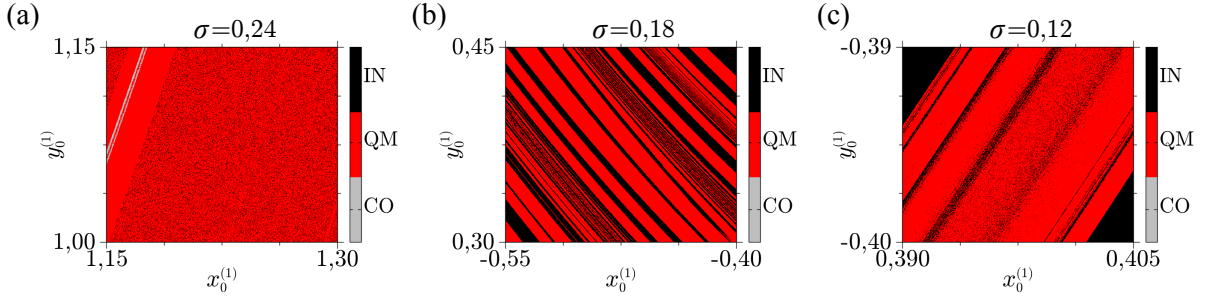


Fonte: O autor.

Na Figura 4.9 plotamos novamente ampliações da Figura 4.7, porém agora enfatizando a fronteira entre as bacias vermelha e preta. Desta vez desprezamos a bacia dos estados incoerentes para $\sigma = 0,30$, por ser relativamente pequena. Em (a) podemos ver que a bacia dos estados quimera é suave próxima à região de fronteira com a bacia dos estados coerentes, porém na região em que ela coexiste com a bacia dos estados incoerentes não é possível identificar as estruturas semelhantes às da Figura 4.8. Em (b) aparentemente temos uma fronteira fractal entre as bacias, com a bacia de estados quimera apresentando uma direção em que não apresenta fractalidade. Porém, a bacia dos estados incoerentes possui um grande número de pontos vermelhos, pertencentes à bacia dos estados quimera. E, por fim, em (c) novamente temos uma região em que a bacia dos estados quimera possui pontos pertencentes à bacia dos estados incoerentes.

Assim como fizemos na Seção 2.4, classificamos a fronteira entre as bacias de atração utilizando o cálculo do expoente de incerteza. Primeiramente calculamos a fração de incerteza, $f(\varepsilon)$, para a fronteira entre as bacias dos estados quimera e coerentes. Para efetuar os cálculos tomamos as regiões ampliadas das bacias da Figura 4.8. A utilização das regiões ampliadas se faz vantajosa devido ao menor número de pontos N_0 necessários em comparação com o caso de se utilizar o intervalo inteiro das Figuras 4.7(a)-(d), o que diminui o custo computacional.

Figura 4.9: Em (a), (b) e (c) plotamos ampliações da bacia para os casos $\sigma = 0,24$, $\sigma = 0,18$ e $\sigma = 0,12$, respectivamente, enfatizando a fronteira entre estados quimera e incoerente. Tais regiões foram utilizadas para calcular $f(\varepsilon)$. A escala de cores é a mesma da Figura 4.7.

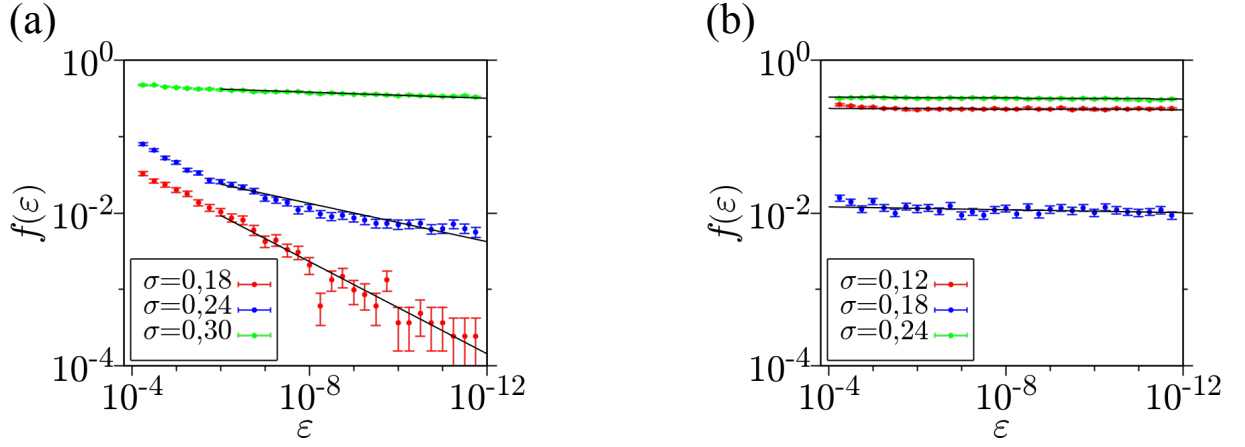


Fonte: O autor.

Na Figura 4.10(a) plotamos $f(\varepsilon)$ em relação a ε para $\sigma = 0,18$ (pontos vermelhos), $\sigma = 0,24$ (pontos azuis) e $\sigma = 0,30$ (pontos verdes) para determinar a fronteira entre a bacia dos estados coerentes e quimera. Realizando o ajuste dos pontos obtemos, respectivamente, os valores de expoentes de incerteza $\gamma = 0,30 \pm 0,01$, $\gamma = 0,15 \pm 0,01$ e $\gamma = 0,02 \pm 0,001$. O coeficiente de correlação em cada caso é $r = 0,98$, $r = 0,96$ e $r = 0,97$. Portanto, o aumento na intensidade do acoplamento gera uma fronteira entre as bacias desses estados com maior complexidade. Especificamente no caso $\sigma = 0,30$, cuja dimensão da fronteira é $D = 1,98$, a fronteira da bacia é dada por uma curva que preenche o plano.

Realizando o mesmo procedimento para as ampliações da Figura 4.9, como podemos ver na Figura 4.10(b), a fração de incerteza se mantém aproximadamente constante com

Figura 4.10: Os pontos representam a fração de incerteza, $f(\varepsilon)$, em relação ao raio de incerteza, ε , para a fronteira entre as bacias dos estados (a) coerente e quimera, e (b) quimera e incoerente.



Fonte: O autor.

relação a ε para os valores $\sigma = 0,12$, $\sigma = 0,18$ e $\sigma = 0,24$. O valor de do expoente de incerteza obtido por meio do ajuste é $\gamma = 0,002 \pm 0,001$, $\gamma = 0,004 \pm 0,003$ e $\gamma = 0,004 \pm 0,001$. Consequentemente temos $\gamma \approx 0$ nos três casos. Um expoente de incerteza próximo de zero, juntamente com a confirmação visual das ampliações da bacia de atração, são indicativos de que a bacia é crivada.

Se compararmos o resultado para $\sigma = 0,18$ com o observado na Figura 4.9(b), concluímos que a aparente estrutura fractal filamentar da bacia de estados quimera não se mantém para $\varepsilon \rightarrow 0$, restando, em pequenas escalas, apenas o efeito do crivamento da bacia.

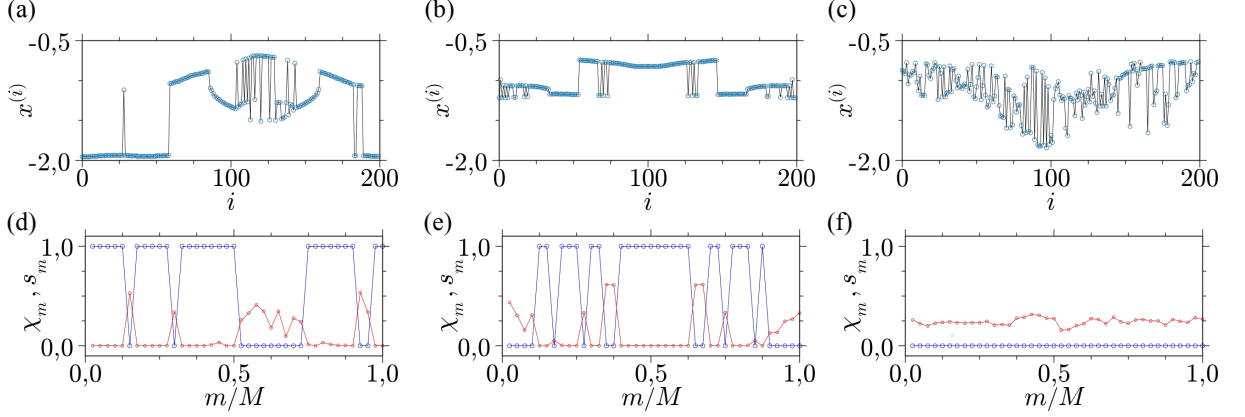
Como vimos na Seção 2.4.3, nessas situações não existem direções especiais nas quais o estado final pode ser preservado. Ao contrário do caso anterior, a alteração ou preservação do estado final ante uma perturbação pode ser definido apenas no sentido estatístico. Portanto, a existência de bacias crivadas fazem com que o estado final apresente uma grande fragilidade a pequenas perturbações nas condições iniciais.

4.2 Rede de Osciladores de Roessler Acoplados

Para verificar a generalidade dos resultados obtidos com a rede de mapas de Hénon, analisamos também uma rede de sistemas de tempo contínuo. A dinâmica da rede utilizada é dada pelo sistema de osciladores de Roessler acoplados da Eq. (3.5),

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i)} &= -y^{(i)} - z^{(i)} + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-rN}^{i+rN} (x^{(j)} - x^{(i)}) \\ \dot{y}^{(i)} &= x^{(i)} + ay^{(i)} + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-rN}^{i+rN} (y^{(j)} - y^{(i)}) \\ \dot{z}^{(i)} &= b + z^{(i)}(x^{(i)} - c) + \frac{\sigma}{2rN} \sum_{j=i-rN}^{i+rN} (z^{(j)} - z^{(i)}) \end{aligned} \quad , \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Figura 4.11: Perfis espaciais da dinâmica da rede de sistemas de Roessler. Em (a)-(c) plotamos o valor da variável $x^{(i)}$ dos elementos da rede para o mesmo instante de tempo. Em (b) plotamos χ_m (linha vermelha) e s_m (linha azul) calculados utilizando um intervalo de 1500 tempos de integração. Parâmetros utilizados são $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 3,9$, $r = 0,28$ e $\sigma = 0,05$.



Fonte: O autor.

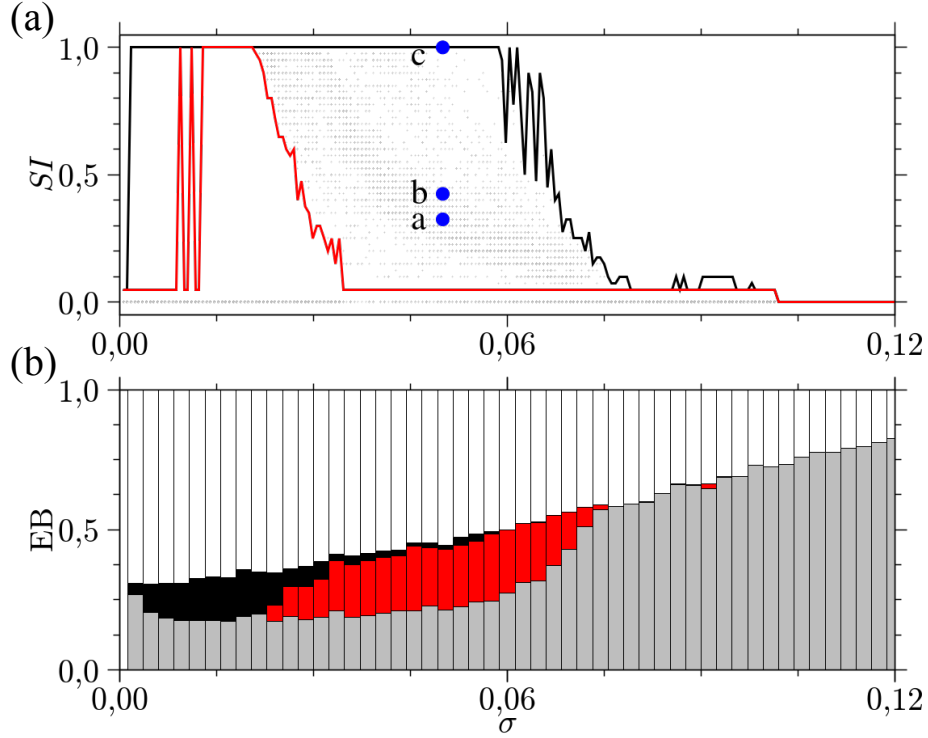
que é a mesma rede utilizada por Omelchenko e colaboradores [23].

Para a rede de osciladores de Roessler procedemos similarmente ao caso anterior, porém, dado o aumento no custo computacional devido à integração numérica do sistema de equações diferenciais, diminuimos o tamanho da rede para $N = 200$. Os parâmetros do sistema de Roessler que utilizamos são $a = 0,42$, $b = 2,0$ e $c = 3,9$. Aqui divergimos um pouco dos parâmetros utilizados Omelchenko e colaboradores, que usaram $c = 4,0$. A justificativa é que em $c = 3,9$ o sistema se encontra no interior de uma janela periódica, como no caso dos mapas de Hénon. A rede da Eq. (4.5) foi integrada utilizando o método de integração numérica de Ronge-Kutta de 4ª ordem com passo de integração 10^{-2} .

Nas Figuras 4.11(a)-(c) plotamos o perfil espacial da rede para um determinado instante fixo de tempo. Para obter esses estados utilizamos $r = 0,28$ e $\sigma = 0,05$, novamente alterando somente a condição inicial de um dos elementos. Nos dois primeiros casos temos um estado quimera com as regiões coerente e incoerente facilmente identificáveis, enquanto no terceiro a dinâmica é espacialmente incoerente. Como pretendemos utilizar novamente o SI para classificar o estado final da rede, devemos novamente definir o número M de caixas que dividem a rede, e o valor de δ a partir do qual identificamos se os osciladores em uma determinada caixa estão espacialmente coerentes ou não. Após variados testes adotamos os valores $M = 40$ e $\delta = 0,005|x_{max} - x_{min}|$. Nas Figuras 4.11(d)-(f) plotamos os valores de χ_m (em vermelho) e s_m (em azul). Comparando as Figuras 4.11(d)-(f) com (a)-(c) notamos que nas regiões em que a dinâmica espacial da rede é espacialmente coerente, o desvio padrão local é próximo de zero, ou seja $\chi_m < \delta$, enquanto que nas regiões de incoerência $\chi_m > \delta$.

Na Figura 4.12(a) plotamos SI em função de σ utilizando 200 condições iniciais. Assim como na rede de mapas de Hénon, fixamos $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}, z_0^{(i)}) = (0, 0, 0)$ para $i = 2, \dots, N$ e

Figura 4.12: (a) SI por σ para 200 condições iniciais. As linhas preta e vermelha traçam respectivamente os maiores e menores valores obtidos de SI. Em (b) plotamos EB em relação à σ para os estados incoerentes (preto), quimera (vermelho), coerentes (cinza) e divergentes (branco). Os parâmetros utilizados são $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 3,9$ e $r = 0,28$.

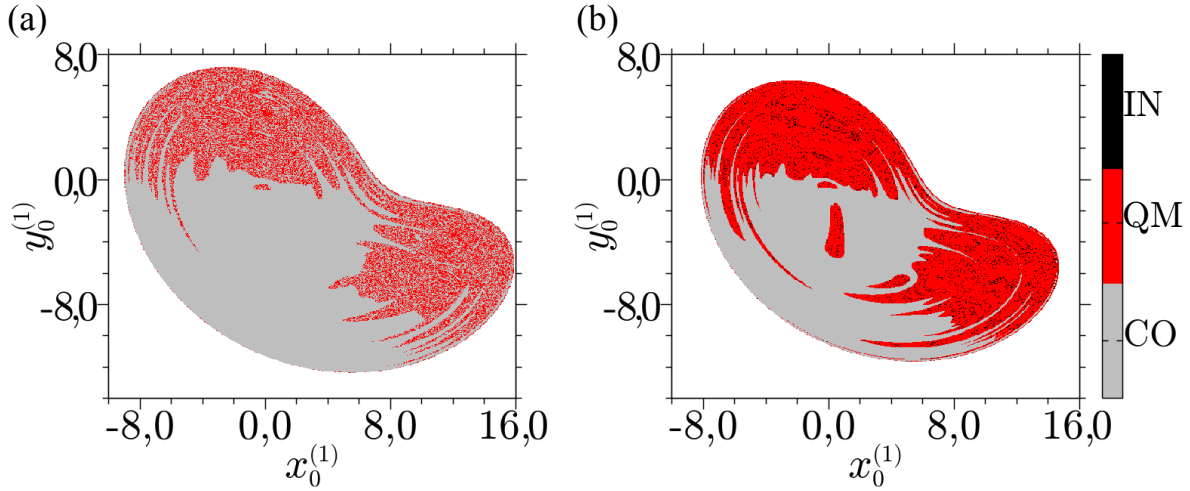


Fonte: O autor.

modificamos apenas o valor das variáveis iniciais do primeiro elemento da rede. Como o sistema de Roessler é tridimensional, fixamos também $z_0^{(1)} = 0$ e sorteamos as condições iniciais no intervalo $[-10; 13] \times [-14; 8]$ para as variáveis $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$. Como podemos ver na figura essa rede também apresenta coexistência de estados com valores diferentes de SI para um mesmo valor de intensidade de acoplamento, mas nesse caso é possível de se obter estados coerentes para quaisquer valores de σ . Na Figura 4.12(b) plotamos EB em função de σ , onde utilizamos 2^{11} condições iniciais para estimar o valor da estabilidade da bacia. Da Figura 4.12(b) fica ainda mais evidente que, diferentemente do caso da rede de mapas de Hénon, a bacia de atração de estados coerentes continua com um volume significativo mesmo para valores pequenos de σ . A figura também nos permite identificar a faixa de valores de σ em que existe uma maior densidade de condições iniciais que levam a estados quimera.

Com base nos dados da estabilidade da bacia, escolhemos os valores de $\sigma = 0,07$ e $\sigma = 0,05$ e passamos a investigar as bacias de atração. Na Figura 4.13(a) e (b), plotamos as bacias para esses valores de intensidade de acoplamento em uma grade de 512×512 condições iniciais. Das figuras pode-se notar que em ambos os casos existe uma grande região em que predominam as condições iniciais que convergem para o estado coerente/sincronizado, mas ainda assim existe uma região de fronteira complexa entre as

Figura 4.13: Cortes da bacia de atração para a Eq. (4.5). Em (a) $\sigma = 0,07$ e em (b) $\sigma = 0,05$. Para cada ponto da bacia calculamos o valor de SI da órbita e em seguida classificamos como estados incoerentes (preto), quimera (vermelho), coerentes (cinza) e divergentes (branco). Demais parâmetros utilizados são $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 3,9$ e $r = 0,28$.



Fonte: O autor.

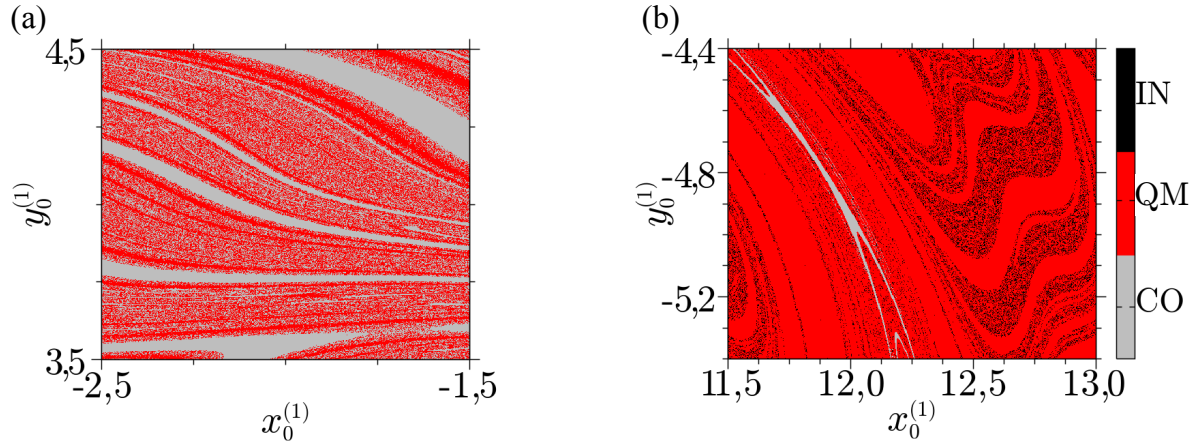
bacias.

Nas Figuras 4.14(a)-(b) plotamos ampliações de regiões das bacias para ambos os casos anteriores, e o que se observa é qualitativamente semelhante ao caso da rede de mapas de Hénon, sendo que tanto para $\sigma = 0,07$ quanto para $\sigma = 0,05$ a fronteira entre as bacias dos estados coerente e quimera é aparentemente fractal, com as bacias apresentando comportamento suave em uma direção e complexas em outra, enquanto que para $\sigma = 0,05$ a bacia de estados quimera possui regiões crivadas com pontos da bacia dos estados incoerentes.

Devido ao custo computacional envolvido, não estimamos o valor do expoente de incerteza para a rede de sistemas de Roessler, o que nos impede de afirmar que o cenário de transição desse sistema segue o mesmo processo da rede de mapas de Hénon. Apesar disso, a presença de estruturas como as da Figura 4.14 indica que esse cenário não é particular da rede de mapas, mas que talvez seja uma propriedade geral de redes que, ao transicionar de um estado espacial coerente para um estado incoerente, apresentem estados quimera.

Dos cortes feitos na bacia de atração em ambas as redes é possível notar que a densidade de condições iniciais que levam a cada um dos estados finais possíveis é altamente dependente da região da bacia na qual elas são definidas, o que pode influenciar inclusive em medidas como a estabilidade da bacia. Se, por exemplo, iniciássemos o sistema de Roessler ao redor do ponto $x_0^{(1)} = 0$ e $y_0^{(1)} = -8$, poderíamos concluir erroneamente que a rede não apresenta estados quimera. Portanto, ao identificar estruturas nas bacias de atração de redes com acoplamento não-local, nossos resultados mostram que é preciso agir com cautela ao afirmar a impossibilidade de

Figura 4.14: Ampliações de regiões da Figura 4.13. Em (a) $\sigma = 0,07$ podemos notar a ocorrência de regiões de complexidade na fronteira entre as bacias de estados coerente e quimera. Em (b) $\sigma = 0,05$ e já é possível notar a presença da bacia de estados incoerentes em meio a bacia dos estados quimera. Demais parâmetros utilizados são $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 3,9$ e $r = 0,28$.



Fonte: O autor.

ocorrência de estados quimera nessas redes.

5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Analizamos duas redes, sendo uma de mapas de Hénon e outra de sistemas de Roessler, acoplados em uma topologia periódica e do tipo não-local. Consideramos valores de parâmetros para os quais essas redes exibem comportamentos coerentes, incoerentes e estados quimera, sendo que cada um desses estados possui sua própria bacia de atração. Sabe-se que devido à coexistência de estados a rede pode apresentar um comportamento de histerese quando parâmetros são modificados. Caracterizando o grande número de estados possíveis para um mesmo valor de intensidade do acoplamento, podemos concluir que esse sistema não apresenta apenas uma rota que parte de um estado incoerente para um estado coerente. Ao invés disso, observamos a existência de um grande número de rotas possíveis entre esses estados.

O principal foco desse trabalho foi estudar as propriedades da fronteira entre bacias dos estados dinâmicos da rede. Assim, para a rede de mapas de Hénon utilizamos o expoente de incerteza para caracterizar a fronteira entre as bacias dos estados coerente e quimera, e entre quimera e incoerente. Procedemos de tal forma pois nesses sistemas não observamos região de fronteira da bacia de estados coerentes com a dos estados incoerentes ou, ainda, pontos que fazem parte da fronteira das três bacias de atração.

Por meio da análise do expoente da incerteza, descobrimos que a fronteira entre as bacias de atração dos estados coerente e quimera é fractal, visto que possui expoente de incerteza $0 < \gamma < 1$, cuja complexidade aumenta com o aumento da intensidade do acoplamento. Por sua vez, a fronteira entre a bacia dos estados quimera e incoerente é crivada, caracterizada por $\gamma \approx 0$. Consequentemente, o primeiro caso é mais robusto a perturbações nas condições iniciais do que o segundo, visto que apresenta certas direções nas quais o estado final é preservado ante uma mudança na condição inicial, enquanto que no segundo caso independente do quão pequena uma perturbação nas condições iniciais possa ser, a chance de se obter um estado final diferente na dinâmica da rede é sempre constante. Devido ao grande custo computacional a estimativa do expoente de incerteza não foi possível para a rede de sistemas de Roessler. Apesar disso, por meio de ampliações realizadas em regiões da bacia de atração foi possível identificar qualitativamente o mesmo comportamento detectado na rede de mapas de Hénon.

A análise da bacia de atração em redes de sistemas acoplados ainda é uma área difícil de se estudar pois, devido à grande dimensionalidade desses sistemas, o cálculo dos pontos fixos e órbitas periódicas estáveis pode se tornar impraticável. Somado a isso existe ainda a dificuldade de se obter quantificadores para definir o tamanho da bacia de atração de

forma global, medidas como a estabilidade da bacia podem fornecer informações a esse respeito mas estão sujeitas à região onde são sorteadas as condições iniciais. Ainda que as bacias de atração permaneçam limitadas pelas variedades estáveis dos pontos hiperbólicos, a determinação dessas variedades em sistemas de alta dimensão também se mostra de grande dificuldade, tanto para se determinar as variedades quanto os próprios pontos hiperbólicos.

Dada a observação que estados quimera são transientes caóticos cujo tempo de vida aumenta exponencialmente com o tamanho da rede [62], futuramente podem ser exploradas as relações entre a ocorrência de estados quimera em uma dada rede de sistemas acoplados e a existência, ou não, de selas caóticas no espaço de configurações desses sistemas.

Seguindo a linha dos resultados obtidos nesse trabalho, pode-se também analisar as bacias utilizando a entropia da bacia. Entropia da bacia foi proposta por Alvar Daza e colaboradores em 2016 [63] também como forma de caracterizar a complexidade na fronteira entre bacias de atração. Podemos ainda explorar a mudança na estrutura e no tamanho das bacias com a variação do tamanho da rede.

Semenova e colaboradores [24] mostraram que sistemas de Lorenz acoplados podem exibir estados quimera para valores do parâmetro ρ em que o atrator é do tipo não-hiperbólico, enquanto que Cano e Consenza [53], mostraram que é possível a ocorrência desses estados mesmo em sistemas hiperbólicos. Com a metodologia de análise da bacia de atração desenvolvida nesse trabalho, pode-se mapear o espaço de parâmetros desses sistemas caracterizando os estados espaciais utilizando SI para identificar as regiões em que estados quimeras podem ser observados.

Referências

- 1 MONTEIRO, L. *Sistemas dinâmicos*. 2ª Edição. Editora Livraria da Física, 2006.
- 2 HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física 2*. 5ª Edição. LTC Editora, 2003.
- 3 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.; YORKE, J. A. *Chaos : an introduction to dynamical systems*. New York: Springer, 1996.
- 4 TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic Dynamics : An Introduction Based on Classical Mechanics*. The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2006.
- 5 ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS. *Hilbert problems*. 2001. Disponível em: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hilbert_problems&oldid=42960. Online. Acessado em: 6 de dezembro de 2018.
- 6 LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130–141, 1963.
- 7 LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.
- 8 WINFREE, A. T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, v. 16, n. 1, p. 15–42, 1967.
- 9 KURAMOTO, Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Heidelberg: Springer Berlin, 1984.
- 10 STROGATZ, S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 143, n. 1-4, p. 1–20, 2000.
- 11 FILATRELLA, G.; NIELSEN, A. H.; PEDERSEN, N. F. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *European Physical Journal B*, v. 61, n. 4, p. 485–491, 2008.
- 12 CARARETO, R.; BAPTISTA, M. S.; GREBOGI, C. Natural synchronization in power-grids with anti-correlated units. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 18, n. 4, p. 1035–1046, 2013.

- 13 VIANA, R. et al. Dynamic range in a neuron network with electrical and chemical synapses. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, n. 1, p. 164–172, 2014.
- 14 SANTOS, M. S. et al. Chimera-like states in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 101, p. 86–91, 2017.
- 15 HIZANIDIS, J. et al. Chimera states in population dynamics: Networks with fragmented and hierarchical connectivities. *Physical Review E*, v. 92, n. 1, p. 1–11, 2015.
- 16 BASTIDAS, V. M. et al. Quantum signatures of chimera states. *Physical Review E*, v. 92, n. 6, p. 062924, 2015.
- 17 PECORA, L. M. et al. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 7, n. 4, p. 520–543, 1997.
- 18 VIANA, R. L. et al. Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 206, n. 1-2, p. 94–108, 2005.
- 19 KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, v. 5, n. 4, p. 380–385, 2002.
- 20 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 17, p. 174102, 2004.
- 21 OMEL'CHENKO, O. E.; MAISTRENKO, Y. L.; TASS, P. A. Chimera states: The natural link between coherence and incoherence. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 4, p. 2–5, 2008.
- 22 OMELCHENKO, I. et al. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 23, p. 234102, 2011.
- 23 OMELCHENKO, I. et al. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems. *Physical Review E*, v. 85, n. 2, p. 026212, 2012.
- 24 SEMENOVA, N. et al. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? *Europhysics Letters*, v. 112, n. 4, p. 40002, 2015.
- 25 GARCÍA-MORALES, V. Cellular automaton for chimera states. *Europhysics Letters*, v. 114, n. 1, p. 18002, 2016.
- 26 MARTENS, E. A. et al. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 110, n. 26, p. 10563–10567, 2013.

- 27 HAGERSTROM, A. M. et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics*, v. 8, n. 9, p. 658–661, 2012.
- 28 RÖHM, A.; BÖHM, F.; LÜDGE, K. Small chimera states without multistability in a globally delay-coupled network of four lasers. *Physical Review E*, v. 94, n. 4, p. 42204, 2016.
- 29 SANTOS, V. et al. Riddling: Chimera’s dilemma. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 28, n. 8, p. 081105, 2018.
- 30 GULICK, D. *Encounters with Chaos*. New York: McGraw-Hill College, 1992.
- 31 LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications Using MATLAB®*. 1ª. Boston: Birkhäuser, 2004.
- 32 STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and CHaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Reading, Massachusetts: Perseus Books, 1994.
- 33 YORKE, J. A. et al. Scaling behavior of windows in dissipative dynamical systems. *Physical Review Letters*, v. 54, n. 11, p. 1095–1098, 1985.
- 34 MEDEIROS, E. S.; CALDAS, I. L.; BAPTISTA, M. S. Sensitive dependence on parameters of continuous-time nonlinear dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 99, p. 16–19, 2017.
- 35 FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, v. 19, n. 1, p. 25–52, 1978.
- 36 HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, n. 1, p. 69–77, 1976.
- 37 GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 18, p. 2714–2717, 1993.
- 38 VIANA, R. L.; GREBOGI, C. Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems. *Physical Review E*, v. 62, n. 1, p. 462–468, 2000.
- 39 ROSS, S. *Differential Equations*. 3ª. India: Wiley, 2007.
- 40 OTT, E. et al. Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins. *Physical Review Letters*, v. 71, n. 25, p. 4134–4137, 1993.
- 41 SANTOS, V. dos et al. Unstable dimension variability structure in the parameter space of coupled Hénon maps. *Applied Mathematics and Computation*, v. 286, p. 23–28, 2016.
- 42 MCDONALD, S. W. et al. Fractal basin boundaries. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 17, n. 2, p. 125–153, 1985.
- 43 GREBOGI, C. et al. Final state sensitivity: An obstruction to predictability. English. *Physics Letters A*, v. 99, n. 9, p. 415–418, 1983.

- 44 GREBOGI, C. et al. Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: Basin structure of the kicked double rotor. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 25, n. 1-3, p. 347–360, 1987.
- 45 SOMMERER, J. C.; OTT, E. A physical system with qualitatively uncertain dynamics. *Nature*, v. 365, n. 6442, p. 138–140, 1993.
- 46 ALEXANDER, J. et al. RIDDLED BASINS. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, v. 02, n. 04, p. 795–813, 1992.
- 47 AGUIRRE, J.; VIANA, R.; SANJUÁN, M. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Review of Modern Physics*, v. 81, n. 1, p. 333–386, 2009.
- 48 OTT, E.; SOMMERER, J. C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Physics Letters A*, v. 188, n. 1, p. 39–47, 1994.
- 49 KAPITANIAK, T.; MAISTRENKO, Y.; GREBOGI, C. Bubbling and riddling of higher-dimensional attractors. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 17, n. 1, p. 61–66, 2003.
- 50 PIKOVSKY, A.; ROSEMBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press, 2001. v. 12.
- 51 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. CHIMERA STATES IN A RING OF NONLOCALLY COUPLED OSCILLATORS. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, v. 16, n. 01, p. 21–37, 2006.
- 52 MARTENS, E. A.; PANAGGIO, M. J.; ABRAMS, D. M. Basins of attraction for chimera states. *New Journal of Physics*, v. 18, n. 2, p. 022002, 2016.
- 53 CANO, A. V.; COSENZA, M. G. Chimeras and clusters in networks of hyperbolic chaotic oscillators. *Physical Review E*, v. 95, n. 3, p. 030202, 2017.
- 54 DUDKOWSKI, D.; MAISTRENKO, Y.; KAPITANIAK, T. Occurrence and stability of chimera states in coupled externally excited oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 26, n. 11, p. 116306, 2016.
- 55 WATANABE, S.; STROGATZ, S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 74, n. 3-4, p. 197–253, 1994.
- 56 OTT, E.; ANTONSEN, T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 18, n. 3, p. 1–6, 2008.
- 57 ABRAMS, D. M. et al. Solvable model for chimera states of coupled oscillators. *Physical Review Letters*, v. 101, n. 8, p. 1–4, 2008.
- 58 RAKSHIT, S. et al. Basin stability for chimera states. *Scientific Reports*, v. 7, n. 1, p. 2412, 2017.

- 59 GOPAL, R. et al. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. *Physical Review E*, v. 89, n. 5, p. 1–8, 2014.
- 60 MENCK, P. J. et al. How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature Physics*, v. 9, n. 2, 2013.
- 61 MENCK, P. J. et al. How dead ends undermine power grid stability. *Nature Communications*, v. 5, n. 1, p. 3969, 2014.
- 62 WOLFRUM, M.; OMEL'CHENKO, O. E. Chimera states are chaotic transients. *Physical Review E*, v. 84, n. 1, p. 2–5, 2011.
- 63 DAZA, A. et al. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports*, v. 6, n. 1, p. 31416, 2016.