

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
MESTRADO EM CIÊNCIAS - FÍSICA**

ADRIANE CONSUELO DA SILVA LEAL

**ANÁLISE TEÓRICA DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS E UMA PROPOSTA
EXPERIMENTAL VIA RESSONÂNCIA MAGNÉTICA NUCLEAR**

**PONTA GROSSA
2018**

ADRIANE CONSUELO DA SILVA LEAL

**ANÁLISE TEÓRICA DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS E UMA PROPOSTA
EXPERIMENTAL VIA RESSONÂNCIA MAGNÉTICA NUCLEAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências/Física.

Orientador: Prof. Dr. Rubén Auccaise Estrada
Coorientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia

**PONTA GROSSA
2018**

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

L435 Leal, Adriane Consuelo da Silva
Análise teórica do jogo da batalha dos
sexos e uma proposta experimental via
ressonância magnética nuclear/ Adriane
Consuelo da Silva Leal. Ponta Grossa,
2018.
101f.

Dissertação (Mestrado em Ciências -
Área de Concentração: Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Rubén Auccaise
Estrada.
Coorientador: Prof. Dr. Giuliano
Gadioli La Guardia.

1.Processamento de informação quântica.
2.Teoria dos jogos quânticos.
3.Ressonância magnética nuclear de estado
líquido. I.Estrada, Rubén Auccaise. II.
Guardia, Giuliano Gadioli La. III.
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Mestrado em Ciências. IV. T.

CDD: 530.12

TERMO DE APROVAÇÃO

ADRIANE CONSUELO DA SILVA LEAL

"ANÁLISE TEÓRICA DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS E UMA PROPOSTA EXPERIMENTAL VIA RESSONÂNCIA MAGNÉTICA"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática, UEPG/PR


Prof. Dr. Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt
Departamento de Física, UFF-RJ


Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Matemática UEPG/PR

Ponta Grossa, 19 de fevereiro de 2018.

Dedicado à minha Família e Amigos

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao Prof. Dr. Rubén Auccaise Estrada e ao Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia, pela orientação e por sempre estarem dispostos a compartilhar seus conhecimentos durante os seminários.

Gostaria de agradecer as minhas amigas Gislaine do Rocio Pereira e Franciéle Nunes de Siqueira, por sempre me apoiarem nas horas mais difíceis.

Agradeço ao Prof. Dr. Alcione Roberto Jurelo pela amizade e por deixar que eu continuasse no grupo de Supercondutividade.

Também agradeço a CAPES pelo fomento.

*“What distinguishes the real from the unreal is in the heart.”
(John Forbes Nash Jr).*

RESUMO

DA SILVA LEAL, Adriane Consuelo. Análise teórica do jogo da Batalha dos Sexos e uma proposta experimental via Ressonância Magnética Nuclear. 2018. 101p. Dissertação (Mestrado em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2018.

O principal objetivo deste trabalho é estudar o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica, para dois jogadores Alice e Bob. Uma análise teórica é fundamentada aplicando o protocolo elaborado por Eisert *et al.*, no qual se aplicam propriedades advindas de emaranhamento de estratégias. Nesse sentido, é possível demonstrar que o emaranhamento otimizou os equilíbrios do jogo para Alice e Bob. Para o caso em que os jogadores escolhem o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{\mathcal{U}}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{\mathcal{U}}_B(0, \frac{\pi}{8}))$ ou $(\hat{\mathcal{U}}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{\mathcal{U}}_B(0, \frac{3\pi}{8}))$, o dilema pode ser resolvido. Por meio dos resultados teóricos uma proposta de implementação experimental do jogo na condição de máximo emaranhamento foi sugerida via a técnica de Ressonância Magnética Nuclear.

Palavras-chave: Processamento de Informação Quântica; Teoria dos Jogos Quânticos; Ressonância Magnética Nuclear de estado líquido.

ABSTRACT

DA SILVA LEAL, Adriane Consuelo. Theoretical analysis of the Battle of the Sexes game and an experimental proposal by Nuclear Magnetic Resonance. 2018. 101p. Dissertação (Mestrado em Ciências/Física) - Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2018.

The main objective of this work is to study the game of the Battle of the Sexes in the quantum version, for two players Alice and Bob. A theoretical analysis is substantiated applying the protocol elaborated by Eisert et al., in which apply properties of entangled strategies. In this sense, it is possible to demonstrate that the entanglement optimized the equilibria of the game. For the case where the players choose the profile of quantum strategies operators $(\hat{\mathcal{U}}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{\mathcal{U}}_B(0, \frac{\pi}{8}))$ or $(\hat{\mathcal{U}}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{\mathcal{U}}_B(0, \frac{3\pi}{8}))$ the dilemma can be solved. By means of the theoretical results a proposal of experimental implementation of the game in the condition of maximum entanglement is purposed by Nuclear Magnetic Resonance technique.

Keywords: Quantum information processing; Quantum game; Liquid state NMR.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESSONÂNCIA MAGNÉTICA NUCLEAR	13
2.1	Interação Zeeman	13
2.2	Interação com ondas eletromagnéticas	16
2.3	Formalismo da matriz densidade	19
2.3.1	Pulsos compostos	23
2.4	Hamiltonianos de spin interno	24
2.4.1	Deslocamento químico	24
2.4.2	Acoplamento escalar	26
2.5	Sistema de dois spins $1/2$ acoplados	27
2.6	Computação Quântica via RMN	30
2.6.1	O bit quântico-qbit	30
2.6.2	Preparação de estados pseudo puros	32
2.7	Tomografia de estado quântico	34
3	TEORIA DOS JOGOS	37
3.1	O que é um jogo?	38
3.2	Definições	39
3.3	Representação dos jogos	39
3.4	Classificação dos Jogos	40
3.5	Exemplos de Jogos	41
3.6	Formalismo da Teoria dos Jogos	44
3.6.1	Solução de um jogo	46
3.6.1.1	Equilíbrio de Nash	46
3.6.1.1.1	Equilíbrio de Nash de estratégias mistas	48
3.6.2	Ótimo de Pareto	55
3.7	Teoria dos Jogos Quânticos	56
3.7.1	O jogo PQ	57
3.7.2	Formalismo da Teoria dos Jogos Quânticos	59
3.7.3	Versão quântica do jogo do Dilema do Prisioneiro	60
3.7.3.1	<i>Payoffs</i> na ausência de emaranhamento e na presença de máximo emaranhamento	63
3.7.4	Versão quântica do jogo da Batalha dos Sexos	66
4	O JOGO DA BATALHA DOS SEXOS	69
4.1	O jogo da Batalha dos Sexos via protocolo de Eisert <i>et al.</i>	69

4.1.1	<i>Payoffs</i> na ausência de emaranhamento e na presença de máximo emaranhamento	70
4.2	Análise do jogo da Batalha dos Sexos via condição de Benjamin	74
4.3	Uma proposta de implementação do jogo da Batalha dos Sexos via Ressonância Magnética Nuclear	76
5	CONCLUSÃO	86
5.1	Perspectivas futuras	86
	APÊNDICE A – <i>PAYOFF</i> ESPERADO PARA g JOGADORES . . .	87
	APÊNDICE B – ESFERA DE BLOCH	89
	REFERÊNCIAS	91

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos baseia-se em situações de decisão e de conflito entre dois ou mais jogadores, desse modo procura-se o maior ganho para um dos jogadores. Nessa linha de pensamento, a Teoria dos Jogos teve um papel muito importante durante a Segunda Guerra Mundial, onde muitos pesquisadores contribuíram para a construção de um formalismo matemático que permitiu a sua axiomatização. Os pioneiros nesse propósito foram John Von Neumann e Oskar Morgenstern (1) em 1944, quando descreveram em seu livro *Theory of Games and Economic Behaviour* as primeiras ideias sobre jogos. Alguns anos depois, John Nash realizou estudos sobre situações de equilíbrio em jogos não cooperativos (2). A partir desses estudos, os princípios da Teoria dos Jogos foram aplicados à Biologia (3), Economia (4), Ecologia (5) e recentemente à Física (6–8).

Nos últimos anos, a Teoria dos Jogos teve uma passagem de um domínio clássico para o quântico, dando origem à área da Teoria dos Jogos Quânticos. A distinção entre esses domínios pode ser feita porque no quântico utiliza-se a Mecânica Quântica na sua descrição, e no clássico não. Esta extensão permite novas possibilidades, tal como aplicar o princípio de superposição de estratégias (vetores de estado quânticos). Junto ao conceito de emaranhamento é possível que os jogadores obtenham melhores ganhos (*payoffs*) e escapem de paradigmas que alguns jogos clássicos possuem. É nesse sentido que os jogos quânticos serão úteis, pois alguns problemas matemáticos poderão ser reformulados como jogos. O problema de procurar uma informação específica em um banco de dados, por exemplo, pode ser representado por um jogo no qual os jogadores competem para decidir quem obtém a informação primeiro. Algoritmos que resolverão esse problema serão entendidos como as estratégias do jogo. Encontrar um Algoritmo Quântico que resolve o problema mais rápido do que a sua contrapartida clássica é equivalente a identificar uma estratégia quântica que é mais eficiente do que a estratégia clássica. Este provavelmente será um dos primeiros benefícios da Teoria dos Jogos Quânticos. Dentro dessa discussão, a Criptografia também pode ser beneficiada. Os pesquisadores criaram um protótipo de “Criptosistemas Quânticos” (9–12) que são, em princípio, impossíveis de serem invadidos sem que o “espião” seja detectado. Quando o estado de um sistema quântico é medido, então, em teoria, nenhum espião pode examinar uma mensagem sem deixar um rastro. Na prática, as imperfeições no sistema de transmissão introduzem ruído no sinal, obscurecendo a presença de um espião. Desta maneira, a Teoria dos Jogos Quânticos poderá ajudar os pesquisadores a entender o quão vulnerável é um sistema. Analisar a segurança da Comunicação Quântica seria como analisar um jogo quântico, onde as pessoas que estão tentando se comunicar com segurança estão “jogando” contra um espião (13).

Dentro do âmbito dessa discussão, a Teoria dos Jogos Quânticos possui emblemáticos exemplos para discutir os fundamentos matemáticos e como são abordadas as aplicações. Por

citar alguns deles: o jogo de Combinar Moedas (*Matching Pennies*) (14); o Dilema¹ do Prisioneiro (*Prisoner Dilemma*) (16); a Batalha dos Sexos (*Battle of the Sexes*) (17); o jogo de Pedra, Papel e Tesoura (*Rock-Paper-Scissor*) (18); o jogo da Galinha (*Chicken game*) (19); entre muitos outros.

Dentre os exemplos acima, segundo a literatura, Blum em 1981 definiu formalmente pela primeira vez uma versão alterada do jogo de Combinar Moedas (20–22). A versão quântica deste jogo foi discutida pela primeira vez por Meyer (23) em um jogo chamado de jogo PQ². Meyer evidenciou a vantagem que um jogador possui ao superpor suas estratégias. Posteriormente, devida a contribuições de muitos pesquisadores e grupos experimentais, o jogo ganhou novas versões (24–26).

O jogo do Dilema do Prisioneiro na versão quântica, foi apresentado primeiramente por Eisert *et al.* (27). Eisert *et al.* desenvolveram um Algoritmo Quântico deste jogo e demonstraram que o emaranhamento entre as estratégias dos jogadores resolveu o dilema existente no jogo clássico. A partir disso, a primeira execução experimental do Dilema do Prisioneiro na versão quântica, foi desenvolvida em 2002 via a técnica de Ressonância Magnética Nuclear (RMN) (28). Posteriormente, em 2005 a realização deste jogo foi proposta teoricamente por Paternostro *et al.* (29) em um sistema de fótons e foi implementado experimentalmente em 2007 por Prevedel *et al.* (30). Em 2013 executou-se o jogo em um sistemas de lasers (31).

Outro jogo que também possui uma versão quântica, apresentada por Marinatto e Weber (32), é o jogo da Batalha dos Sexos. Os autores se inspiraram no trabalho de Eisert *et al.* e elaboraram um protocolo para quantizar o jogo. Porém os operadores de estratégias quânticas³ de Alice, $\hat{U}_A$, e de Bob, $\hat{U}_B$, foram restritos aos operadores quânticos $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{I}$. Além disso, não foi aplicado ao final do protocolo o operador de desemaranhamento⁴. Embora houvessem essas restrições, Marinatto e Weber concluíram que se os jogadores escolhem uma estratégia emaranhada, então o dilema do jogo pode ser resolvido.

A partir do trabalho de Marinatto e Weber muitas controvérsias sobre a solução encontrada por eles surgiram (33–37). Dentre elas, Benjamin (33) comentou que o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica não possui uma única solução. Além disso, deve haver um operador de estratégia quântica realizado por Alice, de modo que, deve haver outro operador de estratégia quântica executado por Bob, sendo possível encontrar o melhor *payoff* para ambos os jogadores. Dessa forma, isso representa que o operador de estratégia quântica de Bob deve ser equivalente ao conjugado do operador de estratégia quântica de Alice, isto é, $\hat{U}_B = \hat{U}_A^*$. Com base na revisão da literatura, esta afirmação não é demonstrada em nenhuma das versões quânticas do jogo da Batalha dos Sexos até hoje (34–40).

Através do comentário de Benjamin (33), alguns trabalhos tentaram resolver o dilema

¹ A definição de dilema pode ser entendida como um problema que oferece duas soluções, sendo elas ou controversas uma a outra ou ambas inaceitáveis (15).

² O jogo PQ é apresentado e discutido na Seção 3.7.1.

³ São operadores quânticos $\hat{U}_{A,B}$ que pertencem ao grupo $SU(2)$ e permitem aos jogadores manipular suas estratégias.

⁴ A expressão matemática do operador de desemaranhamento está na Seção 3.7.3. O jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica é discutido em mais detalhes na Seção 4.2.

do jogo da Batalha dos Sexos. Dentre estes, em 2000, Du *et al.* (38) afirmaram que o jogo quântico da Batalha dos Sexos é muito mais complicado do que o jogo clássico. Segundo os autores, existem infinitos equilíbrios de Nash⁵ e o *payoff* de cada jogador não é melhor do que o *payoff* clássico. Contudo, em 2001, estes mesmos autores (39) discutiram que se os jogadores escolhem seus operadores de estratégias quânticas do grupo $SU(2)$ com uma distribuição de probabilidades associada, então novos equilíbrios de Nash emergem. Assim, o dilema que existe no jogo clássico é realmente removido.

Embasado no contexto acima e no estudo do formalismo da Teoria dos Jogos Quânticos, o presente trabalho teve como objetivo a análise teórica do jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica, onde o protocolo apresentado por Eisert *et al.* foi aplicado. Por meio desta análise foi possível resolver o dilema existente e propor uma implementação experimental via RMN.

Desta forma, no Capítulo 2 serão apresentados alguns conceitos importantes para o entendimento da Ressonância Magnética Nuclear. Inicialmente, a interação Zeeman será discutida, onde durante esta interação alguns níveis de energia podem ser atribuídos ao núcleo. Além da interação Zeeman se discutirá a interação com ondas eletromagnéticas, de modo que existirá uma dinâmica para o spin nuclear. Dentro deste contexto, o formalismo da matriz densidade será apresentado, o qual é o mais conveniente para se discutir o fenômeno da RMN. Por meio deste formalismo, os observáveis de interesse em RMN são definidos. Ainda se discutirá a evolução da matriz densidade de desvio, a qual é detectada nos experimentos. Além das interações com campos externos, os Hamiltonianos de spin interno serão abordados. As interações via deslocamento químico e acoplamento escalar serão priorizadas. Com base nessas interações, se discutirá um sistema de spins $1/2$ acoplados, o qual será empregado na proposta de implementação do jogo da Batalha dos Sexos. Por fim, se apresentará a preparação de estados pseudos puros e o procedimento de tomografia de estado quântico.

O Capítulo 3 será dedicado à Teoria dos Jogos Clássicos e Quânticos. Serão expostas algumas expressões importantes, representação, classificação e exemplos de jogos no contexto da Teoria dos Jogos Clássicos. Dentro deste contexto, o formalismo da Teoria dos Jogos para um jogo estratégico finito será apresentado. Com base no formalismo, se discutirá as formas de determinar a solução de um jogo, dando ênfase ao conceito de equilíbrio de Nash e ótimo de Pareto. Tendo estabelecido os conceitos de solução, será abordada a Teoria dos Jogos Quânticos, destacando o trabalho de Meyer (23), Eisert *et al.* (27) e Marinatto e Weber (32). Além disso, o jogo PQ, a versão quântica do Dilema do Prisioneiro e da Batalha dos Sexos serão comentados.

No Capítulo 4 será estudado o jogo da Batalha dos Sexos a partir do protocolo elaborado por Eisert *et al.* (27). Com base nos resultados teóricos encontrados, será testada a condição definida por Benjamin (33). Além disso, se discutirá que o dilema do jogo pode ser resolvido. Por fim, uma proposta de implementação experimental via RMN do jogo da Batalha dos Sexos, para o caso maximamente emaranhado, será apresentada.

O Capítulo 5 conterá as principais conclusões e propostas para trabalhos futuros.

⁵ O conceito de equilíbrio de Nash é apresentado na Seção 3.6.1.1.

2 RESSONÂNCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

A primeira descrição do fenômeno da Ressonância Magnética Nuclear (RMN) foi publicada em 1946 por dois grupos independentes: o dos físicos Purcell, Torrey e Pound, da Universidade de Havard, e o do Bloch, Hansen e Packard, da Universidade de Stanford (41).

De acordo com essa descrição e os avanços tecnológicos, a RMN hoje é aplicada em várias áreas, tais como Química, Biologia, Agronomia, Medicina e mais recentemente à Computação Quântica para o processamento de Informação Quântica (42). A RMN para o processamento de Informação Quântica é viável porque é possível controlar a dinâmica do sistema de spins nucleares por meio de pulsos de radiofrequência (43), o que permite desenvolver sequências de pulsos para preparação de estados, implementação de portas lógicas, simulação de Hamiltonianos e a determinação do estado do sistema através do processo de tomografia de estado quântico (44). Nesse sentido, um controle preciso da evolução dos spins nucleares por meio de campos de radiofrequência é bem estabelecido e pode ser implementado em espectrômetros disponíveis no mercado (44). Estes espectrômetros possibilitam manipular não um único spin, mas um *ensemble*¹ de spins, os quais estão em equilíbrio térmico e obedecem à distribuição de Boltzmann.

Com base na breve discussão acima, nesse capítulo serão apresentados os conceitos fundamentais da RMN, bem como a interação Zeeman, a interação com ondas eletromagnéticas, o formalismo da matriz densidade, os principais Hamiltonianos de interação externa e interna entre os spins nucleares, a implementação de estados pseudo puros e o processo de tomografia de estado quântico. Seguindo esta ordem, na seguinte seção a interação Zeeman será discutida.

2.1 INTERAÇÃO ZEEMAN

Para iniciar uma discussão formal do significado da interação Zeeman, os conhecimentos básicos da teoria do Eletromagnetismo Clássico devem ser utilizados. Nesse sentido, o conceito de energia magnética é de crucial importância para o desenvolvimento do tópico em questão. Sendo assim, pela definição de energia potencial magnética (46)

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{m}$ é o momento de dipolo magnético e $\mathbf{B}$ é o campo magnético na vizinhança em que o momento de dipolo magnético está inserido no espaço, é possível estender a definição de energia potencial da Equação (2.1) para o regime quântico. Neste regime, a energia potencial é denominada como energia de interação Zeeman, $\hat{\mathcal{H}}_Z$, e é representada pela seguinte expressão matemática

$$\hat{\mathcal{H}}_Z = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

¹ É um grande número de spins nucleares de um dado sistema (41, 45).

onde μ é o vetor de momento de dipolo magnético total (45). Na Mecânica Quântica, μ é proporcional ao momento angular total de spin nuclear $\hbar\vec{\mathbf{I}}$ e obedece à seguinte igualdade

$$\mu = \hbar\gamma\vec{\mathbf{I}}, \quad (2.3)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π e γ é o fator giromagnético da espécie nuclear. Cada espécie nuclear possui um valor de γ específico (41). O terceiro constituinte da Equação (2.3) é denominado operador vetor de momento angular de spin nuclear $\vec{\mathbf{I}}$. Uma descrição geral permite considerar as três componentes $\hat{\mathbf{I}}_x$, $\hat{\mathbf{I}}_y$ e $\hat{\mathbf{I}}_z$, que podem ser escritas como

$$\vec{\mathbf{I}} = (\hat{\mathbf{I}}_x, \hat{\mathbf{I}}_y, \hat{\mathbf{I}}_z),$$

as quais estão vinculadas ao valor do número quântico de spin nuclear I .

Uma consequência disso é que para a interação Zeeman ocorrer, as espécies nucleares devem ter o número quântico de spin nuclear I diferente de zero. Uma outra característica de espécies nucleares que possuem o número quântico $I > 1/2$, é que além da contribuição Zeeman, existe a interação do momento de quadrupolo elétrico nuclear, interagindo com gradientes de campo elétrico nas suas vizinhanças. Particularmente, neste trabalho, somente espécies nucleares que possuem o número quântico $I = 1/2$ foram estudadas. Para estas espécies, durante a interação Zeeman, diferentes níveis de energia são atribuídos ao núcleo. Além disso, estes níveis dependem da orientação do spin do núcleo em relação ao eixo definido pelo campo magnético estático. A absorção e irradiação de energia associada a transições entre esses níveis constituem o fenômeno físico observado em um experimento de RMN (47, 48).

Com base no que foi dito, pode-se discutir as propriedades quânticas do operador de spin nuclear que são caracterizadas pelos autovalores e autoestados de seu módulo ao quadrado $\hat{\mathbf{I}}^2$ e sua componente $\hat{\mathbf{I}}_z$, conforme está mostrado abaixo

$$\hat{\mathbf{I}}^2 |I, m\rangle = I(I+1) |I, m\rangle, \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_z |I, m\rangle = m |I, m\rangle, \quad (2.5)$$

os *kets* $|I, m\rangle$ são autoestados simultâneos de $\hat{\mathbf{I}}^2$ e $\hat{\mathbf{I}}_z$, e são especificados pelos números quânticos I e m , com $m = -I, -I+1, \dots, I-1, I$, onde m é denominado número quântico magnético (49). Matematicamente, o valor do spin nuclear I define a dimensão do espaço de Hilbert, $\mathbb{H}$, do sistema de spins nucleares em questão. No caso de $2I+1$ dimensões com o número quântico de spin nuclear I fixo, este espaço é gerado pela base de estados quânticos $\{|I, m\rangle\}$.

Além dos operadores $\hat{\mathbf{I}}^2$ e $\hat{\mathbf{I}}_z$, são definidos outros dois operadores, denominados operador de levantamento $\hat{\mathbf{I}}_+ = \hat{\mathbf{I}}_x + i\hat{\mathbf{I}}_y$ e operador de abaixamento $\hat{\mathbf{I}}_- = \hat{\mathbf{I}}_x - i\hat{\mathbf{I}}_y$, os quais vinculam as componentes transversais dos spins nucleares. A atuação de $\hat{\mathbf{I}}_+$ e $\hat{\mathbf{I}}_-$ nos vetores de estado quântico $|I, m\rangle$ é escrita como se segue

$$\hat{\mathbf{I}}_+ |I, m\rangle = \sqrt{I(I+1) - m(m+1)} |I, m+1\rangle, \quad (2.6)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_- |I, m\rangle = \sqrt{I(I+1) - m(m-1)} |I, m-1\rangle, \quad (2.7)$$

e esta atuação tem como efeito levantar (abaixar) o valor do número quântico m em uma unidade (50) sem modificar o número quântico de spin nuclear I .

Para o caso em que a interação Zeeman ocorre quando um campo magnético estático na direção z , $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, é aplicado, a Equação (2.3) pode ser substituída no Hamiltoniano de Zeeman da Equação (2.2), sendo escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_Z = -\hbar\gamma\hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{B}_0 = -\hbar\gamma\hat{I}_z B_0 = -\hbar\omega_L \hat{I}_z, \quad (2.8)$$

onde $\omega_L = \gamma B_0$ é denominada frequência angular de Larmor da espécie nuclear. A representação do Hamiltoniano de Zeeman $\hat{\mathcal{H}}_Z$ da Equação (2.8) por meio do operador $\hat{I}_z$, permite que seus autovalores sejam determinados em referência aos autoestados da base $\{|I, m\rangle\}$. A partir disso, os autovalores que representam os níveis de energia da espécie nuclear são escritos como

$$E_m = -m\hbar\omega_L, \quad (2.9)$$

de tal forma que são igualmente espaçados por uma quantidade de $\pm\hbar\omega_L$ e dependem apenas do número quântico m . Este número quântico pode ser interpretado como a orientação do momento angular total nuclear em relação a um campo magnético estático aplicado (48). Além disso, o estado fundamental é dado por $m = I$.

Ainda dentro do contexto da interação Zeeman, em uma amostra de RMN, há inúmeras moléculas, da ordem de 10^{23} unidades. Esta quantidade de moléculas é denominada *ensemble* de spins. Em um *ensemble* que possui núcleos idênticos em equilíbrio térmico, os níveis de energia não são igualmente populados e as populações relativas obedecem a seguinte distribuição de Boltzmann (48, 51)

$$\frac{N_m}{N} = \frac{\exp\left[\frac{-E_m}{k_B T}\right]}{\sum_{m=-I}^I \exp\left[\frac{-E_m}{k_B T}\right]}, \quad (2.10)$$

onde $N = \sum_{m=-I}^I N_m = 6,022 \times 10^{23}$, k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta do *ensemble*. Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.10), obtém-se

$$\frac{N_m}{N} = \frac{\exp\left[\frac{m\hbar\omega_L}{k_B T}\right]}{\sum_{m=-I}^I \exp\left[\frac{m\hbar\omega_L}{k_B T}\right]}. \quad (2.11)$$

Na condição de altas temperaturas, ou seja, $\hbar\omega_L \ll k_B T$, as exponenciais da expressão acima podem ser expandidas em uma série de Taylor de primeira ordem

$$\frac{N_m}{N} \approx \frac{1 + \frac{m\hbar\omega_L}{k_B T}}{\sum_{m=-I}^I (1 + \frac{m\hbar\omega_L}{k_B T})} \approx \frac{1 + \frac{m\hbar\omega_L}{k_B T}}{2I + 1}. \quad (2.12)$$

A aproximação da Equação (2.12) permite escrever

$$\frac{N_m}{N} = \frac{\exp\left[\frac{-E_m}{k_B T}\right]}{2I + 1}. \quad (2.13)$$

Em particular, para um sistema de spin $I = 1/2$, o qual possui 2 níveis de energia, há uma população relativa $\frac{N_{-1/2}}{N} = \frac{1}{2} \exp \left[\frac{-E_{-1/2}}{k_B T} \right]$ de spins vinculada ao número quântico $m = -1/2$. Da mesma maneira, há uma população relativa $\frac{N_{1/2}}{N} = \frac{1}{2} \exp \left[\frac{-E_{1/2}}{k_B T} \right]$ de spins vinculada ao número quântico $m = 1/2$. Estas populações estão relacionadas pelo seguinte fator de Boltzmann (45)

$$\frac{N_{-1/2}}{N_{1/2}} = \exp \left[\frac{E_{1/2} - E_{-1/2}}{k_B T} \right] = \exp \left[-\frac{\hbar \omega_L}{k_B T} \right] \approx 1 - \frac{\hbar \omega_L}{k_B T}. \quad (2.14)$$

Para um sistema constituído por núcleos de ^1H sujeitos a um campo magnético estático de 9,39 Tesla, tem-se que $\hbar \omega_L = 4,21 \times 10^{-26}$ Joules e $k_B T = 4,12 \times 10^{-21}$ Joules, onde $T = 298,15$ K, desta maneira o fator de Boltzmann da Equação (2.14) é dado por

$$N_{-1/2} \approx (1 - 1,022 \times 10^{-5}) N_{1/2} = 0,9998 N_{1/2}. \quad (2.15)$$

Como $N = N_{-1/2} + N_{1/2} = 6,022 \times 10^{23}$, determina-se que a diferença de população é de $\Delta N = 3,076 \times 10^{18}$ spins, implicando no fato de que $N_{-1/2} = 3,00998 \times 10^{23}$ spins precessionam no sentido oposto ao campo magnético externo e $N_{1/2} = 3,01002 \times 10^{23}$ spins precessionam no mesmo sentido do campo. Desta forma, $\frac{\Delta N}{N} = 5 \times 10^{-6}$, ou seja, a diferença de população entre os dois níveis é da ordem de partes por milhão com relação ao número total de spins da amostra (52). Além disso, esta pequena diferença que é detectada em um experimento de RMN.

Um outro aspecto importante a ser discutido é em referência ao tamanho da amostra. Do Eletromagnetismo Clássico, a magnetização de um material depende do número de momentos de dipolo magnéticos resultantes, sendo escrita como (53)

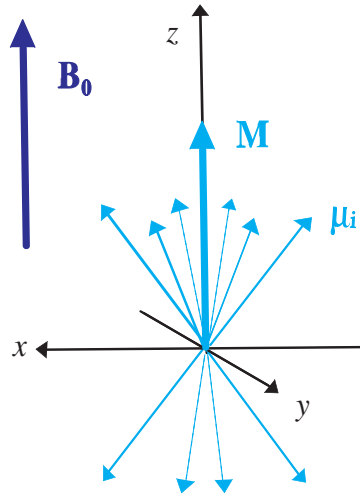
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_i \frac{\boldsymbol{\mu}_i}{\Delta V}, \quad (2.16)$$

onde ΔV é um volume mesoscópico e nele existem aproximadamente múltiplos de N_a (número de Avogadro) de dipolos magnéticos, representados por $\boldsymbol{\mu}_i$ que é o vetor do i -ésimo momento de dipolo magnético. Portanto, da definição da Equação (2.16) e como ilustrado na Figura 1, é possível vincular uma magnetização líquida orientada na direção do eixo z .

2.2 INTERAÇÃO COM ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

De acordo com o que se discutiu na seção anterior, o Hamiltoniano da Equação (2.8) define as energias como uma consequência da aplicação do campo magnético estacionário, $\mathbf{B}_0$, muito intenso. Além deste processo de alinhamento ou ordenamento, é desejável que exista uma dinâmica para o spin nuclear. Esse procedimento é conhecido como Controle Quântico. Uma maneira de controlar o spin é aplicando um campo magnético oscilante $\mathbf{B}_1(t)$ com uma frequência apropriada (54). Para campos magnéticos estáticos $\mathbf{B}_0$ da ordem de Teslas, a frequência de um campo oscilante $\mathbf{B}_1(t)$ pertence à região das ondas de radiofrequência (47). A aplicação deste campo oscilante permite que o spin absorva e emita energia de tal forma que ele possa transicionar

Figura 1 – Representação da magnetização líquida na direção do eixo z , onde μ_i é o vetor do i -ésimo momento de dipolo magnético e B_0 é o campo magnético estático.



Fonte: A autora.

entre os níveis de energia desdobrados (54). Nesse sentido, considera-se um campo $B_1(t)$ da ordem de poucos Gauss², aplicado perpendicularmente ao campo estático B_0 ,

$$B_1(t) = B_1[\cos(\omega_{rf}t + \varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\omega_{rf}t + \varphi)\mathbf{e}_y], \quad (2.17)$$

onde ω_{rf} é a frequência angular do campo de radiofrequência e φ é a fase, a qual determina a direção de aplicação deste campo (47). Portanto, associa-se ao campo oscilante um Hamiltoniano, denominado Hamiltoniano de radiofrequência ($\hat{\mathcal{H}}_{rf}$), o qual é escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_{rf} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_1(t) = -\omega_1 \hbar [\cos(\omega_{rf}t + \varphi)\hat{\mathbf{I}}_x + \sin(\omega_{rf}t + \varphi)\hat{\mathbf{I}}_y], \quad (2.18)$$

onde $\omega_1 = \gamma B_1$.

Uma vez que o Hamiltoniano da Equação (2.18) depende do tempo, a dinâmica do sistema de spins no referencial de laboratório se torna complicada. Contudo, esta dependência temporal pode ser excluída se a evolução do sistema é descrita por meio de um referencial girante, pois este rotaciona em torno do eixo z com uma frequência angular ω_{rf} .

Desta maneira, o vetor de estado no referencial girante, $|\Psi_r(t)\rangle$, pode ser vinculado ao vetor de estado no referencial de laboratório, $|\Psi_l(t)\rangle$, por meio da seguinte transformação

$$|\Psi_r(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t)|\Psi_l(t)\rangle = \exp[i\omega_{rf}\hat{\mathbf{I}}_z t]|\Psi_l(t)\rangle. \quad (2.19)$$

Se a Equação (2.19) for invertida, então o vetor de estado no referencial de laboratório pode ser escrito como

$$|\Psi_l(t)\rangle = \exp[-i\omega_{rf}\hat{\mathbf{I}}_z t]|\Psi_r(t)\rangle. \quad (2.20)$$

² 1 Gauss = 10^{-4} Teslas.

O vetor de estado no referencial de laboratório evolui no tempo de acordo com a seguinte equação

$$i\hbar \frac{d|\Psi_l(t)\rangle}{dt} = \left(\hat{\mathcal{H}}_Z + \hat{\mathcal{H}}_{rf} \right) |\Psi_l(t)\rangle, \quad (2.21)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_Z$ é o Hamiltoniano de Zeeman da Equação (2.8) e $\hat{\mathcal{H}}_{rf}$ é o Hamiltoniano de radio-frequência da Equação (2.18). Substituindo a Equação (2.20) na Equação (2.21) e utilizando as seguintes propriedades matemáticas (45)

$$\exp \left[i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] \hat{\mathbf{I}}_z \exp \left[i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] = \hat{\mathbf{I}}_z, \quad (2.22)$$

$$\exp \left[i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] \hat{\mathbf{I}}_x \exp \left[-i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] = \hat{\mathbf{I}}_x \cos(\omega_{rf}t) - \hat{\mathbf{I}}_y \sin(\omega_{rf}t), \quad (2.23)$$

$$\exp \left[i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] \hat{\mathbf{I}}_y \exp \left[-i\omega_{rf}t \hat{\mathbf{I}}_z \right] = \hat{\mathbf{I}}_x \sin(\omega_{rf}t) + \hat{\mathbf{I}}_y \cos(\omega_{rf}t), \quad (2.24)$$

$$\cos(\omega_{rf}t + \varphi) = \cos(\omega_{rf}t) \cos(\varphi) - \sin(\omega_{rf}t) \sin(\varphi), \quad (2.25)$$

$$\sin(\omega_{rf}t + \varphi) = \sin(\omega_{rf}t) \cos(\varphi) + \cos(\omega_{rf}t) \sin(\varphi), \quad (2.26)$$

escreve-se a evolução do vetor de estado no referencial girante da seguinte forma

$$i\hbar \frac{d|\Psi_r(t)\rangle}{dt} = \left[-\hbar(\omega_L + \omega_{rf}) \hat{\mathbf{I}}_z - \hbar\omega_1 \left(\hat{\mathbf{I}}_x \cos(\varphi) + \hat{\mathbf{I}}_y \sin(\varphi) \right) \right] |\Psi_r(t)\rangle. \quad (2.27)$$

Por meio da Equação (2.27), encontra-se o Hamiltoniano no referencial girante, denominado Hamiltoniano efetivo, $\hat{\mathcal{H}}_{ef}$

$$\hat{\mathcal{H}}_{ef} = -\hbar(\omega_L + \omega_{rf}) \hat{\mathbf{I}}_z - \hbar\omega_1 \left(\hat{\mathbf{I}}_x \cos(\varphi) + \hat{\mathbf{I}}_y \sin(\varphi) \right). \quad (2.28)$$

Para o caso em que $\omega_{rf} \neq -\omega_L$ (fora da ressonância), os spins precessam no referencial girante ao redor de um eixo definido por um campo magnético efetivo, dado por

$$\mathbf{B}_{ef} = \left(B_0 - \frac{\omega_{rf}}{\gamma} \right) \mathbf{e}_z + B_1 \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + B_1 \sin(\varphi) \mathbf{e}_y. \quad (2.29)$$

Portanto, da equação acima, o efeito da aplicação de um campo oscilante é o de mudar a direção da magnetização do *ensemble* de spins (48). Na condição de ressonância e para o caso em que o campo é aplicado na direção x (a fase $\varphi = 0$), a magnetização líquida precessa em um referencial girante ao redor de x com uma frequência angular³ dada por: $\omega_1 = \gamma B_1$. No instante em que o campo de radiofrequência é ligado, a magnetização gira em torno de $\mathbf{B}_1(t)$. O tempo em que o campo oscilante fica ligado determina o ângulo de nutação dado por: $\Theta = \omega_1 t_p$. A aplicação deste campo de radiofrequência por um tempo t_p é denominado tempo de pulso de radiofrequência. Para o caso em que $\Theta = \frac{\pi}{2}$, a magnetização após a aplicação do pulso se encontra em um plano transversal (plano xy) à $\mathbf{B}_0$. Este pulso é denominado um pulso de $\frac{\pi}{2}$. Para o caso em que um pulso de π é aplicado, a magnetização é invertida.

³ Também denominada de frequência angular de nutação.

2.3 FORMALISMO DA MATRIZ DENSIDADE

A descrição feita por meio do Eletromagnetismo Clássico na Seção 2.2, para descrever o comportamento da magnetização quando campos magnéticos externos são aplicados, é muito simplificada, pois muitas características dos experimentos de RMN não podem ser explicadas (48). Uma destas características é que o *ensemble* de spins pode estar sujeito a flutuações, tais como temperatura e campo magnético, de tal forma que o estado quântico das moléculas pode ser alterado. Portanto, é impossível determinar experimentalmente o estado de uma molécula individual. Esta inviabilidade caracteriza uma informação incompleta a respeito do sistema em estudo. Dentro deste contexto, uma abordagem mais apropriada para explicar o fenômeno da RMN é através do formalismo da matriz densidade, introduzido por Von Neumann em 1927 (55). A matriz densidade é uma matriz que pode descrever um sistema quântico em um estado misto⁴. Isso deve ser contrastado com um único vetor de estado que caracteriza um sistema quântico em um estado puro. Os estados mistos surgem em situações em que o experimentador não sabe quais estados particulares estão sendo manipulados. Os exemplos incluem um sistema em equilíbrio térmico ou um sistema com um histórico de preparação incerto, de modo que não se sabe em qual estado puro o sistema está. A matriz densidade é uma representação de um operador linear chamado de operador densidade (56). O operador densidade, $\hat{\rho}$, de um conjunto de núcleos idênticos e independentes (um *ensemble*), é definido de tal forma que a média macroscópica do valor esperado de qualquer observável $\hat{A}$ sobre o *ensemble* é dado por

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr} \{ \hat{A} \hat{\rho}(t) \}. \quad (2.30)$$

É importante ressaltar que o lado esquerdo da Equação (2.30) representa a média estatística sob todo o *ensemble* e não o valor esperado para um determinado sistema particular no *ensemble* (48).

Em uma dada base ortonormal, o operador densidade possui a seguinte representação matricial

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{I,I} & \rho_{I,I-1} & \cdots \\ \rho_{I-1,I} & \rho_{I-1,I-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

O elemento $\rho_{m,m}$ representa a probabilidade de encontrar um membro do *ensemble* em um estado especificado pelo número quântico m . A diagonal de $\hat{\rho}$ é geralmente referida como populações (48). Os elementos fora da diagonal são números complexos e carregam um fator de fase dependente do tempo. Este fator está relacionado com a condição de Bohr (50, 57) da transição de um estado $|m\rangle$ para o estado $|n\rangle$, onde $|m\rangle$ e $|n\rangle$ são autoestados do Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ do sistema. Cada termo de $\hat{\rho}$ fora da diagonal recebe o nome de coerências. Estas coerências estão relacionadas com a existência de magnetização transversal após a aplicação de um pulso de radiofrequência (48).

⁴ Um conjunto estatístico de vários estados quânticos.

Ainda dentro desta abordagem, o operador densidade obedece algumas propriedades, as quais são

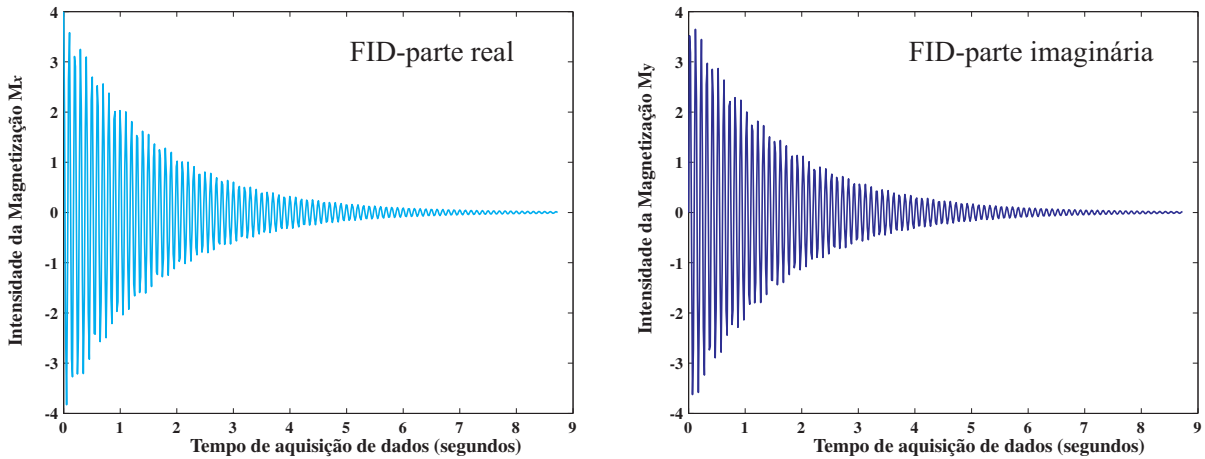
- i) a hermiticidade: $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^\dagger(t)$.
- ii) a normalização: $\text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \} = 1$. Esta relação pode ser interpretada como a conservação de probabilidade numa abordagem quântica.
- iii) e $\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2(t) \} = 1$ para um estado puro e $\text{Tr} \{ \hat{\rho}^2(t) \} < 1$ para um estado misto (58).

Em RMN, os observáveis de interesse são as componentes da magnetização nuclear (48), as quais são proporcionais aos valores médios do *ensemble* das componentes do operador de spin nuclear $\langle \hat{\mathbf{I}}_x(t) \rangle$, $\langle \hat{\mathbf{I}}_y(t) \rangle$ e $\langle \hat{\mathbf{I}}_z(t) \rangle$. Em um experimento de RMN, o espectrômetro detecta o FID(t) (*Free Induction Decay*)⁵ no plano transversal, portanto ele carrega os valores médios das componentes da magnetização $\langle M_x(t) \rangle$, $\langle M_y(t) \rangle$ e é dado por

$$\text{FID}(t) = \text{Tr} \left\{ \left(\hat{\mathbf{I}}_x + i\hat{\mathbf{I}}_y \right) \hat{\rho}(t) \right\} \exp \left[-\frac{t}{t_c} \right], \quad (2.32)$$

onde $\hat{\rho}(t)$ representa o operador densidade no instante t e t_c é o tempo de perda de coerência de fase das magnetizações transversais. A simulação de um FID(t) é apresentada na Figura 2. Quando a transformada de Fourier da Equação (2.32) é calculada, espectros são obtidos em

Figura 2 – A figura no quadro à esquerda (direita) representa a componente da magnetização transversal $M_x(t)$ ($M_y(t)$), a parte real (imaginária) do FID(t).



Fonte: A autora.

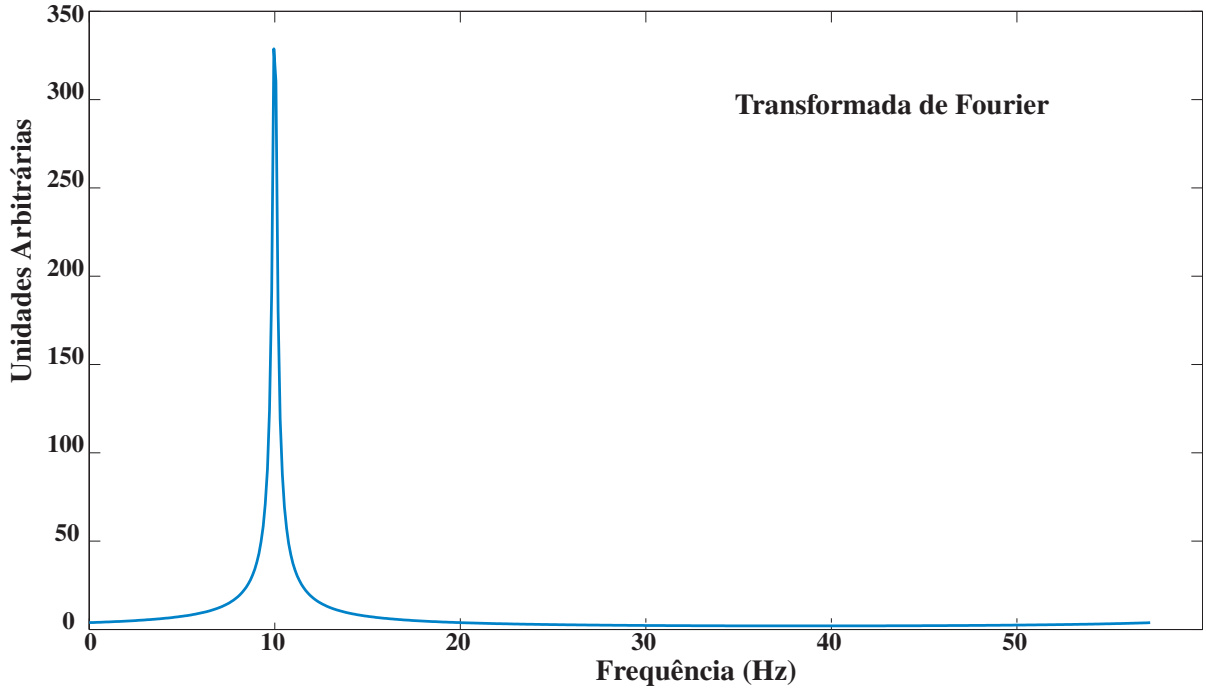
função das frequências, que são as frequências de Larmor das espécies nucleares detectadas (58). Como exemplo, vide a Figura 3, a qual é a transformada de Fourier do FID(t) da Figura 2.

A evolução temporal do operador densidade obedece a seguinte equação

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\rho}(t), \hat{\mathcal{H}}(t) \right], \quad (2.33)$$

⁵ Após a aplicação de qualquer pulso de radiofrequência, a evolução da magnetização pode ser detectada por uma bobina colocada no plano transversal. O sinal detectado pelo espectrômetro é denominado decaimento de indução livre (FID(t)), pois, decai exponencialmente com o tempo. Este decaimento está vinculado com a perda de defasagem durante a dinâmica de precessão dos núcleos no *ensemble*.

Figura 3 – Esta figura representa a transformada de Fourier do FID (t) da Figura 2.



Fonte: A autora.

a qual é conhecida como equação de Liouville-Von Neumann (55,58). O Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}(t)$ descreve as interações para as quais o sistema é submetido num tempo t . O operador densidade $\hat{\rho}(t)$ representa o estado do sistema $|\Psi(t)\rangle$.

Se $\hat{\mathcal{H}}(t)$ comuta com $\hat{\rho}(t)$, então $\hat{\rho}(t)$ não evolui no tempo. Isto significa que o estado $|\Psi(t)\rangle$ é um autoestado de $\hat{\mathcal{H}}(t)$. Porém, se $\hat{\mathcal{H}}(t)$ não depende do tempo e não comuta com $\hat{\rho}(t)$, então o operador densidade evolui de acordo com a seguinte equação

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t) \hat{\rho}(t_0) \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t) = \exp\left[-\frac{i\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}\right] \hat{\rho}(t_0) \exp\left[\frac{i\hat{\mathcal{H}}t}{\hbar}\right], \quad (2.34)$$

onde o operador unitário $\hat{\mathcal{U}}(t)$ é denominado operador de evolução temporal ou propagador (58). O operador $\hat{\rho}(t_0)$ é o operador densidade no instante t_0 e $t > t_0$. Para o caso em que o Hamiltoniano não é independente do tempo, mas pode ser dividido em um número finito de termos independentes do tempo, a evolução do operador densidade é escrita como se segue

$$\hat{\rho}(t) = \exp\left[-\frac{i\hat{\mathcal{H}}(t_n)t_n}{\hbar}\right] \dots \exp\left[-\frac{i\hat{\mathcal{H}}(t_1)t_1}{\hbar}\right] \hat{\rho}(t_0) \exp\left[\frac{i\hat{\mathcal{H}}(t_1)t_1}{\hbar}\right] \dots \exp\left[\frac{i\hat{\mathcal{H}}(t_n)t_n}{\hbar}\right]. \quad (2.35)$$

A Equação (2.35) é imprescindível para o entendimento dos experimentos de RMN, o qual consiste de sequências de pulsos de radiofrequência e evoluções temporais (48).

Em uma amostra de RMN, a temperatura ambiente e em equilíbrio térmico, o operador densidade obedece à distribuição de Boltzmann. No formalismo canônico (51) o operador é dado

por

$$\hat{\rho} = \frac{\exp \left[-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{k_B T} \right]}{\mathcal{Z}}, \quad (2.36)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}$ é o Hamiltoniano do estado estacionário (59, 60), T a temperatura de equilíbrio térmico e $\mathcal{Z}$ a função partição do sistema. Para w espécies nucleares, com número de spin I , a função partição é escrita como $\mathcal{Z} = (2I + 1)^w$ (60). No caso de 2 espécies nucleares com $I = 1/2$, a função de partição é $\mathcal{Z} = 4$. No regime de altas temperaturas, a Equação (2.36) é escrita como uma aproximação de primeira ordem

$$\hat{\rho} \approx \frac{\hat{1}}{\mathcal{Z}} - \frac{\hat{\mathcal{H}}}{\mathcal{Z} k_B T}. \quad (2.37)$$

Para o caso em que o *ensemble* está submetido à um campo magnético estático B_0 , o Hamiltoniano estacionário é o Hamiltoniano de Zeeman da Equação (2.8). Desta maneira, a Equação (2.37) é reescrita como se segue

$$\hat{\rho} \approx \frac{\hat{1}}{\mathcal{Z}} + \frac{\hbar \omega_L \hat{\mathbf{I}}_z}{\mathcal{Z} k_B T}. \quad (2.38)$$

Caso a matriz densidade da equação acima seja transformada por um propagador $\hat{\mathcal{U}}(t)$, apenas o segundo termo da direita estará sujeito à transformação. O termo $\frac{\hbar \omega_L \hat{\mathbf{I}}_z}{\mathcal{Z} k_B T}$ é denominado matriz densidade de desvio $\hat{\rho}_{desv}$. Apenas esta matriz densidade pode ser detectada em um experimento de RMN após evoluções livres ou pulsos de radiofrequência aplicados (43, 61).

O efeito de um pulso de radiofrequência, de acordo com o que foi discutido na Seção 2.2 pode ser obtido transformando o Hamiltoniano do sistema $\hat{\mathcal{H}}_Z + \hat{\mathcal{H}}_{rf}$ de um referencial de laboratório para um referencial girante (48), o que é equivalente a escrever um Hamiltoniano efetivo associado ao campo efetivo da Equação (2.29). Na condição de ressonância, $\omega_{rf} = -\omega_L$ e para o caso em que o campo oscilante é aplicado na direção x , o Hamiltoniano efetivo é escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_{ef} = -\hbar \omega_1 \hat{\mathbf{I}}_x. \quad (2.39)$$

Se o campo oscilante é aplicado por um tempo t_p , então o operador de evolução temporal associado ao Hamiltoniano efetivo é dado por

$$\hat{\mathcal{U}}(t_p) = \exp \left[\frac{-i \hat{\mathcal{H}}_{ef} t_p}{\hbar} \right] = \exp \left[i \omega_1 t_p \hat{\mathbf{I}}_x \right] \equiv \hat{\mathbf{R}}_x(\Theta). \quad (2.40)$$

O operador $\hat{\mathbf{R}}_x(\Theta) = \exp \left[i \Theta \hat{\mathbf{I}}_x \right]$ é um operador de rotação (62). Seu efeito é produzir uma rotação de um ângulo de $\Theta = \omega_1 t_p$ ao redor do eixo x no referencial girante (48). Para um sistema de spin $I = 1/2$, o operador $\hat{\mathbf{R}}_x(\Theta)$ pode ser escrito como se segue (62)

$$\hat{\mathbf{R}}_x(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\Theta}{2}) & i \sin(\frac{\Theta}{2}) \\ i \sin(\frac{\Theta}{2}) & \cos(\frac{\Theta}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Para um caso mais geral, em que um pulso de radiofrequência é aplicado em uma outra direção⁶ Ω , a qual é definida pela escolha da fase φ , o operador de rotação é escrito como (48, 62, 63)

$$\hat{R}_\Omega(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\Theta}{2}) & i \sin(\frac{\Theta}{2}) \exp[-i\varphi] \\ i \sin(\frac{\Theta}{2}) \exp[i\varphi] & \cos(\frac{\Theta}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

No caso em que um pulso de radiofrequência de $\frac{\pi}{2}$ é aplicado com o campo $B_1(t)$ na direção positiva de x , a matriz densidade de desvio da Equação (2.38) evolui da seguinte forma (48)

$$\hat{\rho}(t_p)_{desv} = \exp \left[i \frac{\pi}{2} \hat{I}_x \right] \hat{\rho}_{desv} \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \hat{I}_x \right] = \hat{R}_x \left(\frac{\pi}{2} \right) \hat{\rho}_{desv} \hat{R}_x^\dagger \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\hbar \omega_L}{2k_B T} \hat{I}_y. \quad (2.43)$$

Portanto, após a aplicação do pulso, a matriz densidade de desvio é proporcional ao operador $\hat{I}_y$, e indica que a magnetização líquida está orientada ao longo do eixo y . Além disso, é exatamente igual ao o que é encontrado por uma rotação geométrica da magnetização ao longo de z , por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, ao redor do eixo x (de acordo com a regra da mão esquerda). Portanto, conclui-se que a aplicação de pulsos de radiofrequência pode ser descrita em termos de operadores de rotação. Deste fato, no restante do trabalho, a seguinte notação será adotada: $[\Theta]_\Omega^{A, B, \dots}$, onde $\Theta = \omega_1 t_p$ é o ângulo de rotação, que pode ser $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \dots$; os índices $A, B, \dots$, definirão em quais espécies nucleares o pulso de radiofrequência está sendo aplicado; Ω é a direção de aplicação do pulso.

2.3.1 PULSOS COMPOSTOS

Embora os pulsos de radiofrequência sejam geralmente pensados como ideais, estes estão limitados, pois algumas imperfeições podem surgir, tais como, a intensidade do sinal reduzida e erros de fase. Os motivos subjacentes podem ser a falta de homogeneidade do campo de radiofrequência na amostra macroscópica. Para resolver estes problemas, os pulsos compostos foram desenvolvidos. Estes pulsos constituem-se de uma série de outros pulsos de alta potência, em vez de um único pulso (64).

No âmbito desta discussão, é importante salientar que as rotações em torno do eixo z não podem ser implementadas em RMN por um único pulso de radiofrequência. Isto ocorre porque o campo de radiofrequência produz rotações da magnetização apenas no plano transversal. Uma maneira de implementar uma rotação em torno do eixo z é fazer uso da propriedade que nos permite escrevê-la como combinações de rotações sobre os eixos x e y . Desta forma, uma rotação de um ângulo Θ ao redor de z pode ser escrita como

$$[\Theta]_z = \left[\frac{\pi}{2} \right]_x \rightarrow [\Theta]_y \rightarrow \left[\frac{\pi}{2} \right]_{-x}. \quad (2.44)$$

A combinação de rotações da Equação (2.44) é denominada pulsos compostos em z , e é escrita com o tempo evoluindo da esquerda para a direita, de tal modo que a rotação mais à esquerda é o primeiro pulso a ser aplicado (65).

⁶ A direção de aplicação é dependente da fase φ . Por exemplo, se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, o pulso é aplicado na direção y , desta forma o operador de rotação é escrito como $\hat{R}_y(\Theta)$.

Para a situação em que nenhum pulso de radiofrequência é aplicado ou no intervalo de aplicação destes, o sistema evolui livremente. Durante estas evoluções os spins interagem entre si, desta forma, efeitos devido tais como ao deslocamento químico e ao acoplamento escalar aparecem. Estas interações são descritas através de Hamiltonianos de spin interno, os quais serão discutidos na seguinte seção.

2.4 HAMILTONIANOS DE SPIN INTERNO

As contribuições de energia devido a interação do momento magnético com campos externos representam uma grande parcela da energia para um sistema físico com propriedades elétricas e magnéticas. Porém, existem outras contribuições, embora menores, mas que em alguns casos tornam-se relevantes. Uma situação especial é quando interações do tipo internuclear e intranuclear são consideradas. Nesse sentido, todas as interações entre pares de spins nucleares podem ser descritas por meio de um Hamiltoniano de spin nuclear, $\hat{\mathcal{H}}_n$, que é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_n = \hat{\mathcal{H}}_{ext} + \hat{\mathcal{H}}_{int}, \quad (2.45)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_{ext}$ representa as interações dos spins nucleares com campos magnéticos externos e $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ descreve as interações internas, tal como o acoplamento escalar, acoplamento dipolar, acoplamento quadrupolar, deslocamento químico, entre outros (41). O Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{ext}$ pode ser representado pelo Hamiltoniano de Zeeman da Equação (2.8) e pelo Hamiltoniano de radiofrequência da Equação (2.18), de modo que,

$$\hat{\mathcal{H}}_{ext} = \hat{\mathcal{H}}_Z + \hat{\mathcal{H}}_{rf}. \quad (2.46)$$

Lembrando que se o sistema é descrito num referencial girante, então o Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{ext}$ é composto somente pelo Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{ef}$ da Equação (2.28). O Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ é escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \hat{\mathcal{H}}_{DQ} + \hat{\mathcal{H}}_D + \hat{\mathcal{H}}_J + \hat{\mathcal{H}}_Q, \quad (2.47)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_{DQ}$ representa o deslocamento químico, o qual está relacionado com a blindagem que os elétrons oferecem à aplicação de um campo magnético externo muito intenso; $\hat{\mathcal{H}}_D$ descreve a interação dipolar entre os núcleos; $\hat{\mathcal{H}}_J$ caracteriza o acoplamento escalar entre duas espécies nucleares; $\hat{\mathcal{H}}_Q$ exprime a interação quadrupolar entre núcleos e gradientes de campo elétrico para spin nuclear $I > 1/2$. Neste trabalho, uma maior ênfase será dada às interações que correspondem ao deslocamento químico e ao acoplamento escalar (45, 60), as quais serão discutidas a seguir.

2.4.1 DESLOCAMENTO QUÍMICO

Quando um campo magnético externo é aplicado em uma amostra, o espectro da espécie nuclear detectada não apresenta apenas uma frequência de Larmor. Este resultado ocorre porque há diferentes grupos químicos, os quais constituem a amostra sob análise, denominados ambientes químicos. Além disso, um núcleo está rodeado por uma nuvem eletrônica que o blind

parcialmente do campo magnético externo aplicado (66). Esta blindagem varia para os diferentes núcleos dentro da amostra, porque estes não sentem a mesma magnitude do campo magnético externo. Este efeito é denominado deslocamento químico em materiais diamagnéticos, deslocamento *Knight* em metais e supercondutores e deslocamento paramagnético em substâncias paramagnéticas (67). Devido a esta interação, o campo sentido pelos spins nucleares, $\mathbf{B}_{local}$, é a soma do campo magnético externo, $\mathbf{B}_0$, e o do campo induzido, $\mathbf{B}_{induzido}$, que pode ser escrito como se segue

$$\mathbf{B}_{local} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{induzido} = (1 - \nu)\mathbf{B}_0, \quad (2.48)$$

onde ν é conhecido como tensor de deslocamento químico, e carrega a informação da orientação da nuvem eletrônica da molécula em relação ao campo magnético aplicado (68), dado por

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} & \nu_{xz} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} & \nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

O caráter tensorial de ν implica que $\mathbf{B}_{induzido}$ está, em geral, em uma direção diferente da de $\mathbf{B}_0$, o que reflete a anisotropia do ambiente molecular do núcleo considerado. Como esta é uma interação puramente magnética, análoga a interação Zeeman (47), pode-se definir um Hamiltoniano de deslocamento químico, o qual é escrito como

$$\hat{\mathcal{H}}_{DQ} = -\boldsymbol{\mu} \cdot (-\nu\mathbf{B}_0) \cong \gamma\hbar\nu_{zz}B_0\hat{\mathbf{I}}_z. \quad (2.50)$$

A aproximação da equação acima é conhecida como aproximação secular como consequência da magnitude da interação Zeeman ser muito maior com o campo magnético externo em comparação com a interação de deslocamento químico. A componente ν_{zz} depende da orientação relativa da nuvem de elétrons na molécula em relação ao campo magnético externo. Para o caso de uma substância líquida isotrópica, a média de todas as orientações moleculares possíveis leva a um valor médio para o deslocamento químico, conhecido como o deslocamento químico isotrópico (ν_i) (47). Neste caso, o Hamiltoniano da Equação (2.50) é escrito da seguinte forma

$$\hat{\mathcal{H}}_{DQ} = \gamma\hbar\nu_iB_0\hat{\mathbf{I}}_z, \quad (2.51)$$

onde $\nu_i = \frac{(\nu_{xx} + \nu_{yy} + \nu_{zz})}{3}$.

Portanto, o efeito devido a interação de deslocamento químico é a produção de uma pequena correção adicionada ao campo magnético. Desta maneira, a consequência prática é um deslocamento da frequência angular de ressonância em relação a frequência angular de Larmor de um núcleo isolado, ou seja,

$$\omega = \omega_L(1 - \nu_i). \quad (2.52)$$

A dependência da frequência angular de ressonância, no ambiente molecular específico de cada núcleo, expresso pela Equação (2.52), que torna a técnica de RMN tão difundida e útil como ferramenta para identificação e caracterização de grupos químicos em substâncias líquidas⁷.

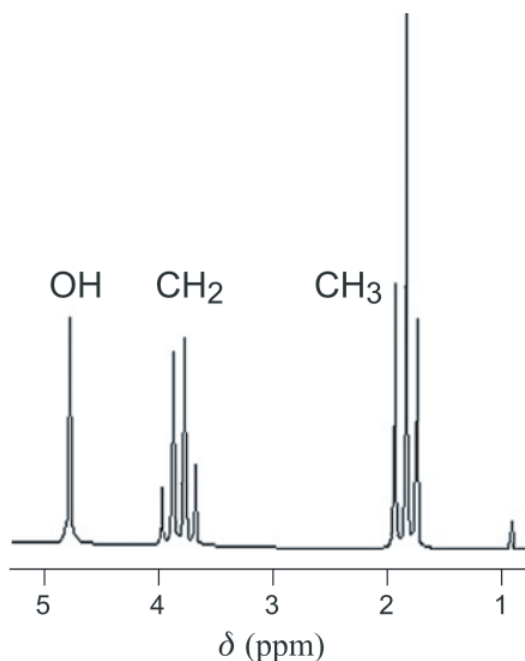
⁷ Também em sólidos se algumas técnicas especiais forem empregadas. Para mais detalhes vide as Referências (45, 48, 62).

A frequência angular de ressonância, geralmente, é expressa na prática como uma mudança relativa, medida em referência a frequência angular de ressonância, ω_{ref} , de uma substância padrão (47, 52, 62)

$$\delta = \frac{\omega - \omega_{ref}}{\omega_{ref}}. \quad (2.53)$$

Os valores de δ , chamados de deslocamentos químicos das linhas de ressonância, são comumente expressos em partes por milhão (ppm) (47). Como exemplo, o espectro do núcleo de ^1H de uma molécula de etanol ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) é apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Espectro de ^1H da molécula de etanol ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$). Este espectro mostra o efeito do deslocamento químico e do acoplamento escalar J . Os três grupos de picos bem separados referem-se aos prótons em cada um dos três grupos químicos diferentes na molécula, evidenciando o efeito de deslocamento químico e sua ordem de grandeza. As estruturas de multiplete dentro dos grupos CH_3 e CH_2 dos picos são devidas ao acoplamento J entre prótons dentro da mesma molécula (48). O desdobramento de um sinal é descrito pela regra $P + 1$, onde P é o número de prótons equivalentes ligados aos núcleos alvos adjacentes. O sinal do grupo CH_3 se desdobra em 3 linhas porque o carbono adjacente desse grupo é o CH_2 , aplicando a regra, tem-se 2 prótons do Hidrogênio $+1 = 3$ linhas. O sinal do grupo CH_2 tem 4 linhas pois está próximo do grupo CH_3 , o que resulta em 3 prótons do Hidrogênio $+1 = 4$ linhas. Por sua vez o grupo OH não tem nenhum carbono adjacente fornecendo apenas uma linha (62).



Fonte: Figura retirada da Referência (48).

2.4.2 ACOPLAMENTO ESCALAR

Diferentemente do deslocamento químico, o acoplamento escalar, acoplamento spin-spin ou J , não depende do campo magnético aplicado. Melhor dizendo, este acoplamento representa a interação entre os pares de momentos de dipolo magnéticos que representam os núcleos vizinhos.

Além disso, o valor de J fornece informações a respeito das ligações químicas na molécula em estudo (45). Dentro deste contexto, o Hamiltoniano que descreve o acoplamento escalar entre duas espécies nucleares pode ser denotado por $\hat{\mathcal{H}}_J$, de modo que pode-se definir

$$\hat{\mathcal{H}}_J = 2\pi\hbar\vec{\mathbf{I}}^A\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{I}}^B, \quad (2.54)$$

onde $\vec{\mathbf{J}}$ é um tensor, $\vec{\mathbf{I}}^A$ e $\vec{\mathbf{I}}^B$ são os operadores de momento angular de spin nuclear das espécies nucleares A e B , respectivamente. O espaço de Hilbert de um sistema de duas espécies nucleares com número de spin $I = 1/2$ é $\mathbb{H} = \mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$, e a dimensão deste espaço é $d(\mathbb{H}) = 4$.

O Hamiltoniano de acoplamento escalar $\hat{\mathcal{H}}_J$ para amostras líquidas, no regime anisotrópico⁸, com núcleos heteronucleares detectáveis, definido pelo campo magnético muito intenso B_0 , é escrito como (48)

$$\hat{\mathcal{H}}_J = 2\pi\hbar J\hat{\mathbf{I}}_z^A\hat{\mathbf{I}}_z^B, \quad (2.55)$$

onde J é a constante de acoplamento entre as espécies nucleares A e B , $\hat{\mathbf{I}}_z^A = \hat{\mathbf{I}}_z \otimes \hat{\mathbf{1}}$ e $\hat{\mathbf{I}}_z^B = \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{I}}_z$. O valor desta constante pode ser positivo ou negativo dependendo das propriedades físicas e químicas do par de átomos em estudo.

Quando o Hamiltoniano da Equação (2.55) é tomado como uma perturbação do Hamiltoniano de Zeeman, verifica-se que cada linha é dividida em um multipletto que depende do número de núcleos idênticos acoplados pela mesma constante J , bem como o spin de cada um desses núcleos (um exemplo da interação devido ao acoplamento J é dado na Figura 4). Para dois núcleos distintos de spin $1/2$, por exemplo, cada linha é dividida em duas outras linhas separadas por uma quantidade igual à magnitude de J (em unidades de Hz) (48).

De acordo com o que foi discutido na Seção 2.4, em amostras líquidas os núcleos possuem interações intramoleculares com seus vizinhos e não podem mais serem descritos como entidades isoladas (47). Levando em conta o deslocamento químico e o acoplamento escalar, na seguinte seção será apresentada a dinâmica de um sistema de spins $1/2$ acoplados em amostras líquidas.

2.5 SISTEMA DE DOIS SPINS $1/2$ ACOPLADOS

Neste sistema considera-se duas espécies nucleares diferentes (heteronucleares) denotadas por I_A e I_B e submetidas à presença de um campo magnético intenso e estacionário. Além disso, ambas as espécies nucleares estão acopladas, e satisfazem a seguinte desigualdade: $2\pi J \ll |\omega^A - \omega^B|$, ou seja, a condição de que a frequência angular de acoplamento entre as duas espécies nucleares seja muito menor que a diferença entre as frequências angulares de ressonância destas espécies⁹ (69). O Hamiltoniano que representa esta interação, descrito no referencial de laboratório é

$$\hat{\mathcal{H}}_{AB} = -\hbar\omega^A\hat{\mathbf{I}}_z^A - \hbar\omega^B\hat{\mathbf{I}}_z^B + 2\pi\hbar J\hat{\mathbf{I}}_z^A\hat{\mathbf{I}}_z^B. \quad (2.56)$$

⁸ Neste caso o tensor $\vec{\mathbf{J}}$ torna-se um escalar.

⁹ Devido à esta condição, o sistema está fracamente acoplado.

É importante ressaltar, que os efeitos do deslocamento químico estão incluídos nos valores das frequências angulares ressonantes ω^A e ω^B na expressão acima. Para este sistema, os autoestados do Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{AB}$ são representados como: $|m_A, m_B\rangle$, onde $m_A = \pm 1/2$ e $m_B = \pm 1/2$ são os autovalores de $\hat{I}_z^A$ e $\hat{I}_z^B$, respectivamente. Os níveis de energia associados ao Hamiltoniano da Equação (2.56) são diretamente avaliados da atuação dos operadores $\hat{I}_z^A$ e $\hat{I}_z^B$ na base $|m_A, m_B\rangle$, sendo escritos como

$$|1/2, 1/2\rangle : E_{1/2,1/2} = \hbar \left(-\frac{\omega^A}{2} - \frac{\omega^B}{2} + \frac{\pi J}{2} \right), \quad (2.57)$$

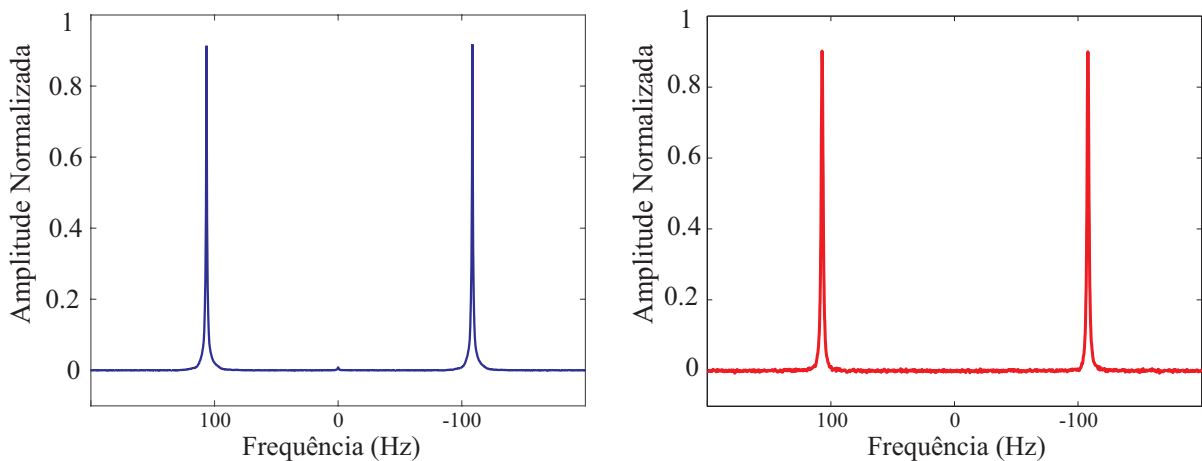
$$|1/2, -1/2\rangle : E_{1/2,-1/2} = \hbar \left(-\frac{\omega^A}{2} + \frac{\omega^B}{2} - \frac{\pi J}{2} \right), \quad (2.58)$$

$$|-1/2, 1/2\rangle : E_{-1/2,1/2} = \hbar \left(\frac{\omega^A}{2} - \frac{\omega^B}{2} - \frac{\pi J}{2} \right), \quad (2.59)$$

$$|-1/2, -1/2\rangle : E_{-1/2,-1/2} = \hbar \left(\frac{\omega^A}{2} + \frac{\omega^B}{2} + \frac{\pi J}{2} \right). \quad (2.60)$$

Para o caso em que J é positivo e $\omega^A > \omega^B$, os níveis de energia das Equações (2.57)-(2.60) estão arranjados em ordem crescente de energia (48). As transições entre esses níveis de energia são permitidas somente se a regra de seleção $\Delta m_{A,B} = \pm 1$ é obedecida (57). Esta regra faz com que exista duas linhas no espectro de cada espécie nuclear com as frequências $\frac{\omega^A}{2\pi} \pm \frac{J}{2}$ e $\frac{\omega^B}{2\pi} \pm \frac{J}{2}$. A separação entre as duas linhas de cada espectro em unidades de Hz, é o valor da constante J . Um exemplo de um espectro de duas espécies nucleares acopladas se encontra na Figura 5. As duas espécies são o Hidrogênio e o Carbono de uma amostra de clorofórmio enriquecido ($^{13}\text{CHCl}_3$).

Figura 5 – Espectros experimentais de uma amostra de clorofórmio enriquecido ($^{13}\text{CHCl}_3$) para um campo de 9,39 Teslas usando o espectrômetro de RMN do C-LabMu. A figura à esquerda (direita) corresponde ao espectro do núcleo de Hidrogênio (Carbono). A separação entre as duas linhas de cada espectro, em unidades de Hz, representa o valor da constante J , a qual é aproximadamente 216 Hz.



Fonte: A autora.

O operador densidade deste sistema pode ser escrito através da Equação (2.36). Na

condição de equilíbrio térmico e altas temperaturas, a matriz densidade pode ser calculada a partir do Hamiltoniano da Equação (2.56) e ser escrita como (69)

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}}{4} + \frac{\hbar\omega^A \hat{\mathbf{I}}_z^A + \hbar\omega^B \hat{\mathbf{I}}_z^B}{4k_B T} - \frac{2\pi J \hbar \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B}{4k_B T}. \quad (2.61)$$

O último termo do lado direito da Equação (2.61) pode ser negligenciado devido ao fraco acoplamento entre as espécies quando comparado com os valores das frequências de Larmor de ambas espécies nucleares. Desta condição, a matriz densidade de desvio é dada conforme

$$\hat{\rho}_{desv} = \frac{\hbar\omega^A \hat{\mathbf{I}}_z^A}{4k_B T} + \frac{\hbar\omega^B \hat{\mathbf{I}}_z^B}{4k_B T}. \quad (2.62)$$

Neste sistema um campo de radiofrequência também pode ser aplicado, onde considera-se dois referenciais girantes¹⁰, independentes, cada um relacionado com a frequência angular ω^A ou ω^B . Cada referencial precessa ao redor do eixo z com uma frequência angular ω_{rf}^A ou ω_{rf}^B . O Hamiltoniano efetivo para um pulso de radiofrequência aplicado na direção x no spin I_A e I_B no duplo referencial girante é dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_{ef} = -\hbar\omega_1^A \hat{\mathbf{I}}_x^A - \hbar(\omega^A + \omega_{rf}^A) \hat{\mathbf{I}}_z^A - \hbar\omega_1^B \hat{\mathbf{I}}_x^B - \hbar(\omega^B + \omega_{rf}^B) \hat{\mathbf{I}}_z^B + 2\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B. \quad (2.63)$$

É possível escolher os valores de $\omega_{rf}^A = -\omega^A$ ou $\omega_{rf}^B = -\omega^B$, para os quais, a frequência angular do campo oscilante seja equivalente a frequência angular de Larmor do núcleo A ou B , de tal maneira que exista uma condição de ressonância. Em espectrômetros com dois canais é permitido manipular spins de duas espécies nucleares em um mesmo experimento. Desta forma, é possível negligenciar a interação Zeeman para as duas espécies nucleares. Portanto, apenas a interação com o campo oscilante e a interação via acoplamento escalar contribuem para a dinâmica. Nesta condição, o Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{ef}$ é representado por

$$\hat{\mathcal{H}}_{ef} = -\hbar\omega_1^A \hat{\mathbf{I}}_x^A - \hbar\omega_1^B \hat{\mathbf{I}}_x^B + 2\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B. \quad (2.64)$$

Da mesma maneira como procedeu-se na Seção 2.3, os efeitos dos pulsos de radiofrequência são simplesmente descritos como rotações em torno do eixo transversal definido pela fase do pulso. Além disso, como as frequências de ressonância no caso heteronuclear são diferentes, cada pulso aplicado na frequência de uma espécie nuclear não afeta a outra espécie (48). É importante deixar claro que o campo de radiofrequência aplicado não varia para uma espécie ou outra, o que varia é o tempo de aplicação (t_p) deste campo em cada espécie nuclear, para gerar uma rotação desejada. Este tempo é da ordem de microsegundos. Portanto, na condição de ressonância, a matriz densidade de desvio da Equação (2.62) evolui da seguinte maneira

$$\hat{\rho}(t_p)_{desv} = e^{-i(-\omega_1^A \hat{\mathbf{I}}_x^A - \omega_1^B \hat{\mathbf{I}}_x^B + 2\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B)t_p} \hat{\rho}_{desv} e^{i(-\omega_1^A \hat{\mathbf{I}}_x^A - \omega_1^B \hat{\mathbf{I}}_x^B + 2\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B)t_p}. \quad (2.65)$$

A evolução da matriz densidade de desvio na ausência de pulsos de radiofrequência é denominada evolução temporal livre ou *delay*. Na condição de ressonância¹¹, a matriz densidade

¹⁰ Também denominado duplo referencial girante.

¹¹ Se o sistema está fora da ressonância, então os efeitos devido ao deslocamento químico são levados em consideração. Ver Equação (2.63).

de desvio evolui de acordo com

$$\hat{\rho}(\tau)_{desv} = e^{-2i\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B \tau} \hat{\rho}_{desv} e^{2i\pi J \hat{\mathbf{I}}_z^A \hat{\mathbf{I}}_z^B \tau}, \quad (2.66)$$

onde τ é o tempo em que a evolução ocorre. Geralmente, na literatura τ é da ordem de $\frac{1}{cJ}$, onde c é uma constante e J é a constante de acoplamento escalar entre as espécies nucleares.

Nas seções anteriores se discutiu os principais conceitos necessários para o entendimento do fenômeno da RMN, contudo nas seções a seguir, se apresentará a RMN como um meio de aplicação para a Computação Quântica.

2.6 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA VIA RMN

Em 1982, Feynman (70) observou que os sistemas quânticos possuem uma capacidade de processamento de informação muito maior que a dos sistemas clássicos. Portanto, estes sistemas poderiam ser usados para implementar um novo tipo de computador poderoso, um computador quântico. Três anos depois, Deutsch (71) descreveu uma máquina de Turing quântica, mostrando que os computadores quânticos poderiam realmente ser construídos. Embora a teoria seja bem compreendida, a construção de um computador quântico tornou-se extremamente difícil (28). Até agora, apenas alguns métodos foram usados para demonstrar portas lógicas quânticas, sendo estes: Íons Armadilhados (72), Cavidades Eletrodinâmicas Quânticas (73), fótons (74), supercondutores (75) e Ressonância Magnética Nuclear (76, 77). Destes métodos, a RMN tem sido bem sucedida com as realizações de Teletransporte Quântico (78), Correção de Erro Quântico (79), Simulação Quântica (80) e outros (28, 81). Ultimamente, a Teoria dos Jogos (82) pode ser adicionada à lista, pois os jogos quânticos (assunto do próximo capítulo) podem ser realizados experimentalmente em um computador quântico de RMN (28).

Devido a este fato, em 2002, Du *et al.* (28) generalizaram o jogo do Dilema do Prisioneiro na versão quântica, em um computador quântico de RMN. Os núcleos de ^1H de uma amostra de citosina, parcialmente deuterada, atuaram como dois qbits. Além disso, esta foi a primeira implementação física de um jogo quântico. Em 2007, Mitra *et al.* (83) implementaram o jogo quântico denominado de Dilema de Johnson (84), onde a amostra escolhida para a implementação do jogo foi a $^{13}\text{CHFBr}_2$, de modo que a espécie nuclear de ^{13}C , ^1H , ^{19}F atuaram como os três qbits. Para entender como os núcleos de uma amostra podem ser representados por de meio qbits, é necessário definir o conceito de qbit, portanto na seguinte seção este conceito será apresentado.

2.6.1 O BIT QUÂNTICO-QBIT

O conceito de base computacional surgiu junto ao que se conhece hoje por Teoria da Computação e Informação. Desde os primeiros circuitos elétricos que representavam as portas lógicas, foi possível codificar a informação por meio de um sistema binário representado por 0s e 1s. Desta codificação é possível definir o conceito de bit clássico, o qual é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida (60). Além disso, um bit clássico pode assumir somente um dos valores: 0 ou 1. Desde então, a informação tem sido armazenada por

meio de bits clássicos. Por exemplo, a informação de um fluxo de uma corrente elétrica através de uma bobina pode ser codificada por meio do bit 0 e a ausência de fluxo por meio do bit 1. Estendendo este conceito para a Mecânica Quântica, o bit clássico tem um análogo quântico, chamado de bit quântico ou qbit¹².

Da mesma maneira que o bit, um qbit pode assumir os valores de 0 ou 1, a diferença é que também é possível escrevê-lo como uma superposição destes valores (48). Por meio de um qbit pode-se representar as características físicas tal como a polarização de um único fóton (vertical, horizontal) ou o alinhamento de um spin em relação a um campo magnético estático (spin para cima, spin para baixo)¹³. Formalmente, um qbit é representado como uma superposição linear dos estados da base utilizada. Matematicamente, esta base é representada pela base computacional (63), definida pelo conjunto de elementos $\{|0\rangle, |1\rangle\} \equiv \{(1, 0)^\top, (0, 1)^\top\}$. Sendo assim, o referente estado do qbit pode ser escrito como

$$|\varkappa\rangle = \zeta |0\rangle + \eta |1\rangle = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

onde ζ e η são números complexos que representam as amplitudes de probabilidade (86). Em outras palavras, quando uma medida é realizada, a probabilidade do estado $|\varkappa\rangle$ colapsar no elemento $|0\rangle$ da base é $|\zeta|^2$, e a probabilidade do estado $|\varkappa\rangle$ colapsar no elemento $|1\rangle$ da base é $|\eta|^2$. Mais precisamente, as amplitudes de probabilidade estão relacionadas através da seguinte equação

$$|\zeta|^2 + |\eta|^2 = 1. \quad (2.68)$$

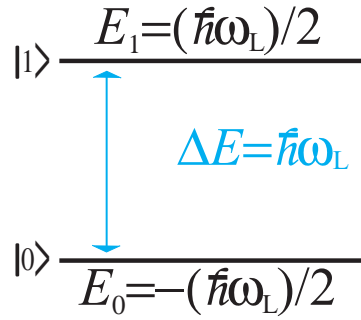
A partir deste conceito, é possível, por exemplo, representar os autoestados do Hamiltoniano de Zeeman, $\hat{\mathcal{H}}_Z$, para um sistema de spin $I = 1/2$ como qbits. A razão está nos níveis de energia, que dependem apenas do número quântico m , de modo que a representação dos estados nucleares $|I, m\rangle$ pode ser simplificada por $|m\rangle$. Referindo-se à Equação (2.8) e como ilustrado na Figura 6, os autoestados $|1/2\rangle$ e $|-1/2\rangle$ são representados como $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. O autoestado $|0\rangle$ representa o estado de menor energia e possui o autovalor E_0 . De maneira análoga, o autoestado $|1\rangle$ representa o estado de maior energia e possui o autovalor E_1 .

Dentro deste contexto apresentado, um dos requisitos necessários para que um sistema experimental obtenha sucesso na implementação de um processador quântico, é que o sistema tenha a capacidade de iniciar os qbits em um estado bem determinado, ou seja, um estado puro. Contudo, o sistema característico da RMN são *ensembles* que contém uma infinidade de spins em misturas estatísticas. Deste fato, é necessário preparar o estado “misto” do sistema de RMN em um estado pseudo puro por meio de pulsos de radiofrequência. Esta preparação será discutida na seguinte seção.

¹² A tradução do *qubit* (*quantum bit*) foi feita pelo Prof. Dr. Luiz Davidovich, membro da Associação Brasileira de Ciências (85).

¹³ Na literatura, geralmente, é traduzido spin para cima da frase em inglês *spin up*, similarmente, spin para baixo é traduzido de *spin down* (48,55).

Figura 6 – Desdobramento dos níveis de energia devido à interação Zeeman para um sistema de spin $I = 1/2$. Os autoestados $|1/2\rangle$ e $|-1/2\rangle$ são representados como $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. O autoestado $|0\rangle$ representa o estado de menor energia e possui o autovalor E_0 . De maneira análoga, o autoestado $|1\rangle$ representa o estado de maior energia e possui o autovalor E_1 .



Fonte: A autora.

2.6.2 PREPARAÇÃO DE ESTADOS PSEUDO PUROS

A matriz densidade de desvio da Equação (2.62) pode ser escrita como

$$\hat{\rho}_{desv} = \frac{\hbar\gamma^A B_0 \hat{\mathbf{I}}_z^A}{4k_B T} + \frac{\hbar\gamma^B B_0 \hat{\mathbf{I}}_z^B}{4k_B T} = \frac{\hbar\gamma^A B_0 \hat{\sigma}_z^A}{8k_B T} + \frac{\hbar\gamma^B B_0 \hat{\sigma}_z^B}{8k_B T}. \quad (2.69)$$

Escrevendo a polarização (69) como $\epsilon = \frac{\hbar\gamma^A B_0}{2k_B T}$, obtém-se

$$\hat{\rho}_{desv} = \frac{\epsilon}{4} \left[\hat{\sigma}_z^A + \frac{\gamma^B}{\gamma^A} \hat{\sigma}_z^B \right]. \quad (2.70)$$

Para o caso de duas espécies nucleares acopladas, tal como o ^{13}C e ^1H de uma amostra de clorofórmio, a matriz densidade de desvio pode ser escrita da seguinte maneira

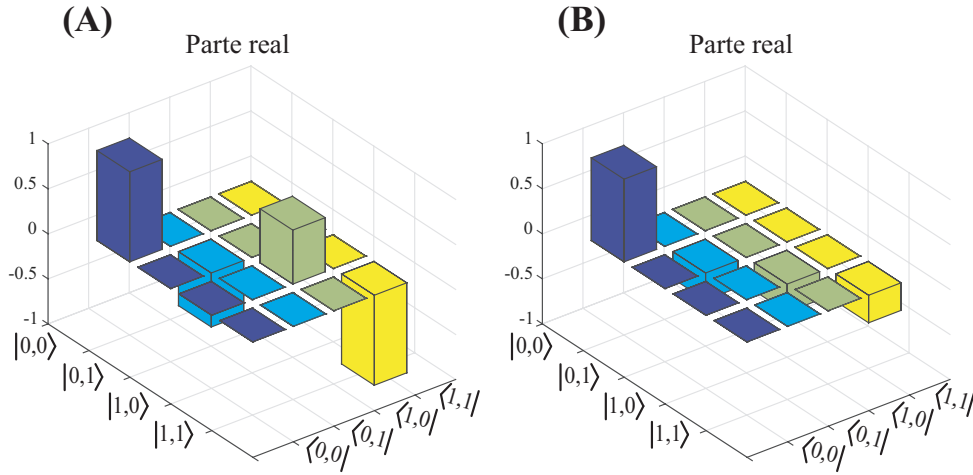
$$\hat{\rho}_{desv} = \frac{\epsilon}{4} \left[\hat{\sigma}_z^H + \frac{\gamma^C}{\gamma^H} \hat{\sigma}_z^C \right], \quad (2.71)$$

onde γ^C e γ^H é o fator giromagnético do Carbono ^{13}C e do Hidrogênio ^1H , respectivamente. A razão $\frac{\gamma^C}{\gamma^H} = 3,9757 \approx 4$ (69). A matriz densidade $\hat{\rho}_{desv}$ da Equação (2.71), ilustrada na Figura 7 (A), não representa uma matriz densidade de um estado puro e além disso possui o traço nulo¹⁴. Devido a estas características, os estados de equilíbrio térmico em RMN não são estados puros. Felizmente, em 1997, uma solução para este problema foi encontrada por Cory *et al.* (76) e Chuang *et al.* (77) com a implementação de sequências de pulsos que produzem um estado pseudo puro, o qual possui as características de um estado puro possibilitando a implementação de Algoritmos Quânticos via RMN.

Com propósito de deixar em evidência o procedimento de transformação, aplicou-se a sequência de pulsos para a implementação de um estado pseudo puro de dois spins 1/2 acoplados das Referências (69, 87). A sequência de pulsos completa está mostrada na Figura 8 e as duas

¹⁴ A soma dos elementos da diagonal principal de $\hat{\rho}_{desv}$ é nula.

Figura 7 – (A) Representação matricial do operador densidade de desvio $\hat{\rho}_{desv}$ da Equação (2.71). (B) Representação matricial do operador densidade após a sequência de pulsos apresentada na Figura 8.



Fonte: A autora.

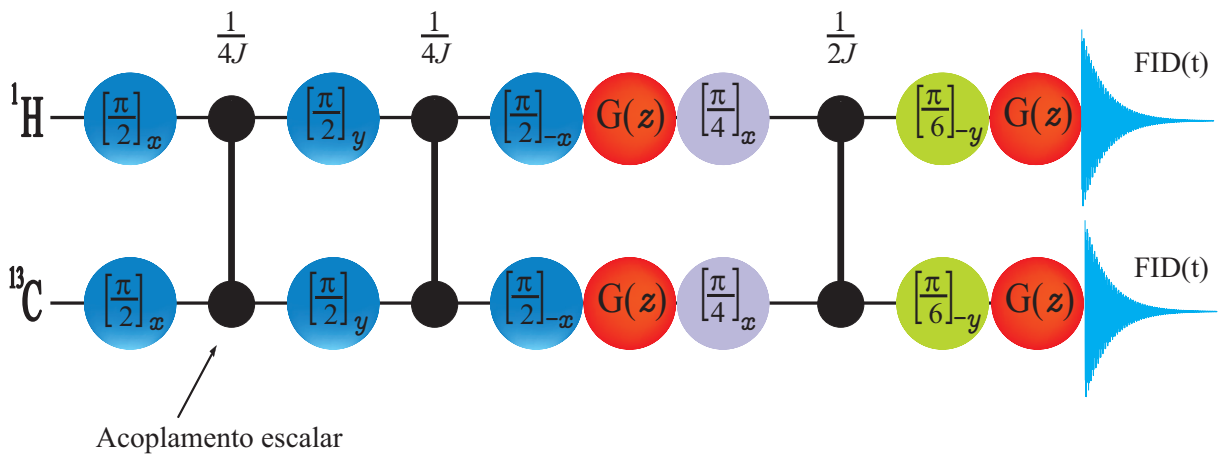
espécies nucleares escolhidas foram ^1H e ^{13}C de uma amostra de clorofórmio. A implementação de um estado pseudo puro se inicia com um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{x}^{1\text{H},^{13}\text{C}}$. Em seguida, uma evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{4J}$ é aplicada. Após a evolução, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{y}^{1\text{H},^{13}\text{C}}$ é executado. Novamente, o sistema é deixado sob uma evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{4J}$. Após esta evolução, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H},^{13}\text{C}}$ é aplicado. Para eliminar as componentes transversais da matriz densidade que representa o experimento, o sistema é submetido a um gradiente¹⁵ ao longo da direção z , $G(z)$. Esta sequência tem por objetivo igualar as populações dos spins no equilíbrio térmico. Dando continuidade, um pulso de $\left[\frac{\pi}{4}\right]_{x}^{1\text{H},^{13}\text{C}}$ é aplicado. Uma nova evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{2J}$ é executada. Em seguida, um pulso de $\left[\frac{\pi}{6}\right]_{-y}^{1\text{H},^{13}\text{C}}$. Mais uma vez, as coerências são excluídas por meio de um gradiente $G(z)$. Após estas sequências obtém-se um estado pseudo puro. Na Figura 7 (B) apresenta-se a matriz densidade de um estado pseudo puro após a sequência de pulsos apresentada na Figura 8.

Desta forma, é possível realizar qualquer experimento de Computação Quântica através do estado pseudo puro, pois este estado que é computado nos experimentos de RMN. Além disso, nos experimentos, existem longos tempos de coerência permitindo que um grande número de operações quânticas possam ser realizadas durante esses tempos (59). O conjunto de portas lógicas são produzidas pelos Hamiltonianos do sistema de RMN. O controle destas portas ocorre por meio de pulsos de radiofrequência e gradientes de campos magnéticos sob a amostra.

Dentro desta discussão, em um experimento de RMN é necessário após a implementação de qualquer sequência de pulso, determinar o estado do sistema. Do formalismo da matriz densidade discutido na Seção 2.3 isto é equivalente a construir a matriz densidade que concretizará a implementação realizada. Contudo, para construir uma matriz densidade é necessário determinar

¹⁵ A intensidade do campo magnético estático $\mathbf{B}_0$ na direção z pode ser variada no decorrer de um experimento. Esta variação é denominada gradiente de campo magnético e adotou-se a notação $G(z)$. Este gradiente tem por finalidade destruir as coerências do plano transversal que são indesejadas (59, 88).

Figura 8 – Sequência de pulsos para a implementação de um estado pseudo puro. A implementação de um estado pseudo puro se inicia com um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_x^{1H,13C}$. Em seguida, uma evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{4J}$ é aplicada. Após a evolução, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_y^{1H,13C}$ é executado. Novamente, o sistema é deixado sob uma evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{4J}$. Após esta evolução, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1H,13C}$ é aplicado. Para eliminar as componentes transversais da matriz densidade que representa o experimento, o sistema é submetido a um gradiente ao longo da direção z , $G(z)$. Dando continuidade, um pulso de $\left[\frac{\pi}{4}\right]_x^{1H,13C}$ é aplicado. Uma nova evolução livre durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{2J}$ é executada. Em seguida, um pulso de $\left[\frac{\pi}{6}\right]_{-y}^{1H,13C}$. Mais uma vez, as coerências são excluídas por meio de um gradiente $G(z)$. Após a aplicação da sequência de pulsos a evolução da magnetização no canal do Hidrogênio e do Carbono é detectada por meio do FID (t).



Fonte: A autora.

todos os seus elementos, e isto é conseguido através da tomografia de estado quântico, assunto que será discutido na seguinte seção.

2.7 TOMOGRAFIA DE ESTADO QUÂNTICO

Ao detectarmos um sinal de RMN, o FID (t), de um único experimento, apenas uma informação parcial sobre o estado do sistema é obtida. Porém, o procedimento de tomografia de estado quântico possibilita determinar todos os elementos da matriz densidade (63). Este conceito foi utilizado pela primeira vez teoricamente por Vogel e Risken (89), e apresentado em seus estudos relacionados a determinação de quasiprobabilidades. O primeiro procedimento experimental do processo de tomografia de estado quântico foi proposto por Chuang *et al.* (90) e aplicado à RMN. Estes autores propuseram o procedimento de tomografia de estado quântico para sistemas heteronucleares que possuem spin 1/2 acoplados. Posteriormente, esta técnica foi aprimorada por Long *et al.* (91). Em 2002, Lee (92) ordenou as ideias de Chuang referente ao processo de tomografia de estado quântico e esclareceu a implementação realizada por Long. Além disso, Lee generalizou o processo de tomografia para um sistema de n spins.

Para um sistema de dois spins 1/2 acoplados, apenas a matriz densidade de desvio da

Equação (2.71) pode ser detectada e possui a seguinte estrutura geral (91)

$$\hat{\rho}_{desv} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_{11} & x_3 + ix_{12} & x_4 + ix_{13} \\ \textcolor{red}{x_2} - \textcolor{red}{ix_{11}} & x_5 & x_6 + ix_{14} & x_7 + ix_{15} \\ \textcolor{blue}{x_3} - \textcolor{blue}{ix_{12}} & x_6 - ix_{14} & x_8 & x_9 + ix_{16} \\ x_4 - ix_{13} & \textcolor{blue}{x_7} - \textcolor{blue}{ix_{15}} & \textcolor{red}{x_9} - \textcolor{red}{ix_{16}} & x_{10} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Em uma medida de RMN, cada pulso de leitura fornece apenas alguns elementos da matriz densidade fora da diagonal. Para uma amostra de clorofórmio, por exemplo, é possível detectar apenas os valores $x_3 - ix_{12}$ e $x_7 - ix_{15}$ para o ^1H e $\textcolor{red}{x_2} - \textcolor{red}{ix_{11}}$ e $\textcolor{red}{x_9} - \textcolor{red}{ix_{16}}$ para o ^{13}C .

O procedimento para obter os elementos restantes da matriz densidade foi proposto por Chuang *et al.* (91), com a implementação de nove experimentos. Os elementos restantes podem ser determinados se $\hat{\rho}_{desv}$ é rodada por meio da aplicação de pulsos de radiofrequência. Para um sistema de dois qbits, é necessário a aplicação de nove pulsos de radiofrequência, os quais estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de sequências de pulsos para tomografar um sistema de dois spins 1/2 acoplados. A notação $[0]_{-x}^{^1\text{H}, ^{13}\text{C}}$ representa que nenhum pulso é aplicado.

Espécie nuclear	^1H	^{13}C
1º experimento	$[0]_{-x}$	$[0]_{-x}$
2º experimento	$[0]_{-x}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$
3º experimento	$[0]_{-x}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$
4º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$	$[0]_{-x}$
5º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$
6º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$
7º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$	$[0]_{-x}$
8º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-x}$
9º experimento	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$	$[\frac{\pi}{2}]_{-y}$

Após os 9 experimentos, consegue-se 18 conjuntos de dados, pois há dois núcleos, o ^{13}C e o ^1H . Desta forma, para cada experimento realizado, 2 espectros são obtidos, e cada espectro possui duas linhas devido ao acoplamento escalar entre o ^{13}C e o ^1H , ou seja, têm-se 36 amplitudes de magnetização após os 9 experimentos. Cada espectro possui uma parte real¹⁶ e uma parte imaginária¹⁷, que por convenção atribui-se a parte real à magnetização $M_x(t)$ e a parte imaginária à magnetização $M_y(t)$. Portanto, após a execução dos 9 experimentos da Tabela 1, consegue-se 72 valores. Estes 72 valores mais a condição de que o traço da matriz densidade de desvio deve ser igual a 0, correspondem com 73 equações, as quais possibilitam reconstruir a

¹⁶ Também denominado de espectro absorptivo.

¹⁷ Também denominado de espectro dispersivo.

matriz densidade de desvio da Equação (2.72), resolvendo um sistema de equações lineares do tipo

$$Kx = L, \quad (2.73)$$

onde K é uma matriz com dimensão 73×16 ; x é um vetor com dimensão 16×1 que possui os valores de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{16}$ da matriz densidade de desvio $\hat{\rho}_{desv}$, os quais deseja-se encontrar; L é uma matriz com dimensão 73×1 , que contém as amplitudes das magnetizações. O procedimento de resolução é através do método dos mínimos quadrados, de tal forma que todos os elementos são determinados (91).

Os principais conceitos de RMN apresentados neste capítulo serão uma ferramenta importante para discutir uma proposta de implementação do jogo da Batalha dos Sexos. Desta forma, no seguinte capítulo, a Teoria dos Jogos Clássicos e Quânticos será abordada.

3 TEORIA DOS JOGOS

A Teoria dos Jogos teve um papel importante durante a Segunda Guerra Mundial e a partir disso muitos pesquisadores contribuíram para a construção de um formalismo matemático que permitiu sua axiomatização. Por exemplo, o jogo de xadrez, cartas, dados, divertem a humanidade desde a formação das primeiras civilizações, e desta situação, a vitória ou derrota depende das escolhas feitas no início da jogada. Devido a este fato, despertou-se um interesse no estudo da teoria da probabilidade, iniciado pelos físicos franceses Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) em 1654, com o intuito de analisar uma determinada jogada por meio de regras matemáticas (93).

Por conseguinte, o primeiro autor a estudar elementos importantes do método que seria formalizado e aplicado na solução de um jogo foi o matemático francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que apresentou um modelo de duopólio¹ que hoje tem o seu nome. Seu modelo consistiu no estudo de duas empresas que fabricam um determinado produto, e devem decidir que fração cada uma deve produzir, sabendo que a quantidade fabricada por sua concorrente afeta seus lucros. Cournot derivou uma solução em que as duas empresas decidiam produzir quantidades que eram compatíveis entre si (95).

Outro matemático importante foi o alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953), que demonstrou que o jogo de xadrez sempre tem uma solução. Em outras palavras, a partir de qualquer disposição das peças no tabuleiro, um dos jogadores sempre terá uma estratégia que o conduza à vitória, independente do que o adversário faça (95).

As contribuições acima e de muitos outros pensadores e pesquisadores levaram ao nascimento da Teoria dos Jogos como ciência em 1944, com o livro *Theory of Games and Economic Behaviour*, escrito por John Von Neumann e Oskar Morgenstern (1). As bases do que hoje se designa por Teoria dos Jogos foram estabelecidas neste livro (96). Além disso, naquele período, as primeiras ideias sobre a Teoria dos Jogos com o objetivo de encontrar a melhor forma de jogar foram elaboradas.

Nos anos 50 e 60, três nomes tiveram um maior destaque: o matemático John Forbes Nash Jr e os economistas John Harsanyi e Reinhard Selten. John Nash apresentou sua tese *Non-Cooperative Games* (97) em 1950 demonstrando que existe pelo menos um equilíbrio de Nash² para jogos de múltiplos jogadores. Para que este equilíbrio exista é necessário que os jogadores não se comuniquem entre si antes do jogo, ou seja, não haja um acordo entre eles (93). Independentemente, uma das principais contribuições de John Harsanyi foi a análise de jogos de informação incompleta. Reinhard Selten formulou o conceito de equilíbrio de Nash em jogos sequenciais (96). Em 1994, Nash, Harsanyi e Selten ganharam o Prêmio de Ciências Econômicas em Memória de Alfred Nobel, pela análise básica de equilíbrio em jogos não cooperativos (98).

¹ O duopólio é um tipo específico de oligopólio em que apenas dois produtores existem em um mercado. Esta definição é geralmente usada apenas quando duas empresas têm o controle dominante do mercado (94).

² Este conceito será apresentado mais adiante.

Devido a esses trabalhos, a Teoria dos Jogos tem sido aplicada na Biologia (3), Economia (4), Ecologia (5) e Física (6–8). Esta teoria é uma área da Matemática que estuda as interações entre os jogadores. O objetivo dos jogadores é maximizar seus *payoffs*³ escolhendo a melhor estratégia para si, porém, o resultado final do jogo depende das estratégias escolhidas por todos os jogadores (99–101).

Nesse contexto, a Teoria dos Jogos pode ser considerada como um método de otimização, o que possibilita aplicá-la a área da Computação Quântica, permitindo construir algoritmos mais eficazes, o que resultaria em uma maior eficiência computacional (102, 103). Logo, existe uma ligação entre a Teoria dos Jogos e Informação Quântica (7, 28, 104, 105), dando origem a uma nova área de pesquisa, denominada Teoria dos Jogos Quânticos. Além disso, no processo de um jogo, o jogador compartilha sua decisão para os outros ou para o Juiz do jogo. Este jogador de alguma forma transfere sua informação; então, é natural considerar a generalização de transferência de informação quando esta é quântica. Em adição, é importante notar que alguns problemas em Informação Quântica podem ser considerados como jogos quânticos (28), tais como a Clonagem Quântica (104), a Criptografia Quântica (7) e Algoritmos Quânticos (23). A partir dessas ideias, pode-se inferir que a Teoria dos Jogos Quânticos é útil para estudar a Comunicação Quântica, desde que seja considerada como um jogo, onde o objetivo será maximizar a comunicação efetiva (103).

Dentro deste contexto, a primeira análise de um jogo quântico foi feita por David Meyer (23) em 1999, em um jogo de soma zero. Meyer mostrou que se um jogador pode manipular suas estratégias a partir de um operador de estratégia quântica, então ele sempre vencerá seu adversário (106). No mesmo ano, Eisert *et al.* (27) quantizaram um dos jogos mais famosos, o Dilema do Prisioneiro. Os autores desenvolveram um protocolo para um jogo de dois jogadores e mostraram que o dilema do jogo pode ser resolvido se os jogadores manipulam uma estratégia emaranhada.

Em consequência da discussão dos dois trabalhos acima e de outros que também estendem os conceitos da Teoria dos Jogos para o domínio quântico (7, 23, 27, 28, 32, 33, 84, 105, 107–113), não resta dúvidas de que os jogos quânticos tem uma vantagem sob sua contrapartida clássica. Esta vantagem permite que os jogadores escapem de dilemas que alguns jogos possuem e também novos equilíbrios podem surgir, resultando assim em melhores *payoffs* para os jogadores.

Portanto, o objetivo deste capítulo será apresentar o formalismo da Teoria dos Jogos Clássicos e Quânticos. Dentro deste objetivo, a seguinte seção discutirá a definição de um jogo.

3.1 O QUE É UM JOGO?

Você já leu o jornal, assistiu televisão ou mesmo leu alguma notícia na sua rede social hoje? Em caso afirmativo, você provavelmente pode ter visto uma notícia sobre uma delação premiada, uma greve, conflitos armados entre pessoas ou países, alguma medida tomada pelo governo para ajustar a inflação, resultado dos jogos de uma rodada do campeonato brasileiro,

³ O ganho do jogador é dito *payoff*.

e assim por diante. Desta maneira, você pode se perguntar: o que todas essas notícias tem em comum? A resposta é que todas elas descrevem conflitos de interesses entre pessoas ou grupos de pessoas, como partidos políticos, governos, empresas e o povo em geral. São estes conflitos de interesses modelados teoricamente que são denominados jogos. Para alguns destes jogos, a Teoria dos Jogos é capaz de sugerir uma solução, que pode ser entendida como a melhor maneira de jogar o jogo para cada jogador envolvido. Para a maioria dos jogos que descrevem problemas reais, tudo o que se pode fazer é excluir alguns tipos de decisões e talvez sugerir quais jogadores cooperarão.

Portanto, esses modelos teóricos de conflito são chamados de jogos porque podem ser identificadas neles as características de jogos como o *poker*, jogo da velha, xadrez, e também em problemas econômicos e empresariais, as táticas e a logística da guerra, a política internacional e nacional, entre outros, como candidatos a serem modelados como jogos (99).

Além disso, no contexto da Teoria dos Jogos, algumas expressões são importantes, portanto, estas serão definidas a seguir.

3.2 DEFINIÇÕES

- **Jogador:** é aquele que participa do jogo, pode ser uma pessoa, animal, empresa.
- **Estratégia:** é uma ação que um jogador desempenha quando ele está sujeito a uma situação que envolve uma tomada de decisão. As estratégias podem ser classificadas como estratégias puras ou mistas (114).

Se um jogador tem total certeza das escolhas de seus adversários, então, ele adotará estratégias puras. Porém, em algumas situações não é possível saber com precisão o comportamento dos adversários no decorrer do jogo. Entretanto, se as probabilidades vinculadas à cada uma das estratégias puras são conhecidas, os jogadores adotarão estratégias mistas.

As estratégias mistas têm como base as leis da probabilidade. A estratégia pura pode ser considerada como um caso especial de estratégia mista (115) em que a probabilidade de uma ação é 1 e de outras é 0.

- **Payoff:** para medir o desempenho médio de um jogador durante o jogo, defini-se uma função *payoff*. Esta função permite avaliar todas as possibilidades de jogadas de um jogador (levando em conta as escolhas dos seus adversários), e relaciona o quanto esse jogador receberá se escolher cada uma dessas possibilidades (114, 116).

3.3 REPRESENTAÇÃO DOS JOGOS

Após a apresentação de algumas definições importantes, e estando claro que um jogo consiste de jogadores que possuem suas estratégias e uma função *payoff* que mede seus ga-

nhos, pode-se abordar formas de representar um jogo. Portanto, será explicado brevemente a representação na forma normal e na forma extensiva.

- **Jogos Estratégicos ou Forma Normal**

Em jogos estratégicos (ou jogo na forma normal), cada jogador sabe suas estratégias e as de seus oponentes. Porém, ele não tem a informação do que os demais jogadores fizeram antes do momento de suas tomadas de decisão, ou seja, todos escolhem suas ações simultaneamente e independentemente (115).

Além disso, os jogos estratégicos servem de modelo para eventos que ocorrem uma única vez. Entretanto, é possível aplicá-los a uma sequência de jogadas, em que cada vez que o jogo é realizado, o jogador se preocupa com sua recompensa no presente, para ele não importa a influência de suas escolhas na escolha de seus oponentes no futuro. Jogos estratégicos são descritos na forma normal e esta descrição será empregada no presente trabalho. Para um jogo de dois jogadores, na forma normal, é comum representar as estratégias e os ganhos por uma matriz, denominada matriz de *payoff* (117).

- **Jogos Extensivos**

Por outro lado, os jogos extensivos são importantes quando os jogadores não escolhem suas estratégias definitivamente, eles tem a possibilidade de repensar suas ações no transcorrer do jogo. Nesse caso, as ações tomadas por um jogador influenciam as ações futuras dos seus adversários. Estes jogos descrevem as possíveis ordens dos eventos e a informação que cada jogador possui no momento da escolha. Além disso, os jogadores podem ter a noção sobre todos os eventos anteriores ocorridos no jogo ou apenas um conhecimento parcial (116). O jogo de damas, xadrez e *poker* são alguns exemplos.

3.4 CLASSIFICAÇÃO DOS JOGOS

Os jogos podem ser classificados de muitas maneiras, deste modo será discutido algumas delas.

- **Jogos Simétricos e Jogos Assimétricos**

Um jogo simétrico é aquele no qual os *payoffs* dos jogadores em uma estratégia particular dependem somente da estratégia escolhida, e não de quem está jogando. Se as identidades dos jogadores puderem ser trocadas sem alterar os *payoffs* obtidos pela aplicação das suas estratégias, então este é um jogo simétrico (118). Porém, em jogos assimétricos uma determinada estratégia pode proporcionar um benefício para um jogador e não proporcionar para seu adversário (119). Exemplos de jogos simétricos são o jogo do Dilema do Prisioneiro (16), jogo da Galinha (19) e o jogo da Caça ao Cervo (120); por sua vez, o jogo do Ultimato (121), o jogo da Batalha dos Sexos (17) e o jogo de Combinar Moedas (14) configuram jogos assimétricos (122).

- **Jogos Cooperativos e Jogos Não Cooperativos**

Se o jogador age estrategicamente de uma maneira individual, então o jogo é um jogo não cooperativo. Porém, se os jogadores podem cooperar entre si, ou seja, podem agir de tal forma que escolhem suas estratégias para maximizar o ganho do grupo, o jogo é dito cooperativo. Interesses que envolvem conflitos levam a um jogo não cooperativo, enquanto que objetivos de interesse comum levam a jogos cooperativos. Entretanto, em jogos cooperativos também existe espaço para conflitos, e em jogos não cooperativos existe espaço para cooperação (115). Por exemplo, em uma situação em que algumas empresas formam alianças para ganhar o mercado, pode ser modelada por meio de jogos cooperativos, porém se estas disputam o mercado, elas devem ser modeladas através de jogos não cooperativos.

- **Jogos de Soma Zero e de Soma não Zero**

Considere um jogo de dois jogadores, denominados Alice e Bob. Se o ganho de Alice é exatamente a perda de seu adversário Bob e vice e versa, esse jogo é chamado de jogo de soma zero. Porém, se a soma das recompensas não é nula em pelo menos uma escolha, o jogo é dito ser de soma não zero. Exemplos de jogos de soma nula são o jogo de Combinar Moedas, o jogo de *poker* (123) e o jogo Go ou Baduk (124); por sua vez, o jogo do Dilema do Prisioneiro e o jogo da Batalha dos Sexos são jogos de soma não nula (125).

- **Jogos de Informação Completa e Jogos de Informação Incompleta**

Quando todos os participantes conhecem todas as informações relevantes à sua tomada de decisão, tem-se uma situação conhecida como jogo de informação completa, e caso contrário de informação incompleta. Um exemplo de jogo de informação incompleta é o leilão, pois cada jogador sabe o seu *payoff*, porém não sabe o de seus adversários (126, 127).

3.5 EXEMPLOS DE JOGOS

Com base na representação e classificação dos jogos discutidos acima, na seguinte seção serão apresentados alguns jogos clássicos estratégicos, não cooperativos e de informação completa.

- **Dilema do Prisioneiro**

O jogo do Dilema do Prisioneiro consiste em dois suspeitos de um crime, Alice e Bob, os quais estão presos e mantidos em celas separadas, sem qualquer meio de comunicação entre si. A fim de investigar o crime, um Juiz é enviado para interrogar os presos, separadamente. As estratégias de ambos são Cooperar com o parceiro (*C*) (não entregá-lo) ou Trair o parceiro (*D*) (acusá-lo). Se ambos cooperam, eles ficarão presos por 1 ano; se ambos delatam, a pena será de 5 anos; se Alice coopera e Bob delata, então Alice ficará presa por

10 anos e Bob sairá livre. Alice sairá livre e Bob ficará preso por 10 anos se Bob escolher cooperar e Alice delatar (125).

Devido à inexistência de comunicação entre Alice e Bob, eles escolhem o perfil de estratégias puras (D_A, D_B), que é o equilíbrio de Nash do jogo. Este resultado se deve ao fato de que os jogadores são considerados racionais⁴ e suas escolhas é devido ao seguinte raciocínio: “Se eu confessar e meu colega me trair, eu ficarei preso(a) por 10 anos. Se eu escolher trair e meu colega confessar, eu sairei livre. Caso ele também me traia, eu ficarei preso(a) por 5 anos, então é melhor eu optar por trair”. O dilema que existe nesse jogo ocorre porque os jogadores na versão clássica nunca escolhem o perfil de estratégias puras (C_A, C_B), o qual seria a melhor escolha para ambos, pois ficariam presos por 1 ano.

Portanto, o Dilema do Prisioneiro é de interesse para as Ciências Sociais, para a Economia (128) e para a Política Internacional (129, 130), bem como para a Biologia (131). Por exemplo, em um cartel, que é um acordo entre empresas, estas combinam os valores dos preços de seus produtos, quantidade de produção e os locais onde atuarão. Este acordo tem como objetivo um lucro maior, pois elas podem negociar os preços dos produtos sem que haja concorrência. Esta situação pode ser modelada através do jogo do Dilema do Prisioneiro para múltiplos jogadores, onde os jogadores são as empresas. A estratégia pura Cooperar pode ser entendida como manter os preços dos produtos de acordo com o que foi combinado entre as empresas. A estratégia pura Trair seria a escolha que algumas empresas tomam ao modificar seus preços para lucrar mais (128).

Um outro exemplo é a corrida armamentista ocorrida durante a Guerra Fria entre os EUA e a URSS, que também pode ser entendida por meio do jogo do Dilema do Prisioneiro. As duas estratégias puras disponíveis eram desarmar ou se armar, porém a escolha feita pelos EUA e URSS foi a de se armar. Uma consequência dessa escolha resultou num gasto financeiro elevado. A justificativa desta escolha pode ser dada por meio do seguinte raciocínio: “Se meu rival não gastar tanto, isso me dará uma superioridade militar. Entretanto, se não investirmos em armamentos, seremos militarmente inferiores se meu rival continuar comprando armamentos. Portanto, a melhor escolha é nos armarmos”. Esta corrida teve como resultado gastos exorbitantes por ambos os lados e o colapso da URSS em 1991 (132).

● Batalha dos Sexos

O jogo da Batalha dos Sexos representa uma situação cotidiana, onde Alice e Bob desejam fazer alguma atividade juntos sábado à noite. Porém, eles estão impossibilitados de combinar qual atividade farão. Em outras palavras, não há comunicação entre eles. Alice prefere ir à Ópera (O), enquanto Bob ficaria contente em assistir futebol na Televisão (T), e ambos ficarão insatisfeitos se não ficarem juntos, ou seja, se Alice(Bob) for sozinha(o)

⁴ O conceito de racionalidade significa que cada jogador escolhe a melhor opção em cada situação do jogo para obter o maior ganho possível, ou seja, ele é capaz de analisar o jogo e tomar a melhor decisão (115).

para Ópera e Bob(Alice) ficar assistindo Televisão (133). O dilema deste jogo acontece porque dentre os dois equilíbrios de Nash, (O_A, O_B) e (T_A, T_B) , Alice prefere o equilíbrio (O_A, O_B) enquanto Bob prefere (T_A, T_B) . Devido à estas preferências, o jogo não possui solução.

Um exemplo no cenário da vida real pode ser ilustrado quando duas empresas que fabricam celulares podem escolher entre construir seu produto para operar no padrão a ou padrão b . Entende-se por padrão alguma qualidade do produto “celular”, por exemplo “Tela com/sem *Touch-Screen*”. Frente a essas situações, o lucro de cada empresa é afetado pela escolha de ambas. Os equilíbrios de Nash do jogo são os perfis de estratégias puras (a, a) e (b, b) . Portanto, com o intuito de determinar uma possível solução para este jogo, percebe-se que é melhor para as duas empresas escolherem o perfil de estratégias puras (a, a) ou (b, b) . Isto se assemelha ao jogo da Batalha dos Sexos, pois os níveis de lucro das empresas são altos quando estas produzem marcas compatíveis (no mesmo padrão). Outras situações são a compatibilidade do setor observada no setor bancário e em muitas indústrias de eletroeletrônicos (134).

• Jogo de Combinar Moedas

O jogo de Combinar Moedas é caracterizado por dois jogadores, denominados Alice e Bob, que possuem uma moeda cada. Neste jogo, os dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se as duas moedas possuem as mesmas faces, ou seja, duas caras ou duas coroas, então Alice ganha a moeda de Bob. Caso as faces das moedas sejam diferentes, quem ganha a moeda é o Bob (116, 135).

Quando tenta-se encontrar uma possível solução, percebe-se que este jogo não possui um equilíbrio de Nash em estratégias puras, conforme será demonstrado mais à frente. Para resolver este impasse, aplica-se o conceito de equilíbrio de Nash em estratégia mista. Neste caso é encontrado que cada jogador deve escolher cara e coroa com a mesma distribuição de probabilidades. Dessa forma, nenhum dos jogadores terá incentivo para mudar sua estratégia (117).

Dentro deste contexto, uma cobrança de penáltis no futebol pode ser tomada como exemplo, a qual é estrategicamente semelhante ao jogo de Combinar Moedas. Nesta situação, o batedor tem as opções de chutar para a esquerda, chutar para a direita ou chutar no meio do gol. O goleiro possui a escolha de pular para a esquerda, pular para a direita ou ficar no meio do gol com o intuito de defender o pênalti. A probabilidade do batedor marcar um gol é maior quando as escolhas dele e do goleiro não combinam. Um exemplo é a situação em que o goleiro pula para a esquerda e o batedor chuta no lado direito do gol. A probabilidade do batedor marcar um gol diminui quando as escolhas combinam (136). De forma geral, os *payoffs* dos dois jogadores são assimétricos. Aliás, um estudo detalhado das ações dos batedores e dos goleiros usando dados de duas ligas de futebol europeias foi

realizado. Neste estudo descobriu-se que suas ações não se desviam significativamente da previsão de um equilíbrio de Nash (136, 137).

Surge a pergunta: como descrever formalmente estes eventos e sequências de ações que fazem parte da Teoria dos Jogos? A resposta mais simples é utilizando conceitos da teoria de probabilidades, teoria de conjuntos e espaços vetoriais como ponto de partida. Nesse sentido, apresenta-se o formalismo da Teoria dos Jogos na seguinte seção.

3.6 FORMALISMO DA TEORIA DOS JOGOS

Nesta seção aborda-se as definições matemáticas para o jogo estratégico finito, o qual possui um conjunto de jogadores e de estratégias finitas.

Portanto, um jogo estratégico é representado por

- Um conjunto finito de jogadores $\mathcal{N} = \{1, \dots, g\}$.
- Cada jogador $i \in \mathcal{N}$ possui um conjunto finito de estratégias puras, representado por $S_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,m_i}\}$, onde $m_i \geq 2$ é o número total de estratégias puras do jogador i .
- Um vetor $\mathbf{s} = (s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, \dots, s_{g,k_g})$, que é denominado perfil de estratégias puras, onde s_{i,k_i} é uma estratégia pura de cada jogador $i \in \mathcal{N}$.

O conjunto de todos os perfis de estratégias puras formam o espaço de estratégias puras do jogo (135), dado pelo produto cartesiano $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_g$.

- Um vetor *payoff* $\$ = (\$, \$_2, \dots, \$_g)$ que possui a função *payoff* de cada jogador $i \in \mathcal{N}$. A função *payoff* de cada jogador i retorna um número real de acordo com cada perfil de estratégias puras escolhido.

A partir destas definições, é possível resumí-las matematicamente como o seguinte par de expressões

$$\$_i : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{s} \longmapsto \$_i(\mathbf{s}). \quad (3.2)$$

Esta forma compacta de apresentar as estratégias e os *payoffs* pode ser estendida numa representação de tabela ou matricial. Em particular, para um jogo de dois jogadores com duas estratégias cada (que será estudado ao longo do texto), as estratégias do primeiro jogador formam as linhas e as estratégias do segundo jogador são as colunas de uma matriz. As entradas na matriz são dois números ou parâmetros⁵ representando o *payoff* do primeiro e do segundo jogador, respectivamente. A matriz de *payoff* que representa um jogo entre Alice e Bob está caracterizada pela Tabela 2. Se o perfil de estratégias puras $\mathbf{s} = (s_{1,1}, s_{2,1})$ é escolhido, então o *payoff* de Alice (Bob) é $a_{11}(b_{11})$.

⁵ Os *payoffs* dos jogadores são atribuídos de acordo com as regras do jogo e sua classificação.

Tabela 2 – Matriz de *payoff* que representa um jogo entre Alice e Bob.

		Bob	
		$s_{2,1}$	$s_{2,2}$
Alice	$s_{1,1}$	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
	$s_{1,2}$	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

Do formalismo exposto acima, considera-se como exemplo o jogo do Dilema do Prisioneiro. O conjunto de jogadores é $\mathcal{N} = \{1, 2\} = \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$. O conjunto de estratégias puras de Alice e de Bob são: $S_{\text{Alice}} = \{s_{1,1}, s_{1,2}\} = \{C_A, D_A\}$, $S_{\text{Bob}} = \{s_{2,1}, s_{2,2}\} = \{C_B, D_B\}$. O espaço de estratégias puras do jogo é escrito como: $S = \{(C_A, C_B), (C_A, D_B), (D_A, C_B), (D_A, D_B)\}$. O vetor *payoff* é representado da seguinte maneira: $\$ = (\$_{\text{Alice}}, \$_{\text{Bob}})$. O *payoff* de Alice é dado por: $\$_{\text{Alice}}(C_A, C_B) = 3$ (1 ano de prisão), $\$_{\text{Alice}}(C_A, D_B) = 0$ (10 anos de prisão), $\$_{\text{Alice}}(D_A, C_B) = 5$ (sair livre) e $\$_{\text{Alice}}(D_A, D_B) = 1$ (5 anos de prisão). Da mesma forma, o *payoff* de Bob é descrito como: $\$_{\text{Bob}}(C_A, C_B) = 3$, $\$_{\text{Bob}}(C_A, D_B) = 5$, $\$_{\text{Bob}}(D_A, C_B) = 0$ e $\$_{\text{Bob}}(D_A, D_B) = 1$.

Em consenso com o que foi discutido, pode-se compactar os jogadores, suas estratégias e os valores de seus *payoffs* por meio de uma matriz de *payoff*. Para o jogo do Dilema do Prisioneiro esta matriz é caracterizada pela Tabela 3.

Tabela 3 – Matriz de *payoff* que representa o jogo do Dilema do Prisioneiro entre Alice e Bob.

		Bob	
		D_B	C_B
Alice	D_A	$(1, 1)$	$(5, 0)$
	C_A	$(0, 5)$	$(3, 3)$

Para o jogo da Batalha dos Sexos, o mesmo procedimento foi realizado, porém as estratégias são Ópera (O) e Televisão (T). Portanto, a matriz de *payoff* que representa o jogo é descrita pela Tabela 4.

Tabela 4 – Matriz de *payoff* que representa o jogo da Batalha dos Sexos entre Alice e Bob.

		Bob	
		O_B	T_B
Alice	O_A	$(5, 3)$	$(1, 1)$
	T_A	$(1, 1)$	$(3, 5)$

De modo igual, no jogo de Combinar Moedas, a matriz de *payoff* é representada pela Tabela 5. A constante 1 representa que o jogador ganha a moeda do adversário. Da mesma

maneira, a constante -1 representa que o jogador perde sua moeda para o adversário.

Tabela 5 – Matriz de *payoff* que representa o jogo de Combinar Moedas entre Alice e Bob.

		Bob	
		cara	coroa
Alice	cara	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	coroa	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Após a apresentação do formalismo dos jogos clássicos na forma normal e a aplicação nos exemplos acima, é natural determinar uma possível solução de um jogo.

3.6.1 SOLUÇÃO DE UM JOGO

Dado o número de jogadores, o conjunto de estratégias de cada jogador e os respectivos *payoffs*, o principal objetivo será prever as estratégias adotadas pelos jogadores que estabelecerão a solução do jogo. Dentro deste contexto, há diferentes tipos de conceitos de solução e cada um deles possui suas regras para indentificá-la. Além disso, alguns conceitos de solução podem não existir em determinados jogos e outros podem levar a inúmeras soluções (115). Dentre estes, um maior enfoque será dado ao conceito de equilíbrio de Nash e ótimo de Pareto (82, 99).

3.6.1.1 EQUILÍBRIO DE NASH

Das possíveis soluções que um jogo pode ter, a mais conhecida é o equilíbrio de Nash, criado por John Forbes Nash Jr em 1950 (2), durante seu trabalho de Pós-Graduação em Matemática na Universidade de Princeton. O equilíbrio de Nash tem sido usado para analisar situações hostis como a guerra e as corridas armamentistas (138), na ocorrência de corridas bancárias e crises cambiais (139), organização de leilões (140, 141), nas penalidades do futebol (137), entre outros. Nesse sentido, afirma-se que o perfil de estratégias puras (117, 142)

$$\mathbf{s}^* = \left(s_{1,k_1}^*, \dots, s_{i-1,k_{i-1}}^*, s_{i,k_i}^*, s_{i+1,k_{i+1}}^*, \dots, s_{g,k_g}^* \right) \quad (3.3)$$

é um equilíbrio de Nash se nenhum jogador i tiver um incentivo para sair do equilíbrio mudando apenas sua própria estratégia pura s_{i,k_i} . O perfil de estratégias puras $\mathbf{s}^*$ configura um equilíbrio de Nash se a seguinte desigualdade for respeitada (115, 143)

$$\begin{aligned} & \$_i \left(s_{1,k_1}^*, \dots, s_{i-1,k_{i-1}}^*, s_{i,k_i}, s_{i+1,k_{i+1}}^*, \dots, s_{g,k_g}^* \right) \\ & \leq \$_i \left(s_{1,k_1}^*, \dots, s_{i-1,k_{i-1}}^*, s_{i,k_i}^*, s_{i+1,k_{i+1}}^*, \dots, s_{g,k_g}^* \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\forall i \in \mathcal{N}, \forall s_{i,k_i} \in S_i$. Desta maneira, cada jogador i fixa as estratégias puras dos seus adversários e varia sua própria estratégia pura s_{i,k_i} , de modo que ele analisa como seu *payoff* é modificado. Porém, um perfil de estratégias puras $\mathbf{s}^*$ é um equilíbrio de Nash se o *payoff* $\$_i$ de cada jogador i em função do perfil de estratégias puras $\mathbf{s}^*$ é maior ou igual em relação a outro possível perfil.

É importante ressaltar que a Equação (3.4) é válida somente quando estratégias puras são consideradas. Além disso, com o intuito de deixar claro o conceito definido acima, o jogo do Dilema do Prisioneiro e da Batalha dos Sexos serão tomados como exemplo.

Para o jogo do Dilema do Prisioneiro, com estratégias e *payoffs* definidos na Tabela 3, existe um equilíbrio de Nash em estratégias puras: o perfil de estratégias puras (D_A, D_B) . Este é um equilíbrio de Nash porque se Alice escolher a estratégia pura C_A e Bob a estratégia pura D_B , seu *payoff* será 0, ou seja, menor do que se ela escolher a estratégia pura D_A , pois seu *payoff* será 1. Resumindo o que foi dito e com o auxílio da Equação (3.4), pode-se escrever

$$\$_{Alice}(C_A, D_B) < \$_{Alice}(D_A, D_B). \quad (3.5)$$

Analisando o jogo do ponto de vista de Bob, também é melhor para ele escolher a estratégia pura D_B , pois caso Alice confesse, ele ganha 5. Se Alice trai, então ele ganha 1. Em termos da Equação (3.4) tem-se

$$\$_{Bob}(D_A, C_B) < \$_{Bob}(D_A, D_B). \quad (3.6)$$

Portanto, de acordo com o que foi discutido, o perfil de estratégias puras (D_A, D_B) é o equilíbrio de Nash do jogo do Dilema do Prisioneiro.

Dando continuidade a análise dos jogos, tem-se o jogo da Batalha dos Sexos compactado na Tabela 4. Neste jogo há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: o perfil de estratégias puras (O_A, O_B) e (T_A, T_B) . O perfil de estratégias puras (O_A, O_B) é um equilíbrio de Nash porque se Bob escolher a estratégia pura O_B , é melhor para a Alice escolher a estratégia pura O_A também, pois ela ganha 5 em vez de 1. Em outras palavras e com o auxílio da Equação (3.4), é possível escrever a seguinte desigualdade

$$\$_{Alice}(T_A, O_B) < \$_{Alice}(O_A, O_B). \quad (3.7)$$

O mesmo critério também vale para Bob. Para ele é melhor escolher a estratégia pura O_B em vez de T_B , caso Alice também escolha a estratégia pura O_A

$$\$_{Bob}(O_A, T_B) < \$_{Bob}(O_A, O_B). \quad (3.8)$$

A mesma argumentação usada para demonstrar que o perfil de estratégias puras (O_A, O_B) é um equilíbrio de Nash pode ser utilizada para demonstrar que o perfil de estratégias puras (T_A, T_B) também é.

De acordo com o que foi discutido, os dois jogos apresentados acima possuem equilíbrio de Nash em estratégias puras. Contudo, alguns jogos não possuem este equilíbrio de Nash, tal como o jogo de Combinar Moedas. Isto pode ser provado analisando a matriz de *payoff* caracterizada pela Tabela 5, e notando-se que: $\$_{Alice}(\text{coroa}, \text{cara}) < \$_{Alice}(\text{cara}, \text{cara})$. Porém, o perfil de estratégias puras $(\text{cara}, \text{cara})$ não é um equilíbrio de Nash porque não obedece a seguinte desigualdade para o *payoff* de Bob: $\$_{Bob}(\text{coroa}, \text{cara}) < \$_{Bob}(\text{cara}, \text{cara})$. A mesma análise das desigualdades para o *payoff* de Alice e de Bob é feita para o perfil de estratégias

puras: (coroa, coroa), (coroa, cara) e (cara, coroa). Desta análise, pode-se afirmar que este jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras. Quando isso acontece, deve-se procurar outras maneiras de encontrar uma solução. Dentre as alternativas, seria escolher uma distribuição de probabilidades sobre as estratégias puras (144). Desta escolha, a ação que o jogador deve desempenhar é misturar suas estratégias de modo imprevisível durante o decorrer do jogo. Por exemplo, um jogador de tênis pode escolher em devolver o saque com um *forehand* ou um *backhand*⁶ de uma maneira aleatória de tal forma que seu oponente não possa prever (119). Além disso, para esta classe de jogos, a Equação (3.4) precisa ser estendida com o intuito de incluir uma probabilidade associada a cada uma das estratégias puras de cada jogador. Portanto, na próxima seção será abordado o equilíbrio de Nash de estratégias mistas.

3.6.1.1.1 Equilíbrio de Nash de estratégias mistas

O conceito de equilíbrio de Nash de estratégias mistas foi primeiramente apresentado pelo matemático John Von Neumann e pelo economista Oskar Morgenstern em 1944. Porém, este conceito ficou restrito a jogos de soma nula com conjunto de estratégias finitas. Estes autores demonstraram que para qualquer jogo de soma nula de dois jogadores existe uma solução de estratégia mista (1). Em 1951, Nash (2) generalizou este conceito para qualquer jogo com um conjunto finito de estratégias e demonstrou que deve existir pelos menos um equilíbrio de Nash de estratégias mistas. Um exemplo do uso de estratégias mistas pode ser dado através de uma cobrança de penâltis no futebol. O batedor deve sempre variar a escolha do lado ao bater, pois se ele não fizer isso correrá o risco do goleiro defensor adivinhar o lado da batida. Um exemplo real ocorreu na final da Liga dos Campeões de 2012. Nesta final, o Chelsea venceu o Bayern de Munique com uma eficiente atuação do goleiro tcheco Petr Cech. Petr Cech durante as cobranças de pênaltis pulou todas as vezes na direção correta da batida, defendendo a cobrança do croata Ivica Olić. O jogo terminou em 4 – 3, pois o alemão Bastian Schweinsteiger e Ivica Olić do time do Bayern, e o espanhol Juan Mata do time do Chelsea não converteram suas penalidades. Após a decisão, Cech revelou que havia assistido a um DVD de duas horas que continha todas as penalidades cobradas pelo time do Bayern desde 2007 (146). Dentro do contexto deste exemplo, pode-se definir matematicamente uma estratégia mista.

Uma estratégia mista $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,m_i})$ para o jogador $i \in \mathcal{N}$, é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador i . Em outras palavras, $\mathbf{p}_i$ é um elemento do conjunto (135)

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid p_{i,1} \geq 0, \dots, p_{i,m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} p_{i,k} = 1 \right\}. \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) pode ser entendida pelo fato de que o jogador i escolhe a estratégia pura $s_{i,1}$ com uma probabilidade $p_{i,1}$, a estratégia pura $s_{i,2}$ com uma probabilidade $p_{i,2}$, e assim por

⁶ O *forehand* é o golpe batido do mesmo lado do corpo em que se segura a raquete. Se o jogador é destro, o golpe é chamado de direita. Se o jogador é canhoto, chama-se de esquerda. *Backhand* é o golpe batido do lado oposto do corpo ao que se segura a raquete. Se o jogador é destro, o golpe chama-se esquerda; se o jogador é canhoto, o golpe chama-se direita (145).

diante, até a sua estratégia pura s_{i,m_i} escolhida com probabilidade p_{i,m_i} . É importante ressaltar que uma estratégia pura s_{i,k_i} pode ser identificada com uma distribuição de probabilidades, onde $p_{i,k_i} = 1$ e as demais probabilidades são nulas.

Para o caso particular de um jogador i com duas estratégias puras, escreve-se a Equação (3.9) de uma maneira mais simplificada (135)

$$\Delta_2 = \{(p, 1-p) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq p \leq 1\}, \quad (3.10)$$

de tal forma que o jogador i escolhe a estratégia pura $s_{i,1}$ com uma probabilidade $p_{i,1} = p$ e a estratégia pura $s_{i,2}$ com uma probabilidade $p_{i,2} = 1-p$.

O espaço de todos os perfis de estratégias mistas é dado pelo seguinte produto cartesiano (147)

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_g}, \quad (3.11)$$

o qual é denominado espaço de estratégias mistas.

Além disso, um vetor $\mathbf{p} = ((\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2), \dots, (\mathbf{p}_g)) \in \Delta$ é denominado um perfil de estratégias mistas. Cada perfil de estratégias mistas $\mathbf{p}$ determina um *payoff* esperado, ou seja, uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de probabilidades (115, 148, 149): $(\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2), \dots, (\mathbf{p}_g)$. O *payoff* esperado é calculado por

$$\bar{\$}_i(\mathbf{p}) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \dots \sum_{k_g=1}^{m_g} p_{1,k_1} p_{2,k_2} \dots p_{g,k_g} \$i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, \dots, s_{g,k_g}). \quad (3.12)$$

É importante salientar que o termo $\$i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, \dots, s_{g,k_g})$ é o *payoff* de estratégias puras mencionado na Seção 3.6.1.1.

Para tornar claro o que foi apresentado acima, considera-se como exemplo o jogo do Dilema do Prisioneiro caracterizado na Tabela 3. Se Alice escolhe a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e Bob escolhe a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, então os *payoffs* esperados de Alice, $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\mathbf{p})$, e de Bob, $\bar{\$}_{\text{Bob}}(\mathbf{p})$, associados ao perfil de estratégias mistas $\mathbf{p} = ((\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2)) = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$, são escritos como

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}(\mathbf{p}) = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 p_{1,k_1} p_{2,k_2} \$_{\text{Alice}}(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}) = \frac{5}{3}, \quad (3.13)$$

$$\bar{\$}_{\text{Bob}}(\mathbf{p}) = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 p_{1,k_1} p_{2,k_2} \$_{\text{Bob}}(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}) = \frac{5}{2}. \quad (3.14)$$

Embora neste trabalho há uma restrição a dois jogadores com duas estratégias cada, a Equação (3.12) é válida para g jogadores com m_i estratégias cada. Um exemplo, para o qual calcula-se o *payoff* esperado para 3 jogadores se encontra no Apêndice A. Ainda dentro desta discussão, todos os critérios básicos para soluções de jogos em estratégias puras podem ser estendidas para estratégias mistas (135). Portanto, afirma-se que

$$\mathbf{p}^* = ((\mathbf{p}_1^*), \dots, (\mathbf{p}_{i-1}^*), (\mathbf{p}_i^*), (\mathbf{p}_{i+1}^*), \dots, (\mathbf{p}_g^*)) \in \Delta, \quad (3.15)$$

é um equilíbrio de Nash de estratégias mistas se a seguinte desigualdade for respeitada (115)

$$\bar{\$}_i((\mathbf{p}_1^*), \dots, (\mathbf{p}_{i-1}^*), (\mathbf{p}_i), (\mathbf{p}_{i+1}^*), \dots, (\mathbf{p}_g^*)) \leq \bar{\$}_i((\mathbf{p}_1^*), \dots, (\mathbf{p}_{i-1}^*), (\mathbf{p}_i^*), (\mathbf{p}_{i+1}^*), \dots, (\mathbf{p}_g^*)), \quad (3.16)$$

$\forall \mathbf{p}_i \in \Delta_{m_i}$. Desta forma nenhum jogador sente motivação de trocar a sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem (135).

Nash demonstrou que todo jogo definido por matrizes de *payoffs* possui um equilíbrio de Nash de estratégias mistas (2). A demonstração pode ser feita pelo teorema do ponto fixo de Brouwer (150). Este teorema foi proposto em 1910 e é um importante resultado que garante a existência do ponto fixo em funções contínuas sob certas condições. Para um grupo grande de cientistas que trabalham nas áreas de Análise, Álgebra, Lógica, onde é possível propor aplicações em Economia, Computação, Física e Engenharia (151), o teorema do ponto fixo é considerado uma contribuição relevante. Com base neste teorema⁷, serão apresentados dois teoremas da Referência (135), os quais ajudarão a determinar os equilíbrios de Nash via um problema de otimização.

Teorema 1. Para cada $i = 1, \dots, g$ e $k_i = 1, \dots, m_i$, define-se as funções

$$\begin{aligned} z_{i,k_i} &: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{p} &\longmapsto z_{i,k_i}(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} z_{i,k_i}(\mathbf{p}) &= \bar{\$}_i((\mathbf{p}_1), \dots, (\mathbf{p}_{i-1}), (s_{i,k_i}), (\mathbf{p}_{i+1}), \dots, (\mathbf{p}_g)) \\ &\quad - \bar{\$}_i((\mathbf{p}_1), \dots, (\mathbf{p}_{i-1}), (\mathbf{p}_i), (\mathbf{p}_{i+1}), \dots, (\mathbf{p}_g)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

isto é, z_{i,k_i} mede o ganho ou perda do jogador i quando ele troca a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}$ pela estratégia pura s_{i,k_i} . Tem-se que $\mathbf{p}^*$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$z_{i,k_i}(\mathbf{p}^*) \leq 0,$$

para cada $i = 1, \dots, g$ e $k_i = 1, \dots, m_i$.

Teorema 2. Para cada $i = 1, \dots, g$ e $k_i = 1, \dots, m_i$, define-se as funções

$$\begin{aligned} b_{i,k_i} &: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{p} &\longmapsto b_{i,k_i}(\mathbf{p}) = \max \{0, z_{i,k_i}(\mathbf{p})\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{p}$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$b_{i,k_i}(\mathbf{p}) = 0,$$

para cada $i = 1, \dots, g$ e $k_i = 1, \dots, m_i$.

⁷ Uma demonstração deste teorema está detalhada na Referência (150).

O Teorema 1 e Teorema 2 propõem uma maneira de se calcular os equilíbrios de Nash de um jogo. Eles são soluções do seguinte problema de otimização não-linear (147)

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^g \sum_{k_i=1}^{m_i} (b_{i,k_i}(\mathbf{p}))^2, \text{ sujeito a } \mathbf{p} \in \Delta. \quad (3.18)$$

Portanto, a soma de quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é igual a zero (135).

Como exemplo escolhe-se o jogo do Dilema do Prisioneiro. Para este jogo, considera-se que Alice escolhe a estratégia pura Cooperar (C) com probabilidade p e a estratégia pura Trair (D) com probabilidade $1 - p$. Bob adota a estratégia pura Cooperar (C) com probabilidade q e a estratégia pura Trair (D) com probabilidade $1 - q$. Portanto, Alice escolhe a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_1 = (p, 1 - p)$ e Bob a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_2 = (q, 1 - q)$. Da Equação (3.18), o perfil de estratégias mistas $\mathbf{p} = ((p, 1 - p), (q, 1 - q))$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema de otimização

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^2 \sum_{k_i=1}^2 (b_{i,k_i}(\mathbf{p}))^2, 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1. \quad (3.19)$$

Com o intuito de simplificar a notação, os somatórios acima serão denotados como uma variável $\mathcal{G}(p, q)$. Além disso, calcula-se o primeiro termo desse somatório a fim de tornar as ideias mais claras. Portanto,

$$\mathcal{G}(p, q) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k_i=1}^2 (b_{i,k_i}(\mathbf{p}))^2 = (b_{1,1}(\mathbf{p}))^2 + (b_{1,2}(\mathbf{p}))^2 + (b_{2,1}(\mathbf{p}))^2 + (b_{2,2}(\mathbf{p}))^2. \quad (3.20)$$

Das definições apresentadas no Teorema 1 e Teorema 2, é possível calcular o termo $b_{1,1}(\mathbf{p})$ da Equação (3.20), o qual é dado por

$$b_{1,1}(\mathbf{p}) = \max \{0, z_{1,1}(\mathbf{p})\}, \quad (3.21)$$

$$= \max \left\{ 0, \bar{\$}_{\text{Alice}}((C), (\mathbf{p}_2)) - \bar{\$}_{\text{Alice}}((\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2)) \right\}. \quad (3.22)$$

Com base no Teorema 1, o termo $\bar{\$}_{\text{Alice}}((C), (\mathbf{p}_2))$ da Equação (3.22) é escrito desta forma porque a Alice escolhe a estratégia pura Cooperar C em vez da distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_1$. Com base nos valores da matriz de *payoff* caracterizada na Tabela 3, será calculado separadamente os termos da Equação (3.22)

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}((C), (\mathbf{p}_2)) = \bar{\$}_{\text{Alice}}((C), (q, 1 - q)) = 3q, \quad (3.23)$$

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}((\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2)) = \bar{\$}_{\text{Alice}}((p, 1 - p), (q, 1 - q)) = -pq + 4q + 1 - p. \quad (3.24)$$

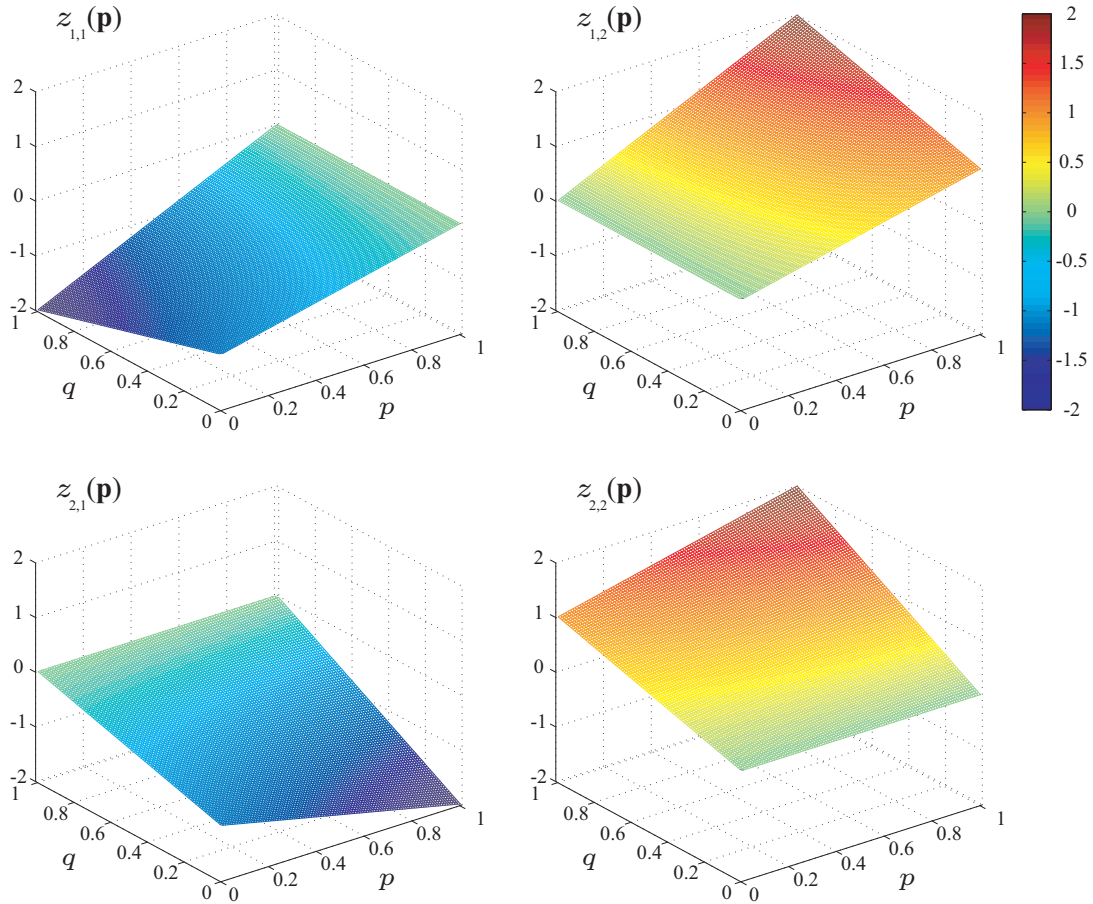
Desta forma, por meio das Equações (3.23)-(3.24), a Equação (3.22) é escrita como

$$b_{1,1}(\mathbf{p}) = \max \left\{ 0, \bar{\$}_{\text{Alice}}((C), (\mathbf{p}_2)) - \bar{\$}_{\text{Alice}}((\mathbf{p}_1), (\mathbf{p}_2)) \right\}, \quad (3.25)$$

$$= \max \{0, (q + 1)(-1 + p)\}. \quad (3.26)$$

Os outros termos $b_{1,2}(\mathbf{p})$, $b_{2,1}(\mathbf{p})$ e $b_{2,2}(\mathbf{p})$ foram calculados da mesma maneira.

Figura 9 – Esta figura ilustra os termos $z_{1,1}(\mathbf{p})$, $z_{1,2}(\mathbf{p})$, $z_{2,1}(\mathbf{p})$ e $z_{2,2}(\mathbf{p})$ para o jogo do Dilema do Prisioneiro. De acordo com a escala de cores, percebe-se que em algumas regiões estes termos são negativos.



Fonte: A autora.

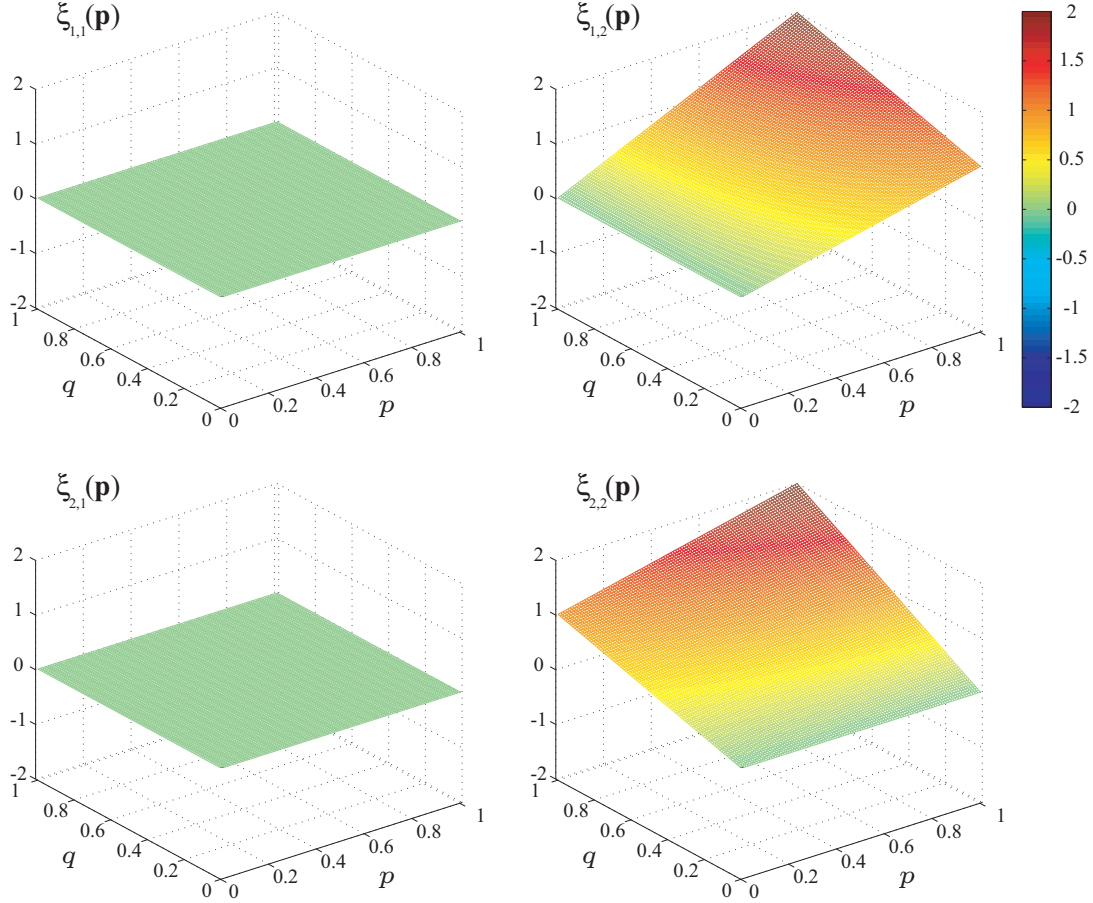
Antes de calcular $\mathcal{G}(p, q)$ é importante que os termos $z_{1,1}(\mathbf{p})$, $z_{1,2}(\mathbf{p})$, $z_{2,1}(\mathbf{p})$ e $z_{2,2}(\mathbf{p})$, sejam positivos nas interseções de p e q . Como ilustrado na Figura 9, em algumas regiões estes termos são negativos, como para o caso de $z_{1,1}(\mathbf{p})$ que correspondem aos argumentos não nulos das chaves da Equação (3.25)-(3.26). Para esta situação e como ilustrado na Figura 10, as regiões que possuem valores negativos são atribuídos o valor de 0. Nestas regiões os termos da Equação (3.20) são contabilizados como nulos e pode-se escrevê-la como

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \mathcal{G}(p, q) &= (\max\{0, (q+1)(-1+p)\})^2 + (\max\{0, p(1+q)\})^2 \\ &\quad + (\max\{0, (q-1)(p+1)\})^2 + (\max\{0, q(1+p)\})^2, \\ \text{onde, } 0 &\leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

O gráfico de $\mathcal{G}(p, q)$ da Equação (3.27) está ilustrado na Figura 11. Desta figura tem-se como resultado que o perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((0, 1), (0, 1))$ é o único equilíbrio de Nash para o Dilema do Prisioneiro. Além disso, ele representa a escolha do perfil de estratégias puras (D_A, D_B) , o qual discutiu-se ser um equilíbrio de Nash na Seção 3.6.1.1.

Da mesma maneira como procedeu-se para o Dilema do Prisioneiro, a Equação (3.19)

Figura 10 – Nesta figura, para evidenciar a atribuição de zero na região onde os termos $z_{1,1}(\mathbf{p})$, $z_{1,2}(\mathbf{p})$, $z_{2,1}(\mathbf{p})$ e $z_{2,2}(\mathbf{p})$ são negativos, reescreve-os como $\xi_{1,1}(\mathbf{p})$, $\xi_{1,2}(\mathbf{p})$, $\xi_{2,1}(\mathbf{p})$ e $\xi_{2,2}(\mathbf{p})$. Desta forma, as regiões que possuíam valores negativos, foram contabilizadas na Equação (3.20) como nulos.



Fonte: A autora.

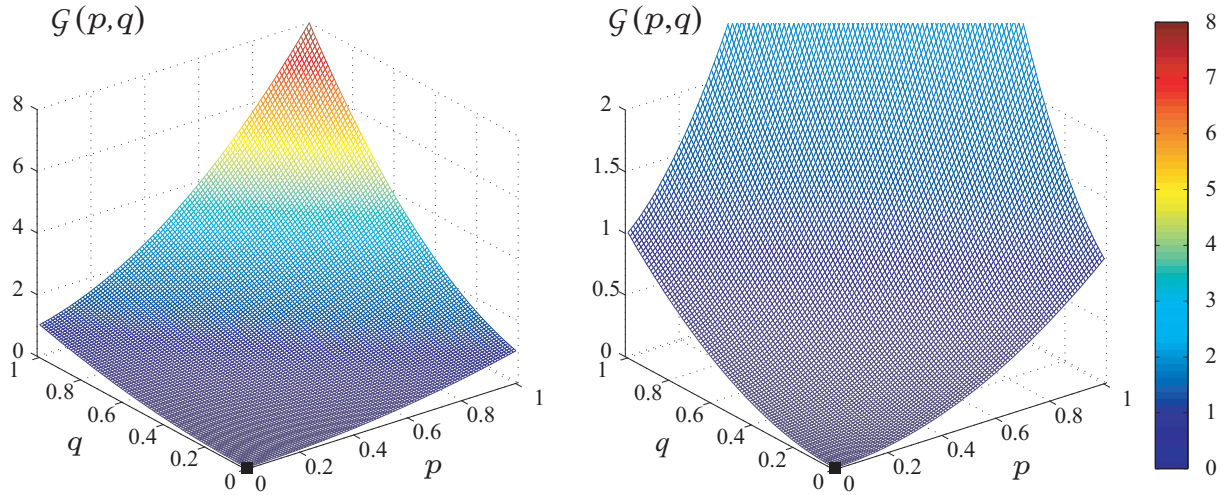
no caso do jogo da Batalha dos Sexos é escrita como

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \mathcal{G}(p, q) &= (\max\{0, 2(3q - 1)(1 - p)\})^2 + (\max\{0, 2p(-3q + 1)\})^2 \\ &\quad + (\max\{0, 2(3p - 2)(1 - q)\})^2 + (\max\{0, 2q(-3p + 2)\})^2, \\ \text{onde, } 0 &\leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O gráfico da Equação (3.28) é ilustrado na Figura 12. Desta figura encontra-se que os perfis de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((1, 0), (1, 0))$, $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((0, 1), (0, 1))$ e $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ são os equilíbrios de Nash do jogo. O perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((1, 0), (1, 0))$ e $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((0, 1), (0, 1))$ representam o perfil de estratégias puras (O_A, O_B) e (T_A, T_B) , respectivamente. Estes perfis são os equilíbrios de Nash do jogo discutidos na Seção 3.6.1.1. Além destes, o perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ é um equilíbrio de Nash que surge quando estratégias mistas são adotadas.

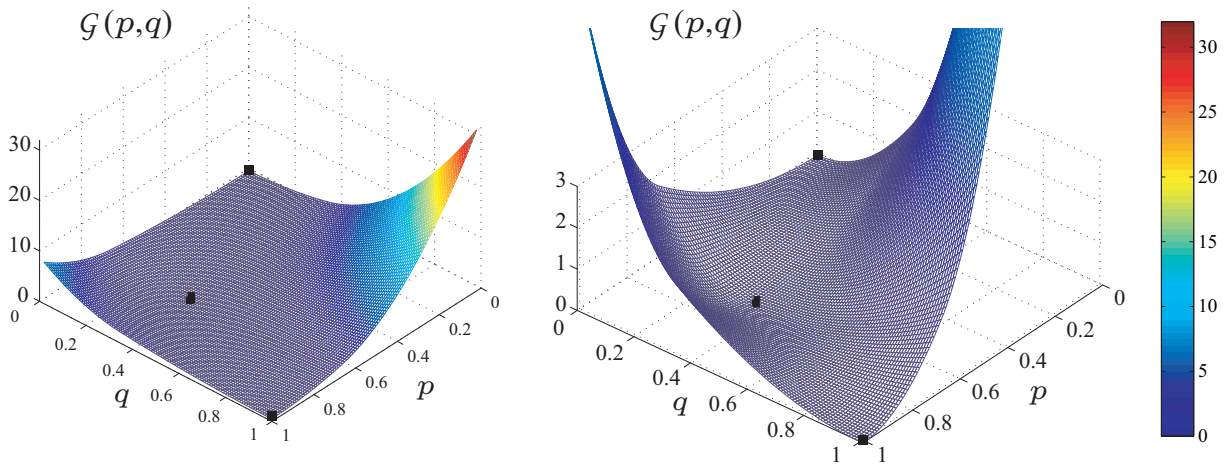
Por outro lado, o jogo de Combinar Moedas não possui equilíbrio de Nash de estratégias

Figura 11 – O perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((0, 1), (0, 1))$ é o único equilíbrio de Nash do jogo do Dilema do Prisioneiro. A figura à esquerda representa o gráfico de $\mathcal{G}(p, q)$ da Equação (3.27). A figura à direita é uma ampliação do gráfico à esquerda. Em ambos os gráficos o equilíbrio de Nash é representado por um quadrado preto.



Fonte: A autora.

Figura 12 – Os perfis de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((1, 0), (1, 0))$, $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((0, 1), (0, 1))$ e $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ são os únicos equilíbrios de Nash do jogo da Batalha dos Sexos. A figura à esquerda representa o gráfico de $\mathcal{G}(p, q)$ da Equação (3.28). A figura à direita é uma ampliação do gráfico à esquerda. Em ambos os gráficos os equilíbrios de Nash são representados por quadrados pretos.



Fonte: A autora.

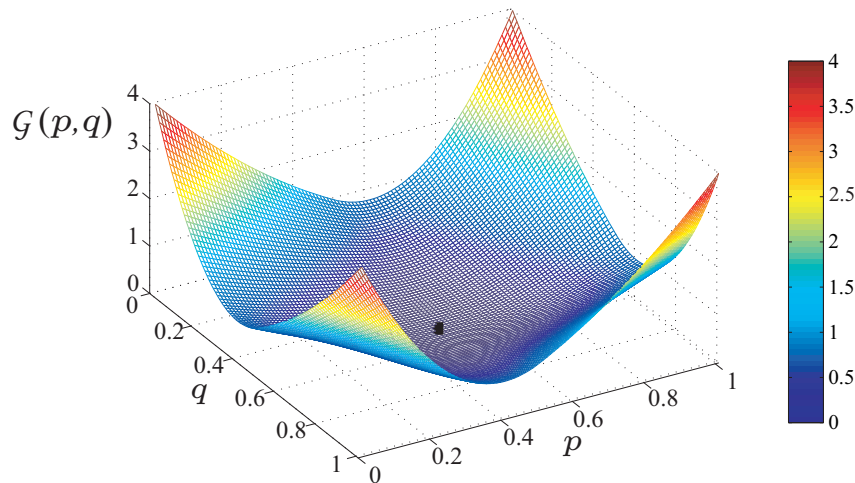
puras, porém se estratégias mistas são empregadas, então a seguinte equação deve ser minimizada

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \mathcal{G}(p, q) &= (\max \{0, -2(-1+p)(2q-1)\})^2 + (\max \{0, -2p(2q-1)\})^2 \\ &\quad + (\max \{0, 2(2p-1)(-1+q)\})^2 + (\max \{0, 2q(2p-1)\})^2, \\ \text{onde, } 0 &\leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

e pela Figura 13 observa-se que o perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ é o

único equilíbrio de Nash do jogo.

Figura 13 – O perfil de estratégias mistas $((\mathbf{p}^*), (\mathbf{q}^*)) = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ é o único equilíbrio de Nash do jogo de Combinar Moedas. Esta figura representa o gráfico de $\mathcal{G}(p, q)$ da Equação (3.29). O equilíbrio de Nash deste jogo está representado por um quadrado preto na figura.



Fonte: A autora.

3.6.2 ÓTIMO DE PARETO

Em um jogo, pode existir um perfil ou perfis de estratégias, que sejam os melhores possíveis para o conjunto dos jogadores, e que também pode ou não ser um equilíbrio de Nash. Para esta situação, definiu-se o conceito de eficiência de Pareto ou ótimo de Pareto. Este conceito se deve ao trabalho realizado por Vilfredo Pareto (1848–1923), engenheiro e economista italiano, que utilizou o método em seus estudos de eficiência econômica e distribuição de renda. O ótimo de Pareto também pode ser aplicado em áreas tais como Economia, Engenharia e Ciências Sociais (152). Dentro deste contexto, o ótimo de Pareto é um perfil ou perfis de estratégias, em que se algum jogador decidir alterar sua estratégia não será possível aumentar o *payoff* de qualquer jogador sem diminuir o *payoff* de algum outro (142). No jogo do Dilema do Prisioneiro, o perfil de estratégias puras (C_A, C_B) obedece esta condição, pois se a Alice escolher D_A , ela alterará o *payoff* de Bob de 3 para 0. Da mesma maneira, se Bob escolhe D_B , ele alterará o *payoff* de Alice de 3 para 0. Além disso, os equilíbrios de Nash (O_A, O_B) e (T_A, T_B) do jogo da Batalha dos Sexos satisfazem a condição de ótimo de Pareto, pois nenhuma outra combinação de estratégias aumenta o *payoff* de um jogador sem diminuir o do outro. Para o caso de um jogo de soma zero, tal como o jogo de Combinar Moedas, todos os perfis de estratégias puras são ótimos de Pareto. Neste caso nenhum jogador pode ganhar sem que o outro jogador perca (82).

Desta maneira, após a apresentação e discussão de definições e exemplos da Teoria dos Jogos, a Teoria dos Jogos Quânticos será abordada.

3.7 TEORIA DOS JOGOS QUÂNTICOS

Os jogos têm fascinado os matemáticos por muito tempo e tem sido usados para estudar uma variedade de assuntos, desde a evolução do comportamento animal até a probabilidade de conflito nuclear. Recentemente, este campo da Teoria dos Jogos está tomando uma direção completamente nova, liderada por físicos interessados na Mecânica Quântica. Esta ligação entre a Mecânica Quântica e Teoria dos Jogos deu origem a área da Teoria dos Jogos Quânticos. Nas versões quânticas de jogos existentes, os jogadores podem manipular suas estratégias (vetores de estado quânticos) por meio de operadores de estratégias quânticas. Alguns pesquisadores afirmam que esta possibilidade de manipulação faz desaparecer alguns dilemas que existem em jogos clássicos, tal como no jogo do Dilema do Prisioneiro. Outros pesquisadores estão usando os jogos para desenvolver novos algoritmos que poderão ser aplicados em computadores quânticos (13). A primeira e mais simples análise de um jogo quântico foi publicada em 1999 por David Meyer (23). Meyer apresentou um jogo chamado de jogo PQ, onde dois jogadores, Picard e Q, podem girar uma moeda ou não com igual probabilidade, permitindo que ambos os jogadores tenham igual chance de vencer. Se o jogador Q puder escolher um operador de estratégia quântica que superponha as estratégias cara e coroa, então ele sempre vencerá seu adversário Picard (106). Em síntese, Meyer demonstrou a vantagem desta superposição quântica no contexto da Teoria dos Jogos Quânticos. De acordo com a Mecânica Quântica, os objetos podem existir em estados conhecidos como “superposições”. Desta forma, Meyer analisou uma nova versão do jogo, onde o jogador Q pode incluir combinações quânticas de cara e coroa, e são essas combinações que permitem que o jogador Q sempre vença. O exemplo de Meyer pode parecer abstrato, mas jogos semelhantes podem ajudar os pesquisadores em sua busca de encontrar usos para futuros computadores quânticos. De acordo com a literatura, a primeira ideia de um computador quântico tomou forma quando Deutsch em 1985 (71) definiu uma versão quântica da Máquina de Turing, demonstrando que um computador quântico realizaria tarefas mais eficientemente do que um computador clássico. Nesse sentido, Deutsch também demonstrou a vantagem de uma superposição de estados quânticos. Uma tentativa de analogia com alguma operação clássica seria como saber se uma moeda possui de um lado uma cara e do outro coroa, com apenas uma medida. Desta forma, é possível observar ambos os lados da moeda de uma só vez (153).

Ainda dentro do âmbito desta discussão, em 1999, Eisert *et al.* (27) descreveram uma versão quântica do jogo do Dilema do Prisioneiro. No esquema de Eisert *et al.*, os jogadores podem escolher uma superposição entre os estados quânticos Cooperar e Trair, mas além disso os autores levaram em conta o emaranhamento. De acordo com a Mecânica Quântica, os estados quânticos das partículas emaranhadas exercem uma influência uns sobre os outros. Se, por exemplo no caso de dois fótons, a polarização de um dos fótons for medida, então a polarização do outro será influenciada instantaneamente. As estratégias dos jogadores podem ser representadas pelo estado quântico de uma partícula, tal como em fótons ou em elétrons. Se as partículas estiverem emaranhadas, as duas estratégias podem ser modificadas quando

medidas, mesmo que nenhum dos jogadores tenha conhecimento da decisão do outro. Desta maneira, os jogadores não precisam ter as mesmas escolhas ou também podem tentar influenciar a escolha do outro por meio do emaranhamento. Ao considerar um número limitado de operadores de estratégias quânticas possíveis, Eisert *et al.* mostraram que em vez de uma traição direta, uma forma de cooperação em que o emaranhamento permite que os jogadores influenciem a decisão do outro, pode resolver o dilema (13). Dentro desse contexto, Peter Shor (154), em 1994, apresentou um algoritmo para fatoração de números primos provando que esta fatoração em computadores quânticos é realizada com muito mais eficiência do que em um computador clássico (155). Uma aplicação deste algoritmo de fatoração é a criptografia de senhas de cartões de crédito. Contudo, implementar algo como o algoritmo de Shor exigiria centenas ou milhares de partículas emaranhadas, o que é tecnicamente muito desafiador. Contudo, em jogos simples, como o Dilema do Prisioneiro na versão quântica, é necessário apenas um qbit por jogador (13).

Desta forma, a Teoria dos Jogos Quânticos é importante porque pode ser aplicada na Computação Quântica e Informação Quântica para estudar a Comunicação Quântica (156), Protocolos de Computação Quântica (157), a Clonagem Ótima (104), Teleporte Quântico (158) e na Estimativa do Estado Quântico (159).

Com base na discussão feita acima, será apresentado nas seguintes seções o jogo quântico PQ proposto por Meyer, o formalismo dos jogos quânticos, a versão quântica do jogo do Dilema do Prisioneiro proposta por Eisert *et al.* e o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica proposta por Marinatto e Weber. Seguindo esta ordem, na próxima seção será discutido o jogo PQ.

3.7.1 O JOGO PQ

Meyer (23), em seu trabalho sobre a Teoria dos Jogos Quânticos, considerou um jogo simples de girar uma moeda, denominado de jogo PQ, o qual é uma versão modificada do jogo tradicional de Combinar Moedas. O jogo PQ possui a seguinte configuração

1. Há dois jogadores, o jogador “Picard” e o jogador “Q”.
2. O jogador Q prepara o estado da moeda no estado cara.
3. A moeda é colocada em uma caixa com a face cara para cima.
4. Após colocarem a moeda dentro da caixa e fechá-la, o jogador Q pode escolher um operador de estratégia quântica que gire a moeda ou escolher um operador de estratégia quântica que deixa o estado da moeda inalterado. Picard, sem saber a ação do jogador Q pode fazer o mesmo. Por fim, o jogador Q aplica seu operador de estratégia quântica que gire ou não a moeda. É importante ressaltar que quando um dos jogadores aplica seu operador de estratégia quântica, o seu adversário não sabe qual operador foi escolhido.

5. Após a segunda aplicação do operador de estratégia quântica pelo jogador Q no estado da moeda, os jogadores abrem a caixa. O jogador Q ganha o jogo somente se a moeda tem a face cara para cima.
6. Cada um dos jogadores tem 4 possibilidades de vitória de acordo com a matriz de *payoff* apresentada na Tabela 6.

Tabela 6 – Matriz de *payoff* que representa o jogo PQ, onde N (F) representa não girar (girar) a moeda. Os números na matriz são os ganhos dos jogadores, o primeiro índice é o ganho de Picard e o segundo é o ganho do jogador Q. Por exemplo, $(-1, 1)$ significa que Picard perde, enquanto o jogador Q ganha quando o estado final da moeda é cara.

		Q			
		NN	NF	FN	FF
Picard	N	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	F	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Para este jogo quântico, as escolhas cara e coroa são representadas como estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$ no espaço de Hilbert de um sistema de dois estados, um qbit. Como foi discutido anteriormente, na versão clássica deste jogo, as ações de girar ou não girar a moeda têm uma correspondência na versão quântica. Desta forma, o operador de estratégia quântica que permite girar a moeda é representado pelo operador quântico $\hat{\sigma}_x$. Da mesma maneira, o operador de estratégia quântica que mantém o estado da moeda é representado pelo operador quântico $\hat{1}$. Estes operadores podem ser definidos em termos de matrizes da seguinte maneira

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Neste jogo, além dos operadores $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{1}$, o jogador Q pode escolher o operador de estratégia quântica $\hat{H}$, conhecido como operador quântico Hadamard. Este operador pode ser representado pela seguinte matriz

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Desta possibilidade de escolha, caso o jogador Q adote o operador de estratégia quântica $\hat{H}$ para manipular o estado da moeda no seu primeiro movimento e adote o operador de estratégia quântica $\hat{H}^\dagger$ no seu segundo movimento, então ele sempre vencerá o jogo, independentemente de Picard escolher $\hat{\sigma}_x$ ou $\hat{1}$. O jogador Q sempre ganha porque o estado final do jogo sempre será $|0\rangle$ conforme mostra o esquema abaixo

$$\begin{aligned} |0\rangle \rightarrow \text{Q aplica } \hat{H} &\rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Picard aplica } \hat{\sigma}_x \rightarrow \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Q aplica } \hat{H}^\dagger \rightarrow |0\rangle, \\ |0\rangle \rightarrow \text{Q aplica } \hat{H} &\rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Picard aplica } \hat{1} \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{Q aplica } \hat{H}^\dagger \rightarrow |0\rangle. \end{aligned}$$

Do resultado do esquema acima, a atuação do operador de estratégia quântica $\hat{H}$ permite que o jogador Q superponha os estados cara e coroa da moeda. Portanto, Meyer demonstrou que a possibilidade de superposições de estados em jogos quânticos é uma das vantagens em relação à um jogo clássico.

Dos argumentos apresentados, concluiu-se que existe um ganho quando propriedades quânticas são utilizadas. Nesse sentido, na seguinte seção será apresentado o formalismo dos jogos quânticos com base no formalismo proposto por Eisert *et al.* (27, 160).

3.7.2 FORMALISMO DA TEORIA DOS JOGOS QUÂNTICOS

No formalismo dos jogos quânticos, as estratégias disponíveis para cada jogador são representadas por vetores de estado quânticos. Os jogadores podem manipular os estados quânticos por meio da aplicação de operadores de estratégias quânticas. Os jogos quânticos podem ser classificados como jogos estáticos e jogos dinâmicos. Em jogos estáticos, os jogadores aplicam seus operadores de estratégias quânticas simultaneamente. Em jogos dinâmicos, os operadores de estratégias quânticas são aplicados de forma sequencial (142). No início do jogo, o Juiz pode alterar a estratégia, a qual é normalmente um vetor de estado quântico do tipo: $|0, 0, \dots\rangle$, aplicando um operador $\hat{J}$, com o intuito de obter um estado desejado, tal como um estado emaranhado. Após a atuação do Juiz, os jogadores individualmente aplicam seus operadores de estratégias quânticas. Depois da atuação dos operadores, o Juiz aplica o operador $\hat{J}^\dagger$ para desfazer a sua aplicação anterior ($\hat{J}$). Desta maneira o estado final do jogo é obtido. Por meio do estado final, uma medida é realizada e o *payoff* para cada jogador é atribuído (161).

Neste trabalho, estudou-se jogos quânticos estáticos baseados no formalismo descrito por Eisert *et al.* (27). Desse formalismo, um jogo quântico é representado por

- Um conjunto finito de jogadores $\mathcal{N} = \{1, \dots, g\}$.
- Cada jogador $i \in \mathcal{N}$ possui um conjunto finito de estratégias puras, representado por $S_i = \{|s_{i,1}\rangle, |s_{i,2}\rangle, \dots, |s_{i,m_i}\rangle\} \in$ ao espaço de Hilbert $\mathbb{H}_i$ do jogador i e $m_i \geq 2$ é o número total de estratégias puras do jogador i .
- Um vetor $s = |s_{1,k_1}\rangle \otimes |s_{2,k_2}\rangle \otimes \dots \otimes |s_{g,k_g}\rangle$, que é denominado perfil de estratégias puras, onde $|s_{i,k_i}\rangle$ é uma estratégia pura de cada jogador $i \in \mathcal{N}$.

O conjunto de todos os perfis de estratégias puras formam o espaço de estratégias puras do jogo, dado pelo produto tensorial $S = S_1 \otimes S_2 \otimes \dots \otimes S_g \in \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{H}_g$.

- Um vetor *payoff* $\$ = (\$, \$_2, \dots, \$_g)$ que possui a função *payoff* de cada jogador $i \in \mathcal{N}$. A função *payoff* de cada jogador i retorna um número real de acordo com cada perfil de estratégias puras escolhido.

Dentro deste formalismo, Eisert *et al.* quantizaram o jogo do Dilema do Prisioneiro, para o caso de dois jogadores com duas estratégias cada. Além disso, as estratégias podem ser emaranhadas pelo Juiz. Nesse sentido, este jogo será apresentado na próxima seção.

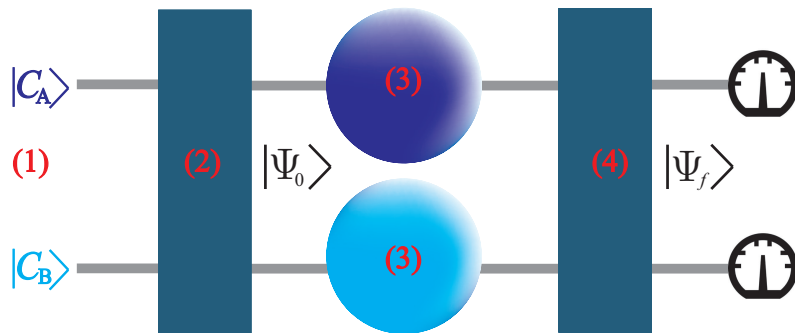
3.7.3 VERSÃO QUÂNTICA DO JOGO DO DILEMA DO PRISIONEIRO

Na formulação quântica proposta por Eisert *et al.* para o jogo do Dilema do Prisioneiro, as estratégias puras Cooperar (C) e Trair (D) devem ser representadas como estados quânticos $|C\rangle$ e $|D\rangle$ no espaço de Hilbert de um sistema de dois estados, um qbit, onde

$$|C\rangle \equiv |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |D\rangle \equiv |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Em cada caso, o estado do jogo é descrito por um vetor do espaço de um produto tensorial que é gerado pelos vetores da base clássica $\{|C_A, C_B\rangle, |C_A, D_B\rangle, |D_A, C_B\rangle, |D_A, D_B\rangle\}$, onde os subíndices definem a ordem na qual o produto tensorial dos elementos da base de estados quânticos, que geram o espaço de Hilbert, correspondem para Alice e para Bob, respectivamente.

Figura 14 – Representação do protocolo proposto por Eisert *et al.*. (1) Há dois jogadores, Alice e Bob. Cada um destes jogadores possui um qbit. Alice prepara o qbit no estado $|C_A\rangle$. Da mesma maneira, Bob prepara o qbit no estado $|C_B\rangle$. Após prepararem os estados dos qbits, Alice e Bob os enviam para um Juiz. (2) O Juiz manipula os estados dos qbits, de modo que os emaranha. Após a atuação do Juiz, ele envia os qbits novamente para Alice e Bob (o estado após a atuação do Juiz é representado por $|\Psi_0\rangle$). (3) Alice (Bob) pode manipular o estado de seu qbit aplicando um operador de estratégia quântica $\hat{U}_A(\theta_A, \phi_A)(\hat{U}_B(\theta_B, \phi_B))$, onde $0 \leq \theta_{A,B} \leq \pi$ e $0 \leq \phi_{A,B} \leq \frac{\pi}{2}$. Após Alice e Bob atuarem os operadores de estratégias quânticas, eles enviam seus qbits para o Juiz. (4) O Juiz desemaranha os estados dos qbits. Por meio do estado final obtido $|\Psi_f\rangle$ a medida é realizada e os *payoffs* dos jogadores são atribuídos.



Fonte: A autora.

Para a implementação quântica do jogo é usado um circuito quântico representado na Figura 14, e a sua descrição é a seguinte

(1) O circuito se inicia com cada jogador possuindo um qbit, cada um deles prepara o qbit no estado $|C\rangle$ e enviam ao Juiz.

(2) A ação do Juiz é representada pela atuação do operador $\hat{J}$. Este operador permite que o Juiz emaranhe os estados dos qbits da seguinte maneira

$$|\Psi_0\rangle = \hat{J} |C_A, C_B\rangle. \quad (3.33)$$

Depois, o Juiz devolve os qbits para os jogadores.

(3) Os jogadores aplicam seus operadores de estratégias quânticas $\hat{\mathcal{U}}_A(\theta_A, \phi_A)$ e $\hat{\mathcal{U}}_B(\theta_B, \phi_B)$ no estado $|\Psi_0\rangle$ e reenviam ao Juiz na forma

$$\left(\hat{\mathcal{U}}_A(\theta_A, \phi_A) \otimes \hat{\mathcal{U}}_B(\theta_B, \phi_B) \right) |\Psi_0\rangle. \quad (3.34)$$

O operador de estratégia quântica geral é representado por

$$\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) = \begin{pmatrix} \exp[i\phi_{A,B}] \cos(\frac{\theta_{A,B}}{2}) & \sin(\frac{\theta_{A,B}}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta_{A,B}}{2}) & \exp[-i\phi_{A,B}] \cos(\frac{\theta_{A,B}}{2}) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

onde $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) \in SU(2)$, tal que $0 \leq \theta_{A,B} \leq \pi$ e $0 \leq \phi_{A,B} \leq \frac{\pi}{2}$.

A atuação do operador de estratégia quântica $\hat{\mathcal{U}}_A(\theta_A, \phi_A)$ e $\hat{\mathcal{U}}_B(\theta_B, \phi_B)$ no vetor de estado $|C_A\rangle$ e $|C_B\rangle$ pode ser visualizada por meio de uma esfera de Bloch⁸ de Alice e de Bob. Alguns exemplos de possíveis vetores de Bloch são apresentados na Figura 15.

(4) Uma segunda ação do Juiz é executada, com o propósito de desemaranhar os estados dos qbits através do operador $\hat{\mathcal{J}}^\dagger$. Portanto, o estado final é dado por

$$|\Psi_f\rangle = \hat{\mathcal{J}}^\dagger \left(\hat{\mathcal{U}}_A(\theta_A, \phi_A) \otimes \hat{\mathcal{U}}_B(\theta_B, \phi_B) \right) |\Psi_0\rangle. \quad (3.36)$$

Neste formalismo, devido ao fato de que a Mecânica Quântica é fundamentalmente uma teoria probabilística, a noção estratégica de recompensa é apenas o *payoff* esperado. O *payoff* dos jogadores é devolvido de acordo com a entrada da matriz de *payoff* da Tabela 3 (Vide pg.45) e é escrito da seguinte maneira

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathcal{P}}_A \hat{\rho}_f \right\}, \quad (3.37)$$

$$\bar{\$}_{\text{Bob}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathcal{P}}_B \hat{\rho}_f \right\}, \quad (3.38)$$

onde $\hat{\mathcal{P}}_{A(B)}$ é o operador *payoff* de Alice (de Bob) e é definido por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}_A &= 3 |C_A, C_B\rangle \langle C_A, C_B| + 5 |D_A, C_B\rangle \langle D_A, C_B| + 0 |C_A, D_B\rangle \langle C_A, D_B| + |D_A, D_B\rangle \langle D_A, D_B|, \\ \hat{\mathcal{P}}_B &= 3 |C_A, C_B\rangle \langle C_A, C_B| + 5 |C_A, D_B\rangle \langle C_A, D_B| + 0 |D_A, C_B\rangle \langle D_A, C_B| + |D_A, D_B\rangle \langle D_A, D_B|. \end{aligned}$$

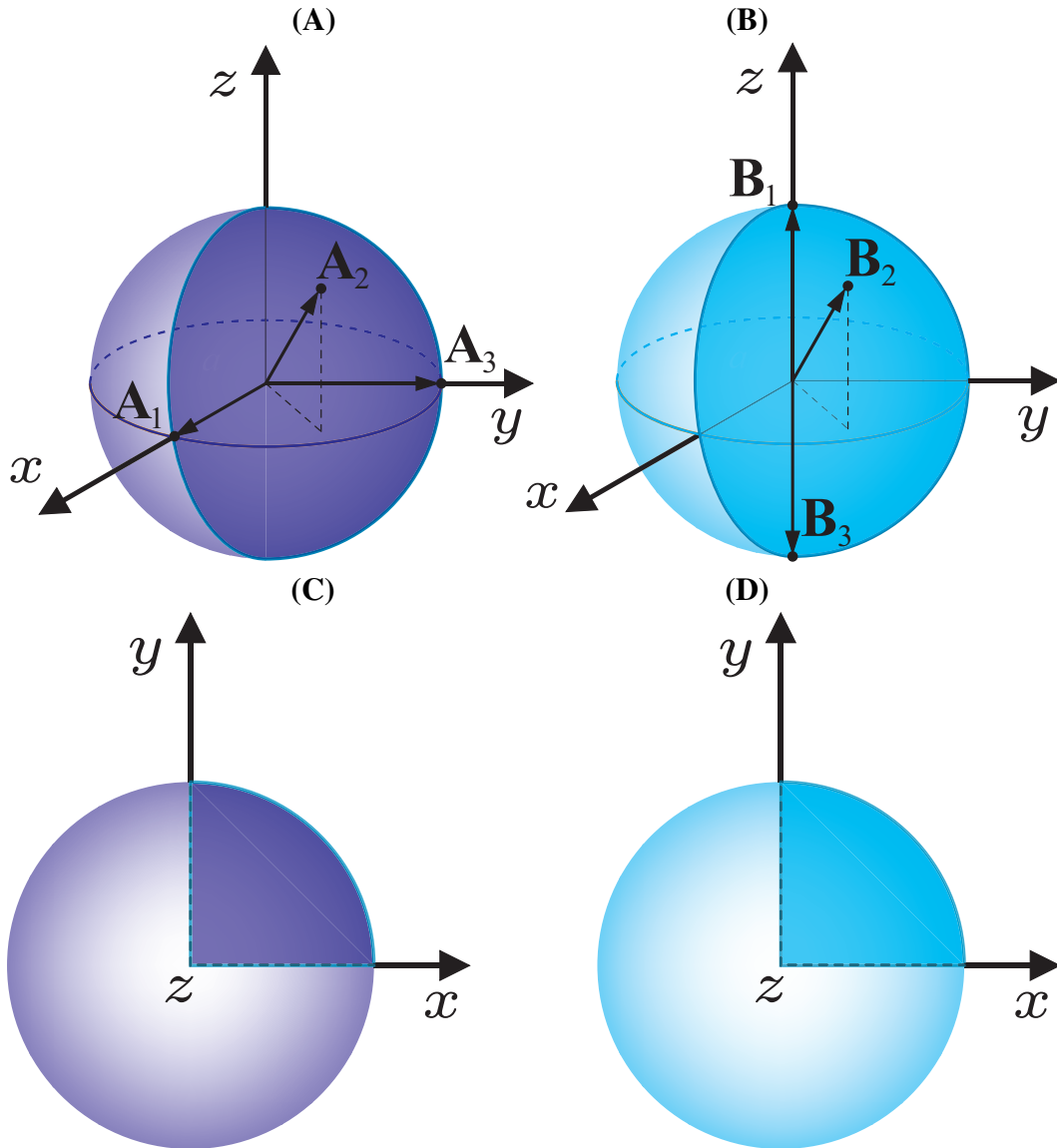
Os números reais que multiplicam os seguintes termos: $|C_A, C_B\rangle \langle C_A, C_B|$, $|C_A, D_B\rangle \langle C_A, D_B|$, $|D_A, C_B\rangle \langle D_A, C_B|$ e $|D_A, D_B\rangle \langle D_A, D_B|$ foram atribuídos de acordo com a matriz de *payoff* da Tabela 3. A matriz densidade $\hat{\rho}_f$ é calculada a partir do estado final $|\Psi_f\rangle$.

O referido operador de emaranhamento $\hat{\mathcal{J}}$ depende de um parâmetro $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e estabelece a medida do grau de emaranhamento no jogo, sendo, portanto, definido por

$$\hat{\mathcal{J}} = \exp \left[\frac{i\lambda \hat{\mathcal{D}}_A \otimes \hat{\mathcal{D}}_B}{2} \right], \quad (3.39)$$

⁸ A definição de esfera de Bloch e alguns exemplos se encontram no Apêndice B.

Figura 15 – **(A)** Esta figura representa a esfera de Bloch de Alice. Nesta esfera apresentam-se alguns exemplos de vetores de Bloch, tais como o ponto A_1 que configura o vetor de Bloch $\vec{r}_A = (1, 0, 0)$, onde $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ e $\phi_A = 0$. O ponto A_2 é dado pelo vetor de Bloch $\vec{r}_A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, onde $\theta_A = \frac{\pi}{4}$ e $\phi_A = \frac{\pi}{4}$. O ponto A_3 representa o vetor de Bloch $\vec{r}_A = (0, 1, 0)$, onde $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ e $\phi_A = \frac{\pi}{2}$. **(B)** Esta figura representa a esfera de Bloch de Bob. O ponto B_1 é caracterizado pelo vetor de Bloch $\vec{r}_B = (0, 0, 1)$, onde $\theta_B = 0$. O ponto B_2 está associado ao vetor de Bloch $\vec{r}_B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, onde $\theta_B = \frac{\pi}{4}$ e $\phi_B = \frac{\pi}{4}$. O ponto B_3 representa o vetor de Bloch $\vec{r}_B = (0, 0, -1)$, onde $\theta_B = \pi$. As regiões mais escuras das Figuras **(C)** e **(D)** (quando se olha no sentido positivo do eixo z) correspondem aos intervalos em que os parâmetros angulares estão definidos, ou seja, $0 \leq \theta_{A,B} \leq \pi$ e $0 \leq \phi_{A,B} \leq \frac{\pi}{2}$. Além disso, $\theta_{A,B}$ é definido em relação ao eixo z , enquanto que $\phi_{A,B}$ é definido em relação ao eixo x .



Fonte: A autora.

onde $\hat{D}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(\pi, 0)$ é o operador de estratégia quântica Trair. Sendo mais específico, os operadores de estratégias quânticas Cooperar $\hat{C}_{A,B}$ e Trair $\hat{D}_{A,B}$ são associados aos seguintes operadores de estratégias quânticas

$$\hat{C}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{D}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

A versão clássica do jogo do Dilema do Prisioneiro é mantida pela escolha do operador de estratégia quântica $\hat{C}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, 0)$ ou $\hat{D}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(\pi, 0)$ pelos jogadores, pois representam a manipulação de uma estratégia clássica.

Dentro do contexto do protocolo desenvolvido por Eisert *et al.*, será discutido como a presença de emaranhamento permite que o dilema deste jogo seja resolvido.

3.7.3.1 PAYOFFS NA AUSÊNCIA DE EMARANHAMENTO E NA PRESENÇA DE MÁXIMO EMARANHAMENTO

O parâmetro de emaranhamento λ pode ser escolhido dentro de um intervalo de $[0, \frac{\pi}{2}]$. Quando atribui-se $\lambda = 0$, o jogo não possui emaranhamento, porém quando $\lambda = \frac{\pi}{2}$, o jogo está maximamente emaranhado. Nesse sentido, será analisado os *payoffs* de ambos os jogadores para estes dois casos.

No caso em que o parâmetro $\lambda = 0$, existe ausência de emaranhamento, e o operador $\hat{J}$ da Equação (3.39) é o operador quântico $\hat{1}$. Aplicando o protocolo de Eisert *et al.* para esta situação, representa-se na Figura 16 (A)-(B) o *payoff* de Alice e de Bob, respectivamente.

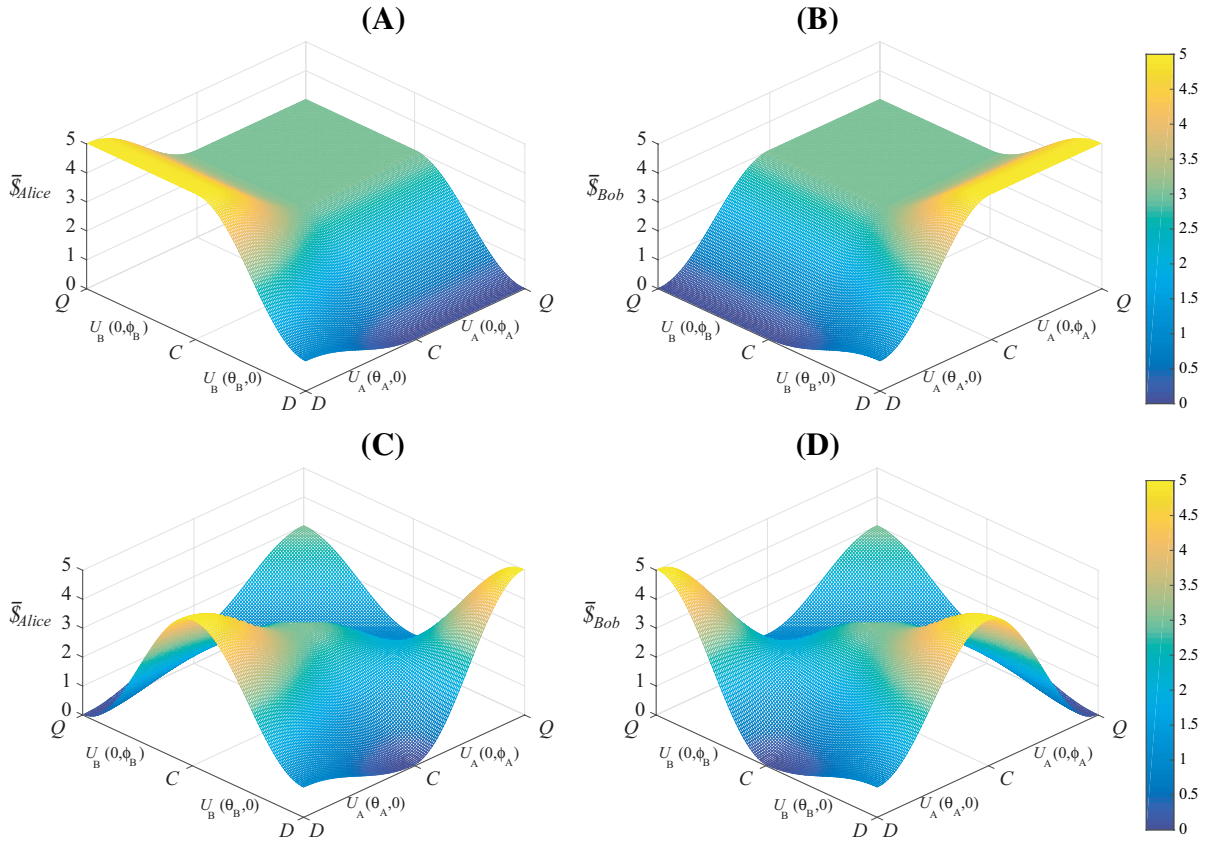
Destas duas figuras, conclui-se que a versão clássica do jogo do Dilema do Prisioneiro é reproduzida fielmente pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{D}_A, \hat{D}_B)$, $(\hat{C}_A, \hat{C}_B)$, $(\hat{D}_A, \hat{C}_B)$ e $(\hat{C}_A, \hat{D}_B)$. De acordo com a matriz de *payoff* representada pela Tabela 7, as escolhas dos operadores de estratégias quânticas $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{D}_{A,B}$ pelos jogadores, reproduz os *payoffs* da matriz de *payoff* da Tabela 3 do jogo clássico.

Tabela 7 – Matriz de *payoff* para a versão quântica do jogo do Dilema do Prisioneiro. Esta matriz reproduz os valores dos *payoffs* de Alice e de Bob na versão clássica do jogo, quando os jogadores escolhem os operadores de estratégias quânticas $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{D}_{A,B}$.

		Bob	
		$\hat{C}_B$	$\hat{D}_B$
Alice	$\hat{C}_A$	(3, 3)	(0, 5)
	$\hat{D}_A$	(5, 0)	(1, 1)

Ainda dentro dessa discussão, existe uma região entre os operadores de estratégias quânticas $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{2})$ em que os *payoffs* dos jogadores são iguais a 3. Porém, nenhum ponto de equilíbrio emerge desta região, de tal forma que o jogo possui um único equilíbrio de Nash, representado pelo perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{D}_A, \hat{D}_B)$, o qual atribui a ambos os jogadores um *payoff* de 1.

Figura 16 – A Figura (A) representa o *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e a Figura (B) representa o *payoff* de Bob, $\bar{\$}_{\text{Bob}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, ambos na ausência de emaranhamento. Destes dois *payoffs*, conclui-se que a versão clássica do jogo do Dilema do Prisioneiro é reproduzida fielmente pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{D}_A, \hat{D}_B)$, $(\hat{C}_A, \hat{C}_B)$, $(\hat{D}_A, \hat{C}_B)$ e $(\hat{C}_A, \hat{D}_B)$. Existe uma região entre os operadores de estratégias quânticas $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$, onde $\hat{Q}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{2})$, em que os *payoffs* dos jogadores são iguais a 3. Porém, nenhum ponto de equilíbrio emerge desta região, de tal forma que, o jogo possui um único equilíbrio de Nash, representado pelo perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{D}_A, \hat{D}_B)$, o qual atribui a ambos os jogadores um *payoff* de 1. A Figura (C) representa o *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e a Figura (D) representa o *payoff* de Bob, $\bar{\$}_{\text{Bob}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, ambos para o caso maximamente emaranhado. Destas figuras, pode-se notar que na região entre $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$ existe um equilíbrio de Nash e que satisfaz a condição de ótimo de Pareto, representado pelo perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$.



Fonte: A autora.

Para o caso em que o parâmetro de emaranhamento é máximo, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, o *payoff* de Alice e de Bob são representados pela Figura 16 (C)-(D), respectivamente. Destas figuras, pode-se notar que na região entre $\hat{C}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$ existe um equilíbrio, representado pelo perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$. Este perfil é um equilíbrio de Nash porque o *payoff* de Alice satisfaz a desigualdade: $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{U}_A(\theta_A, \phi_A), \hat{Q}_B) \leq \bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$, para qualquer $\theta_A \in [0, \pi]$ e $\phi_A \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Analogamente, o *payoff* de Bob satisfaz a desigualdade: $\bar{\$}_{\text{Bob}}(\hat{Q}_A, \hat{U}_B(\theta_B, \phi_B)) \leq \bar{\$}_{\text{Bob}}(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$, para qualquer $\theta_B \in [0, \pi]$ e $\phi_B \in [0, \frac{\pi}{2}]$. De acordo com a Tabela 8, este perfil de operadores de estratégias quânticas retorna o maior ganho para ambos jogadores, pois: $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) = \bar{\$}_{\text{Bob}}(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B) = 3$. Além disso, o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ também satisfaz a condição de ótimo de Pareto. No jogo clássico, o equilíbrio de Pareto é a cooperação mútua (representado pelo perfil de estratégias puras (C_A, C_B)), conforme discutido na Seção 3.6.2, porém não é a solução escolhida pelos jogadores.

Tabela 8 – Matriz de *payoff* do jogo do Dilema do Prisioneiro na versão quântica. Nesta matriz o operador de estratégia quântica $\hat{Q}_{A,B}$ foi incluído.

		Bob		
		$\hat{C}_B$	$\hat{D}_B$	$\hat{Q}_B$
Alice	$\hat{C}_A$	(3, 3)	(0, 5)	(1, 1)
	$\hat{D}_A$	(5, 0)	(1, 1)	(0, 5)
	$\hat{Q}_A$	(1, 1)	(5, 0)	(3, 3)

Desta maneira, surge a pergunta: qual a importância do emaranhamento no jogo? A resposta é que o emaranhamento permite otimizar os *payoffs*, de tal forma, que ele indica qual é o equilíbrio do jogo na versão quântica.

Com base nesta resposta, o objetivo do trabalho de Eisert *et al.* foi de explorar a vantagem do emaranhamento em um jogo quântico. Os autores demonstraram que o emaranhamento permite otimizar o equilíbrio do jogo. Para o caso do Dilema do Prisioneiro, o equilíbrio foi o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$. Desta maneira, o dilema do jogo pode ser resolvido se os jogadores escolhem o operador de estratégia quântica $\hat{Q}_{A,B}$ para manipular suas estratégias.

Dentro deste contexto, a prescrição fornecida por Eisert *et al.* pode ser aplicada a qualquer jogo de dois jogadores (162). Após a publicação deste trabalho algumas questões foram estudadas, as quais incluem a Decoerência (113, 163), jogadores quânticos versus clássicos (164, 165), diferenças entre Correlações Clássicas e Quânticas (166), e muitos outros (6, 28, 108, 113, 167). Contudo, algumas controvérsias entre o meio acadêmico surgiram, dentre elas a interpretação realizada por S. J van Enk e R. Pike (112), em qual os autores alegaram que os jogos não são verdadeiramente quânticos. Sabe-se que com algumas restrições, todos os jogos quânticos podem ser simulados em um computador clássico, no entanto qualquer escala de implementação clássica aumenta exponencialmente com o tamanho do espaço de Hilbert, ao

contrário de uma implementação quântica (102). S. J van Enk e R. Pike consideraram que o jogo do Dilema do Prisioneiro na versão quântica, com os operadores de estratégias quânticas de dois parâmetros, é equivalente a um novo jogo clássico com três estratégias puras C , D e Q . Portanto, o equilíbrio $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ encontrado por Eisert *et al.* não abordou o dilema do jogo original. Além disso, a partilha de um estado emaranhado desfigura a distinção entre jogos cooperativos e não cooperativos (102).

Um outro comentário em relação aos resultados obtidos por Eisert *et al.* foi feita por S. C. Benjamin e P. M. Hayden (109). Os autores argumentaram que nem todo operador unitário pertencente ao grupo $SU(2)$ é um bom candidato à um operador de estratégia quântica, porque o operador unitário mais geral possível é dado pelo seguinte operador de três parâmetros

$$\hat{U}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}, \nu_{A,B}) = \begin{pmatrix} \exp[i\phi_{A,B}] \cos(\frac{\theta_{A,B}}{2}) & \exp[i\nu_{A,B}] \sin(\frac{\theta_{A,B}}{2}) \\ -\exp[-i\nu_{A,B}] \sin(\frac{\theta_{A,B}}{2}) & \exp[-i\phi_{A,B}] \cos(\frac{\theta_{A,B}}{2}) \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

onde $\theta_{A,B} \in [0, \pi]$ e $\phi_{A,B}, \nu_{A,B} \in [-\pi, \pi]$. Portanto, se o operador de estratégia quântica $\hat{U}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}, \nu_{A,B})$ for aplicado, então não existe um equilíbrio de Nash no jogo do Dilema do Prisioneiro (114). A justificativa é que se Alice escolhe um operador de estratégia quântica da forma $\hat{U}_A(\theta_A, \phi_A, \nu_A)$ e Bob escolhe um operador de estratégia quântica $\hat{U}_B(\theta_B, \phi_B, \frac{\pi}{2} - \nu_B)$, é possível escrever $(\hat{U}_A(\theta_A, \phi_A, \nu_A) \otimes \hat{1})(\hat{J}|C_A, C_B\rangle) = (\hat{1} \otimes \hat{U}_B(\theta_B, \phi_B, \frac{\pi}{2} - \nu_B))(\hat{J}|C_A, C_B\rangle)$. Este resultado representa que para qualquer operador de estratégia quântica escolhido por Alice, existe um contra-operador de estratégia quântica ideal para Bob, e vice versa. Além disso, não é só o perfil de operadores de estratégias quânticas encontrado por Eisert *et al.* que não consegue formar um equilíbrio de Nash no espaço de operadores de estratégias quânticas unitários, neste espaço não há equilíbrio de Nash (109).

Eisert *et al.* responderam ao comentário de Benjamin e Hayden, alegando que para provar que o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ é um equilíbrio de Nash e que satisfaz a condição de ótimo de Pareto, é necessário explicar o conjunto de operadores de estratégias quânticas para o qual é esse o caso. Os autores afirmaram que o conjunto de operadores de estratégias quânticas escolhido por eles prova que há uma extensão quântica do jogo do Dilema do Prisioneiro e que o dilema desaparece. Contudo, Eisert *et al.* explicaram que não afirmaram em momento algum que o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{Q}_A, \hat{Q}_B)$ é um equilíbrio de Nash-Pareto⁹ em todas as circunstâncias, mas que a solução do jogo possui um caráter diferente a partir de operadores do $SU(2)$ (168).

Após a discussão do protocolo desenvolvido por Eisert *et al.* e algumas contra-propostas, será discutido na seguinte seção o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica.

3.7.4 VERSÃO QUÂNTICA DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS

Um segundo esquema de quantização de um jogo foi proposto por Marinatto e Weber (32) e aplicado ao jogo da Batalha dos Sexos. Neste trabalho, os operadores de estratégias quânticas

⁹ É um equilíbrio que é um equilíbrio de Nash e também satisfaz a condição de ótimo de Pareto.

são denominados táticas e estão restritos ao operador quântico $\hat{1}$ e ao operador quântico $\hat{\sigma}_x$. Além disso, cada jogador pode manipular o vetor de estado inicial (sua estratégia), realizando alguma transformação local, para obter um vetor de estado final. O vetor de estado final representa a estratégia quântica final dos dois jogadores. Além disso, o estado inicial do jogo pode variar, e esta variação possibilita que o dilema seja resolvido.

Os autores estenderam o jogo clássico para um domínio quântico a fim de descobrir em quais casos uma estratégia quântica poderia exibir características mais atrativas do que a teoria clássica prediz. Quando uma estratégia quântica fatorável é escolhida pelos jogadores, esta não pode melhorar seus *payoffs* esperados e reproduz o mesmo comportamento da versão clássica do jogo, pois há três equilíbrios de Nash e os jogadores não podem decidir racionalmente qual deles escolher. Para o caso em que os jogadores escolhem uma estratégia quântica emaranhada, o jogo possui novamente três equilíbrios de Nash. Dentre estes, dois proporcionam o mesmo *payoff* aos jogadores. Isso ocorre porque ambos os jogadores são forçados a agir de uma mesma forma devido à forte correlação presente no estado emaranhado, possibilitando que o dilema seja resolvido.

Após a apresentação deste esquema de quantização, vários autores o usaram para estudar diversos jogos (35–37, 40). Contudo, um principal comentário feito por Benjamin (33) merece destaque. Benjamin fez duas observações. A primeira delas é que o esquema proposto por Marinatto-Weber é muito semelhante ao esquema proposto por Eisert *et al.*. A diferença é que o operador de desemaranhamento $\hat{J}^\dagger$ não é aplicado a este esquema e que os operadores de estratégias quânticas são restritos ao operador $\hat{1}$ e ao operador $\hat{\sigma}_x$. Em segundo lugar, Benjamin apontou que o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica não possui uma solução única. Este fato acontece porque no jogo tradicional duas possíveis soluções atribuem *payoffs* diferentes aos jogadores: (5, 3) ou (3, 5). Assim, cada jogador prefere uma solução diferente, e mesmo que os jogadores tenham a permissão para se comunicar, não existe um mecanismo formal para decidir quem deve obter o melhor *payoff*. Entretanto, no jogo quântico, duas possíveis soluções atribuem um *payoff* de $(\frac{5+3}{2}, \frac{3+5}{2}) = (4, 4)$ para cada jogador. Caso seja permitido que os jogadores se comuniquem imediatamente, então eles podem concordar sobre qual solução jogar.

Além destes dois comentários, Benjamin também ressaltou que se os jogadores pudessem aplicar qualquer operação unitária local em seu qbit, ou seja, se os operadores de estratégias quânticas pertencessem ao grupo $SU(2)$, então o *payoff* máximo possível permaneceria (4, 4) para ambos os jogadores¹⁰. Além disso, para qualquer operador de estratégia quântica aplicado pela Alice, $\hat{U}_A$, existe um operador de estratégia quântica correspondente para o Bob, $\hat{U}_B$. O operador de estratégia quântica investigado é simplesmente o conjugado de $\hat{U}_A$, isto é, $\hat{U}_B = \hat{U}_A^*$.

Marinatto e Weber responderam ao comentário de Benjamin (169) alegando que se os jogadores escolhem entre manipular a estratégia inicial ou deixam-na inalterada, então ambas as escolhas os levará à mesma estratégia final: $|\Psi_f\rangle = \frac{|O_A, O_B\rangle + |T_A, T_B\rangle}{\sqrt{2}}$. Esta estratégia final é exatamente a mesma estratégia que os jogadores possuem desde o início do jogo. Portanto,

¹⁰ Esta discussão será refeita no Capítulo 4.

ambos os jogadores, sabendo desse fato, estão impedidos de manipular sua própria estratégia, uma vez que existe pelo menos uma possibilidade de obter o pior resultado. Além disso, partindo da hipótese de que é um jogo de informação completa e que os jogadores são racionais, os autores afirmaram que esta abordagem quântica para o jogo da Batalha dos Sexos resolveu o dilema.

O esquema proposto por Marinatto e Weber não teve tanta popularidade quanto o de Eisert *et al.*. Além disso, nos jogos quânticos, o Juiz manipula os estados quânticos iniciais dos qbits e os envia para os jogadores. Depois de aplicar seus operadores de estratégias quânticas, os jogadores reenviam os qbits ao Juiz. O Juiz então desemaranha os estados dos qbits. Após a atuação do Juiz os *payoffs* dos jogadores são atribuídos (170). Nesse sentido, é importante comentar que a diferença entre o esquema de Marinatto e Weber e o esquema de Eisert *et al.*, é que no esquema de Marinatto e Weber os *payoffs* são medidos em uma base de estados de Bell, porque o Juiz não desemaranha os estados dos qbits.

Resumindo, ainda há muitas discussões sobre a validade da extensão de um jogo clássico para o domínio quântico e seus resultados obtidos. A Teoria dos Jogos Quânticos ainda é uma área a ser desenvolvida e estudada. Ainda assim, após a apresentação do capítulo de Ressonância Magnética Nuclear e Teoria dos Jogos, será apresentado no próximo capítulo uma análise teórica do jogo da Batalha dos Sexos e uma proposta de implementação via RMN.

4 O JOGO DA BATALHA DOS SEXOS

De acordo com o que se discutiu no capítulo anterior, o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica ainda não possui uma solução definida. Nesse sentido, este capítulo será dedicado a análise deste jogo. Além disso, levando em conta o comentário feito por Benjamin (33), alguns objetivos serão propostos, sendo estes

- Estudar o jogo da Batalha dos Sexos a partir do protocolo desenvolvido por Eisert *et al.* e verificar se o dilema é resolvido.
- Analisar se a condição apresentada por Benjamin (33) é satisfeita, ou seja, se o operador de estratégia quântica de Bob é igual ao conjugado do operador de estratégia quântica de Alice.
- Dentro dos resultados encontrados, propor uma implementação do jogo via RMN.

Desta forma, na Seção 4.1, apresenta-se a metodologia teórica, implementando o jogo da Batalha dos Sexos via o esquema de Eisert *et al.* e seus respectivos resultados. Na Seção 4.2 testa-se a condição da escolha do operador de estratégia quântica pela Alice e Bob de acordo com Benjamin (33). Por fim, na Seção 4.3, discute-se uma proposta experimental do jogo da Batalha dos Sexos via RMN.

4.1 O JOGO DA BATALHA DOS SEXOS VIA PROTOCOLO DE EISERT *ET AL.*

Dentro da formulação quântica proposta por Eisert *et al.* (27), o jogo da Batalha dos Sexos pode ser descrito em uma versão quântica, de tal forma que as estratégias puras Ópera (O) e Televisão (T) devem ser representadas como estados quânticos $|O\rangle$ e $|T\rangle$ de um espaço de Hilbert, gerado por uma base composta de dois estados

$$|O\rangle \equiv |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |T\rangle \equiv |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

No caso de dois jogadores com duas estratégias puras, o estado do jogo é descrito por um vetor da base computacional $\{|O_A, O_B\rangle, |O_A, T_B\rangle, |T_A, O_B\rangle, |T_A, T_B\rangle\}$, onde os rótulos foram trocados para serem compatíveis com a estrutura do jogo.

Da mesma maneira como foi apresentado na Seção 3.7.3, para este jogo o protocolo de Eisert *et al.* será aplicado¹, para o caso em que o parâmetro de emaranhamento λ é igual a 0 e $\frac{\pi}{2}$. Portanto, na seguinte seção será discutido os *payoffs* de ambos os jogadores nestas duas condições.

¹ Este protocolo está representado na Figura 14. Vide pg.60.

4.1.1 PAYOFFS NA AUSÊNCIA DE EMARANHAMENTO E NA PRESENÇA DE MÁXIMO EMARANHAMENTO

Na situação em que não existe emaranhamento, o parâmetro $\lambda = 0$ e o operador $\hat{J}$ da Equação (3.39) é o operador quântico $\hat{1}$. Aplicando o protocolo de Eisert *et al.* na ausência de emaranhamento, representa-se na Figura 17 (A)-(B) o *payoff* de Alice e de Bob, respectivamente.

Destas duas figuras, conclui-se que a versão clássica do jogo da Batalha dos Sexos é reproduzida pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{T}_A, \hat{T}_B)$, $(\hat{O}_A, \hat{O}_B)$, $(\hat{T}_A, \hat{O}_B)$ e $(\hat{O}_A, \hat{T}_B)$, onde $\hat{T}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(\pi, 0)$ e $\hat{O}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, 0)$. De acordo com a matriz de *payoff* representada pela Tabela 9, as escolhas dos operadores de estratégias quânticas $\hat{O}_{A,B}$ e $\hat{T}_{A,B}$ pelos jogadores reproduz os mesmos *payoffs* do jogo clássico.

Tabela 9 – Matriz de *payoff* para a versão quântica do jogo da Batalha dos Sexos. Esta matriz reproduz os valores dos *payoffs* de Alice e de Bob na versão clássica do jogo, quando os jogadores escolhem os operadores de estratégias quânticas $\hat{O}_{A,B}$ e $\hat{T}_{A,B}$.

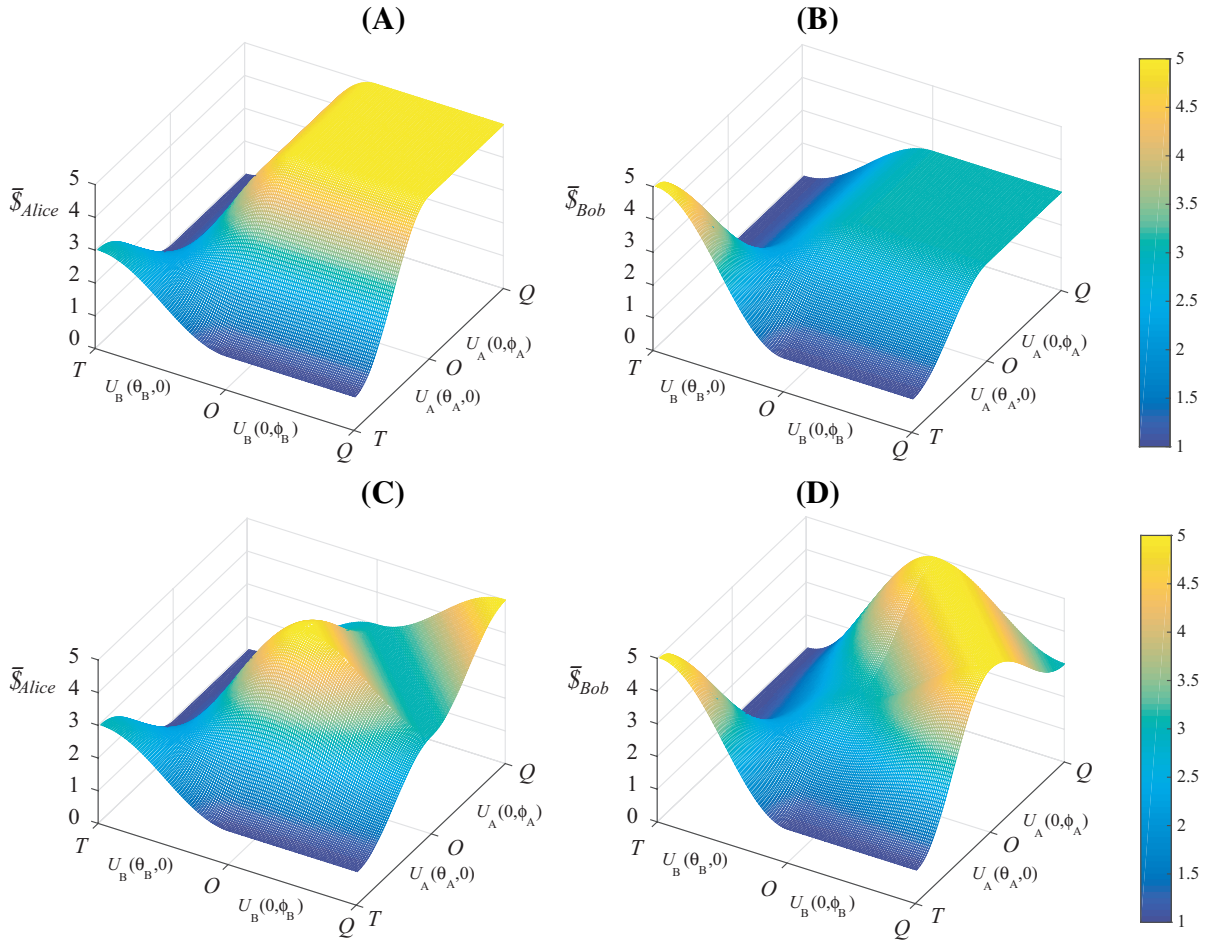
		Bob	
		$\hat{O}_B$	$\hat{T}_B$
Alice	$\hat{O}_A$	(5, 3)	(1, 1)
	$\hat{T}_A$	(1, 1)	(3, 5)

Dentro dessa discussão, o jogo possui dois equilíbrios de Nash, representados pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{O}_A, \hat{O}_B)$ e $(\hat{T}_A, \hat{T}_B)$. Para o caso em que o parâmetro de emaranhamento é máximo, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, o *payoff* de Alice e de Bob são representados pela Figura 17 (C)-(D), respectivamente. Destas figuras, pode-se notar que se os jogadores escolhem seus operadores de estratégias quânticas em um intervalo de valores atribuídos aos parâmetros angulares que representam $\hat{O}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$, então em determinadas regiões seus *payoffs* são iguais a 4.

Para tornar as ideias mais claras, encontrou-se as curvas de nível do *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e de Bob, $\bar{\$}_B(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, no regime maximamente emaranhado. Estes *payoffs* estão representados na Figura 18. Desta figura, percebe-se que existem duas regiões em que as funções *payoff* são iguais a 4 (as duas regiões em cada curva de nível estão indicadas por setas).

Deste modo, foi possível encontrar as equações das curvas de nível para o caso maximamente emaranhado, calculando a interseção entre a função *payoff* de Alice e de Bob. A expressão matemática do *payoff* de Alice no regime maximamente emaranhado, representada pela Figura

Figura 17 – A Figura (A) representa o *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{Alice}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e a Figura (B) representa o *payoff* de Bob, $\bar{\$}_{Bob}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, ambos na ausência de emaranhamento. Destes dois *payoffs*, conclui-se que a versão clássica do jogo da Batalha dos Sexos é reproduzida fielmente pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{T}_A, \hat{T}_B)$, $(\hat{O}_A, \hat{O}_B)$, $(\hat{T}_A, \hat{O}_B)$ e $(\hat{O}_A, \hat{T}_B)$, onde $\hat{T}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(\pi, 0)$ e $\hat{O}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, 0)$. O operador de estratégia quântica $\hat{Q}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{2})$. O jogo possui dois equilíbrios de Nash, representados pelos perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{O}_A, \hat{O}_B)$ e $(\hat{T}_A, \hat{T}_B)$. A Figura (C) representa o *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{Alice}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e a Figura (D) representa o *payoff* de Bob, $\bar{\$}_{Bob}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, ambos maximamente emaranhados. Destas figuras, pode-se notar que se os jogadores escolhem seus operadores de estratégias quânticas em um intervalo de valores atribuídos aos parâmetros angulares que representam $\hat{O}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$, então em determinadas regiões seus *payoffs* são iguais a 4.



Fonte: A autora.

17 (C) é escrita como

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{S}}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) &= 5\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}\cos^2(\phi_A + \phi_B) \\ &+ \left(\cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\phi_B - \cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\cos\phi_A\right)^2 \\ &+ \left(\cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\sin\phi_A - \cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\cos\phi_B\right)^2 \\ &+ 3\left(\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2} + \cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\sin(\phi_A + \phi_B)\right)^2. \quad (4.2)\end{aligned}$$

De modo análogo, a expressão matemática do *payoff* de Bob para o caso de máximo emaranhamento, representada pela Figura 17 (D), é escrita como se segue

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B}) &= 3\cos^2\frac{\theta_A}{2}\cos^2\frac{\theta_B}{2}\cos^2(\phi_A + \phi_B) \\ &+ \left(\cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\phi_B - \cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\cos\phi_A\right)^2 \\ &+ \left(\cos\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2}\sin\phi_A - \cos\frac{\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A}{2}\cos\phi_B\right)^2 \\ &+ 5\left(\sin\frac{\theta_A}{2}\sin\frac{\theta_B}{2} + \cos\frac{\theta_A}{2}\cos\frac{\theta_B}{2}\sin(\phi_A + \phi_B)\right)^2. \quad (4.3)\end{aligned}$$

Nota-se da Figura 18 que os *payoffs* de Alice e de Bob são iguais a 4 quando o parâmetro $\theta_{A,B}$ do operador de estratégia quântica $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}$ é igual a 0. Desta condição e a partir das Equações (4.2)-(4.3) pode-se escrever as seguintes expressões

$$\bar{\mathbb{S}}_{\text{Alice}}(0, \phi_{A,B}) = 5\cos^2(\phi_A + \phi_B) + 3\sin^2(\phi_A + \phi_B), \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}(0, \phi_{A,B}) = 3\cos^2(\phi_A + \phi_B) + 5\sin^2(\phi_A + \phi_B). \quad (4.5)$$

As duas equações das curvas que interseptom os *payoffs* das Equações (4.4)-(4.5), podem ser calculadas igualando-as, de modo que: $\bar{\mathbb{S}}_{\text{Alice}}(0, \phi_{A,B}) = \bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}(0, \phi_{A,B})$. Portanto, encontrou-se as seguintes equações da reta

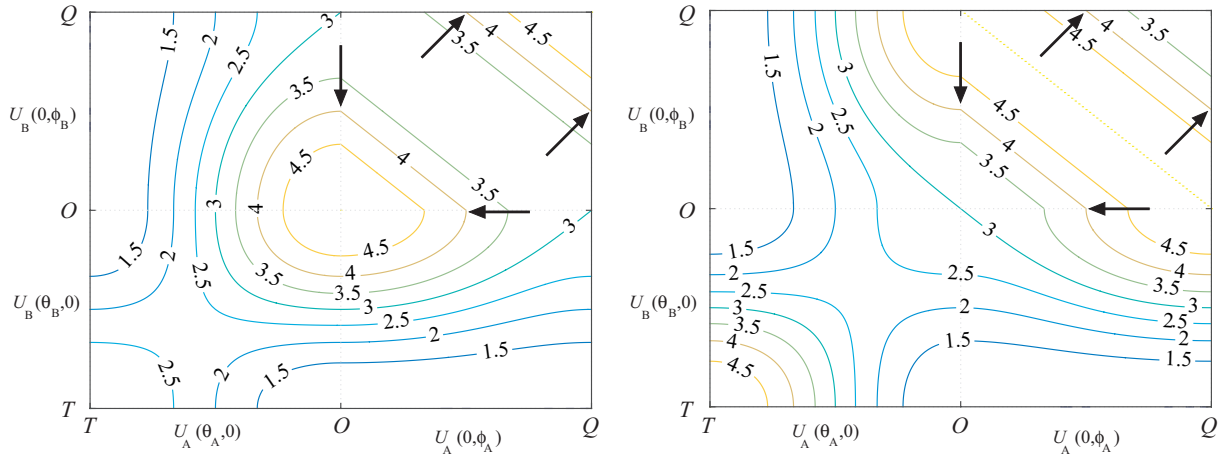
$$\phi_B + \phi_A - \frac{\pi}{4} = 0; R_1, \quad (4.6)$$

$$\phi_B + \phi_A - \frac{3\pi}{4} = 0; R_2. \quad (4.7)$$

As retas das equações acima estão representadas graficamente na Figura 19.

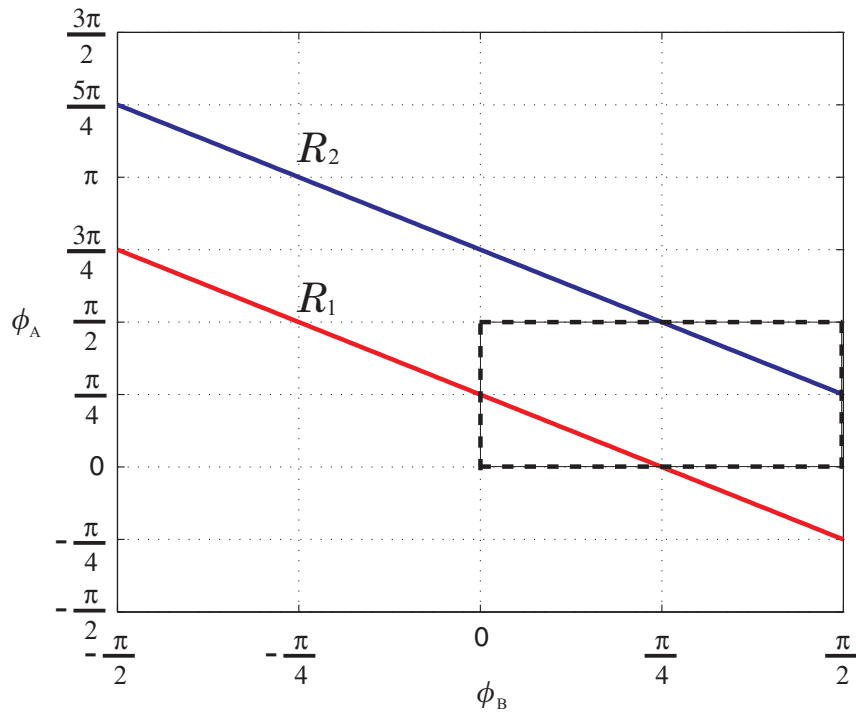
Dos resultados teóricos apresentados nesta seção, pode-se concluir que as Equações (4.6)-(4.7) representam a condição de restrição das escolhas dos parâmetros ϕ_A e ϕ_B para que os *payoffs* dos dois jogadores sejam iguais a 4. Por exemplo, se Bob escolhe o parâmetro $\phi_B = \frac{\pi}{4}$, Alice deve escolher o parâmetro $\phi_A = 0$ (de acordo com a Equação (4.6)) ou $\phi_A = \frac{\pi}{2}$ (de acordo com a Equação (4.7)). Dentro desta discussão, na seguinte seção será analisado se a condição para a solução do jogo da Batalha dos Sexos proposta por Benjamin (33) é satisfeita.

Figura 18 – A figura no quadro à esquerda representa as curvas de nível do *payoff* de Alice, $\bar{\$}_{\text{Alice}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, e a figura no quadro à direita representa as curvas de nível do *payoff* de Bob, $\bar{\$}_{\text{Bob}}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, ambos para o caso maximamente emaranhado. Destas figuras, há duas regiões em cada curva de nível indicadas por setas, em quais as funções *payoff* são iguais a 4.



Fonte: A autora.

Figura 19 – A curva da Equação (4.6) está representada pela cor vermelha e a curva da Equação (4.7) pela cor azul. O parâmetro ϕ_A em ambas as retas foi escrito em função do parâmetro ϕ_B e pertence ao intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. O retângulo representa o intervalo em que os parâmetros ϕ_A e ϕ_B da Figura 18 são definidos.



Fonte: A autora.

4.2 ANÁLISE DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS VIA CONDIÇÃO DE BENJAMIN

No ano 2000, em um comentário do trabalho de Marinatto e Weber (32), Benjamin (33) discute que se os operadores de estratégias quânticas pertencem ao grupo $SU(2)$, então Bob pode escolher um operador de estratégia quântica $\hat{\mathcal{U}}_B$, de tal forma que obedeça a seguinte condição: $\hat{\mathcal{U}}_B = \hat{\mathcal{U}}_A^*$, onde $\hat{\mathcal{U}}_A$ é o operador de estratégia quântica de Alice. Desta escolha, os *payoffs* são iguais a 4 para ambos os jogadores².

Dos resultados obtidos da seção anterior, a forma geral do operador de estratégia quântica de Alice e de Bob na região entre os operadores $\hat{\mathcal{O}}_{A,B}$ e $\hat{\mathcal{Q}}_{A,B}$, pode ser escrita como

$$\hat{\mathcal{U}}_A(0, \phi_A) = \begin{pmatrix} \exp[i\phi_A] & 0 \\ 0 & \exp[-i\phi_A] \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathcal{U}}_B(0, \phi_B) = \begin{pmatrix} \exp[i\phi_B] & 0 \\ 0 & \exp[-i\phi_B] \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Calculando o conjugado do operador de estratégia quântica de Alice da Equação (4.8) e igualando ao operador de estratégia quântica de Bob da Equação (4.9), escreve-se

$$\begin{pmatrix} \exp[i\phi_B] & 0 \\ 0 & \exp[-i\phi_B] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[-i\phi_A] & 0 \\ 0 & \exp[i\phi_A] \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

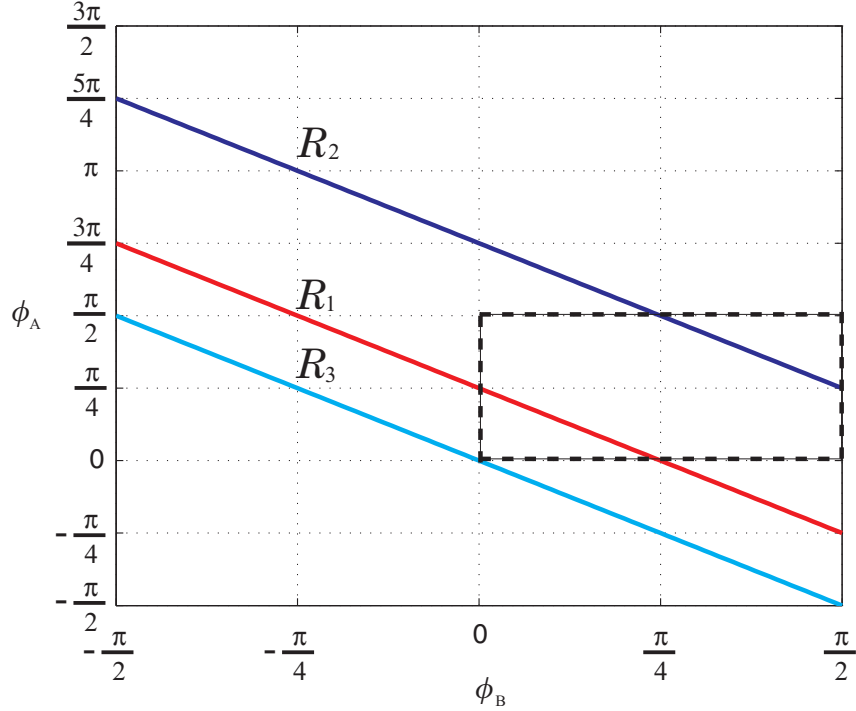
Por meio de comparação entre os termos da Equação (4.10), encontrou-se a seguinte equação da reta

$$\phi_B + \phi_A = 0; R_3. \quad (4.11)$$

A expressão da reta da Equação (4.11) está representada graficamente na Figura 20. Desta figura, pode-se notar que as retas das Equações (4.6)-(4.7)-(4.11) são paralelas. Portanto, a condição proposta por Benjamin não é satisfeita. Não existe nenhuma região em que o operador de estratégia quântica de Bob é igual ao conjugado do operador de estratégia quântica de Alice, salvo a situação trivial de parâmetros $\phi_A = \phi_B = 0$, que não traz novas interpretações ou resultados. Embora a condição de Benjamin não seja satisfeita, Alice deve escolher o parâmetro ϕ_A que satisfaça as expressões das retas das Equações (4.6)-(4.7). Dentro do âmbito desta discussão, para dois casos em particular, em que Bob escolhe o parâmetro $\phi_B = \frac{\pi}{8}$ ou $\phi_B = \frac{3\pi}{8}$, Alice também deve escolher $\phi_A = \frac{\pi}{8}$ ou $\phi_A = \frac{3\pi}{8}$, respectivamente. Este par de configurações representam que Alice e Bob escolhem o mesmo operador de estratégia quântica para manipular sua estratégia. Uma tentativa de analogia com uma escolha clássica seria como se Alice e Bob fossem à Ópera para ver Televisão e pudessem tomar um café. Desta maneira, a escolha do operador de estratégia quântica $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ ou $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$, que pertencem ao grupo $SU(2)$, permitirá que o dilema seja resolvido, pois o casal fará alguma atividade juntos sábado à noite e terão satisfação igual, representada numericamente por 4. A matriz de *payoff* que inclui os operadores $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ e $\hat{\mathcal{U}}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$ está constituída pela Tabela 10. Ainda que os operadores de estratégias

² Este comentário foi discutido na Seção 3.7.4.

Figura 20 – Nesta figura foi incluída a curva da Equação (4.11) e está representada pela cor azul claro. A curva da Equação (4.6) está representada pela cor vermelha e a curva da Equação (4.7) está representada pela cor azul. O parâmetro ϕ_A novamente foi escrito em função do parâmetro ϕ_B e pertence ao intervalo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. O retângulo representa o intervalo em que os parâmetros ϕ_A e ϕ_B da Figura 18 são definidos.



Fonte: A autora.

Tabela 10 – Matriz de *payoff* do jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica. Nesta matriz os operadores de estratégias quânticas $\hat{\mathbf{u}}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ e $\hat{\mathbf{u}}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$ foram incluídos.

		Bob			
		$\hat{\mathbf{O}}_B$	$\hat{\mathbf{T}}_B$	$\hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{\pi}{8})$	$\hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{3\pi}{8})$
Alice	$\hat{\mathbf{O}}_A$	(5, 3)	(1, 1)	(4.7, 3.3)	(3.3, 4.7)
	$\hat{\mathbf{T}}_A$	(1, 1)	(3, 5)	(1, 1)	(1, 1)
	$\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{\pi}{8})$	(4.7, 3.3)	(1, 1)	(4, 4)	(3, 5)
	$\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{3\pi}{8})$	(3.3, 4.7)	(1, 1)	(3, 5)	(4, 4)

quânticas $\hat{\mathbf{u}}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ e $\hat{\mathbf{u}}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$ resolvam o dilema do jogo da Batalha dos Sexos, os perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{\pi}{8}))$ e $(\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{3\pi}{8}))$ não são equilíbrios de Nash, porque o *payoff* de Alice não satisfaz as seguintes desigualdades

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{\mathbf{u}}_A(\theta_A, \phi_A), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{\pi}{8})) \leq \bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{\pi}{8})),$$

$$\bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{\mathbf{u}}_A(\theta_A, \phi_A), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{3\pi}{8})) \leq \bar{\$}_{\text{Alice}}(\hat{\mathbf{u}}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{\mathbf{u}}_B(0, \frac{3\pi}{8})),$$

para qualquer $\theta_A \in [0, \pi]$ e $\phi_A \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Analogamente, o *payoff* de Bob também não obedece

as desigualdades a seguir

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}\left(\hat{\mathbf{U}}_A\left(0, \frac{\pi}{8}\right), \hat{\mathbf{U}}_B\left(\theta_B, \phi_B\right)\right) &\leq \bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}\left(\hat{\mathbf{U}}_A\left(0, \frac{\pi}{8}\right), \hat{\mathbf{U}}_B\left(0, \frac{\pi}{8}\right)\right), \\ \bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}\left(\hat{\mathbf{U}}_A\left(0, \frac{3\pi}{8}\right), \hat{\mathbf{U}}_B\left(\theta_B, \phi_B\right)\right) &\leq \bar{\mathbb{S}}_{\text{Bob}}\left(\hat{\mathbf{U}}_A\left(0, \frac{3\pi}{8}\right), \hat{\mathbf{U}}_B\left(0, \frac{3\pi}{8}\right)\right),\end{aligned}$$

para qualquer $\theta_B \in [0, \pi]$ e $\phi_B \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Contudo, os perfis de operadores de estratégias quânticas $(\hat{\mathbf{U}}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{\mathbf{U}}_B(0, \frac{\pi}{8}))$ e $(\hat{\mathbf{U}}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{\mathbf{U}}_B(0, \frac{3\pi}{8}))$ satisfazem a condição de ótimo de Pareto. Aliás, é importante comentar que todos os operadores de estratégias quânticas que atribuem aos jogadores um *payoff* igual a 4 satisfazem a condição de ótimo de Pareto. Nenhum destes são equilíbrios de Nash ou equilíbrios de Nash-Pareto. No jogo clássico, os perfis de estratégias puras $(\hat{\mathbf{O}}_A, \hat{\mathbf{O}}_B)$ e $(\hat{\mathbf{T}}_A, \hat{\mathbf{T}}_B)$ são equilíbrios de Nash-Pareto conforme discutido na Seção 3.6.2, porém o jogo não possui uma solução.

Portanto, pode-se concluir desta seção que há uma região entre os operadores de estratégias quânticas $\hat{\mathbf{O}}_{A,B}$ e $\hat{\mathbf{Q}}_{A,B}$, que atribui aos jogadores um *payoff* de (4, 4), porém a restrição da escolha dos operadores de estratégias quânticas pelos jogadores é dada pelas Equações (4.6)-(4.7). Dentro desta restrição, a escolha do operador de estratégia quântica $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ ou $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$ permite que o dilema seja resolvido.

4.3 UMA PROPOSTA DE IMPLEMENTAÇÃO DO JOGO DA BATALHA DOS SEXOS VIA RESSONÂNCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

Da discussão e dos resultados encontrados nas seções anteriores, os operadores de estratégias quânticas $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$ podem ser implementados via RMN. Os operadores da forma $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(\theta_{A,B}, 0)$ são equivalentes à uma rotação em torno do eixo y por um ângulo de $\theta_{A,B}$, ou seja, $R_y(\theta_{A,B})$. Por exemplo, o operador de estratégia quântica $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(\frac{\pi}{2}, 0)$, é caracterizado pela seguinte rotação

$$R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{\mathbf{U}}_{A,B}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (4.12)$$

e representado pelo pulso de radiofrequência $[\frac{\pi}{2}]_y$.

Por outro lado, os operadores escritos da forma $\hat{\mathbf{U}}_{A,B}(0, \phi_{A,B})$ são equivalentes à uma rotação em torno do eixo z por um ângulo de $2\phi_{A,B}$, ou seja, $R_z(2\phi_{A,B})$. Esta rotação pode ser escrita da seguinte forma

$$R_z(2\phi_{A,B}) = R_{-x}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_y(2\phi_{A,B}) R_x\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.13)$$

Com base no que foi apresentado na Seção 2.3.1 e a partir da Equação (2.44), a rotação $R_z(2\phi_{A,B})$ pode ser implementada por meio de pulsos de radiofrequência, onde

$$[2\phi_{A,B}]_z \Rightarrow \left[\frac{\pi}{2}\right]_x \rightarrow [2\phi_{A,B}]_y \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}. \quad (4.14)$$

Tomando o operador de estratégia quântica $\hat{Q}_{A,B} \equiv \hat{U}_{A,B} (0, \frac{\pi}{2})$ como exemplo, este é equivalente à seguinte rotação

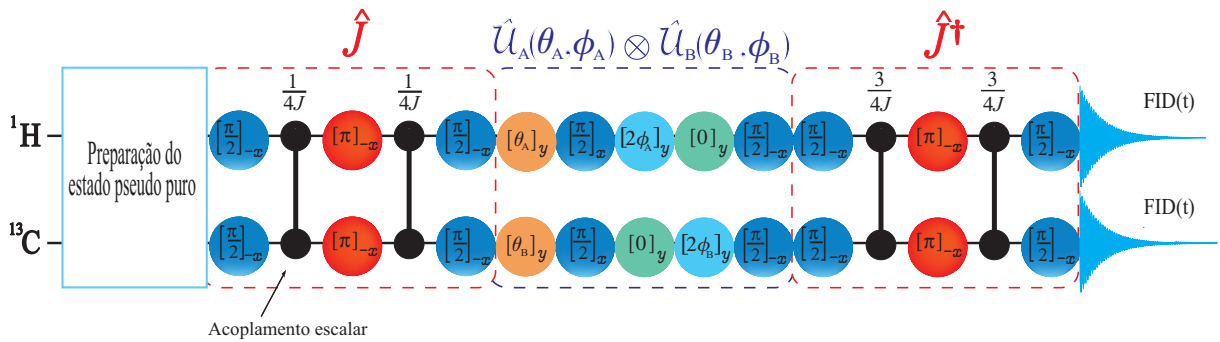
$$R_z(\pi) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \equiv \hat{Q}_{A,B}, \quad (4.15)$$

e pode ser implementado através da sequência de pulsos abaixo

$$[\pi]_z \Rightarrow \left[\frac{\pi}{2}\right]_x \rightarrow [\pi]_y \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}. \quad (4.16)$$

Com base no protocolo proposto por Du *et al.* (28), a sequência de pulsos para implementar o jogo da Batalha dos Sexos, onde a amostra de clorofórmio enriquecido ($^{13}\text{CHCl}_3$) foi escolhida, está apresentada e descrita na Figura 21.

Figura 21 – Sequência de pulsos para a implementação do jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica para o caso maximamente emaranhado ($\lambda = \frac{\pi}{2}$). A molécula escolhida foi a de clorofórmio enriquecido ($^{13}\text{CHCl}_3$). Este jogo começa com o estado puro $|O_A, O_B\rangle$, porém em um experimento de RMN é impossível começar em um estado puro. Desta forma é necessário preparar um estado pseudo puro por meio da sequência de pulsos apresentada na Seção 2.6.2. Para implementar o operador $\hat{J}$ aplica-se um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}, 13\text{C}}$. Após a aplicação do pulso, o sistema evolui livremente por um tempo de $\frac{1}{4J}$, onde $J = 216$ Hz é a constante de acoplamento escalar entre o ^1H e o ^{13}C . Após a evolução, um pulso de $[\pi]_{-x}^{1\text{H}, 13\text{C}}$ é aplicado. Novamente o sistema evolui por um tempo de $\frac{1}{4J}$ e por fim um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}, 13\text{C}}$ é executado. Para a implementação dos operadores de estratégias quânticas $\hat{U}_{A,B}(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$, aplica-se um pulso de $[\theta_A]_y^{1\text{H}}$ e $[\theta_B]_y^{13\text{C}}$, respectivamente. Depois, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_x^{1\text{H}, 13\text{C}}$ é executado. Logo em seguida, um pulso de $[2\phi_A]_y^{1\text{H}}$ e $[0]_y^{13\text{C}}$ no qbit do ^1H e do ^{13}C é aplicado. Após a aplicação destes pulsos, aplica-se um pulso de $[0]_y^{1\text{H}}$ e $[2\phi_B]_y^{13\text{C}}$ no qbit do ^1H e do ^{13}C . Por último, um pulso de $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}, 13\text{C}}$ é executado. A sequência de pulsos para implementação do operador $\hat{J}^\dagger$ é muito semelhante à sequência do operador $\hat{J}$, a diferença é que o sistema evolui por um tempo de $\frac{3}{4J}$. Após a aplicação da sequência de pulsos, o sinal é detectado por meio do FID(t).

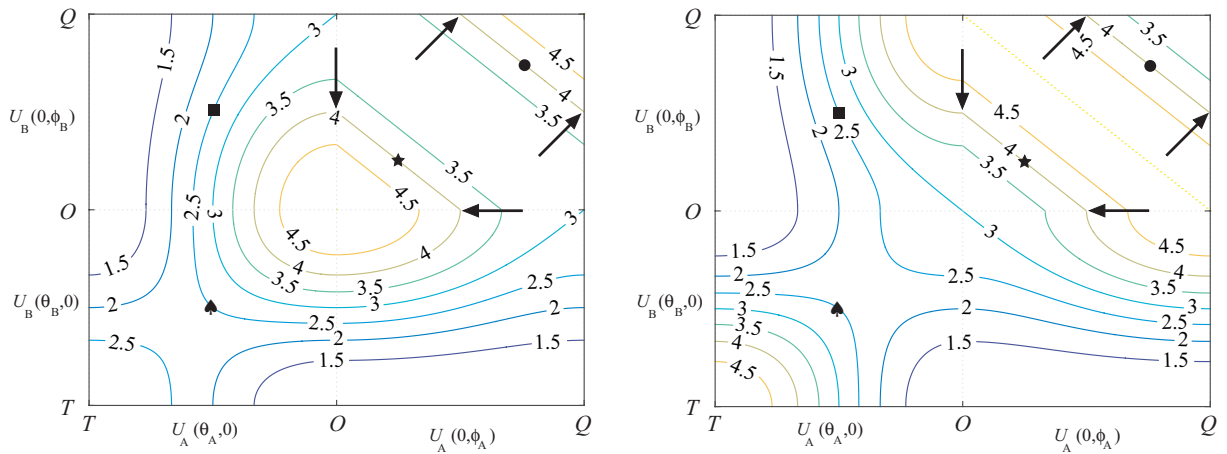


Fonte: A autora.

Dentro dessa proposta de implementação, escolheu-se como exemplo alguns operadores de estratégias quânticas, sendo estes: $\hat{U}_{A,B}(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\hat{U}_A(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $\hat{U}_B(0, \frac{\pi}{4})$, $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ e $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$. Estes operadores estão representados na Figura 22 por pontos nas curvas de nível

do *payoff* de Alice e Bob e a sequência de pulsos para implementá-los está ilustrada na Figura 23.

Figura 22 – A figura no quadro à esquerda (direita) representa a curva de nível do *payoff* de Alice (Bob). Os pontos ♠, ■, ★ e • representam os operadores de estratégias quânticas $\hat{U}_{A,B}(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\hat{U}_A(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $\hat{U}_B(0, \frac{\pi}{4})$, $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8})$ e $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8})$, respectivamente.



Fonte: A autora.

Por meio do procedimento de tomografia de estado quântico discutido na Seção 2.7, a matriz densidade após qualquer experimento pode ser obtida. Desta maneira, a Figura 24 (A₁)-(A₂) apresenta a simulação da matriz densidade que deverá ser encontrada quando a sequência de pulsos da Figura 23 (A)-(B) é aplicada. De modo análogo, a Figura 25 (A₃)-(A₄) apresenta a simulação da matriz densidade que deverá ser encontrada quando a sequência de pulsos da Figura 23 (C)-(D) é executada. Contudo, experimentalmente o espectrômetro não detecta nenhum sinal quando as matrizes densidade são caracterizadas por estados emaranhados³. Dentro dessa discussão, aplicou-se um dos pulsos de tomografia, o pulso de radiofrequência $[\frac{\pi}{2}]_{-x}^{1H} [\frac{\pi}{2}]_{-y}^{13C}$ (que corresponde ao 6º experimento da Tabela 1) antes do FID(*t*) da Figura 23 ser detectado. Portanto, a simulação das respectivas matrizes densidade são ilustradas na Figura 24 (B₁)-(B₂) e na Figura 25 (B₃)-(B₄). Os espectros do Hidrogênio e do Carbono que deverão ser detectados experimentalmente após o pulso $[\frac{\pi}{2}]_{-x}^{1H} [\frac{\pi}{2}]_{-y}^{13C}$ ser executado, são apresentados na Figura 24 (C₁)-(C₂) e Figura 25 (C₃)-(C₄).

Ainda dentro dessa proposta, será possível mapear alguns pontos nas curvas de nível do *payoff* de Alice e de Bob. Cada ponto corresponde a um operador de estratégia quântica escolhido por Alice e Bob. Dados os operadores, é possível determinar o respectivo estado quântico. A Figura 26 apresenta alguns desses pontos. Dentre estes, escolheu-se o operador de estratégia quântica $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{4})$, o qual é caracterizado pelo vetor de estado $|T_A, T_B\rangle$. Deste vetor de estado, a matriz densidade e os respectivos espectros são apresentados na Figura 26

³ A implementação está sendo proposta para o caso em que o jogo está maximamente emaranhado. Além disso, nota-se que os elementos detectáveis são $x_3 - ix_{12}$ e $x_7 - ix_{15}$ para o 1H e $x_2 - ix_{11}$ e $x_9 - ix_{16}$ para o ^{13}C . Portanto, percebe-se da Figura 24 (A₁)-(A₂) que estes elementos são nulos, por isso nenhum sinal será detectado.

(A)-(B). Por meio do procedimento de tomografia de estado quântico apresentado na Seção 2.7 e da Tabela 1, foi possível simular a matriz densidade para cada pulso aplicado e o respectivo espectro que deve ser obtido experimentalmente. A simulação se encontra nas Figuras 27-28.

Portanto, desta seção se conclui que o jogo da Batalha dos Sexos pode ser implementado via a técnica de Ressonância Magnética Nuclear. Desta maneira será possível ter um controle quântico sobre o jogo. Nesse sentido, as potencialidades do controle quântico de sistemas de spins nucleares poderão ser exploradas, além disso eles podem ser adaptados para aplicações e testes dos fundamentos da Teoria dos Jogos Quânticos.

Figura 23 – (A)-(B)-(C)-(D) Sequência de pulsos para implementar o operador de estratégia quântica $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{8}) - \hat{U}_{A,B}(0, \frac{3\pi}{8}) - \hat{U}_{A,B}(\frac{\pi}{2}, 0) - \hat{U}_A(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $\hat{U}_B(0, \frac{\pi}{4})$. A preparação do estado pseudo puro é feita por meio da sequência de pulsos apresentada na Seção 2.6.2. A constante $J = 216$ Hz. Após a aplicação da sequência de pulsos o sinal é detectado por meio do FID(t).

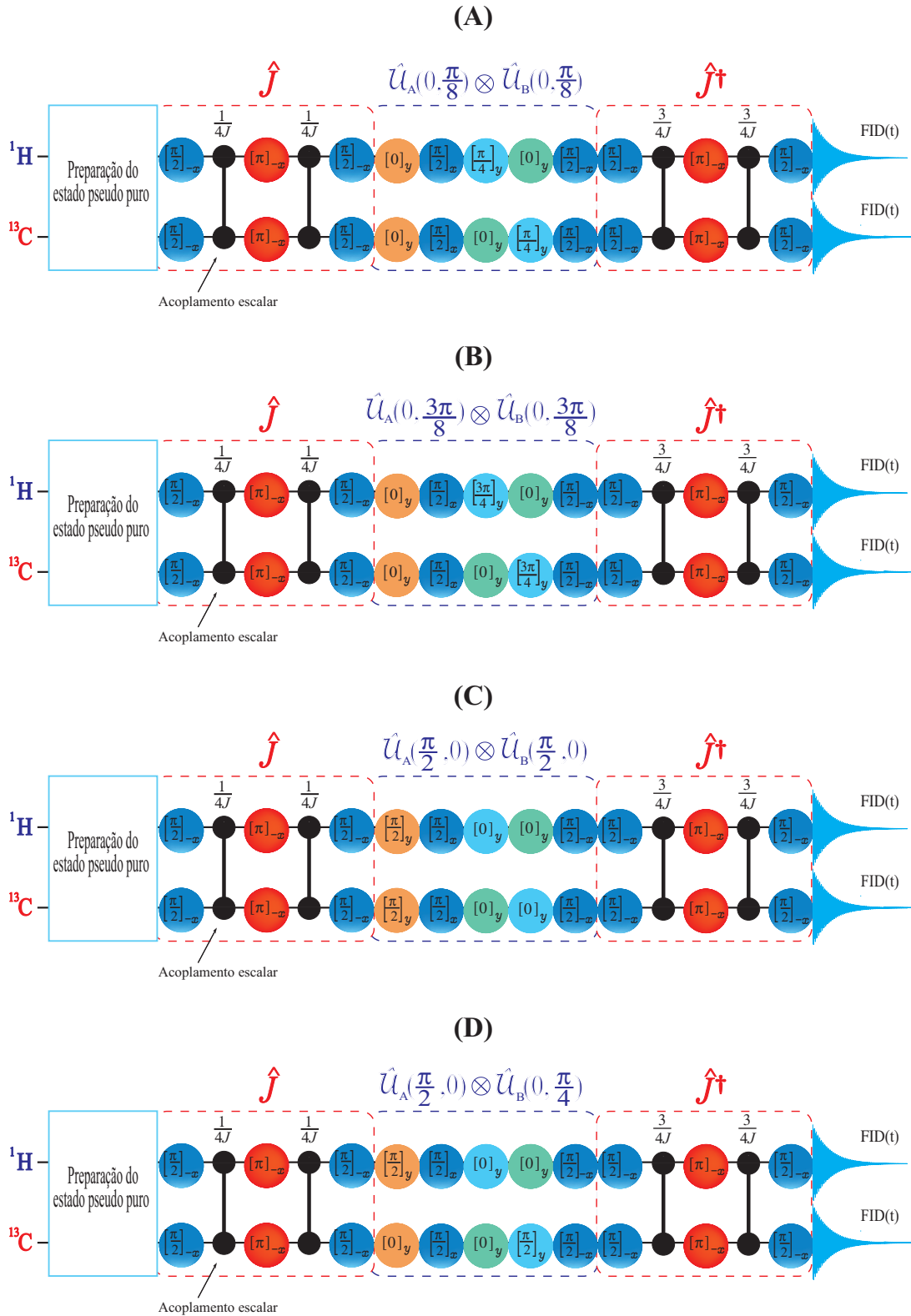
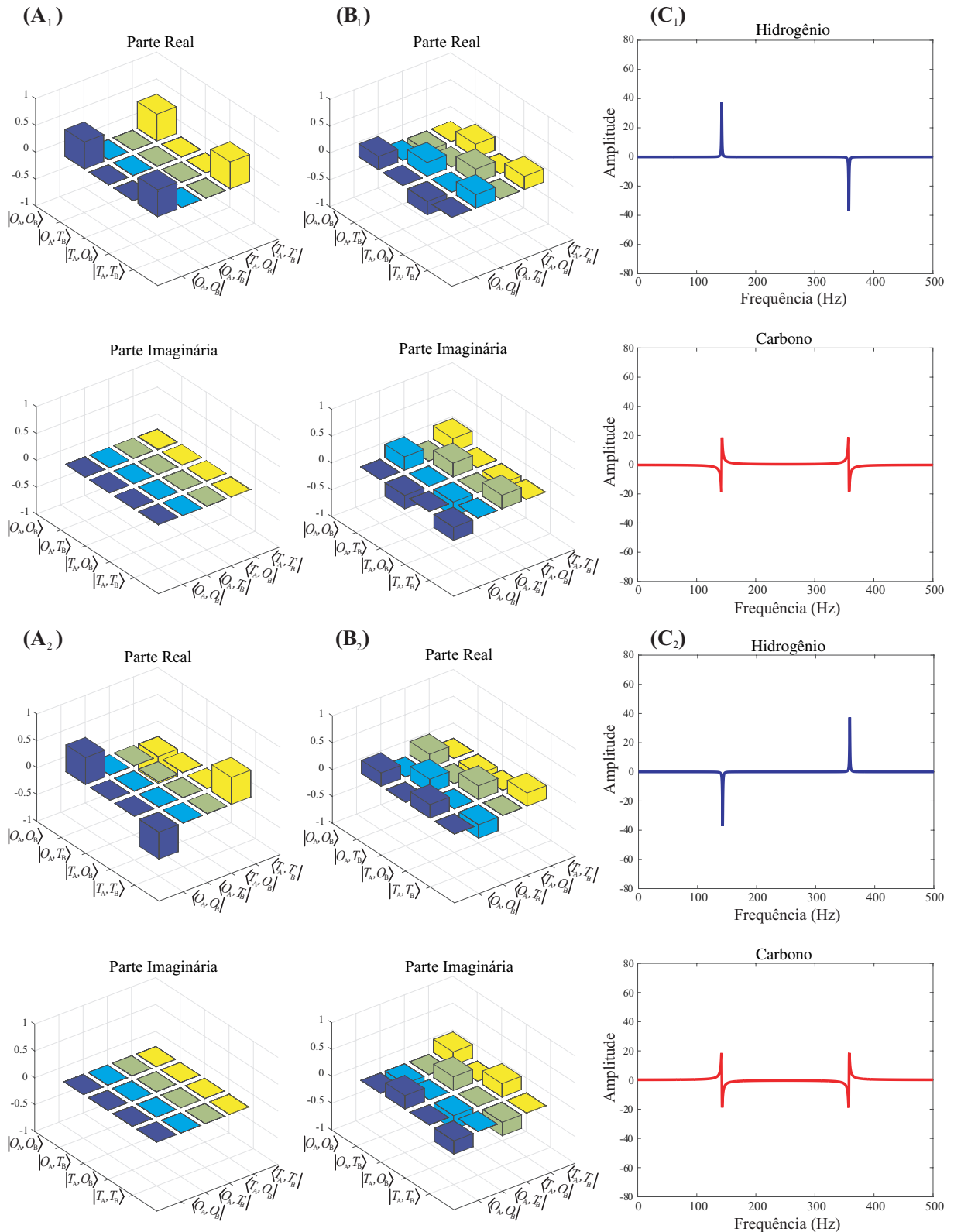
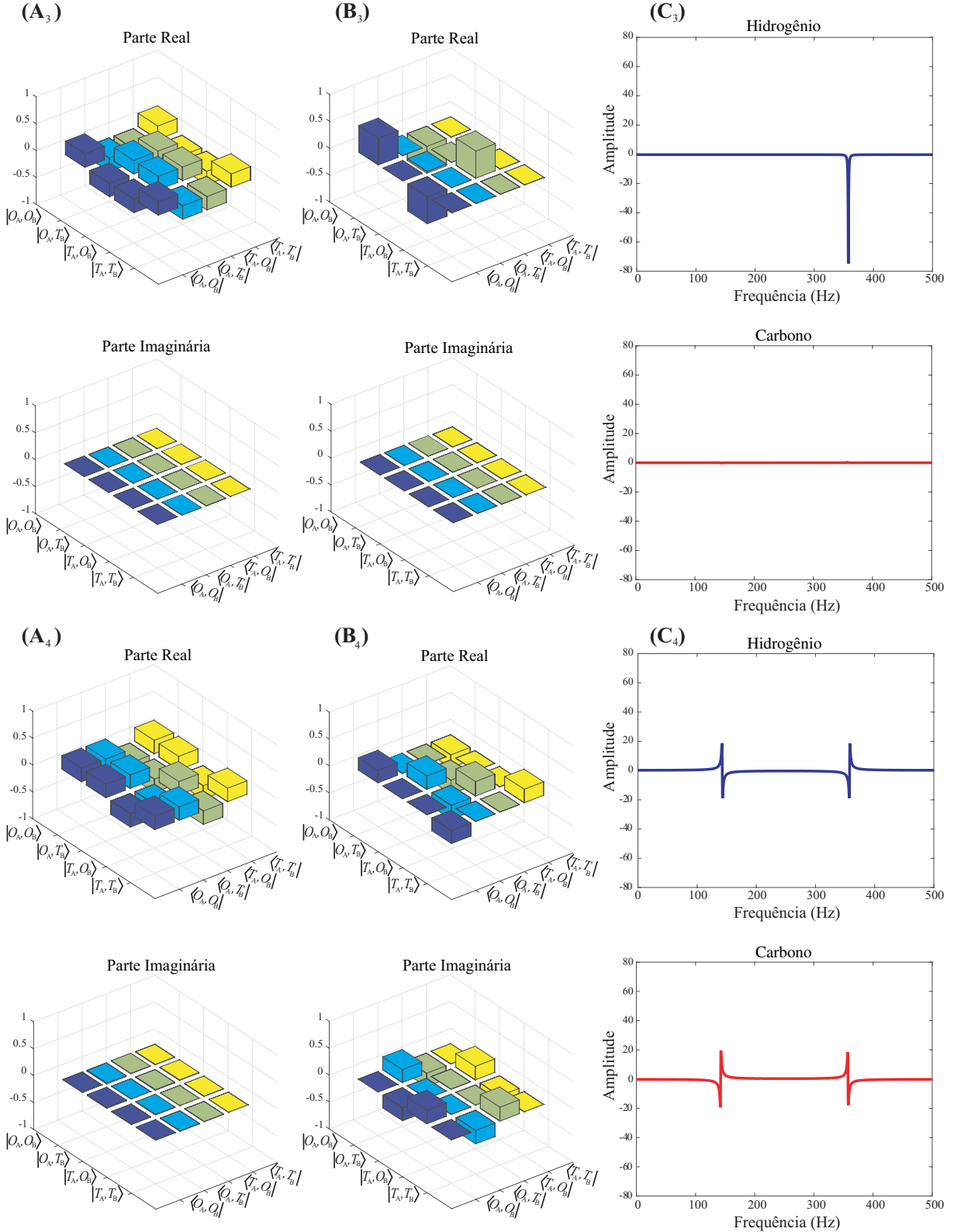


Figura 24 – (A₁)-(A₂) Simulação da matriz densidade que deverá ser detectada após a aplicação da sequência de pulsos da Figura 23 (A)-(B). (B₁)-(B₂) Simulação da matriz densidade que corresponderá com a aplicação do pulso de radiofrequência $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}}$ antes do FID(*t*) da Figura 23 (A)-(B) ser detectado. (C₁)-(C₂) Simulação dos espectros do núcleo de Hidrogênio, ¹H, e do Carbono, ¹³C que deverão ser obtidos experimentalmente.



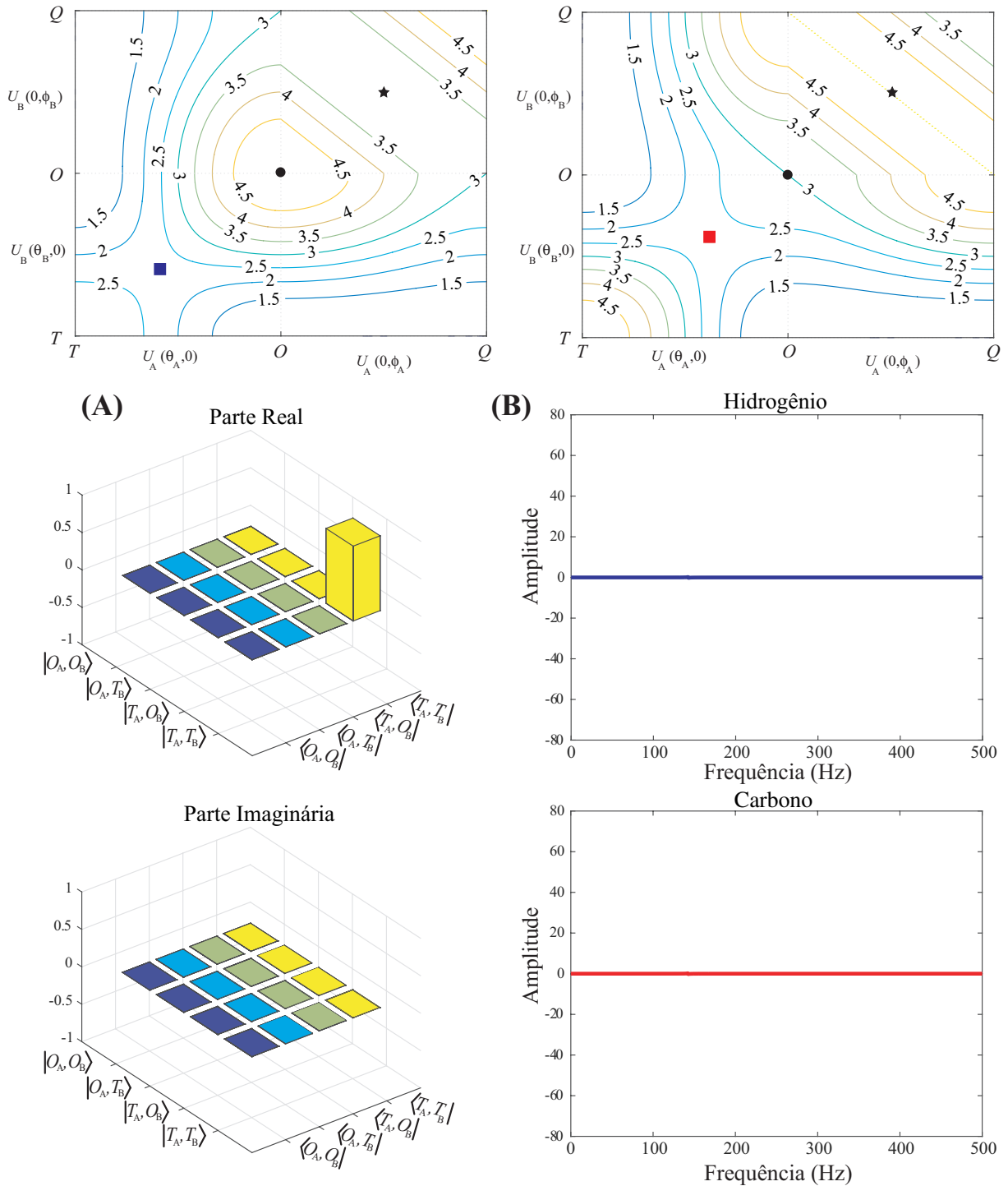
Fonte: A autora.

Figura 25 – (A₃)-(A₄) Simulação da matriz densidade que deverá ser detectada após a aplicação da sequência de pulsos da Figura 23 (C)-(D). (B₃)-(B₄) Simulação da matriz densidade que corresponderá com a aplicação do pulso de radiofrequência $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{13\text{C}}$ antes do FID(*t*) da Figura 23 (C)-(D) ser detectado. (C₃)-(C₄) Simulação dos espectros do núcleo de Hidrogênio, ¹H, e do Carbono, ¹³C que deverão ser obtidos experimentalmente.



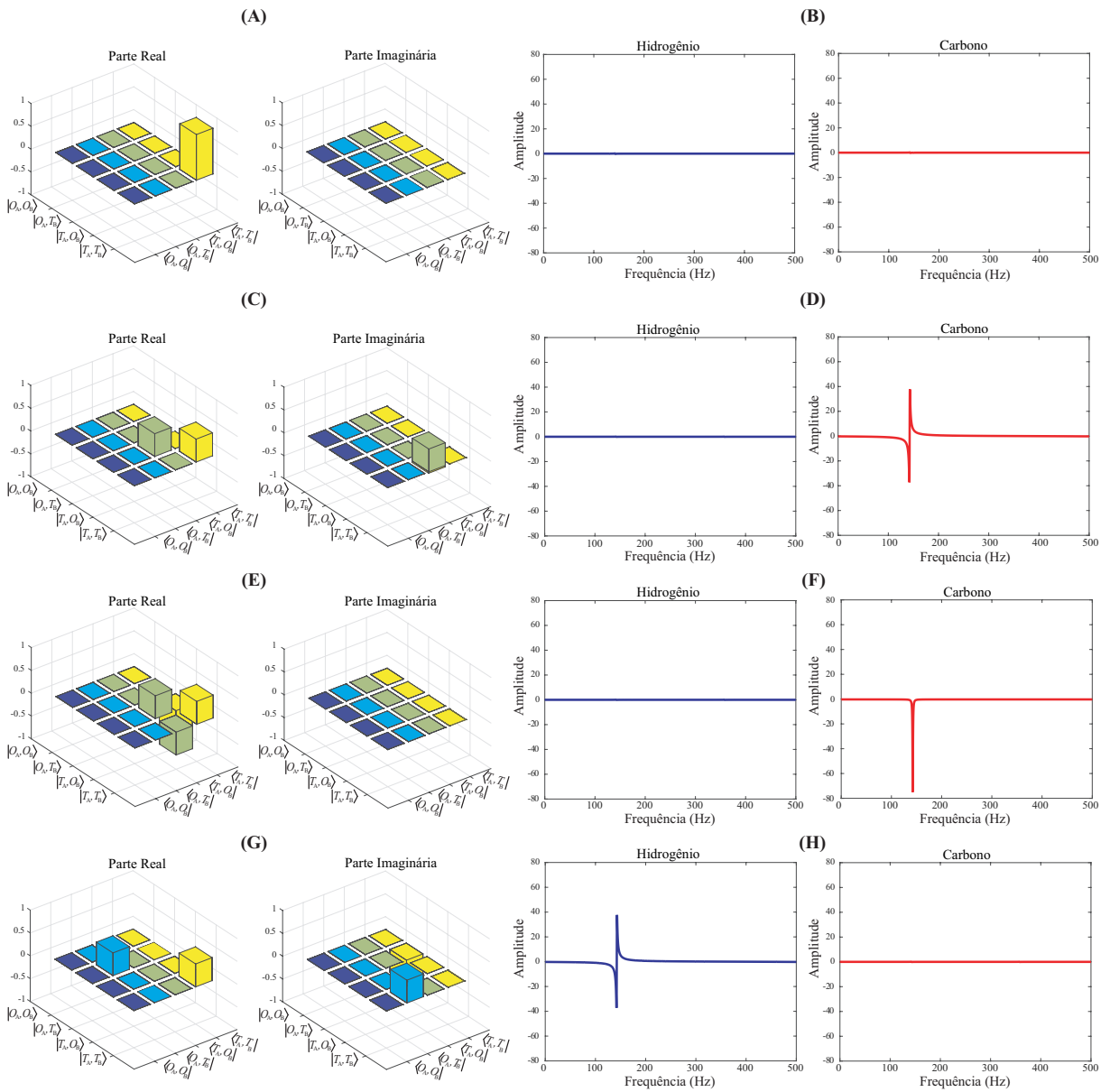
Fonte: A autora.

Figura 26 – A figura no quadro à esquerda (direita) representa a curva de nível do *payoff* de Alice (Bob). Os pontos ■, ■, • e ★ representam os seguintes operadores de estratégias e estados quânticos: ■ $\hat{U}_{A,B}(\frac{20\pi}{35}, 0)$ e $0.3887|O_A, O_B\rangle - 0.4875|O_A, T_B\rangle - 0.4875|T_A, O_B\rangle + 0.6113|T_A, T_B\rangle$; ■ $\hat{U}_{A,B}(\frac{13\pi}{35}, 0)$ e $0.6965|O_A, O_B\rangle - 0.4598|O_A, T_B\rangle - 0.4598|T_A, O_B\rangle + 0.3035|T_A, T_B\rangle$; • $\hat{U}_{A,B}(0, 0)$ e $|O_A, O_B\rangle$; ★ $\hat{U}_{A,B}(0, \frac{\pi}{4})$ e $|T_A, T_B\rangle$. (A) Parte real e imaginária da matriz densidade referente ao estado quântico $|T_A, T_B\rangle$. (B) Simulação dos espectros do Hidrogênio e do Carbono que deverão ser detectados experimentalmente.



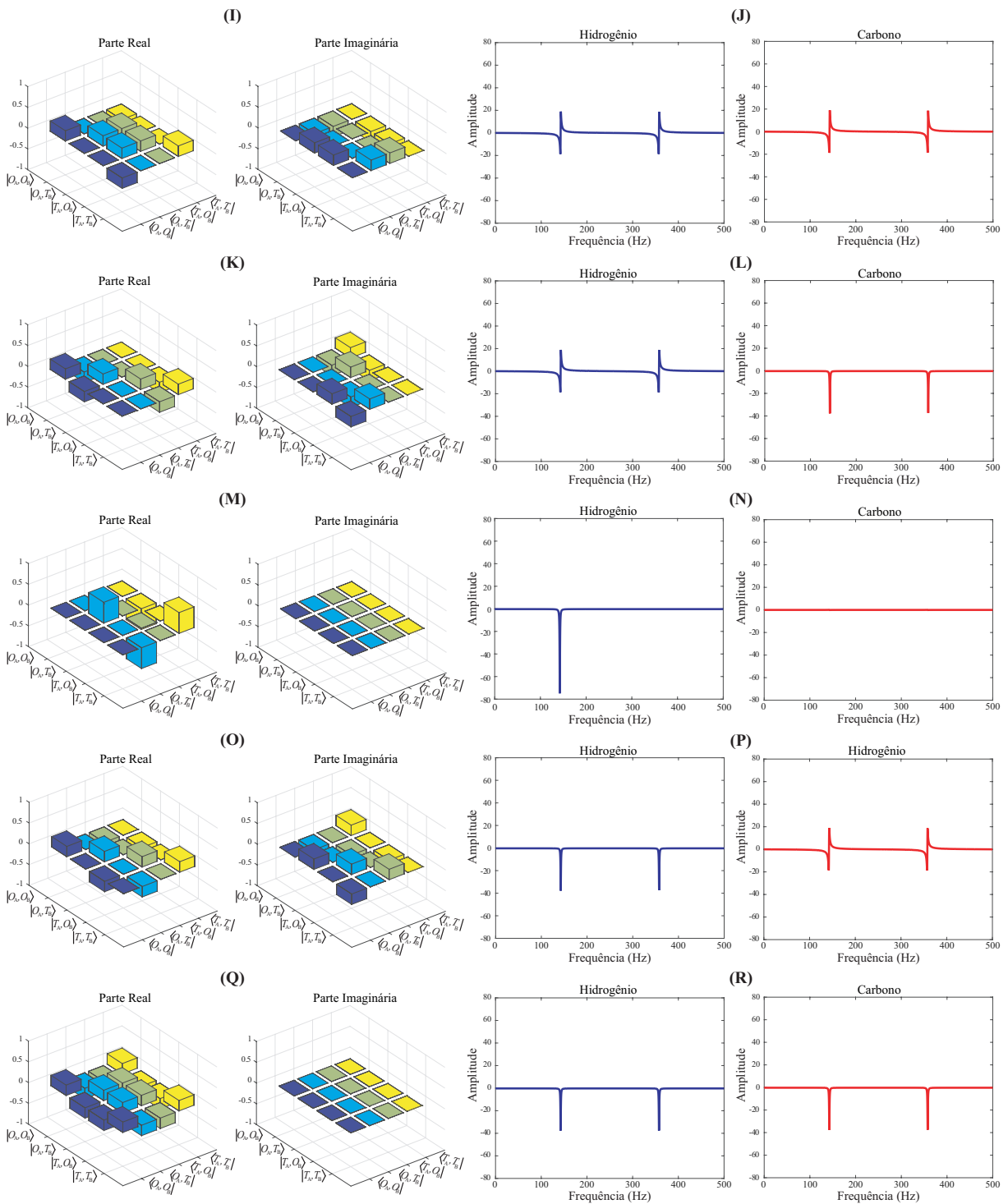
Fonte: A autora.

Figura 27 – Esta figura apresenta a simulação da matriz densidade e dos respectivos espectros do Hidrogênio e Carbono que devem ser obtidos após a aplicação de cada experimento da Tabela 1, a qual foi discutida e apresentada na Seção 2.7. (A)-(B) 1º Experimento, aplicação do pulso $[0]_{-x}^{1\text{H},13\text{C}}$. (C)-(D) 2º Experimento, corresponde a execução do pulso $[0]_{-x}^{1\text{H}}$ e $[\frac{\pi}{2}]_{-x}^{13\text{C}}$. (E)-(F) 3º Experimento, aplicação do pulso $[0]_{-x}^{1\text{H}}$ e $[\frac{\pi}{2}]_{-y}^{13\text{C}}$. (G)-(H) 4º Experimento, o pulso $[\frac{\pi}{2}]_{-x}^{1\text{H}}$ e $[0]_{-x}^{13\text{C}}$ foi aplicado.



Fonte: A autora.

Figura 28 – Esta figura é a continuidade da aplicação dos experimentos da Tabela 1 da Figura 27. **(I)-(J)** 5º Experimento, o qual corresponde com a aplicação do pulso $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}}$ e $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{13\text{C}}$. **(K)-(L)** 6º Experimento, o pulso $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-x}^{1\text{H}}$ e $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{13\text{C}}$ foi executado. **(L)-(M)** 7º Experimento, aplicação do pulso $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{1\text{H}}$ e $\left[0\right]_{-x}^{13\text{C}}$. **(M)-(N)** 8º Experimento, o pulso $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{1\text{H}}$ e $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{13\text{C}}$ foi aplicado. **(O)-(P)** 9º Experimento, corresponde com a aplicação do pulso $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{1\text{H}}$ e $\left[\frac{\pi}{2}\right]_{-y}^{13\text{C}}$.



Fonte: A autora.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho implementou-se o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica via o protocolo de Eisert *et al.*, onde analisou-se o jogo de modo que as superposições de estratégias estivessem maximamente emaranhadas. Além disso, demonstrou-se que o máximo emaranhamento otimizou os equilíbrios do jogo da Batalha dos Sexos. Estes equilíbrios estão em uma região entre os operadores de estratégias quânticas $\hat{O}_{A,B}$ e $\hat{Q}_{A,B}$. Dentro dos resultados teóricos encontrados, existe uma condição de restrição das escolhas dos parâmetros $\phi_{A,B}$ dos operadores de estratégias quânticas $\hat{U}_{A,B}(0, \phi_{A,B})$ para que os *payoffs* de ambos os jogadores sejam iguais a 4. Desta condição, os perfis de operadores de estratégias quânticas satisfazem a condição de ótimo de Pareto. Além disso, verificou-se que a condição proposta por Benjamin não é satisfeita, salvo a situação trivial de $\phi_A = \phi_B = 0$, que não traz nenhuma nova interpretação, portanto, não existe nenhuma região em que o operador de estratégia quântica de Bob é igual ao conjugado do operador de estratégia quântica de Alice. Para dois casos em particular, em que os jogadores escolhem o perfil de operadores de estratégias quânticas $(\hat{U}_A(0, \frac{\pi}{8}), \hat{U}_B(0, \frac{\pi}{8}))$ ou $(\hat{U}_A(0, \frac{3\pi}{8}), \hat{U}_B(0, \frac{3\pi}{8}))$, o dilema do jogo pode ser resolvido. Estes dois perfis de operadores representam que Alice e Bob escolhem o mesmo operador de estratégia quântica para manipular sua estratégia. Classicamente isso representaria que Alice e Bob escolhem outra alternativa para ficarem juntos, tal como ir à Ópera para assistir Televisão e tomarem café, pois o casal fará alguma atividade sábado à noite e terão satisfação igual.

Para finalizar, foi possível propor uma implementação do jogo da Batalha dos Sexos via a técnica de Ressonância Magnética Nuclear, onde é possível explorar o controle quântico do jogo.

5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Com base nas conclusões apresentadas acima, pode-se listar algumas perspectivas futuras

- Implementar experimentalmente o jogo da Batalha dos Sexos na versão quântica e comparar com os resultados teóricos.
- Implementação de ferramentas básicas para estudos de processamento de Informação Quântica via Ressonância Magnética Nuclear.
- Implementação de protocolos de Informação Quântica: Teoria dos Jogos Quânticos.
- Aprimorar metodologias computacionais para o desenvolvimento de sequências de pulsos, na procura de um controle quântico ótimo de sistemas de dois e três qbits em amostras líquidas via a técnica de Ressonância Magnética Nuclear.

APÊNDICE A – PAYOFF ESPERADO PARA g JOGADORES

Considere o caso em qual há três jogadores, o conjunto de estratégias puras do jogador 1 é $S_1 = \{s_{1,1}, s_{1,2}, s_{1,3}\}$, o qual possui uma distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_1 = (p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3})$. O conjunto de estratégias puras do jogador 2 é $S_2 = \{s_{2,1}, s_{2,2}\}$, possuindo uma distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_2 = (p_{2,1}, p_{2,2})$. Por fim, o conjunto de estratégias puras do jogador 3 é $S_3 = \{s_{3,1}, s_{3,2}, s_{3,3}\}$, que possui uma distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_3 = (p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3})$. Portanto, da Equação (3.12), o *payoff* esperado é escrito como

$$\begin{aligned}
 \bar{\$}_i(\mathbf{p}) &= \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=1}^2 \sum_{k_3=1}^3 p_{1,k_1} p_{2,k_2} p_{3,k_3} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, s_{3,k_3}), \\
 &= \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=1}^2 p_{1,k_1} p_{2,k_2} p_{3,1} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, s_{3,1}) + \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=1}^2 p_{1,k_1} p_{2,k_2} p_{3,2} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, s_{3,2}) \\
 &\quad + \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=1}^2 p_{1,k_1} p_{2,k_2} p_{3,3} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,k_2}, s_{3,3}), \\
 &= \sum_{k_1=1}^3 (p_{1,k_1} p_{2,1} p_{3,1} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,k_1} p_{2,2} p_{3,1} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,2}, s_{3,1})) \\
 &\quad + \sum_{k_1=1}^3 (p_{1,k_1} p_{2,1} p_{3,2} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,k_1} p_{2,2} p_{3,2} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,2}, s_{3,2})) \\
 &\quad + \sum_{k_1=1}^3 (p_{1,k_1} p_{2,1} p_{3,3} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,k_1} p_{2,2} p_{3,3} \$_i(s_{1,k_1}, s_{2,2}, s_{3,3})), \\
 &= p_{1,1} p_{2,1} p_{3,1} \$_i(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,1} p_{2,2} p_{3,1} \$_i(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
 &\quad + p_{1,2} p_{2,1} p_{3,1} \$_i(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,2} p_{2,2} p_{3,1} \$_i(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
 &\quad + p_{1,3} p_{2,1} p_{3,1} \$_i(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,3} p_{2,2} p_{3,1} \$_i(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
 &\quad + p_{1,1} p_{2,1} p_{3,2} \$_i(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,1} p_{2,2} p_{3,2} \$_i(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,2}) \\
 &\quad + p_{1,2} p_{2,1} p_{3,2} \$_i(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,2} p_{2,2} p_{3,2} \$_i(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,2}) \\
 &\quad + p_{1,3} p_{2,1} p_{3,2} \$_i(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,3} p_{2,2} p_{3,2} \$_i(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,2}) \\
 &\quad + p_{1,1} p_{2,1} p_{3,3} \$_i(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,1} p_{2,2} p_{3,3} \$_i(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
 &\quad + p_{1,2} p_{2,1} p_{3,3} \$_i(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,2} p_{2,2} p_{3,3} \$_i(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
 &\quad + p_{1,3} p_{2,1} p_{3,3} \$_i(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,3} p_{2,2} p_{3,3} \$_i(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,3}). \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Desta forma, da Equação (A.1) o *payoff* do jogador 1 é escrito como

$$\begin{aligned}
\bar{\$}_1(\mathbf{p}) = & p_{1,1}p_{2,1}p_{3,1}\$_1(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,1}\$_1(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,1}\$_1(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,1}\$_1(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,1}\$_1(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1}\$_1(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_1(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,3}\$_1(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3}\$_1(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,3}\$_1(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,3}\$_1(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,3}\$_1(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,3}\$_1(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,3}). \tag{A.2}
\end{aligned}$$

O *payoff* do jogador 2 é dado por

$$\begin{aligned}
\bar{\$}_2(\mathbf{p}) = & p_{1,1}p_{2,1}p_{3,1}\$_2(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,1}\$_2(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,1}\$_2(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,1}\$_2(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,1}\$_2(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1}\$_2(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_2(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,3}\$_2(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3}\$_2(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,3}\$_2(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,3}\$_2(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,3}\$_2(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,3}\$_2(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,3}), \tag{A.3}
\end{aligned}$$

e por fim, o *payoff* do jogador 3 é

$$\begin{aligned}
\bar{\$}_3(\mathbf{p}) = & p_{1,1}p_{2,1}p_{3,1}\$_3(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,1}\$_3(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,1}\$_3(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,1}\$_3(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,1}\$_3(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,1}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1}\$_3(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,1}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,2}\$_3(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,2}) \\
& + p_{1,1}p_{2,1}p_{3,3}\$_3(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3}\$_3(s_{1,1}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,2}p_{2,1}p_{3,3}\$_3(s_{1,2}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,2}p_{2,2}p_{3,3}\$_3(s_{1,2}, s_{2,2}, s_{3,3}) \\
& + p_{1,3}p_{2,1}p_{3,3}\$_3(s_{1,3}, s_{2,1}, s_{3,3}) + p_{1,3}p_{2,2}p_{3,3}\$_3(s_{1,3}, s_{2,2}, s_{3,3}). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Portanto, embora somente jogos de dois jogadores com duas estratégias cada foram analisados neste trabalho, a Equação (3.12) é válida para g jogadores com m_i estratégias cada um.

APÊNDICE B – ESFERA DE BLOCH

Qualquer sistema quântico de dois níveis pode caracterizar um qbit, tal como um sistema de fótons polarizados, partículas de spin $1/2$ e átomos excitados e átomos no estado fundamental.

Como discutido na Seção 2.6.1 uma base conveniente para representar um sistema quântico de dois níveis é: $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a qual é chamada de base computacional. Um estado puro geral de um qbit nesta base é escrito de acordo com a Equação (2.67), e por meio da Equação (2.68), pode-se escrever

$$|\mathcal{K}\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + \exp[i\phi] \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Os parâmetros angulares θ e ϕ definem um ponto na superfície de uma esfera unitária tridimensional. Esta esfera é denominada esfera de Bloch (63, 171).

Dentro deste contexto, a representação da matriz densidade para estados puros é dada conforme

$$\hat{\rho} = |\mathcal{K}\rangle \langle \mathcal{K}| = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \exp[-i\phi] \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \\ \exp[i\phi] \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo as seguintes relações trigonométricas

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}, \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2},$$

na Equação (B.2), escreve-se

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \sin\theta \cos\phi \hat{\sigma}_x + \sin\theta \sin\phi \hat{\sigma}_y + \cos\theta \hat{\sigma}_z) = \frac{1}{2} (\hat{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{B.3})$$

onde $\vec{r} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ é um vetor unitário e é denominado vetor de Bloch. Abaixo tem-se alguns exemplos

- $\theta = 0$,

$$|\mathcal{K}\rangle = |0\rangle \iff \vec{r} = (0, 0, 1), \quad (\text{B.4})$$

- $\theta = \pi$,

$$|\mathcal{K}\rangle = |1\rangle \iff \vec{r} = (0, 0, -1), \quad (\text{B.5})$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$|\mathcal{K}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle) \iff \vec{r} = (0, 1, 0), \quad (\text{B.6})$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{3\pi}{2}$

$$|\mathcal{X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle) \iff \vec{r} = (0, -1, 0), \quad (\text{B.7})$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = 0$

$$|\mathcal{X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \iff \vec{r} = (1, 0, 0), \quad (\text{B.8})$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$

$$|\mathcal{X}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \iff \vec{r} = (-1, 0, 0), \quad (\text{B.9})$$

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$|\mathcal{X}\rangle = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) |0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + i) \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) |1\rangle \iff \vec{r} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (\text{B.10})$$

REFERÊNCIAS

- 1 NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. [S.l.]: Princeton university press, 2007.
- 2 NASH, J. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, Annals of Mathematics, v. 54, n. 2, p. 286–295, 1951. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1969529>>.
- 3 PARKER, G. A.; SMITH, J. M. Optimality theory in evolutionary biology. *Nature*, v. 348, n. 6296, p. 27–33, 1990.
- 4 LAFFONT, J. J. Game theory and empirical economics: The case of auction data. *European Economic Review*, v. 41, n. 1, p. 1–35, 1997. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014292196000177>>.
- 5 MCNICKLE, G. G.; DYBZINSKI, R. Game theory and plant ecology. *Ecology Letters*, v. 16, n. 4, p. 545–555, April 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/ele.12071>>.
- 6 CHEON, T.; TSUTSUI, I. Classical and quantum contents of solvable game theory on hilbert space. *Physics Letters A*, v. 348, n. 3, p. 147 – 152, 2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960105013344>>.
- 7 EKERT, A. K. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 67, p. 661–663, August 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>>.
- 8 VLACHOS, P.; KARAFYLLIDIS, I. G. Quantum game simulator, using the circuit model of quantum computation. *Computer Physics Communications*, v. 180, n. 10, p. 1990 – 1998, 2009. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001046550900160X>>.
- 9 MCELIECE, R. J. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. *Deep Space Network Progress Report*, 1978.
- 10 QI, B. et al. Time-shift attack in practical quantum cryptosystems. *Quantum Information & Computation*, Rinton Press, Incorporated, v. 7, n. 1, p. 73–82, 2007.
- 11 MAKAROV, V.; ANISIMOV, A.; SKAAR, J. Effects of detector efficiency mismatch on security of quantum cryptosystems. *Physical Review A*, APS, v. 74, n. 2, p. 022313, 2006.
- 12 MAKAROV, V.; HJELME, D. R. Faked states attack on quantum cryptosystems. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 52, n. 5, p. 691–705, 2005.
- 13 KLARREICH, E. Playing by quantum rules. *Nature*, Nature, v. 414, p. 244–245, Aug 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/35104702>>.
- 14 BECKER, R. A. et al. Dynamics of the nash map in the game of matching pennies. *Journal of Difference Equations and Applications*, Taylor & Francis, v. 13, n. 2-3, p. 223–235, 2007.
- 15 WIKIPÉDIA. *Dilema — Wikipédia, a enciclopédia livre*. 2017. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Dilema&oldid=48825407>>.

- 16 SHUBIK, M. Game theory, behavior, and the paradox of the prisoner's dilemma: Three solutions. *Journal of Conflict Resolution*, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 14, n. 2, p. 181–193, 1970.
- 17 FEICHTINGER, G.; WIRL, F. A dynamic variant of the battle of the sexes. *International Journal of Game Theory*, Springer, v. 22, n. 4, p. 359–380, 1993.
- 18 SZABÓ, G.; SZOLNOKI, A.; IZSÁK, R. Rock-scissors-paper game on regular small-world networks. *Journal of physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 37, n. 7, p. 2599, 2004.
- 19 RAPOPORT, A.; CHAMMAH, A. M. The game of chicken. *American Behavioral Scientist*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 10, n. 3, p. 10–28, 1966.
- 20 PAPPA, A. et al. Practical quantum coin flipping. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 5, p. 052305, 2011.
- 21 BERLIN, G. et al. Fair loss-tolerant quantum coin flipping. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 6, p. 062321, 2009.
- 22 BERLIN, G. et al. Experimental loss-tolerant quantum coin flipping. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 2, p. 561, 2011.
- 23 MEYER, D. A. Quantum strategies. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 82, p. 1052–1055, February 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.1052>.
- 24 IQBAL, A.; ABBOTT, D. Quantum matching pennies game. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 78, n. 1, p. 014803–014803, 2009.
- 25 SALIMI, S.; SOLTANZADEH, M. M. Investigation of quantum roulette. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 7, n. 03, p. 615–626, 2009.
- 26 XUE, P. et al. Experimental quantum-walk revival with a time-dependent coin. *Physical Review Letters*, APS, v. 114, n. 14, p. 140502, 2015.
- 27 EISERT, J.; WILKENS, M.; LEWENSTEIN, M. Quantum games and quantum strategies. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 83, p. 3077–3080, Oct 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.3077>.
- 28 DU, J. et al. Experimental realization of quantum games on a quantum computer. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 88, p. 137902, March 2002. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.137902>.
- 29 PATERNOSTRO, M.; TAME, M. S.; KIM, M. S. Hybrid cluster state proposal for a quantum game. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 226, 2005. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1367-2630/7/i=1/a=226>.
- 30 PREVEDEL, R. et al. Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer. *New Journal of Physics*, v. 9, n. 6, p. 205, 2007. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1367-2630/9/i=6/a=205>.
- 31 PINHEIRO, A. R. C. et al. Vector vortex implementation of a quantum game. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 30, n. 12, p. 3210–3214, 2013.

- 32 MARINATTO, L.; WEBER, T. A quantum approach to static games of complete information. *Physics Letters A*, v. 272, n. 5, p. 291 – 303, 2000. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100004412>.
- 33 BENJAMIN, S. Comment on “a quantum approach to static games of complete information”. *Physics Letters A*, v. 277, n. 3, p. 180 – 182, 2000. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100007106>.
- 34 NAWAZ, A.; TOOR, A. H. Dilemma and quantum battle of sexes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 37, n. 15, p. 4437, 2004.
- 35 FRĄCKIEWICZ, P. The ultimate solution to the quantum battle of the sexes game. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, n. 36, p. 365305, 2009. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1751-8121/42/i=36/a=365305>.
- 36 ZHAO, J.; SZILAGYI, M. N.; SZIDAROVSKY, F. An n-person battle of sexes game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 14, p. 3669 – 3677, 2008. ISSN 0378-4371. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108002082>.
- 37 DENG, X. et al. Quantum games of opinion formation based on the marinatto-weber quantum game scheme. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 114, n. 5, p. 50012, 2016.
- 38 DU, J. et al. Nash equilibrium in the quantum battle of sexes game. *arXiv preprint quant-ph/0010050*, 2000.
- 39 DU, J. et al. Remark on quantum battle of the sexes game. *arXiv preprint quant-ph/0103004*, 2001.
- 40 NAWAZ, A.; TOOR, A. H. Dilemma and quantum battle of sexes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 15, p. 4437, 2004. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0305-4470/37/i=15/a=011>.
- 41 ABRAGAM, A. *The principles of nuclear magnetism*. [S.l.]: Oxford university press, 1961.
- 42 SARTHOUR, R. S. et al. *Computação quântica via ressonância magnética nuclear*. [S.l.: s.n.], Rio de Janeiro–Brasil, 2002.
- 43 SERRA, R. M.; OLIVEIRA, I. S. Nuclear magnetic resonance quantum information processing. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, v. 370, n. 1976, p. 4615–4619, 2012.
- 44 SUTER, D.; MAHESH, T. S. Spins as qubits: Quantum information processing by nuclear magnetic resonance. *The Journal of Chemical Physics*, v. 128, 02 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2838166>.
- 45 SLICHTER, C. P. *Principles of magnetic resonance with examples from solid state physics*. [S.l.]: Harper & Row, 1963.
- 46 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- 47 BULNES, J. D. et al. Quantum information processing through nuclear magnetic resonance. *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 35, p. 617 – 625, 09 2005. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332005000400006&nrm=iso.

- 48 OLIVEIRA, I. S. et al. *NMR quantum information processing*. [S.l.: s.n.].
- 49 EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. [S.l.: s.n.], 1994.
- 50 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Mecânica quântica moderna*. [S.l.]: bookman, 2013.
- 51 REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. [S.l.]: Waveland Press, 2009.
- 52 BONAGAMBA, T. J.; ZUCCHI, M. do R. *Prática: Ressonância Magnética Nuclear - RMN*. [S.l.: s.n.].
- 53 REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3ª. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro, Campus, 1982.
- 54 VANDERSYPEN, L. M.; CHUANG, I. L. Nmr techniques for quantum control and computation. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 76, n. 4, p. 1037, 2005.
- 55 BLUM, K. *Density matrix theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 64.
- 56 WIKIPEDIA. *Density matrix* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2017. Disponível em: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Density_matrix&oldid=807293284.
- 57 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1977.
- 58 SCHMIDT-ROHR, K.; SPIESS, H. W. *Multidimensional solid-state nmr and polymers*. [S.l.]: San Diego: Academic Press, 1996.
- 59 NETO, J. T. de C. *Tomografia de estado quântico via ressonância magnética nuclear através de rotações globais do sistema de spins*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2007.
- 60 ESTRADA, R. A. *Estudo de processos quânticos através da ressonância magnética nuclear em sistemas quadrupolares*. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2008.
- 61 BONK, F. A. *Tomografia de estados quânticos em sistemas de núcleos quadrupolares com spin 3/2: uma aplicação da ressonância magnética nuclear à computação quântica*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2005.
- 62 LEVITT, M. H. *Spin dynamics: basics of nuclear magnetic resonance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- 63 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- 64 SCHORN, C.; TAYLOR, B. J. *NMR-spectroscopy: Data acquisition*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- 65 JONES, J. A. Composite pulses in nmr quantum computation. *Journal of the Indian Institute of Science*, v. 89, n. 3, p. 303–308, 2012.
- 66 JACOBSEN, N. E. *NMR spectroscopy explained: simplified theory, applications and examples for organic chemistry and structural biology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

- 67 KOWALEWSKI, J.; MÄLER, L. *Nuclear spin relaxation in liquids: theory, experiments, and applications*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- 68 CALLAGHAN, P. T. *Principles of nuclear magnetic resonance microscopy*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 1993.
- 69 PRAVIA, M. et al. Observations of quantum dynamics by solution-state nmr spectroscopy. *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, Wiley Online Library, v. 11, n. 4, p. 225–238, 1999.
- 70 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 21, n. 6, p. 467–488, June 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- 71 DEUTSCH, D. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985. Disponível em: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/400/1818/97>.
- 72 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 74, p. 4091–4094, May 1995. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- 73 MONROE, C. et al. Demonstration of a fundamental quantum logic gate. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 75, p. 4714–4717, 1995. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4714>.
- 74 KNILL, E. Quantum gates using linear optics and postselection. *Physical Review A*, APS, v. 66, n. 5, p. 052306, 2002.
- 75 PLANTENBERG, J. H. et al. Demonstration of controlled-not quantum gates on a pair of superconducting quantum bits. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 447, n. 7146, p. 836, 2007.
- 76 CORY, D. G.; FAHMY, A. F.; HAVEL, T. F. Ensemble quantum computing by nmr spectroscopy. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 94, p. 1634–1639, March 1997.
- 77 GERSHENFELD, N. A.; CHUANG, I. L. Bulk spin-resonance quantum information. *Science*, v. 275, p. 350–356, January 1997.
- 78 NIELSEN, M.; KNILL, E.; LAFLAMME, R. Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 396, n. 6706, p. 52, 1998.
- 79 CORY, D. G. et al. Experimental quantum error correction. *Physical Review Letters*, v. 81, p. 2152–2155, 1998.
- 80 SOMAROO, S. et al. Quantum simulations on a quantum computer. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 82, p. 5381–5384, 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.5381>.
- 81 FANG, X. et al. Experimental implementation of dense coding using nuclear magnetic resonance. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 61, p. 022307, January 2000. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.61.022307>.
- 82 RASMUSEN, E. *Games and information*. [S.l.]: Blackwell Publishers, 2001.

- 83 MITRA, A.; SIVAPRIYA, K.; KUMAR, A. Experimental implementation of a three qubit quantum game with corrupt source using nuclear magnetic resonance quantum information processor. *Journal of Magnetic Resonance*, v. 187, n. 2, p. 306 – 313, 2007. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S109078070700167X>.
- 84 JOHNSON, N. F. Playing a quantum game with a corrupted source. *Physics Review A*, American Physical Society, v. 63, p. 020302, January 2001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.63.020302>.
- 85 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Computação quântica e informação quântica*. [S.l.]: Bookman, 2005.
- 86 PRESKILL, J. Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation. *California Institute of Technology*, v. 16, 1998.
- 87 PRICE, M. D. et al. Information transfer on an nmr quantum information processor. *Concepts in Magnetic Resonance Part A*, v. 13, n. 2, p. 151–158, May 2001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/cmr.1005>.
- 88 BULNES, J. J. D. *Emaranhamento e Separabilidade de Estados em Computação quântica por Ressonância Magnética Nuclear*. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2005.
- 89 VOGEL, K.; RISKEN, H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. *Physical Review A*, v. 40, p. 2847–2849, 1989.
- 90 CHUANG, I. L. et al. Bulk quantum computation with nuclear magnetic resonance: theory and experiment. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 454, n. 1969, p. 447–467, 1998. Disponível em: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/454/1969/447>.
- 91 LONG, G. L.; YAN, H. Y.; SUN, Y. Analysis of density matrix reconstruction in nmr quantum computing. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, v. 3, n. 6, p. 376, 2001. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1464-4266/3/i=6/a=305>.
- 92 LEE, J. S. The quantum state tomography on an nmr system. *Physics Letters A*, v. 305, n. 6, p. 349 – 353, 2002. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960102014792>.
- 93 ALMEIDA, A. N. de. *Teoria dos jogos: As origens e os fundamentos da teoria dos jogos*. UNIMESP-Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, 2006.
- 94 WIKIPÉDIA. *Duopólio — Wikipédia, a enciclopédia livre*. 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Duop%C3%B3lio&oldid=49602125>.
- 95 FIANI, R. *Teoria dos jogos: para cursos de administração e economia*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2015.
- 96 FERREIRA, F. A.; FERREIRA, F. Equilíbrio de nash versus ótimo de pareto: racionalidade individualista versus racionalidade altruísta. *Gazeta de Matemática*, Sociedade Portuguesa de Matemática, v. 69, n. 155, p. 7–10, 2008.
- 97 NASH, J. *Non Cooperative Games*. Tese (Doutorado) — Princeton University, 1950.

- 98 WIKIPÉDIA. *Prémio de Ciências Económicas em Memória de Alfred Nobel* — Wikipédia, a enciclopédia livre. 2017. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Pr%C3%A9mio_de_Ci%C3%A2ncias_Econ%C3%B3micas_em_Mem%C3%B3ria_de_Alfred_Nobel&oldid=50081353>.
- 99 THOMAS, L. C. *Games, theory and applications*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- 100 SMITH, J. M. *Evolution and the Theory of Games*. [S.l.]: Cambridge university press, 1982.
- 101 MYERSON, R. B. *Game Theory: Analysis of Conflict*. [S.l.]: Harvard University Press, 1997.
- 102 HAUGEN, I. N.; NILSEN, A. S. *Game Theory: Strategies, Equilibria, and Theorems*. [S.l.]: Nova Science Publishers, 2009.
- 103 FLITNEY, A. P.; ABBOTT, D. An introduction to quantum game theory. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 02, n. 04, p. R175–R187, 2002. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219477502000981>>.
- 104 WERNER, R. F. Optimal cloning of pure states. *Physical Review A*, v. 58, p. 1827–1832, 1998.
- 105 LEE, C. F.; JOHNSON, N. F. Efficiency and formalism of quantum games. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 67, p. 022311, 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.022311>>.
- 106 LADD, T. D. et al. Quantum computers. *Nature*, Macmillan Publishers Limited, v. 464, p. 45–53, March 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature08812>>.
- 107 NORI, F. Physics quantum football. *Science*, v. 325, n. 5941, p. 689–690, 2009.
- 108 BENJAMIN, S. C.; HAYDEN, P. M. Multiplayer quantum games. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 64, p. 030301, August 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.030301>>.
- 109 BENJAMIN, S. C.; HAYDEN, P. M. Comment on “quantum games and quantum strategies”. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 87, p. 069801, July 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.069801>>.
- 110 IQBAL, A.; TOOR, A. H. Quantum mechanics gives stability to a nash equilibrium. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 65, p. 022306, January 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.022306>>.
- 111 IQBAL, A. *Studies in the Theory of Quantum Games*. Tese (Doutorado) — Quaid-i-Azam University, Islamabad, 2004.
- 112 ENK, S. J. van; PIKE, R. Classical rules in quantum games. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 66, p. 024306, August 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.024306>>.
- 113 CHEN, L. et al. Quantum prisoner dilemma under decoherence. *Physics Letters A*, v. 316, n. 5, p. 317 – 323, 2003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103011757>>.

- 114 ABREU, J. F. F. de. *Jogos Quânticos a Partir de Hamiltonianos Biofísicos e um Critério de Otimização Sub-Neuronal da Informação*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT, 2005.
- 115 SOARES, C. A. de O. *Uma Formulação Multiobjetivo para o Cálculo de Equilíbrios de Nash não Pareto-dominados*. Tese (Dissertação) — UFMG-Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.
- 116 GIBBONS, R. *Game theory for applied economists*. [S.l.]: Princeton University Press, 1992.
- 117 OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A course in game theory*. [S.l.]: The MIT Press, 1994.
- 118 WIKIPÉDIA. *Teoria dos jogos* — Wikipédia, a enciclopédia livre. 2017. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoria_dos_jogos&oldid=49069937.
- 119 SCHECTER, S.; GINTIS, H. *Game Theory in Action: An Introduction to Classical and Evolutionary Models*. [S.l.]: Princeton University Press, 2016.
- 120 SKYRMS, B. *The stag hunt and the evolution of social structure*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 121 THALER, R. H. Anomalies: The ultimatum game. *The Journal of Economic Perspectives*, American Economic Association, v. 2, n. 4, p. 195–206, 1988. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1942788>.
- 122 FARAHANI, M. S.; SHEIKHMOHAMMADY, M. A review on symmetric games: theory, comparison and applications. *International Journal of Applied*, v. 4, n. 3, p. 91–106, 2014.
- 123 BOHNENBLUST, H. F. et al. *Contributions to the Theory of Games (AM-24), Volume I*. [S.l.]: Princeton University Press, 1952.
- 124 GRAEPEL, T. et al. Learning on graphs in the game of go. *Artificial Neural Networks—ICANN 2001*, Springer, p. 347–352, 2001.
- 125 STRAFFIN, P. D. *Game theory and strategy*. [S.l.]: MAA-Mathematical Association of America Textbooks, 1993. v. 36.
- 126 MEISTER, H. *The purification problem for constrained games with incomplete information*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 295.
- 127 HARSANYI, J. C. Games with incomplete information. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 85, n. 3, p. 291–303, 1995. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2118175>.
- 128 NICHOLSON, W.; SNYDER, C. M. *Intermediate Microeconomics and Its Application*. [S.l.]: Cengage Learning, 2014.
- 129 SNIDAL, D. The game theory of international politics. *World Politics*, Cambridge University Press, v. 38, n. 1, p. 25–57, 1985.
- 130 EPSTEIN, I. O dilema do prisioneiro e a ética. *Estudos Avançados*, Scielo Brasil, v. 9, p. 149 – 163, 1995. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40141995000100010&nrm=iso.

- 131 DAWKINS, R. *The Selfish Gene*. [S.l.]: Oxford university press, 2016.
- 132 LIGHTBODY, B. *The Cold War*. [S.l.]: Routledge, 2005.
- 133 TADELIS, S. *Game theory: an introduction*. [S.l.]: Princeton University Press, 2013.
- 134 SHY, O. *Industrial organization: theory and applications*. [S.l.]: MIT Press, 1995.
- 135 SARTINI, B. et al. Uma introdução à teoria dos jogos. *II Bienal da SBM-Universidade Federal da Bahia*, p. 1–61, 2004.
- 136 WIKIPEDIA. *Matching pennies* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2017. Disponível em: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matching_pennies&oldid=783920726.
- 137 CHIAPPORI, P.-A.; LEVITT, S.; GROSECLOSE, T. Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer. *American Economic Review*, v. 92, n. 4, 2002.
- 138 SCHELLING, T. C. *The Strategy of Conflict*. [S.l.]: Harvard University Press, 1980.
- 139 DASGUPTA, A. Coordination and delay in global games. *Journal of Economic Theory*, v. 134, n. 1, p. 195 – 225, 2007. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002205310600041X>.
- 140 HOGG, T.; HARSHA, P.; CHEN, K.-Y. Quantum auctions. *International Journal of Quantum Information*, v. 05, n. 05, p. 751–780, 2007. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219749907003183>.
- 141 LAFFONT, J. J. Game theory and empirical economics: The case of auction data. *European Economic Review*, v. 41, n. 1, p. 1 – 35, 1997. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014292196000177>.
- 142 MAIOLI, A. C. *Quantização do jogo Coronel Blotto*. Tese (Dissertação) — Universidade Federal Fluminense, 2015.
- 143 FUDENBERG, D.; TIROLE, J. *Game theory*. [S.l.], 1991.
- 144 SANTOS, J. P. dos. *A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio*. Tese (Dissertação) — Instituto Federal do Rio Grande do Norte, 2016.
- 145 FONTOURA, F. *Tênis Para Todos*. [S.l.]: Editora da ULBRA, 2003.
- 146 GUARDIAN, T. *Petr Cech does his homework and Chelsea earn final dividends*. 2012. Disponível em: <https://www.theguardian.com/football/2012/may/20/petr-cech-chelsea-bayern-munich>.
- 147 SANTOS, P. A. *Uma introdução a teoria de jogos*. Tese (Monografia) — Universidade Estadual de Santa Cruz, 2003.
- 148 COSTA, D. S. L. da. *Introdução à Teoria dos Jogos*. Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Federal de Itajubá, 2015.
- 149 OLIVEIRA, F. A.; ARAÚJO, M. A.; CÂMARA, M. A. da. O teorema minimax de von neumann.

- 150 BOBZIN, H. *Indivisibilities: Microeconomic Theory with Respect to Indivisible Goods and Factors*. 1. ed. [S.l.]: Physica-Verlag Heidelberg, 1998.
- 151 MARTINS, P. R.; VASCONCELLOS, C. F. Teorema do ponto fixo de brouwer. *Cadernos do IME-Série Matemática*, v. 8, 2014.
- 152 WIKIPEDIA. *Pareto efficiency — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2017.
- 153 OLIVEIRA, I. S.; SARTHOUR, R. S. *Computação Quântica e Informação Quântica*. [S.l.]: V Escola do CBPF — Rio de Janeiro, 2004.
- 154 SHOR, P. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: IEEE COMPUTER SOCIETY. *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. [S.l.], 1994. p. 124–134.
- 155 JOSÉ, M. A.; PIQUEIRA, J. R. C.; LOPES, R. de D. Introdução à programação quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, n. 1, 2013.
- 156 BRANDT, H. E. Qubit devices and the issue of quantum decoherence. *Progress in Quantum Electronics*, v. 22, n. 5, p. 257 – 370, 1999. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079672799000038>.
- 157 LEE, C. F.; JOHNSON, N. F. Exploiting randomness in quantum information processing. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 301, n. 5, p. 343–349, 2005.
- 158 PIRANDOLA, S. A quantum teleportation game. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 3, n. 01, p. 239–243, 2005.
- 159 LEE, C. F.; JOHNSON, N. F. Game-theoretic discussion of quantum state estimation and cloning. *Physics Letters A*, v. 319, n. 5, p. 429 – 433, 2003. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960103015482>.
- 160 EISERT, J.; WILKENS, M. Quantum games. *Journal of Modern Optics*, v. 47, n. 14-15, p. 2543–2556, 2000. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500340008232180>.
- 161 GUO, H.; ZHANG, J.; KOEHLER, G. J. A survey of quantum games. *Decision Support Systems*, v. 46, n. 1, p. 318 – 332, 2008. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167923608001292>.
- 162 FLITNEY, A. P. *Aspects of quantum game theory*. Tese (Doutorado), 2005.
- 163 FLITNEY, A. P.; ABBOTT, D. Quantum games with decoherence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 38, n. 2, p. 449, 2005. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0305-4470/38/i=2/a=011>.
- 164 PIOTROWSKI, E. W.; ŚLADKOWSKI, J. Quantum solution to the newcomb's paradox. *International Journal of Quantum Information*, v. 01, n. 03, p. 395–402, 2003. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219749903000279>.
- 165 FLITNEY, A. P.; ABBOTT, D. Advantage of a quantum player over a classical one in 2 x 2 quantum games. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 459, n. 2038, p. 2463–2474, 2003. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3560138>.

- 166 SHIMAMURA, J. et al. Quantum and classical correlations between players in game theory. *International Journal of Quantum Information*, v. 02, n. 01, p. 79–89, 2004. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219749904000092>.
- 167 DU, J. et al. Playing prisoner's dilemma with quantum rules. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 02, n. 04, p. R189–R203, 2002. Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219477502000993>.
- 168 EISERT, J.; WILKENS, M.; LEWENSTEIN, M. Eisert, wilkens, and lewenstein reply:. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 87, p. 069802, July 2001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.069802>.
- 169 MARINATTO, L.; WEBER, T. Reply to "comment on: A quantum approach to static games of complete information". *Physics Letters A*, v. 277, n. 3, p. 183 – 184, 2000. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100007118>.
- 170 NAWAZ, A.; TOOR, A. H. The role of measurement in quantum games. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 11, p. 2791, 2006. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0305-4470/39/i=11/a=014>.
- 171 WITTEK, P. *Quantum machine learning: what quantum computing means to data mining*. [S.l.]: Academic Press, 2014.