**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA**
**SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**
**MESTRADO E DOUTORADO**

**CARINE SCHEIFER**

# DESIGN METODOLÓGICO PARA ANÁLISE DE ATIVIDADES DE GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

**PONTA GROSSA**
**2017**

**CARINE SCHEIFER**

# DESIGN METODOLÓGICO PARA ANÁLISE DE ATIVIDADES DE GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Ponta Grossa, na linha de Pesquisa Ensino e Aprendizagem, como requisito à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Celia Finck Brandt

**PONTA GROSSA**
**2017**

**Ficha Catalográfica**
**Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG**

Scheifer, Carine
S319 Design metodológico para análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica/ Carine Scheifer. Ponta Grossa, 2017.
148f.

Dissertação (Mestrado em Educação - Área de Concentração: Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Celia Finck Brandt.

1.Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2.Geometria. 3.Olhares. 4.Apreensões. 5.Desconstrução dimensional. I.Brandt, Celia Finck. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Educação. III. T.

CDD: 510.7

**TERMO DE APROVAÇÃO**

CARINE SCHEIFER

**DESIGN METODOLÓGICO PARA ANÁLISE DE ATIVIDADES DE GEOMETRIA SEGUNDO A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador (a) Profª Dra. Célia Finck Brandt - UEPG

Profª Dra. Tânia Stella Bassoi - UNIOESTE

Profª Dra. Ettiène Cordeiro Guérios - UFPR

Prof. Dr. Dionísio Burak - UEPG - Suplente

Ponta Grossa, 26 de abril de 2017.

AGRADECIEMENTOS

Deus, obrigada por conduzir e iluminar meus passos e pensamentos até aqui. Contigo tive a certeza de que em todos os momentos não estive sozinha, mesmo quando tudo parecia turvo aos meus olhos. Sou grata a Ti, por ter colocado as pessoas certas em meu caminho, que, por meio das suas mãos, me ajudaram nessa conquista.

À minha querida orientadora Professora Celia Finck Brandt, que acreditou e confiou em mim, e soube me conduzir sabiamente nesta caminhada, sempre respeitando as minhas ideias e as minhas limitações, e ao mesmo tempo, me mostrando que eu podia sempre mais do que eu imaginava.

Aos meus pais o meu mais sincero agradecimento, pela minha educação e por todo o apoio que disponibilizavam mesmo de longe, mas ainda assim sempre próximos. E à minha família que sempre compreensivos, entediam quando eu trocava as reuniões e festas pelos inúmeros livros e a complexa teoria de Raymond Duval, sobre a qual ouviram muito falar.

Camila e Lincoln, por abrirem as portas de sua casa e por me ouvirem sempre que precisei. Pelos incentivos, pelas conversas sinceras e por todas as etapas vencidas que comemoramos juntos.  E esta não poderia ser diferente.

À minha irmã Marina que, com sua habilidade jornalística de escrever bem e sua sinceridade em criticar e elogiar sugeria sinônimos e articulava as palavras corretas sempre que precisei.

À Minha amiga e colega de orientação, evento e grupo de estudo Fátima, que me acompanhou desde o inicio, sempre disposta a ajudar. Com sua amizade e suas dicas infalíveis tornou o processo mais leve e menos complexo. E à minha amiga Franciele que contribuiu com discussões e reflexões que auxiliaram nesta reta final.

À banca, que mais do que avaliar e cumprir com o seu dever de Professores, foram verdadeiros anjos. Minha gratidão por suas preciosas sugestões que ajudaram a tornar a minha pesquisa mais consistente. É uma honra saber que meu trabalho foi lido por esses educadores de peso, os quais já admirava como profissionais e passei a admirá-los também como pessoas.

À todas os amigos, colegas e professores que, de forma direta ou indireta, contribuíram de alguma forma para que esta etapa pudesse ser cumprida.

Obrigada Deus, por essas pessoas e por mais esta etapa concluída.

“Que teu coração deposite toda a sua confiança no Senhor! Não te firmes em tua própria sabedoria!" (Provérbios 3: 5)

SCHEIFER, Carine. **Design metodológico para análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2017.


## RESUMO

A presente pesquisa se debruçou sobre as especificidades da Teoria dos Registros de Representação Semiótica sobre a Geometria para elaboração de um quadro compilado de categorias para análise cognitiva de questões. Fundamentou-se na metodologia de Análise de Conteúdo. A partir deste quadro foi possível apontar quais aspectos da referida teoria em relação à aprendizagem da Geometria está contemplado em exemplos de questões da Prova Brasil para o ensino fundamental e médio. Os objetivos buscados foram: apontar de que modo esta teoria pode subsidiar teoricamente a organização do ensino da Geometria; evidenciar, em exemplos de questões da Prova Brasil, a ocorrência das proposições de Duval relativas às ideias da Geometria; e apontar, possíveis encaminhamentos para um ensino com o enfoque cognitivo da teoria. Os resultados das análises permitiram inferir que as especificidades cognitivas são contempladas de maneira superficial e incompleta, e conforme o nível de ensino das questões alguns olhares ou apreensões não são requeridos. O quadro de categorias pode ser estendido para análises de outros tipos de questões ou resoluções, pois permite uma visão mais ampla do que está sendo valorizado ou deixado de lado no ensino.



**Palavras-chave**: Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Geometria. Olhares. Apreensões. Desconstrução Dimensional.

SCHEIFER, Carine. **Methodological design for analysis of Geometry Activities according to THE Theory of Semiotic Representation Registers.** 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2017.


## ABSTRACT

The present research focused on the specificities of the Theory of Registers of Semiotic Representation on Geometry for the elaboration of a compiled framework of categories for cognitive analysis of questions. It was based on the methodology of Content Analysis. From this picture, it was possible to point which aspect of the referred theory concerning the learning of Geometry is contemplated in examples of Prova Brasil applied to the elementary school and high school. The objectives sought were: indicating how this theory may theoretically subsidize the organization of the Geometry teaching; evidence, in examples of questions of the Prova Brazil, the occurrence of Duval's propositions relating to the ideas of Geometry; and point out, possible referrals to a teaching with the cognitive approach of the theory. The results of the analyzes allowed to infer that the cognitive specificities are contemplated in superficial and incomplete perspectives, and according to the level of teaching of the questions some views or apprehensions are not required. The category table may be extended for analyzes of other types of questions or resolutions, it allows a broader view of what is being valued or neglected in the teaching of Geometry.



**Key-words:** Theory of Registers of Semiotic Representation. Geometry. Views. Apprehensions. Dimensional Deconstruction

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Gráfico 1 - Evolução dos resultados do Brasil no Saeb (1995 a 2015) – Proficiências médias em Matemática .....28
Figura 1 – Representações em função do ponto de vista.....41
Figura 2 – Desenho proposto na dinâmica .....43
Quadro 1 – Discurso do locutor durante a realização da dinâmica .....44
Figura 3 – Representações diferentes de um mesmo discurso. .....44
Quadro 2 – Diferença entre ponto de vista matemático e ponto de vista cognitivo .....49
Figura 4 – As quatro maneiras de olhar uma figura geométrica. .....52
Figura 5 – Exemplos de ícones.....53
Figura 6 – Três situações reais de aplicação do teorema de Tales. .....54
Quadro 3 – Definição de Triângulo – visualização de unidades elementares unidades figurais .....55
Quadro 4 – Maneiras de ver uma figura geométrica .....55
Figura 7 – Classificação de unidades figurais elementares .....57
Quadro 5 – Exemplo de unidades figurais elementares de um registro figural.....57
Quadro 6 – Modificação de elementos figurais e as diferentes percepções .....59
Quadro 7 – Problemas propostos a estudantes de 9º ano. .....59
Figura 8 – Exemplo de reconfiguração de um paralelogramo em um retângulo. .....61
Figura 9 – Exemplo de anamorfose na arte. .....62
Figura 10 – Representação do dodecaedro no plano (3D/2D).....62
Figura 11 – Grades para Anamorfose. .....62
Figura 12 – Operação ótica de colocar em perspectiva. .....63
Figura 13 – Duas unidades figurais de mesmo valor e com a mesma orientação. .....63
Figura 14 – Colocar em perspectiva duas unidades figurais por contextualização. .....63
Figura 15 – Representação do losango e do quadrado .....64
Figura 16 – Representação do contorno de um livro aberto.....65
Quadro 8 – Diferença entre figura e figura geométrica.....65
Quadro 9 – Diferentes apreensões perceptivas e discursas para uma mesma representação. .....66
Quadro 10 – Processo para construção de um quadrado de lado igual a 4 cm.....67
Figura 17 – Atividade que exige apreensão sequencial.....68

Figura 18 – Atividade que requer a operação de reconfiguração. .....69
Figura 19 – Desenvolvimento da apreensão do exercício .....70
Figura 20 – Configuração homotética com superposição da figura objeto e da figura imagem. .....70
Figura 21– Configuração percebida em profundidade. .....71
Figura 22 – Triângulos homotéticos. .....71
Quadro 11 – Quadro de Categorias para Análise Cognitiva. .....76
Quadro 12 – Organização das categorias para análise das questões. .....78
Quadro 13 – Questão 26 do corpus da pesquisa. .....79
Quadro 14 – Quantificação e frequência de categorias identificadas nas questões.....82
Quadro 15 – Análises cognitiva de questões do tipo Figura Geométrica.....83
Quadro 16 – Análise cognitiva de questões do tipo Visualização.....87
Quadro 17 – Análise cognitiva de questões do tipo Heurística. .....89
Quadro 18 – Análise cognitiva de questões do tipo Construção Geométrica. .....89
Quadro 19 – Frequência percentual das categorias para as questões da Prova Brasil de ensino fundamental – anos iniciais. .....94
Quadro 20 – Análise cognitiva de questões que exigem somente a apreensão perceptiva contempladas em questões de 5º ano.....95
Quadro 21 – Análise cognitiva da questão 5. .....98
Quadro 22 – Legenda das categorias utilizadas no Software CHIC.....100
Gráfico 01 – Árvore de Similaridade das Categorias das questões do tipo binário. .....101
Gráfico 02 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões – classe A. .....102
Gráfico 03 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe B. .....102
Gráfico 04 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe C. .....103
Gráfico 05 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe D.....104

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO** ..... **11**

**1 GEOMETRIA** ..... **15**

1.1 NATUREZA DOS OBJETOS MATEMÁTICOS E GEOMÉTRICOS – ASPECTOS HISTÓRICOS ..... 15

1.2 GEOMETRIA NO CONTEXTO ATUAL ..... 26

**2 CENÁRIO DAS PESQUISAS** ..... **34**

2.1 O CENÁRIO GERAL DAS PESQUISAS SOBRE A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA ..... 34

2.2 O CENÁRIO DAS PESQUISAS EM GEOMETRIA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA ..... 36

**3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA** ..... **40**

3.1 SEMIÓTICA ..... 40

3.2 PONTO DE VISTA MATEMÁTICO X PONTO DE VISTA COGNITIVO ..... 47

3.3 A GEOMETRIA SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA ..... 51

3.3.1 Evolução dos olhares ..... 52

3.3.2 Maneiras de ver ..... 54

3.3.3 As unidades constitutivas de uma figura geométrica ..... 56

3.3.4 Tratamentos próprios ao registro das figuras geométricas ..... 58

3.3.5 Articulação entre diferentes tipos de apreensões – Tipos de Problemas ..... 68

3.3.6 Condições para o desenvolvimento da apreensão operatória das figuras ..... 69

**4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA E ORGANIZAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS – ANÁLISE DE CONTEÚDO** ..... **73**

4.1 PRÉ ANÁLISE – COLETA E DEFINIÇÃO DAS CATEGORIAS ANALÍTICAS ..... 74

4.2 ANÁLISE: EXPLORAÇÃO DO MATERIAL E DESCRIÇÃO ANALÍTICA ..... 81

4.3 RESULTADOS E INFERÊNCIAS ..... 104

**5 CONSIDERAÇÕES FINAIS** ..... **107**

**REFERÊNCIAS** ..... **110**

**APÊNDICE A – TABELA DAS CATEGORIAS PARA ORGANIZAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS** ..... **115**

**ANEXO A – ESTADO DA ARTE SOBRE GEOMETRIA E A TEORIA DOS REGISTROS** ..... **116**

**ANEXO B – CORPUS DA PESQUISA: EXEMPLOS DE QUESTÕES SELECIONADAS DA PROVA BRASIL** ..... **130**

# INTRODUÇÃO

Por que os alunos apresentam tanta dificuldade em aprender Geometria? Os conteúdos trabalhos em sala de aula são suficientes para desenvolver a aprendizagem da Geometria? O que precisa estar contemplado no ensino para que o aluno consiga desenvolver, de fato, a aprendizagem desta disciplina? Indagações como essas foram alguns dos elementos motivadores para o desenvolvimento da presente pesquisa. Frente a essas indagações, outra questão é levantada: O que já foi pesquisado ou já se conhece sobre os teores dessas indagações?

Em relação à primeira questão, alguns autores como Sérgio Lorenzato e Regina Pavanello apresentam indícios, por meio de uma retomada histórica, tentando explicar o porquê de tanta dificuldade, por parte dos alunos, e até mesmo dos professores, em relação à Geometria. Pavanello (1993, p.7) percebeu que os alunos, a partir da década de 80, mostravam cada vez menos conhecimentos dos conceitos geométricos elementares. Além disso, muitos professores se mostravam inseguros em incluir a Geometria entre os temas a serem abordados em suas aulas. Segundo as pesquisas da autora, isto se deve à falta de domínio do conteúdo e por não saberem desenvolvê-lo com os alunos. Lorenzato (2014, p.28) afirma que há décadas o ensino da Geometria tem sido bastante desorientado, frente aos modismos que vão desde o formalismo exagerado até o empirismo inoperante ou até mesmo a quase ausência da Geometria em sala de aula. Segundo o autor, nos últimos anos, o ensino da geometria vem apresentando "sinais de revitalização decorrentes de iniciativas locais de grupos de professores". Apesar de alguns avanços os autores afirmam que ainda há muitas questões a serem discutidas. Este assunto será retomado na primeira sessão 1.

Partindo dos pressupostos apresentados por autores citados acima e na tentativa de encontrar elementos que ajudem a responder às outras duas indagações iniciais, é que esta pesquisa se desenvolve. Para isto, ela está fundamentada, integralmente, por uma teoria semio-cognitiva que vem ganhando espaço e notoriedade nas pesquisas sobre Educação Matemática – a Teoria dos Registros de Representação Semiótica[1], que foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. As contribuições desta teoria serão de grande valia para compreender como os alunos aprendem Geometria e o

[1] Em alguns momentos do texto, será chamada simplesmente de Teoria dos Registros, termo utilizado pelo próprio autor em sua entrevista concedida à Revista Paranaense de Educação Matemática (DUVAL, 2013) referenciada nesta pesquisa.

que precisa ser contemplado no ensino, isto porque, segundo o autor, vai além do domínio das matemáticas e de sua aprendizagem. “Ela trata, na realidade, da própria natureza do funcionamento cognitivo do pensamento humano” (DUVAL, 2009, p.14).

Com base na Teoria dos Registros, o que está em jogo para as aprendizagens escolares de base, em primeiro lugar, é a importância de distinguir um objeto (uma reta, por exemplo) de suas diversas representações possíveis (equação da reta, desenho geométrico, gráfico de uma reta, etc.). Além disso, o autor defende que as representações semióticas vão além da função de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática, pois são as representações semióticas que possibilitam os tratamentos sobre os objetos matemáticos.

Para resolver atividades emblemáticas da Matemática, como por exemplo, a resolução de problemas, incluindo atividades Geométricas, Duval (2011, p. 26) afirma que é necessário que o aluno tenha o controle dos gestos intelectuais específicos da atividade, e isto não depende da aquisição dos conceitos matemáticos, mas sim de uma tomada de consciência desses gestos pelos alunos, que acaba sendo a condição necessária para a aquisição de conceitos. Duval (2011, p. 20) defende que a consciência desses gestos intelectuais deveria ser um dos objetivos prioritários no ensino, pois são propedêuticos a toda atividade de resolução de problema.

Levando em consideração a importância da tomada de consciência dos gestos intelectuais específicos da Geometria por professores e alunos, o anseio é responder: quais os aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em relação à aprendizagem da Geometria estão contemplados nas questões da Prova Brasil? Os objetivos que se pretende alcançar são:

i) apontar, após reflexões analíticas, de que modo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode subsidiar teoricamente a organização do ensino da Geometria, para uma aprendizagem com atribuições de sentidos e significados;

ii) evidenciar, em exemplos de questões da Prova Brasil, a ocorrência das proposições de Duval relativas às ideias da Geometria segundo um ponto de vista cognitivo;

iii) apontar encaminhamentos possíveis aos professores, segundo o ponto de vista da teoria dos Registros de Representação Semiótica, que os auxiliem no processo de apreensão de conceitos matemáticos dos alunos referentes aos conteúdos de Geometria.

As análises realizadas a partir das obras Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b, 2013) sobre a Geometria, resultaram em um quadro teórico compilado com as especificidades requeridas no ensino da Geometria sob o ponto de vista cognitivo desta

teoria. Este quadro, denominado Quadro de Categorias para Análise Cognitiva, pode facilitar aos professores interessados em apoiar-se nesta teoria, um acesso prático, operacional e didático para conhecimento das ideias que o autor propõe em seus diversos trabalhos de pesquisa.

A partir deste quadro, e com o objetivo de evidenciar a ocorrência das proposições de Duval relativas às ideias da Geometria, são escolhidos exemplos de questões da Prova Brasil de ensino fundamental e médio, disponibilizadas em documentos e materiais disponibilizados no Portal Inep[2] que apresentam uma série de exemplos de itens (questões) sobre matemática das séries a serem avaliadas. Foram selecionadas também questões dos cadernos de atividades de matemática dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, desenvolvidos pela Secretaria de Estado da Educação (PARANÁ, 2009)[3]. A partir de uma leitura flutuante, entre as diversas questões presentes nesses materiais, foram selecionadas as questões que contemplam conteúdos de Geometria, totalizando 51 questões, que compõem o corpus da pesquisa (Anexo B).

O tratamento, organização, descrição analítica dos dados é sustentado pela metodologia de Análise de Conteúdo de Laurence Bardin (2009). Portanto, trata-se de uma pesquisa qualitativa com uma abordagem descritivo-analítica, em que as questões serão vistas sob um ponto de vista cognitivo, que leva em consideração gestos intelectuais específicos da atividade geométrica, e não de um ponto de vista matemático, que tem como foco de aprendizagem os conteúdos da Geometria. A organização dos dados será realizada com auxilio da planilha eletrônica do Excel e do software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva).

A pesquisa se configura da seguinte forma: a Sessão 1 traz aspectos específicos do desenvolvimento da Geometria e as influências históricas e epistemológicas que influenciam o ensino nos dias de hoje. Na Sessão 2 é feito um ensaio do estado da arte de pesquisas em Geometria que contemplam a Teoria dos Registros. A Sessão 3 trata da Teoria dos Registros de Representação Semiótica sob a qual está fundamentada esta pesquisa, e suas contribuições para o ensino e aprendizagem da Geometria sob um ponto de vista cognitivo. A Sessão 4 aborda os aspectos metodológicos de coleta,

---

[2] http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/instrumentos-de-avaliacao Acesso em 15/08/2016.
http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/matrizes-da-prova-brasil-e-do-saeb. Acesso em 15/08/2016.

[3] <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1267> Acesso em 15/08/2016.

organização, categorização e análise dos dados, fundamentados na Análise de conteúdo de Laurence Bardin (2009). E finalmente são apresentados os resultados das análises das questões evidenciando aspectos da Teoria dos Registros, tais como olhares, apreensões, desconstrução dimensional, entre outros, contemplados nas referidas avaliações, e as considerações finais.

# 1 GEOMETRIA

## 1.1 NATUREZA DOS OBJETOS MATEMÁTICOS E GEOMÉTRICOS –ASPECTOS HISTÓRICOS

Não há como afirmar, com certeza, quando foi o surgimento da matemática. Supõe-se que uma das motivações vem em resposta a necessidades práticas. A Matemática, como campo de conhecimento, desenvolveu-se com as primeiras civilizações, na Mesopotâmia e no Egito, no período que se estende aproximadamente do ano 3500 a.C. até o começo da era cristã. Na Mesopotâmia nasceu a forma de comunicação escrita mais antiga da humanidade: a escrita cuneiforme. Com isto, muitos registros desta civilização "vieram a funcionar como preciosas fontes para analisar o estágio do conhecimento matemático da civilização mesopotâmica." (MOL, 2013, p. 17) Essas primeiras civilizações orientais do Egito e Babilônia apresentam, segundo Dieudonné[4] (1990, p. 47 apud PONTE et al; 1997), claramente uma concepção de objetos matemáticos concretos, para fins de enumeração, ou medidas de grandezas (área, volume, peso, ângulo), por exemplo.

A Escola Pitagórica, fundada por Pitágoras (c. 570-495 a. C.), influenciou mais tarde a Matemática de Platão. Esta escola dava destaque a quatro campos do saber: aritmética, música, Geometria e astronomia. Segundo Mol (2013), o misticismo pitagórico atribuía aos números características e personalidades:

> • O número um é a essência dos números, o gerador de todos os outros números e o número da razão; nele está a origem de todas as coisas e do divino. • O número dois é o primeiro número par ou número feminino, o número da opinião. • O número três é o primeiro número masculino, o número da harmonia. • O número quatro é o número da justiça. • O número cinco é o número do casamento, por ser a união dos primeiros números feminino e masculino. Um lugar sagrado é reservado ao número dez ou *tetractys*. Ele é considerado o número do universo, por ser a soma das dimensões geométricas: um ponto, que é o gerador de todas as dimensões; dois pontos, que determinam uma reta de dimensão um; três pontos não alinhados, que determinam um triângulo de dimensão dois; e, por fim, quatro pontos não contidos em um plano, que determinam um tetraedro de dimensão três. Desse modo, o número dez, que nos primórdios da evolução matemática nasce do método de contagem com os dedos, é produzido pelos pitagóricos por um processo puramente abstrato. (MOL, 2013, p.33)

Mais tarde, a partir do século IV, Platão, um dos mais importantes filósofos gregos de todos os tempos, desenvolveu o platonismo. Foi discípulo de Sócrates e autor

[4] Dieudonné, J. (1990). *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa: Dom Quixote.

da obra titulada República. Sua teoria concentra-se na distinção de dois mundos: um visível e outro cognoscível. No mundo visível as imagens são sombras, os reflexos, as plantas, os seres são todas representações semelhantes. No mundo cognoscível, ou seja, um mundo invisível e ideal, a alma parte das imagens dos objetos para estabelecer suas análises partindo de hipóteses. Ou, em um estágio mais evoluído, a alma parte da hipótese para chegar ao princípio absoluto, sem lançar mão das imagens, e desenvolve a sua análise servindo-se unicamente das ideias.

Platão faz analogia dos dois mundos – visível e invisível – com a Geometria:

> Então, sabes também que eles utilizam figuras visíveis e raciocinam sobre elas pensando não nessas mesmas figuras, mas nos originais que elas reproduzem. Os seus raciocínios baseiam-se no quadrado em si mesmo e na diagonal em si mesma, e não naquela diagonal que traçam; o mesmo vale para todas as outras figuras. Todas essas figuras que modelam ou desenham, que produzem sombras e os seus reflexos nas águas, eles as utilizam como tantas outras imagens, para tentar ver esses objetos em si mesmos, que, de outro modo, só podem ser percebidos pelo pensamento. (PLATÃO, 2006, p. 297)

Segundo Platão, denomina-se ciência aquelas que possuem hipóteses como princípios, e é por meio da ciência que se atinge a inteligência. Ele atribui esta especificidade ao cálculo e a aritmética, que são ciências indispensáveis, chamadas primeira ciência, com poder de conduzir à verdade pura. E julga não ser fácil encontrar uma ciência que custem mais a aprender e a praticar do que esta. A Geometria, que estuda as superfícies, é considerada segunda ciência, também chamada de conhecimento discursivo. Em terceiro lugar coloca a ciência que estuda a dimensão de profundidade, que ainda não havia sido descoberta na época, devido à sua dificuldade e também ao descaso do Estado em investir em tais pesquisas. Em quarto lugar está a astronomia, que estuda o movimento dos sólidos. As duas primeiras Platão denomina inteligência, e tem por objeto a essência. E as duas últimas, opinião, sendo o objeto a mutabilidade (PLATÃO, 2006, p. 326). Boyer (2003, p. 61) afirma que, para Platão, a aritmética apresenta uma separação entre os aspectos teóricos e computacionais, e com a Geometria ele defendia a causa da matemática pura contra a visão materialista do artesão ou técnico.

> Platão, ao questionar a respeito da estrutura e da natureza da matemática, criou novas referencias para sua compreensão e desenvolvimento. Mostrou ter consciência sobre o caráter abstrato dos objetos matemáticos ao distinguir o “mundo real”, onde vivem os objetos sensíveis, do “mundo das ideias”, alcançado através da razão. Para Platão, os objetos sensíveis são suscetíveis a mutações, enquanto seus modelos abstratos são imutáveis, eternos e universais. Na matemática, o interesse está nas figuras abstratas e não em

> suas representações reais. Na visão de Platão, a matemática constitui um domínio independente e autossuficiente, acessível através do entendimento, cujas verdades podem ser conhecidas a priori, independentes dos sentidos. Isso influenciou na noção de demonstração, onde apenas o uso do raciocínio dedutivo passou a ser permitido, ficando proibido o recurso à experiência sensível. A filosofia grega procurava a verdade eterna e imutável e assim também deveria proceder a matemática. (MOL, 2013, p.38)

A dialética em Platão é a atividade intelectual por meio da qual se chega à verdade. É o exercício direto do pensamento e da linguagem, e permite superar as contradições a fim de chegar à identidade da essência ou da ideia imutável, alcançando a inteligência.

Depois de apresentada essa breve retomada, concorda-se com Ponte et al (1997, p. 10) ao afirmarem que "pelo menos desde Platão, os matemáticos têm consciência de que os objetos sobre os quais raciocinam [...] são seres imateriais obtidos por abstração, a partir de objetos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas 'imagens'". A atribuição às noções matemáticas do caráter de objetos de pensamento foi uma das grandes contribuições dos gregos para o desenvolvimento da Matemática.

Aristóteles (384-322 a.C.) foi um dos discípulos mais famosos de Platão. Discordava de seu mestre em relação à natureza da matemática e de seus objetos. Aristóteles teria considerado que "[...] a perspectiva, segundo a qual o número ideal e o número matemático se identificam, é a pior de todas" (ARISTÓTELES, 2012, p. 633). Aristóteles considera desnecessário separar realidade e aparência em dois mundos diferentes, elas existem em um mundo único. Depois das refutações sobre as considerações de Platão e outros matemáticos da época, Aristóteles conclui que os objetos de que a matemática trata são abstraídos dos sensíveis.

> Os entes matemáticos devem, portanto, existir como potência nas coisas sensíveis e passam ao ato mediante as nossas atividades heurísticas. Os processos de pensamento que exercemos sobre os objetos do mundo sensível fazem com que os entes matemáticos, existam em ato. A atualidade e a potencialidade são conceitos chaves para a compreensão da ideia que Aristóteles tinha a respeito das ciências, [...] tudo o que é necessário para se obter o conhecimento das coisas está nas próprias coisas [...]. (BARBOSA, 2009, p. 96)

Em relação à dialética de Platão, Aristóteles substitui por um conjunto de procedimentos de demonstrações e prova, criando assim a lógica propriamente dita, a qual chamou de Analítica.

Com a lógica aristotélica houve grandes contribuições que influenciaram o desenvolvimento da Matemática. A respeito disso, Bertrand Russell (1872-1970) afirma que:

> [...] a lógica tornou-se mais matemática e a matemática tornou-se mais lógica. A consequência é que agora se tornou impossível traçar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma. Diferem como um menino e um homem: a lógica é a juventude da matemática, e a matemática, a maturidade da lógica. (RUSSELL, 2007, p. 230)

A ciência, para Aristóteles, desenvolve-se a partir dos seguintes passos: parte da realidade, considerando as características comuns dos "objetos", em seguida os objetos são agrupados a partir de suas classes de equivalências, chegando, enfim, ao conceito genérico que diz respeito à representação abstrata da coisa. Aristóteles compartilha com a ideia de Platão que a Ciência é um conhecimento necessário e imutável das essências.

Mol (2013, p. 41) afirma que, na Grécia Clássica, o modelo aristotélico de lógica, criado e sistematizado por Aristóteles, teria a sua melhor materialização na obra Os Elementos de Euclides – cuja formação se desenrolou na Academia de Platão. Euclides de Alexandria desenvolveu uma obra-prima da matemática grega. "Pode-se até mesmo afirmar que Aristóteles fez pela lógica o que Euclides fez pela matemática. A lógica aristotélica viria a reinar absoluta por um 'singelo' período de vinte séculos." (BARBOSA, 2009, p.60).

Segundo Ponte et. al. (1997, p.10) as propriedades dos objetos matemáticos concebidos por Platão e Aristóteles, pela primeira vez foram desenvolvidos segundo o método dedutivo. Mol (2013, p.46) afirma que *Os Elementos* têm influências de Platão ao que se refere à natureza abstrata dos objetos matemáticos, mas, sobretudo de Aristóteles quanto à estrutura do conhecimento matemático e dos elementos lógicos usados em sua construção. O autor assegura que a obra de Euclides é um perfeito retrato do caráter abstrato e dedutivo da matemática grega e que influenciou profundamente o desenvolvimento do pensamento científico.

> Os primeiros quatro livros tratam de Geometria plana elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e do círculo abordando problemas cuja solução se faz com régua e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções e o livro VI aplica essa teoria ao estudo de Geometria. Os livros VII, VIII e IX versam sobre a teoria dos números. O livro X trata dos incomensuráveis e os livros XI, XII e XIII discorrem sobre Geometria sólida. (MOL 2013, p. 46)

Os Elementos de Euclides representam a primeira axiomatização da história da Matemática, e foram considerados até o século XIX o modelo de verdade, rigor e certeza. "Eles não só constituem a mais antiga e importante obra matemática grega a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos" (BOYER, 2003, p. 61).

Outro estudioso da Grécia, importante no campo da Matemática, foi Arquimedes (287-212 a.C.). Desenvolveu ideias primitivas sobre o infinito, limite e cálculos de área a partir da decomposição de figuras curvas – base do que hoje chamamos de integração. Segundo Mol (2013, p. 52), a obra de Arquimedes "foi representativa do espírito da ciência da Escola de Alexandria" foi um grande inventor entre os gregos, preocupando-se com as aplicações, sem deixar de lado o rigor matemático. A máquina de guerra foi uma de suas invenções, "há relatos de que um desses engenhos usava espelhos parabólicos para fazer convergir raios de sol e atear fogo aos navios inimigos." (MOL, 2013, p. 53). De maneira semelhante à estrutura e escrita formal dos Elementos de Euclides, Mol (2013, p. 53) afirma que Arquimedes foi pioneiro da mecânica teórica, que até então eram de natureza especulativa e não matemática, estabelecendo, desta forma, profunda relação entre matemática e mecânica, que influenciaria a evolução histórica tanto da física quanto da matemática.

No período do saber clássico, importantes contribuições para o conhecimento matemático vieram do Oriente. A principal contribuição dos árabes foi a difusão de um sistema de numeração conhecido como indo-arábico que passou a ser utilizado no mundo ocidental. Deixou consequências importantes na estrutura dos números, com seu sistema de numeração decimal e posicional, com o uso de nove símbolos e do zero - cuja primeira referência data do século IX (MOL, 2013, p.63). Contribuições no campo da trigonometria, álgebra, ideia de número irracional – diferente da concepção que os gregos tinham sobre o conceito de número – a famosa fórmula do Matemático Bháskara é atribuída à Matemática Indiana e Arábica.

A matemática nos séculos XI e XII foi marcada pelo "pensamento escolástico", que procurava sistematizar os objetos da fé cristã através de princípios e instrumentos racionais, influenciado pela obra de Aristóteles. Neste ambiente é alcançado o auge da dialética quando a linguagem dialética é assumida como roupagem 'oficial' do pensamento cristão. "O discurso lógico-analítico fica em segundo plano até o século XVI, quando o racionalismo clássico, com Spinoza, Descartes, Malebranche e Leibniz começa a impor o primado de uma ciência integralmente dedutiva". (CARVALHO, 1996, p. 52)

Mudanças significativas ocorreram no período que ficou conhecido como Renascimento. O homem renascentista valorizava a criatividade aliada ao desenvolvimento da técnica e à acumulação do saber empírico. Este período foi marcado por um renovado interesse pelo passado greco-romano clássico especialmente

pela sua arte. O renascimento privilegiou a matemática e as ciências da natureza. Em continuidade à tradição medieval árabe e europeia, a matemática foi marcada pelo desenvolvimento da álgebra. Além disso, a exatidão do cálculo influenciou também o projeto estético dos artistas desse período, desenvolvendo novas técnicas de proporção e perspectiva. Leonardo da Vinci (1452-1519) é um símbolo deste período renascentista, "dono de imaginação e criatividade ilimitadas, além de um profundo espírito de observação, Leonardo realizou experimentos de forma metódica e usou a expressão artística [...] em prol da descrição científica." (MOL, 2013, p. 84). O renascimento desencadeou o movimento filosófico chamado Humanismo, que trouxe, entre outras, contribuições no campo da astronomia com a teoria heliocêntrica. Os humanistas foram responsáveis por conduzir modificações nos métodos de ensino, desenvolvendo a análise e a crítica na investigação científica.

Galileu Galilei (1564-1642) é considerado um símbolo revolucionário, pensa o mundo com um novo conhecimento. Segundo Bauab (2009, p. 96), é moderno em vários aspectos, e nos apresenta uma imagem radicalmente inovadora de natureza. Galileu Galilei discorda do modelo de universo defendido por Aristóteles, comparando-o com um senhor que constrói um belo palácio mal alicerçado ameaçado de desmoronamento. Segundo Galileu Galilei não se pode compreender o universo sem antes entender a língua com que está escrito.

> Sr. Sarsi, a coisa não é assim. A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante os nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com que está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências, e outras figuras geométricas sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto (GALILEU, 1973, p. 119).

Para Galileu, não bastariam as observações de fatos empíricos isoladas sobre diferentes eventos físicos e astronômicos. Faz-se necessário o saber matemático, "elemento a priori que antecede e reconstrói toda e qualquer experiência acerca do mundo físico. [...] Há, em Galileu, a defesa de uma clara afinidade entre a razão humana e uma imanência matemática existente nos objetos." (BAUAB, 2009, p. 97). Considerado por muitos como o "pai" da ciência moderna, deixou uma contribuição marcante no método científico ao combinar experimentação e matemática, "tendo sido o primeiro dos pensadores modernos a afirmar que as leis da natureza são matemáticas" (MOL, 2013, p.87).

O filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) foi fundamental para a

construção da matemática moderna. Figura central do racionalismo e da revolução científica, Descartes buscava a verdade por meios intelectuais e dedutivos, contrapondo aos meios sensoriais de Aristóteles. Tudo era explicável em termos de matéria e movimento. Seu método baseava-se na indução e na dedução e consistia nas quatro premissas seguintes: (i) nunca aceitar algo como verdadeiro que não se conheça claramente como tal; (ii) repartir cada uma das dificuldades em tantas parcelas quantas fossem possíveis e necessárias a fim de melhor solucioná-las; (iii) iniciar pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, elevando-se até o conhecimento dos mais compostos; (iv) efetuar revisões nas quais se tenha certeza de nada omitir. Aplicou seu método na Geometria e na aritmética, lançando com isso, sua importante obra A Geometria, de 1637, dando origem a um novo campo na matemática conhecida hoje por Geometria Analítica (MOL, 2013, p.96).

Apesar de Descartes não demonstrar muito interesse para com a educação, ele acabou por influenciar de forma significativa o ensino. Assim como propõe seu método, o ensino atual da maioria das escolas é separado por ano, dos conteúdos mais simples e fáceis, para os mais complexos e difíceis, e que serão compreendidos caso se tenha o conhecimento dos primeiros.

Uma das regras de Descartes é rejeitar todo e qualquer conhecimento que não passe de provável e confiar somente naquilo que é perfeitamente conhecido e que não suscite dúvidas. Depois de algumas considerações, porém, afirma que esta regra se limita, entre todas as ciências existentes, somente à aritmética e à Geometria (OLIVEIRA, 2006, p. 58). Esta é uma característica bastante notável no ensino da matemática, quando, se exige do aluno certo rigor matemático, e onde o erro é significado de obstáculos e dificuldades que o aluno precisa superar, para que possa afirmar que ele aprendeu de fato determinado conteúdo.

Pierre de Fermat (1601-1665), contemporâneo de Descartes, deixou contribuições significativas para o campo da Matemática. Tinha a Matemática como hobby e, sem ter conhecido a obra de Descartes, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria Analítica por meio de seus manuscritos. Por essa razão, Fermat pode ser considerado coinventor da Geometria analítica. Mol (2013, p. 97-98) afirma que “sua exposição era muito mais clara e sistemática que a de Descartes e seu método muito mais próximo da visão moderna”.

A forma de representar objetos matemáticos sofreu grande evolução e assumiu, a partir de Descartes e Fermat, uma visão mecanicista e um formato que influenciou não

somente a forma de pesar do homem, mas também o ensino das ciências nas escolas. Na primeira metade do século XVII, inspirado pelas obras de Euclides, Descartes e Galileu, Isaac Newton (1642-1727) unificou, sistematizou e estruturou os resultados de natureza infinitesimal e desenvolveu ideias fundamentais sobre mecânica e sobre o cálculo infinitesimal.

No final do século XVIII foi criado o sistema métrico decimal, substituindo diversos sistemas então utilizados. O metro foi tomado como a décima milionésima parte da distância entre o Equador e o Polo Norte, e com o passar do tempo, sofreu alguns ajustes na sua definição, hoje em dia é baseada na velocidade com que a luz se propaga no vácuo. É a unidade do Sistema Internacional de medidas, utilizada por toda a comunidade científica, e é claro, por grande parte das crianças que frequentam as escolas. Muitas vezes os alunos 'aprendem' sobre como utilizá-lo sem se dar conta do porquê de sua existência. E por utilizar uma unidade de medida padronizada, pronta e acabada, podem não compreender, muitas vezes, que medir significa comparar quantidades, independente do tipo de unidade que se utiliza.

Segundo Mol (2013, p. 127), no período revolucionário, com a reorganização do ensino francês, a Geometria sofreu uma evolução. O matemático Gaspard Monge (1746-1818), criador da Geometria descritiva, buscava oferecer procedimentos para aplicar a Geometria à resolução de problemas de natureza prática. A seguir, com seu aluno Jean-Victor Poncelet (1788-1867), a Geometria projetiva tornou-se um ramo autônomo da Geometria, ressaltando a importância das transformações geométricas.

Além dessas, no século XIX houve também a criação das Geometrias não-euclidianas, como a Geometria hiperbólica e elíptica. Kant (1724-1804) argumentou que: "se há a possibilidade apenas de uma única Geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seria uma consequência lógica de proposições primeiras" (STRUIK, 1989, p.92). Carl Friedrich Gauss em 1813 disse ter construído uma Geometria "estranha e totalmente diferente da nossa" (GAUSS apud MOL, 2013, p.128). Criticou, por isso, a visão que se tinha durante pelo menos 18 séculos, de que a Geometria Euclidiana descrevia fielmente o mundo sensível. A Geometria plana de Euclides descrevia o mundo com aproximações e, segundo Martos (2002, p. 212), para alguns problemas do homem ela responde satisfatoriamente. Mas para as medidas de grande escala, é necessária a utilização da Geometria não-euclidiana.

As Geometrias não euclidianas se aproximam muito mais dos problemas do

cotidiano. Segundo Carrizo[5] (2008), os objetos da natureza parecem ter aparência de uma desordem caótica e que não se adapta à Geometria euclidiana ou clássica, mas com a Geometria fractal esta desordem é mera aparência, correspondendo a fórmulas muito exatas da ordem fractal.

> O exemplo de uma costa rochosa não foi dado por acaso: o caos de uma costa, como o da superfície terrestre, é um aspecto parcial de uma ordem superior (cósmica) e que escapa à analise de nossos sentidos. Fórmulas matemáticas relativamente simples podem reproduzir costas e superfícies, assim como relâmpagos e maremotos. A Geometria fractal também pode demonstrar matematicamente a distribuição das galáxias do universo e as das crateras lunares, por exemplo. O caos é apenas aparente e, com a Geometria fractal percebemos que a desordem é frequentemente uma ordem muito complexa, da qual se vê uma parte. Essa parte é tão limitada que nos dá a sensação de caos, mas na realidade, a "totalidade" é magnificamente ordenada. O homem como parte da Natureza é feito com o modelo da Geometria fractal, os seus órgãos são fractais, o músculo cardíaco e o cérebro possuem os tecidos aparentemente mais desordenados e caóticos no obstante são os órgãos mais complexos e perfeitos, estão em contínua desordem para ordenar essa maravilhosa rede de tecidos e informações biológicas da qual está formado o ser humano. (CARRIZO, 2008)[6]

Eis mais alguns exemplos de sua aplicabilidade, segundo Rotini (2011): na Arte, na Astronomia, no Cinema, na Economia, na Hidráulica, na Geologia, na Meteorologia e até na Linguística, onde a teoria dos fractais é utilizada na evolução dos dialetos. Outra importante contribuição se dá no campo da Medicina: por meio da tomografia computadorizada, possibilita uma nova visão da anatomia interna do corpo humano, além de fenômeno cardíacos e pulmonares, diagnóstico de câncer bucal, entre outros.

Galileu, ao falar que o mundo está escrito em língua matemática, não imaginara o quanto esta afirmação se aproximaria da recente Geometria dos Fractais, que consegue traduzir o suposto caos, em uma lógica ordenada.

Apresentaram-se aqui alguns capítulos do desenvolvimento de uma ciência tão antiga e indispensável como a Matemática. Entre refutações e aceitações das ideias de importantes pensadores, percebe-se que houve, sem dúvidas, um extraordinário desenvolvimento científico e evolução mental, desde as primeiras civilizações, e com certeza sofrerá mais mudanças, descobertas, aplicabilidades, no decorrer dos próximos anos. Ainda mais em um universo dominado por uma era digital, onde as descobertas são realizadas com um crescimento exponencial, e cujas formas de representar os

---

[5] Formada em Medicina na Faculdade de Ciências Médicas da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP-SÃO PAULO. Referência Geometria e fractal

[6]http://medicinaasuamedida.blogspot.com.br/2008/11/fractais.html (acesso em 30/09/2016)

objetos matemáticos podem ser exploradas das mais diferentes maneiras que se possa imaginar.

Afinal, em que consiste a natureza dos objetos Matemáticos? A Matemática foi inventada ou descoberta?

Idealistas, segundo Ponte et al. (1997, p. 3), defendem que “objetos matemáticos são livres invenções do espírito humano, que não existem autonomamente e que possuem, apenas, as propriedades que o pensamento puder determinar”. E o realismo (ou platonismo), segundo este mesmo autor, supõe objetos, que embora não sejam físicos ou materiais, são reais, imutáveis, não mudarão, nem desaparecerão. Sua existência é totalmente independente do nosso conhecimento e o homem limita-se a descobrir esta realidade objetiva que lhe é exterior.

Atualmente fala-se em "platonismo matemático", termo utilizado pela primeira vez por Paul Bernays em 1935. O platonismo matemático defende a tese de que verdades matemáticas são descobertas e não criadas. De fato, não criamos os números, criamos uma forma de representar os números. Para ensinar o número dois à uma criança, por exemplo, lançamos mão de diferentes representações deste número: dois gatos, duas bolas, dois dedos, o traçado do número, a palavra (falada ou escrita), etc. Pois o número dois propriamente dito não possui existência no mundo sensível, e seu acesso se dá somente por meio de representações. Outro exemplo é a figura de uma reta, cuja figura propriamente dita é impossível conceber, pois a reta é uma figura de uma dimensão (1D), ou seja, sem espessura alguma, somente com sua medida de comprimento. Ao “desenharmos uma reta”, estamos na realidade desenhando uma representação do que seria uma reta, pois nesta representação há além do comprimento, a espessura do traçado. Assim como esses dois objetos exemplificados, todos os demais são da mesma forma, intocáveis.

Esta concepção de objetos matemáticos intocáveis é defendida por contemporâneos como o teórico Raymond Duval (2013, p. 15), que influenciado por Frege (1848-1925), desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Ele defende um ensino de matemática sob o ponto de vista cognitivo, e que deve ser organizado em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais, já que o acesso aos objetos matemáticos se dá somente por meio de representações. Isto se deve à natureza dos objetos matemáticos, que diferente de objetos de outros campos do conhecimento como a física, biologia, geografia, não possuem existência física. A falta de conhecimento desta especificidade é

um dos motivos que leva o aluno a não compreender matemática. Esta teoria vem sendo cada vez mais estudada por pesquisadores da área da educação matemática. Mesmo assim ainda há muito que fazer, pois nas escolas o ensino ainda é baseado na segmentação dos conteúdos, onde a motivação que o professor considera no ensino está atrelada no fato do conteúdo a estudar ser sempre uma premissa para conteúdos futuros. Quando na verdade, a motivação deveria ser baseada nos gestos intelectuais que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo do aluno que, consequentemente, levam às apreensões dos conceitos e dos conteúdos.

A natureza dos objetos matemáticos é também foco de análise de uma nova teoria cognitiva chamada de Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD et. al. 2001). Nesta teoria são levados em conta dois aspectos complementares da atividade humana, o aspecto estrutural e o aspecto funcional.

O aspecto estrutural é composto por dois blocos interdependentes e inseparáveis, o bloco da "prática" – a práxis, e o bloco do "saber" – o logos, e estes blocos constituem o que o autor chama de a praxeologia (também são denominadas organizações). Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 251)

> Na atividade matemática, como em qualquer outra atividade, existem duas partes, que não podem viver uma sem a outra. De um lado estão as tarefas e as técnicas e, de outro, as tecnologias e teorias. A primeira parte é o que podemos chamar de "prática", ou em grego, a práxis. A segunda é composta por elementos que permitem justificar e entender o que é feito, é o âmbito do discurso fundamentado – implícito ou explícito – sobre a prática, que os gregos chamam de logos.

Podemos tomar como exemplo de práxis da praxeologia a seguinte atividade, em que há várias tarefas para o mesmo tipo de tarefa: Determinar a soma dos números decimais: a) Tarefa 1: Somar 1,5 + 0,9; b) Tarefa 2: Somar 3,1 + 0,50; c) Tarefa 3: somar 1,03 + 13 + 0,7. O logos, por sua vez, é composto por um discurso racional e uma teoria, a fim de garantir que uma dada técnica permita realizar as tarefas, tornando-a inteligível e permita produzir novas técnicas.

Segundo o aspecto funcional da TAD, para que o indivíduo consiga dominar um determinado conhecimento, é necessário que o processo de estudo passe por seis momentos didáticos: o primeiro encontro, o momento exploratório, o trabalho da técnica, o tecnológico, o teórico, a institucionalização, a avaliação (CHEVALLARD; BOSCH; GÁSCON, 2001, p. 276).

Segundo a TAD durante a realização de uma tarefa matemática, trabalhamos com dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não-ostensivos. Objetos ostensivos

se baseiam nas sensações, são aqueles possíveis de serem percebidos pelos sentidos (pelo toque, pelo olhar e pelo ouvir). Ou seja, são objetos passíveis de certas representações materiais como signos, imagens, sons, gestos, etc. Os objetos não-ostensivos parecem estar baseados na razão, são invisíveis e inobserváveis, assim como as representações mentais, porém são objetos de uma mente social e não de uma mente individual. Eles não são percebidos pelos sentidos, são as intuições, ideias, conceitos, definições, etc. Estes objetos estão presentes na organização da atividade matemática, e são utilizados para manipular certos objetos ostensivos que lhes são associados, tais como uma palavra, uma frase, uma escrita, um gráfico, um gesto ou todo um discurso (BOSCH, 2000, p. 4).

Há uma dicotomia entre estes dois tipos de objetos. Essa dicotomia é chamada de "Dialética do policiamento ostensivo e não-ostensivo", em que objetos não-ostensivos emergem da manipulação de objetos ostensivos, mas ao mesmo tempo, essa manipulação é sempre guiada e controlada por objetos não-ostensivos (BOSCH, 2000, p.4).

A autora afirma que

> Desde o momento em que se consideram os objetos ostensivos como constitutivos das organizações matemáticas e os ingredientes primários das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, se apresentam, em primeiro lugar como *instrumento* da atividade matemática, ferramentas materiais sem as quais não se poderia realizar a atividade. [...] O que importa ao realizar uma atividade matemática, não é tanto o que a ferramenta pode representar, mas sim sua adequação e efetividade na realização da atividade (BOSCH, 2000, p. 8, tradução nossa).

## 1.2 GEOMETRIA NO CONTEXTO ATUAL

Existem inúmeros argumentos a favor do ensino da Geometria que permitem explorar amplamente a discussão sobre seu valor educacional. Um deles pode ser a ampla aplicação em diversos campos, como visto anteriormente a respeito da Geometria fractal e a medicina, por exemplo. Outros fatores que reafirmam a necessidade de ensinar Geometria podem ser, segundo Pavanello (2004, p. 3), a pouca capacidade de percepção espacial de grande número de alunos requerida no exercício, ou compreensão de múltiplas e variadas atividades profissionais, dificuldade de alunos do ensino superior em compreender o processo de demonstração, ou utilizar qualquer tipo de representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos. Além disso, a importância da Geometria se dá, devido seus objetivos de desenvolver a capacidade de

abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível. Pode contribuir para a formação do aluno, desenvolvendo "arte da especulação" que se expressa no estilo hipotético-dedutivo do pensamento geométrico (WHEELER 1981, p. 352 apud PAVANELLO 2004, p. 6)[7]. Pavanello (1993, p. 16), por sua vez, afirma que "o trabalho realizado com a Geometria pode favorecer a análise dos fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, a partir daí, de novos fatos e novas relações.".

Segundo Freudenthal (1956 apud GAZIRE 2000, p.123) a Geometria permeia toda a aritmética, toda a álgebra e toda a análise, funcionando, muitas vezes, como elemento acautelador. Já Bourbaki (s.d. apud GAZIRE, 2000, p. 123) diz que a Geometria clássica é importante devido o seu papel indiscutível no desenvolvimento da Matemática.

Lorenzato (2014, p. 29) diz que o estudo da Geometria é importante para a formação das pessoas, pois desenvolve habilidades específicas de raciocinar. Segundo este autor, ser bom conhecedor de aritmética ou de álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria.

Inúmeros argumentos reafirmam a importância do ensino da Geometria para a formação do aluno. Além dos argumentos apresentados acima, há também os resultados das avaliações em larga escala, que dão indícios de que o ensino no país realmente precisa passar por mudanças, conforme será apresentado a seguir.

Por meio dos dados apresentados por programas de avaliações nacionais, percebemos que a realidade da educação no Brasil está bastante precária. Infelizmente a Prova Brasil e o Pisa não mostram resultados do desempenho dos alunos específicos da Geometria, mas é possível perceber que a dificuldade é geral, para todos os campos da Matemática. Segundo dados do Pisa[8] (Programme for International Student Assessment) o Brasil ficou entre os 10 piores classificados em matemática, sendo que em 2009, entre 61 países avaliados, o Brasil ocupou a 53ª posição, com 386 pontos. Em 2012, entre 65 participantes, o Brasil ficou na 58ª posição, com 391 pontos. E em 2015, entre 70 países, se encontra na 66ª posição, com 377 pontos.

Em âmbito nacional existe a Prova Brasil e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que são avaliações para diagnóstico, em larga escala,

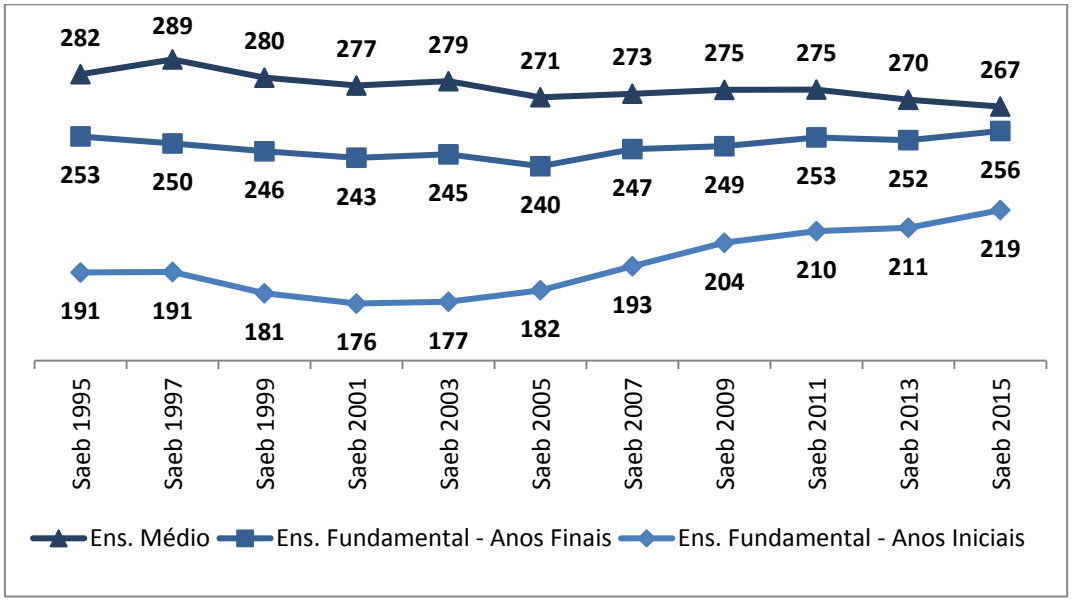
---

[7] WHEELER, D. Imagem e pensamento geométrico. CIEAEM - **Comtes Rendus de 1a 33e Rencontre Internationale**, p.351-353, Pallanza, 1981.
[8] http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-Brazil-PRT.pdf Acesso em 14/10/2016.

desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). São testes aplicados para turmas de quinto e nono anos do ensino fundamental e terceiro ano do ensino médio. As médias de desempenho nessas avaliações também subsidiam o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), ao lado das taxas de aprovação nessas esferas.

Segundo os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2015 as proficiências médias em Matemática evoluíram nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, mas caíram no Ensino Médio pela segunda vez consecutiva.

Gráfico 1 - Evolução dos resultados do Brasil no Saeb (1995 a 2015) – Proficiências médias em Matemática




Fonte: Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB/INEP. Disponível em: http://provabrasil.inep.gov.br/ Acesso em 23/02/2017.

A escala de proficiência permite interpretar o significado dos indicadores. Para o terceiro ano do ensino médio, o nível desejado de conhecimento é o nível 6 que fica na faixa de 350 – 375[9]. Como a nota apresentada neste último indicador é de 267, neste caso, os estudantes encontram-se no nível 2, podendo ser capazes de reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante.

A média nacional dos alunos do Ensino Fundamental – anos finais é de 256 pontos, encontra-se no nível 3 (250 – 275). Neste nível o estudante provavelmente é capaz de reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na

[9] http://provabrasil.inep.gov.br/escalas-de-proficiencia

movimentação de pessoas/objetos. Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro.

Os estudantes do ensino fundamental – anos iniciais, encontram-se no nível 4 (200 – 225) com 219 pontos. Indicando que os alunos provavelmente são capazes de reconhecer retângulos em meio a outros quadriláteros e de reconhecer a planificação de uma pirâmide dentre um conjunto de planificações.

Segundo dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), o nível de aprendizado dos alunos do ensino médio em matemática é o pior desde 2005, início da série histórica da avaliação. Apesar do desempenho insuficiente do ensino médio, fundamental apresenta evolução no Saeb 2015. Os baixos níveis, atingidos pela maioria dos alunos, indicam dificuldades em conhecimentos básicos requeridos nas atividades de Geometria.

Quanto ao ensino das Geometrias nas escolas, seus estudos vêm sendo negligenciados ou pouco explorados pelos professores. Isto é confirmado por vários autores que apontam a grande dificuldade que muitos docentes têm em ministrar conteúdos de Geometria para os alunos do Ensino Fundamental e Médio (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; ALMOULOUD, 2004). Isto acontece devido o rigor exigido nas demonstrações da Geometria de Euclides, e o pouco conhecimento que os professores têm a respeito das Geometrias não euclidianas, por seu desenvolvimento ser mais recente, e pela falta de formação para trabalhar com este novo campo do saber matemático.

O ensino da Geometria, acompanhado por mudanças educacionais, políticas, econômicas e sociais, sofreu modificações no decorrer do tempo, influenciando a forma como se ensina esta disciplina nos dias de hoje. Conhecer essas mudanças é importante, pois pode dar indícios de algumas respostas do porquê de muitos alunos apresentarem dificuldades em desenvolver a aprendizagem da Geometria.

Por este motivo, com base em alguns pesquisadores como Pavanello e Lorezato, serão apresentados de forma sucinta, alguns fatos históricos que foram decisivos no desenvolvimento do ensino da Geometria e como se caracteriza nos dias atuais.

Regina Pavanello (1993, p.7) percebeu que os alunos, a partir da década de 80, mostravam cada vez menos conhecimentos dos conceitos geométricos elementares.

Além disso, muitos professores se mostravam inseguros em incluir a Geometria entre os temas a serem abordados em suas aulas. Segundo as pesquisas da autora, isto se deve à falta de domínio do conteúdo e por não saberem desenvolvê-lo com os alunos. Em busca de respostas para o porquê deste abandono, a autora faz uma retomada de como se deu o desenvolvimento do ensino da matemática no Brasil desde o início do século XX.

Segundo Pavanello (1993), nessa época, o Brasil era um país essencialmente agrícola, com poucas indústrias. O ensino da matemática na escola primária era totalmente utilitário, onde se buscava o domínio das técnicas operatórias necessárias à vida prática e às atividades comerciais. No ensino secundário, os conteúdos de matemática (aritmética, álgebra, Geometria, etc.) eram ensinados separadamente por professores diferentes. Trabalhava-se algumas noções de Geometria, por meio de tratamento puramente abstrato, sem preocupação com aplicações práticas.

Depois da 1ª Guerra Mundial e com o aumento significativo na produção industrial brasileira, começaram as preocupações relativas ao analfabetismo, à difusão da escola primária, à qualidade do ensino, bem como à formação de profissionais para atuar nas escolas. No ano de 1930 foi criado o Ministério da Educação e Saúde, que estabelecem a reestruturação do ensino superior. Na sequência, por meio de um documento conhecido como o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, alguns educadores brasileiros exigiam a criação de um sistema unificado de ensino sob a responsabilidade do Estado. Este documento acabou influenciando a constituição de 34.

Mais tarde, com a constituição de 37, a educação deixa de ser considerado um dever do Estado. Segundo Pavanello (1993, p. 10) dois fatos ocorridos neste período influenciaram o ensino da matemática e da Geometria. Primeiro, a criação das Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro, nos anos de 1934 e 1935, respectivamente, e com isto, iniciaram-se os primeiros cursos destinados à formação dos professores de diversas disciplinas do ensino secundário. E segundo, dividir o ensino secundário em fundamental e complementar. Daí vem a tentativa de unir os diferentes ramos da matemática para um só professor, a fim de integrar os vários assuntos a serem ensinados. O ensino da Geometria deveria iniciar com as ideias intuitivas, para depois desenvolver a sistematização e finalmente a formalização. Apesar da tentativa, nos livros didáticos da época não havia a preocupação com a integração dos assuntos.

Em 1942 houve a reforma do ensino profissional devido demandas econômicas e políticas, porém o curso secundário ainda era o mais procurado, pois possibilitava o acesso a qualquer ramo do ensino superior. E por ser criticado pelo seu excesso de

formalismo, passou por uma reestruturação. O primeiro ciclo passou a ser composto pelo curso ginasial (4 anos de duração) seguido do curso clássico ou do curso científico (3 anos de duração). Com esta configuração, a Geometria era abordada intuitivamente nas duas séries iniciais, e dedutivamente nas últimas, incluindo no currículo a trigonometria e a Geometria analítica. Houve quem criticasse esta reforma, acusando de ser um programa longo e meramente formal.

Segundo Pavanello (1993, p. 12), em fins da década de 50 e início de 60 há um desenvolvimento econômico e industrial acelerado, influenciando mais uma vez o ensino no país. A lei de 1961 das Diretrizes e Bases da Educação Nacional determina que a Matemática do curso secundário nas três primeiras séries, será fundamentalmente de natureza instrumental, e nas séries finais, ressaltar a unidade da matemática e as relações com as demais disciplinas. No início da década de 60, com o Movimento da Matemática Moderna, são lançados os primeiros livros didáticos. Neles há preocupação excessiva com as estruturas algébricas. Para o ensino da Geometria adota-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos, e uma abordagem que se concretiza por meio da utilização dos teoremas e postulados. Esta forma de ensino não privilegia o desenvolvimento do pensamento hipotético dedutivo do aluno. Os problemas que havia no ensino tradicional, segundo a autora, só aumentaram. Além de dificuldades dos professores em relação aos métodos e ao conhecimento, havia agora o problema em saber desenvolver uma Geometria sob o enfoque das transformações. Com isso, muitos professores acabaram deixando de ensinar Geometria. Este problema agravou-se com a LDB de 1971, que permite que cada professor monte seu programa de acordo com as necessidades da clientela.

> O estudo da Geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no segundo grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação por que o Desenho geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (PAVANELLO, 1993, p. 13)

A autora afirma que a implantação da Lei 5692/71 provoca sérias consequências no ensino, há uma superlotação de classes, piores condições de trabalhos para os professores, não há qualquer tipo de apoio pedagógico ou tempo e espaço para debates e reflexões sobre o seu trabalho.

A partir desses eventos brevemente citados acima, a autora afirma que a ausência do ensino da Geometria e ênfase no da álgebra poderiam estar prejudicando a

formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos.

Até então, as tentativas de adequar a Geometria ao ensino não obtiveram resultado satisfatório, porque, segundo Gazire (2000, p.135), todas elas enfatizavam apresentações ou transmissões de aspectos abstratos e formais da Geometria.

Segundo Sant'ana e Zuin (2016, p. 1) entre os anos de 1968 e 1974 o Plano Setorial de Educação e Cultura (PSEC) estabeleceu 34 projetos de caráter prioritário, controlados e avaliados sistematicamente, que trouxeram singularidades para a educação do país. Entre eles, destaca-se o Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio (PREMEM), e o Programa de Expansão e Melhoria de Ensino (PREMEN), com o Projeto de Novos Materiais para o Ensino[10], que privilegiou o ensino da Geometria com um tópico chamado "Geometria Experimental", baseado na ideia de que este é um tema altamente integrador. As unidades eram destinadas a alunos de 3ª a 5ª séries do ensino fundamental, com atividades que tornavam a aprendizagem mais natural, por meio de experimentação, questões motivadoras, levando em consideração as diferenças de cada aluno, incentivando a criatividade, propondo atividades com material concreto e passando gradativamente para as análises lógicas. Gazire (2000, p. 136) considera que este material e as ideias contidas nele influenciaram a criação de muitos projetos para o ensino da Geometria no país. Importantes matemáticos contribuíram com o projeto, como por exemplo, Ubiratan D'Ambrósio, Hassler Witnhey, Guy Brosseau. Embora polêmico, o programa rompeu muitas barreiras.

No final dos anos 70 e início dos anos 80 surge o campo da Educação Matemática, bem como a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e os primeiros programas de pós-graduação em educação matemática. O objetivo de estudo desta nova área é a relação e determinação entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático em um contexto sociocultural específico. (FIORENTINI, LORENZATO, 2009, p. 9). Há também outros fatos importantes enumerados por Lorenzato (2014, p.14) como, por exemplo, a implantação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem); a Prova Brasil e a Provinha Brasil, assim como o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Isso tudo aliado ao grande avanço da Tecnologia de Informática e Comunicação (TIC) que possibilitou o desenvolvimento

[10] Projeto: Novos Materiais para o Ensino da Matemática PREMEN – MEC/IMECC – UNICAMP. Diretor: Ubiratan D'Ambrósio 1972 – 1974.

do Ensino à Distância (EaD). Hoje em dia o Estado deixou de ser o provedor do sistema de ensino e passou a ser avaliador. Foram instituídos programas de avaliações como o Programme for International Student Assessment (Pisa) e as Olimpíadas de Matemática, que descobre muitos jovens talentosos em matemática. Além disso, os educadores recebem apoio das Secretarias Estaduais de Educação por meio de publicações, atividades, experiências, propostas curriculares, subsídios para o ensino da Matemática. (LORENZATO, 2014, p. 15)

O ensino de Geometria é uma das questões que desafia a Educação Matemática, pois conforme afirma Lorenzato (2014, p.28), há décadas tem sido bastante desorientado, frente aos modismos que vão desde o formalismo exagerado até o empirismo inoperante ou até mesmo a quase ausência da Geometria em sala de aula.

Segundo Lorenzato (2014, p. 28) nos últimos anos o ensino da Geometria vem apresentando “sinais de revitalização decorrentes de iniciativas locais de grupos de professores”. Apesar disso, há muitas questões a serem discutidas que envolvem temas como, por exemplo, a Geometria presente nas propostas curriculares e livros didáticos, equilíbrio entre o intuitivo e o dedutivo, o concreto e o abstrato, o experimental e o textual, a Geometria nos cursos de formação de professores, entre outros.

# 2 CENÁRIO DAS PESQUISAS

Depois de retomar alguns aspectos gerais da Geometria, conforme apresentado na seção anterior, é importante conhecer o que as pesquisas abordam em relação ao ensino sob o ponto de vista da Teoria dos Registros em geral e também com foco nas especificidades da Geometria.

## 2.1 O CENÁRIO GERAL DAS PESQUISAS SOBRE A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As pesquisas sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval vem se ampliando consideravelmente entre pesquisadores e professores interessados em encontrar alternativas para melhorar o ensino da matemática de modo a considerar um ponto de vista cognitivo. Será apresentado um panorama geral sobre o cenário das produções que utilizam a teoria dos Registros, em diferentes aspectos, desde 1997 até 2015. Em seguida será feito um recorte, enfocando a análise em produções sobre as teorias dos Registros e a Geometria. Em uma busca por trabalhos que utilizam o referencial teórico de Raymond Duval realizada em 25 Universidades do país foram encontradas 196 teses e dissertações desde 1997 até 2015. Foi realizada uma análise dos resumos das pesquisas voltadas para Geometria à luz da Teoria dos Registros, que será apresentada a seguir.

Pesquisas realizadas entre os anos de 1990 a 2005 estão contempladas no artigo intitulado “Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação” (COLOMBO; FLORES; MORETI, 2008). Neste período já se notava o crescente interesse dos pesquisadores em considerar as contribuições de Raymond Duval como alternativas na busca de soluções para os problemas da aprendizagem da matemática.

Segundo Colombo et. al. (2008) a preocupação dos pesquisadores nesse primeiro período, ao se valerem de aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, gira em torno de buscas para possíveis soluções a fim de minimizar as principais dificuldades apresentadas por alunos de diferentes níveis de ensino. Utilizam como metodologia, na maioria das vezes, as sequências didáticas pautadas em atividades específicas dos conteúdos investigados, aplicadas aos alunos e analisadas qualitativamente.

Um artigo produzido por Ferreira, Santos e Curi (2013) complementa o mapeamento anterior com análise de 80 dissertações e teses da área de Educação Matemática no Brasil, disponibilizados no portal da CAPES, que tiveram seus direcionamentos na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval entre os anos de 2002 a 2012.

Os dados evidenciam, segundo os autores, as preocupações dos pesquisadores em determinar dificuldades de aprendizagem dos alunos em torno de um tema específico, voltados muito mais para a confirmação e validação de hipóteses à luz da teoria, e pouca preocupação com questões referentes a aspectos da prática e da formação dos professores (FERREIRA, SANTOS e CURI, 2013). Nos trabalhos de mestrado o foco foi quase que exclusivo nas operações de tratamento e conversão de um objeto, "o que predominou foi a ideia de que compreender matemática significa transitar e coordenar por pelo menos dois registros de representação semiótica distintos" (FERREIRA et. al. 2013). Os dados apontam ainda às necessidades de reflexões e discussões para desenvolvimento de práticas dos professores que deem conta de trabalhar com as mobilizações de registros que, em termos de congruência, é um desafio para a maioria dos alunos em Matemática. Esta preocupação com a prática é observada somente em alguns trabalhos de doutorado que propõem novas estratégias de ensino e de aprendizagem, procuram articular a teoria dos registros com outras teorias da Educação Matemática, considerando o currículo, a formação de professores, e aspectos cognitivos da teoria (FERREIRA et. al. 2013). Quanto à metodologia os autores apontam que todas as pesquisas utilizam uma abordagem qualitativa. A Engenharia Didática aparece na maioria dos trabalhos, e adotaram as sequências didáticas para elaboração de instrumento para coletar e analisar os dados das investigações.

Outro levantamento que contribui para compor este cenário das pesquisas da Teoria dos Registros de representação Semiótica intitula-se "O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica", e compreende o período de 2006 a 2009 (BRANDT, MORETTI, 2014). A partir das pesquisas os autores apontaram várias temáticas do campo da Educação Matemática que se valem da teoria dos Registros, ressaltando que, cada um dos trabalhos analisados referia-se a diferentes conteúdos matemáticos. Os resultados analisados permitem assinalar inúmeras contribuições que os estudos desta teoria podem trazer para o campo da Educação Matemática. Segundo os autores, as pesquisas apontam caminhos alternativos para a condução da prática educativa dos professores

que ensinam matemática, e o mais importante, para todos os graus de ensino. Além disso, diferentes metodologias podem ser desenvolvidas à luz da teoria para encaminhamento do processo de ensino como, por exemplo, resolução de problemas e modelagem matemática. Outra importante contribuição é a confirmação do paradoxo de Duval, de que não se podem acessar os objetos matemáticos a não ser por meio de suas representações, o que faz com que se torne complexa a aprendizagem da matemática. Apontam ainda a necessidade de desenvolver estudos e pesquisas da teoria de representações semióticas de Raymond Duval visto que os subsídios teóricos das representações semióticas para o trabalho com a matemática têm se mostrado como possibilidades para uma melhor compreensão da matemática em qualquer grau de ensino (BRANDT, MORETTI, 2014).

## 2.2 O CENÁRIO DAS PESQUISAS EM GEOMETRIA À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Entre as 196 teses e dissertações encontradas no levantamento realizado sobre a Teoria de Duval, 35 são direcionadas a aspectos da teoria dos Registros no tocante a Geometria[11]. Com base nos resumos destas pesquisas, percebe-se a preocupação dos pesquisadores em colocar em prática os pressupostos da Teoria dos Registros e também em validar algumas afirmativas a respeito da aprendizagem da Geometria defendida por Duval.

Muitas delas se utilizam de metodologias voltadas para uma proposta de ensino baseado em Teorias como as Situações Didáticas, Engenharia Didática, elaboração de sequência de atividades, que são aplicadas ora para alunos, ora para professores em formação, ou ainda, em menor número, para professores que atuam nas redes ensino. Essas pesquisas têm como objetivo, muitas vezes, a tentativa de propor um ensino que supere as dificuldades de apreensão de conceitos de objetos matemáticos, bem como, a validação dos pressupostos da Teoria dos Registros. Aspectos como estes são contemplados em pesquisas como as que estão apresentadas a seguir.

Muitos pesquisadores se preocuparam em desenvolver propostas de atividades, com objetivo de por em prática as sugestões apresentadas por Duval com sua teoria dos Registros. Maciel (2004), por exemplo, faz uma análise das dificuldades dos alunos a

[11] Os resumos deste estado da arte sobre a Geometria e a Teoria dos Registros estão apresentados no Anexo B.

respeito do conceito de homotetia, concluindo que atividades que trabalham com a ideia de projeção e sombra de variados tipos de configurações, propicia uma abordagem ampla do conceito de semelhança. Maioli (2002) preocupa-se com a formação de professores e propõe uma sequência que leva em conta importância da utilização de diversos registros de representação. Mello (1999), por sua vez, desenvolve uma sequencia didática como proposta metodológica para introduzir a técnica da demonstração, articulando as teorias de Duval (1993, 1995, 1998) e Balacheff[12] (1987, 1988). Vários pesquisadores, entre eles, Facco (2003), Andrade (2007), Bolda (1997) e Buratto (2006) apresentam proposta para o ensino do conceito de área por meio do tratamento figural de reconfiguração propondo atividades que trabalham a composição e decomposição de figuras geométricas. De maneira geral, esses autores confirmaram por meio das sequencias didáticas a necessidade de levar em conta a importância e a complexidade das habilidades visuais na aprendizagem da Matemática por meio de sua exploração heurística, confirmando e validando aspectos da Teoria dos Registros.

Muitas pesquisas se preocupam também em articular a Teoria dos Registros com ambientes computacionais como os softwares Geogebra e Cabri 3D. As três pesquisas a seguir utilizaram como metodologia a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986, 1995). Haruna (2000) analisou como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos e também constatou que o uso do computador pode favorecer a superação dos obstáculos ou proporcionar outros. Rocha (2009) propôs um ambiente computacional ao aprendizado da Geometria Hiperbólica na formação do professor de Matemática baseando-se nos estudos sobre a compreensão das demonstrações de Duval. Miranda (2009), por sua vez, desenvolveu uma ferramenta computacional, utilizando técnicas de Processamento de Línguas Naturais e inseriu nesta ferramenta sequências didáticas no campo da Geometria das Transformações, que proporcionou a aprendizagem dos alunos, que foram capazes de dar encadeamento necessário a uma demonstração a partir de frases já redigidas.

Algumas pesquisas como Freitas (2009), Salazar (2009) e Santos (2010) procuram investigar sobre o papel didático dos softwares de Geometria dinâmica. Destacando aspectos importantes da Teoria dos Registros, tais como a possibilidade de

---

[12] BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathemátiques, vol. 18, n.2, Mai 1977, p. 147-176, 1987.
BALACHEFF, N. Une étude des processos de preuve em Mathemátiqueschez des éleves de collège. Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

mobilização de mais de um tipo de registro, facilita a apreensão perceptiva e as operações figurais, e permite a sua visualização.

A pesquisa de Palles (2013) procura evidenciar a ausência de elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização presentes em uma sequencia didática desenvolvida por Possani (2012) sobre o cálculo de volume do icosaedro no Cabri 3D. A autora propõe modificações a esta sequência que permitam então o desenvolvimento da visualização. Almeida (2010) se preocupa com a possibilidade de resgatar o ensino dos 'Sólidos Arquimedianos' nas escolas. A partir de análises do procedimento renascentista, a autora percebe que os tratamentos apenas figurais não são suficientes. É necessária a mobilização de um registro discursivo para a construção dos Sólidos Arquimedianos. A autora conclui que o Cabri 3D propicia esta mobilização na medida em que permitiu o reconhecimento de existência dos Sólidos arquimedianos enquanto objeto de ensino.

As pesquisas de Veiga (2003) e de Mello (2015) são realizadas por meio de entrevistas, e trazem importantes contribuições de aspectos da teoria relacionados à visualização. A primeira observa a manifestação de diferentes tipos de apreensões, e aponta que a maioria dos alunos, ao realizarem comparações entre comprimentos dos segmentos de uma figura, não optam nem por utilização de instrumentos de medida, nem por meio de propriedades, mas sim pela visualização, que julgam ser suficiente.

Mello (2015), por sua vez, traz importantes contribuições em relação à forma de visualização dos alunos cegos. Defende a necessidade de ensinar a visualizar, pois o reconhecimento do objeto representado não é automático. A ordem de percepção pelo tato é diferente quando o aluno cego tem um objeto concreto em suas mãos e quando tem uma representação deste objeto em relevo no papel. Os alunos atingiram as apreensões perceptiva, operatória e discursiva. A apreensão sequencial não havia sido observada, pois nenhum aluno havia construído figuras geométricas de forma que pudesse reconhecê-las, motivando a pesquisadora a propor a criação da Prancheta de Desenho em Relevo Positiva, com a qual um aluno cego tem a possibilidade de desenhar e sentir o desenho em relevo no papel.

Outras pesquisas (CARVALHO, 2008; ORDEM, 2010; RODRIGUES, 2011; SILVA, 2014; KLUPPEL, 2012) com enfoque diferente das anteriores são voltadas a análise de materiais e livros didáticos, a fim de evidenciar aspectos da teoria de R. Duval nos materiais analisados. Entre os resultados das análises dessas investigações destacam-se alguns apontamentos tais como, pouca exploração de atividades que

desenvolvem a visualização, a representação no plano das figuras tridimensionais não é estimulada, as atividades de conversão de registros são insuficientes e não são devidamente exploradas, as atividades não contemplam diferentes graus de congruências entre registros figurais e discursivos, a apreensão perceptiva não é explorada, uma vez que as figuras se apresentam, na maioria, da forma mais natural à percepção, as modificações mereológicas ou visuais responsáveis pela apreensão operatória das figuras são pouco exploradas nas atividades.

A partir destas evidências apresentadas nas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Geometria, é possível compreender que as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática, mais especificamente, da Geometria, estão diretamente relacionadas ao ensino que vem se desenvolvendo nas escolas por várias décadas, sem a devida fundamentação teórica de um ensino voltado para uma análise semio-cognitiva da aprendizagem, e que dê conta das especificidades deste campo. A Teoria dos Registros tem grande potencial para revolucionar a forma de organizar o currículo e o ensino para que realmente haja uma aprendizagem e desenvolvimento do pensamento geométrico.

# 3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

## 3.1 SEMIÓTICA

Os sérios problemas de aprendizagem dos alunos em relação à matemática estão relacionados às maneiras de acesso aos objetos deste conhecimento. A situação epistemológica do conhecimento matemático é totalmente diferente das demais disciplinas científicas. Duval (2011, p.15) defende a necessidade de outra forma de funcionamento cognitivo, diferente do que se costuma ocorrer, pois segundo ele só assim poderá haver uma verdadeira aprendizagem matemática. Para isto, desenvolveu a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, cujos trabalhos de pesquisa têm influenciado fortemente as pesquisas em Educação Matemática no Brasil. Para entender as ideias que Duval nos propõe com sua teoria, é primordial conhecermos alguns conceitos fundamentais dos quais se originam seus estudos.

Teoria dos Registros e Representações Semióticas – cada palavra que compõem a denominação desta complexa teoria carrega consigo uma vasta carga conceitual que veio se desenvolvendo juntamente com o avanço epistemológico do conhecimento. Duval (2011, p. 16-21) faz uma retomada dos esquemas de análise do conhecimento, com objetivo de esclarecer questões epistemológicas fundamentais que dão embasamento à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Esta retomada é importante para procurar reconhecer suas estruturas constitutivas.

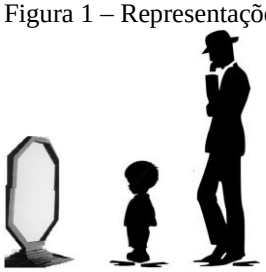
A origem das investigações sobre a natureza dos signos, da significação e da comunicação na história das ciências coincide com a origem da filosofia, e se deu com filósofos do Período greco-romano – Platão (427 a.C. - 347 a.C.) e Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) são os principais. (Nöth, 2008, p.20).

Durante 25 séculos de filosofia a teoria geral dos signos foi aos poucos tomando forma. No início do século XX se transformou no que chamamos Semiótica Moderna. Seus principais precursores foram Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Saussure, que desenvolveram paralelamente seus trabalhos, sem que um tivesse conhecimento do que estava sendo produzido pelo outro. Ambos desenvolveram trabalhos importantes e influentes no campo, sendo considerados os fundadores da Semiótica Moderna. Apesar de sua origem na antiguidade, o signo está entre os elementos considerados nos primeiros modelos de análise do conhecimento como veremos.

O primeiro modelo de análise do conhecimento foi desenvolvido com base na distinção entre representação e o objeto representado. Neste modelo, o signo ainda não aparece como um objeto de estudo e sua definição acaba sendo confundida com a definição de representação. A partir deste primeiro modelo fica explícito que existe sempre muitas representações possíveis para um mesmo objeto, podendo ser do mesmo tipo ou de tipos diversos. As representações diferem conforme os (1) diferentes pontos de vista e (2) os diferentes sistemas utilizados. (DUVAL, 2011, p.19)

A figura 1 ilustra as variações das representações em função dos diferentes pontos de vista.

Figura 1 – Representações em função do ponto de vista.



Fonte: a autora.

Neste exemplo a criança enxerga no reflexo do espelho tanto a sua imagem como a imagem do homem, este por sua vez, enxerga somente a imagem da criança por inteiro e uma parte do seu corpo. Cada um teve em sua mente uma representação diferente de um mesmo objeto observado – no caso a imagem refletida. Existe, portanto, inúmeras representações sob o aspecto do ponto de vista que são as representações de mesmo tipo. No âmbito da matemática podemos usar como exemplo o retângulo – de forma geral, todos têm a mesma noção do que é um retângulo, mas ao representá-lo, cada indivíduo o faz de forma diferente: estreito ou alto, pequeno ou grande, na vertical ou na horizontal, e assim por diante.

Além dessas existe também uma diversidade de tipos de representações. Por exemplo, aquelas obtidas através de algum instrumento (luneta, microscópio, retroprojetor, telescópio, multimídia, etc.), ou aquelas que construímos em matemática (equações, figuras geométricas, representações gráficas), ou ainda aquelas que não são diretamente observáveis (como lembranças visuais, sonhos, etc.) (DUVAL, 2011, p. 18).

Neste primeiro modelo de análise do conhecimento que o autor retoma, é possível compreender características de toda representação. As representações estão estreitamente relacionadas à forma como se tem acesso aos objetos, e são apresentadas

em três situações: A primeira situação que este modelo nos permite compreender se refere aos objetos que se situam na realidade circundante, ou seja, estão em campo perceptivo multissensorial, seu acesso é direto e imediato, as representações que emergem são de uma *percepção imediata* e este é o ponto de partida de todo o conhecimento. A segunda situação trata dos objetos de acesso direto, porém não imediato, são aqueles que se encontram fora da realidade circundante, mas que procedem de uma percepção anterior – uma paisagem da qual se recorda, por exemplo – neste caso "devemos recorrer às representações decorrentes da memória ou às descrições que delas os outros podem fazer" (DUVAL, 2011, p. 20). Em decorrência destas definições surge uma terceira forma de representação: *os conceitos.* Sua existência seria puramente mental ou intencional, pois se refere aos objetos que não decorrem de uma percepção imediata possível. A exploração deste tipo de percepção aparece no segundo modelo, já que no primeiro a ênfase é dada às representações e pouco se refere às questões sobre o objeto e o que o constitui.

Até este momento a relação entre o acesso ao objeto e a sua representação é considerada uma relação de causalidade. Significa dizer que o objeto é a causa da representação, e ocorre quando o objeto permite acesso direto. Sendo assim, o que ocorre quando o objeto não permite um acesso direto e imediato? É neste contexto que podemos compreender a diferença crucial que Duval (2011, p. 20) aponta entre signo e representação.

Segundo Duval (2011, p. 20), a relação entre os *signos* e o que eles designam não pode ser definida em termos de causalidade, como é proposto anteriormente, mas sim como uma situação de referência, em que a expressão verbal é sempre uma produção intencional do locutor que faz referência ao objeto.

Juntamente com os conceitos, a noção de signo surge com o interesse em analisar a forma como uma expressão verbal comunica algo a alguém; o discurso é o exemplo mais comum desse tipo de representação. Possui duas faces: as palavras ditas pelo locutor e a compreensão que tem o interlocutor ao ouvir essas palavras. Para uma compressão mais clara a respeito da diferença entre as duas faces do discurso, optou-se por apresentar aqui uma dinâmica sobre comunicação, na tentativa de ilustrar as considerações de Duval sobre a representação em forma de discurso e as diferenças entre as duas faces do discurso.

Esta dinâmica tem como objetivo mostrar o quanto varia o processo de comunicação tanto para quem fala quanto para quem escuta. Para isto, a dinâmica foi proposta a um grupo de cinco pessoas, escolhidas de forma aleatória.

As instruções para a realização da dinâmica foram as seguintes:

1) Um dos participantes faz o papel do locutor e os demais são os interlocutores.

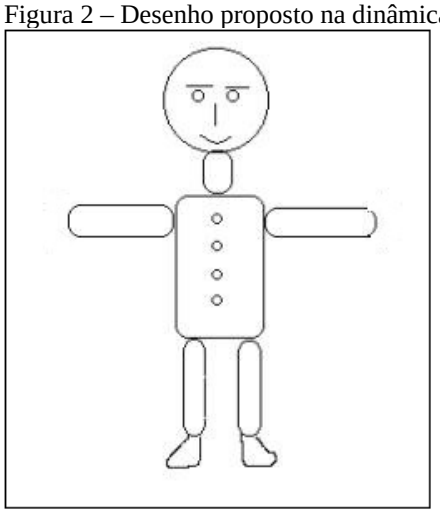
2) O locutor recebe uma folha com um desenho (fig. 2) e deve instruir os demais participantes, passo a passo, através do discurso, para que eles reproduzam um desenho semelhante. O locutor deve dar os detalhes necessários para que o desenho final fique o mais parecido possível com o original, porém sem nomear os objetos que estão sendo representados. Não se deve dizer, por exemplo, cabeça, olhos, braços, mas deve se dar as coordenadas para que cada parte do objeto seja desenhada.

3) Os interlocutores devem reproduzir uma imagem o mais semelhante possível ao desenho original, com base, apenas, nas palavras que ele escutou pronunciar. Não devem fazer perguntas para não influenciar nas instruções do locutor sobre seu próprio discurso. Deve instruí-los, pois, conforme suas próprias percepções.

4) Enquanto realizam a dinâmica, nenhum dos participantes deve ter acesso a nenhum desenho.

O desenho proposto ao locutor foi o boneco a seguir da figura a seguir.

Figura 2 – Desenho proposto na dinâmica



Fonte: acervo da autora.

A dinâmica foi realizada com um grupo de cinco pessoas, uma delas foi o locutor cujo discurso se deu da forma apresentada no Quadro 1.

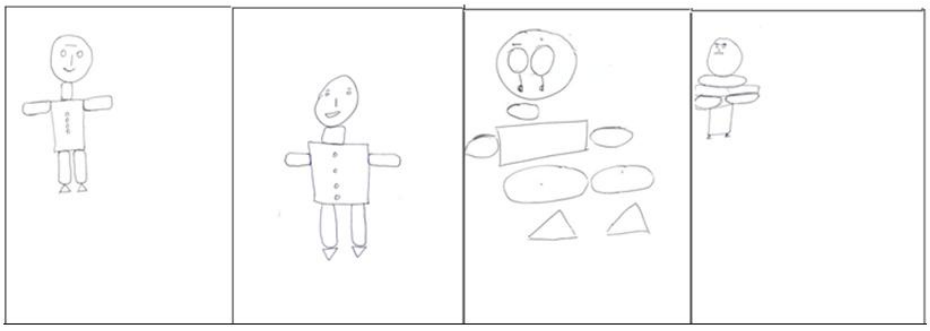
Quadro 1 – Discurso do locutor durante a realização da dinâmica

| |
|---|
| Instruções do locutor:<br>1) Desenhe um círculo.<br>2) Dentro do círculo, desenhar dois círculos menores, um do lado do outro.<br>3) Em cima do círculo pequeno desenhar um risco.<br>4) Embaixo dos dois círculos pequenos desenhar uma linha na vertical, não muito grande.<br>5) Embaixo da linha vertical desenhar uma meia-lua.<br>6) Embaixo do círculo desenhar um retângulo arredondado.<br>7) Em baixo do retângulo, desenhar um retângulo bem grande.<br>8) Do lado esquerdo desenhar um retângulo arredondado. E outro igual do lado direito.<br>9) Embaixo do retângulo grande faz um retângulo arredondado, na vertical.<br>10) Desenhe um igual do lado direito do retângulo<br>11) Em baixo de cada retângulo desenha um triângulo.<br>12) Dentro do retângulo grande desenha quatro círculos na vertical. |

Fonte: Transcrito da gravação feita no momento da dinâmica.

O discurso é uma forma de representação e as palavras pronunciadas são **signos**. Segundo Santaella (2002, p. 12) o signo é composto por dois objetos e três interpretantes. Interpretante se refere a um processo relacional que se cria na mente da pessoa que interpreta, o signo. **Objeto imediato** é o signo em si, ou seja, é a aparência do desenho, ou a palavra na sua forma gráfica ou acústica. **Objeto dinâmico** aquilo que o signo substitui. **Interpretante dinâmico** é um processo de relação entre o signo e o objeto, que o signo produz em cada uma das mentes que interpreta, portanto, o interpretante dinâmico é diferente para cada indivíduo. O resultado deste processo pode ser notado nos desenhos que cada participante elaborou (figura 3). **Interpretante imediato** é uma relação entre signo e objeto que é comum a qualquer mente interpretadora, por exemplo, o signo 'círculo' remete a qualquer objeto que se caracterize um círculo. **Interpretante em si** trata-se de uma relação entre o signo e o objeto em que todas as pessoas reagiriam da mesma forma, como a placa de trânsito para virar à direita, por exemplo. (SANTAELLA, 2002, p.12).

Figura 3 – Representações diferentes de um mesmo discurso.



Fonte: elaborado pelos participantes.

Se observarmos as instruções pronunciadas pelo locutor e os desenhos dos ouvintes, percebemos que nada sai exatamente como o desenho original, nenhum traço, disposição do desenho na folha, tamanho, etc. Assim a primeira característica dos signos resulta dessa dualidade das expressões verbais.

Em outras palavras o discurso é uma produção intencional cuja . Ao instruir os demais, a atenção do locutor está inteiramente centrada naquilo que ele quer dizer, e pouco ou nada no que ele realmente diz. Não presta atenção na precisão do que diz, e também não distingue as coisas que ele visa intencionalmente e o sentido das palavras que ele emprega. Quem ouve, não tem acesso à imagem, para que possa compreender o que o locutor quer dizer, sua atenção é voltada exclusivamente às palavras pronunciadas pelo locutor. Compreende algo diferente do que o locutor quis dizer. (DUVAL, 2011, p. 21)

As representações estão no lugar dos objetos, mas não são os objetos. Essa característica das representações é comum aos signos. No entanto, signos são diferentes de representações, segundo afirma Duval (2011, p.22-23), por causa de sua relação de referência e não de causalidade com o objeto. E a relação de referência se dá a partir de uma produção verbal intencional, que resulta no que Duval chama de Operação Intencional de Designação.

Eis uma definição clássica de signo: “O signo é uma coisa que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa” (DUVAL, 2011, p.23).

Saussure, segundo Duval (2011, p.23) apresenta uma definição revolucionária dos signos, sendo que não têm nenhuma realidade material, não são invariantes que mudam sensivelmente, e são constituídos por suas relações de oposição aos outros no interior de um sistema. Duval (2011, p. 30) explica que, segundo esta definição, os signos não têm nada de sensível, é sua produção vocal ou gráfica que o torna sensível, e só funciona como signo se estiver situado no interior de um sistema semiótico. Por exemplo, o número 10 tem um sentido no interior do sistema de numeração de base dez, e outro sentido no interior do sistema de numeração de base dois.

Na definição de Peirce o signo tem a função de representar um objeto, este signo cria na mente da pessoa outro signo equivalente. (PEIRCE apud MORETTI, 2012, P. 381).

> Um signo intenta representar, em parte, pelo menos, um objeto que é, portanto, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo que o

> signo represente o objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente de tal modo que, de certa maneira, determina, naquela mente, algo que é mediatamente devido ao objeto. Essa determinação da qual a causa imediata ou determinante é o signo e da qual a causa mediada é o objeto pode ser chamada de interpretante (PEIRCE apud SANTAELLA, 2002, p.58).

Só pode ser chamado signo algo que tem o poder de representar/substituir outra coisa diferente dele. O signo representa na mente do intérprete (a pessoa que interpreta) outro signo que traduz o significado do primeiro – esse processo de interpretar o primeiro signo com outro signo chama-se interpretante. Peirce estabelece uma rede de classificação, sempre triádica, dos tipos de signos, dividindo-os em dez tricotomias que resultam em 64 classes de signos. Destaca-se aqui, a tricotomia do signo com seu objeto, que resulta nos signos chamados *ícone, índice* e *símbolo.*

O *índice* tem caráter dual, ou seja, uma conexão entre o fato e o todo. Sua relação com o objeto, conforme indica Duval (2011, p.33), é de causalidade, ou seja, o objeto é acessível. É um produto do fazer humano, que deixa marcas, remanências, conexões; uma pegada ou um rastro são exemplos de índice. O *ícone* é chamado quase signo, pois não representa o objeto e sim uma qualidade do objeto, possui alto poder de sugestão. O *símbolo* traz em si caracteres icônicos e indiciais, são signos de lei e gerais; por exemplo, o objeto "mulher" dá uma ideia não de uma coisa específica, mas sim uma ideia abstrata que pode representar qualquer mulher (SANTAELLA, 2002, p. 91). Tanto o ícone quanto o símbolo são signos que possuem uma relação de referência com o objeto representado, a diferença é que o ícone é semelhante ao objeto e o símbolo não (DUVAL 2011, p.33). As tríades Peirceanas funcionam como um grande mapa rigorosamente lógico, que permite através da Semiótica, criar conceitos, descrever, analisar e interpretar linguagens.

As contribuições de Frege (1978) são relacionadas à forma de produção semiótica específicas para a matemática. Introduz a distinção entre sentido e referência, significante e significado. Duas expressões podem ter sentidos diferentes (ou conteúdos diferentes), mas representar o mesmo objeto, por exemplo, "3+9" e "24/2". Frege manteve-se no campo da álgebra e da análise, Duval estende essas contribuições para os demais campos da matemática, inclusive a Geometria.

Valendo-se das contribuições e esbarrando nos limites de cada uma dessas três vertentes semióticas, Duval busca um modelo de análise que permite descrever os

processos de compreensão e as causas das dificuldades recorrentes na aprendizagem da matemática, desenvolvendo então a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

## 3.2 PONTO DE VISTA MATEMÁTICO X PONTO DE VISTA COGNITIVO

Duval (2013, p.11), em entrevista concedida por email e publicada na Revista Paranaense de Educação Matemática, descreve como surgiu seu interesse pela Teoria dos Registros.

O autor conta que foi contratado para trabalhar com a reforma da Matemática Moderna, em 1970, e acabou discordando de muitas propostas defendidas por este movimento. O uso de figuras era denunciado e proibido por ser considerado como uma fonte de confusão. O foco da reforma, que, segundo Duval, criou sérias dificuldades de compreensão, era a substituição sistemática das palavras e da língua natural pelo uso de sinais e símbolos para designar os objetos, as relações e as operações aritméticas, algébricas, lógicas, de conjuntos, etc.

Para os pesquisadores envolvidos na reforma, "a matemática não era, absolutamente, uma questão de linguagem, e a única coisa que importava em matemática eram os 'conceitos' que, como tem sido repetido até aborrecer, são 'mentais'" (DUVAL, 2013, p. 12). Além disso, o ensino deste período era conduzido pelo estruturalismo e a teoria de Piaget afirmava que a conceituação era feita a partir da "ação" e de "esquemas de ação" e não a partir da linguagem.

O autor criticava as experiências de demonstrações baseadas na análise piagetiana que incidia sobre a compreensão da implicação material (o "se...então..."), ou inspiradas por uma abordagem heurística que, seguindo Polya, enfatizava os métodos de demonstração. Isso tornava a Geometria incompreensível. Alguns anos mais tarde os professores passaram a atribuir as dificuldades dos alunos em matemática a um problema de compreensão de enunciados. Tendo a linguagem como foco de discussão, Duval vale-se das contribuições de Saussure, que considera a língua natural como um sistema composto por signos, que independente de qualquer referência a um objeto, tem algum sentido.

Diferente das outras disciplinas, a especificidade da matemática é que não existe acesso perceptivo aos objetos matemáticos, pois este acesso só é possível por meio das representações semióticas, as quais não podem ser confundidas com os objetos

que representam. Neste aspecto, Frege traz contribuições aos estudos de Duval ao fazer distinção entre sentido e referência que permite explicar como uma representação semiótica poderia ser convertida em outra representação semiótica, com diferentes conteúdos de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, o objeto 'reta', pode ser representado por diferentes tipos de registros, cada um com seus conteúdos específicos como: equação da reta, representação gráfica, representação figural, etc. Por este motivo, Duval (2013, p. 14) defende que, do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de *transformações de representações semióticas* e não de conceitos puramente mentais e assemióticos. E atribui as dificuldades de compreensão na aprendizagem da matemática ao uso confuso que fazem das representações.

Duval considera duas faces da aprendizagem matemática: a face exposta, que corresponde aos objetos matemáticos, suas propriedades, fórmulas e algoritmos aos quais eles dão origem, às demonstrações. E a face oculta, que corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática, ou seja, as transformações (conversão e tratamento) que constituem a atividade matemática.

Nas escolas, o ensino foca a face exposta, no qual os conhecimentos são decompostos em uma sequência de conteúdos ao longo dos anos. Tudo é feito sob o ponto de vista dos professores, que escolhem o que devem trabalhar em sala de aula, baseando-se nos conteúdos pré-requisitos para o ano seguinte. As sequências didáticas elaboradas neste contexto visam à aquisição de um conteúdo matemático específico, que resulta em um "saber fazer" que serve como uma ferramenta para resolver um problema prático ou matemático.

Duval (2013, p. 18) chama a atenção para a aprendizagem do ponto de vista dos alunos, em que a face oculta é tão importante quanto à face exposta. O autor desenvolve a Teoria dos Registros de Representação Semiótica visando à modelagem do funcionamento semio-cognitivo, que diz respeito à face oculta da atividade matemática, e sem a qual não é possível chegar a um conceito. Afirma que o problema das dificuldades dos alunos não decorre da aquisição de conceitos, mas sim do desconhecimento total dos gestos intelectuais específicos da atividade matemática, ou seja, faltam atividades que permitam levar os alunos a tomar consciência das conversões e tratamentos específicos, e que se referem às variações do conteúdo das representações dos diferentes registros.

Neste sentido, o autor defende que o ensino não deveria ser observado a partir do ponto de vista do professor e do que eles acham que devem fazer, mas sim do ponto de vista do aluno. Para isto, é preciso olhar para as reações e produções dos alunos, e não para a introdução de um conceito particular.

As diferenças entre o ponto de vista cognitivo e o ponto de vista matemático são demasiadas, além disso, o ensino de conceitos e o ensino de conscientização dos gestos intelectuais não são compatíveis. Duval distingue algumas palavras com sentidos diferentes, que são apresentadas na tabela a seguir:

Quadro 2 – Diferença entre ponto de vista matemático e ponto de vista cognitivo

| Palavra | Ponto de vista matemático | Ponto de vista cognitivo |
|---|---|---|
| Compreender | Ser capaz de justificar um resultado por meio de uma propriedade. | Reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas, cujos conteúdos não têm nada em comum. Pensar de forma espontânea em substituir uma dada representação por outra. |
| Ter sucesso | Alcançar um resultado matematicamente correto para uma pergunta ou um problema.<br>Isso é avaliado em uma escala de tempo muito pequena, logo após a sequência de atividades que visava uma nova aquisição. | Ser capaz de realizar com êxito a transferência de um conhecimento aprendido em situações totalmente diferentes e sem jamais tê-las visto antes. Isso é avaliado numa outra escala de tempo muito maior, ou seja, com o decorrer dos anos e para além do término dos estudos. |
| Dificuldades | Surgem como obstáculos à progressão na aprendizagem se manifestam por meio de erros ou, ainda pior, por bloqueios. | A análise de dificuldades é um dos pontos metodologicamente e teoricamente cruciais de pesquisas sobre o ensino da matemática. |
| Erros | Quando se permanece unicamente na face exposta da atividade de matemática, procura-se explicar todas as dificuldades que os alunos encontram, como se fossem erros transitórios, decorrentes da complexidade epistemológica dos conceitos a serem adquiridos. | <u>Erros transitórios e específicos:</u><br>Existem erros que estão relacionados com a fase de introdução de um novo conceito ou de um novo procedimento.<br><u>Erros transversais:</u> que ressurgem sistematicamente e independente do conteúdo matemático a mobilizar. Eles bloqueiam qualquer progresso real na aprendizagem matemática. |

Fonte: Adaptado de Duval, 2013, p. 20-21.

Para fazer uso da Teoria dos Registros em sala de aula, Duval (20013, p. 26) defende a necessidade de mudar a perspectiva sobre a atividade matemática. Uma atividade que o autor propõe é a de levar os alunos a construir tabelas completas, principalmente na construção das margens e não só preenche-las em seu interior. Ou seja, é importante levar o aluno a pensar em como organizar uma tabela, quais dados se relacionam entre si, como nomear as linhas e as colunas que deverão compor as

margens da tabela. Isso permite que os alunos se envolvam na escolha de critérios para organização e interpretação dos dados, permitindo a visualização heurística de possíveis regularidades, formulação de conjecturas ou conversão da descrição de dados de um problema em uma equação ou um sistema de equações.

O autor propõe também mudar a forma de trabalhar com problemas. Os conhecimentos matemáticos necessários para a resolução de um problema devem ser, segundo o autor, escolhidos por aquele que o elaborou e, por este motivo é necessário fazer com que o aluno descubra como elaborar um problema matemático a partir de um conhecimento matemático. Esta não é uma proposta simples, e deve ser realizada por meio de tarefas especificas em função das variáveis cognitivas relativas à face oculta da atividade matemática, do contrário, o aluno acaba simplesmente reproduzindo problemas conhecidos.

Os objetivos globais do ensino devem visar o desenvolvimento da autonomia intelectual de cada indivíduo, o que significa, do ponto de vista psicológico, segundo Duval (2013, p. 21), que o aluno adquire confiança em si mesmo, dominando assim a manifestação dos seus gestos intelectuais de forma espontânea, sendo capaz de *transferir conhecimentos* à novas situações. Por este motivo o ensino da matemática é tão importante quanto o ensino da língua natural.

A organização institucional do ensino fundamenta-se nos objetivos e competências que se impuseram devido à importância crescente dada à avaliação em todos os sistemas educativos em pequena ou em larga escala. A competência, segundo Duval (2013, p. 30) é definida como um "*saber fazer*", imposta progressivamente no ensino, e decompõe o conhecimento em termos de *tarefas a fazer*. E assim, tarefas identificadas como simples, são cognitivamente complexas aos alunos.

Ambientes informatizados vêm mudando um pouco este cenário das atividades matemáticas, e constituem um ambiente de transformações de representações e que permite um enorme poder de visualização. Softwares como o *Cabri-géomètre,* por exemplo, permite construir figuras via instruções utilizando termos técnicos e utilizando uma ordem geométrica de construção.

Em relação à Geometria a aprendizagem não está nos conceitos, como se propõe nas escolas, mas sim na coordenação entre os tratamentos figurais e discursivos. O problema é que a maioria dos alunos está longe de ter adquirido essa coordenação e as atividades propostas no ensino não parecem suficientes para favorecê-la. Sendo assim, será apresentada a seguir uma análise dos diferentes tratamentos relativos ao

registro das figuras sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, com o propósito de conhecer determinados aspectos específicos para o desenvolvimento do pensamento geométrico, ou seja, desenvolvimento de mobilizações cognitivas específicas, necessárias para a aprendizagem da Geometria.

## 3.3 A GEOMETRIA SOB O PONTO DE VISTA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Duval afirma que "ver" uma figura em Geometria não é algo simples, e por isso precisa ser ensinado. Os olhares passam por uma evolução que vai do olhar icônico ao olhar não icônico, conforme veremos a seguir, e estão presentes nas apreensões necessárias às atividades geométricas (DUVAL, 2005[13] apud Moretti, 2013, p. 293).

Há, segundo Duval (2004, p.156), uma originalidade nas atividades de Geometria que diferem de outras atividades matemáticas. Trata-se da necessidade de coordenação entre os tratamentos específicos ao registro das figuras, utilizado para designar as figuras e suas propriedades, e os do discurso teórico em língua natural, utilizado para enunciar as definições, teoremas, propriedades, entre outros.

Duval (2004, p.156) afirma que uma figura só se caracteriza como figura geométrica, se houver esta coordenação simultânea entre os dois tipos de representação que compõe a figura geométrica, ou seja, quando apresenta uma forma visual acompanhada de um discurso. Outro problema que o autor coloca é que muitas vezes a percepção imediata e automática que se tem ao visualizar uma figura é, muitas vezes, contrária ao discurso que a acompanha. É necessário que os tratamentos figurais e discursivos se efetuem simultaneamente e de maneira interativa, porém, nem sempre a interpretação perceptiva quase automática que se faz das figuras é pertinente com a interpretação matemática que se apresenta no discurso. Quando ocorre esta divergência, o aluno tende a realizar os tratamentos matemáticos com base em sua percepção espontânea e não na interação da figura com o discurso.

Além da evolução dos olhares presente nas atividades de Geometria, serão apresentadas neste trabalho as condições prévias para que, segundo Duval (2004), haja uma descrição precisa dos diferentes tratamentos matemáticos pertinentes no registro das figuras, que serão apresentadas na sequência, são elas:

---

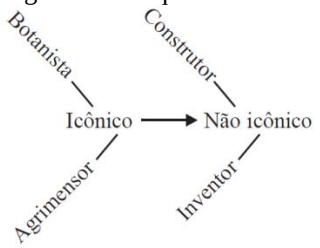
[13] DUVAL, R. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie**: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leursfonctionnements. Annales de didactiqueet de sciencescognitives, 2005. v. 10, p. 5-53

- a determinação das unidades de base constitutivas deste registro;
- as possibilidades de sua articulação nas figuras;
- as modificações das figuras obtidas.

### 3.3.1 Evolução dos olhares

Aprender a olhar, segundo Duval (2005[14] apud Moretti, 2013, p. 293), exige que passemos do olhar icônico para o olhar não-icônico seguindo o percurso da figura 4.

Figura 4 – As quatro maneiras de olhar uma figura geométrica.




Fonte: construído por Moretti (2013, p.293) a partir de Duval (2005, p.5-12).

Em olhares icônicos as formas reconhecidas podem ser simultaneamente distinguidas como as formas ou os contornos de objetos da realidade. Os olhares não icônicos são mais elaborados, e exigem a tomada de consciência de propriedades geométricas, pois não se trata mais de figuras semelhantes às da realidade, mas sim da representação de objetos matemáticos determinados pelo discurso.

**- Botanista**: é aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, é um "olhar qualitativo":

> E trata-se, evidentemente, de observar diferenças entre duas formas que apresentam certas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e de notar certas semelhanças entre formas diferentes (um quadrado e um paralelogramo). Aqui, as propriedades diferenciadas são características visuais de contornos. (DUVAL, 2005, p.5 apud MORETTI, 2013, p. 294).

Não há nenhum tipo de propriedade, medida ou relação que precisa ser reconhecida em atividades que requerem este tipo de olhar, apenas observar semelhanças e diferenças sem, no entanto, quantificá-las ou estabelecer relações

[14] DUVAL, R. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie**: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leursfonctionnements. Annales de didactiqueet de sciencescognitives, 2005. v. 10, p. 5-53

métricas entre elas. Mas, as qualidades requeridas neste olhar preparam os alunos para os demais olhares.

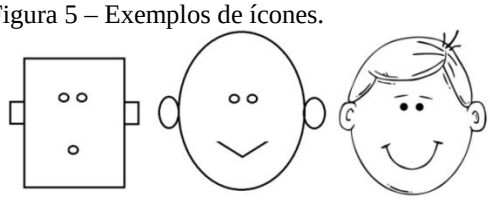
**- Agrimensor**: é aquele que faz medidas no terreno e consegue passar essas medidas para o plano do papel. As atividades que exigem este tipo de olhar são aquelas que passam de uma escala de grandeza a outra: "[...] neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida", como por exemplo, o procedimento utilizado por Erastóstenes para medir o raio da terra. (DUVAL, 2005, p.6, apud MORETTI, 2013, p. 294).

**- Construtor**: se forma no uso de instrumentos – régua não graduada e compasso. O aluno pode verdadeiramente tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva (DUVAL, 2005, p. 6). Atualmente, alguns programas computacionais – como, por exemplo, o GeoGebra e o Cabrigéomètre – podem substituir o uso desses instrumentos.

**- Inventor**: é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. Um exemplo de uma atividade para o inventor é: Como dividir um triângulo em duas partes para que essas partes possam ser acopladas para formar um paralelogramo (DUVAL, 2005).

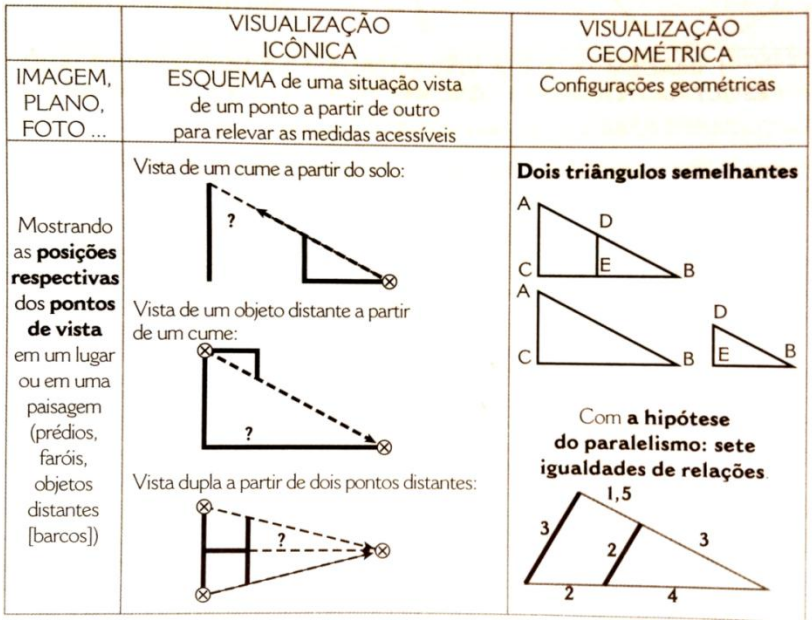
Nas figuras a seguir são apresentados alguns exemplos que diferenciam os olhares icônicos e não icônicos.

Figura 5 – Exemplos de ícones.



Fonte: Adaptado de Duval (2011, p. 86).

Figura 6 – Três situações reais de aplicação do teorema de Tales.




Fonte: Duval, 2011, p. 96

Os olhares icônicos, segundo Moretti (2013, p. 294) possuem muito pouco do que se poderia chamar de atividade em Geometria, pois não há nenhum tipo de propriedade a ser reconhecida em atividades que requerem este tipo de olhar, apenas observar semelhanças e diferenças. Porém sua importância é fundamental, pois as qualidades requeridas neste olhar preparam os alunos para os demais olhares.

O olhar do botanista é exigido em atividades que mobilizam a apreensão perceptiva dos registros figurais, à qual as demais apreensões são subordinadas. Por outro lado, o olhar do construtor exige todas as apreensões – perceptiva, operatória, discursiva e sequencial. As duas primeiras são especificas ao registro das figuras, e as duas últimas dependem da articulação entre o registro discursivo e sequencial. Essas apreensões serão abordadas a seguir.

### 3.3.2 Maneiras de ver

Para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem precisar mudar a representação no papel. Além disso, é necessário também estar atento à passagem da dimensão física à dimensão representada, conforme as situações que Duval (2011, p. 86) coloca: maquetes de cubo (3D/3D), gabaritos (2D/3D), fios estendidos ou um raio de laser (1D/3D), representações semióticas em perspectiva (3D/2D), contorno fechado de superfícies (2D/2D), traçados de curvas e retas (1D/2D).

Existem três maneiras de “ver” uma figura geométrica. Duas delas são comuns a qualquer imagem, trata-se da decomposição por **justaposição** e da decomposição por **superposição.** A terceira maneira é ver em **unidades figurais**, e só tem sentido em matemática. A percepção focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão maior da figura (justaposição ou superposição), enquanto o tratamento da situação matemática representada requer que se restrinjam as unidades figurais de dimensões menores. Esta mudança de dimensão necessária nas atividades de Geometria, Duval chama de **desconstrução dimensional**, e é onipresente em toda definição, raciocínio, explicação relacionados às figuras geométricas. As unidades figurais de dimensão 2 são estudadas em Geometria como configurações de unidades figurais de dimensão 1 e 0, como no exemplo apresentado a seguir. (DUVAL, 2011, p. 85-88).

Quadro 3 – Definição de Triângulo – visualização de unidades elementares unidades figurais

| | |
|---|---|
| | **Triângulo** (2D) é uma figura geométrica formada por três retas (1D) que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto (0D), formando três lados e três ângulos. |

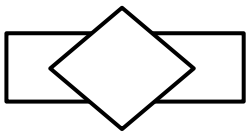
Fonte: a autora.

No quadro o triângulo é definido em termos de retas e pontos, determinando os ângulos. O caminho percorrido pelo olhar em relação às mudanças de dimensões necessárias foi 2D→ 1D →0D→2D.

Em geral, a aplicação de definições ou teoremas nas figuras geométricas tende a privilegiar as unidades de dimensão inferior àquela apreendida pela percepção, este é um fenômeno próprio à articulação dos registros das figuras com o discurso matemático e se estende também às figuras de dimensão 3. (DUVAL, 2004, p. 171)

O quadro a seguir apresenta uma figura de configuração global (2D/2D)[15] e as diferentes maneiras de ver esta figura, segundo Duval.

Quadro 4 – Maneiras de ver uma figura geométrica

| | |
|---|---|
|  | - Decomposição por **superposição**: 1 losango e 1 retângulo. (2D/2D)<br>- Decomposição por **justaposição**: 3 formas poligonais 2 pentágonos e 1 losango (2D/2D)<br>- Ver em unidades **figurais**: 10 segmentos de reta ou 8 retas subjacentes (1D/2D) |

Fonte: adaptado de Duval (2011, p.87).

[15] (2D/2D) - objetos de dimensão 2 representados no plano (2D)

A maneira matemática de ver as figuras em Geometria exige que possamos passar espontaneamente ou rapidamente de uma para a outra. São variações que se operam somente no olhar e não na figura (DUVAL, 2011, p.87).

A primeira forma de "ver" esta figura e que nos salta aos olhos é a decomposição por superposição, pois a percepção imediata é a de um losango superposto a um retângulo (2D→2D). A segunda maneira é a decomposição por justaposição, na qual se visualizam três figuras justapostas (2D→2D), ou seja, um losango e dois pentágonos. E a terceira é a visualização das unidades figurais, que exige um salto cognitivo em relação à maneira normal de ver. Esta forma de "ver" exige a desconstrução dimensional, possibilitando uma visualização de unidades figurais de dimensão inferior à da figura dada (2D→ 1D), que podem ser interpretadas de duas maneiras, ou uma configuração de figura formada por dez segmentos de reta, ou uma configuração formada por oito retas.

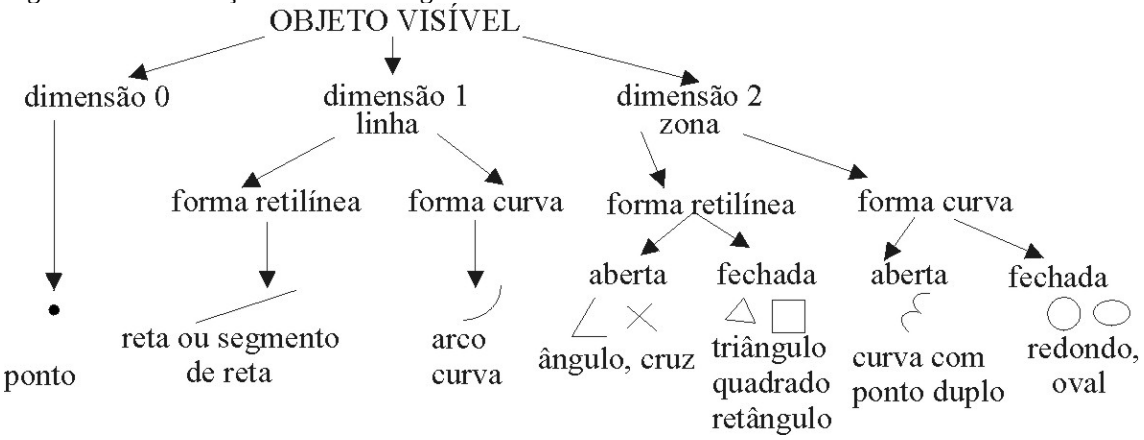
Nesse exemplo, a superposição se impõe ao olhar bloqueando a visualização de outros reconhecimentos das unidades figurais. Para ir além da visão natural é necessário um longo treinamento. Não é o que ocorre nas escolas onde, segundo Duval (2011, p.88) se proporciona o ensino de "ver" de maneira violenta e irrealista, que se fundamenta em enunciado de propriedades, definições e teoremas.

Segundo Duval (2011, p. 94), para fazer o aluno assimilar essa maneira de ver da desconstrução dimensional, é preciso elaborar tarefas e problemas específicos desde o ensino primário.

### 3.3.3 As unidades constitutivas de uma figura geométrica

Toda figura apresenta valores que Duval (2004, p. 157) classifica em dois grandes tipos de variação visual. Uma que trata da **qualidade** da figura, determinada por características, tais como: forma (linha reta ou curva), contorno (aberto ou fechado), variação de tamanho, orientação, etc. Outra que se refere à **dimensão** que a figura apresenta, como cubos, pirâmides, esferas (3D), polígonos, círculos (2D), retas, curvas (1D) e pontos (0D). Em uma figura geométrica, a característica que se destaca é a *forma*, ela é essencial para determinar uma unidade de base representativa. O cruzamento desses valores permite definir as **unidades figurais elementares,** conforme a classificação apresentada pelo autor na figura 7.

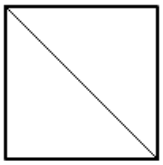
Figura 7 – Classificação de unidades figurais elementares




Autor: Duval (2004, p.159)

As figuras apresentam uma heterogeneidade de unidades figurais e de diferentes dimensões, conforme pode ser observado no exemplo do quadro a seguir, que apresenta uma representação de um quadrado traçado por uma de suas diagonais.

Quadro 5 – Exemplo de unidades figurais elementares de um registro figural.

| | |
|---|---|
|  | Unidades figurais elementares presentes na figura:<br>- 1 quadrado (2D)<br>- 2 triângulos (2D)<br>- 5 segmentos de reta (1D)<br>- 4 pontos (0D) |

Fonte: a autora.

A articulação do registro das figuras com o discurso matemático exige uma mudança contínua de dimensões a fim de discernir as unidades figurais, isto porque, enquanto a percepção automática das figuras se dá na dimensão 2, as aplicações de definições e de teoremas se fazem em unidades figurais de dimensões 1 e 0. Este é um fenômeno geral ao qual é atribuída a complexidade da atividade geométrica e que deve ser superado para que realmente haja aprendizagem. Isto explica a dificuldade dos alunos nas tarefas que exigem a descrição de figuras geométricas. Nessas tarefas o aluno deve passar do registro figural para o registro discursivo, portanto a apreensão do fenômeno apresentado acima é indispensável. A maioria dos alunos não emprega um vocabulário correto, não reconhece a intersecção de retas como sendo um ponto, troca termo como redondo no lugar de círculo, e também não consegue identificar corretamente os objetos representados. Com base neste tipo de atividade, o autor constatou que os alunos evitam ao máximo transformar uma unidade figural de dimensão 2 em uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 e 0 (DUVAL, 2004, p. 160-161).

### 3.3.4 Tratamentos próprios ao registro das figuras geométricas

Uma figura é um importante suporte intuitivo para as atividades em Geometria, pois permite ver muito mais do que diz o enunciado. Para resolver um problema, é necessário limitar a classe de hipóteses ou alternativas a ser considerada sob a figura. Isto se dá por meio da conduta de abdução, que consiste em limitar a atenção somente sobre os caminhos que conduzem a uma solução. Pois em geral uma figura apresenta mais elementos do que é necessário para sua resolução. Com base na pergunta de ordem matemática, deve ser focalizada uma determinada forma de visualizar a figura, deixando de lado outras que não são relevantes, conforme requer cada situação. Segundo Duval (2004, p. 161), a heurística das figuras é guiada por esta conduta de abdução, e aponta em quais tratamentos ela se baseia.

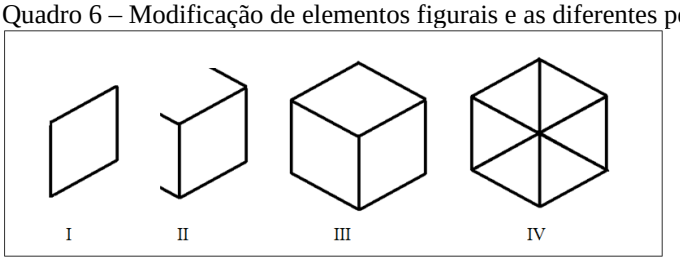
Os tratamentos figurais dizem respeito ao registro das figuras independente de todo conhecimento matemático, e são vinculados à possibilidade de modificações que podem efetuar-se nas figuras. Essas modificações podem ser óticas ou posicionais, e podem ser efetuadas física ou mentalmente. Sua importância se dá pelo fato de que nem sempre é fácil "ver" sobre uma figura as relações e propriedades pertinentes à solução. Há, segundo o autor, quatro tipos possíveis de apreensões de uma figura: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial. (DUVAL, 2004, 2011, 2012a, 2012b).

#### 3.3.4.1 Apreensão Perceptiva: reconhecimento das unidades figurais em uma figura geométrica

A percepção corresponde ao primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, no qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada. Não há dificuldade em reconhecer uma unidade figural de dimensão 2 que se apresentam separadamente. Porém o reconhecimento das unidades figuras integradas a uma configuração podem levar mais ou menos tempo, dependendo da orientação que tenham em relação a sua orientação visual típica. Isto se dá por dois motivos. Primeiro, a predominância das unidades figurais de dimensão superior. Segundo, uma figura apresenta mais unidades figurais elementares que as requeridas para construí-la.

Observe o quadro 6 abaixo com a sucessão de figuras apresentadas:

Quadro 6 – Modificação de elementos figurais e as diferentes percepções

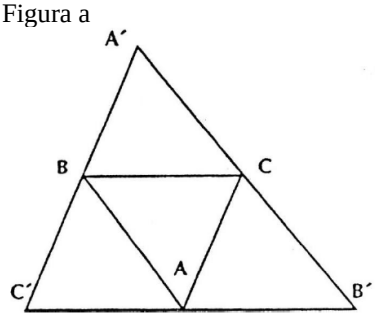
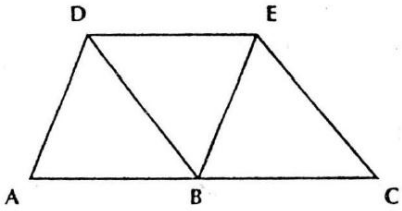



Fonte: a autora.

Analisando as figuras podemos verificar que, em primeiro lugar, não se tratam de figuras geométricas, pois para isto, falta algum discurso a respeito do que se apresenta no desenho. Sob o olhar da apreensão perceptiva a figura I passa a impressão de ser a figura plana de um paralelogramo, enquanto as figuras II e III, depois de algumas modificações realizadas, apresentam outra configuração cuja percepção é a de um objeto tridimensional, o cubo. Finamente, com mais alguns modificações, na figura IV percebe-se um hexágono regular de dimensão 2. Alguns traços nas figuras podem mudar completamente a percepção sobre ela. Este primeiro nível de apreensão é independe de qualquer propriedade, definição ou teorema, pois não há nenhum discurso que acompanha a figura, portanto podemos dizer que não se trata de atividade geométrica propriamente dita, porém sua apropriação é indispensável para a aprendizagem da Geometria. Além disso, é extremamente importante, pois todas as demais apreensões são subordinadas a apreensão perceptiva, é ela que orienta os demais níveis de apreensão.

No quadro 7 encontram-se dois problemas apresentados por Duval. Trata-se de um mesmo problema apresentado de forma diferente, modificando com isto, o nível de dificuldade que se apresenta.

Quadro 7 – Problemas propostos a estudantes de 9º ano.

| Figura a | Figura b |
|---|---|
|   A'C' e AC são paralelas,<br>A'B' e AB são paralelas,<br>B'C' e BC são paralelas,<br><br>Provar que A é o ponto médio de B'C'. |   ABED e BCED são paralelogramos.<br>Provar que B está na metade de AC. |

Fonte: Duval (2004, p. 163-164, tradução nossa).

A percepção espontânea da *figura a* é de um triângulo pequeno inscrito em um triângulo grande, ou uma justaposição de quatro triângulos independentes. Existem, porém, outras formas de ver esta figura, como seis unidades figurais de dimensão 1 e que estão designadas e enumeradas no enunciado. Ou ainda, como sendo oito unidades figurais de dimensão 2 (6 triângulos e 2 paralelogramos). Os paralelogramos são as unidades relevantes para a resolução do problema, sem as quais não é possível resolvê-lo, porém são as menos imediatamente visíveis. A visualização destas unidades não é evidente para a maioria dos alunos em situação de aprendizagem.

Na *figura b* os conhecimentos que se mobilizam são os mesmo do problema anterior, porém, as unidades figurais de dimensão 2 pertinentes são facilmente visíveis e estão referenciados no enunciado. Portanto este problema é mais congruente que o primeiro, e, do ponto de vista cognitivo, é mais fácil (DUVAL, 2004, p. 164).

O autor defende que os tratamentos figurais facilitam ou inibem o reconhecimento das situações representadas. E quem não leva em consideração as apreensões às quais uma figura dá lugar não pode estar ensinando Geometria.

3.3.4.2 Apreensão Operatória: modificações possíveis de uma figura geométrica

O segundo nível corresponde a uma apreensão operatória das figuras. As unidades figurais podem ser separadas, recombinadas, movidas, ampliadas, reduzidas, etc. Duval (2012b, p.289) afirma que “os tratamentos que são reveladores de uma apreensão operatória, quer dizer, os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura”.

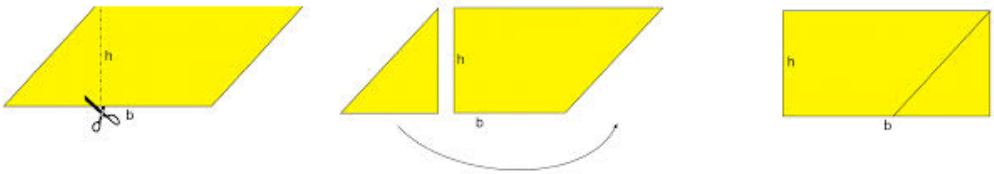
A apreensão operatória requer não só a neutralização da organização perceptiva espontânea da figura, mas também tem custo temporal que varia consideravelmente segundo o número, a heterogeneidade e as posições respectivas das unidades figurais elementares que a compõe. (DUVAL, 2004, p.175)

São classificadas em modificações mereológicas, óticas e de posição, subdivididas em operações que constituem a produtividade heurística das figuras e serão apresentadas a seguir. (DUVAL, 2004, 2011, 2012a, 2012b)

**(i) <u>Modificação mereológica</u> (relação parte/todo):** apoia-se diretamente na percepção. Modifica uma figura sem modificar sua dimensão, é passível de manipulação do objeto

(DUVAL, 2011 p. 88-89). Fatores internos que disparam ou inibem a visibilidade destas operações, podem ser: a partição em diversas sub-figuras pertinentes, a convexidade ou não das sub-figuras, a complementariedade, a duplicação, entre outros (DUVAL, 2012b, p. 288). Para uma modificação mereológica, o processo heurístico (ou seja, as operações que modificam a figura) se dá por meio de reconfigurações. Uma delas é a reconfiguração intermediária que consiste em dividir uma figura em sub-figuras, reagrupando-as em um eventual contorno global diferente. Naturalmente, se pode aumentar o número das partes da figura por um fracionamento de suas unidades figurais elementares.

Figura 8 – Exemplo de reconfiguração de um paralelogramo em um retângulo.




Fonte: a autora.

Houve, na operação de reconfiguração da figura 8, uma divisão em sub figuras (um triângulo e um trapézio), modificando a partir disto, a configuração global da figura de partida. Uma sub figura pode ser uma unidade figural de dimensão dois, por exemplo, o triângulo, ou um reagrupamento de unidades figurais elementares também de dimensão dois, como o trapézio, que pode ser visto como um reagrupamento de triângulo e retângulo, que são unidades figurais elementares.

**(ii) <u>Modificação ótica</u>**: As operações da modificação ótica podem ocorrer quando há a mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho: superposição em profundidade de duas figuras semelhantes. Ou então, quando há variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, variando forma e constância e tamanho. Entre os fatores internos que disparam ou inibem a visibilidade destas operações, estão: a mesma orientação das figuras (objeto e imagem), as linhas de perspectiva são todas distintas dos lados das duas figuras, o centro de homotetia no interior ou no exterior do contorno convexo envolvendo as duas figuras (DUVAL, 2012b, p.288). Apresentam-se aqui dois tipos de modificação ótica, a anamorfose e a superposição.

- **anamorfose**: trata-se de uma representação semiótica em perspectiva. Ocorrem distorções na figura (ou desenho), conforme o ponto de vista do observador (SEMMER

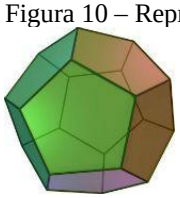
et. al., 2013, p. 63). Julian Beever utiliza esta técnica para desenvolver sua arte, conforme o exemplo a seguir.

Figura 9 – Exemplo de anamorfose na arte.

Fonte: Anamorphic illusions drawn - Julian Beever[16].

Na Geometria podemos tomar como exemplo os poliedros (3D) representados no plano do papel (2D). Não há como registrar todas as faces com suas reais medidas. Nota-se esta característica nas faces do dodecaedro, que pela definição são faces congruentes, mas são representadas diferentes umas das outras, incidindo, portanto, em anamorfoses.

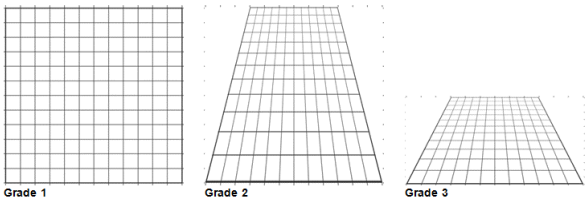
Figura 10 – Representação do dodecaedro no plano (3D/2D)



Fonte: acervo da autora.

Segundo Raynaud (2009 apud SEMMER, 2013, p. 66) a técnica da anamorfose gera imagens em que algumas propriedades não mudam, mas necessita de visão espacial e habilidade motora. Este trabalho pode ser realizado por meio de grades geométricas.

Figura 11 – Grades para Anamorfose.



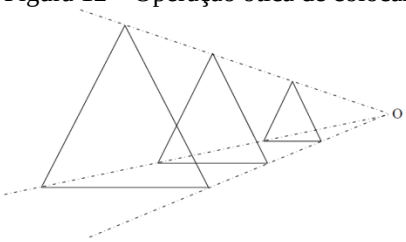

Fonte: SEMMER, 2013, p. 66.

**- colocar em perspectiva (ou superposição)**: esta operação permite "ver em profundidade" uma representação plana, constituindo a produtividade heurística do

[16] Tirado de <http://liz.petree.tripod.com/final/index.html>. Acesso em 18/10/2016.

registro figural em relação com o discurso matemático. Está relacionado com a distância que se vê um objeto em relação a outro. Por meio desta operação é possível compreender que um objeto visto menor significa que está mais longe em relação a outro maior. Esta operação requer que uma unidade figural possa servir de sinal para um centro organizador no desenho (o ponto de fuga). (DUVAL, 2004, p. 173)

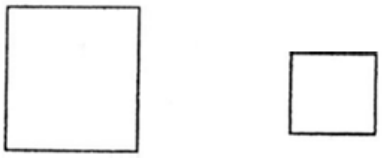
Figura 12 – Operação ótica de colocar em perspectiva.




Fonte: a autora.

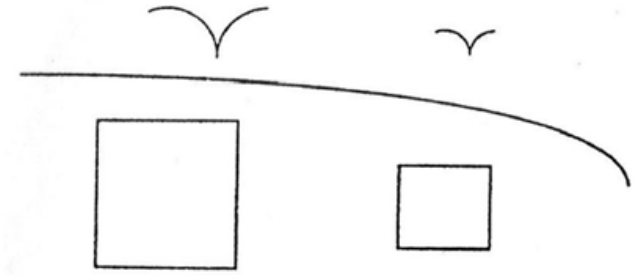
Esta operação está relacionada com os mecanismos perceptivos que asseguram a constância do tamanho na apreensão dos objetos do mundo circundante. A figura 13 pode ser vista simplesmente como duas sub-figuras de diferentes tamanhos, justapostas no plano. Enquanto que, na figura 14, o traço introduzido sugere uma linha do horizonte, assim, nada impede de ver os dois quadrados como duas unidades figurais de mesmo tamanho, sendo que um está mais afastado que o outro (DUVAL, 2004, p.167).

Figura 13 – Duas unidades figurais de mesmo valor e com a mesma orientação.



Fonte: Duval (2004, p. 166)

Figura 14 – Colocar em perspectiva duas unidades figurais por contextualização.



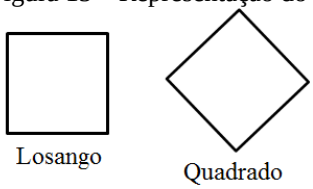
Fonte: Duval (2004, p. 167).

Esta operação ótica conduz a atividade de homotetia permitindo uma execução mais rápida e melhor controle da situação. Colocar em perspectiva é uma operação cuja percepção se volta para a modificação das unidades figurais de dimensão 2 no espaço. Mas ao tratar de homotetia, o discurso de “conservação das relações de tamanho” que

acompanha a atividade, conduz a selecionar somente as unidades figurais de dimensão 1 e 0. “O tratamento figural em questão guia a análise matemática da configuração homotética plana, que deve ser lida unicamente em termos de ponto e de relações de longitude de segmentos.” (DUVAL, 2004, p. 167).

**(iii) Modificação de posição:** É o deslocamento da figura em relação a um referencial. Possibilita uma estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras. (DUVAL, 2012a, p. 127). As operações requeridas neste tipo de modificação mantêm o mesmo tamanho e forma, variando a orientação, rotação, translação, (...) (DUVAL, 2012B, p. 288). As simples modificações de posição por rotação ou por translação de uma unidade figural elementar pode ser um obstáculo para o seu reconhecimento.

Figura 15 – Representação do losango e do quadrado




Fonte: a autora.

Para o aluno o reconhecimento de um quadrado como sendo um losango, pode levar mais ou menos tempo dependendo da sua posição e orientação no plano do papel. Quando a figura de um quadrado se apresenta com suas arestas paralelas às margens do papel sua apreensão é natural é imediata. Da mesma forma que o reconhecimento de um losango é mais ou menos espontâneo, dependendo da sua orientação.

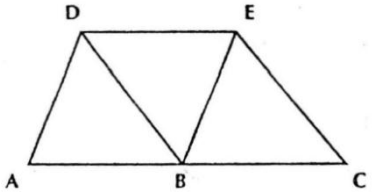
A rotação mental exigida pela figura 15 permite ilustrar a afirmação de Duval (2004, p.174) ao defender que essas modificações estão longe de serem espontâneas e imediatas. Este tipo de apreensão exige treinamento, no entanto os meios escolares não o privilegiam.

3.3.4.3 Apreensão discursiva – a coordenação entre figura e discurso

O registro das figuras apresenta uma particularidade essencial em Geometria: uma figura só é considerada uma situação geométrica, se estiver acompanhada de algum discurso sobre ela. Segundo Duval (2004, p. 168), um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes, é necessário, pois, uma indicação verbal para

ancorar a figura como representação do objeto matemático. A figura abaixo pode ser definida em termos de paralelogramos, como já visto antes, mas também pode ser visto como um livro aberto, conforme o discurso se apresenta. Este discurso é responsável por conduzir a mudança do olhar e, portanto, a percepção sobre a figura, para que seja reconhecida a representação do livro aberto ao qual se refere.

Figura 16 – Representação do contorno de um livro aberto.

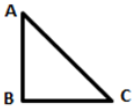
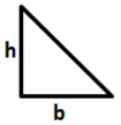
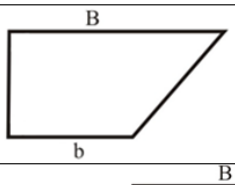
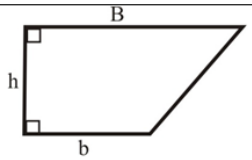



Fonte: Duval (2004, p. 171)

Por isso o autor afirma que em Geometria não há figura que se represente por si mesmo, quer dizer, não há figura sem legenda. A introdução a uma figura geométrica é necessariamente discursiva.

Nos exemplos do quadro 8 podemos observar a diferença entre uma ‘figura’ e uma ‘figura geométrica’.

Quadro 8 – Diferença entre figura e figura geométrica.

| Figura | Figura Geométrica |
|---|---|
| |  ABC é um triângulo retângulo em B. |
| |  h ⊥ b |
| | |
| |  B // b |
| |  |

Fonte: a autora.

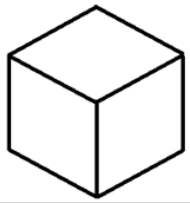
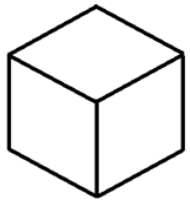
Uma simples figura não diz nada além do que se percebe dela. Não se pode afirmar, por exemplo, qual é a classificação do triângulo apresentado na primeira coluna do quadro acima, a menos que seja acompanhado de um discurso. Assim como um trapézio só recebe tal denominação, caso seja explicitado, de alguma forma, alguma propriedade ou definição sobre ele.

Um dos problemas relacionado às dificuldades dos alunos em aprender Geometria está relacionado ao fato de que a figura, muitas vezes, está organizada de forma que a percepção e o discurso não combinam. Duval afirma que:

> A organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a ocultar as outras. Contudo, as unidades figurais que foram identificadas de forma perceptiva nem sempre concordam com as que estão designadas no enunciado, ou com as que são pertinentes com a resolução do problema proposto. (DUVAL, 2004, p. 169, tradução nossa).

Esta situação está ilustrada no quadro seguir:

Quadro 9 – Diferentes apreensões perceptivas e discursas para uma mesma representação.

| Figura Geométrica | | Desconstrução dimensional |
|---|---|---|
| Figura | Discurso | |
|  | Poliedro regular formado por seis faces planas quadrangulares, sendo que cada vértice une três faces. | Para conseguir identificar o cubo (3D), precisamos fixar o olhar nas faces (2D) unidas pelas arestas (1D) (3D →2D→1D) E para identificarmos cada face do quadrado (2D) precisamos nos fixar nas retas (1D) que a delimita, e a qual pertence outra face (2D→ 1D) |
|  | Hexágono regular formado pelo conjunto de segmentos consecutivos e não-colineares contidos num mesmo plano e que formam uma figura fechada. | Para identificar o hexágono (2D), precisamos fixar o olhar nos segmentos de reta (1D) que formam o lados do polígono e ignorar, pela conduta de abdução, os três segmentos de reta do interior da figura. (2D→ 1D) |

Fonte: a autora.

A apreensão discursiva é que torna a figura passível de interpretações e entendimento, e só ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva. Muitas vezes, uma contrapõe a outra, porém não pode ser dissociada uma da outra. No quadro 9 observa-se que, a descrição da figura em 3D se dá em termos de dimensões 2, 1 e 0. E a figura de dimensão 2 é descrita em termos de dimensões 1 e 0, ou seja, sempre em termos inferiores ao discurso, o que, segundo Duval, os alunos evitam fazer.

Problemas ligados à aprendizagem da Geometria decorrem, muitas vezes, da falta de articulação entre a apreensão perceptiva e a discursiva. Os alunos não estão preparados nem para integrar o nível de uma apreensão Gestalt e operatória das figuras, tão pouco, descobriram a especificidade da organização dedutiva do discurso em relação às outras formas de expansão discursiva como a explicação, a argumentação ou a descrição. (DUVAL, 2004, p.168-170).

### 3.3.4.4 Apreensão Sequencial

A apreensão sequencial é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura. (DUVAL, 2012a, p. 120)

Solicitar ao aluno que reproduza o desenho de um quadrado, por exemplo, pode parecer uma tarefa simples. Porém, para que a figura realmente satisfaça as propriedades dos lados e dos ângulos congruentes, o processo exige alguns passos que devem ser seguidos na ordem correta, conforme a sugestão do quadro 10.

Quadro 10 – Processo para construção de um quadrado de lado igual a 4 cm.

**Construir um quadrado de lado igual a 4 cm.**

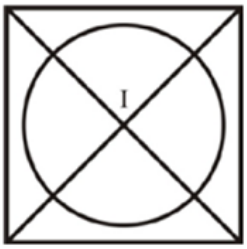
1) Trace o segmento AB de medida igual a 4 cm.
2) Trace a reta perpendicular a AB pelo ponto A.
3) Com a ponta seca do compasso em A e com abertura igual à AB, trace um arco que corte a perpendicular em C.
4) Com a ponta seca do compasso em C e mesma abertura, trace um arco.
5) Com a ponta seca do compasso em B e mesma abertura trace outro arco que intersecta o último arco traçado em D.
6) Com a régua construa o quadrado, ligando os pontos CD e BD.

Fonte: acervo da autora.

Esta é uma atividade de construção geométrica, que exige do aluno as apreensões discursiva, sequencial e perceptiva.

A seguir há outro exemplo de atividade proposto por Moretti e Brandt (2015) que exige a apreensão sequencial.

Figura 17 – Atividade que exige apreensão sequencial




**Considere a figura e as frases a seguir:**

**a** - Chame de **I** o ponto onde as diagonais se cortam

**b** - Desenhe um quadrado com 5cm de lado

**c** - Trace o círculo de centro em **I** no interior do quadrado

**d** - Trace as diagonais do quadrado

Para reproduzir a figura, é preciso estabelecer a ordem das frases **a**, **b**, **c**, **d**. Encontrar a ordem dessas frases: não é preciso reescrevê-las, apenas indicá-las pelas letras.

Fonte: Moretti e Brandt (2015).

### 3.3.5 Articulação entre diferentes tipos de apreensões – Tipos de Problemas

Segundo Moretti (2015, p.605), as apreensões não aparecem de forma isolada. Em algum problema, uma pode ser mais requisitada do que outra, mas todas elas aparecem em maior ou menor grau, havendo uma sinergia das várias apreensões na resolução de um mesmo problema. Segundo o autor, os problemas em Geometria podem tornar-se mais complexos, pois pode existir até uma quádrupla apreensão na resolução desses problemas. Dependendo do problema, a articulação, principalmente, entre dois ou mais tipos de apreensão pode ser requerida na sua resolução. Duval[17] (1997 apud MORETTI e BRANDT, 2015, p. 607) destaca quatro delas:

(i) **Figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;

(ii) **Visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória;

(iii) **Heurística e Demonstração** são resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;

(iv) **Construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – especialmente requisitada em atividades dessa natureza, de construção geométrica, também requer a apreensão perceptiva.

[17] DUVAL, R. **La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée**. 1997. IN: *CURSO DADO A PUC/SP*.

### 3.3.6 Condições para o desenvolvimento da apreensão operatória das figuras

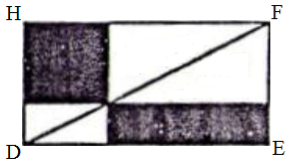
Duval (2004, p.175) defende que cada uma das operações relativas à modificação das figuras deve ser solicitada explícita e sistematicamente. É necessário propor exercícios que exijam tratamento figural, para isto é necessário levar em consideração três condições em relação à resolução dos exercícios propostos:

1) Não devem implicar nenhuma atividade de raciocínio que exija a utilização de definições ou teoremas.
2) Não devem implicar em mudança de dimensão na sequência de sub figuras. Ou seja, o trabalho com unidades de dimensão 2 deve preceder o tratamento sobre as unidades figurais de dimensão 1 e 0. A operação de reconfiguração permite esta condição.
3) A série de exercícios deve ser organizada em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade que facilitam e dificultam a apreensão operatória, reforçando a conduta de abdução.

São condições que pressupõe a classificação de diferentes tipos de figuras. Elas não se fundamentam em conceitos, mas sim em critérios semióticos e perceptivos da organização de unidades figurais elementares. (DUVAL, 2004, p. 176).

O exemplo a seguir, enunciado por Euclides, cumpre perfeitamente as duas primeiras condições.

Figura 18 – Atividade que requer a operação de reconfiguração.

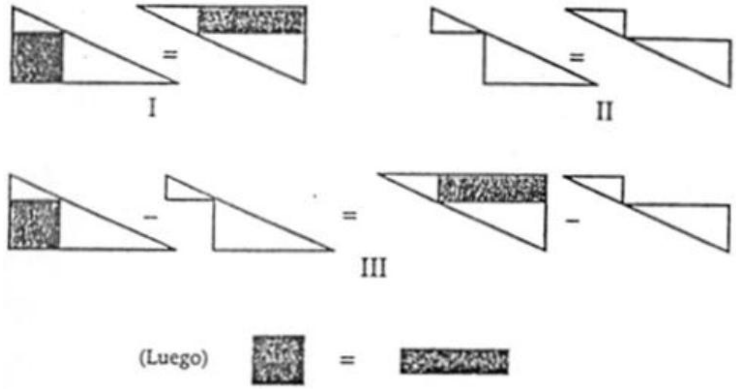



DEFH é um retângulo. Seja O um ponto qualquer da diagonal HE. AB é paralela a DH que passa por O, e MN é a paralela a DE que passa por O. Mostrar a igualdade das áreas das partes sombreadas.

Fonte: Duval (2004, p. 176)

Para “ver” a igualdade das áreas sombreadas, uma das maneiras é fazer a série de comparação das sub figuras complementares conforme a figura 19. A comparação é duvidosa perceptivelmente, pois como seus contornos são diferentes, não é possível sobrepor as duas sub figuras sombreadas.

Figura 19 – Desenvolvimento da apreensão do exercício

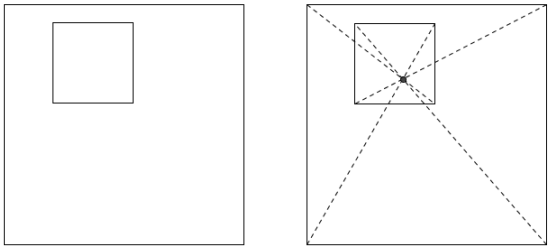



Fonte: Duval (2004, p.179)

É importante, para uma aprendizagem da apreensão operatória, o contato com diversos exercícios que exigem diferentes tipos de tratamento próprios ao registro das figuras, variando os fatores de visibilidade e uma classificação de todos os casos de figuras, de forma que contemple a terceira condição enunciada acima. (DUVAL, 2004, p. 178).

O exemplo a seguir exige uma modificação ótica que Duval (2012b, p. 289) chama de superposição em profundidade, que é característica das atividades de homotetia. Quando a figura objeto e a figura imagem estão superpostas, pode ser difícil percebê-las em perspectiva e mais difícil ainda ver os segmentos que definem os pontos homólogos (DUVAL, 2004, p. 179).

Figura 20 – Configuração homotética com superposição da figura objeto e da figura imagem.



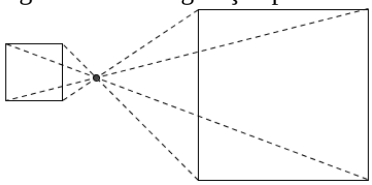
Fonte: Duval (2004, p. 179)

As configurações homotéticas planas variam conforme três fatores (DUVAL, 2004, p. 180):

1) As posições respectivas das unidades figurais: separadas, adjacentes, recobertas parcialmente...
2) Existência ou não de simetria interna para as unidades figurais.
3) Centro de homotetia positivo ou negativo, interior ou exterior à relação entre figura objeto e figura imagem.

A figura 21 apresenta uma das diferentes configurações possíveis[18], em que o centro de homotetia é exterior às unidades figurais, fazendo com que ressalte a percepção de um olhar em profundidade, diferente do que se percebe na figura 20 acima. E é negativa, projetando uma figura imagem invertida em relação à figura objeto.

Figura 21– Configuração percebida em profundidade.



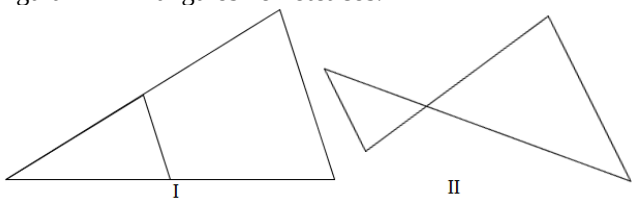
Fonte: Duval (2012b, p. 292)

Duval (2012b, p. 292) ressalta que certas configurações são percebidas, em um primeiro olhar, em profundidade, outras somente no plano e outras ainda são perceptivamente ambíguas, que podem ser muito bem vistas tanto em profundidade quanto no plano.

Para organizar uma aprendizagem de tipo tratamento figural para a operação de superposição em profundidade, é necessário levar em conta a variedade das configurações homotéticas planas que elas oferecem.

Em relação à aplicação do Teorema de Tales, Duval (2004, p. 181) apresenta duas configurações que cumprem diferentes condições de homotetia. Segundo o autor, os alunos têm mais êxito em problemas com a configuração I da figura 22. Isto porque a configuração II apresenta uma figura imagem invertida em relação à figura objeto.

Figura 22 – Triângulos homotéticos.




Fonte: Duval (2004, p. 181)

Esta apropriação se mostra eficaz para a compreensão da homotetia, bem como para o seu ingresso em outras abordagens, como a noção de baricentro (LÉMONIDIS, 1990 apud DUVAL, 2012, p.203).

[18]Duval (2012b, 290) apresenta uma classificação sistemática dos diferentes casos de figuras na representação de situações de homotetia no plano, extraída do trabalho de Lémonidis, E. C. Conceptio, Réalisationetrésultats d'une expérience d'enseignementdel'homothétie. Thèse ULP, Strasbourg, 1990, p.58,59.

A partir de exemplos como os que foram apresentados acima, Duval conclui que diversidade de operação para uma mesma figura constitui a riqueza e a complexidade heurística do registro das figuras geométricas. Para cada tipo de operação de modificação figural existem fatores específicos que fazem mais ou menos visível a possibilidade de operar sobre uma figura dada. Para que se compreendam as condições cognitivas de aprendizagem da Geometria, esses fatores são essenciais. (DUVAL, 2004, p. 182).

A partir de estudos dessas especificidades da aprendizagem da Geometria sob o ponto de vista cognitivo da Teoria dos Registros, o próximo passo é a organização desses elementos considerados por Duval indispensáveis no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, bem como a descrição metodológica dos tratamentos, análises e inferências realizadas a partir dos dados analisados nesta pesquisa.

# 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA E ORGANIZAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS – ANÁLISE DE CONTEÚDO

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujos procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das questões serão realizados com base em uma descrição analítica, em que os dados foram vistos sob um ponto de vista cognitivo, que leva em consideração gestos intelectuais específicos da atividade geométrica, e não de um ponto de vista matemático, que tem como foco de aprendizagem os conteúdos da Geometria. A fundamentação metodológica para o tratamento dos dados é sustentada pela Análise de Conteúdo de Laurence Bardin (2009). A escolha desta metodologia se dá por suas características que vão ao encontro dos objetivos da pesquisa a respeito de um desvendar crítico do conteúdo dos dados em questão. Permite fazer inferências por meio de análises, as quais procuram esclarecer as causas da mensagem ou as consequências que ela pode provocar. Os objetivos desta técnica, segundo Bardin (2009, p.29), são:

i) *ultrapassagem da incerteza*: o que se julga ver na mensagem (ou seja, na questão) estará lá efetivamente contido, podendo esta 'visão' muito pessoal, ser partilhada por outros?

ii) *enriquecimento da leitura*: se um olhar imediato, espontâneo, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta, aumentar a produtividade e a pertinência?

Esses objetivos corroboram com os objetivos da pesquisa, no sentido de investigar que tipo de habilidade ou gestos intelectuais a atividade proposta exige do aluno, segundo uma análise cognitiva, além do conteúdo explícito no dado analisado. E ainda, apontar a relevância dos dados para o desenvolvimento das habilidades necessárias para o desenvolvimento do pensamento geométrico, ou seja, da aprendizagem da Geometria.

Segundo a autora, o foco de uma Análise de Conteúdo são as mensagens (comunicações), organizadas em categorias temáticas, com objetivo de manipulação de mensagens para confirmar os indicadores que permitam inferir sobre outra realidade que não a da mensagem (BARDIN, 2009, p. 24-46). As fases da análise de conteúdo se organizam em torno de três polos cronológicos: i) pré-análise; ii) exploração do material e descrição analítica; iii) tratamento dos resultados, inferência e interpretação.

A seguir está detalhado o desenvolvimento dessas três fases.

## 4.1 PRÉ ANÁLISE – COLETA E DEFINIÇÃO DAS CATEGORIAS ANALÍTICAS

A pré-análise é a fase de organização propriamente dita. Tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise. É nesta fase que se realiza a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final. Além da escolha dos documentos a autora propõe uma atividade que chama de *leitura flutuante*, para estabelecer o primeiro contato com os documentos a analisar, e as primeiras impressões vão, aos poucos, se tornando mais precisas. Depois de demarcar o universo dos documentos, procede-se à constituição de um *corpus*, que é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A *formulação das hipóteses e dos objetivos* é outra questão que a autora aponta nesta fase. Utilizando-se dessas propostas, o encaminhamento desta pesquisa é descrito a seguir. (BARDIN, 2011, p.95-98)

Os dados submetidos à análise são exemplos de questões de Geometria da Prova Brasil do quinto e nono anos do ensino fundamental, e do terceiro ano do ensino médio, retiradas de documentos e materiais disponibilizados no Portal Inep[19] que apresentam uma série de exemplos de itens (questões) sobre matemática das séries a serem avaliadas. Foram selecionadas também questões dos cadernos de atividades de matemática dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, desenvolvidos pela Secretaria de Estado da Educação (PARANÁ, 2009)[20]. A partir de uma leitura flutuante, entre as diversas questões presentes nesses materiais, foram selecionadas as questões que contemplam conteúdos de Geometria, totalizando 51 questões, que compõem o corpus da pesquisa (Anexo A).

Quanto à *formulação das hipóteses e dos objetivos*, sabendo que as avaliações da Prova Brasil, segundo informações obtidas pelo Portal INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), se destinam a avaliar a proficiência dos estudantes nas áreas de Língua Portuguesa e Matemática da rede de ensino do país

---

[19] http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/instrumentos-de-avaliacao Acesso em 15/08/2016.
http://portal.mec.gov.br/prova-brasil/matrizes-da-prova-brasil-e-do-saeb. Acesso em 15/08/2016.

[20] <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1267> Acesso em 15/08/2016.

(BRASIL, 2011). A questão que se levanta aqui é: Mas, o que de fato está contemplado em relação à Geometria nessas avaliações? Quais inferências podem ser feitas a partir das questões contempladas na Prova Brasil a respeito do que se espera que o aluno saiba em relação à Geometria segundo Raymond Duval? O objetivo, então, é de evidenciar a ocorrência das proposições de Duval relativas às ideias da Geometria, que estão presentes nessas questões.

A princípio o objetivo seria realizar somente uma análise dos enunciados dos problemas e conforme fosse possível, apontar possíveis formas de resoluções, com base nas mobilizações cognitivas que a questão permite realizar, e isto de fato foi realizado. Contudo, algumas questões possibilitaram ir além desta análise, pois foram disponibilizados, juntamente com os enunciados das questões, alguns dados em relação ao percentual de respostas dos alunos às alternativas, permitindo a realização de análises bastante perspicazes a respeito da forma como o aluno interpreta essas questões. Esses percentuais disponibilizados em algumas questões foram de extrema importância para sustentação das análises e dos resultados obtidos, pois permite elucidar algumas considerações de Duval a respeito dos gestos intelectuais requeridos na questão e das mobilizações cognitivas realizadas pelos alunos, confirmando e ilustrando o motivo de muitas dificuldades dos alunos em relação à Geometria.

A outra etapa, ainda na pré-análise, é a referenciação dos *índices* e a elaboração de *indicadores (*BARDIN, 2009, p. 99). A escolha desses índices e indicadores é feito, essencialmente, a partir de uma interpretação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Neste sentido, a elaboração do quadro das categorias deste trabalho se apoia em técnicas da hermenêutica, que pode ser considerada como a “arte de interpretar textos” e tem por objetivo tornar algo que é pouco familiar, distante e obscuro em algo real, próximo e inteligível. A hermenêutica abarca as regras de interpretação de toda a classe de escritos humanos. E se caracteriza por três orientações fundamentais e significativas: dizer, explicar e traduzir (PALMER, 1969, p. 25). A partir desta técnica de interpretação, foi elaborado um quadro compilado com as especificidades requeridas no ensino da Geometria sob o ponto de vista cognitivo dos Registros de Representação Semiótica, que fundamentam a presente investigação. Este quadro, denominado Quadro de Categorias para Análise Cognitiva, pode facilitar aos professores interessados em apoiar-se nesta teoria, um acesso mais direto e objetivo das ideias que o autor propõe sobre a Geometria em seus diversos trabalhos de pesquisa.

Quadro 11 – Quadro de Categorias para Análise Cognitiva.

| **Indicador da atividade cognitiva** | **Índices** | **Descrição** |
|---|---|---|
| 1. Nível escolar | Ensino fundamental - anos iniciais | Exemplos de questões da Prova Brasil de 6º, 9º do ensino fundamental e 3º do ensino médio que comtemplam conteúdos de Geometria. |
| | Ensino fundamental - anos finais | |
| | Ensino médio | |
| 2. Configuração global (variáveis qualitativas) | Representação nD/mD. | "Numerador": espaço referente ao objeto matemático. "Denominador": espaço no qual as representações são produzidas. (Objeto/Figura). Ex: Uma trajetória representada no plano do papel - 1D/2D. A Representação de um paralelepípedo no plano do papel - 3D/2D. |
| | Desconstrução dimensional | A desconstrução dimensional conduz à visualização das unidades figurais exigidas nas atividades matemáticas. Ex: Um triângulo e sua altura (2D → 1D). |
| 3. Evolução dos olhares | Olhar icônico | Botanista - reconhecer o contorno das formas. |
| | | Agrimensor - propriedades são as mobilizadas para fins de medidas. |
| | Olhar não icônico | Construtor - se forma no uso de instrumentos. |
| | | Inventor - opera sobre a figura e a modifica. |
| 4. Apreensão dos registros figurais | Perceptiva | Na qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada. |
| | Operatória | Na qual se operam modificações na figura do tipo: Mereológica (modifica uma figura sem modificar sua dimensão), ótica (ver em profundidade ou em perspectiva) e posicional (deslocamento em relação a um referencial). |
| | Discursiva | Na qual se opera a coordenação entre figura e discurso. |
| | Sequencial | Solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição. |
| 5. A articulação das apreensões requerida na resolução | Figura geométrica | Articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva. |
| | Visualização | Articulação entre as apreensões perceptiva e operatória. |
| | Heurística e demonstração | Articulação entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva. |
| | Construção | Articulação entre as apreensões perceptiva, discursiva e sequencial. |
| 6. Tipo de registro... | ... do enunciado | Figural, natural, numérico ou algébrico. |
| | ... necessário para resolução do problema | |
| 7. Tratamento matemático | Necessidade ou não de tratamento matemático requerido além dos tratamentos figurais. | |

Fonte: Organizado a partir de Duval (2004, 2005, 2011).

A categoria 1 permite uma análise da evolução do olhar que vai do nível mais elementar – o botânico, para o mais elaborado – o inventor. Durante as análise é preciso levar em conta que esses olhares caminham de um lado ao outro conforme as apreensões em Geometria são exigidas. Segundo Moretti (2013, p. 6), no olhar do botanista é exigida, essencialmente, a apreensão perceptiva. Por outro lado, no olhar do Inventor, todas as apreensões participam das atividades. Portanto, nesta categoria, a questão só poderá contemplar um dos olhares, pois ao contemplar um olhar mais elaborado, como por exemplo, o inventor, subentende-se que há uma superação em relação aos olhares anteriores a ele.

A categoria 2 permite verificar a necessidade de uma atividade de visualização que diz respeito ao número da dimensão do objeto e da sua representação, por exemplo, a representação de um cubo no plano (3D/2D), de uma reta no plano (1D/2D) e assim por diante. A categoria 3 permite verificar a forma como se dá a mudança de dimensão, que está presente em todas as atividades de Geometria – a desconstrução dimensional – necessária para que a visualização da figura seja restringida em unidades figurais elementares a fim de realizar os tratamentos pertinentes à atividade. Para estas duas categorias, a análise será realizada por meio de variáveis qualitativas, e será analisado separadamente das demais, pois há inúmeras possibilidades de representação do tipo Objeto/Figura, e diferentes formas de realizar a desconstrução dimensional, conforme a questão se coloca.

A categoria 4 permite analisar as apreensões que a atividade exige sendo que as duas primeiras são próprias ao registro figural (perceptiva e operatória), e as duas últimas requerem a articulação dos registros figurais e discursivos (discursiva e sequencial). A apreensão operatória se desdobra em mereológica, ótica e posicional conforme as especificidades apontadas no quadro teórico. Neste caso, uma questão pode contemplar mais que um índice, podendo ocorrer, portanto, mais que um tipo de apreensão para determinada questão, o que acaba resultando na articulação entre as apreensões, ou seja, uma questão pode contemplar a apreensão perceptiva e operatória ao mesmo tempo. Essas articulações (ou conexões) estão contempladas na categoria 5 categoria, que determinam diferentes tipos de problemas, conforme especificadas no quadro acima.

Outro aspecto relevante, que emergiu como categoria no decorrer das análises, é em relação ao tipo de registro que está contemplado no enunciado da questão, e também o tipo de registro ao qual o aluno precisa recorrer para ter êxito na resolução do

problema, caracterizando com isto, a sexta e a sétima categorias. Esta análise é relevante para determinar se a questão exige que se faça uma mudança do tipo de registro entre o que está contemplado no enunciado e a resolução da questão, esta mudança entre diferentes tipos de registros, Duval denomina de conversão. A última categoria, que também emergiu no decorrer das análises e inferências das demais categorizações, além dos tratamentos perceptivos, trata da necessidade ou não de um tratamento matemático (algorítmico, cálculo, fórmulas), ou seja, um tratamento que não seja figural. Duval (2012b, p. 272) define tratamento de uma representação como sendo a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. Por exemplo, nas figuras percebidas em perspectiva, tem-se a possibilidade de uma combinação de tratamento puramente figural e tratamento matemático.

As categorias foram organizadas em uma planilha Excel, de forma que a primeira coluna refere-se ao número da questão, e as demais colunas são nomeadas conforme os índices e os indicadores que compõem as categorias. O resultado desta organização está apresentado no quadro abaixo.

Quadro 12 – Organização das categorias para análise das questões.

| Questão | Nível escolar | | | Evolução dos olhares | | | | Apreensões das figuras | | | | | | Conexões entre as apreensões | | | | Tipo de registro do enunciado | | | | Tipo de registro para resolução | | | | T. Matemático |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | Operatória | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | EF1 | EF2 | EM | Botanista | Agrimensor | Construtor | Inventor | Perceptiva | Mereol. | Ótica | Posic. | Discursiva | Sequencial | Figura Geométrica | Visualização | Heurística e Demonstração | Construção Geométrica | Figural | Algébrica | Natural | Numérica | Figura | Algébrica | Natural | Numérica | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| .. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: a autora.

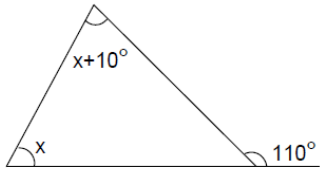
A análise de cada questão passará pelo crivo de todas as categorias, por meio de um processo dedutivo e inferencial. Se a questão é pertinente à categoria, atribui-se 1 na referida célula da planilha, caso contrário, atribui-se 0. Sendo assim, em consonância com os critérios da Análise de Conteúdo, a partir da classificação e das análises, as questões elencadas foram analisadas inferindo uma abordagem diferente daquela que seria o objetivo primeiro da questão elaborada. Ou seja, olhar para as atividades, não com foco nos conteúdos, mas sim, nas mobilizações cognitivas que elas permitem realizar.

Para elaboração desta planilha, foram feitas interpretações a respeito das categorias que contemplam cada uma das questões selecionadas. Como exemplo, a seguir é apresentada uma questão com as categorizações e análises.

Quadro 13 – Questão 26 do corpus da pesquisa.

13 IT_024366

Observe o triângulo abaixo.




O valor de x é

(A) 110°.
(B) 80°.
(C) 60°.
→D) 50°.

Fonte: Portal INEP.[21]

A seguir está a categorização com destaque para a maior parte das categorias que a questão contempla. Além destas, há na sequência a análise da questão em relação as categorias referentes à dimensão.

Tabela 01 – Exemplo de categorização – questão 26.

| Questão | Nível escolar | | | Evolução dos olhares | | | | Apreensões das figuras | | | | | | Tipo de problema (conexão das apreensões) | | | | Tipo de registro do enunciado | | | | Tipo de registro para resolução | | | | T. Matemático |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | EF1 | EF2 | EM | Botanista | Agrimensor | Construtor | Inventor | Perceptiva | Operatória | | | Discursiva | Sequencial | Figura Geométrica | Visualização | Heurística e Demonstração | Construção Geométrica | Figural | Algébrica | Natural | Numérica | Figura | Algébrica | Natural | Numérica | |
| | | | | | | | | | Mereol. | Ótica | Posic. | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ... | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: a autora.

Além desta categorização, são analisadas ainda as características da questão em relação à dimensão, que segundo Duval (2011, p. 87), é onipresente em toda definição, raciocínio, explicação relacionados às figuras geométricas.

[21] PORTAL INEP. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/instrumentos-de-avaliacao>. Acesso em 15/08/2016.

Tabela 02 – Categorização da questão

| Questão | ... | Mudança de dimensão | |
|---|---|---|---|
| | | Obj/Fig | Desconstrução |
| ... | | | |
| 26 | ... | 2D/2D | 2D → 2D |
| | | | |

Fonte: a autora.

Análise qualitativa da questão:

- NÍVEL: Ensino fundamental – anos finais.

- OLHAR: A questão se aproxima mais do olhar do Agrimensor, pois as propriedades geométricas são mobilizadas para fins de medidas.

- APREENSÃO: Contempla dois tipos de apreensão. A primeira é a perceptiva, pois a questão é acompanhada por uma figura que deve guiar a resolução da questão. A segunda é a apreensão discursiva, que se justifica pelo termo *triângulo*, e pelos discursos a respeito dos ângulos que se apresenta na própria figura.

- TIPO DE PROBLEMA: Por se tratar de um problema com articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva, ele é do tipo Figura Geométrica.

-TIPO DE REGISTRO (ENUNCIADO E RESOLUÇÃO): Os registros figural e algébrico são utilizados no enunciado, e são os mesmos requeridos durante a resolução do problema. Portanto, para solucionar esta questão, não há necessidade de uma mudança de registro.

- MUDANÇA DE DIMENSÃO (OBJETO/FIGURA): O objeto em questão é um triângulo (2D) representado por uma figura no plano do papel (2D), ou seja, 2D/2D.

- DESCONTRUÇÃO DIMENSIONAL: nesta questão, as unidades figurais que se destacam pela percepção imediata é a do triangulo (2D) e da reta que é prolongamento do lado do triângulo (1D). A partir disso, o olhar deve se voltar basicamente para os ângulos suplementares que são formados pelas retas às quais pertencem os lados do triângulo, e os ângulos internos ao triângulo. Sendo assim a desconstrução dimensional ficou definida da seguinte forma: 2D→1D→2D.

- TRATAMENTO MATEMÁTICO: além de conhecer ângulos suplementares e a soma dos ângulos internos de um triângulo, que são conceitos do conteúdo de Geometria, o aluno precisa ter conhecimento matemático de resolução de equações e realizar tratamentos específicos do registro algébrico.

A seguir está uma tabela com os resultados das categorizações, realizadas em uma planilha Excel.

Tabela 03 – Visualização da categorização das questões em Planilha Excel

| | Nível escolar | | | Olhares | | | | Apreensões das figuras | | | | | | | Tipo de registro do | | | | Registro necessário | | | | | Conexões entre as | | | | | Mudança de dimensão | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Operatória | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Questão | EF1 | EF2 | EM | Botanista | Agrimensor | Construtor | Inventor | Perceptiva | Discursiva | Operatória | mereológica | ótica | posicional | Sequencial | Figural | Algébrica | Natural | Numérica | Figura | Algébrica | Natural | Numérica | Mudou registro | Figura Geométrica | Visualização | Heurística e Demonstração | Construção Geométrica | Exige conhec. matemático | Obj/Fig | Desconstrução |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3D/2D | 3D → 1D → 3D |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3D/2D | 3D → 1D →2D →1D |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | Não há figura | 2D → 1D → 1D |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | Não há figura | 2D → 1D → 2D |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3D/2D | 3D → 2D |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 2D → 3D |
| 13 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 14 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 16 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | Não há figura | 1D → 2D → 3D → 1D |
| 17 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | Não há figura | 0D → 1D → 2D → 3D → 2D |
| 18 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 3D → 2D |
| 19 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 3D → 2D |
| 20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1D/2D | 1D → 2D |
| 21 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 22 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1D/2D | 2D → 1D |
| 23 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 24 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 25 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 26 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 27 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 28 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 29 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 30 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3D/2D | 3D → 1D → 2D |
| 31 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 2D → 3D |
| 32 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | Não há figura | 3D → 2D → 1D |
| 33 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3D/2D | 2D → 1D |
| 34 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 35 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | Não há figura | 1D →3D |
| 36 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 37 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3D/2D | 3D → 3D |
| 38 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 39 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 40 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |
| 41 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 42 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 43 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 2D → 3D |
| 44 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3D/2D | 3D → 2D → 1D |
| 45 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D |
| 46 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1D/2D | 1D → 2D |
| 47 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3D/2D | 3D → 2D → 1D |
| 48 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | Não há figura | 2D → 1D |
| 49 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1D/2D | 2D → 0D → 1D |
| 50 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 2D |
| 51 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2D/2D | 2D → 1D → 2D |

Fonte: a autora.

Esta tabela passou por um refinamento, permitindo a realização de tratamentos por meio de softwares de análise fatorial e por meio do próprio Excel. Esta etapa pertence à segunda fase desta análise.

## 4.2 ANÁLISE: EXPLORAÇÃO DO MATERIAL E DESCRIÇÃO ANALÍTICA

Segundo Bardin (2009, p. 101), esta fase é a administração sistemática das decisões tomadas. É uma fase longa e fastidiosa, consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas.

A elaboração desta etapa será pautada em procedimentos segundo uma descrição analítica das questões. O tratamento da informação contida nas mensagens

não se limita ao conteúdo. A autora explica que a análise do conteúdo pode ser uma análise dos “significados”, por exemplo, uma análise temática. Mas também pode ser uma análise dos “significantes”, ou seja, uma análise léxica, ou análise dos procedimentos. Não bastam os procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição para definir a especificidade do conteúdo das mensagens, é necessária também a inferência de conhecimentos relativos às condições em que se apresenta a mensagem. Inferência esta que recorre a indicadores (BARDIN, 2009, p. 34-38).

Nesta pesquisa as variáveis tratadas são, na maior parte, do tipo binário, que assume unicamente dois valores, 0 para ausência ou 1 para presença da categoria de cada questão. No Excel a soma dos elementos de uma coluna representa a ocorrência da variável em questão (número de vezes que ela é satisfeita). Outras duas são variáveis qualitativas, uma refere-se à categoria da dimensão do objeto e da figura, e a outra se refere à categoria da desconstrução dimensional. Para a análise da variável da desconstrução dimensional, é considerada apenas uma de várias possíveis resoluções para encontrar a solução do problema. Ou seja, podem ocorrer diferentes interpretações e formas de resolver o problema, variando, com isto, a forma como se dá a desconstrução dimensional.

A tabela a seguir apresenta a quantidade e frequência de questões contempladas em cada categoria.

Quadro 14 – Quantificação e frequência de categorias identificadas nas questões.

| **OLHARES** | | |
|---|---|---|
| Botanista | 11 | 22% |
| Agrimensor | 23 | 45% |
| Construtor | 12 | 24% |
| Inventor | 4 | 8% |

| **TIPO DE PROBLEMA** | | |
|---|---|---|
| Figura Geométrica | 16 | 31% |
| Visualização | 6 | 12% |
| Heurística ou Demonstração | 18 | 35% |
| Construção Geométrica | 6 | 12% |

| **APREENSÕES** | | | |
|---|---|---|---|
| Perceptiva | | 50 | 98% |
| Discursiva | | 38 | 75% |
| Operatória (49%) | Mereológica | 15 | 29% |
| | Ótica | 15 | 29% |
| | Posicional | 9 | 18% |
| Sequencial | | 5 | 10% |

| **TRATAMENTO MATEMÁTICO** | |
|---|---|
| 16 | 31% |

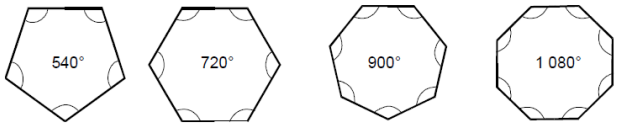
Fonte: a autora.

Optou-se por apresentar as análises referentes a este quadro, guiando-se pelos Tipos de Problemas, contemplando com isto, as características das questões em relação às apreensões. Feito isto, serão apresentadas também, algumas análises considerando os diferentes níveis de escolaridade e as particularidades de cada nível.

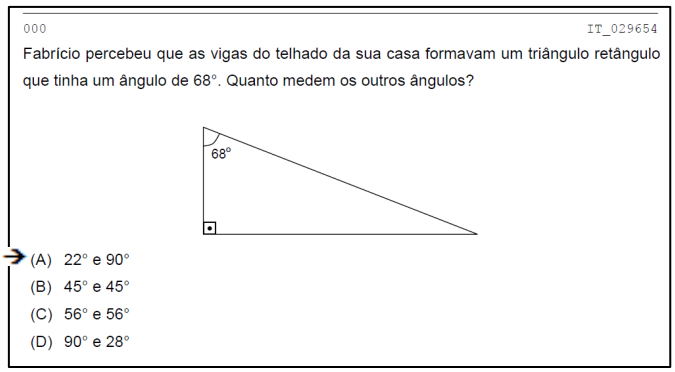
No quadro das apreensões, a Perceptiva se destaca com 98% de frequência. Este é o primeiro nível de apreensão, sua apropriação é indispensável para a aprendizagem da Geometria e todas as demais apreensões são subordinadas à apreensão perceptiva. É ela que orienta os demais níveis de apreensão, isto pode explicar o fato desta apreensão estar contemplada em quase todos os problemas analisados.

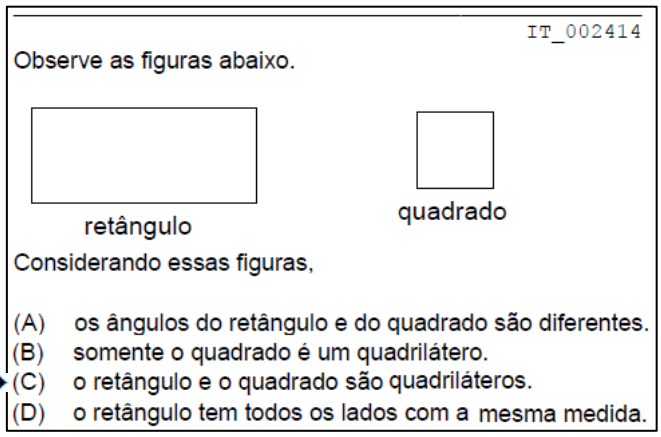
A seguir estão alguns exemplos de problemas do tipo Figura Geométrica, contemplado em 31% das questões. Nesses problemas ocorre conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva. Retomando a ideia de Duval (2004, p.156) a respeito deste tipo de problema, ele afirma que uma figura só se caracteriza como Figura Geométrica, se houver a coordenação simultânea entre os dois tipos de representação que compõe a figura geométrica, ou seja, quando apresenta uma forma visual acompanhada de um discurso. Lembrando também que, nesses casos, é necessário ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada à apreensão perceptiva. Seguem os exemplos.

Quadro 15 – Análises cognitivas de questões do tipo Figura Geométricas.

| Questão 2 – 9º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|
| | Apreensão: | Perceptiva, discursiva. |
| 000 IT_006826<br>Cristina desenhou quatro polígonos regulares e anotou dentro deles o valor da soma de seus ângulos internos.<br>  <br><br>Qual é a medida de cada ângulo interno do hexágono regular?<br>(A) 60°<br>(B) 108°<br>→ C) 120°<br>(D) 135° | Conexão de apreensões (tipo de problema): | Figura Geométrica. |
| | Enunciado: | Figural e numérico. |
| | Resolução: | Figural e numérico. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| | Desconstrução dimensional: | 2D → 2D. |
| | Tratamento matemático: | Divisão. |
| Por meio do discurso do enunciado, é necessário identificar o hexágono, e conhecendo a propriedade dos ângulos congruentes, calcular cada ângulo interno. | | |

| Questão 6 – 9º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|

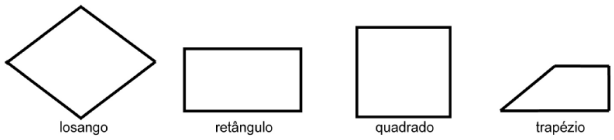
<table>
<tr><td rowspan="7"> 
</td><td>Apreensão:</td><td>Perceptiva, discursiva.</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Figura Geométrica.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D.</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>2D→1D.</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Aritmética.</td></tr>
<tr><td colspan="3">É um problema acessível ao aluno, pois os discursos do enunciado e da figura em relação ao ângulo reto se complementam. Basta o aluno conhecer a propriedade dos triângulos em relação a soma dos ângulos internos, que ele poderá resolver o problema sem necessidade de outra apreensão ou recurso matemático além do cálculo para a soma dos ângulos internos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Questão 23 – 9º ano</td><td>Olhar:</td><td>Agrimensor.</td></tr>
<tr><td rowspan="7"> 
</td><td>Apreensão:</td><td>Perceptiva, discursiva.</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Figura Geométrica.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D.</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>2D → 1D.</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum.</td></tr>
<tr><td colspan="3">As figuras vêm acompanhadas de um discurso (retângulo, quadrado). O aluno precisa diferenciar as propriedades dos quadriláteros e as diferenças entre retângulo e quadrado, sem necessidade de modificar a figura<br><br>O olhar se volta, primeiramente para a dimensão 2, conforme a figura se coloca, e depois para as características das figuras, ou seja o ângulo, e os lados (1D), afim de determinar a alternativa correta.</td></tr>
</table>

| Questão 38 – 5º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|

**Exemplo de item:**

Ao escolher lajotas para o piso de sua varanda, Dona Lúcia falou ao vendedor que precisava de lajotas que tivessem os quatro lados com a mesma medida.




Que lajotas o vendedor deve mostrar a Dona Lúcia?

(A) Losango ou quadrado.
(B) Quadrado ou retângulo.
(C) Quadrado ou trapézio.
(D) Losango ou trapézio.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 39% | 36% | 11% | 5% |

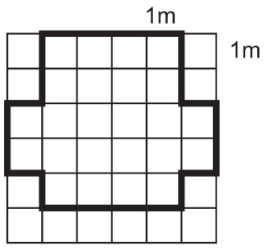
| | |
|---|---|
| Apreensão: | Perceptiva, discursiva. |
| Conexão de apreensões (tipo de problema) | Figura Geométrica. |
| Enunciado: | Figural. |
| Resolução: | Figural. |
| Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| Desconstrução dimensional: | 2D → 1D. |
| Tratamento matemático: | Nenhum. |

Neste problema a percepção imediata das figuras é congruente com o discurso. O aluno precisa ter conhecimento das propriedades das figuras para determinar quais delas possuem os quatro lados iguais. Caso o aluno não tenha este conhecimento, poderá guiar-se pela percepção. Sendo assim, a desconstrução dimensional que ocorre parte da dimensão 2 para dimensão 1 (os lados).

Questão 41 – 5º ano

**Exemplo de item:**

Uma pessoa faz caminhadas em uma pista desenhada em um piso quadriculado, no qual o lado de cada quadrado mede 1m. A figura abaixo representa essa pista.




Quantos metros essa pessoa percorre ao completar uma volta?

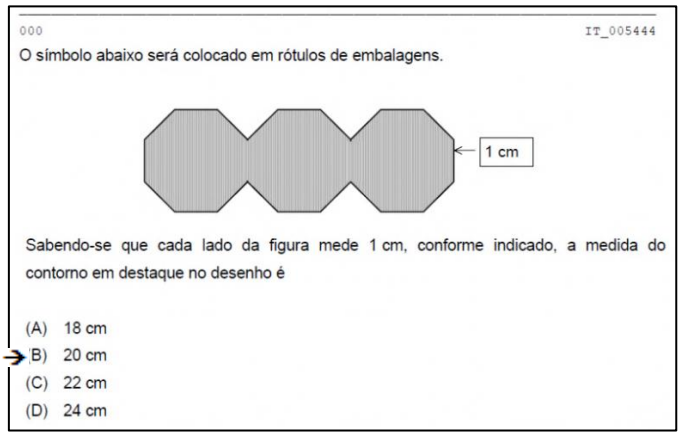
(A) 36m
(B) 24m
(C) 22m
(D) 20m

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 43% | 24% | 23% | 7% |

| | |
|---|---|
| Olhar: | Agrimensor. |
| Apreensão: | Perceptiva, discursiva. |
| Conexão de apreensões (tipo de problema) | Figura Geométrica. |
| Enunciado: | Figural e numérico. |
| Resolução: | Figural e numérico. |
| Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| Desconstrução dimensional: | 2D → 1D. |
| Tratamento matemático: | Cálculo de medida de comprimento. |

Neste problema o aluno precisa estabelecer relações métricas para calcular o contorno. Neste caso, a percepção inicial se volta para a malha quadriculada (2D) e a partir disto deverá se fixar no contorno destacado (1D).

Considerando o percentual de respostas às alternativas, nota-se que muitos alunos consideraram a alternativa A como correta (43%), ou seja, confundiram contorno com área, e consideraram a figura toda, não só o contorno em destaque. Nesses casos é provável que esses alunos não tenham desenvolvido a habilidade de desconstruir a figura, permanecendo com a percepção imediata para solucionar a questão. Ou, até mesmo, não interpretaram corretamente a questão, demostrando dificuldade em relação à apreensão discursiva e ignorando o desenho da pista à qual o enunciado se refere.

| Questão 1 – 9º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|
|  <br>000 IT_005444<br>O símbolo abaixo será colocado em rótulos de embalagens.<br>1 cm<br>Sabendo-se que cada lado da figura mede 1 cm, conforme indicado, a medida do contorno em destaque no desenho é<br>(A) 18 cm<br>→ (B) 20 cm<br>(C) 22 cm<br>(D) 24 cm | Apreensão: | Perceptiva, discursiva. |
| | Conexão de apreensões (tipo de problema) | Figura Geométrica. |
| | Enunciado: | Figural e numérico. |
| | Resolução: | Figural e numérico. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| | Desconstrução dimensional: | 2D → 1D. |
| | Tratamento matemático: | Cálculo de medida de comprimento. |
| Há necessidade de estabelecer relação métrica, considerando cada lado como sendo de 1cm. A percepção imediata é de uma figura não conexa de dimensão 2, e o olhar deve se voltar para os lados desta figura (1D) que devem ser considerados todos de mesma medida. | | |

Fonte: a autora

Duval (2004, p.156) afirma que muitos problemas com figuras geométricas apresentam divergência entre a figura e o discurso, e os alunos acabam apresentando dificuldades devido à falta de articulação entre a apreensão perceptiva e a discursiva. Segundo o autor, os alunos muitas vezes não estão preparados nem mesmo para integrar o nível de uma apreensão perceptiva e operatória das figuras. Contudo, entre as questões analisadas aqui, a divergência entre a figura e o discurso praticamente não aparece, ou seja, as questões com este tipo de problema apresentam, de maneira geral, certa congruência entre a figura e o enunciado, o que torna o problema mais acessível ao aluno em relação a outros problemas menos congruentes. Essas questões podem parecer simples, mas acabam se tornando complexas aos alunos que não desenvolveram as habilidades cognitivas necessárias para a resolução que se espera dele.

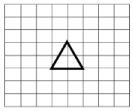
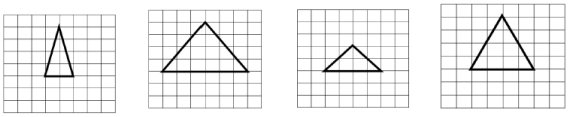
Os problemas de Visualização, com 14% de frequência, são resultados das conexões entre as apreensões perceptiva e operatória. Os problemas deste tipo, segundo Duval[22] (1997 apud MORETTI e BRANDT, 2015, p. 607), não exige nenhum conhecimento matemático. A visualização pode comandar a apreensão operatória. Seguem algumas análises.

[22] DUVAL, R. **La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée**. 1997. IN: *CURSO DADO A PUC/SP*.

Quadro 16 – Análise cognitiva de questões do tipo Visualização.

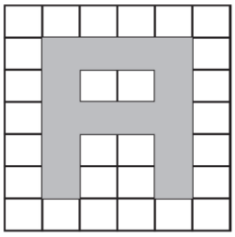
| Questão 10 – 3º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|
| 000 IT_043496<br>Ao fazer um molde de um copo,em cartolina, na forma de cilindro de base circular qual deve ser a planificação do mesmo?<br>(A) (B) (C) → (D) (E) | Apreensões: | Perceptiva e Operatória (mereológica). |
| | Tipo de problema | Visualização |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 3D/2D |
| | Desc. dimensional: | 3D→2D |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |
| A atividade geométrica necessária neste problema vai de uma visualização em 3D (o copo) para um visualização em 2D, ou seja, a figura é passível de modificação, por meio de uma operação que modifica sua forma, feita de forma mental ou gráfica, a fim de encontrar a figura plana que representa o objeto. | | |

| Questão 11 – 5º ano | Olhar: | Construtor. |
|---|---|---|
| 000 IT_025075<br>O piso de uma sala está sendo coberto por cerâmica quadrada. Já foram colocadas 7 cerâmicas, como mostrado na figura.<br>Quantas cerâmicas faltam para cobrir o piso?<br>(A) 7<br>→ (B) 8<br>(C) 9<br>(D) 15 | Apreensão: | Perceptiva, Operatória (mereológica). |
| | Conexão de apreensões: | Visualização. |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desconstrução dimensional: | 2D→1D→2D |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |
| Este foi considerado um problema de apreensão mereológica, pois o aluno pode repartir o campo em unidades figurais para fins de comparação entre as áreas.<br><br>A desconstrução dimensional se dá partindo da percepção inicial de um retângulo (2D), subdivido em pequenas áreas. Prolongando os lados dessas pequenas áreas (1D) é possível preencher todo o restante do campo, a fim de verificar a quantidade de cerâmicas que faltam (2D).<br><br>Da forma como está colocada, esta questão pode ser resolvida guiada, basicamente, por meio de uma apreensão perceptiva. Uma adaptação no enunciado tornaria esta questão bastante interessante para o desenvolvimento de um olhar de Construtor mais apurado: solicitar o desenho do piso com todas as cerâmicas necessárias para cobrí-lo. Deste modo, a questão exigiria uma apreensão sequencial, pois para isto o aluno precisaria utilizar régua graduada, seguindo certos passos, como medir, marcar e traçar a reta. Deixaria de ser um problema guiado pela percepção, e passaria a ser guiado por certas propriedades inerentes à figura. | | |

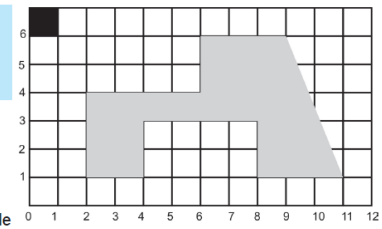
| Questão 40 – 5º ano | Olhar: | Agrimensor. |
|---|---|---|
| **Exemplo de item:**<br>A figura abaixo foi dada para os alunos e algumas crianças resolveram ampliá-la.<br>  <br>Veja as ampliações feitas por quatro crianças.<br>  <br>Ana Célia Bernardo Diana<br>Quem ampliou corretamente a figura?<br>(A) Ana<br>(B) Bernardo<br>(C) Célia<br>➡ (D) Diana<br>**Percentual de respostas às alternativas**<br>A: 9% B: 10% C: 23% D: 56% | Apreensão: | Perceptiva, Operatória (ótica). |
| | Conexão de apreensões (tipo de problema) | Visualização. |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| | Desconstrução dimensional: | 2D → 1D. |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |

Há uma variação do tamanho, mantendo a forma e a orientação. Por não haver a necessidade de modificar a forma, e sim o tamanho, este problema exige uma operação ótica.
Não é necessária a articulação da figura com algum discurso. A percepção comanda a operação figural.

O triângulo de dimensão 2 deve ser visto em termos de segmentos de reta de dimensão 1 que compõem o lado, para que seja possível comparar as medidas das figuras e encontrar a figura semelhante.

| Questão 42 – 5º ano | Olhar: | Construtor. |
|---|---|---|
| **Exemplo de item:**<br>Em sua fachada, uma loja cobriu com azulejos a inicial do nome do dono. Cada quadrinho corresponde a um azulejo.<br>  <br>Quantos azulejos foram usados para cobrir a letra "A" nesse desenho?<br>(A) 13<br>➡ (B) 14<br>(C) 16<br>(D) 20<br>**Percentual de respostas às alternativas**<br>A: 4% B: 88% C: 3% D: 3% | Apreensão: | Perceptiva, Operatória (mereológica). |
| | Conexão de apreensões (tipo de problema) | Visualização. |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D. |
| | Desconstrução dimensional: | 2D→ 1D→2D. |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |

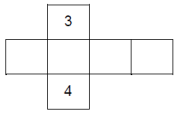
A apreensão mereológica se justifica pela necessidade de dividir a figura em subfiguras, ou seja, em quadradinhos, de forma mental ou gráfica. Esta operação é subordinada pela percepção.
É feita partindo da visualização da figura em dimensão 2, e adicionando traços (1D) para encontrar as subfiguras, que representam os azulejos usados (2D).

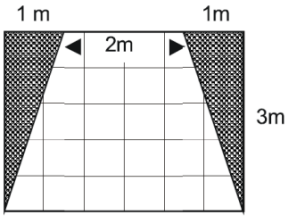
<table>
<tr><td colspan="2">Questão 51 – 9º ano</td><td>Olhar:</td><td>Construtor.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="7">Na ilustração ao lado, o quadrado sombreado representa uma unidade de área.<br>  <br>A área da figura desenhada mede<br>(A) 23 unidades. ➡(B) 24 unidades. (C) 25 unidades. (D) 29 unidades.<br><table><tr><th colspan="4">Percentual de respostas às alternativas</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>23%</td><td>39%</td><td>27%</td><td>6%</td></tr></table></td><td>Apreensão:</td><td>Perceptiva, Operatória (mereológica).</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Visualização.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D.</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>2D → 1D.</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum.</td></tr>
<tr><td colspan="4">É um problema semelhante ao anterior, porém com maior grau de dificuldade, pois para dividir a figura em subfiguras, algumas unidades de área não ficam inteiras. Para isto a figura precisa ser subdividida em subfiguras que facilitem o cálculo das áreas. Além disso, a necessidade de utilização de régua para prolongar as retas pode se fazer necessário.</td></tr>
</table>

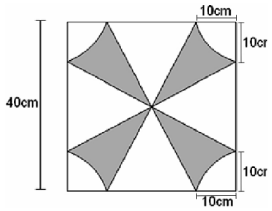
Fonte: a autora.

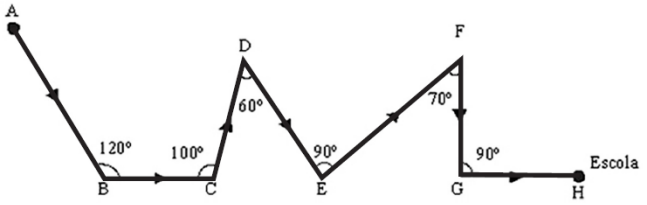
Para os problemas que exigem articulação entre as apreensões Perceptiva, Discursiva e Operatória, Duval (1997 apud MORETTI e BRANDT, 2015, p. 607) denomina como problema de Heurística ou Demonstração. Nesta análise a atividade Heurística aparece em 33% das questões, enquanto que a atividade de Demonstração não aparece nenhuma vez. Seguem alguns exemplos.

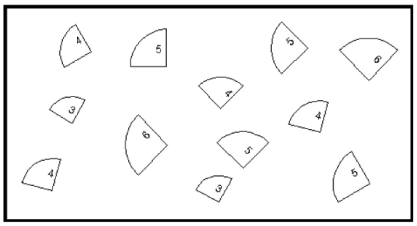
Quadro 17 – Análise cognitiva de questões do tipo Heurística.

<table>
<tr><td colspan="2">Questão 12 – 5º ano</td><td>Olhar:</td><td>Construtor.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="7">000 IT_029470<br>Os alunos da 4ª série estão montando um cubo para fazer um dado para a aula de matemática. Eles utilizam o molde abaixo, onde os números 3 e 4 representam duas de suas faces paralelas.<br>  <br>Sabendo que no dado a soma dos números em duas faces paralelas quaisquer totaliza sempre 7, que algarismos deverão estar escritos nas faces vazias?<br>(A) 1 2 5 6<br>(B) 2 1 6 5<br>(C) 2 5 1 6<br>➔(D) 1 2 6 5</td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, Discrusiva, Operatória (mereológica e posicional).</td></tr>
<tr><td>Tipo de Problema:</td><td>Heurítica.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>3D/2D</td></tr>
<tr><td>Desc. dimensional:</td><td>2D→3D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Neste problema, o olhar deve se voltar para a mudança de dimensão, por meio de uma apreensão operatória de posição, que ocorre partindo da figura plana (2D) para um sólido geométrico (3D) guiado pela apreensão discursiva que determina a posição das faces, e também pela apreensão perceptiva que conduz a modificação mereológica da forma da figura.</td></tr>
</table>

| Questão 28 – 9º ano | Olhar: | Inventor. |
|---|---|---|
| 13 IT_024367<br>O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.<br>  <br><br>Qual é a área do piso que será revestido com cerâmica?<br>(A) 3 m²<br>(B) 6 m²<br>→ (C) 9 m²<br>(D) 12 m² | Apreensões | Perceptiva, Discursiva, Operatória (mereológica). |
| | Tipo de Problema: | Heurística. |
| | Enunciado: | Figural, numérico. |
| | Resolução: | Figural, numérico. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desc. dimensional: | 2D→1D→2D |
| | Tratamento matemático: | Cálculo de área. |
| O aluno pode operar no formato da figura, acrescentando algum traço, destacando unidades figurais pertinentes, isto tudo por meio de uma operação mereológica. A utilização de fórmulas de áreas pode ser um recurso utilizado para o desenvolvimento da resolução. É necessário estar atento para determinar as medidas do trapézio, Pois o aluno pode confundir a representação das cerâmicas (os quadradinhos) com a unidade de medida utilizada (o metro). Neste caso a apreensão discursiva precisa ser mobilizada pelo aluno para que seu olhar se volte para o discurso e não para a percepção imediata que a figura provoca. | | |

| Questão 34 – 3º ano | Olhar: | Inventor. |
|---|---|---|
| **Exemplo de item:**<br>Paulo resolve modificar o revestimento do piso de sua sala de estar e escolhe uma cerâmica cujo formato está representado na figura a seguir. A cerâmica escolhida tem a forma de um quadrado cujo lado mede 40cm e possui 4 arcos de circunferência, de raio igual a 10cm, cujos centros estão localizados nos vértices do quadrado.<br>  <br><br>Com base nessas informações, qual é a área do desenho formado na cerâmica, em centímetros quadrados? (Considere π = 3,14)<br>(A) 314 (B) 400 ➡ (C) 486 (D) 1114 (E) 1286<br>**Percentual de respostas às alternativas**<br>A: 22% B: 26% C: 21% D: 12% E: 14% | Apreensões: | Perceptiva, Discursiva, Operatória (mereológica e posicional). |
| | Tipo de problema | Heurística. |
| | Enunciado: | Figural e numérico. |
| | Resolução: | Figural e algébrico. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desc. dimensional: | 2D→1D |
| | Tratamento matemático: | Cálculo de área do quadrado e do círculo. |
| Esta atividade consiste em identificar as diversas unidades figurais que compõem a figura, e operar sobre elas, inventando traços que permitam compor e decompor a figura em outras unidades figurais que permitam o cálculo da área solicitada no enunciado. A operação posicional pode se fazer presente ao identificar que os quatro arcos de circunferência com centro nos vértices do quadrado compõem uma circunferência. Para o desenvolvimento da resolução, a apreensão discursiva deve estar integrada à apreensão figural. | | |

<table>
<tr><td colspan="2">Questão 46 – 9º ano</td><td>Olhar:</td><td>Agrimensor.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="8">Para chegar à escola, Carlos realiza algumas mudanças de direção como mostra a figura a seguir.<br>  <br><br>As mudanças de direção que formam ângulos retos estão representadas nos vértices<br>(A) B e G. (B) D e F. (C) B e E. ➡(D) E e G.<br><table><tr><td colspan="4">Percentual de respostas às alternativas</td></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>29%</td><td>20%</td><td>11%</td><td>38%</td></tr></table></td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, discursiva e operatória (posicional).</td></tr>
<tr><td>Tipo de problema</td><td>Heurística.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>1D/2D</td></tr>
<tr><td>Desc. dimensional:</td><td>1D→2D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum.</td></tr>
<tr><td colspan="4">A atividade geométrica consiste em encontrar os ângulos retos na trajetória traçada. A rotação dos ângulos (realizada mentalmente) para visualização em uma posição mais natural e comum (vertical/horizontal) pode ser necessária para identificar os ângulos retos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Questão 50 – 9º ano</td><td>Olhar:</td><td>Construtor.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="8">Na figura abaixo, há um conjunto de setores circulares, cujos ângulos centrais são de 90º. Cada setor está com a medida do seu raio indicada.<br>  <br>Agrupando-se, convenientemente, esses setores, são obtidos<br>(A) 3 círculos.<br>(B) no máximo um círculo.<br>→(C) 2 círculos e 2 semicírculos.<br>(D) 4 círculos.<br><table><tr><td colspan="4">Percentual de respostas às alternativas</td></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>17%</td><td>10%</td><td>62%</td><td>8%</td></tr></table></td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, Discursiva, Operatória (mereológica e posicional).</td></tr>
<tr><td>Tipo de problema</td><td>Heurística.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D</td></tr>
<tr><td>Desc. dimensional:</td><td>2D→1D→2D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Atividade geométrica desta questão trata da construção de círculos e semi-círculos por meio de operação mereológica, com base nas características das unidades figurais dadas no problema, por meio de uma apreensão discursiva. Opera sob as figuras (mentalmente ou graficamente) modificando a posição e o contorno das unidades figuras.</td></tr>
</table>

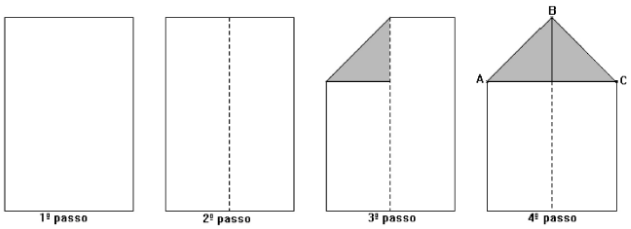
Fonte: a autora.

A seguir estão algumas análises de problemas do tipo Construção Geométrica, que resultam da conexão entre as apreensões Discursiva, Sequencial e Perceptiva.

Quadro 18 – Análise cognitiva de questões do tipo Construção Geométrica.

<table>
<tr><th>Questão 7 – 9º ano</th><th>Olhar:</th><th>Construtor</th></tr>
<tr><td rowspan="7">000 IT_029667<br>Exatamente no centro de uma mesa redonda com 1m de raio, foi colocado um prato de 30cm de diâmetro, com doces e salgados para uma festa de final de ano. Qual a distância entre a borda desse prato e a pessoa que se serve dos doces e salgados?<br>(A) 115cm<br>→ (B) 85cm<br>(C) 70cm<br>(D) 20cm</td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, discursiva e sequencial.</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões:</td><td>Construção Geométrica</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Natural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural e numérico</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>3D/2D.</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>0D→3D□2D →1D→1D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Transformação de unidade de medida.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Com base em uma apreensão sequencial e discursiva, guiando-se pelo discurso do enunciado, é necessário construir (mentalmente ou graficamente) a figura geométrica, guiando-se pelo discurso que ora refere-se ao raio (da mesa) ora refere-se ao diâmetro (do prato).<br>Seguindo as informações do enunciado, é necessário voltar o olhar para centro (0D) de uma mesa redonda (3D→2D), cujo raio (1D) é de 1m, e onde será colocado um prato de 30 cm de diâmetro (1D) e com isto calcular a distância (1D) solicitada.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Questão 8 – 9º ano</th><th>Olhar:</th><th>Construtor.</th></tr>
<tr><td rowspan="7">000 IT_033358<br>O administrador de um campo de futebol precisa comprar grama verde e amarela para cobrir o campo com faixas verdes e amarelas iguais em áreas e quantidades. O campo é um retângulo com 100 m de comprimento e 50 m de largura e, para cada 10 $m^2$ de grama plantada, gasta-se 1 $m^2$ a mais por causa da perda. Quantos $m^2$ de grama verde o administrador deverá comprar para cobrir todo o campo?<br>(A) 2250<br>(B) 2500<br>→ (C) 2750<br>(D) 5000</td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, Discursiva, Sequencial.</td></tr>
<tr><td>Tipo de Problema:</td><td>Construção Geométrica.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Natural e Numérico.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural e Numérico (ou algébrico).</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D</td></tr>
<tr><td>Desc. dimensional:</td><td>2D→1D→2D.</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático</td><td>Medida de área e comprimento.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Neste problema o aluno precisa construir a figura de um campo de futebol, apoiando-se no discurso apresentado, por meio de uma apreensão discursiva. Para resolução a apreensão sequencial se faz necessária, pois primeiro deve ser construído o campo, considerando as suas medidas de comprimento, depois calcular a área, a fim de estabelecer uma relação entre a área do campo de futebol e a quantidade de grama verde a ser comprada. O campo de dimensão 2 é construído por meio de retas paralelas e perpendiculares (1D) para então, estabelecer a relação entre a área do campo e da grama.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Questão 44 – 9º ano</th><th>Olhar:</th><th>Construtor</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados nas figuras a seguir.<br>  <br><br>O triângulo ABC é<br>(A) retângulo e escaleno.<br>➡ (B) retângulo e isósceles.<br>(C) acutângulo e escaleno.<br>(D) acutângulo e isósceles.<br><table><tr><th colspan="4">Percentual de respostas às alternativas</th></tr><tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>27%</td><td>40%</td><td>17%</td><td>14%</td></tr></table></td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, Discursiva, Sequencial.</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Construção Geométrica</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>3D/2D.</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>3D□1D→0D →2D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Medida de comprimento .</td></tr>
<tr><td colspan="3">Esta é uma atividade de reconhecimento de propriedades e características das figuras, guiada pelas apreensões perceptiva e sequencial, e também pelo discurso presente nas alternativas. Trata-se de uma folha de papel (3D) representada em dimensão 2D. O olhar deve se voltar para as características das subfiguras, ou seja, dos triângulos que são construídos no decorrer dos passos.<br><br>O problema indica como correta a alternativa da letra b, mas para que seja validada esta resposta deveria ser apresentado algum discurso que garanta que a folha está dobrada exatamente na metade, garantindo assim, que os lados do triângulo (isósceles) sejam congruentes. Isto porque, conforme visto, não há figura geométrica sem legenda.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora.

A seguir apresentam-se análises a respeito das categorias contempladas em cada nível de escolaridade. Conforme necessário, alguns exemplos de análises mais detalhadas serão apresentados nesta fase, mas na maioria dos casos, os exemplos são aqueles que já foram detalhados acima. O objetivo desta etapa é comparar as diferenças e semelhanças das categorias contempladas nas questões dos três níveis de ensino analisados.

Entre as 51 questões, 15 são de ensino fundamental – anos iniciais, 25 de anos finais e 11 de ensino médio. Os três quadros a seguir apresentam alguns resultados obtidos a partir dos tratamentos realizados, a começar pela frequência das categorias contempladas em questões de ensino fundamental dos anos iniciais.

Quadro 19 – Frequência percentual das categorias para as questões da Prova Brasil de ensino fundamental – anos iniciais.

**ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS INICIAIS**

| OLHARES | |
|---|---|
| Botanista | 27% |
| Agrimensor | 53% |
| Construtor | 20% |
| Inventor | 0% |

| APREENSÕES | | | |
|---|---|---|---|
| Perceptiva | | 100% | |
| Discursiva | | 60% | |
| Operatória | Mereológica | 27% | 33% |
| | Ótica | 20% | |
| | Posicional | 13% | |
| Sequencial | | 0% | |

| TIPO DE PROBLEMA | |
|---|---|
| Figura Geométrica | 7% |
| Visualização | 33% |
| Heurística ou Demonstração | 0% |
| Construção Geométrica | 0% |

| TIPO DE REGISTRO | | | |
|---|---|---|---|
| **Enunciado** | | **Resolução** | |
| Figural | 100% | Figural | 100% |
| Algébrico | 0% | Algébrico | 0% |
| Natural | 0% | Natural | 0% |
| Numérico | 27% | Numérico | 27% |

| | |
|---|---|
| **TRATAMENTO MATEMÁTICO** | 20% |

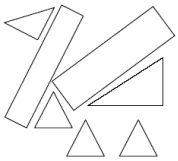
| | |
|---|---|
| **MUDANÇA DE REGISTRO:** | 0% |

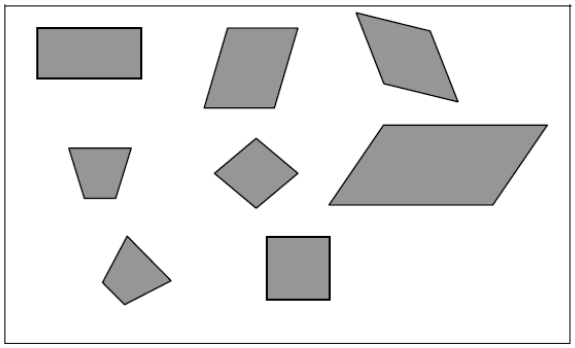
Fonte: a autora.

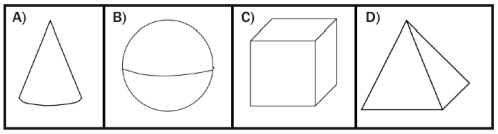
O olhar Botanista está presente somente em quatro questões, e todas elas são do nível de ensino dos anos inicias, representando 27% das questões analisadas. São problemas em que só é requerida a apreensão Perceptiva, sem conexão com outra apreensão. Este olhar permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, é um “olhar qualitativo”. Deve-se observar diferenças entre duas formas que apresentam certas semelhanças e de notar certas semelhanças entre formas diferentes. Não há nenhum tipo de propriedade, medida ou relação que precisa ser reconhecida.

Nas questões que solicitam o olhar Botanista não há conexão entre as apreensões, pois só é requerida a apreensão Perceptiva. Neste caso, não estão contemplados na categoria Tipo de Problema. São quatro questões que apresentam essas características, cujas análises estão exploradas a seguir.

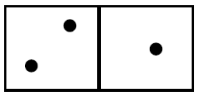
Quadro 20 – Análise cognitiva de questões que exigem somente a apreensão perceptiva contempladas em questões de 5º ano.

| Questão 13 – 5º ano | Olhar: | Botanista. |
|---|---|---|
| 000 IT_039148<br>Sheila usou linhas retas fechadas para fazer este desenho.<br>  <br>Quantas figuras de quatro lados foram desenhadas?<br>→ (A) 2<br>(B) 3<br>(C) 4<br>(D) 5 | Apreensão: | Perceptiva. |
| | Conexão de apreensões (tipo de problema) | Não há conexão. |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desconstrução dimensional: | 2D→1D |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |
| A desconstrução dimensional inicia com a percepção imediata das unidades figurais de dimensão 2, e depois se fixa nos lados dessas figuras (1D). | | |

| Questão 21 – 5º ano | Olhar: | Botanista. |
|---|---|---|
| 04 IT_046318<br>Mariana colou diferentes figuras numa página de seu caderno de Matemática, como mostra o desenho abaixo.<br>  <br>Essas figuras têm em comum<br>(A) o mesmo tamanho.<br>→ (B) o mesmo número de lados.<br>(C) a forma de quadrado.<br>(D) a forma de retângulo. | Apreensão: | Perceptiva. |
| | Conexão de apreensões (tipo de problema) | Não há conexão. |
| | Enunciado: | Figural. |
| | Resolução: | Figural. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desconstrução dimensional: | 2D→1D |
| | Tratamento matemático: | Nenhum. |
| É um problema que exige o reconhecimento de características qualitativas das figuras. A desconstrução dimensional parte das figuras planas para as características dos lados dessas figuras. | | |

<table>
<tr><td>Questão 15 – 5º ano</td><td>Olhar:</td><td>Botanista</td></tr>
<tr><td rowspan="7">
Exemplo de item:<br>
Vítor gosta de brincar de construtor. Ele pediu para sua mãe comprar blocos de madeira com superfícies arredondadas.<br>
A figura abaixo mostra os blocos que estão à venda.<br>


Quais dos blocos acima a mãe de Vítor poderá comprar?<br>
(A) A e C. ➡ (B) A e B. (C) B e D. (D) C e D.<br>
<table>
<tr><th colspan="4">Percentual de respostas às alternativas</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>12%</td><td>53%</td><td>13%</td><td>13%</td></tr>
</table>
</td><td>Apreensão:</td><td>Perceptiva</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Não há conexão.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>3D/2D</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>3D→2D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum</td></tr>
<tr><td colspan="3">É um problema que exige o reconhecimento de características qualitativas das figuras.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Questão 37 – 5º ano</td><td>Olhar:</td><td>Botanista</td></tr>
<tr><td rowspan="7">
000 IT_043501<br>
A face superior das peças de um jogo de dominó tem formato de um quadrilátero. Observe um exemplo:<br>
 <br>
Qual o quadrilátero que melhor caracteriza a face superior da peça de um jogo de dominó?<br>
(A) Trapézio<br>
(B) Quadrado<br>
→ C) Retângulo<br>
(D) Losango
</td><td>Apreensão:</td><td>Perceptiva</td></tr>
<tr><td>Conexão de apreensões (tipo de problema)</td><td>Não há conexão.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>3D/2D</td></tr>
<tr><td>Desconstrução dimensional:</td><td>3D→2D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Nenhum</td></tr>
<tr><td colspan="3">Atividade que requer o reconhecimento da forma da figura.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora.

Além dessas questões, neste nível de ensino, observa-se a predominância de questões que exige um olhar Agrimensor (53%). O Botanista e o Agrimensor são olhares icônicos, e a apreensão Perceptiva é necessária em todos os problemas que contemplam esses olhares, pois em todos eles apresenta-se uma figura que pertence ao enunciado do problema. Quanto ao tipo de problema, 33% se referem ao tipo Visualização, que são aqueles problemas com articulação das apreensões Perceptiva e Discursiva. Os problemas do tipo Figura Geométrica aparece em 7% dos casos, com articulação de apreensão Perceptiva e Operatória. Problemas que exige a conexão de mais que duas apreensões não ocorrem nas questões deste nível de ensino, que são os de tipo Heurístico, Demonstração e Construção Geométrica. Outra característica que não ocorreu neste nível, são questões que precisam de algum tratamento matemático necessário para resolução.

Quanto ao tipo de registro, tanto nos enunciados quanto nas resoluções, os registros que prevalecem são sempre figural, com 100% de frequência e/ou numérico com 27% de frequência, não havendo necessidade de mudança de registro para resolução dos problemas.

A seguir apresentam-se os dados a respeito das questões de Ensino fundamental – anos finais.

Tabela 04 – Frequência percentual das categorias para as questões da Prova Brasil de ensino fundamental – anos finais.

**ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS**

| **OLHARES** | |
|---|---|
| Botanista | 0% |
| Agrimensor | 68% |
| Construtor | 24% |
| Inventor | 8% |

| **APREENSÕES** | | | |
|---|---|---|---|
| Perceptiva | | 100% | |
| Discursiva | | 80% | |
| Operatória | Mereológica | 24% | 52% |
| | Ótica | 32% | |
| | Posicional | 20% | |
| Sequencial | | 16% | |

| **TIPO DE PROBLEMA** | |
|---|---|
| Figura Geométrica | 36% |
| Visualização | 16% |
| Heurística ou Demonstração | 32% |
| Construção Geométrica | 16% |

| **TIPO DE REGISTRO** | | | |
|---|---|---|---|
| **Enunciado** | | **Resolução** | |
| Figural | 88% | Figural | 96% |
| Algébrico | 8% | Algébrico | 28% |
| Natural | 24% | Natural | 4% |
| Numérico | 40% | Numérico | 52% |

| | |
|---|---|
| **TRATAMENTO MATEMÁTICO** | 32% |

| | |
|---|---|
| **MUDANÇA DE REGISTRO** | 40% |

Fonte: a autora.

O olhar do Botanista não aparece nas questões deste nível de ensino. Assim como no nível anterior, prevalece o olhar do Agrimensor (68%) em que as propriedades geométricas são mobilizadas para fins de medida. Nesta fase aparece o olhar do Construtor, com 24% de frequência, em que o aluno pode tomar consciência de uma propriedade geométrica, e o olhar do inventor, com apenas 8% de frequência, que exige do aluno um olhar mais criativo, para operar sob a figura modificando-a a fim de encontrar a solução.

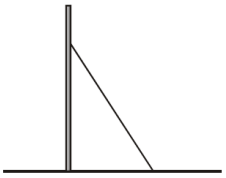
Assim como no nível anterior, a apreensão perceptiva aparece em todos os problemas. E grande parte delas acompanha a necessidade de uma apreensão discursiva

(80%). Há a ocorrência de questões que requerem um ou mais tipo de operação figural, totalizando 52% de questões. E a necessidade de uma apreensão sequencial aparece poucas vezes, com apenas 16% de frequência.

Quanto ao tipo de registro, a frequência de questões que apresentam alguma figura no enunciado cai de 100% para 88%, acompanhado por registro do tipo numérico (40%), linguagem natural (24%) e algébrico (8%). Em 40% das questões é necessário que haja uma (ou mais) mudança(s) de registro, o que pode dificultar o desenvolvimento da resolução. Outro fator que também pode dificultar na resolução de um problema é a exigência de um tratamento matemático que não está contemplado no enunciado, mas sem o qual não é possível resolver a questão, isto ocorre em 32% dos itens do ensino fundamental – anos finais.

Segue um exemplo, além dos que foram explorados anteriormente.

Quadro 21 – Análise cognitiva da questão 5.

| Questão 5 – 9º ano | Olhar: | Agrimensor |
|---|---|---|
| 000 IT_026669<br>Observe esta figura que representa uma escada apoiada em uma parede. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.<br>  <br>A escada mede, aproximadamente,<br>(A) 5 m<br>(B) 6,7 m<br>→ (C) 7,3 m<br>(D) 9 m | Apreensões: | Perceptiva e discursiva |
| | Tipo de problema | Figura Geométrica. |
| | Enunciado: | Figural, numérico. |
| | Resolução: | Figural, numérico. |
| | Dimensão (obj/fig): | 2D/2D |
| | Desc. dimensional: | 2D→1D→2D |
| | Tratamento matemático: | Teorema de Pitágoras. |

Neste problema o aluno precisar tomar consciência de que o ângulo formado entre a parede e o chão é de 90º, desta forma a resolução pode ser feita por meio de Teorema de Pitágoras.

Além do Teorema de Pitágoras, esta atividade pode ser resolvida por estimativa, sendo que a hipotenusa é o lado maior do triângulo, eliminam-se, então, as duas alternativas (5m e 6,7m). E considerando as medidas dos catetos de 2m e 7m, estima-se, então, que a hipotenusa é um pouco maior que 7m, ou seja, aproximadamente 7,3m. Neste caso, quem comandará a resolução será a apreensão perceptiva.

A desconstrução dimensional se dá partindo da percepção imediata do triângulo (3D), e depois, guiando-se pelo enunciado o olhar deve se voltar para as medidas dos lados (1D), para finalmente determinar a medida que é solicitada no problema.

Fonte: a autora.

A tabela a seguir apresenta as informações sobre a frequência de categorias contempladas nas questões de ensino médio.

Tabela 05 – Frequência percentual das categorias para as questões da Prova Brasil de ensino médio.

**ENSINO MÉDIO**

| **OLHARES** | |
|---|---|
| Botânico | 0% |
| Agrimensor | 18% |
| Construtor | 55% |
| Inventor | 18% |

| **APREENSÕES** | | | |
|---|---|---|---|
| Perceptiva | | 91% | |
| Discursiva | | 91% | |
| Operatória | Mereológica | 45% | 64% |
| | Ótica | 36% | |
| | Posicional | 27% | |
| Sequencial | | 18% | |

| **TIPO DE PROBLEMA** | |
|---|---|
| Figura Geométrica | 27% |
| Visualização | 45% |
| Heurística ou Demonstração | 9% |
| Construção Geométrica | 0% |

| **TIPO DE REGISTRO** | | | |
|---|---|---|---|
| **Enunciado** | | **Resolução** | |
| Figural | 64% | Figural | 91% |
| Algébrico | 0% | Algébrico | 45% |
| Natural | 36% | Natural | 0% |
| Numérico | 64% | Numérico | 36% |

| | |
|---|---|
| **TRATAMENTO MATEMÁTICO** | 45% |

| | |
|---|---|
| **MUDANÇA DE REGISTRO:** | 55% |

Fonte: a autora.

O olhar do Construtor aparece em mais da metade das questões, ocorrendo um aumento de 24% para 55% de frequência em relação às questões de nível anterior. Este salto na ocorrência deste olhar pode ser um indício de que há necessidade de trabalhar melhor esta especificidade com alunos no nível fundamental. O olhar do Inventor aparece em maior quantidade em relação aos outros níveis de ensino, mais ainda assim deixa a desejar, com apenas 18% de frequência.

Quanto às apreensões, tanto a Perceptiva quanto a Discursiva aparecem em 91% das questões, ocorrendo sempre juntas. Em seguida está a ocorrência da apreensão operatória, em 64% das questões. E em último lugar a apreensão sequencial, somente com 18% de frequência. As conexões dessas apreensões resultam em problemas do tipo Visualização, com 45%, seguidos de problemas do tipo Figura Geométrica, com 27% e depois problemas de Heurística, com 9%. Não houve problemas de Demonstração nem de Construção Geométrica.

Os problemas que apresentam registros figurais em seus enunciados caem de 96% para 64%. Aumenta a frequência de resoluções que exigem o registro algébrico e também aumenta a frequência de questões que exigem mudança de registro. Neste nível, 64% dos problemas exigem algum tipo de tratamento matemático além das apreensões figurais requeridas.

Na próxima etapa as análises feitas foram resultado de tratamentos realizados com auxílio de um Software que permite realizar tratamentos de dados com base em uma análise fatorial. Para isto utilizou-se o CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva). Neste software é possível fazer inúmeros tipos de cruzamentos relacionando diferentes categorias.

O Software CHIC permite estabelecer, por meio de cruzamentos entre sujeitos e variáveis (ou atributos), regras de associação entre variáveis, além de representar uma estruturação das variáveis obtidas por meio destas regras. Este software possibilita a realização das análises de dados a partir de vários tipos de variáveis. Nesta pesquisa as variáveis tratadas são do tipo binário, que assume unicamente dois valores, 0 para ausência ou 1 para presença da categoria de cada questão (COUTURIER, BODIN, ALMOULOUD, s/d, p. 1).

Entre os tratamentos possíveis será utilizada aqui a árvore de similaridade, ou também chamada semelhança estatística entre variáveis. Para prosseguir com as análises, apresenta-se a seguir o quadro com a denominação das categorias rodadas no software.

Quadro 22 – Legenda das categorias utilizadas no Software CHIC.

(continua)

| | | |
|---|---|---|
| Nível escolar | F1 | Fundamental – anos iniciais |
| | F2 | Fundamental – anos finais |
| | EM | Ensino médio |
| Evolução dos olhares | OB | Botanista |
| | AO | Agrimensor |
| | CO | Construtor |
| | IO | Inventor |
| Apreensões das figuras | AP | Perceptiva |
| | AO | Operatória |
| | AOpM | Operatória – mereológica |
| | AOpO | Operatória – ótica |
| | AOpP | Operatória – posicional |
| | AD | Discursiva |
| | AS | Sequencial |

Quadro 22 – Legenda das categorias utilizadas no Software CHIC.

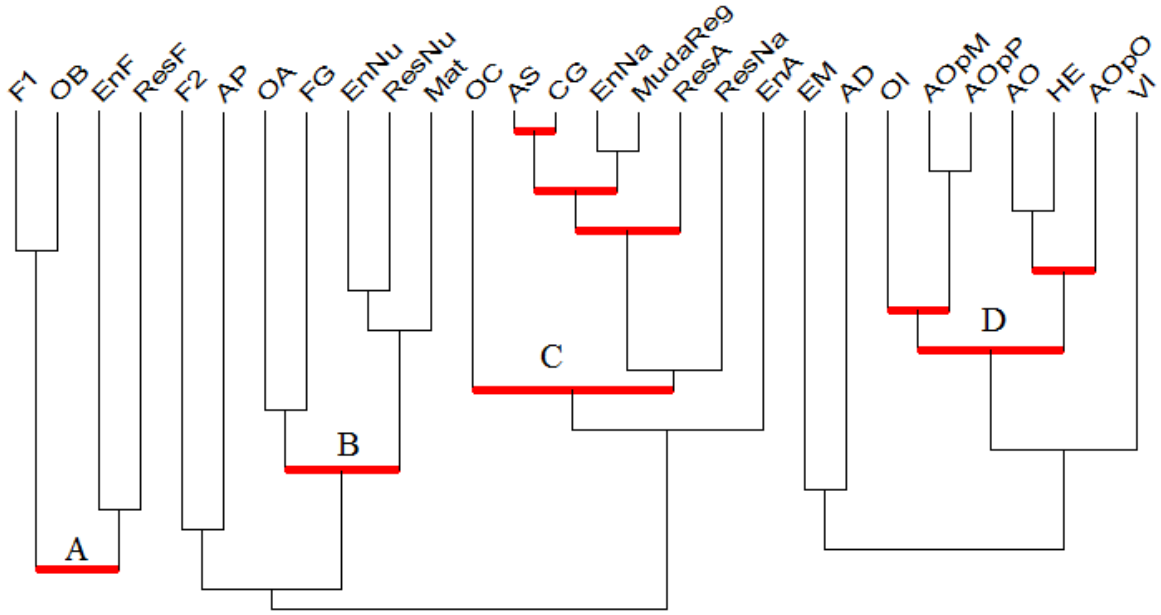
(conclusão)

| | | |
|---|---|---|
| Conexões entre as apreensões | FG | Figura Geométrica |
| | VI | Visualização |
| | HE | Heurística ou Demonstração |
| | CG | Construção Geométrica |
| Tipo de registro do enunciado | EnF | Enunciado Figural |
| | EnA | Enunciado Algébrico |
| | EnNa | Enunciado Natural |
| | EnNu | Enunciado Numérico |
| Registro necessário para resolver | ResF | Resolução Figural |
| | ResA | Resolução Algébrica |
| | ResNa | Resolução Ling. Natural |
| | ResNu | Resolução Numérica |
| | Mat | Exigência de algum tratamento matemático. |

Fonte: a autora.

No software CHIC a similaridade efetua a análise das proximidades, e produz uma janela de resultados numéricos e uma janela apresentando a árvore hierárquica de similaridades. A seguir está o gráfico da Árvore de Similaridade das categorias de tipo binário, e na sequência uma análise dos nós significativos desta árvore, ou seja, as categorias que correspondem a uma classificação mais compatível aos valores e à qualidade dos valores de implicação e de coesão. Para entender as análises do nó significativo, é importante saber que quanto mais próximo do valor 1, mais significativo ele é e mais alto se encontra no gráfico.

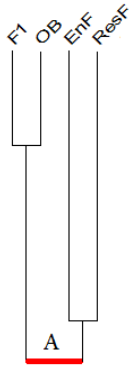
Gráfico 01 – Árvore de Similaridade das Categorias das questões do tipo binário.




Fonte: a autora.

A Árvore de similaridade foi divida em 4 Classes. A seguir está o recorte e as análises dessas classes.

Gráfico 02 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões.- Classe A.

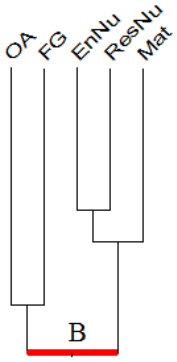



Classificação ao nível: 7 : (F1 OB) similaridade : 0.995382
Classificação ao nível: 20 : (EnF ResF) similaridade : 0.604643

Fonte: obtido a partir do CHIC.

Na Classe A (quadro 02) nota-se a similaridade entre questões de 5º ano (F1) com o olhar Botanista (BO). Além disso, o registro utilizado nestas questões é do tipo Figural (EnF). Confirmando assim as análises apresentadas anteriormente, que indicam que o olhar Botanista está contemplado somente nas questões de anos iniciais.

Gráfico 03 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe B.



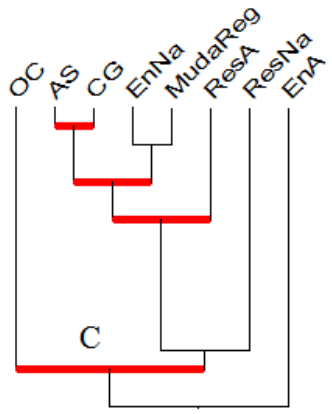

Classificação ao nível: 9 : (EnNu ResNu) similaridade : 0.993799
Classificação ao nível: 11 : ((EnNu ResNu) Mat) similaridade : 0.987549
Classificação ao nível: 15 : (OA  FG) similaridade : 0.940178
Classificação ao nível: 18 : ((OA  FG) ((EnNu ResNu) Mat)) similaridade : 0.793501

Fonte: obtido a partir do CHIC.

A classe B indica que os enunciados numéricos (EnNu) remetem a resoluções numéricas (ResNu), ou seja, a mudança não se faz tão necessária para questões com essas características. Além disso, essas questões estão relacionados à necessidade de algum tratamento matemático (Mat) além das apreensões requeridas. Estas

características se aproximam mais de questões que exigem o olhar Agrimensor, que é mais similar às questões cujos problemas são do tipo Figura Geométrica.

Gráfico 04 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe C.

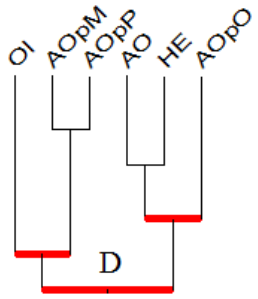



Classificação ao nível: 1 : (AS CG) similaridade : 1
Classificação ao nível: 2 : (EnNa MudaReg) similaridade : 0.999947
Classificação ao nível: 4 : ((AS CG) (EnNa MudaReg)) similaridade : 0.999153
Classificação ao nível: 6 : (((AS CG) (EnNa MudaReg)) ResA ) similaridade : 0.997381
Classificação ao nível: 13 : ((((AS CG) (EnNa MudaReg)) ResA ) ResNa) similaridade : 0.97501
Classificação ao nível: 14 : (OC ((((AS CG) (EnNa MudaReg)) ResA ) ResNa)) similaridade : 0.9562
Classificação ao nível: 16 : ((OC ((((AS CG) (EnNa MudaReg)) ResA ) ResNa)) EnA) similaridade : 0.913179

Fonte: a autora.

Na classe C há inúmeros nós de similaridade. O nó que relaciona a apreensão Sequencial (AS) e os problemas de Construção Geométrica (CG) é bastante significativo. Os problemas de Construção Geométrica (CG) apresentam similaridade também com problemas que apresentam um enunciado natural cuja resolução exige o registro algébrico. Nestes casos há necessidade de mudança de registro entre o discurso do problema e a sua resolução. As questões com essas características estão relacionadas ao olhar do Construtor (OC).

Gráfico 05 – Classificação relativa à arvore de Similaridade das questões - classe D.




Classificação ao nível: 3 : (AOpM AOpP) similaridade : 0.999794
Classificação ao nível: 5 : (AO HE) similaridade : 0.998997
Classificação ao nível: 8 : ((AO HE) AOpO) similaridade : 0.995205
Classificação ao nível: 10 : (OI (AOpM AOpP)) similaridade : 0.990785
Classificação ao nível: 12 : ((OI (AOpM AOpP)) ((AO HE) AOpO)) similaridade : 0.983952

Fonte: a autora.

Os três tipos de apreensão operatória estão presentes na mesma classe da Árvore de similaridade – a classe D. Nesta classe as apreensões do tipo mereológica e posicional são bastante similares, indicando que muitas vezes aparecem simultaneamente nas questões. Há relação entre problemas de Heurística e o olhar Agrimensor que estão relacionados também à operação de modificação ótica.

## 4.3 RESULTADOS E INFERÊNCIAS

Nesta última fase da Análise de Conteúdo são apresentadas algumas inferências realizadas na fase anterior articulando com resultados de demais pesquisas, bem como, com algumas considerações de Duval sobre o ensino da Geometria.

Ainda que as questões escolhidas para esta análise sejam um recorte do que aparece nas avaliações nacionais da Prova Brasil, é possível perceber que tratam de questões elementares, de resolução direta, que não exigem um raciocínio elaborado do aluno, ou mesmo gestos intelectuais muito elaborados além do conhecimento elementar da Geometria. Muitas vezes questões bastante semelhantes a estas costumam aparecer em atividades realizadas em sala de aula pelos alunos.

Apesar de tratar de questões elementares, os resultados das avaliações nacionais em Matemática ou mesmo o baixo percentual de respostas corretas trazidos em algumas questões presentes nesta pesquisa, mostram que a maioria dos alunos não está apta para resolvê-las. E isto não é questão do aluno saber ou não saber fazer, mas que o aluno não recebeu uma formação que permitisse o desenvolvimento das

atividades cognitivas que os problemas contemplam, ou seja, os gestos intelectuais requeridos não foram privilegiados no ensino.

As questões apontam para um direcionamento em que as figuras e os enunciados são bastante congruentes, ou seja, não há divergência entre o registro discursivo e o registro figural. Se os enunciados das questões se apresentarem sempre congruentes às figuras do problema, os alunos não terão oportunidade de desenvolver as habilidades da articulação entre as apreensões Perceptiva e Discursiva. Esta habilidade deveria estar contemplada no ensino, mas ao que tudo indica, deixa muito a desejar. A pesquisa de Kluppel (2012) corrobora com esta inferência no sentido de que, segundo a autora, há lacunas no livro didático (que muitas vezes guia o trabalho do professor) em relação a alguns aspectos importantes da teoria, tais como, a falta de interação entre registros e tratamentos figurais e discursivos, deixa a desejar em relação às modificações mereológicas ou óticas responsáveis pela apreensão operatória das figuras, entre outras.

Quanto às modificações figurais, o que se nota nesta pesquisa é que as questões não trabalham de forma individual com cada uma dessas especificidades, muitas vezes aparecem juntas, e não são particularmente exploradas. As questões que exigem uma apreensão operatória ótica são, basicamente de dois tipos, o primeiro são questões de semelhança de figuras, e na maioria das vezes, a figura é o triângulo. E segundo, a planificação de sólidos Geométricos.

Para desenvolver as apreensões operatórias Duval (2004, p.175) defende que cada uma das operações relativas à modificação das figuras deve ser solicitada explícita e sistematicamente. Esta é uma consideração que não está contemplada nas questões, pois nenhuma delas solicitou de maneira explicita e sistemática a realização de algum procedimento por meio de modificações nas figuras. Este apontamento do autor é bastante relevante para que o aluno compreenda o objetivo pelo qual ele precisa desenvolver determinada questão. Confirma assim o que o autor afirma de que o problema das dificuldades dos alunos não decorre da aquisição de conceitos, mas sim do desconhecimento total dos gestos intelectuais específicos da atividade matemática, ou seja, faltam atividades que permitam levar os alunos a tomar consciência das conversões e tratamentos específicos (DUVAL, 2013, p. 18).

Para trabalhar com as operações figurais o autor aponta três condições a serem levadas em consideração. A primeira é propor atividades de raciocínio que não exija nenhuma definição ou teorema. A segunda, as atividades não devem implicar mudança

de dimensão na sequência de subfiguras. E terceira, a série de exercícios deve ser organizada em função de uma variação sistemática de fatores de visibilidade que facilitam e dificultam a apreensão operatória, reforçando a conduta de abdução.

Levando em conta essas condições, nota-se que algumas questões, de fato, não exigem definição ou teorema, como por exemplo, as questões que pertencem à categoria Visualização, cujas apreensões exigidas são figural e operatória. Além disso, as questões estão em um nível elementar de modificações figurais, sem fatores que dificultam a apreensão operatória, e mesmo assim, os alunos muitas vezes não têm êxito nas resoluções.

Entre as questões que exigem uma operação posicional, somente uma delas era específica desta apreensão – a questão 50. As demais requeriam, além desta, outras operações figurais juntamente com a operação posicional. Segundo Silva (2014) nos livros didáticos de ensino fundamental – anos finais, predominam as representações gráficas de triângulos equiláteros ou isósceles, poucas imagens gráficas de triângulos escalenos, e raras representações gráficas de triângulos obtusângulos. Além disso, predominam os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. As questões analisadas aqui apresentam características semelhantes, sendo que não apareceu nenhum triângulo obtusângulo, e a maior parte estão posicionados de forma que um dos lados é paralelo à margem inferior, assim como evidenciou o autor nos livros didáticos que analisou. Deste modo, a operação posicional não se faz tão necessária no ensino, e assim o aluno acaba não desenvolvendo esta apreensão.

Em relação às questões do tipo Construção Geométrica, há, segundo Duval (2012b, p. 286), uma importância legítima dada a esse tipo de atividade, pois as atividades de construção “ensinam a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística das figuras. O que se percebe é que, de maneira geral, esta habilidade não está contemplada nas questões analisadas, pois há um número pequeno de questões deste tipo, e algumas acabam focando em conteúdos matemáticos, como por exemplo, transformação de unidade de medidas.

Outro aspecto pouquíssimo contemplado é olhar do Inventor. Ou seja, de maneira geral as atividades não exigem do aluno a necessidade de criar ou inventar resoluções. Este olhar poderia ser abordado como uma forma de motivação, para desenvolver nos alunos um espírito criativo, autônomo e de superação de dificuldades.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica é bastante complexa, extensa e repleta de termos específicos de uma abordagem cognitiva de aprendizagem. De maneira geral, as pesquisas de teses e dissertações voltadas para a Geometria e fundamentadas na Teoria dos Registros, têm como tema de pesquisa alguns aspectos específicos da aprendizagem da Geometria, que são explorados de maneira aprofundada. Porém, o grande diferencial desta é o fato de contemplar a maioria dos aspectos de Duval a respeito da aprendizagem da Geometria, de forma compilada e de fácil acesso, por meio do Quadro de Categorias para Análise Cognitiva.

A presente pesquisa se debruçou sobre as especificidades desta teoria a respeito da Geometria, a fim de evidenciar quais os aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em relação à aprendizagem da Geometria estão contemplados nas questões da Prova Brasil. Os resultados encontrados por meio desta pesquisa cumprem com os objetivos da pesquisa e respondem a questão inicialmente colocada. Sendo assim foi possível evidenciar que as questões contemplam de maneira incompleta as especificidades da aprendizagem da Geometria. Mesmo as que aparecem em maior quantidade, por exemplo, os problemas do tipo Figura Geométrica, contemplam de forma superficial a articulação entre as apreensões Perceptiva e Discursiva. Outro fato interessante que surgiu das análises é a diferença na frequência de categorias contempladas nas questões dos anos finais do ensino fundamental e nas questões de ensino médio, ou seja, as atividades mobilizadas, muitas vezes são trabalhadas de forma local e conforme os conteúdos contemplados. Duval (2003, p. 22) defende, porém, que o controle dos gestos intelectuais específicos da atividade matemática deveria ser um objetivo global de aquisição, e não local, sendo assim, deveriam estar contemplados em todos os níveis de ensino, desde o ensino primário.

Um dos resultados desta pesquisa, que permitiu cumprir com os objetivos colocados, foi a elaboração do Quadro de Categorias para Análise Cognitiva, que pode ser utilizado para subsidiar teoricamente a organização do ensino da Geometria. Nesta pesquisa o olhar se voltou para exemplos de questões específicas de Geometria contempladas em avaliações da Prova Brasil. Porém, a utilização do Quadro de Categorias pode ser estendido para outras áreas de pesquisa e ensino

O quadro de Categorias, juntamente com o aporte teórico da presente pesquisa, foi organizado e sintetizado de forma a tornar mais compreensíveis e visualmente

acessíveis as propostas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria sob o ponto vista da Teoria dos Registros. Neste sentido a relevância desta pesquisa se dá em várias frentes. É Importância para os professores conhecerem e aprenderem a Geometria, assim como, é importante também para os professores ensinarem a Geometria em sala de aula, pois, conforme visto, há certa insegurança em relação ao ensino desta área do conhecimento. Pode ser importante também para a elaboração de questões de avaliações em larga escala, pois precisam ser questões pontuais e objetivas, sem que tenham outras variáveis que possam atrapalhar a verificação do desempenho dos alunos. É importante também do ponto de vista do aprimoramento da elaboração de questão, ou seja, a organização prévia sobre o que e como avaliar, bem como as possibilidades resolutivas para elaborar os extratores.

Outra contribuição que esta pesquisa possibilita é a análise de atividades propostas em livros didáticos, questões utilizadas em sala de aula, ou ainda, questões presente em instrumentos de outras pesquisas. Pode subsidiar também, análises de resoluções elaboradas pelos alunos, ou ainda contribuir com a organização didática e pedagógica do ensino por educadores que queiram valer-se desta importante teoria cognitiva. Ele permite ao professor ter uma visão mais ampla do que está sendo valorizado ou deixado de lado no ensino. Neste quadro estão contemplados vários aspectos considerados indispensáveis para a aprendizagem da Geometria sob um enfoque cognitivo, apresentados de forma objetiva e sistemática, possibilitando a realização de reflexões analíticas de vários tipos de questões. Pode ser utilizado também como um subsidio teórico para nortear a elaboração de ou organização pedagógica de cursos, elaboração de planos de trabalho, entre outros.

Este quadro não descarta a necessidade de um estudo aprofundado dos aspectos propostos por Duval, mas permite uma tomada de consciência por parte dos professores e pesquisadores, e constitui, portanto, um avanço para o ensino da Geometria.

Em cada categoria há muito ainda o que ser explorado. Além disto, há aspectos que não foram contemplados nesta pesquisa, por exemplo, o nível de congruência semântica e congruência visual[23] presentes nas questões. Portanto este quadro não esgota as contribuições de Duval para o ensino de Geometria, mas pode facilitar o acesso à maioria das especificidades da Geometria por professores e pesquisadores que queiram se apropriar das importantes contribuições da Teoria dos Registros.

---

[23] Ver mais sobre este assunto em Duval (2012a).

É importante repensar a forma como a organização do ensino se apresenta, ou seja, a decomposição do conhecimento, imposto progressivamente, em termos de tarefas a fazer. É possível identificar inúmeras fragilidades no ensino da Geometria, confirmadas tanto por pesquisas de educadores renomados da área de Educação em Matemática, como Pavanello e Lorenzato, como por resultados de desempenhos dos alunos em avaliações em larga escala. No caso da Prova Brasil, por meio do recorte e das análises realizadas nesta pesquisa, foi possível perceber que trata de questões elementares, que não exigem habilidades cognitivas muito complexas e elaboradas. E que, mesmo assim, os alunos apresentam dificuldades para resolver. Ou seja, para alunos que não desenvolveram as habilidades necessárias, as tarefas identificadas como simples, são cognitivamente complexas aos alunos.

É preciso ir além da visão natural, por meio de longos treinamentos, levando os alunos a enxergarem o que não está explicito nas figuras. Propondo variações, ora nos enunciados ora nas figuras, para que o aluno possa identificar em uma mesma imagem diferentes formas de “ver”. Segundo Duval (2011, p. 94), isto precisa ser feito desde o ensino primário.

## REFERÊNCIAS


ALMEIDA, T. C. S. de. **Sólidos arquimedianos e Cabri 3D**: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento. 2010. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALMOULOUD, S. A. et al. **A Geometria no ensino fundamental:** reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Revista Brasileira de Educação, n. 27, p. 97-108, Set/ Out/Nov/Dez. 2004.

ANDRADE, J. B. de. **Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio**. 2007. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ARISTÓTELES, **Metafísica**. Ensaio introdutório, texto grego com tradução e comentário de Giovanni Reale. Volume II: Texto grego com tradução ao lado. Tradução para o português de Marcelo Perine. São Paulo: Loyola, 2002.

BARBOSA, G. **Platão e Aristóteles na Filosofia da Matemática**. Dissertação – Universidade Estadual Paulista. São Paulo, 2009.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro, Lisboa. Edição 70, 2010 (2009)

BAUAB, F. P. **Matrizes modernas da idéia de natureza**: Galileu Galilei (1564-1642) e René Descartes (1596-1650). Terra Livre, São Paulo, V. 1, n. 32, pp. 93-104, jan.-jun. 2009.

BOLDA, C. R. F. **Geometria e visualização**: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciência) – Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

BOYER, C.B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. **O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Revista Perspectivas da Educação Matemática. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS), v. 7, n. 13 – 2014

BRASIL. Ministério da Educação/INEP. **Prova Brasil**: avaliação do rendimento escolar. Disponível em http://provabrasil.inep.gov.br/. Acesso em 02/03/2016.

BOSCH, M. **Un punto de vista Antropológico**: La evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad Matemática. IV Simpósio SEIEMIV (Huelva 2000). Ponencia invitada al Seminário de Investigación I, “Representación y comprensión” (Versión preliminar, 30-6-2000).

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino da Geometria**: uma alternativa metodológica na formação de professores. 2006. 143 f. Dissertação

(Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

CARVALHO, L. C. **Análise da organização didática da Geometria espacial métrica nos livros didáticos**. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática**: pontuando tendências. Revista Zetetiké, Campinas, SP, v. 16, p. 41-72, 2008.

COUTURIER, R.; BODIN, A.; GRAS, R.; ALMOULOUD, S. Ag. **A Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva**. Material de apoio para o uso do software CHIC (s/data).

DUVAL, R.; FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. **Entrevista**: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. "Revista Paranaense de Educação Matemática", v. 2, p. 10-34, 2013.

DUVAL, R. 2004. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

_____. **Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência**. Tradução de Méricles T. Moretti. REVEMAT, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Trad. MORETTI, M. T. Revemat: R. Eletr. De Edu. Mat e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012b.

_____. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FACCO, S. R. **Conceito de área:** uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B.; CURI, E. **Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica**. EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 04, p. 1-14, 2013.

FREGE, G. **Sobre sentido e a referência.** In: Lógica e Filosofia da Linguagem. São Paulo: Cultrix/USP, 1978, pp. 59-86.

FREITAS, A. D. **A utilização do geogebra no ensino de matemática: recurso para os registros de representação e interação**. 2009. 114 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo; São Paulo, 2009.

GALILEU, G. **O Ensaiador**. Trad. Helda Barraco. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 2000. 294 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, 2012.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** Educação em Revista Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBM, ano 3, n. 4, p. 4 –13, 1º sem, 1995.

MACIEL, A. C. **O conceito de semelhança:** uma proposta de ensino. 2004. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros**. 2002. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MARTOS, Z.G. **Geometrias Não Euclidianas**: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002. 179 f.

MELLO, E. G. S. de. **Demonstração**: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria. 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

MELLO, E. M. **A visualização de objetos geométricos por alunos cegos:** um estudo sob a ótica de Duval. 2015. 177 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

MIRANDA, G. M. H. **Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas.** 2009. 289 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. v.1. 138p.

MORETTI, M. T.; THIEL, A. A. **O ensino de matemática hermético:** um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. Práxis Educativa (Brasil), vol. 7, núm. 2, jul-dez, 2012, pp. 379-396. Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, Brasil

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F**. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de Geometria que envolvem figuras**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.3, pp.597-616, 2015

NÖTH, W. **Panorama da semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 1995.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em Geometria**: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

OLIVEIRA, F. **Educação em Descartes**: que educação racionalista é essa. Aprender – Caderno de Filosofia e Psicologia da Educação. Vitória da Conquista: UESB, ano IV, nº 6, p. 55-78, 2006.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria dinâmica.** 2013. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

PALMER, R. E. **Hermenêutica**: o saber da filosofia. Tradução de Maria Luisa Ribeiro Ferreira. Edições 70, Lda., Lisboa – Portugal. 1969.

PAVANELLO, R. N. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil**: causas e consequências. Revista Zetetiké, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PLATÃO. **A República**. Tradução de Anna Lia Amaral de Almeida Prado; revisão técnica de Roberto Bolzani Filho. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M.; ABRANTE, P. **Didática da matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997.

RODRIGUES, W. P. **Uma abordagem conceitual de volumes no ensino médio**. 2011. 87 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ROTINI, E. **Fractais**: a matemática ajudando a salvar vidas. 2011, Disponível em: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html>. Acesso em 03/02/2016.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Tradução de Maria Luiz X. de A. Borges; Revisão Técnica de Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese instrumental na interação com Cabri 3D**: um estudo de transformações geométricas no espaço. 2009. 316 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SANTOS, R. P. dos. **As dificuldades e possibilidades de professores de matemática ao utilizarem o software Geogebra em atividades que envolvem o teorema de Tales**. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SEMMER, S. **Ensino de Geometrias não-euclidianas usando arte e matemática**. 2013. 268 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, Paraná, 2013.

SEMMER, S.; SILVA, S.; NEVES, M. **Anamorfose no Ensino de Geometria**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.6, n.3, p.61-86, novembro 2013.

SILVA, A. B. **Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2014. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Estadual de Pernambuco, Recife, 2014.

STRUIK, D.J. **História Concisa das Matemáticas**. Gradiva, 1989.

VEIGA, M. S. **Interpretações de estudantes sobre comprimentos de segmentos**. 2003. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

## APÊNDICE A – TABELA DAS CATEGORIAS PARA ORGANIZAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS

| Questão | Nível escolar | | | Evolução dos olhares | | | | Apreensões das figuras | | | | | | Conexões entre as apreensões | | | | Tipo de registro do enunciado | | | | Tipo de registro para resolução | | | | C. Matemático |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | EF1 | EF2 | EM | Botanista | Agrimensor | Construtor | Inventor | Perceptiva | Operatória | | | Discursiva | Sequencial | Figura Geométrica | Visualização | Heurística e Demonstração | Construção Geométrica | Figural | Algébrica | Natural | Numérica | Figura | Algébrica | Natural | Numérica | |
| | | | | | | | | | Mereol. | Ótica | Posic. | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| .. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Fonte: a autora.

# ANEXO A – ESTADO DA ARTE SOBRE GEOMETRIA E A TEORIA DOS REGISTROS

A seguir apresentam-se os resumos das pesquisas encontradas sobre Geometria e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. São apresentados autor, ano, grau, IES, título e resumo, nesta ordem. As cinco primeiras são teses e as demais, dissertações.

1 Jesus Victoria Flores Salazar 2009 Tese (Doutorado) PUC-SP

Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço

Esta tese teve por objetivo observar como estudantes do segundo ano do Ensino Médio apropriam-se das transformações geométricas no espaço, quando interagem com o ambiente de Geometria Dinâmica Cabri 3D, bem como qual raciocínio mobilizam quando desenvolvem atividades que abrangem esse conteúdo. Assim, a pesquisa pretendeu responder às seguintes questões: de que maneira, os estudantes apropriam-se das ferramentas e/ou recursos do Cabri 3D na aprendizagem das transformações geométricas no espaço? Como a integração do Cabri 3D interfere no processo de aprendizagem dessas transformações geométricas? A metodologia do estudo apoiou-se nos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1988). O referencial teórico baseou-se na Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) para compreender como os alunos interagem com o Cabri 3D e quais conteúdos mobilizam no desenvolvimento da sequência de atividades e na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), especificamente, nas diferentes apreensões de uma figura. A análise das atividades ajudou a perceber outras possibilidades que os instrumentos podem oferecer aos sujeitos e as diferentes maneiras de organizar suas ações. Além disso, as atividades facilitaram o desenvolvimento de distintas estratégias no uso do Cabri 3D e o estabelecimento de relações entre o software e os conhecimentos matemáticos dos estudantes. Constatou-se a ocorrência do processo de Gênese Instrumental, visto que as ações dos alunos evidenciaram esquemas de utilização preestabelecidos ou o desenvolvimento de novos esquemas. Ao mesmo tempo, o uso do Cabri 3D facilitou a apreensão perceptiva das figuras e permitiu dinamizá-las. Nesse sentido, o Cabri 3D propiciou o registro figural dinâmico, facilitou a modificação posicional e as outras modificações das figuras, além de auxiliar em sua visualização

2 Eliedete Pinheiro Lino 2014 Tese (Doutorado) PUC-SP

As transformações geométricas em um jogo interativo entre quadros: um estudo teórico

Esta pesquisa trata das transformações geométricas com objetivo de apresentar uma concepção ampla desse conteúdo, uma visão de Geometria com uma nova organização destas transformações e dar mais significado ao seu estudo. Em função desse objetivo utilizamos como referencial teórico para a pesquisa, a noção de quadro evidenciado por Douady como constituído por objetos de um campo da matemática e de suas possíveis relação e, ainda, da ideia de mudança de quadro que um sujeito pode mobilizar na busca da solução de um problema. Para a autora traduzir um problema de um quadro para outro tem a finalidade específica de permitir a mobilização de outras ferramentas, que não as inicialmente utilizadas para a resolução de um problema. Utilizamos também a noção de ponto de vista de Rogalski, pois ela permite que possamos abordar um problema por pontos de vista diferentes em um mesmo quadro. Assim, focamos nossas análises em pontos de vista que podem ser mobilizados no quadro da Geometria, no quadro da Geometria analítica e no quadro da álgebra, isto é, a partir da escolha de um quadro da Matemática em que se estuda as transformações geométricas buscamos identificar os diversos pontos de vista possíveis. Recorremos ainda aos Registros de Representação Semiótica de Duval que são utilizados para representar as transformações geométricas e ainda para as possíveis transformações desses registros a partir do tratamento e da conversão. Para o autor os conhecimentos a respeito de um objeto matemático podem ser apreendidos a partir de pelo menos dois registros e que a conversão de registros permite

desenvolver a coordenação desses diversos registros. Essas ações permitirão ao aluno a compreensão, a descoberta e o desenvolvimento de conhecimentos. A metodologia usada foi a pesquisa bibliográfica baseada em documentos de domínio científico tais como livros, artigos, dissertações e teses que tratavam de nosso objeto de estudo. Essa escolha metodológica contribuiu para o alcance de nosso objetivo uma vez que nos permitiu "olhar" as transformações geométricas e apresentá-las em um estudo desde as séries iniciais com dobraduras até o ensino superior abordando-as no quadro da Álgebra, no quadro da Geometria Analítica e no quadro da Geometria.

3 Elisabete Marcon Mello 2015 Tese (Doutorado) PUC-SP

A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval

Esta tese teve por objetivo investigar como alunos cegos visualizam objetos geométricos, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Visão e Visualização de Raymond Duval. Verificando os documentos oficiais que determinam os rumos da educação, constatamos que eles estabelecem que as crianças e jovens com necessidades educacionais especiais devem ter acesso às escolas, preferencialmente na rede regular de ensino, que devem estar adequadas a eles, tanto material quanto pedagogicamente. Nesse sentido, realizamos um estudo de caso em uma escola pública estadual da cidade de Santo André, São Paulo, que tem alunos cegos frequentando as salas de aula comuns. Por meio de entrevistas, investigamos como alunos cegos congênitos reconhecem e trabalham com representações de objetos geométricos e quais as possibilidades desse aluno criar suas próprias representações no papel. Verificamos que os alunos entrevistados identificaram figuras geométricas planas, representadas em relevo, no papel, reconhecendo suas formas, mas não reconheceram representações de sólidos geométricos em perspectiva, pois o contorno desses objetos não corresponde ao contorno de sua representação no papel. Constatamos a necessidade de ensinar a visualizar, é preciso que o aluno cego aprenda a identificar em cada representação o objeto representado, esse reconhecimento não é automático, mas pode ser aprendido. Observamos que a ordem de percepção pelo tato é diferente quando o aluno cego tem um objeto concreto em suas mãos e quando tem uma representação deste objeto em relevo no papel. Quando o aluno cego tem um objeto concreto em suas mãos, e este objeto lhe é familiar, ele reconhece o todo, sem necessidade de observar as partes, mas, quando a representação está em relevo no papel, mesmo que o aluno conheça o objeto representado, ele visualiza primeiro as partes para depois visualizar o todo. Nas entrevistas, presenciamos momentos em que alunos atingiram as apreensões perceptiva, operatória e discursiva, apesar de apresentarem um repertório muito limitado de termos geométricos. Um dos alunos operou a desconstrução dimensional das formas e pôde "ver" matematicamente, como mencionado por Duval (2011). Nenhum dos alunos que entrevistamos já havia construído ou desenhado figuras geométricas de forma que pudesse reconhecê-las, portanto, a apreensão sequencial, que tem por objetivo a construção de figuras geométricas, não foi observada durante nossa investigação. Procurando preencher essa lacuna, propomos a criação da Prancheta de Desenho em Relevo Positiva, com a qual um aluno cego tem a possibilidade de desenhar e sentir o desenho em relevo no papel.

4 Pedro Ribeiro Barbosa 2007 Tese (Doutorado) UFPE

Efeitos de visualização em atividades de comparação de comprimentos de linhas abertas

O propósito deste trabalho foi investigar, por meio de uma seqüência de atividades, os eventos de visualização intitulados efeitos visuais a partir de comparações de comprimentos entre pares de linhas abertas. Procurou-se avançar no sentido de uma melhor sistematização das discussões sobre tais fenômenos, inclusive, estabelecendo conexões com elementos teóricos sobre percepção e visualização e, ainda, sobre aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos relacionados à grandeza comprimento. No que tange a este último viés, foi adotado como suporte teórico básico o modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989), que trata da articulação e diferenciação entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico, sendo que as situações exploradas se restringiram à passagem entre os dois primeiros. O experimento foi desenvolvido numa turma de 4.ª série do Ensino Fundamental, na cidade de Campina Grande, no estado da Paraíba. Foi aplicada uma seqüência de atividades numa única sessão no ambiente papel e lápis, contando com a participação de 28 alunos. A análise das produções dos alunos veio confirmar a hipótese principal levantada, qual seja, de que os efeitos visuais ocorrem mesmo que as comparações se efetuem apenas entre pares de linhas abertas. Além do mais, outras modalidades de

eventos de visualização foram detectadas. Os resultados sinalizam que os alunos, ao compararem comprimentos entre linhas abertas, evocam conhecimentos influenciados por fenômenos visuais, os quais interferem nas respostas indicadas e que estão delimitados como integrantes da operação cognitiva de visualização.

5 Iolanda Andrade Campos Almeida 2007 Tese (Doutorado) UFPE

Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas: um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências

O objetivo desta pesquisa é a identificação de rupturas entre significados e significantes de um conceito, verificando a relação desta ruptura com o fato de não se empregar os princípios relativos a lugar geométrico quando se está resolvendo problemas de construções geométricas. O fato dos indivíduos apresentarem grandes dificuldades na resolução de problemas de construções geométricas, mesmo quando essas construções se reportam a conceitos elementares, indicam a necessidade de se identificar o que vem ocasionando os erros que são cometidos. A hipótese levantada para essas dificuldades na resolução das construções geométricas foi que quando são formuladas as estratégias para a resolução de uma construção geométrica, os indivíduos não empregam e nem envolvem princípios relativos à obtenção de lugares geométricos. A metodologia adotada para abordar essa questão, focalizando a noção de lugar geométrico, consistiu em analisar a relação assumida entre significados e significantes de conceitos envolvidos em um problema, verificandose se as rupturas existentes entre eles eram ocasionadas por não se considerar os lugares geométricos pertinentes na construção geométrica. Os dados que subsidiaram a pesquisa foram a análise dos redesenhos dos traçados feitos pelos alunos do curso de Licenciatura em Desenho e Plástica da Universidade Federal de Pernambuco e as justificativas apresentadas pelo grupo para as ações feitas. O procedimento de análise teve como fundamentação teórica os preceitos de teorias que tratam do desenvolvimento do pensamento geométrico e da construção de conceitos, contemplando-se assim, os teóricos Van Hiele, Duval, Fischbein e Vergnaud. Os resultados encontrados mostraram que, efetivamente, as propriedades e as representações de conceitos são dissociados, confirmando a hipótese levantada

6 Elizabeth Gervazoni Silva de Mello 1999 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria

O objetivo deste trabalho consistiu em desenvolver uma seqüência didática como alternativa metodológica para o ensino da Geometria na oitava série do Ensino Fundamental, com a finalidade de despertar no aluno novos caminhos do pensamento geométrico dedutivo. Neste sentido, construímos uma seqüência didática para introduzir a técnica da demonstração, levando em consideração as teorias de BALACHEFF, DUVAL e outros pesquisadores franceses. As atividades foram adaptadas dos trabalhos de BONNEFOND, G. & DAVIAND, D. & REVRANCHE, B.. Trabalhamos com uma classe de 14 alunos da oitava série do Ensino Fundamental, analisamos as dificuldades durante a aplicação da seqüência, procuramos debater e orientar estratégias de resolução das atividades. No decorrer das sessões, bem como na última sessão aplicamos testes. Concluímos que a abordagem desenvolvida por nossa seqüência didática favoreceu o aprendizado da técnica da demonstração em Geometria.

7 Nancy Cury Andraus Haruna 2000 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem

O objetivo desta nossa pesquisa foi analisar como se processa a apreensão do conceito do teorema de Thales por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, levantar os obstáculos didáticos e epistemológicos, as variáveis de situação e verificar até que ponto o uso do computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros. Para fazermos esta análise, recorremos ao estudo das variáveis de situação didática proposto por Guy Brousseau e ao trabalho do Psicólogo Raymond Duval sobre os registros de representação semiótica e a aprendizagem intelectual que associa a semiótica com os aspectos

da cognição e da percepção. Nossos estudos preliminares mostram que os problemas do ensino-aprendizagem dessa propriedade estão relacionados com sua forma de expressão e envolvem os aspectos da percepção, das significações e do contexto. Procuramos responder a seguinte questão "Como produzir uma seqüência de ensino que proporcione ao aluno a apreensão do teorema de Thales observando todos esses aspectos?" baseando-nos nas seguintes hipóteses: 1. propondo situações-problema em língua natural e utilizando o software Cabri evita-se a formação de imagens prototípicas e trabalha-se com as variabilidades perceptivas; 2. por meio de uma rede semântica pode-se organizar os três pontos de vista relacionados com as significações do teorema de Thales e, trabalhando-se com situações-problema de aplicações, essa noção passa a ter maior significado para os alunos possibilitando a utilização dele, do teorema, em outras situações afins. Para validar nossas hipóteses, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática em alunos da 8ª série e, decorridos dois meses do término dessa aplicação, realizamos um pós-teste nessa turma e numa outra turma que havia estudado o teorema de Thales sem fazer uso do computador. Para finalizar, fizemos uma análise qualitativa e quantitativa do pós-teste levantando algumas discussões. Concluímos que as hipóteses parecem pertinentes: o desenvolvimento das atividades baseadas na rede semântica proposta e em situações-problema dadas em língua natural utilizando o Cabri propiciaram abordar o teorema de Thales na sua significação global, trabalhando as variabilidades perceptivas e não formando imagens prototípicas. Um dos problemas que ainda persistiram foi quanto ao cálculo da medida do segmento formado na paralela. Suspeitamos que o ponto de vista da conservação das abscissas foi um conhecimento-obstáculo em relação ao ponto de vista da dilatação

8 Marcia Maioli 2002 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros Esse trabalho trata da formação de professores de matemática.

Nosso objetivo é oferecer uma contribuição nessa área, tanto no que se refere à aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que auxiliem os professores na elaboração de estratégias adequadas para o trabalho com Geometria em sala de aula. Fundamentados na Teoria das situações de BROUSSEAU e nos estudos de DUVAL sobre a utilização de diversos registros de representação semiótica, elaboramos uma oficina composta por atividades envolvendo os quadriláteros e a desenvolvemos com um grupo de professores do ensino fundamental e médio. Durante o desenvolvimento da oficina, discutimos com os participantes o referencial teórico que embasou a seleção das atividades e a maneira utilizada para apresentar o conteúdo. A questão investigada é: como trabalhar com formação de professores de forma a contribuir com a aquisição de conteúdos em Geometria, proporcionando ao professor conhecimentos didáticos inerentes a esses conteúdos? Nossas principais hipóteses supõem que o desenvolvimento das atividades contribuirá com a aquisição de conteúdos, e a discussão do referencial teórico, com aprimoramento de conhecimentos didáticos inerentes à Geometria. A análise das discussões e comportamento dos professores durante as trinta e três horas de oficina, revelaram-nos que as atividades provocaram reflexões sobre definições, conjeturas, propriedades dos quadriláteros, teoremas e demonstrações, bem como ajudou os professores a descobrirem a dificuldade que têm em utilizar diferentes registros de representação em Geometria. A discussão do referencial teórico fez com que os professores notassem que, geralmente, têm omitido em suas aulas, as fases de ação, formulação e validação discutidas por BROUSSEAU, apresentando a Geometria de forma já institucionalizada.

9 Márcia Stochi Veiga 2003 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Interpretações de estudantes sobre comprimentos de segmentos

Esta pesquisa teve por objetivo analisar interpretações de alunos de 8a série do ensino fundamental, que tinham estudado na escola o Teorema de Thales mas não tinham estudado o procedimento de divisão de segmentos em partes iguais, baseado nesse Teorema. À luz da Teoria de DUVAL, foi elaborada uma seqüência de tarefas, contendo questões referentes a figuras resultantes de um procedimento de divisão de segmentos, baseado no Teorema de Thales. Essa seqüência foi aplicada aos alunos em sessões individuais por meio de entrevistas clínicas baseadas em tarefas. Eles eram questionados sobre o que visualizavam, sobre os comprimentos dos segmentos existentes nas figuras e podiam justificar suas interpretações sobre esses comprimentos utilizando-se da visualização ou de instrumentos de medida de comprimento, que

estavam disponíveis, ou ainda poderiam justificar suas interpretações através de propriedades. A análise das respostas obtidas nas entrevistas nos proporcionou condições de observar a manifestação de diferentes tipos de apreensões, relacionadas a essas figuras e também relacionadas à comparação entre os comprimentos dos segmentos existentes nessas figuras. Os estudantes investigados, na maioria das situações apresentadas, utilizaram a visualização nas suas comparações entre os comprimentos dos segmentos existentes nas figuras e, na maioria das situações, julgaram que a visualização era suficiente para justificar suas interpretações.

10 Sonia Regina Facco 2003 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem

O objetivo dessa pesquisa é o estudo dos fenômenos que interferem no ensino aprendizagem do conceito de área no Ensino Fundamental. Além disso, apresenta uma proposta de ensino do conceito de área e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo por meio de uma seqüência didática envolvendo a decomposição e composição de figuras planas. As seguintes hipóteses nortearam o desenvolvimento das diferentes atividades propostas: • a escolha de situações-problema envolvendo determinação de áreas de figuras geométricas, em particular áreas de polígonos, possibilita as comparações dessas figuras em termos de área como grandeza. • estudar a área como grandeza, e comparando superfícies por recortecolagem ou ladrilhamento possibilita a compreensão desse conceito. • uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área, envolvendo o processo de decomposição e composição de figuras, proporciona ao aluno condições favoráveis à aprendizagem do conceito de área. A pesquisa fundamentou-se principalmente na dialética ferramenta-objeto e mudança de quadros de Régine Douady (1986) e na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993,1994,1995). A metodologia empregada seguiu os princípios da engenharia didática. A pesquisa envolveu professores de quinta a oitava série e alunos de quinta série.

11 Alexsandra Camara Maciel 2004 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

O conceito de semelhança: uma proposta de ensino

O objetivo desta pesquisa é analisar as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança por alunos da 1ª série do Ensino Médio, bem como verificar até que ponto uma seqüência de ensino que utilize o conceito de homotetia, integrado com a Ótica Geométrica, pode favorecer a apreensão do conceito de semelhança. Nossos estudos preliminares nos permitiram verificar que os problemas de ensino-aprendizagem do conceito de semelhança têm relação com aspectos ligados às configurações, às condições necessárias e suficientes e ao contexto. Com base em três hipóteses, procuramos responder à seguinte questão: “Uma seqüência de ensino que utilize o conceito de homotetia, integrado com a Ótica Geométrica, proporciona ao aluno uma aprendizagem significativa do conceito de semelhança?”. Para validar nossas hipóteses, elaboramos e aplicamos uma seqüência de ensino, empregando como suporte teórico um Quadro de Ensino da Geometria de Bernard Parsysz e o Registro de Representação e Funcionamento de uma Figura de Duval. Após a aplicação da seqüência de ensino, realizamos um pós-teste e uma análise qualitativa e quantitativa levantando algumas discussões com o objetivo de validar nossas hipóteses e responder à questão de pesquisa. Para finalizar, concluímos que as hipóteses parecem pertinentes: o desenvolvimento de atividades baseadas em situações de formação de sombra e de imagem em câmara escura relacionadas ao conceito de homotetia propiciou abordar o conceito de semelhança de forma ampla, trabalhando os tipos variados de configurações e as condições necessárias e suficientes para a existência da semelhança entre duas figuras

12 João Batista de Andrade 2007 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio

O objetivo da pesquisa é estudar o cálculo de área por meio da composição e decomposição de figuras geométricas planas, por alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Município de Jacupiranga. Para isso, é apresentado aos alunos um teste diagnóstico composto de duas atividades, com o

objetivo de verificar se eles possuem os pré-requisitos necessários para a aplicação da seqüência de ensino. A primeira atividade é uma seqüência de figuras geométricas planas para a determinação de sua área; a segunda, uma relação de problemas que visa a verificar se o aluno consegue passar da linguagem escrita para a linguagem geométrica. A pesquisa apresenta ainda uma seqüência de ensino que contém onze exercícios, cujo objetivo é trabalhar a composição e a decomposição de figuras planas para o cálculo de área das regiões hachuradas. Na análise dos resultados obtidos do teste diagnóstico observou-se que a maioria dos alunos tem conhecimento de como se calcula a área de uma figura geométrica plana. Após a análise da seqüência de ensino, pôde-se observar que a maioria dos alunos demonstra muita dificuldade no que diz respeito ao cálculo de área de figuras que necessitam de decomposição ou composição. A pesquisa foi fundamentada nas teorias de Raymond Duval, levando em consideração as quatro formas de apreensões dos registros de representação semiótica seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória.

13 Anderson Secco 2007 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Conceito de área: da composição e decomposição de figuras até as fórmulas

O objetivo desta pesquisa é investigar através do uso da composição e decomposição de figuras planas, até a demonstração das fórmulas, como o conceito de área pode ser apresentado de maneira significativa e motivadora aos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Para tanto, norteamos nosso trabalho a partir das hipóteses: Como o processo de reconfiguração de figuras poligonais contribui para a apropriação do conceito de área de um polígono? Como esse processo favorece a passagem do empírico para o dedutivo? Fundamentamos nossa pesquisa nos pressupostos teóricos de Duval e suas diferentes formas de apreender uma figura, na teoria de Vergnaud, sobre os campos conceituais, nos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de Parzysz, nas idéias de Freudenthal sobre uma organização local em um processo dedutivo e nos pressupostos teóricos da Geometria dinâmica com a utilização do software Cabri-géomètre. Através da metodologia da engenharia didática, desenvolvemos uma seqüência didática formada por três blocos. No primeiro bloco, as atividades foram desenvolvidas com o uso do material concreto, no qual todas validações foram realizadas de forma empírica. O segundo bloco, realizado em um laboratório de informática, tendo como recurso o software Cabri-Géomètre, as mesmas observações feitas anteriormente, foram verificadas e validadas através das construções geométricas, evidenciando assim as propriedades matemáticas existentes nas figuras através de uma Geometria dinâmica. No terceiro bloco, através de atividades dedutivas, que objetivavam introduzir as fórmulas para o cálculo de área, procuramos sistematizar o que foi verificado nos blocos anteriores. As análises de experimentação da seqüência mostraram que o processo de reconfiguração de figuras poligonais planas contribuiu para a apropriação do conceito de área e que esse processo foi significativamente favorável à passagem do empírico para o dedutivo.

14 Valdenir Francisco Duarte 2007 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova

O presente trabalho, vinculado ao projeto AprovaME, desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tem por objetivo verificar os avanços e as dificuldades apresentadas pelos alunos na elaboração de provas sobre as propriedades dos paralelogramos. Os procedimentos dessa pesquisa foram fundamentados nas teorias de Parzysz (2001) sobre provas formais e empíricas; Machado (1995) sobre as quatro dimensões da construção do pensamento geométrico: percepção, representação, construção e concepção; Duval (1995) sobre formas de representação de informações; Duval e Egret (1989) sobre seqüências lógicas. Usando a metodologia da Engenharia Didática, foram concebidas e aplicadas a alunos da oitava série do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio, uma seqüência de atividades que visaram levá-los, de forma empírica, a construir o conceito de hipótese/tese e, de forma dedutiva, a ordenar proposições de modo a elaborar provas das propriedades dos paralelogramos. A análise das produções dos alunos mostra dificuldades no processo de argumentação e prova que podem ser agrupadas em três categorias: dificuldades ligadas à elaboração de uma prova, dificuldades oriundas da aceitação de provas empíricas e dificuldades ligadas à leitura e interpretação de enunciados. A análise também apontou que houve certos avanços nesse processo. Alunos realizaram cálculos sem o apoio empírico, outros apresentaram algumas provas formais completas, e mesmo aqueles que produziram provas incompletas mostraram um raciocínio lógico até o ponto onde elas foram feitas. Além disso, verificou-se que o fato de

dois alunos poderem analisar a prova feita pela outra dupla foi um fator muito positivo na seqüência apresentada.

15 Jefferson Almeida Santos 2007 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Formação continuada de professores em Geometria por meio de uma plataforma de educação a distância: uma experiência com professores de ensino médio

Esta pesquisa tem por finalidade apresentar uma proposta de capacitação em Geometria para o professor de Matemática, na qual o mesmo possa tomar contato com resultados de pesquisas sobre o ensino de Geometria, refletir sobre a sua prática em sala de aula e trocar experiências com outros professores, utilizando-se, para isso, de uma plataforma de educação a distância chamada Moodle. Para tanto, concebemos e implementamos um curso – Tópicos de Geometria – que foi composto de cinco encontros virtuais e dois presenciais, onde abordamos conteúdos de Geometria, por meio da leitura de fragmentos dos trabalhos de autores como Marc Rogalski, Aline Robert, Raymond Duval, Régine Douady e Bernard Parsysz. Fundamentamos nosso estudo nas relações existentes entre interação, mediação e trabalho colaborativo, compreendendo a utilização de estratégias específicas de mediação pedagógica de um grupo de 20 professores da rede pública estadual de ensino. Desse grupo, selecionamos 05 sujeitos que foram monitorados e acompanhados durante os encontros. As análises qualitativas foram realizadas a partir das interações e das atividades criadas e desenvolvidas nos encontros realizados no ambiente de fórum do Moodle e apontam para uma nova postura dos professores frente às atividades a serem desenvolvidas com seus alunos posteriormente. Concluímos que o acesso dos professores aos computadores e à Internet, a parceria entre pesquisadores e instituições de ensino, intercalar os encontros a distância com momentos presenciais para reflexão e a escolha de se trabalhar com temas de pesquisas e não com conteúdos específicos foram fatores fundamentais no desenvolvimento desta pesquisa.

16 Gilson Bispo de Jesus 2008 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada

O presente trabalho tem como objetivo analisar uma sequência de atividades desenvolvidas em uma formação continuada para professores. Esta seqüência visava que os participantes construíssem a definição de mediatriz de um segmento e, a partir desta, demonstrassem propriedades inerentes a esse objeto matemático. Além disso, objetivava que os professores justificassem matematicamente, com base na Geometria plana, algumas construções geométricas em que esse objeto era a principal ferramenta para a resolução do problema. A questão pesquisada foi: uma seqüência de ensino com enfoque em construções geométricas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos acerca da demonstração em Geometria em uma formação continuada de professores? Assim, aplicamos junto a um grupo de professores de Matemática (Ensino Fundamental e Médio) em formação continuada, a seqüência de atividades. Para tal, nos baseamos nos estudos de Duval (2003) e Brousseau (1986), sobre os registros de representação semiótica e a Teoria das Situações Didáticas respectivamente. Trabalhamos também com Duval e Egret (1989) e De Villiers (2001; 2002), no que diz respeito às demonstrações e com autores especializados em formação de professores, para a fundamentação teórica dessa pesquisa. A escolha metodológica pela pesquisa-ação e pelos pressupostos da Engenharia Didática contribuíram para o alcance dos objetivos desse estudo. A análise das discussões e comportamentos dos professores durante a formação revelou-nos que as atividades provocaram reflexões sobre definições, propriedades, teoremas recíprocos, justificativas matemáticas, demonstrações, além de oportunizar a descoberta e construção de alguns conceitos da Geometria plana ao realizarem construções geométricas. Nesse sentido, pudemos destacar o registro material de representação, identificado por nós, e inferir que essa formação contribuiu para a autonomia dos professores.

17 Luis Carlos de Carvalho 2008 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Análise da organização didática da Geometria espacial métrica nos livros didáticos

Este trabalho teve como objetivo investigar qual a organização que os livros didáticos de Matemática destinados à 2ª série do Ensino Médio fazem referente ao tema Geometria Espacial Métrica, e se essa organização favorece a construção do pensamento geométrico. Para tanto, o tema foi pesquisado na literatura disponível, em documentos oficiais, em dissertações e teses defendidas no Brasil e em artigos de congressos nacionais e internacionais. Três dos oito livros de Matemática enviados para a 2ª série do Ensino Médio pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio, 2006, do Ministério da Educação e Cultura, às escolas da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo – SP foram analisados, segundo os resultados das pesquisas de: Duval (1995); Robert (1998) e Parsysz (2000). A análise dos livros didáticos teve como finalidade verificar se as atividades por eles propostas proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo atividades com uso de material concreto, construções com instrumentos, como régua e compasso ou softwares que facilitam a visualização e desenvolvem o pensamento geométrico espacial. Concluiu-se que os livros didáticos analisados atendem parcialmente à construção do pensamento geométrico espacial, porque os resultados da pesquisa indicaram a pouca exploração por parte dos autores de atividades que desenvolvem a visualização, observou-se que a representação no plano das figuras tridimensionais não é estimulada. Constatou-se um equilíbrio com relação ao número de exercícios propostos que exigem os níveis técnicos e mobilizáveis e uma discrepância com relação ao nível disponível e à falta de atividades que possam ser desenvolvidas por software educacional, contribuindo desta maneira para a difusão de uma visão equivocada do professor sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica

18 Marília Valério Rocha 2009 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Uma proposta de ensino para o estudo da Geometria hiperbólica em ambiente de Geometria dinâmica

Esta dissertação teve como principal objetivo propor um ambiente computacional ao aprendizado da Geometria Hiperbólica na formação do professor de Matemática. Com base na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1986) e nos estudos sobre a compreensão das demonstrações, de Raymond Duval (1993), foi elaborada uma seqüência didática sobre o tema. A presente pesquisa orienta-se pela questão "Em que medida a Geometria dinâmica pode interferir na construção dos conceitos da Geometria Hiperbólica, no estudo axiomático realizado pelo professor de Matemática e como esse novo conhecimento pode contribuir para sua formação?". É fundamentada em alguns pressupostos da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1988). Entende-se que a relevância desta pesquisa justifica-se nas orientações das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (DCN) e na escassez de material didático para o estudo desse conteúdo. Visando a responder à questão de pesquisa e colher informações que possibilitem a melhoria desta proposta didática, aplicou-se um projeto-piloto com alunos do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, ministrado pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Os resultados apontaram que a utilização da Geometria dinâmica na formação dos conceitos da Geometria Hiperbólica, em uma proposta axiomática inicial, é um recurso que contribui para a interiorização desses conceitos.

19 Gina Magali Horvath Miranda 2009 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas

Esta pesquisa teve como objetivo desenvolver uma ferramenta computacional, utilizando técnicas de PLN (Processamento de Línguas Naturais) e inserir nesta ferramenta sequências didáticas no campo da Geometria das Transformações, empregando-se como embasamento a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os avanços tecnológicos e o interesse cada vez maior por parte dos alunos pela tecnologia formam, ao que tudo indica, um cenário ideal dentro desse processo de construir uma ferramenta que possa ser utilizada como instrumento de ajuda no ensino e na aprendizagem no contexto da Educação Matemática. A pesquisa foi desenvolvida, usando os princípios da engenharia didática, nos quais uma das funções é analisar situações dentro do quadro teórico da didática matemática. Para desenvolver o sistema computacional, usou-se a semântica ontológica, que suporta aplicações como traduções e extração da informação entre outras. Acredita-se que a simples utilização de uma ferramenta computacional não possa proporcionar o aprendizado, mas, associada a atividades cuidadosamente construídas e apoiadas em teorias, como as de Brousseau

eDuval que se dedicam a estudar fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, observou-se que esta hipótese é viável, visto que os alunos que não possuíam conhecimento de segmento de reta, ao final do uso da ferramenta e suas sequências didáticas foram capazes de dar encadeamento necessário a uma demonstração a partir de frases já redigidas.

20 Talita Carvalho Silva de Almeida 2010 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Sólidos arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento

O presente trabalho tem como objetivo revisitar o objeto matemático Sólidos Arquimedianos por meio de suas construções no ambiente de Geometria Dinâmica Cabri 3D. Assim, a pergunta de pesquisa foi: o objeto matemático Sólidos Arquimedianos pode ser resgatado como objeto de ensino para a Escola Básica, utilizando como habitat o ambiente de Geometria Dinâmica Cabri 3D? Para investigar processos de construção para esses sólidos, recorremos a um estudo bibliográfico desenvolvido com base em material já elaborado, constituídos principalmente de livros e artigos científicos. O referencial teórico baseou-se na Transposição Didática e na Problemática Ecológica de Yves Chevallard (1991), para promover a articulação entre a análise epistemológica e a análise didática, além de apontar características outras que determinam a sobrevivência do objeto matemático Sólidos Arquimedianos enquanto objeto de ensino, e na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), para identificar e analisar quais os registros mobilizados para a construção desses sólidos, bem como evidenciar os tratamentos e conversões efetuados. A escolha metodológica pela pesquisa bibliográfica contribuiu para o alcance do objetivo desejado, visto que nos permitiu encontrar um procedimento matemático realizado por renascentistas para a obtenção de arquimedianos a partir de cortes nas arestas de sólidos platônicos. As análises das construções realizadas ajudaram a perceber que os tratamentos apenas figurais não são suficientes para a construção dos Sólidos Arquimedianos no Cabri 3D, faz-se necessário mobilizar um registro discursivo suporte para que os pontos de corte em sólidos platônicos possam ser encontrados. Nesse sentido, constatamos que o Cabri 3D se confirmou como um habitat para o estudo dos Sólidos Arquimedianos, na medida em reconheceu como objeto todos os saberes que determinam a existência desse objeto matemático enquanto objeto de ensino

21 Jacinto Ordem 2010 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique

Este estudo teve por objetivo compreender a abordagem da prova e da demonstração de propriedades de triângulos presentes em livros didáticos da 6ª a 8ª séries de Moçambique. As propriedades, objeto de estudo, são a soma dos ângulos internos, a relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes, bem como a relação de congruência entre triângulos. Desse modo, o estudo pretendeu responder à seguinte questão: Como os livros didáticos em uso nas escolas (de Moçambique) apresentam a organização matemática e didática do objeto triângulo, com enfoque na prova e demonstração. O estudo fundamentou-se nos trabalhos de Nicolas Balacheff sobre os processos de validação de provas, Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas e Yves Chevallard sobre a organização praxeológica. A pesquisa teve como procedimento metodológico a coleta e a análise de dados bibliográficos. Os resultados do estudo mostraram que nos livros didáticos analisados predominam provas pragmáticas. Os autores privilegiam os registros figurais e discursivos em línguas natural e simbólica e apresentam em tais livros tarefas claras com o discurso tecnológico-teórico disponível. Mas, os resultados do estudo mostraram que as conversões não são devidamente exploradas no estudo dos triângulos e a reconfiguração não é aproveitada para produzir argumentos que poderiam fundamentar provas intelectuais.

22 Rosana Perleto dos Santos 2010 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

As dificuldades e possibilidades de professores de matemática ao utilizarem o software Geogebra em atividades que envolvem o teorema de Tales

O objetivo desta pesquisa foi o de verificar quais são as dificuldades e possibilidades de professores de Matemática ao utilizarem o software Geogebra em atividades que envolvem o Teorema de Tales. Subsidiariamente, pretendeuse, também, investigar qual seria o papel das tecnologias no eventual trabalho didático dos professores em relação ao Teorema de Tales. Tomaram parte desta investigação quatro professoras da rede pública do estado de São Paulo, atuantes no Ensino Fundamental, ciclo dois. As professoras participaram de uma oficina didática relacionada ao tema matemático em foco neste trabalho, e que propunha a elaboração de estratégias pedagógicas com o uso do software Geogebra. Na análise das atividades propostas para as docentes, recorreu-se ao estudo das apreensões propostas por Duval, ao trabalho de Chevallard sobre a transposição didática, a pesquisa de Balacheff relacionada à transposição informática e aos trabalhos voltados para o uso de tecnologias na Educação em geral e na Educação Matemática em particular, tendo como base, neste caso, as pesquisas de Kenski, Frota & Borges e Oliveira. A partir das descrições das professoras, distintos perfis de uso das tecnologias e de atuação docente, em relação às estratégias pedagógicas, foram identificados, com destaque para a conexão entre o grau de conhecimento do saber matemático de referência e as abordagens propostas com mediação da interface computacional. Além disso, no contexto de uso do software, foi possível detectar conexões entre o domínio do tema em si, dos pontos de vista didático e científico, e o recurso às práticas expositivas em sala de aula, bem como ao avanço ou não nos níveis de apreensão figural das docentes.

23 Maria Lúcia Torelli Doria de Andrade 2011 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico

O presente trabalho tem como objetivo investigar a apropriação de conceitos elementares de Geometria Esférica por alunos do 2º ano do Ensino Médio, a partir de uma sequência de ensino. Além disso, objetivava que ao resolver as atividades desta sequência, os sujeitos de pesquisa realizassem os tratamentos e conversões dos Registros de Representação Semiótica pertinentes aos objetos matemáticos da Geometria Esférica a serem estudados. Buscamos responder a seguinte questão de pesquisada: Como uma sequência didática articulando diferentes registros de representação pode avaliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica? Assim, aplicamos junto a dois alunos do Ensino Médio a sequência de ensino. Nos embasamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como fundamentação teórica dessa pesquisa. A abordagem desta investigação foi qualitativa e, como metodologia adotamos pressupostos da Engenharia Didática. Observando as produções dos sujeitos de pesquisa no decorrer das atividades da sequência, constatamos que esses realizaram as conversões e os tratamentos dos registros de representação semiótica de acordo com Duval (2009), como quando fizeram a conversão do registro em língua natural (enunciado da atividade) para o registro material (bola de isopor), o que os levou a resolver a atividade e compreender o conceito de reta na Geometria Esférica. Nesse sentido, pudemos destacar o registro material de representação semiótica, e inferir que esse contribuiu para a apropriação dos conceitos requeridos por parte dos sujeitos de pesquisa.

24 Wagner Pulido Rodrigues 2011 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Uma abordagem conceitual de volumes no ensino médio

A presente pesquisa dedicou-se à análise de parte dos materiais didáticos denominados “Caderno do Professor” e “Caderno do Aluno”, distribuídos em 2008 e 2009 pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo aos professores e alunos de ensino médio das escolas públicas do Estado. Com vistas a uniformizar o currículo escolar do estado de São Paulo, os Cadernos foram elaborados para cada uma das disciplinas do currículo escolar, para cada série de ensino fundamental do ciclo II e do ensino médio, para cada um dos quatro bimestres letivos. Tal pesquisa restringiu-se ao exame da parte dos Cadernos de Matemática consagrada ao estudo do cálculo de volumes de sólidos, também denominado historicamente de estereometria. Foi examinado se nos Cadernos há uma abordagem conceitual do cálculo de volumes, isto é, se o trecho dedicado a esse tópico se pauta por uma abordagem que privilegia a investigação dos fundamentos dos conceitos estudados. A pesquisa visou avaliar se e em que medida os Cadernos do Professor e do Aluno de Matemática, na abordagem da estereometria, contemplam a especificidade da disciplina, consistente precipuamente no seu caráter abstrato, de sorte a proporcionar ao professor as

condições de superação das dificuldades que aquelas especificidades acarretam para o processo de aprendizado. O referencial teórico que norteou a investigação consiste principalmente da teoria sobre aprendizagem de matemática desenvolvida por Raymond Duval, bem como textos direcionados à formação de professores relacionados ao tema da pesquisa. De acordo com Duval, as dificuldades de aprendizado decorrentes do caráter abstrato da matemática podem ser contornadas a partir de procedimentos que viabilizem os processos de visualização e de manipulação dos conceitos e objetos matemáticos. Dentre esses procedimentos contam-se a apresentação histórica dos assuntos abordados, e em consonância com as preocupações cotidianas dos estudantes. Estimou-se aqui que procedimentos como esses são aptos a despertar a curiosidade do estudante pelo assunto, tendo por isso o condão de tornar o aprendizado um processo menos árduo e mais agradável. As análises indicaram que o material pode possibilitar uma abordagem conceitual do cálculo de volumes de sólidos geométricos. Também foram identificados aspectos do material que poderiam ser melhorados. Sendo assim, foram feitas sugestões de atividades complementares.

25 Camila Molina Palles 2013 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Um estudo do icosaedro a partir da visualização em Geometria dinâmica

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da visualização geométrica dos registros figurais dinâmicos por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, visando responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais elementos essenciais para o desenvolvimento da visualização estão presentes em uma sequência didática para a construção da fórmula para o cálculo da medida do volume do icosaedro por meio do software Cabri-3D?”. Para responder a questão de pesquisa recorremos a um estudo de caso, pelo fato de ser de natureza empírica e poder ser baseado em uma análise documental, tomando como caso de estudo uma sequência didática para o cálculo do volume do icosaedro constante no trabalho de Possani (2012). A análise da sequência a partir dos fatores explicitados por Duval (2004) nos levou a concluir que a sequência desenvolvida, em sua grande parte, não permite o desenvolvimento da visualização. No entanto, é possível conjecturar algumas modificações nessa sequência que permitam então o desenvolvimento da visualização.

26 Diógenes Maclyne Bezerra de Melo 2010 Dissertação(Mestrado) UFPE

A simetria de reflexão: elementos de concepções mobilizadas por alunos do ensino fundamental

Esta pesquisa se inscreve na problemática da modelização de conhecimentos, em particular, ao estudo das concepções que os alunos do ensino fundamental mobilizam quando resolvem problemas de simetria de reflexão. Para realizar o estudo, utilizamos o Modelo cK¢ (BALACHEFF, 1995) que é ancorado na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998). As concepções dos alunos foram analisadas a partir das estruturas de controle. Inicialmente, estudamos a simetria de reflexão do ponto de vista do ensino, a saber, livros didáticos e documentos que orientam o ensino do objeto matemático estudado. A pesquisa está baseada, também, nos resultados de pesquisas sobre a temática abordada (GRENIER, 1988 e LIMA, 2006). Os resultados dos estudos realizados subsidiaram a escolha dos problemas propostos na experimentação e na análise a priori, bem como a construção dos instrumentos de coleta e análise dos dados. A experimentação foi implementada com 51 alunos do 9° ano de escolas das redes pública, municipal e estadual de ensino do agreste pernambucano. Os estudantes resolveram problemas de construção e de identificação de figuras simétricas em relação a um eixo de simetria. A pesquisa confirma resultados de estudos precedentes como, por exemplo, os alunos mobilizaram controles ligados a direção vertical e horizontal, independentemente da orientação do eixo de simetria. Controles ligados à conservação de forma e de tamanho das figuras também foram bastante mobilizados pelos alunos, isso dá indícios de que as respostas estão baseadas na visualização das figuras.

27 Silva, Amanda Barbosa da 2014 Dissertação (Mestrado) UFPE

Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica

Neste trabalho, foram investigadas representações gráficas de triângulos nos livros didáticos de matemática destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2013. O estudo dos triângulos está presente em todos os anos do ensino fundamental como um conteúdo destacado no campo da Geometria. Trata-se de um conceito com aparente simplicidade, mas com riqueza de propriedades geométricas. Além disso, as questões relativas à aquisição do conhecimento em Geometria e ao ensino e à aprendizagem já surgem quando se trata desse conteúdo. Nesse sentido, investigações sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria têm indicado que os alunos revelam dificuldade para identificar um triângulo quando sua imagem gráfica não é a de triângulos isósceles, equiláteros, acutângulos ou quando com um dos seus lados paralelo à margem inferior da página em que aparece a referida imagem. Fomos levados a indagar se há um padrão dominante de representação gráfica de triângulos, nos livros utilizados no ensino fundamental, ou há diversidade dessas representações. Como suporte teórico adequado para uma pesquisa relativa à representação de objetos matemáticos recorremos à teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, na qual a diversidade de representação desempenha um papel central, não só no interior de um mesmo registro semiótico como nas conversões entre registros distintos. A diversidade das representações gráficas de triângulos foi analisada quanto a três critérios: comprimento dos lados; medida dos ângulos e posição na página. Com foco nas representações de triângulos, realizamos uma identificação das atividades de conversões entre os registros da língua natural e o registro figural. Também inserimos uma breve discussão com respeito à presença, no manual do professor, de orientações sobre a questão da variabilidade de representações gráficas dos triângulos. A análise dos resultados confirmou as observações que foram feitas durante o estudo preliminar das coleções (estudo piloto). Os resultados indicam que predominam as representações gráficas de triângulos equiláteros ou isósceles e há relativamente poucas imagens gráficas de triângulos escalenos. Quanto à medida de ângulos, os dados obtidos revelaram que são raras as representações gráficas de triângulos obtusângulos. Mostraram, também, que predominam os casos em que um dos lados do triângulo é paralelo à margem inferior da página do livro e o terceiro vértice fica acima desse lado. Em relação às atividades em que os alunos são solicitados a realizar uma conversão de registros, os resultados de nossa investigação revelam uma atenção muito insuficiente a esse tipo de atividade.

28 Bolda, Claudia Regina Flores 1997 Dissertação (Mestrado) UFSC

Geometria e visualização: desenvolvendo a competencia heuristica atraves da reconfiguração

A presente dissertação aborda o papel heurístico das figuras na resolução de problemas, a fim de levantar aspectos ligados à visualização. Realiza-se um estudo sobre a organização perceptiva das figuras tendo-se, como referencial teórico, os princípios da organização da percepção estabelecidos pela Psicologia da Gestalt. A partir desta premissa e junto à teoria das apreensões de R. Duval, opera-se um tratamento puramente figural de reconfiguração pela análise de problemas que envolvem cálculo de áreas. Contudo, tal análise fica envolta por diferentes fatores que interferem na visibilidade e na aplicação desta operação figural. Esta discussão é fruto da aplicação de uma seqüência didática desenvolvida junto a três turmas de alunos de 5a série do 1o grau, nos anos letivos de 1996 e 1997, numa média de 12 aulas por turma. Servindo-se daqueles fatores, propuseram-se diferentes problemas que envolvessem o uso de figuras para chegar à solução pela operação de reconfiguração. A realização desta seqüência didática nos deu condições para mostrar, a propósito de uma aprendizagem da operação de reconfiguração, a necessidade de levar em conta a importância e a complexidade das habilidades visuais na aprendizagem da Matemática.

29 Buratto, Ivone Catarina Freitas 2006 Dissertação (Mestrado) UFSC

Representação semiótica no ensino da Geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores

Este trabalho de pesquisa está relacionado à formação inicial de professores de matemática considerando o ensino de Geometria. Apresentamos algumas pesquisas realizadas sobre o assunto que nos permitiram verificar a existência de problemas de ensino-aprendizagem, tanto de conhecimento sobre a Geometria, bem como as especificidades em relação ao seu ensino, dando-nos suporte para elaborarmos a questão de nossa pesquisa. Assim, nossa proposta de alternativa metodológica para o ensino-aprendizagem da

Geometria apresenta sua abordagem fundamentada nos estudos de Raymond Duval sobre registros de representação semiótica e o processo das apreensões em Geometria. A partir das análises de um instrumento aplicado junto aos licenciandos do 5º semestre do curso de Licenciatura Plena de Matemática, da Universidade do Planalto Catarinense - UNIPLAC, propusemos um conjunto de situações de aprendizagem visando o ensino e a aprendizagem de conceitos de Geometria, tais como o cálculo de figuras geométricas planas, que podem ser tanto utilizadas na formação inicial de licenciandos em matemática, bem como ferramenta metodológica para o uso em suas práticas pedagógicas. Dessa forma, objetivamos auxiliar com a formação docente inicial, particularmente, no que diz respeito à prática pedagógica, abrangendo especificamente os licenciandos do curso de licenciatura em matemática, em torno dos conteúdos de Geometria, com ênfase no cálculo de áreas de figuras geométricas planas. Acreditamos ser pertinente a reflexão do tema e o desenvolvimento de atividades que explorem a coordenação das linguagens associadas à exploração heurística das figuras.

30 Rosângela Constantino 2006 Dissertação (Mestrado) UEM

O ensino da Geometria no ambiente Cinderella

Este trabalho trata do ensino da Geometria e das possíveis contribuições dos softwares de Geometria Dinâmica, em especial o software Cinderella. O objetivo deste trabalho é analisar se uso do software de Geometria Dinâmica Cinderella auxilia na construção do conhecimento em Geometria. Essa discussão se faz necessário, pois o computador introduz uma dimensão dinâmica à investigação em Geometria. As representações de figuras planas ou espaciais, poderem agora ser manipuladas e transformadas de diferentes maneiras. Elaboramos um curso com atividades de Geometria plana utilizando o software Cinderella para alunos do 2º ano do curso de Pedagogia para analisar as dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos de Geometria e a possibilidade de superação dessas dificuldades mediante o uso do software. A análise das discussões e comportamento dos alunos, futuros professores, revelaram inicialmente o pouco conhecimento em Geometria e que a utilização dos softwares de Geometria Dinâmica podem contribuir na evolução da aprendizagem em Geometria e potencializar suas habilidades para visualização e compreensão do objeto geométrico.

31 Cintia Aparecida Bento dos Santos 2008 Dissertação (Mestrado) Universidade Cruzeiro do Sul

Teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro: contribuições para formação de professores

Esta pesquisa apresenta teorias didáticas que de forma articulada possam contribuir no processo de ensino-aprendizagem das noções de área e perímetro. Apresentamos o embasamento teórico apoiado na Didática Francesa, em que ressaltamos os estudos de Robert (1997), Duval (1993) e Douady (1992), levando ainda em consideração alguns aspectos de aprendizagem significativa segundo Ausubel (1980). Os objetivos do presente trabalho são realizar um estudo a fim de verificar como as noções de área e perímetro são apresentadas nos documentos curriculares oficiais e nos livros didáticos e analisar os conhecimentos de um grupo de professores para ensinar essas noções, contemplando as três vertentes do conhecimento consideradas por Shulman (2005), que consistem em conhecimentos curriculares, didáticos e matemáticos do conteúdo a ser ensinado. Nosso estudo se fez com base em uma pesquisa qualitativa, em que para a coleta de dados tivemos como colaboradores alguns professores que participaram do Grupo de Estudos coordenado pela Profa Dra. Edda Curi, na UNICSUL. Com base nos dados coletados pudemos verificar o quanto à tendência da “revisão” descrita pelos livros didáticos para o estudo das noções de área e perímetro tem um forte papel na cultura dos professores, desta forma este conteúdo matemático perde seu lugar próprio nos anos finais do Ensino Fundamental e ganha um segundo plano. Verificamos ainda que os professores desse grupo têm conhecimentos matemáticos desses assuntos, mas faltam conhecimentos didáticos e curriculares que lhes permitam identificar boas situações de aprendizagem.

32 Adriana Domingues Freitas 2009 Dissertação (Mestrado) Universidade Cruzeiro do Sul

A Utilização do Geogebra no Ensino de Matemática: Recurso para os Registros de Representação e Interação

Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa realizada com professores de Matemática, atuantes no Ensino Médio, cujo objetivo se constitui em verificar a utilização de um software educativo no ensino e aprendizagem de Matemática, com enfoque nas possibilidades de exploração no que diz respeito aos registros de representação e na interação do estudante no processo de construção do conhecimento. Para tanto, durante dois meses, foram realizados encontros entre a pesquisadora e os professores, por meio dos quais, o software foi explorado e avaliado. A coleta de dados foi efetuada por meio de questionários com questões fechadas e abertas e também de propostas de atividades elaboradas pelos professores envolvidos. A análise dos dados coletados permite constatar que um software educativo como o Geogebra possibilita nova dimensão de contato com objetos e conceitos matemáticos não acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente e possibilita, além do acesso, a mobilização de ao menos duas representações de registro de um mesmo objeto matemático, o que lhe confere potencial no ensino e aprendizagem da Matemática sob a perspectiva da teoria de Duval (2003), na qual a possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação é condição essencial.

33 Bazilicio Manoel de Andrade filho 2013 Dissertação (Mestrado) UNISUL

Processos de conversão de registros em língua natural para linguagem de matemática: análise com base na teorias da relevância

Neste trabalho, analisamos processos de conversão de registros em Língua Natural para Linguagem Matemática na resolução de problemas matemáticos, argumentando que relações de relevância subjazem esse processo. Para dar conta dessa demanda, apresentamos os fundamentos da teoria dos registros de representações semióticas (DUVAL, 2009), expomos o aparato teórico da Teoria da Relevância (SPERBER; WILSON, 1986, 1995) e ilustramos o potencial descritivo e explanatório da Teoria da Relevância na análise da resolução de um problema sobre área de trapézio e volume de prisma de uma barra de ouro. Os achados apontam que a proposição do problema em língua natural e a representação geométrica deitada da barra levam a mapear a sequência lexical.

34 Gabriela Teixeira Kluppel 2012 Dissertação (Mestrado) UEPG

Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval

Resumo disponível em:

<http://bicen-tede.uepg.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=732>

35 Marcelo Cardoso Ferraz 2010 Dissertação (Mestrado) PUC-SP

Prisma e pirâmide: um estudo didático de uma abordagem computacional

Resumo disponível em:

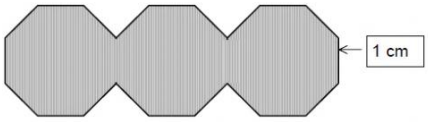
<http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=11493>

# ANEXO B – CORPUS DA PESQUISA: EXEMPLOS DE QUESTÕES SELECIONADAS DA PROVA BRASIL

1. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_005444

O símbolo abaixo será colocado em rótulos de embalagens.



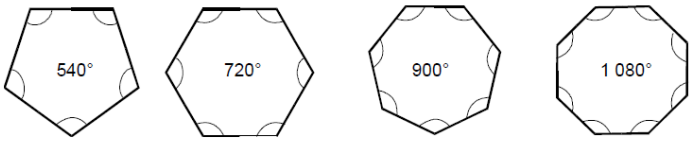

Sabendo-se que cada lado da figura mede 1 cm, conforme indicado, a medida do contorno em destaque no desenho é

(A) 18 cm
(B) 20 cm
(C) 22 cm
(D) 24 cm

2. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_006826

Cristina desenhou quatro polígonos regulares e anotou dentro deles o valor da soma de seus ângulos internos.



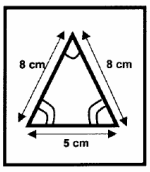

Qual é a medida de cada ângulo interno do hexágono regular?

(A) 60°
(B) 108°
(C) 120°
(D) 135°

3. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_022500

A professora desenhou um triângulo no quadro.




Em seguida, fez a seguinte pergunta: — "Se eu ampliar esse triângulo 3 vezes, como ficarão as medidas de seus lados e de seus ângulos?"

Alguns alunos responderam:

Fernando: — "Os lados terão 3 cm a mais cada um. Já os ângulos serão os mesmos."

Gisele: — "Os lados e ângulos terão suas medidas multiplicadas por 3."

Marina: — "A medida dos lados eu multiplico por 3 e a medida dos ângulos eu mantenho as mesmas."

Roberto: — "A medida da base será a mesma (5 cm), os outros lados eu multiplico por 3 e mantenho a medida dos ângulos."

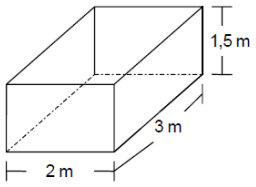
Qual dos alunos acertou a pergunta da professora?

(A) Fernando
(B) Gisele
(C) Marina
(D) Roberto

4. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_023100

A quantidade de metros cúbicos de água, que pode ser armazenada em uma caixa d'água de 2 m de comprimento por 3 m de largura e 1,5 m de altura, é

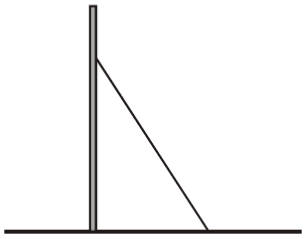



(A) 6,5
(B) 6,0
(C) 9,0
(D) 7,5

5. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_026669

Observe esta figura que representa uma escada apoiada em uma parede. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.



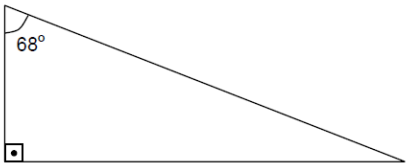
A escada mede, aproximadamente,

(A) 5 m
(B) 6,7 m
(C) 7,3 m
(D) 9 m

6. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_029654

Fabrício percebeu que as vigas do telhado da sua casa formavam um triângulo retângulo que tinha um ângulo de 68°. Quanto medem os outros ângulos?




(A) 22° e 90°
(B) 45° e 45°
(C) 56° e 56°
(D) 90° e 28°

7. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_029667

Exatamente no centro de uma mesa redonda com 1m de raio, foi colocado um prato de 30cm de diâmetro, com doces e salgados para uma festa de final de ano. Qual a distância entre a borda desse prato e a pessoa que se serve dos doces e salgados?

(A) 115cm
(B) 85cm
(C) 70cm
(D) 20cm

8. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_033358

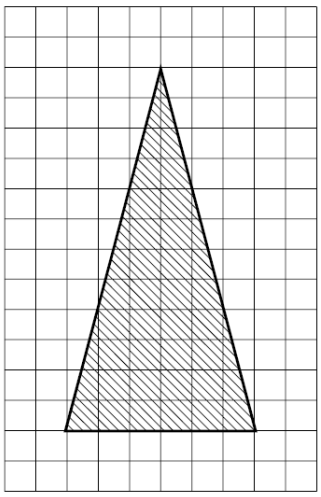
O administrador de um campo de futebol precisa comprar grama verde e amarela para cobrir o campo com faixas verdes e amarelas iguais em áreas e quantidades. O campo é um retângulo com 100 m de comprimento e 50 m de largura e, para cada 10 $m^2$ de grama plantada, gasta-se 1 $m^2$ a mais por causa da perda. Quantos $m^2$ de grama verde o administrador deverá comprar para cobrir todo o campo?

(A) 2250
(B) 2500
(C) 2750
(D) 5000

9. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

000 IT_043469

Um triângulo está representado na malha quadriculada abaixo.



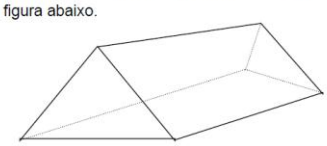
Para fazer uma redução desse triângulo que tenha suas dimensões 4 vezes menor que a original, deve-se

(A) multiplicar as dimensões da original por 4.
(B) dividir as dimensões da original por 4.
(C) multiplicar as dimensões da original por 2.
(D) dividir as dimensões da original por 2.

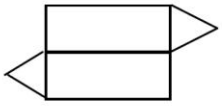
10. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 1).

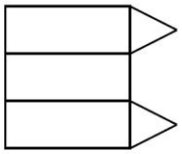
000 IT_044170

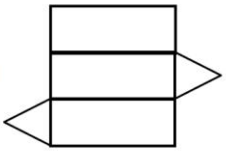
É comum encontrar em acampamentos barracas com fundo e que têm a forma apresentada na figura abaixo.

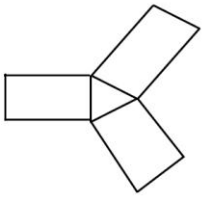


Qual desenho representa a planificação dessa barraca?

(A)


(B)


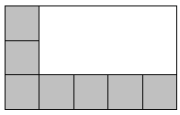
(C)


(D)


11. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 2).

000 IT_025075

O piso de uma sala está sendo coberto por cerâmica quadrada. Já foram colocadas 7 cerâmicas, como mostrado na figura.



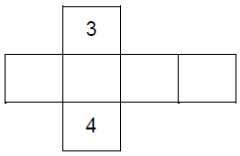
Quantas cerâmicas faltam para cobrir o piso?

(A) 7
(B) 8
(C) 9
(D) 15

12. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 2).

000 IT_029470

Os alunos da 4ª série estão montando um cubo para fazer um dado para a aula de matemática. Eles utilizam o molde abaixo, onde os números 3 e 4 representam duas de suas faces paralelas.



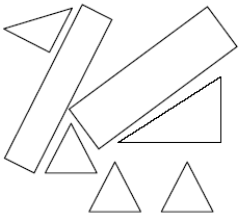

Sabendo que no dado a soma dos números em duas faces paralelas quaisquer totaliza sempre 7, que algarismos deverão estar escritos nas faces vazias?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A) | 1 | 2 | 5 | 6 |
| (B) | 2 | 1 | 6 | 5 |
| (C) | 2 | 5 | 1 | 6 |
| (D) | 1 | 2 | 6 | 5 |

13. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 2).

000 IT_039148

Sheila usou linhas retas fechadas para fazer este desenho.



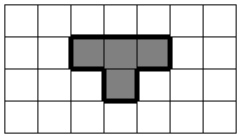
Quantas figuras de quatro lados foram desenhadas?

(A) **2**
(B) 3
(C) 4
(D) 5

14. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 2).

000 IT_040853

Uma praça de uma cidade será construída. A malha quadriculada representa o desenho da praça. Cada lado do quadradinho indica 1 metro de construção. A parte destacada em cinza está destinada ao coreto que será construído.



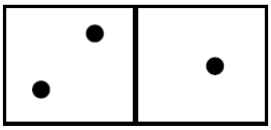
Quantos metros de construção serão necessários para o contorno do coreto?

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) **10**

15. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 2).

000 IT_043501

A face superior das peças de um jogo de dominó tem formato de um quadrilátero. Observe um exemplo:



Qual o quadrilátero que melhor caracteriza a face superior da peça de um jogo de dominó?

(A) Trapézio
(B) Quadrado
(C) Retângulo
(D) Losango

16. Ensino médio – 3º ano (seleção 3).

000 IT_020041

Duas pessoas, partindo de um mesmo local, caminham em direções ortogonais. Uma pessoa caminhou 12 metros para o sul, a outra, 5 metros para o leste. Qual a distância que separa essas duas pessoas ?

(A) 7m
(B) 13m
(C) 17m
(D) 60m
(E) 119m

17. Ensino médio – 3º ano (seleção 3).

000 IT_032741

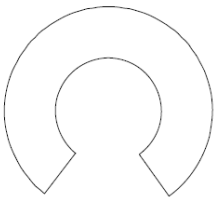
Ao passar sua mão direita por todos os vértices e arestas de um poliedro, somente uma vez, um deficiente visual percebe que passou por 8 vértices e 12 arestas. Conclui-se que o número de faces desse poliedro é igual a

(A) 20
(B) 12
(C) 8
(D) 6
(E) 4

18. Ensino médio – 3º ano (seleção 3).

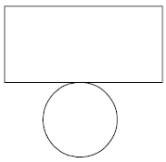
000 IT_043496

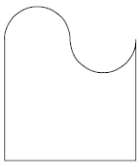
Ao fazer um molde de um copo,em cartolina, na forma de cilindro de base circular qual deve ser a planificação do mesmo?

(A)


(B)

(C)

(D)


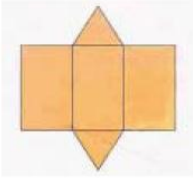
(E)


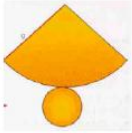
19. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 4).

08 IT_046244

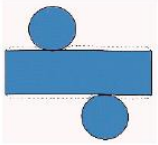
Observe o bumbo que Beto gosta de tocar. Ele tem a forma de um cilindro.

Qual é o molde do cilindro?

(A) 

(B) 

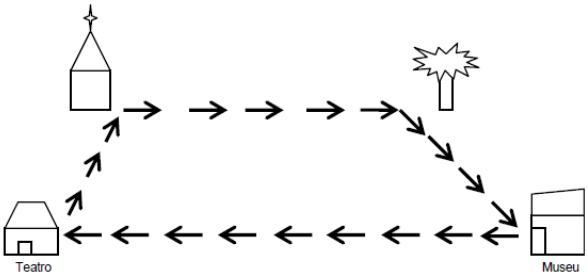
(C)

(D) 

20. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 4).

11 IT_032468

Chegando a uma cidade, Fabiano visitou a igreja local. De lá, ele se dirigiu à pracinha, visitando em seguida o museu e o teatro, retornando finalmente para a igreja. Ao fazer o mapa do seu percurso, Fabiano descobriu que formava um quadrilátero com dois lados paralelos e quatro ângulos diferentes.



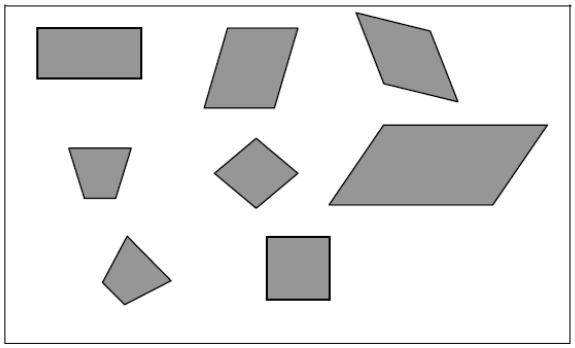

O quadrilátero que representa o percurso de Fabiano é um

(A) quadrado.
(B) losango.
(C) trapézio.
(D) retângulo.

21. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 4).

04 IT_046318

Mariana colou diferentes figuras numa página de seu caderno de Matemática, como mostra o desenho abaixo.



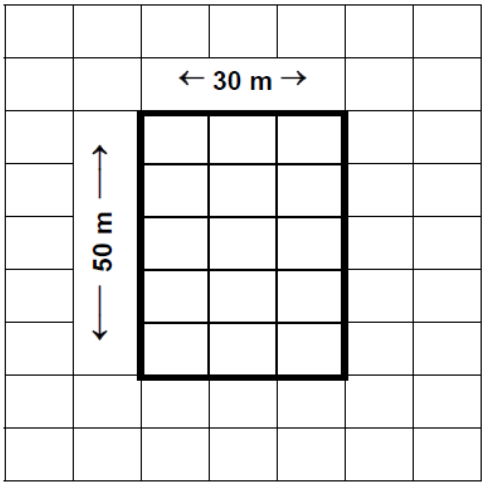
Essas figuras têm em comum

(A) o mesmo tamanho.
(B) o mesmo número de lados.
(C) a forma de quadrado.
(D) a forma de retângulo.

22. Ensino fundamental – anos iniciais – 5º ano (seleção 4).

11 IT_024099

Ricardo anda de bicicleta na praça perto de sua casa. Representada pela figura abaixo.




Se ele der a volta completa na praça, andará

(A) 160 m.
(B) 100 m.
(C) 80 m.
(D) 60 m.

23. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

IT_002414

Observe as figuras abaixo.

retângulo

quadrado

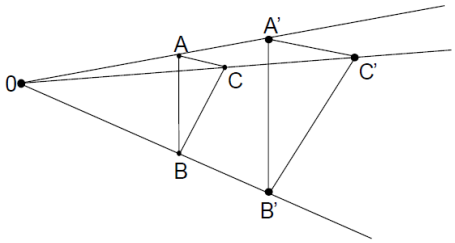
Considerando essas figuras,

(A) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.
(B) somente o quadrado é um quadrilátero.
(C) o retângulo e o quadrado são quadriláteros.
(D) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida.

24. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

11 IT_023396

Ampliando-se o triângulo ABC obtem-se um novo triângulo A'B'C', em que cada lado é o dobro do seu correspondente em ABC.




Em figuras ampliadas ou reduzidas os elementos que conservam a mesma medida são

(A) as áreas.
(B) os perímetros.
(C) os lados.
(D) os ângulos.

25. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

12 IT_005391

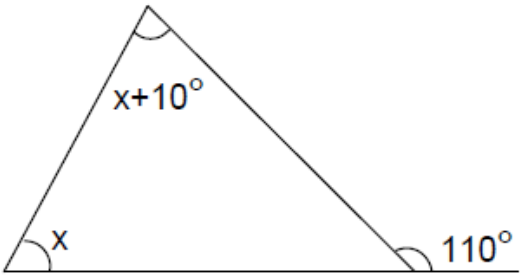
Os 2 ângulos formados pelos ponteiros de um relógio às 8 horas medem

(A) 60° e 120°.
(B) 120° e 160°.
(C) 120° e 240°.
(D) 140° e 220°.

26. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

13 IT_024366

Observe o triângulo abaixo.



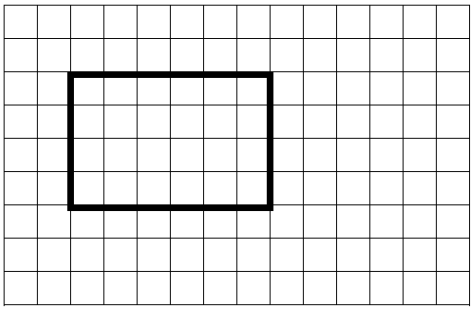

O valor de x é

(A) 110°.
(B) 80°.
(C) 60°.
(D) 50°.

27. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

01 IT_023926

Observe a figura abaixo.



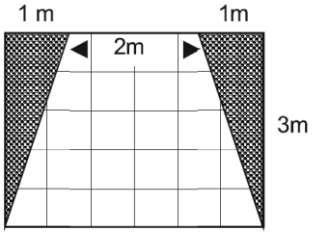
Considere o lado de cada quadradinho como unidade de medida de comprimento.
Para que o perímetro do retângulo seja reduzido à metade, a medida de cada lado deverá ser

(A) dividida por 2.
(B) multiplicada por 2.
(C) aumentada em 2 unidades.
(D) dividida por 3.

28. Ensino fundamental – anos finais – 9º ano (seleção 5).

13 IT_024367

O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.




Qual é a área do piso que será revestido com cerâmica?

(A) 3 $m^2$
(B) 6 $m^2$
(C) 9 $m^2$
(D) 12 $m^2$

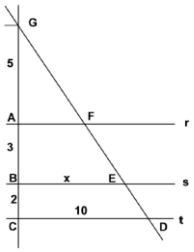
29. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

A figura abaixo mostra os trapézios ABEF e ACDF formados pelas retas r, s e t, paralelas entre si, e cortadas por duas transversais.

Com base nas informações da figura, qual é o valor do comprimento x?

(A) 1,5
(B) 4
(C) 5
➡ (D) 8
(E) 15

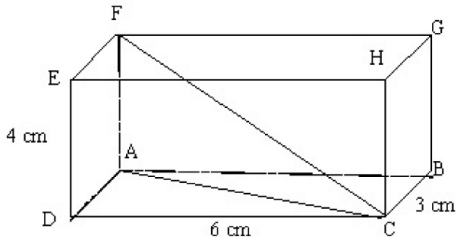



| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 15% | 11% | 18% | 33% | 20% |

30. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Um bloco de formato retangular ABCDEFGH, representado pela figura abaixo, tem as arestas que medem 3 cm, 4 cm e 6 cm.




A medida da diagonal FC do bloco retangular, em centímetros, é

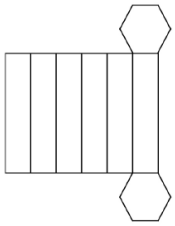
(A) 3. (B) 5. (C) $4\sqrt{6}$. (D) $2\sqrt{13}$. ➡ (E) $\sqrt{61}$.

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 11% | 19% | 33% | 23% | 13% |

31. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

A figura abaixo representa a planificação de um sólido geométrico.



O sólido planificado é

(A) uma pirâmide de base hexagonal.
➡ (B) um prisma de base hexagonal.
(C) um paralelepípedo.
(D) um hexaedro.
(E) um prisma de base pentagonal

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 8% | 39% | 11% | 20% | 18% |

32. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Uma caixa no formato de um poliedro precisa ser reforçada com 3 parafusos em cada vértice, um revestimento de metal nas suas 7 faces e uma aplicação de uma cola especial em todas as 15 arestas.

A quantidade necessária de parafusos será igual a

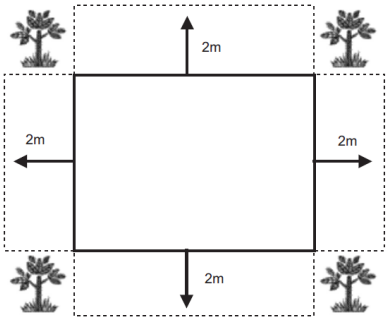
(A) 72. (B) 66. (C) 24. ➡ (D) 30. (E) 10.

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 13% | 26% | 29% | 24% | 6% |

33. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Uma praça quadrada, que possui o perímetro de 24 metros, tem uma árvore próxima de cada vértice e fora dela. Deseja-se aumentar a área da praça, alterando-se sua forma e mantendo as árvores externas a ela, conforme ilustra a figura.




O novo perímetro da praça, é

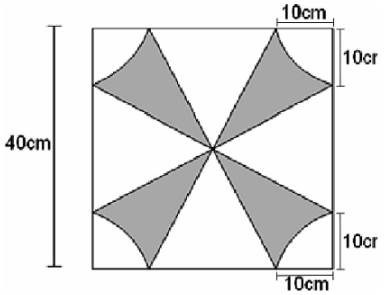
(A) 24 metros.
(B) 32 metros.
(C) 36 metros.
➡ (D) 40 metros.
(E) 64 metros.

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 10% | 44% | 13% | 21% | 8% |

34. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Paulo resolve modificar o revestimento do piso de sua sala de estar e escolhe uma cerâmica cujo formato está representado na figura a seguir. A cerâmica escolhida tem a forma de um quadrado cujo lado mede 40cm e possui 4 arcos de circunferência, de raio igual a 10cm, cujos centros estão localizados nos vértices do quadrado.




Com base nessas informações, qual é a área do desenho formado na cerâmica, em centímetros quadrados? (Considere π = 3,14)

(A) 314 (B) 400 ➡ (C) 486 (D) 1114 (E) 1286

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 22% | 26% | 21% | 12% | 14% |

35. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Um corpo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram então colocadas em seu interior n bolas de gude, e o nível da água atingiu a boca do vidro, sem derramamento.

Qual é o volume, em $cm^3$ , de todas as n bolas de gude juntas?

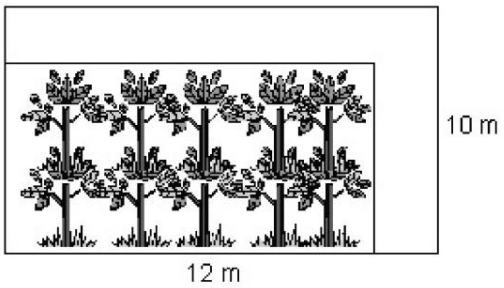
(A) 32 π
(B) 48 π
➡ (C) 64 π
(D) 80 π
(E) 96 π

| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 27% | 36% | 22% | 6% | 8% |

36. Ensino médio – 3º ano (seleção 6).

**Exemplo de item:**

Em um terreno retangular de 10 m x 12 m, deseja-se construir um jardim com 80 m² de área, deixando uma faixa para o caminho (sempre de mesma largura), como mostra a figura.




A largura do caminho deve ser de

(A) 1 m. (B) 1,5 m. ➡(C) 2 m. (D) 2,5 m. (E) 3 m.

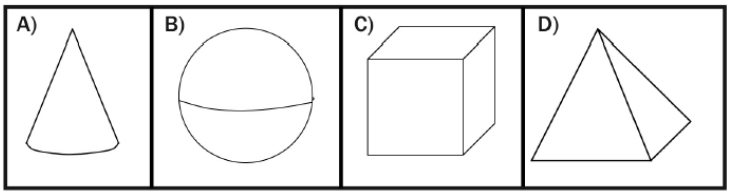
| Percentual de respostas às alternativas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | D | E |
| 7% | 16% | 45% | 17% | 11% |

37. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

Vítor gosta de brincar de construtor. Ele pediu para sua mãe comprar blocos de madeira com superfícies arredondadas.

A figura abaixo mostra os blocos que estão à venda.




Quais dos blocos acima a mãe de Vítor poderá comprar?

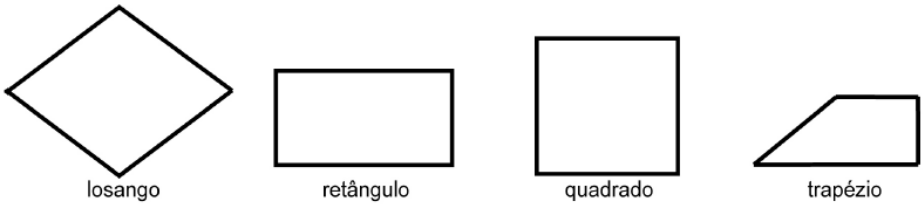
(A) A e C. ➡ (B) A e B. (C) B e D. (D) C e D.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 12% | 53% | 13% | 13% |

38. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

Ao escolher lajotas para o piso de sua varanda, Dona Lúcia falou ao vendedor que precisava de lajotas que tivessem os quatro lados com a mesma medida.




Que lajotas o vendedor deve mostrar a Dona Lúcia?

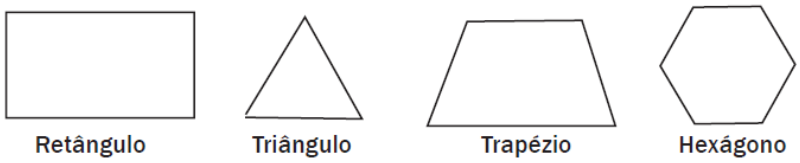
(A) Losango ou quadrado.
(B) Quadrado ou retângulo.
(C) Quadrado ou trapézio.
(D) Losango ou trapézio.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 39% | 36% | 11% | 5% |

39. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

Abaixo, estão representados quatro polígonos.




Qual dos polígonos mostrados possui exatamente 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos?

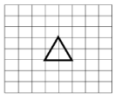
(A) Retângulo (B) Triângulo (C) Trapézio (D) Hexágono

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 26% | 15% | 38% | 14% |

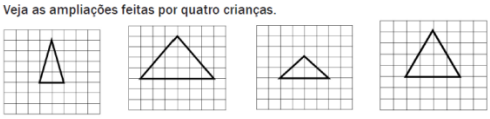
40. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

A figura abaixo foi dada para os alunos e algumas crianças resolveram ampliá-la.



Veja as ampliações feitas por quatro crianças.



Ana Célia Bernardo Diana

Quem ampliou corretamente a figura?

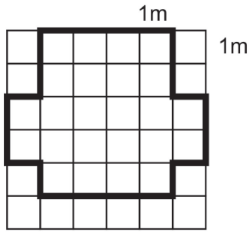
(A) Ana
(B) Bernardo
(C) Célia
➡ (D) Diana

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 9% | 10% | 23% | 56% |

41. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

Uma pessoa faz caminhadas em uma pista desenhada em um piso quadriculado, no qual o lado de cada quadrado mede 1m. A figura abaixo representa essa pista.




Quantos metros essa pessoa percorre ao completar uma volta?

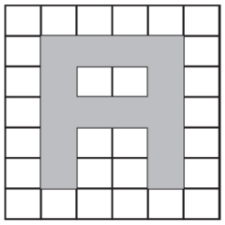
(A) 36m
(B) 24m
➡ (C) 22m
(D) 20m

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 43% | 24% | 23% | 7% |

42. Ensino fundamental – anos iniciais - 5º ano (seleção 7).

**Exemplo de item:**

Em sua fachada, uma loja cobriu com azulejos a inicial do nome do dono. Cada quadrinho corresponde a um azulejo.



Quantos azulejos foram usados para cobrir a letra "A" nesse desenho?

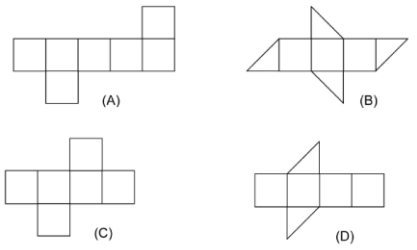
(A) 13
➡ (B) 14
(C) 16
(D) 20

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 4% | 88% | 3% | 3% |

43. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

**Exemplo de item:**

Observe as figuras abaixo.



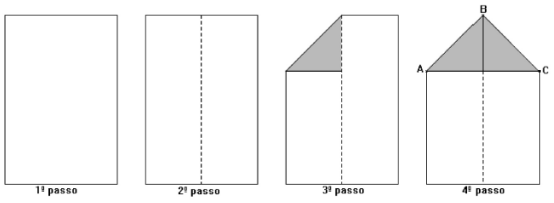

Entre elas, a planificação de uma caixa em forma de cubo é a figura

(A) A. (B) B. ➡ (C) C. (D) D.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 12% | 24% | 45% | 16% |

44. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados nas figuras a seguir.



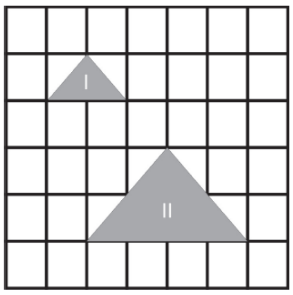

O triângulo ABC é

(A) retângulo e escaleno.
➡ (B) retângulo e isósceles.
(C) acutângulo e escaleno.
(D) acutângulo e isósceles.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 27% | 40% | 17% | 14% |

45. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8)..

Na ilustração abaixo, a figura II foi obtida a partir da figura I.



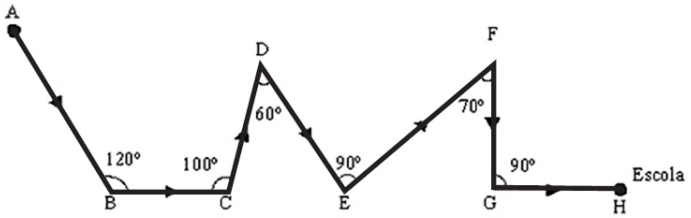

O perímetro da figura II, em relação ao da figura I, ficou

(A) reduzido à metade.
(B) inalterado.
➡ (C) duplicado.
(D) quadruplicado.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 22% | 11% | 48% | 17% |

46. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Para chegar à escola, Carlos realiza algumas mudanças de direção como mostra a figura a seguir.



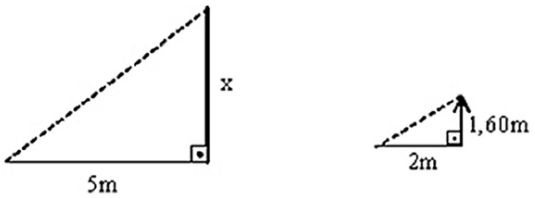

As mudanças de direção que formam ângulos retos estão representadas nos vértices

(A) B e G. (B) D e F. (C) B e E. ➡ (D) E e G.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 29% | 20% | 11% | 38% |

47. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

No pátio de uma escola, a professora de matemática pediu que Júlio, que mede 1,60m de altura, se colocasse em pé, próximo de uma estaca vertical. Em seguida, a professora pediu a seus alunos que medissem a sombra de Júlio e a da estaca. Os alunos encontraram as medidas de 2m e 5m, respectivamente, conforme ilustram as figuras abaixo.




A altura da estaca media

(A) 3,6m. ➡ (B) 4m. (C) 5m. (D) 8,6m.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 43% | 30% | 11% | 15% |

48. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Um polígono regular possui a medida do ângulo central igual a 40°.

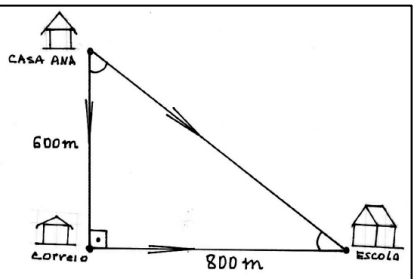
Esse polígono é formado por

(A) 5 lados. ➡ (B) 9 lados. (C) 10 lados. (D) 20 lados.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 26% | 43% | 17% | 12% |

49. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Hélio e Ana partiram da casa dela com destino à escola. Ele foi direto de casa para a escola e ela passou pelo correio e depois seguiu para a escola, como mostra a figura ao lado.



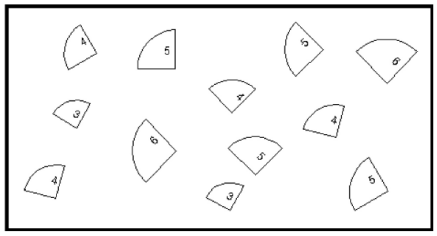

De acordo com os dados apresentados, a distância percorrida por Ana foi maior que a percorrida por Hélio em

(A) 200 m. ➡(B) 400 m. (C) 800 m. (D) 1 400 m.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 20% | 18% | 11% | 49% |

50. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Na figura abaixo, há um conjunto de setores circulares, cujos ângulos centrais são de 90º. Cada setor está com a medida do seu raio indicada.



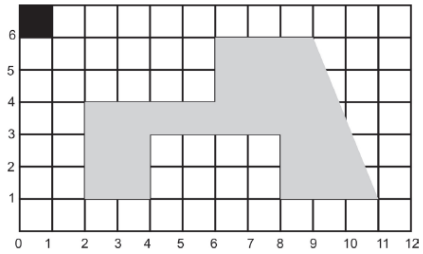
Agrupando-se, convenientemente, esses setores, são obtidos

(A) 3 círculos.
(B) no máximo um círculo.
(C) 2 círculos e 2 semicírculos.
(D) 4 círculos.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 17% | 10% | 62% | 8% |

51. Ensino fundamental – anos finais - 9º ano (seleção 8).

Na ilustração ao lado, o quadrado sombreado representa uma unidade de área.




A área da figura desenhada mede

(A) 23 unidades. ➡(B) 24 unidades. (C) 25 unidades. (D) 29 unidades.

| Percentual de respostas às alternativas | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| 23% | 39% | 27% | 6% |