

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA

RONALDO MENDES EVARISTO

**MODELO MATEMÁTICO PARA ESTUDO DA
VARIABILIDADE DA FREQUÊNCIA CARDÍACA**

PONTA GROSSA
2017

RONALDO MENDES EVARISTO

**MODELO MATEMÁTICO PARA ESTUDO DA
VARIABILIDADE DA FREQUÊNCIA CARDÍACA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

PONTA GROSSA

2017

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

E92 Evaristo, Ronaldo Mendes
Modelo matemático para estudo da
variabilidade da frequência cardíaca/
Ronaldo Mendes Evaristo. Ponta Grossa,
2017.
113f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de
Concentração: Física), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos
Batista.

1.Coração. 2.Variabilidade de
frequência cardíaca. 3.Processos
autorregressivos. 4.Doença arterial
coronariana. 5.Transformada Wavelet
Discreta. I.Batista, Antonio Marcos. II.
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Doutorado em Ciências. III. T.

CDD: 519.3

TERMO DE APROVAÇÃO

RONALDO MENDES EVARISTO

“Modelo Matemático para Estudo da Variabilidade da Frequência Cardíaca”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

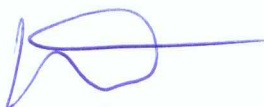
Orientador:



Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR



Prof. Dr. Sérgio da Costa Saab
Departamento de Física – UEPG/PR



Prof. Dr. Adriano Doff Sotta Gomes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR



Dr. Fernando da Silva Borges
Instituto de Física - USP



Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Dedicatória

Aos meus pais e avós.

Agradecimentos

À Deus, à Sagrada Família e ao meu Anjo da Guarda pela companhia em todos os momentos e por me darem sabedoria e discernimento para a escolha dos melhores caminhos para o progresso de meu espírito.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Marcos Batista um agradecimento especial pelo acolhimento, compreensão, orientação, apoio e confiança, indispensáveis para a concretização deste trabalho.

À Dra. Kelly Cristiane Iarosz pela antiga amizade, pela colaboração e pelas revisões e correções dos textos.

Aos Professores Dr. Ricardo Luiz Viana e Dr. Moacyr Fernandes de Godoy pela disponibilização de dados experimentais para amparar este estudo.

Aos demais professores que me acompanharam durante o programa: Dr. José Danilo Szezech Jr, Dr. Ruben Aucchaie Estrada, Dr. Ervin Kaminski Lenzi e Dr. Sérgio da Costa Saab.

À UEPG pelo ambiente, estrutura e seriedade.

Ao Campus Telêmaco Borba do IFPR e aos colegas de trabalho que me apoiaram e viajaram comigo durante o programa, em especial ao meu compadre Rafael.

A todos os meus colegas, companheiros de batalha, da sala 105. Tenho muito orgulho de fazer parte desse grupo tão seleto de pessoas.

À meus pais e avós um agradecimento muito especial, pelo apoio incondicional durante toda minha vida escolar. Ao meu avô, José Mendes que partiu no fim do ano passado dedico esse trabalho de forma muito carinhosa, visto que ele sempre sonhou em ver os netos doutores. Um dia lhe agradeço pessoalmente, pode ter certeza!

À minha noiva Suellen Francynne Moura pelo auxílio, apoio e pela motivação para a entrada no Programa.

À Rádio T que me acompanhou durante os mais de 60.000km de estrada entre Telêmaco Borba e Ponta Grossa durante esses quatro anos.

Epígrafe

*Ó Minha Senhora e também minha mãe
Eu me ofereço inteiramente, todo a vós
E em prova da minha devoção, eu hoje vos dou meu coração
Consagro a vós meus olhos, meus ouvidos, minha boca
Tudo o que sou, desejo que a vós pertença
Incomparável mãe, guardai-me e defendei-me
Como filho e propriedade vossa, Amém.*

Resumo

Nos últimos anos, o aumento da incidência de doenças cardiovasculares na população mundial vem motivando a comunidade científica a buscar novas técnicas ou inovações tecnológicas para complementar os métodos existentes para avaliação do desempenho do coração. Dentre elas, destaca-se a análise da Variabilidade da Frequência Cardíaca (VFC) via eletrocardiograma (ECG), método não invasivo importante na detecção de patologias leves e moderadas cada vez mais frequentes nos seres humanos como doenças coronarianas, arritmias, bradicardias e taquicardias, além de distúrbios na relação entre os sistemas nervosos simpático e parassimpático. Neste trabalho é introduzida uma inovação em um modelo matemático baseado em modulações de exponenciais gaussianas utilizado para reproduzir a morfologia do ECG de seres humanos. Trata-se da introdução de tacogramas gerados por um processo estocástico autorregressivo (AR), previamente à integração das equações diferenciais do modelo, capaz de reproduzir com maior fidelidade a VFC quando comparados com dados experimentais de adultos saudáveis e de adultos com doença arterial coronariana (DAC). Para validar o modelo, os resultados simulados são comparados com dados experimentais via espectro de potência da transformada *wavelet* discreta (TWD), gráficos de Poincaré e pela análise de flutuação sem tendência. Verificamos que a DAC não altera a morfologia do ECG em situação de repouso, mas influencia significativamente na VFC, sendo que o modelo matemático proposto absorve e reproduz esse comportamento.

Palavras-chave: Coração. Variabilidade da Frequência Cardíaca. Processos Autorregressivos. Doença Arterial Coronariana. Transformada Wavelet Discreta. Gráficos de Poincaré. Análise de Flutuação sem Tendência.

Abstract

In recent years, the increase in the incidence of cardiovascular diseases in the world population has motivated the scientific community to seek new techniques or technological innovations to complement existing methods for assessing heart performance. Among them, stands out the analysis of the Heart Rate Variability (HRV) by electrocardiogram (ECG), an important non-invasive method for the detection of mild and moderate pathologies that are increasingly frequent in humans such as coronary diseases, arrhythmias, bradycardia and tachycardias, besides disturbances in the relationship between the sympathetic and parasympathetic nervous systems. This work introduces an innovation in a mathematical model based on Gaussian exponential modulations used to reproduce the ECG morphology of humans. This is the introduction of tachograms generated by an autoregressive stochastic process (AR), prior to the integration of the differential equations of the model, capable of reproducing with better fidelity the HRV when compared with experimental data of healthy adults and adults with coronary artery disease (CAD). In order to validate the model, the simulated results are compared with experimental data using the discrete wavelet transform (DWT) power spectrum, Poincaré plots and the detrended fluctuation analysis (DFA). We verified that CAD does not change the morphology of ECG in resting state, but it has a significant influence on HRV, and the proposed mathematical model absorbs and reproduces this behavior.

Keywords: Heart. Heart Rate Variability. Autoregressive Process. Coronary Artery Disease. Discrete Wavelet Transform. Poincaré Plots. Detrended Fluctuation Analysis.

Lista de Abreviaturas e Siglas

AF Alta Frequência

AFsT Análise de Flutuação sem Tendência

AMR Análise em Multiresolução

AR Autorregressivo

ASR Arritmia Sinusal Respiratória

AV Atrioventricular

AVC Acidente Vascular Cerebral

BF Baixa Frequência

bpm Batimentos por Minuto

DAC Doença Arterial Coronariana

ECG Eletrocardiograma

IAM Infarto Agudo do Miocárdio

iPR Intervalo PR

iQT Intervalo QT

iQTc Intervalo QT corrigido

LIT Linear e Invariante no Tempo

mrmm Movimentos Respiratórios por Minuto

OMS Organização Mundial de Saúde

SA Sinoatrial

SCV Sistema Cardiovascular

SNA Sistema Nervoso Autônomo

SNP Sistema Nervoso Parassimpático

SNS Sistema Nervoso Simpático

sPR Segmento PR

sST Segmento ST

TFTC Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

TFTD Transformada de Fourier de Tempo Discreto

TWC Transformada Wavelet Contínua

TWD Transformada Wavelet Discreta

VFC Variabilidade da Frequência Cardíaca

wAF Wavelet Alta Frequência

wBF Wavelet Baixa Frequência

Lista de Símbolos

$r[n]$	Tacograma RR.
$f_c[n]$	Frequência Cardíaca Instantânea em batimentos por minuto.
N	Número de batimentos cardíacos.
$X(F)$	Transformada de Fourier de Tempo Contínuo do sinal $x(t)$.
T_s	Período de amostragem.
F_s	Frequência de amostragem.
F_{max}	Frequência máxima de um sinal.
$X(f)$	Transformada de Fourier de Tempo Discreto do sinal $x[n]$.
$X(z)$	Transformada z do sinal $x[n]$.
$\delta[n]$	Impulso unitário.
$\psi(t)$	Função Wavelet.
$\phi(t)$	Função Escala.
a	Coefficiente de dilatação de uma wavelet.
b	Coefficiente de translação de uma wavelet.
C_ψ	Condição de admissibilidade de uma wavelet.
$u(t)$	Função degrau unitário.
$L_2(\mathbb{R})$	Espaço dos sinais de tempo contínuo com energia finita.
$l_2(\mathbb{Z})$	Espaço dos sinais de tempo discreto com energia finita.
$W_x(a, b)$	Transformada Wavelet de tempo contínuo de um sinal $x(t)$.
$h[n]$	Filtro Wavelet.
$g[n]$	Filtro Escala.
$w_m[n]$	Coefficientes wavelet na escala m .
$v_m[n]$	Coefficientes escala na escala m .
$s_m(t)$	Função de aproximação na escala m .
$d_m(t)$	Função de detalhe na escala m .
E^{wAF}	Energia na banda wavelet de alta frequência.
E^{wBF}	Energia na banda wavelet de baixa frequência.
α	Expoente escalar da Análise de Flutuação sem Tendência.
$\varepsilon[n]$	Ruído branco com média zero e variância unitária.
$SD1$	Indicador relacionado com o eixo menor da elipse do gráfico de Poincaré.

$SD2$	Indicador relacionado com o eixo maior da elipse do gráfico de Poincaré.
$R[k]$	Tacograma RR integrado utilizado na Análise de Flutuação sem Tendência.
$F[\lambda]$	Função de flutuação.
λ	Comprimento das janelas utilizadas no cálculo das flutuações.
$\omega(t)$	Frequência angular do tacograma RR obtido via modelo matemático.
$r(t)$	Função seccionalmente contínua associada ao tacograma $r[n]$.
f_c	Frequência cardíaca média em batimentos por minuto.
σ_c	Desvio padrão da frequência cardíaca média f_c , em batimentos por minuto.
μ_r	Valor médio do tacograma em segundos.
σ_r	Desvio padrão do tacograma em segundos.
β	Fator de correção utilizado no modelo matemático.
f_r	Frequência de respiração do paciente.
Ξ	Número de pacientes.

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do modelo apresentado na Equação (3.3), onde $\beta = \sqrt{60/f_c}$	p. 52
3.2	Valores dos coeficientes do processo AR considerado para a geração do tacograma $r[n]$	p. 54
4.1	Valores médios dos indicadores encontrados para os pacientes experimentais. .	p. 64
4.2	Cálculo dos valores médios dos indicadores de adultos jovens saudáveis (simulados e experimentais).	p. 68
4.3	Cálculo dos valores médios dos indicadores de adultos com Doença Arterial Coronariana (simulados e experimentais).	p. 71

Lista de Figuras

2.1	Subdivisões do sistema nervoso de um ser humano. Em vermelho se destaca o SNA, responsável pelo controle do coração.	p. 21
2.2	Esquema do coração humano.	p. 22
2.3	Esquema do fluxo sanguíneo em seres humanos.	p. 23
2.4	Exame de ECG de um adulto sadio na escala de mV por ms.	p. 24
2.5	Esboço de dois ciclos da ECG normal.	p. 25
2.6	Dados experimentais de um adulto saudável: (a) tacograma RR ($r[n]$); (b) frequência cardíaca instantânea ($f_c[n]$) ($N = 1000$ batimentos).	p. 26
2.7	Espectro do tacograma RR apresentado na Figura 2.6(a) para um adulto saudável. Em pontilhado se destacam as bandas BF e AF.	p. 27
2.8	Classificação da Doença Arterial Coronariana (DAC).	p. 29
2.9	Conversão de sinais de tempo contínuo ($x(t)$) para sinais de tempo discreto ($x[n]$).	p. 30
2.10	Representação de um sistema LIT no: (a) domínio do tempo, (b) domínio da frequência e (c) domínio z	p. 32
2.11	Classificação da Análise Wavelet.	p. 33
2.12	Algumas wavelets: (a) Haar, (b) Chapéu Mexicano, (c) Morlet e (d) Shannon.	p. 35
2.13	Trecho de em ECG simulado e sua respectiva TWC utilizando a wavelet chapéu mexicano.	p. 36
2.14	Decomposição em quatro níveis pela TWD, utilizando a wavelet de Daubechies de ordem 2.	p. 40
2.15	Banco de filtros utilizado na decomposição/reconstrução pela TWD.	p. 41
2.16	TWD para $M - M_0 + 1$ níveis: (a) decomposição e (b) reconstrução.	p. 42
2.17	Decomposição de um tacograma RR em quatro níveis.	p. 43

2.18	Decomposição ideal do espaço de frequências realizada pela TWD com quatro níveis de decomposição.	p. 44
2.19	Tacograma RR de um adulto saudável com $N = 1000$ batimentos.	p. 45
2.20	(a) Ruído branco com média zero e variância unitária e respectivo (b) gráfico de Poincaré.	p. 45
2.21	(a) Tacograma de um adulto saudável e respectivo gráfico de Poincaré (b). . .	p. 46
2.22	(a) Tacograma de um adulto sadio, (b) tacograma integrado (em azul) e tendências locais para $\lambda = 100$ (em vermelho), (c) flutuações obtidas para $\lambda = 100$ e (d) função de flutuação para $4 \leq \lambda \leq 100$	p. 48
2.23	Em azul o gráfico de $\log_{10}(F[\lambda])$ versus $\log_{10}(\lambda)$ e em vermelho a reta que melhor aproxima $\log_{10}(F[\lambda])$, com coeficiente angular $\alpha = 1,0211$	p. 49
3.1	Espectro dos tacogramas RR: (a) modelo original gaussiano $ R_G(f) $ proposto por McSharry e colaboradores; (b) modelo AR proposto neste trabalho $ R_{AR}(f) $. .	p. 53
3.2	Comparação entre os espectros do modelo gaussiano $ R(f) $ (vermelho), do modelo AR proposto neste trabalho $ R_{AR}(f) $ (azul) e de um experimental $ R_{exp}(f) $ (verde).	p. 55
3.3	Geração de um tacograma RR com base em um processo AR.	p. 56
3.4	Esquema para geração do ECG e extração do tacograma via modelo.	p. 57
3.5	ECG por simulação: (a) adulto saudável; (b) Adulto com DAC. Tacogramas RR retirados para 1000 batimentos: (c) adulto saudável; (d) adulto com DAC. .	p. 58
4.1	Sobreposição entre dois intervalos de números reais $I_1 = [a_1, b_1]$ e $I_2 = [a_2, b_2]$. .	p. 61
4.2	(a) Frequência cardíaca média de cada paciente experimental $\bar{f}_{s,d}$ e (b) energia do tacograma de cada paciente $E_{s,d}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.	p. 61
4.3	Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente experimental: (a) $SD1_{s,d}$ e (b) $SD2_{s,d}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.	p. 62
4.4	AFsT de cada paciente experimental: (a) coeficiente $\alpha_{s,d}$ e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_{s,d}[\lambda]$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.	p. 63

4.5	Energia Wavelet de cada paciente experimental: (a) baixa frequência $E_{s,d}^{wBF}$ e (b) alta frequência $E_{s,d}^{wAF}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.	p. 64
4.6	(a) Frequência cardíaca média de cada paciente $\bar{f}_s$ e (b) energia do tacograma de cada paciente E_s . Em preto os valores simulados, em azul os valores experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 65
4.7	AFsT de cada paciente saudável: (a) coeficiente α_s e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_s[\lambda]$. Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 66
4.8	Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente saudável: (a) $SD1_s$ e (b) $SD2_s$. Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 66
4.9	Energia wavelet de cada paciente saudável: (a) baixa frequência E_s^{wBF} e (b) alta frequência E_s^{wAF} . Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 67
4.10	(a) Frequência cardíaca média de cada paciente $\bar{f}_d$ e (b) energia do tacograma de cada paciente E_d . Em preto os valores simulados e em vermelho os valores experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 69
4.11	AFsT de cada paciente com DAC: (a) coeficiente α_d e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_d[\lambda]$. Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 69
4.12	Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente com DAC: (a) $SD1_d$ e (b) $SD2_d$. Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 70
4.13	Energia wavelet de cada paciente com DAC: (a) baixa frequência E_d^{wBF} e (b) alta frequência E_d^{wAF} . Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.	p. 71
B.1	Decimação por fator dois no domínio z	p. 82
B.2	Interpolação por fator dois no domínio z	p. 83
B.3	Banco de filtros utilizado na decomposição wavelet.	p. 83

Sumário

1	Introdução	p. 18
2	Fundamentação Teórica	p. 21
2.1	Conceitos Básicos de Eletrocardiografia	p. 21
2.2	Processamento Digital de Sinais	p. 29
2.3	Transformada Wavelet	p. 33
2.3.1	Transformada Wavelet Contínua	p. 35
2.3.2	Transformada Wavelet Discreta	p. 36
2.3.2.1	Análise em Multiresolução	p. 37
2.3.2.2	Algoritmo Piramidal	p. 39
2.4	Gráficos de Poincaré	p. 44
2.5	Análise de Flutuação sem Tendência	p. 47
3	Modelo Matemático dos Batimentos Cardíacos	p. 50
4	Resultados	p. 59
4.1	Análise Exploratória dos Dados Experimentais	p. 59
4.2	Análise do Modelo Matemático para Batimentos Saudáveis	p. 64
4.3	Análise do Modelo Matemático para Batimentos com DAC	p. 67
5	Conclusão	p. 72
	Referências	p. 74
	Apêndice A – Espaços $L_2(\mathbb{R})$ e $l_2(\mathbb{Z})$	p. 79

A.1	Espaço $L_2(\mathbb{R})$	p. 79
A.2	Espaço $l_2(\mathbb{Z})$	p. 80
Apêndice B – Bancos de Filtros QMF e Filtros de Daubechies		p. 82
B.1	Decimação	p. 82
B.2	Interpolação	p. 82
B.3	Bancos de Filtros Espelhados em Quadratura	p. 83
B.4	Filtros de Daubechies	p. 84
Apêndice C – Scripts em Matlab		p. 88
Apêndice D – Trabalhos Publicados		p. 93

1 *Introdução*

O sistema cardiovascular (SCV) é responsável por fornecer sangue aos órgãos humanos, sendo composto pelo coração, pelas artérias e pelas veias. O coração tem a função de bombear sangue para o corpo por meio de contrações [1]. O coração humano bate em média a 72 batimentos por minuto (bpm) e bombeia 0,07 litros de sangue por contração [2, 3]. A contração e a relaxação do coração são verificadas em um único ciclo do sinal de eletrocardiograma (ECG), conhecido por registrar a atividade elétrica do coração.

A atividade elétrica do coração é gerada em dois pontos principais dentro do órgão, conhecidos como nódulos sinoatrial e atrioventricular. Waller em 1887 [4] mediu pela primeira vez a atividade elétrica do coração e o primeiro eletrocardiógrafo prático foi inventado por Einthoven em 1901 [5], que foi utilizado como uma ferramenta para diagnóstico de anormalidades cardíacas.

Recentemente, algumas investigações teóricas relacionadas com o SCV foram realizadas para analisar sinais de eletrocardiograma [6, 7, 8]. Além disso, vários modelos matemáticos vem sendo desenvolvidos para se compreender o funcionamento fisiológico do SCV. Alguns desses modelos se baseiam na equação clássica de Van der Pol [9] e apresentam propriedades fenomenológicas interessantes quando estudados pela dinâmica não-linear. Gois e Savi [10] consideraram três osciladores de Van der Pol modificados, conectados por um acoplamento com atraso de tempo para descrever o comportamento do ritmo cardíaco. Além disso, esses osciladores de Van der Pol acoplados vêm sendo utilizados pelo mesmo grupo em estudos sobre controle de comportamentos irregulares em ritmos cardíacos patológicos [11]. McSharry e colaboradores [12] introduziram um modelo dinâmico para descrever a geração de sinais sintéticos de eletrocardiograma. Esse modelo é baseado em um conjunto de três equações diferenciais ordinárias onde são incorporadas as ondas de Mayer e a arritmia sinusal respiratória (ASR) por meio de um espectro bimodal consistindo da soma de duas funções gaussianas.

Neste trabalho, ao invés de duas funções gaussianas é proposto um processo estocástico autorregressivo (AR) para obter o tacograma e, conseqüentemente, o ECG de adultos

jovens saudáveis com batimentos cardíacos sinusais. Na literatura, o tacograma está relacionado com o estudo da variabilidade da frequência cardíaca (VFC) [13, 14]. Boardman e colaboradores [15] estudaram os processos AR para a VFC. Eles encontraram a ordem ótima de um processo AR que pode ser utilizado para a análise espectral de segmentos curtos de tacogramas. Na prática, na maioria dos casos os cardiologista utilizam de 15 a 20 minutos de registro eletrocardiográfico para aferir um laudo.

Em trabalho recente [16], disponível no Apêndice D, foram comparados os tacogramas obtidos de duas funções gaussianas e de um processo AR com tacogramas experimentais de pessoas saudáveis por meio da análise de flutuação sem tendência (AFsT) [17] e dos gráficos de Poincaré [18]. Foi verificado que os resultados obtidos por processos AR se aproximam melhor dos dados experimentais quando comparados com o espectro dado por duas gaussianas.

Neste trabalho, além da descrição de batimentos saudáveis são estudadas as doenças arteriais coronarianas (DAC). Essas doenças são as mais comumente encontradas e são caracterizadas pelo depósito de placas de gordura, colesterol, cálcio ou colágeno nas artérias próximas ao coração. Essas placas levam ao bloqueio dos vasos que irrigam o miocárdio e provocam a chamada parada cardíaca. No geral, as doenças cardiovasculares são causadas por desordens no coração e nos vasos sanguíneos e incluem doenças coronárias (ataques cardíacos), acidentes vasculares cerebrais (AVC), aumento da pressão sanguínea (hipertensão), doenças arteriais periféricas, doenças cardíacas reumáticas, doenças cardíacas congênitas e insuficiência cardíaca. As principais causas de doenças cardiovasculares são o uso do tabaco, o sedentarismo, dietas não saudáveis e o uso nocivo do álcool [19].

Para se ter uma ideia, de acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), dos 56,4 milhões de mortes no mundo em 2015, 15 milhões (26,6%) foram relacionadas com problemas no SCV, isto é, as principais causas de morte no mundo no ano de 2015 foram relacionadas com doenças cardiovasculares. E mais, as estatísticas da mesma entidade mostram que essas doenças permaneceram como as principais causas de morte em todo o mundo nos últimos 15 anos.

No Brasil, a realidade segue o contexto mundial. De acordo com o Ministério da Saúde, em 2014, foram registradas mais de 1,2 milhão de mortes. Dessas, foram registradas 340.284 mortes relacionadas ao SCV, representando 28,4% do total. Esse cenário mostra que o estudo do SCV e suas patologias são de grande importância para a Ciência e para a Sociedade e motivam este trabalho que, por sua vez, procura contribuir de forma concreta para uma descrição matemática mais realista para o coração humano.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

O Capítulo 2, apresenta a fundamentação teórica, onde são introduzidos os conceitos básicos de eletrocardiografia, as ideias fundamentais da análise espectral via decomposição wavelet, as características dos gráficos de Poincaré e a base da análise de flutuação sem tendência. Esses indicadores são clássicos em cardiologia e por isso foram escolhidos nesta análise.

No Capítulo 3, é apresentado o modelo matemático utilizado para a simulação dos batimentos cardíacos em situações saudáveis e com DAC. Neste capítulo se apresenta a melhoria alcançada com o tacograma RR sendo gerado por um modelo AR, ao invés de duas gaussianas moduladas.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos no estudo. Os dados simulados são comparados com dados experimentais de 62 voluntários saudáveis e de 62 voluntários com DAC.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões e propostos alguns trabalhos futuros.

Por fim, são apresentados alguns apêndices para detalhar a teoria, os códigos em MATLAB[®] utilizados neste estudo e os trabalhos publicados durante este estudo. Todos os códigos e programas são disponibilizados e podem ser solicitados ao autor por meio de correio eletrônico.

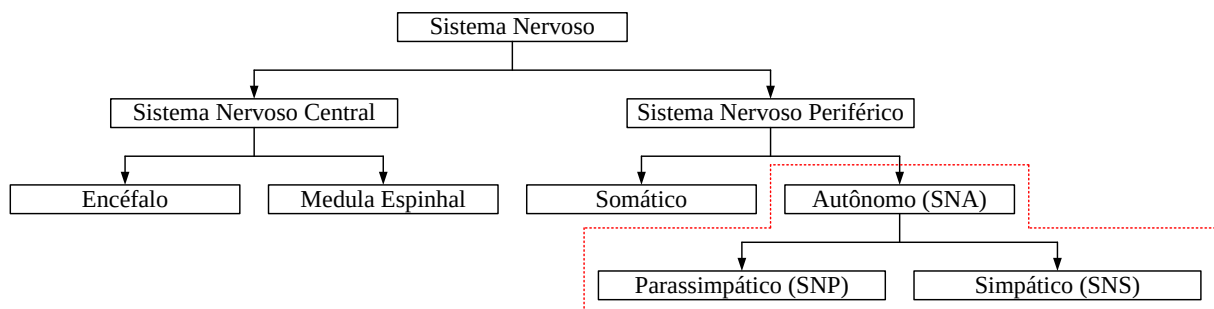
2 Fundamentação Teórica

2.1 Conceitos Básicos de Eletrocardiografia

Desde a introdução da concepção organicista da Biologia, realizada em 1925 por Ludwig von Bertalanffy [20], o organismo humano pode ser visto como um conjunto de vários sistemas acoplados, que podem ser explorados, em especial, por Modelagens Matemáticas. Dentre eles, é possível salientar o Sistema Nervoso Autônomo (SNA), responsável por controlar a vida vegetativa (involuntária), isto é, a musculatura lisa, a musculatura cardíaca e as glândulas exócrinas do sujeito, cujas funções se relacionam com os sistemas respiratório, circulatório e gastrointestinal [21]. O SNA é parte do sistema nervoso, cujas demais subdivisões são mostradas no diagrama da Figura 2.1.

O SNA é dividido em dois subsistemas: Sistema Nervoso Simpático (SNS) e Sistema Nervoso Parassimpático (SNP). O SNP é responsável pelo controle do corpo em repouso, enquanto que o SNS atua em situações de alerta como, por exemplo, susto, medo, exercícios físicos e estresse mental. A maioria dos órgãos recebem inervação de ambos (SNS e SNP), sendo cada um responsável por funções específicas que, em geral, são antagonistas. No coração, por exemplo, o regime sinusal (funcionamento normal) é controlado pelo SNP. Caso o sujeito passe por alguma situação de alerta, o aumento da atividade cardíaca é

Figura 2.1: Subdivisões do sistema nervoso de um ser humano. Em vermelho se destaca o SNA, responsável pelo controle do coração.

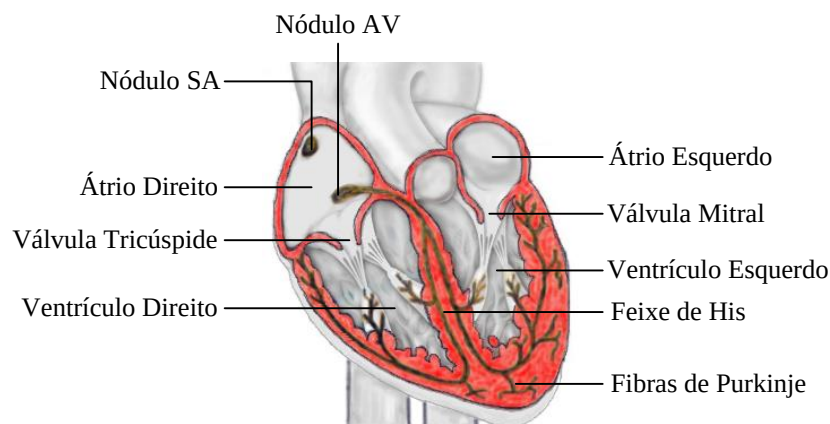


Fonte: O autor.

controlado pelo SNS [21].

O coração humano (Figura 2.2) - órgão composto por quatro compartimentos (dois átrios e dois ventrículos) ativado por estímulos elétricos que tem como função bombear o sangue para os pulmões, órgãos e tecidos - pode ser analisado como um sistema complexo, formado pelo nódulo sinoatrial (SA), nódulo atrioventricular (AV) e o complexo de His-Purkinje [22, 10]. A excitação elétrica se inicia no nódulo SA, é transmitida ao nódulo AV (conexão entre átrios e ventrículos) e desce pelo feixe de His onde é distribuída para as fibras de Purkinje que transmitem o impulso para as células miocárdicas, produzindo contração simultânea dos ventrículos.

Figura 2.2: Esquema do coração humano.



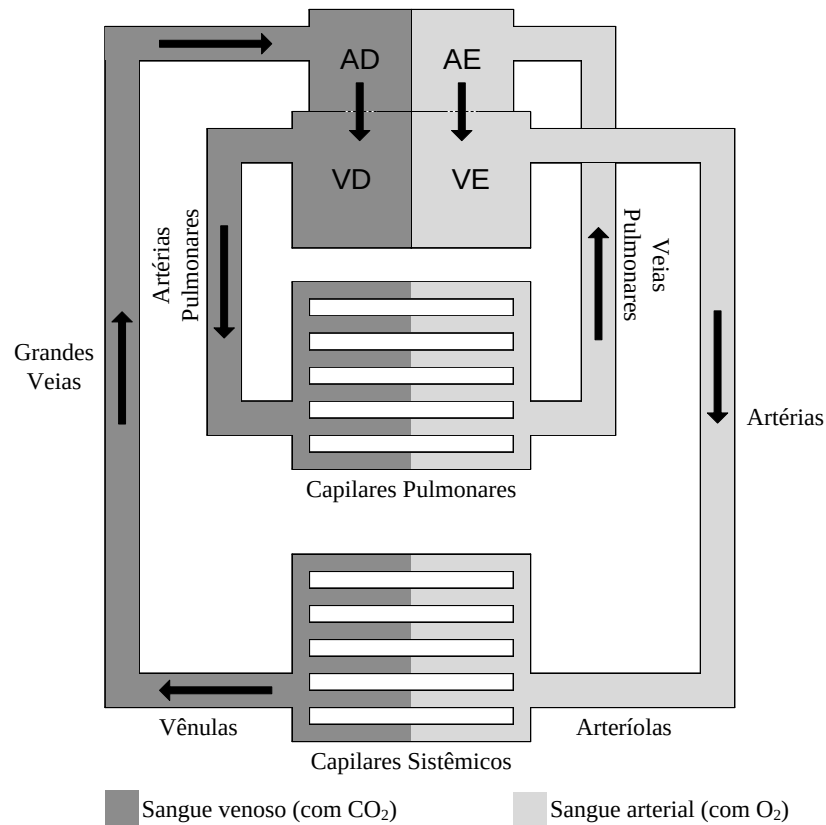
Fonte: Adaptada de Evaristo e colaboradores [16].

É importante lembrar que o fluxo sanguíneo obedece ao seguinte ciclo: vem do corpo sem oxigênio e rico em dióxido de carbono (sangue venoso) e entra no átrio direito, daí para o ventrículo direito que envia aos pulmões onde a oxigenação é realizada (sangue arterial). Em seguida, retorna dos pulmões para o átrio esquerdo, segue ao ventrículo esquerdo e finalmente, retorna aos órgãos e tecidos através das artérias (Figura 2.3).

No estado normal, o nódulo SA determina a frequência do ritmo cardíaco, aproximadamente 70 batimentos por minuto (bpm), sendo chamado de marca-passo natural. O nódulo AV trabalha como um marca-passo potencial, denominado marca-passo ectópico, que dispara (50 bpm) em caso de falha na recepção do sinal elétrico vindo do nódulo SA. Em condições normais, o nódulo AV é o responsável por gerar uma propagação com atraso que permite o enchimento dos ventrículos [23].

O primeiro modelo matemático construído para representar o coração data de 1928 com Van der Pol e Van der Mark [24], onde a possibilidade de utilização de osciladores

Figura 2.3: Esquema do fluxo sanguíneo em seres humanos.



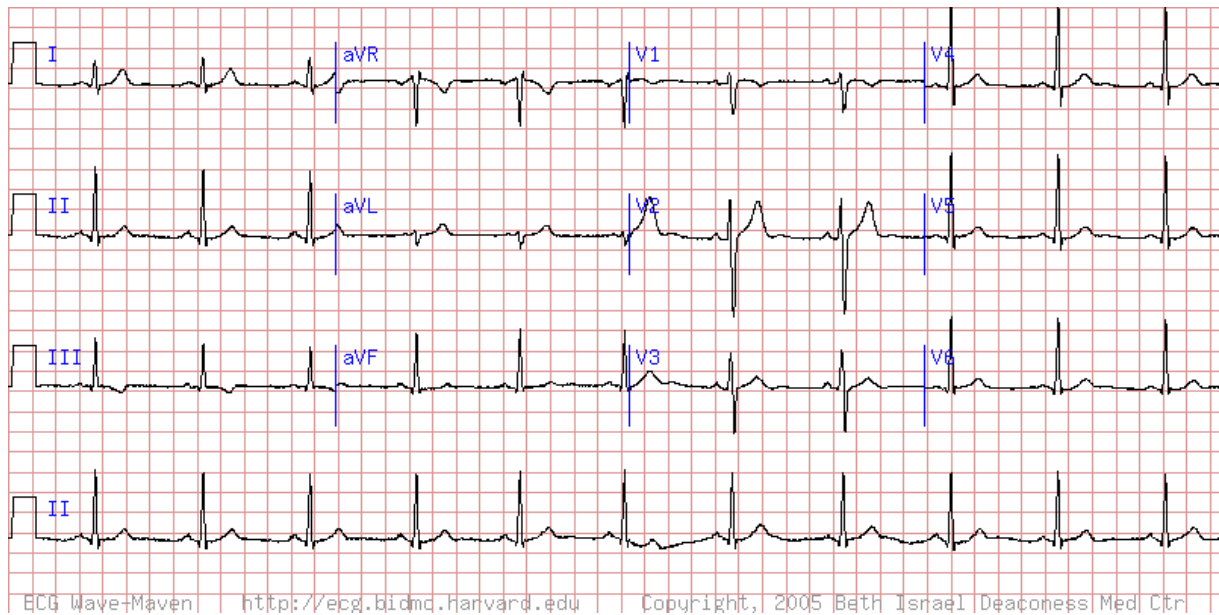
Fonte: O autor.

eletrônicos acoplados para representar os nódulos SA e AV e o complexo de His-Purkinje foi introduzida de forma colateral ao estudo dos retificadores a base de válvulas do tipo triodo [25]. Nessa linha, outros pesquisadores [22, 10, 11] propuseram alterações no intuito de tornar o modelo original de Van der Pol mais realista. A principal dificuldade em se trabalhar com esses modelos de osciladores acoplados reside na grande quantidade de parâmetros e condições iniciais a serem avaliados.

O registro mais utilizado para avaliar a atividade elétrica do coração, é o eletrocardiograma (ECG), introduzido por Willem Eithoven em 1902 [26], onde os sinais elétricos são captados via eletrodos distribuídos sobre o tórax, braços e pernas dos seres humanos submetidos ao exame. Em geral, esse registro mostra 12 formas de onda, sendo 6 chamadas de periféricas ou de plano frontal (DI, DII, DIII, aVR, aVL e aVF) e 6 conhecidas como precordiais ou de plano horizontal (V1, V2, V3, V4, V5 e V6). A Figura 2.4 apresenta um ECG de 12 canais de um adulto sadio.

Neste trabalho, o foco será dado somente à derivação DII, apresentada em gravação longa na última forma de onda da Figura 2.4. Observa-se que nessa derivação o ECG

Figura 2.4: Exame de ECG de um adulto sadio na escala de mV por ms.



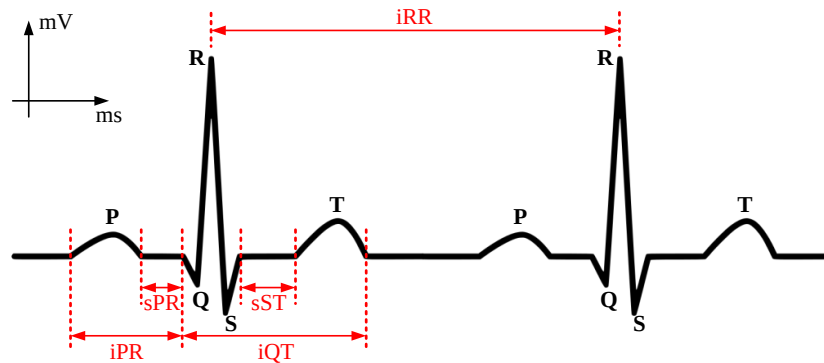
Fonte: Retirada do site http://cardiolifebarra.com.br/?page_id=68. Acesso em 02 de Novembro de 2017.

apresenta ciclos cardíacos que se repetem continuamente com comportamento *quasi* periódico, contendo três formas de onda básicas (P, QRS e T), esboçadas na Figura 2.5. A onda P representa a despolarização (contração) dos átrios. Neste momento, o sangue passa dos átrios para os ventrículos. O complexo QRS representa a contração ventricular (sístole), onde o sangue é forçado para fora dos ventrículos, sentido aos pulmões e ao resto do corpo. A onda T representa a repolarização dos ventrículos (diástole), isto é, a relaxação do coração. Neste momento o sangue venoso (não oxigenado) entra no átrio direito, enquanto o sangue oxigenado (arterial) oriundo dos pulmões acessa o átrio esquerdo, ficando o coração preparado para o próximo ciclo. Para a avaliação da atividade cardíaca, os médicos cardiologistas utilizam os seguintes indicadores [27]: frequência cardíaca; eixo cardíaco; morfologia, amplitude e duração da onda P; intervalo PR (iPR); segmento PR (sPR); morfologia, amplitude e duração do complexo QRS; segmento ST (sST); morfologia e amplitude da onda T; intervalo QT (iQT); intervalo RR (iRR). Todos esses índices são mostrados na Figura 2.5.

De acordo com a Sociedade Brasileira de Cardiologia [28], um laudo de coração saudável deve satisfazer as seguintes condições:

1. **Frequência Cardíaca:** deve estar entre 50 e 100 batimentos por minuto, avaliada pelo intervalo RR. Quando a frequência está dentro do intervalo, dizemos que o

Figura 2.5: Esboço de dois ciclos da ECG normal.



Fonte: O autor.

ritmo é sinusal.

2. **Eixo Cardíaco:** Normal quando a onda P e o complexo QRS são predominantemente positivos nas derivações DI e aVF. O eixo cardíaco reflete como o coração está posicionado dentro do tórax.
3. **Onda P:** Deve ser simétrica, possuir amplitude máxima de 0,25mV e duração entre 60 e 110ms. Deve ser positiva em DI, DII e aVF e negativa em aVR. Nas demais derivações pode ser positiva ou negativa.
4. **Intervalo PR (iPR):** Deve estar entre 120ms e 200ms, dependendo da idade do paciente.
5. **Segmento PR (sPR):** Não deve ser verificado supra ou infradesnívelamento significativo.
6. **Complexo QRS:** Deve possuir duração entre 60ms e 120ms. A amplitude da onda S deve ser maior que a amplitude da onda R em V1 e V2 e menor em V5 e V6. Em V3 ou V4 ocorre a transição entre as amplitudes das ondas S e R. A amplitude absoluta do complexo QRS deve estar entre 0,5mV e 2mV nas derivações do plano frontal (DI, DII, DIII, aVR, aVL e aVF) e entre 1mV e 3mV nas derivações precordiais (V1, V2, V3, V4, V5 e V6). Além disso, a onda R deve possuir amplitude máxima em V5.
7. **Segmento ST (sST):** Não deve ser verificado supra ou infradesnívelamento significativo. Deve possuir a mesma linha de base do sPR.
8. **Onda T:** Deve ser assimétrica em relação a P, com subida mais lenta que a descida, possuir amplitude entre 10% e 30% da amplitude do complexo QRS. Deve ser

positiva em DI, DII, V3, V4, V5 e V6 e negativa em aVR. Nas demais derivações (DIII, aVL, aVF, V1 e V2) pode ser positiva ou negativa.

9. **Intervalo QT (iQT):** Deve possuir duração entre 300ms e 460ms. Na prática, calcula-se o intervalo QT corrigido (iQTc), por

$$iQTc = \frac{iQT}{\sqrt{iRR}}, \quad (2.1)$$

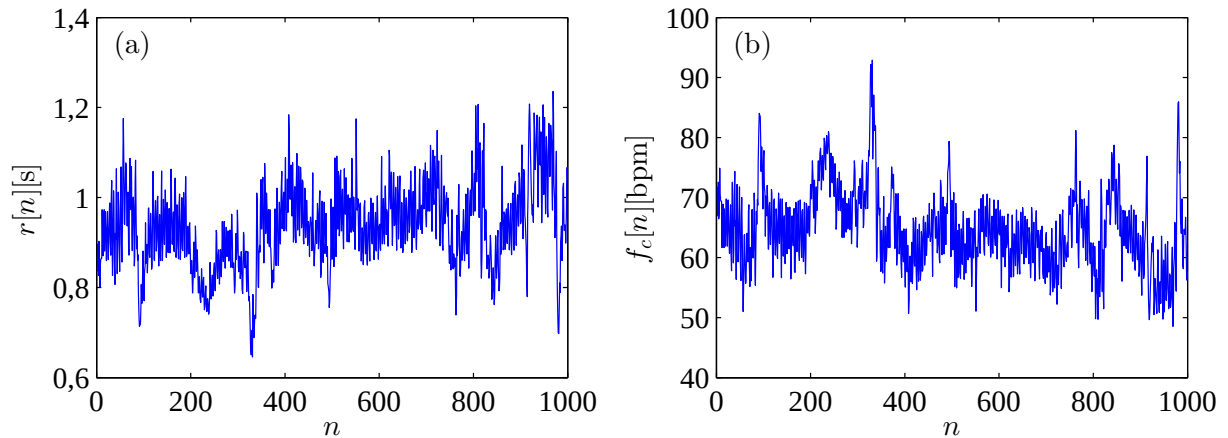
conhecida como fórmula de Bazget [29]. Essa modificação se faz necessária devido ao iQT ser sensível à frequência cardíaca do paciente. Em condições normais o iQTc deve ser no máximo 450ms para homens e 470ms para mulheres.

A frequência cardíaca é obtida pela avaliação dos iRR consecutivos, conforme mostra a Figura 2.5. O sinal de tempo discreto (série temporal) obtido por esses intervalos (em segundos), denotado por $r[n]$, com $0 \leq n \leq N - 1$, é conhecido como tacograma RR. A frequência cardíaca instantânea $f_c[n]$ é obtida por

$$f_c[n] = \frac{60}{r[n]}, \quad (2.2)$$

em bpm. As Figuras 2.6(a) e 2.6(b) apresentam, respectivamente, o tacograma RR e a frequência cardíaca instantânea para um adulto saudável com batimento médio de, aproximadamente, 65bpm. Esses dados, assim como todos os demais dados experimentais utilizados neste trabalho foram coletados na Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto pelo grupo do Prof. Dr. Moacyr Fernandes de Godoy.

Figura 2.6: Dados experimentais de um adulto saudável: (a) tacograma RR ($r[n]$); (b) frequência cardíaca instantânea ($f_c[n]$) ($N = 1000$ batimentos).



Fonte: O autor.

Neste trabalho o foco está na análise dos tacogramas RR e não precisamente na morfo-

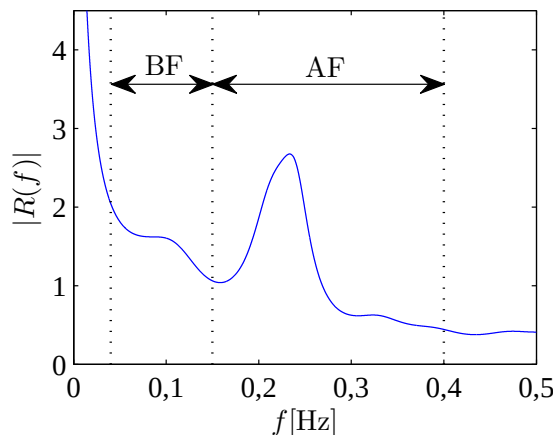
logia do eletrocardiograma. Na literatura, o estudo dos tacogramas RR compõe a chamada análise da Variabilidade da Frequência Cardíaca (VFC). Esta análise é importante para se verificar o equilíbrio entre os sistemas simpático e parassimpático.

A partir da década de 1980, surgiram alguns estudos [30, 31] indicando que o SNS desempenha um papel importante na origem das arritmias cardíacas, incluindo arritmias ventriculares perigosas como a taquicardia ventricular e a fibrilação ventricular. Por outro lado, o SNP apresenta um papel protetor e auxilia diminuindo o risco de arritmias ventriculares malignas.

Nas referências [13, 32] são apresentadas várias técnicas para análise do tacograma RR, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Além disso, em [13] os autores descrevem as relações entre a VFC e pacientes pertencentes a alguns grupos de risco como consumo de álcool e cigarro, uso de medicamentos, diabetes, entre outros. Isso mostra a importância da análise dos tacogramas RR no diagnóstico de algumas patologias.

No domínio da frequência, de acordo com as referências [13, 32], o módulo do espectro do tacograma RR possui duas bandas principais: Baixa Frequência (BF), intervalo $(0,04 \leq f \leq 0,15)\text{Hz}$; Alta Frequência (AF), intervalo $(0,15 \leq f \leq 0,4)\text{Hz}$. As atividades dos SNP e SNS são associadas, respectivamente, às bandas AF e BF. Como durante o exame o paciente permanece acordado em posição de repouso e sem nenhum tipo de estímulo, espera-se somente a atuação do SNP. Desta forma, um paciente sadio deve possuir baixa atividade em BF e alta em AF. A Figura 2.7 mostra o módulo do espectro do tacograma apresentado anteriormente na Figura 2.6(a).

Figura 2.7: Espectro do tacograma RR apresentado na Figura 2.6(a) para um adulto saudável. Em pontilhado se destacam as bandas BF e AF.



Fonte: O autor.

O pico presente na banda de AF está relacionado com a chamada Arritmia Sinusal

Respiratória (ASR). Esse tipo de arritmia é provocada pela respiração da pessoa, sendo caracterizada pela presença de oscilações no tacograma RR, considerando a atividade parassimpática. É síncrona com a frequência de respiração que normalmente é igual a $f_{ASR} = 0,25\text{Hz}$, isto é, 15 movimentos respiratórios por minuto (mrm). Apesar de ser uma arritmia, ela não apresenta risco ou necessidade de tratamento para o indivíduo [33, 14]. O segundo pico, encontrado em aproximadamente 0,1Hz ainda é muito debatido na literatura [34] e está relacionado com as ondas de Mayer, associadas a regulação da pressão arterial [35, 36].

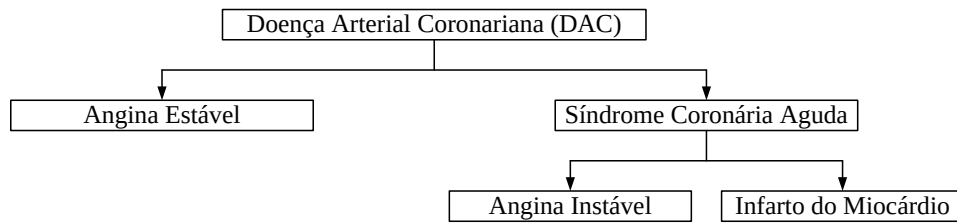
Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático com um processo AR para estudo do tacograma RR em sujeitos saudáveis e com Doença Arterial Coronariana (DAC). Esse tipo de doença é caracterizada pela criação de placas de gordura nas paredes internas das artérias (aterosclerose) coronárias, responsáveis por irrigar as paredes externas do coração (miocárdio), diminuindo o fluxo sanguíneo. O sintoma mais comum é dor ou desconforto no peito que se pode deslocar para o ombro, braço, costas, pescoço ou maxilar.

Em geral, as DAC podem ser classificadas em: angina estável, angina instável e infarto do miocárdio, tal que:

1. **Angina Estável:** O sintoma clássico é dor no peito quando se faz algum tipo de esforço físico. Ao cessar o esforço o sintoma deixa de incomodar;
2. **Angina Instável:** Dor no peito em situações imprevisíveis, mesmo quando não há esforço físico. Isso acontece quando há uma ruptura em uma placa de gordura de forma que ela comece a oscilar dentro da artéria, bloqueando de forma imprevisível a passagem do sangue.
3. **Infarto do Miocárdio:** Ocorre quando uma placa de gordura cresce e fecha completamente a artéria ou, se solta e bloqueia ramificações subsequentes da artéria, fazendo com que uma região do miocárdio deixe de receber oxigênio. Trata-se de uma situação crítica, onde o sujeito precisa ser prontamente socorrido.

A Angina Instável e o Infarto do Miocárdio compõe a chamada Síndrome Coronária Aguda, conforme mostra a Figura 2.8 . O infarto não necessita, em geral, ser consequência de uma angina instável. O chamado Infarto Agudo do Miocárdio (IAM), pode ocorrer a qualquer momento em que uma placa de gordura se soltar e bloquear a circulação de sangue arterial em alguma região do miocárdio. Em suma, para não vir a sofrer com problemas de aterosclerose, o ideal é sempre manter os índices de colesterol dentro das faixas recomendadas.

Figura 2.8: Classificação da Doença Arterial Coronariana (DAC).



Fonte: O autor.

As DACs não alteram significativamente a morfologia do ECG, isto é, as ondas P, QRS e T. A literatura aponta somente que na vigência dos sintomas, aparece um infra-desnívelamento do segmento ST e em alguns casos uma isquemia de onda T e ondas Q patológicas [37]. São patologias crônicas silenciosas, visto que os primeiros sintomas são notados quando se tem entre 50% e 70% das artérias bloqueadas [37] e, além disso, não se caracterizam como patologias específicas do coração e sim do seu entorno, prejudicando o funcionamento do órgão. Por outro lado, quando se olha para a VFC nos casos de DAC, se observa uma diminuição significativa na variabilidade das séries temporais. Isso aponta para uma situação interessante: as DACs não influenciam significativamente na morfologia do ECG em repouso, mas diminuem a variabilidade dos tacogramas RR mesmo fora da vigência dos sintomas.

Neste trabalho é defendida a tese de que o tacograma RR segue um processo estocástico autorregressivo (AR), tanto em situações saudáveis quanto na presença de DAC. Uma realização de um processo AR é inserida no modelo, previamente à integração das equações diferenciais, para simular o ECG. Isso é uma inovação na área, visto que contrapõe os métodos clássicos de aproximar dados reais ou dados simulados após a integração, via técnicas de regressão. Para validar o modelo, são feitos estudos comparativos entre dados experimentais e o modelo proposto utilizando a Transformada Wavelet Discreta (TWD), os gráficos de Poincaré e a Análise de Flutuação sem Tendência (AFsT).

2.2 Processamento Digital de Sinais

Para compreender os conceitos apresentados neste trabalho, são necessários algumas revisões e adaptações de notação, principalmente pelo fato que estamos considerando sinais de tempo discreto e de tempo contínuo. Em primeiro lugar, são considerados sinais de tempo contínuo e de tempo discreto com energia finita, isto é, pertencentes aos espaços $L_2(\mathbb{R})$ e $l_2(\mathbb{Z})$, respectivamente. Esses espaços são apresentados de forma sucinta

no Apêndice A. Aqui, é utilizada a notação clássica do Processamento Digital de Sinais [38, 39]. Dessa forma, o par de Transformadas de Fourier de Tempo Contínuo (TFTC) de um sinal real com energia finita $x(t)$ é dado por

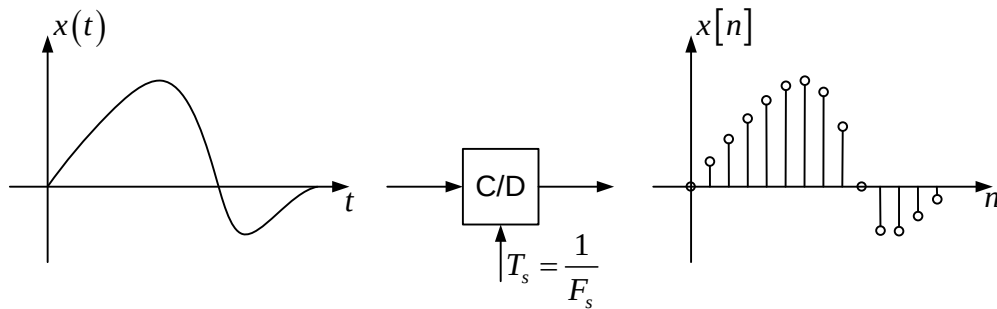
$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi Ft} dt \quad \text{e} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F) e^{i2\pi Ft} dF, \quad (2.3)$$

sendo F a frequência cíclica (em ciclos por segundo ou hertz).

O sinal de tempo discreto obtido retirando amostras do sinal analógico $x(t)$ a cada T_s segundos é $x[n] = x(nT_s)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Para seguir a literatura clássica e evitar confusões, a dependência temporal dos sinais de tempo contínuo é representada com parênteses $x(\cdot)$, enquanto que nos sinais de tempo discreto são utilizados os colchetes $x[\cdot]$. A Figura 2.9 ilustra esse processo.

O intervalo de tempo T_s entre as amostras é chamado período de amostragem e seu recíproco $1/T_s = F_s$ é chamada taxa de amostragem (amostras por segundo) ou frequência de amostragem (hertz). Para que não ocorra o fenômeno de *aliasing* [38, 39] e para que a reconstrução do sinal analógico possa ser realizada de forma perfeita, é necessário que o critério de Nyquist [38, 39] seja obedecido, isto é, $F_s > 2F_{max}$, sendo F_{max} a máxima frequência presente no sinal analógico. Esse critério é largamente utilizado em sistemas reais. Os sinais de áudio, por exemplo, possuem banda entre 20Hz e 20kHz. Isso explica o motivo dos equipamentos de áudio serem dimensionados para trabalharem com, no mínimo, $F_s = 44,1\text{kHz} \geq 2 \cdot 20\text{kHz} = 2F_{max}$. Os sinais de eletrocardiograma por sua vez possuem uma frequência máxima $F_{max} = 100\text{Hz}$ [39] e os aparelhos eletrocardiógrafos utilizados nos consultórios médicos são fabricados para trabalharem com taxa de amostragem entre $(250 \leq F_s \leq 500)\text{Hz}$ [40].

Figura 2.9: Conversão de sinais de tempo contínuo ($x(t)$) para sinais de tempo discreto ($x[n]$).



Fonte: O autor.

Para os sinais de tempo discreto, é utilizado o par de Transformadas de Fourier de

Tempo Discreto (TFTD), isto é,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-i2\pi f n} \quad \text{e} \quad x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{i2\pi f n} df, \quad (2.4)$$

sendo f a frequência cíclica (em ciclos por amostra ou hertz).

A TFTD é contínua, periódica com $-1/2\text{Hz} \leq f \leq 1/2\text{Hz}$, possui módulo par e fase ímpar para sinais reais [38, 39]. O fato do módulo ser uma função par permite que a representação espectral seja feita somente no intervalo $0 \leq f \leq 1/2\text{Hz}$. No mesmo contexto, o par de Transformadas z de um sinal de energia finita $x[n]$ é definido como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad \text{e} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z) z^{n-1} dz, \quad (2.5)$$

onde z é uma variável complexa, chamada frequência complexa, e o caminho de integração é a circunferência unitária ($|z| = 1$) no plano z . É importante notar que a TFTD é a transformada z calculada sobre a circunferência unitária, isto é, $X(f) = X(z)|_{z=e^{i2\pi f}}$. A transformada z é equivalente à transformada de Laplace em sistemas de tempo contínuo, sendo ambas utilizadas para descrever sistemas lineares envolvendo equações de diferenças (tempo discreto) ou equações diferenciais lineares (tempo contínuo).

Um sistema Linear Invariante no Tempo (LIT) é uma classe de sistemas onde a saída $y[n]$ é relacionada com a entrada $x[n]$ pela somatória de convolução,

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l] x[n-l] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] h[n-l] = x[n] * h[n], \quad (2.6)$$

onde $h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema, isto é, a resposta quando o impulso unitário

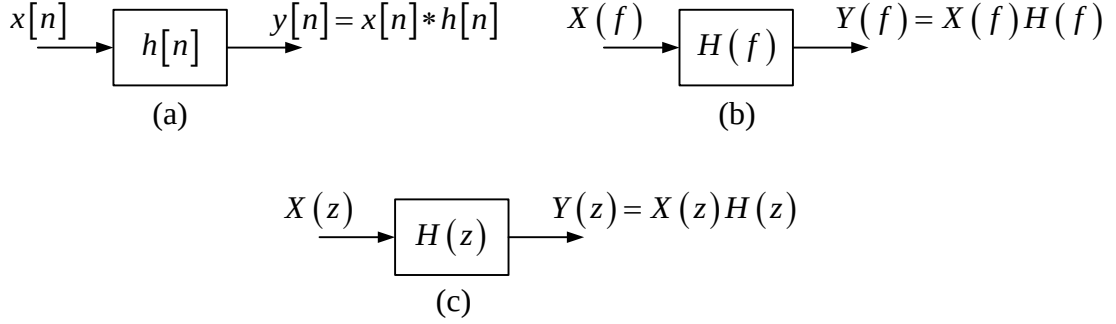
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

é aplicado na entrada (Figura 2.10(a)).

No domínio da frequência e no domínio z a convolução se torna uma multiplicação, isto é, $Y(f) = H(f) X(f)$ e $Y(z) = H(z) X(z)$, conforme mostram, respectivamente, as Figuras 2.10(b) e 2.10(c). As funções $H(f)$ e $H(z)$ são conhecidas, respectivamente, como resposta em frequência e função de transferência do sistema.

Se $\{x[n] : n = 0, \dots, N-1\}$ e $\{h[n] : n = 0, \dots, L-1\}$, isto é, $x[n]$ e $h[n]$ possuem

Figura 2.10: Representação de um sistema LIT no: (a) domínio do tempo, (b) domínio da frequência e (c) domínio z .



Fonte: O autor.

comprimentos finitos N e L se recomenda a utilização da convolução circular [38],

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}[l] x[(n-l)_N] = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}[(n-l)_N] x[l], \quad (2.8)$$

onde $(n-l)_N = (n-l) \bmod N$ e $\tilde{h}[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[n + lN]$, com $n = 0, \dots, N-1$. A utilização da convolução circular elimina os efeitos de borda dos sinais e faz com que a energia de sinais de comprimento finito seja preservada [38].

Geralmente, um sistema LIT discreto é causal ($h[n] = 0$ para $n < 0$) e sua relação entrada/saída é descrita por uma equação de diferenças de grau N com coeficientes constantes [38] como,

$$\sum_{l=0}^N a_l y[n-l] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]. \quad (2.9)$$

Nesse caso, a função de transferência do sistema é uma função racional,

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (2.10)$$

onde $A(z) = \sum_{l=0}^N a_l z^{-l}$ e $B(z) = \sum_{l=0}^M b_l z^{-l}$ são polinômios cujas raízes são chamadas, respectivamente, de pólos e zeros do sistema. Um sistema LIT discreto é dito estável (no sentido de que entradas limitadas produzem saídas limitadas) quando seus pólos estão dentro da circunferência unitária no plano z .

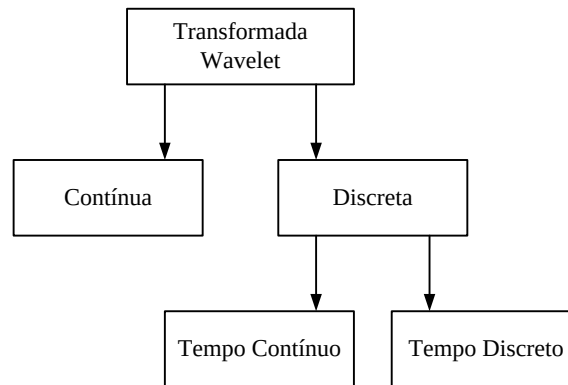
Na sequência é apresentada a teoria básica das transformadas Wavelet assim como da decomposição espectral em multibandas, que se caracteriza como uma ferramenta poderosa na análise de sinais tanto determinísticos quanto aleatórios.

2.3 Transformada Wavelet

As wavelets são funções bem localizadas no tempo utilizadas para analisar outras funções em posição e escala (frequência), introduzidas de forma pioneira em meados dos anos 80 por Alex Grossmann e Jean Morlet [41]. Formam a base da Transformada Wavelet que, por sua vez, expande funções em diferentes componentes de frequência e então, estuda cada componente com a resolução correspondente com sua escala [42], como uma espécie de microscópio. Os parâmetros de uma wavelet são o tempo, a dilatação e a translação.

Existem dois tipos principais de Transformadas Wavelet (Figura 2.11): contínua (TWC) e discreta (TWD). A TWC é apropriada para trabalhar com funções definidas em todo o eixo real. Já a TWD pode ser dividida em duas classes: de tempo contínuo e de tempo discreto. Na TWD de tempo contínuo são discretizados somente os parâmetros de dilatação e translação, permanecendo o tempo contínuo. É uma ferramenta apropriada para se trabalhar com funções contínuas, de forma menos reduntante que na TWC. Na TWD de tempo discreto, todos os parâmetros (dilatação, translação e tempo) são discretizados. É apropriada para se trabalhar com séries temporais e sinais de tempo discreto [38].

Figura 2.11: Classificação da Análise Wavelet.



Fonte: O autor.

Uma wavelet, em geral é denotada por $\psi(t)$, e satisfaz as seguintes propriedades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (2.11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(t) dt = 1, \quad (2.12)$$

e

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(F)|^2}{F} dF < \infty. \quad (2.13)$$

A Equação (2.13) é conhecida como condição de admissibilidade, onde $\Psi(F)$ representa a Transformada de Fourier da wavelet $\psi(t)$, calculada pela Equação (2.3). A função $\psi(t)$ geralmente é referida como wavelet-mãe. Uma família de funções wavelet pode ser criada por meio da inserção de coeficientes de dilatação (a) e translação (b) da wavelet-mãe, isto é,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.14)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. A normalização pelo fator $1/\sqrt{a}$ é inserida para preservar a relação $\|\psi_{a,b}\| = \|\psi\| = 1$.

A ideia central das wavelets é aproximar funções de uma forma diferente da aproximação global feita pela Análise de Fourier. Com isso, representar as funções do espaço $L_2(\mathbb{R})$ por meio de combinações lineares no caso discreto ou como uma integral no caso contínuo, com funções de uma família de wavelets sem qualquer informação adicional é uma tarefa para as Transformadas Wavelet.

Dentre várias wavelets presentes na literatura temos, por exemplo,

1. Wavelet de Haar (Figura 2.12(a)):

$$\psi(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}u(t+1) + \frac{2}{\sqrt{2}}u(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}u(t-1), \quad (2.15)$$

com $u(t)$ representado a função degrau unitário [39].

2. Wavelet Chapéu Mexicano (Figura 2.12(b)):

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (2.16)$$

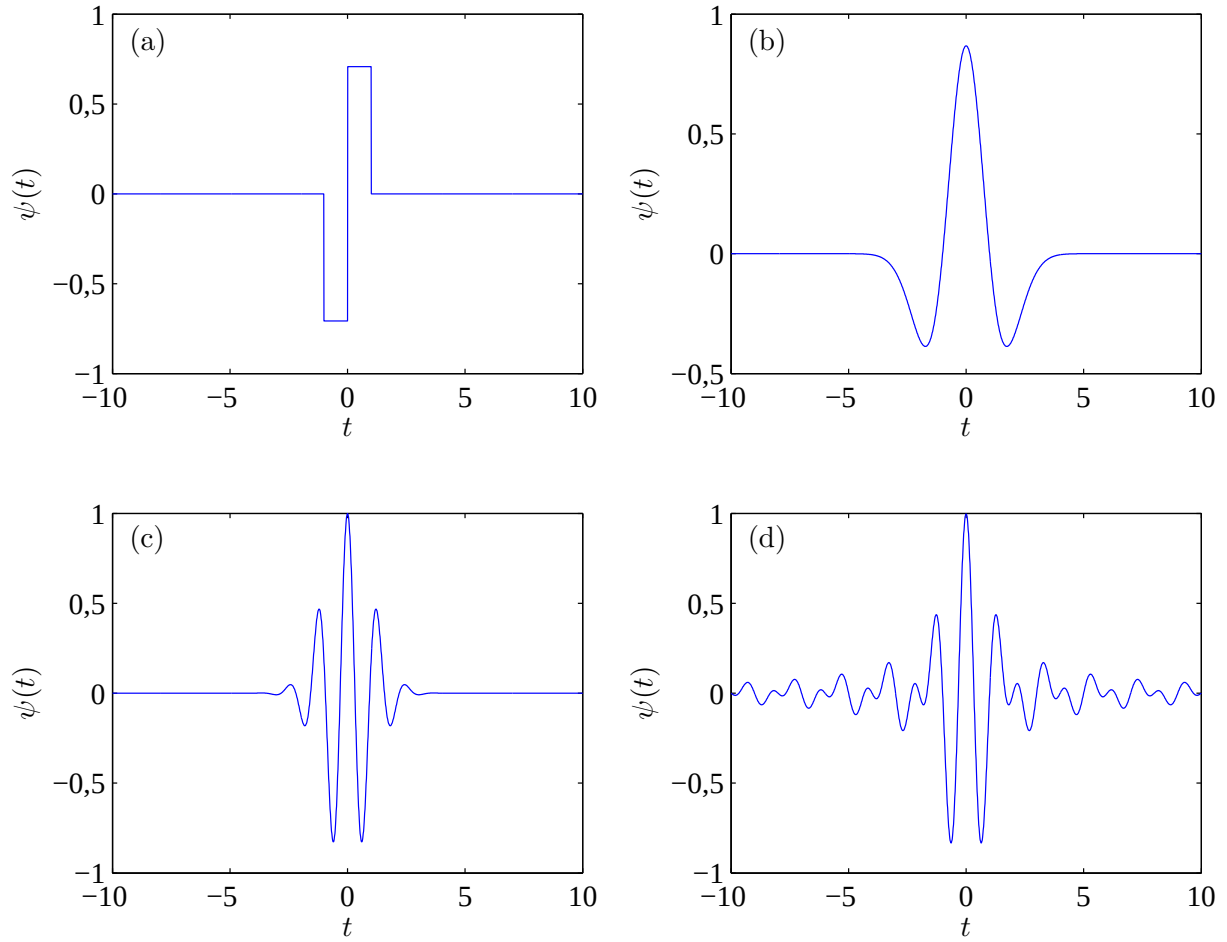
3. Wavelet de Morlet (Figura 2.12(c)):

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t). \quad (2.17)$$

4. Wavelet de Shannon (Figura 2.12(d)):

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right). \quad (2.18)$$

Figura 2.12: Algumas wavelets: (a) Haar, (b) Chapéu Mexicano, (c) Morlet e (d) Shannon.



Fonte: O autor.

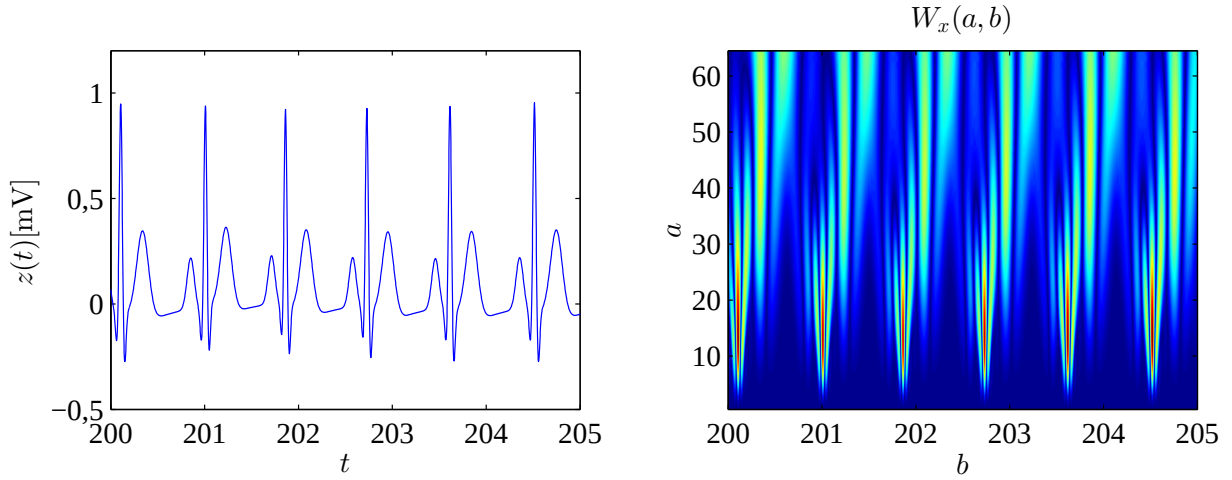
2.3.1 Transformada Wavelet Contínua

Na TWC os parâmetros de dilatação a e translação b variam continuamente em seus domínios. A ideia da TWC é calcular a projeção de um sinal $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ sobre $\psi_{a,b}(t)$, dados os parâmetros a e b , isto é,

$$W_x(a, b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt. \quad (2.19)$$

Variando a , é possível construir uma figura de como a wavelet aproxima $x(t)$ de acordo com as dilatações. Variando b é possível analisar a natureza do sinal à variações temporais. A coleção de coeficientes $\{W_x(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0\}$ é chamada TWC de $x(t)$. A Figura 2.13 mostra um trecho de um ECG simulado e sua respectiva TWC para $0 \leq a \leq 64$ e $200 \leq b \leq 205$, utilizando a wavelet chapéu mexicano, dada pela Equação (2.16).

Figura 2.13: Trecho de em ECG simulado e sua respectiva TWC utilizando a wavelet chapéu mexicano.



Fonte: O autor.

A TWC preserva toda a informação de $x(t)$ e, desta forma, é possível reconstruir a função a partir de sua transformada inversa, isto é,

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2}. \quad (2.20)$$

Com isso, a função $x(t)$ e sua TWC são duas representações da mesma entidade em domínios diferentes, isto é, a TWC apresenta $x(t)$ em uma nova maneira, que permite fazer análises com um novo olhar sobre a função.

2.3.2 Transformada Wavelet Discreta

A TWC é muito rica e, ao mesmo tempo, redundante em informações, visto que a análise é feita sobre dilatações e translações que variam continuamente. Para eliminar essa redundância, é possível reter somente as principais dilatações e translações da TWC, como uma espécie de amostragem.

Desta forma, para se obter a TWD, se faz uma discretização sobre os coeficientes a e b , da seguinte forma

$$a = 2^{-m}, \quad b = n2^{-m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.21)$$

tal que, substituindo na Equação (2.14)

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n). \quad (2.22)$$

Historicamente, essa discretização permitiu que conceitos importantes fossem construídos como, por exemplo, a possibilidade de reconstrução perfeita do sinal, a Análise em Multiresolução feita por S. G. Mallat [43] e a construção de famílias de wavelets ortonormais de suporte compacto que formam bases para o espaço $L_2(\mathbb{R})$ realizada por Ingrid Daubechies [42].

2.3.2.1 Análise em Multiresolução

Em 1989, S. G. Mallat [44] estabeleceu a conexão da teoria das wavelets com o processamento digital de sinais, particularmente com os bancos de filtros espelhados em quadratura e os algoritmos piramidais.

Uma análise em multiresolução (AMR) é uma sequência de subespaços fechados V_m , $m \in \mathbb{Z}$, em $L_2(\mathbb{R})$ de tal modo que eles se encontram na hierarquia de contenção

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots. \quad (2.23)$$

Esses espaços tem uma intersecção trivial e uma união que é densa em $L_2(\mathbb{R})$, isto é,

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\} \quad \text{e} \quad \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L_2(\mathbb{R}). \quad (2.24)$$

Além disso, a hierarquia (2.23) é construída de modo que: (i) os espaços V_m sejam auto-similares, isto é,

$$x(2^m t) \in V_m \quad \text{se, e somente se,} \quad x(t) \in V_0, \quad (2.25)$$

e (ii) existe uma função escala $\phi \in V_0$ cujas translações inteiras geram o espaço V_0 , isto é,

$$V_0 = \left\{ x \in L_2(\mathbb{R}) \left| x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v[n] \phi(t - n) \right. \right\}, \quad (2.26)$$

e para o qual o conjunto $\{\phi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortonormal, sendo $v[n]$ os coeficientes da projeção de $x(t)$ sobre as funções da base. Esses coeficientes são chamados coeficientes de escala.

Com isso, pela propriedade de auto-similaridade (2.25), a família de funções

$$\{\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \phi(2^m t - n), n \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.27)$$

é uma base ortonormal do espaço V_m . Além disso, sempre que uma sequência de subes-

paços satisfaz as propriedades da MRA, existe um espaço diferença

$$V_{m+1} = W_m \oplus V_m, \quad (2.28)$$

cuja família

$$\{\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n), n \in \mathbb{Z}\}, \quad (2.29)$$

é uma base ortonormal. Dessa forma, chamando de forma recursiva a Equação (2.28) e considerando as condições (2.24), é possível escrever que

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} W_m, \quad (2.30)$$

tal que qualquer função $x \in L_2(\mathbb{R})$ pode ser representada por

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_m[n] \psi_{m,n}(t), \quad (2.31)$$

com $w_m[n] = \langle x, \psi_{m,n} \rangle$. Os coeficientes de projeção $w_m[n]$ são chamados de coeficientes wavelet.

Uma forma alternativa de escrever a representação da função $x(t)$, com base nas propriedades dos espaços da AMR é considerar que

$$V_{M_0} = \bigoplus_{m=-\infty}^{M_0-1} W_m, \quad (2.32)$$

tal que, o espaço $L_2(\mathbb{R})$ pode ser reescrito como

$$L_2(\mathbb{R}) = V_{M_0} \oplus \bigoplus_{m=M_0}^{+\infty} W_m, \quad (2.33)$$

e, desta forma,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_{M_0}[n] \phi_{M_0,n}(t) + \sum_{m=M_0}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_m[n] \psi_{m,n}(t), \quad (2.34)$$

com $v_{M_0}[n] = \langle x, \phi_{M_0,n} \rangle$ e $w_m[n] = \langle x, \psi_{m,n} \rangle$.

Essa representação permite que seja feito um truncamento em $m = M \geq M_0$, de tal forma que seja possível realizar uma aproximação para qualquer função $x \in L_2(\mathbb{R})$. Nesse sentido, é possível escrever o espaço $L_2(\mathbb{R})$ como,

$$L_2(\mathbb{R}) = V_{M_0} \oplus \bigoplus_{m=M_0}^M W_m \oplus \bigoplus_{m=M+1}^{+\infty} W_m = V_{M+1} \oplus \bigoplus_{m=M+1}^{+\infty} W_m, \quad (2.35)$$

com

$$V_{M+1} = V_{M_0} \oplus \bigoplus_{m=M_0}^M W_m, \quad (2.36)$$

tal que, uma aproximação de uma função $x \in L_2(\mathbb{R})$ sobre o espaço V_{M+1} é obtida por

$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_{M_0}[n] \phi_{M_0,n}(t) + \sum_{m=M_0}^M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_m[n] \psi_{m,n}(t) = s_{M_0}(t) + \sum_{m=M_0}^M d_m(t), \quad (2.37)$$

onde,

$$s_{M_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_{M_0}[n] \phi_{M_0,n}(t) \quad \text{e} \quad d_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_m[n] \psi_{m,n}(t). \quad (2.38)$$

As funções $s_{M_0}(t)$ e $d_m(t)$ são conhecidas, respectivamente, como função de aproximação e funções de detalhes. A função de aproximação está associada com filtros passa-baixas, ao passo que as funções de detalhes são obtidas por meio de filtros passa-altas.

A Figura 2.14(a) mostra um trecho de sinal de ECG simulado contendo $N = 1024$ amostras. Neste caso, $M = \log_2(N) = 10$ e o sinal de ECG pertence ao espaço V_{11} . Nas Figuras 2.14(b), 2.14(c), 2.14(d), 2.14(e) e 2.14(f) são mostradas, respectivamente, as funções de detalhes $d_{10}(t)$, $d_9(t)$, $d_8(t)$ e $d_7(t)$, além da função de aproximação $s_7(t)$. Neste exemplo, se considera uma decomposição em quatro níveis utilizando a wavelet de Daubechies de ordem 2.

2.3.2.2 Algoritmo Piramidal

Na prática, a TWD é implementada pelo algoritmo piramidal [44], que para seu funcionamento necessita de três informações: o sinal de entrada, os coeficientes do filtro wavelet $h[n]$ e os coeficientes do filtro escala $g[n]$. Para se encontrar os coeficientes dos filtros é necessário escolher *a priori* a família de wavelets desejada na análise. Como foi visto na seção anterior, dado um sinal $x \in L_2(\mathbb{R})$, os coeficientes de escala $v_m[n]$ e os coeficientes wavelet $w_m[n]$ são determinados, respectivamente, por

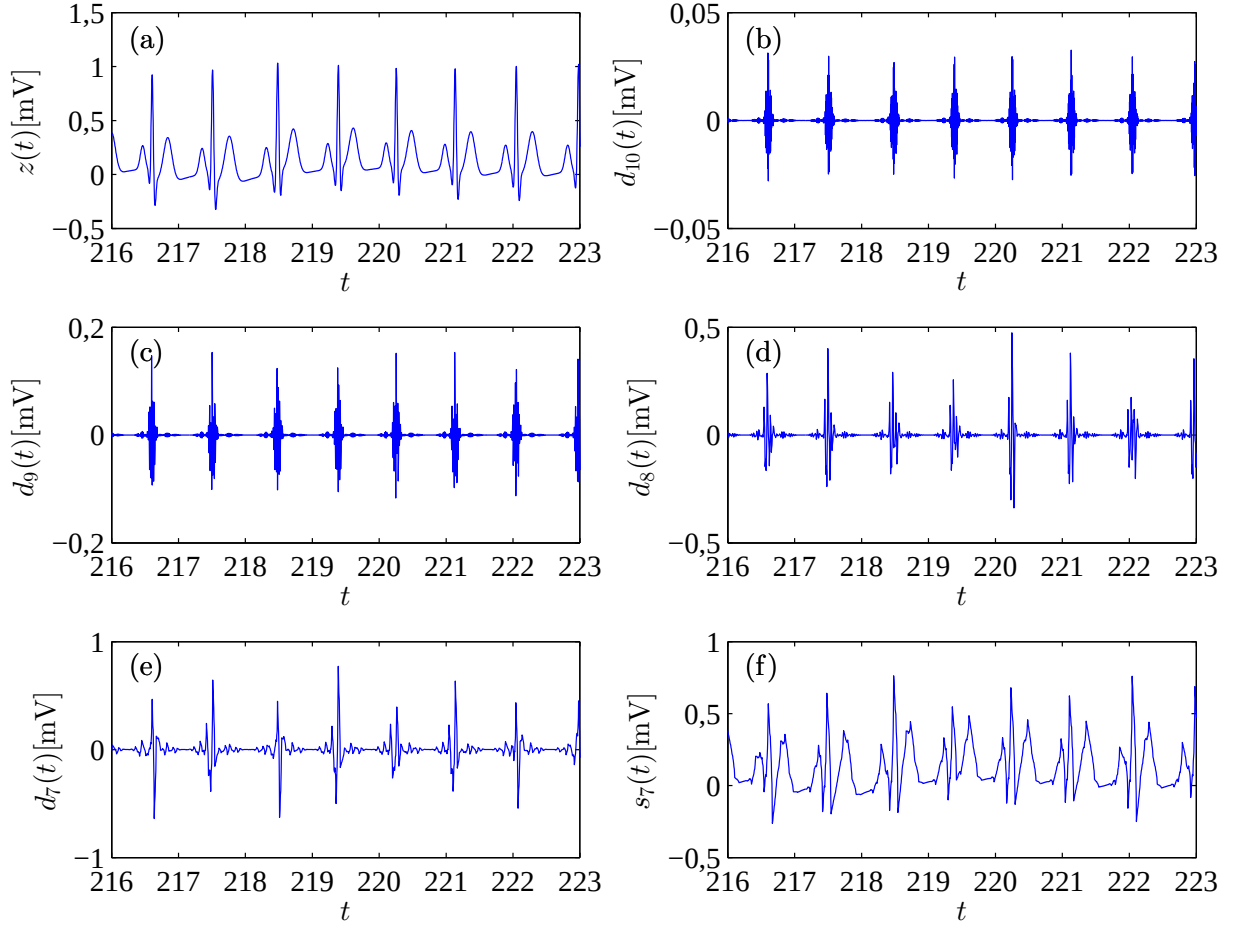
$$v_m[n] = \langle x, \phi_{m,n} \rangle = 2^{m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \phi(2^m t - n) dt \quad (2.39)$$

e

$$w_m[n] = \langle x, \psi_{m,n} \rangle = 2^{m/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi(2^m t - n) dt. \quad (2.40)$$

Como $V_0 \subset V_1$, qualquer $\phi \in V_0$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de V_1 . Além disso, como $V_1 = W_0 \oplus V_0$, $W_0 \subset V_1$ e qualquer $\psi \in W_0$ também

Figura 2.14: Decomposição em quatro níveis pela TWD, utilizando a wavelet de Daubechies de ordem 2.



Fonte: O autor.

pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de V_1 . Isto é,

$$\phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g[n] \sqrt{2} \phi(2t - n) \quad \text{e} \quad \psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] \sqrt{2} \phi(2t - n). \quad (2.41)$$

Substituindo as Equações (2.41) nas Equações (2.39) e (2.40) obtém-se,

$$\begin{aligned} v_m[n] &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} g[l] 2^{(m+1)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(2^{m+1}t - 2n - l) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g[k - 2n] \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{(m+1)/2} \phi(2^{m+1}t - k) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{m+1}[k] g[k - 2n], \end{aligned} \quad (2.42)$$

e, similarmente,

$$w_m[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{m+1}[k] h[k - 2n]. \quad (2.43)$$

Analisando as Equações (2.42) e (2.43) verifica-se que os coeficientes de escala $v_m[n]$ e os coeficientes wavelet $w_m[n]$ podem ser ambos obtidos de $v_{m+1}[n]$ por meio dos filtros $g[n]$ e $h[n]$, respectivamente. De fato, em ambos os casos, temos convoluções de $v_{m+1}[n]$ com as reversões temporais dos filtros $h[n]$ e $g[n]$, seguidas de decimações por um fator 2. Essa etapa é conhecida como decomposição wavelet, ilustrada na Figura 2.15. Os filtros $g[n]$ e $h[n]$ estão associados e são definidos de acordo com a família de wavelets que se deseja utilizar na decomposição. Neste trabalho, optou-se pela família de Daubechies, tal que os detalhes de sua construção são apresentados no Apêndice B.

A relação inversa, isto é, a reconstrução de $v_{m+1}[n]$ pode ser obtida de $v_m[n]$ e $w_m[n]$, conforme mostrado na Figura 2.15. De fato, como $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$, qualquer $v_{m+1} \in V_{m+1}$ pode ser escrito como $v_{m+1}(t) = v_m(t) + w_m(t)$, com $v_m \in V_m$ e $w_m \in W_m$, isto é,

$$\begin{aligned} v_{m+1}(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{m+1}[n] \phi_{m+1,n}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_m[n] \phi_{m,n}(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_m[n] \psi_{m,n}(t) \\ &= v_m(t) + w_m(t). \end{aligned} \quad (2.44)$$

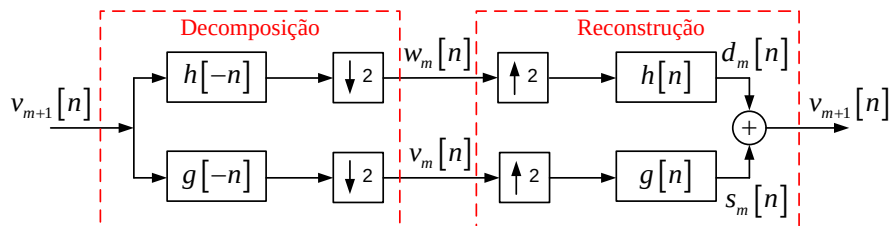
Com isso,

$$\begin{aligned} v_{m+1}[n] &= \langle v_{m+1}, \phi_{m+1,n} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_m[k] \langle \phi_{m,k}, \phi_{m+1,n} \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_m[k] \langle \psi_{m,k}, \phi_{m+1,n} \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_m[k] g[n - 2k] + \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_m[k] h[n - 2k] = s_m[n] + d_m[n], \end{aligned} \quad (2.45)$$

com

$$s_m[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_m[k] g[n - 2k] \quad \text{e} \quad d_m[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_m[k] h[n - 2k]. \quad (2.46)$$

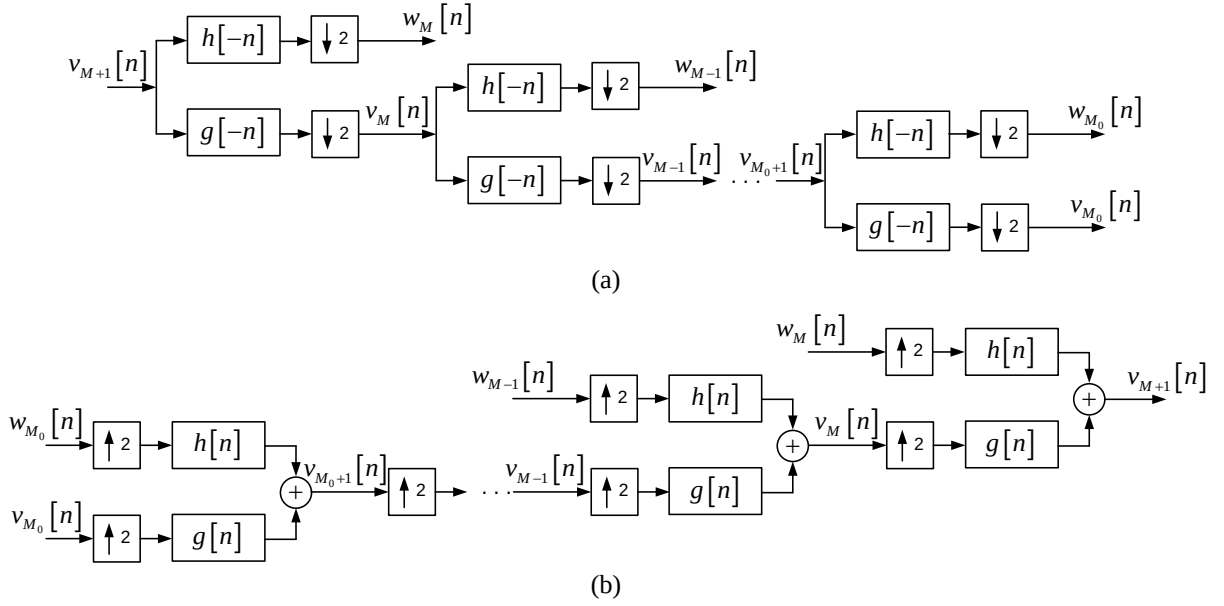
Figura 2.15: Banco de filtros utilizado na decomposição/reconstrução pela TWD.



Fonte: O autor.

Caso se deseje uma análise em mais de um nível, basta chamar recursivamente as operações da decomposição/reconstrução. Neste sentido, as Figuras 2.16(a) e 2.16(b) mostram, respectivamente, como se faz a decomposição e a reconstrução em $M - M_0 + 1$ níveis. Cada nível da decomposição está associado com uma banda no espectro de frequências, conforme se mostra adiante. Isso caracteriza a chamada multiresolução e permite que os sinais possam ser estudados em várias bandas de frequências.

Figura 2.16: TWD para $M - M_0 + 1$ níveis: (a) decomposição e (b) reconstrução.



Fonte: O autor.

Além disso, a TWD preserva a energia na decomposição, isto é,

$$v_{m+1}^2[n] = v_{M_0}^2[n] + \sum_{m=M_0}^M w_m^2[n]. \quad (2.47)$$

A análise wavelet é um tipo de decomposição em multibandas baseada em bancos de filtros espelhados em quadratura de dois canais [45], conforme mostra a Figura 2.15. Uma descrição completa desse tipo de banco de filtros é apresentada no Apêndice B.

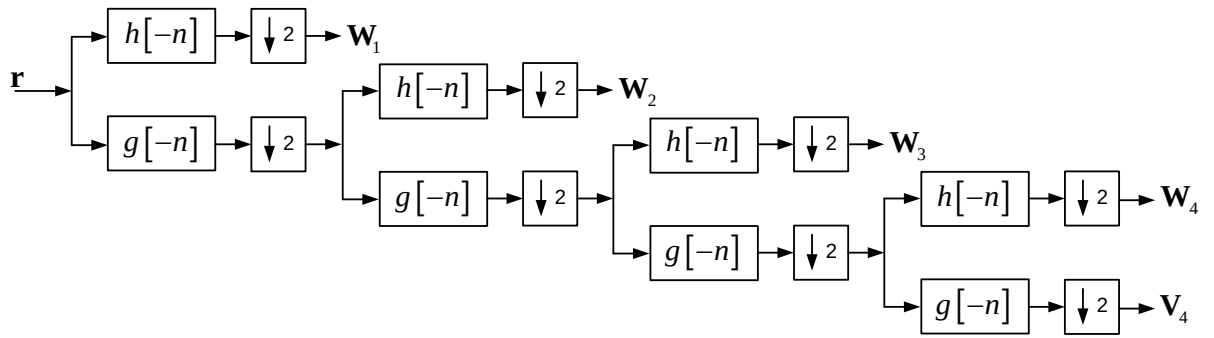
Neste trabalho, os sinais de tacogramas RR são analisados estaticamente, isto é, não são consideradas decomposições em tempo real. Dessa forma, não há preocupação com relação à causalidade dos filtros e são utilizadas convoluções circulares. Além disso, é considerada somente a família de wavelets de Daubechies [42, 46, 47], ficando a análise de outras famílias para os próximos trabalhos.

As famílias de wavelets estão intimamente ligadas aos coeficientes do filtro wavelet

$\{h[n] : n = 0, \dots, L-1\}$ e do filtro escala $\{g[n] : n = 0, \dots, L-1\}$. Esses filtros possuem, respectivamente, funções de passa-altas e passa-baixas e maiores detalhes sobre sua construção e suas relações com as famílias wavelets podem ser encontrados na vasta literatura sobre o assunto [42, 43, 46, 47]. Aqui, por sua vez, optou-se por não inserir essa discussão para não tornar a fundamentação teórica muito extensa e se perder o foco do estudo.

Para facilitar a interpretação e compreensão da TWD, é possível redefinir os índices das variáveis e deixar a decomposição mais intuitiva, conforme mostra a Figura 2.17 para quatro níveis de decomposição. Dessa forma, se compreende a TWD simplesmente como a realização de operações de convolução associadas com decimações e se perde a clareza sobre os quais subespaços estão associados os sinais envolvidos na decomposição.

Figura 2.17: Decomposição de um tacograma RR em quatro níveis.



Fonte: O autor.

Além disso, como os tacogramas RR analisados neste trabalho possuem comprimento finito, isto é, $\{r[n] : n = 0, \dots, N-1\}$, é possível utilizar uma representação em matriz coluna para o sinal como $\mathbf{r} = (r[0] \dots r[N-1])^T$.

No que diz respeito às sub-bandas de frequências, a Figura 2.18 mostra como se dá a decomposição do espectro de frequências, sua relação com cada nível de decomposição da TWD e como as bandas BF e AF se distribuem sobre o espectro wavelet. Desta forma, se espera que a energia da série temporal $r[n]$ esteja distribuída entre os coeficientes wavelet, da seguinte forma: a banda BF se relaciona com os coeficientes $\mathbf{W}_3$ e $\mathbf{W}_4$; a banda AF se relacionada com os coeficientes $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$.

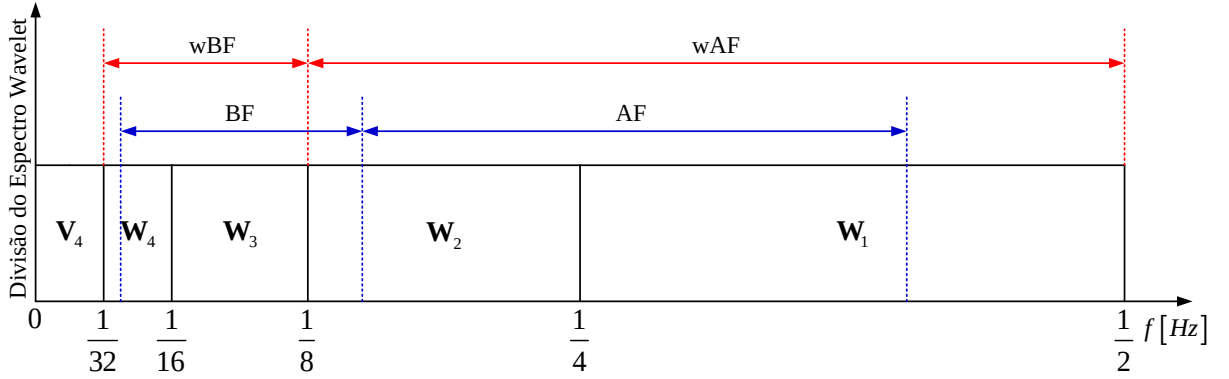
Isso permite que sejam definidas duas bandas no domínio wavelet: *Wavelet Baixa Frequência* (wBF), intervalo $(\frac{1}{32} \leq f \leq \frac{1}{8})\text{Hz}$; *Wavelet Alta Frequência* (wAF), intervalo

$(\frac{1}{8} \leq f \leq \frac{1}{2})$ Hz, tal que, a energia em cada banda é calculada por

$$E^{wBF} = \|\mathbf{W}_3\|^2 + \|\mathbf{W}_4\|^2 \quad \text{e} \quad E^{wAF} = \|\mathbf{W}_1\|^2 + \|\mathbf{W}_2\|^2, \quad (2.48)$$

com $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$. Os coeficientes presentes no vetor $\mathbf{V}_4$ são associados às frequências ultra baixas e não são considerados neste estudo.

Figura 2.18: Decomposição ideal do espaço de frequências realizada pela TWD com quatro níveis de decomposição.



Fonte: O autor.

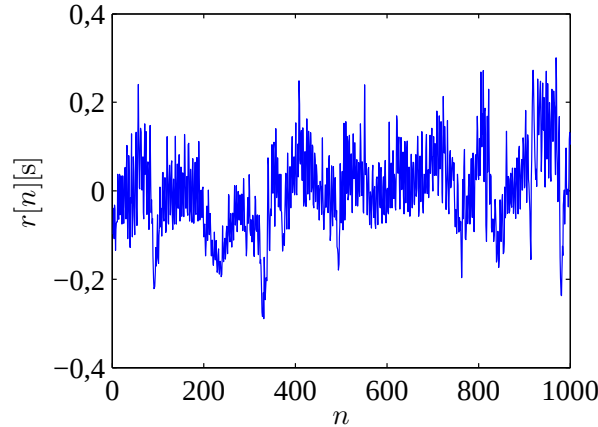
Obviamente que a divisão de bandas não é abrupta, conforme mostra a Figura 2.18. Na realidade, quanto maior o comprimento L dos filtros $H(z)$ e $G(z)$, mais definidas ficam as bandas, sendo impossível um caso real sem sobreposição, que aconteceria caso $L \rightarrow \infty$.

A Figura 2.19 mostra um tacograma RR de um adulto saudável com $N = 1000$ com valor médio alterado para zero. Retirando o valor médio, somente a variabilidade do sinal influencia no cálculo da energia, conforme desejado neste tipo de análise. Fazendo a decomposição wavelet desse tacograma, nos moldes da Figura 2.17, utilizando os filtros de Daubechies de comprimento $L = 8$ e calculando as energias E^{wBF} e E^{wAF} , conforme apresentado nas Equações (2.48), tem-se $E^{wBF} = 1,3387s^2$ e $E^{wAF} = 2,4999s^2$. Além disso, $E^{wBF}/E^{wAF} = 0,5355$, mostrando que há um certo equilíbrio entre as energias das bandas.

2.4 Gráficos de Poincaré

O gráfico de Poincaré é um método não linear para estudo gráfico de uma série temporal [48]. É um mapa que mostra a dispersão entre o valor de uma série temporal no

Figura 2.19: Tacograma RR de um adulto saudável com $N = 1000$ batimentos.

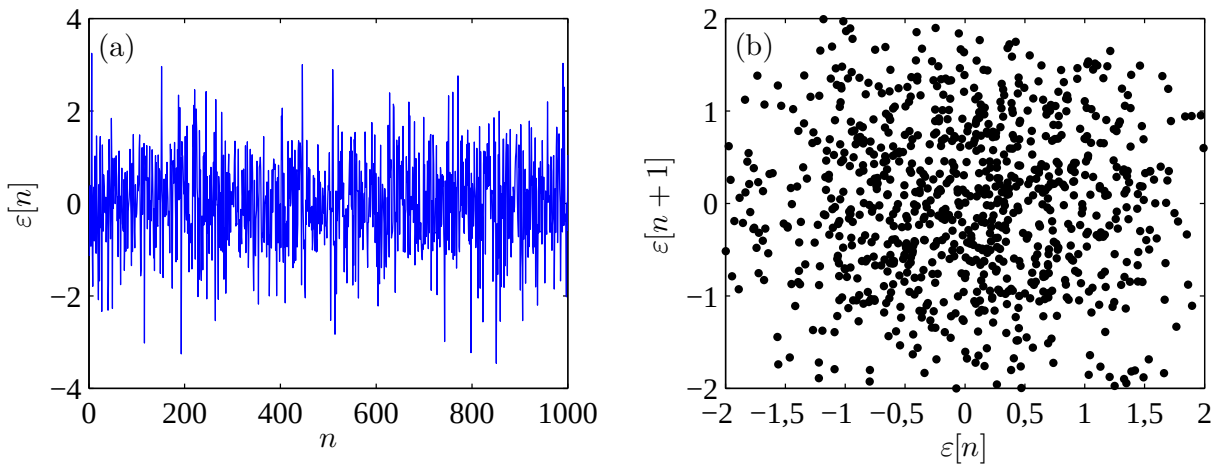


Fonte: O autor.

instante n e o valor subsequente no instante $n + 1$, isto é, são inseridos pontos da forma $(r[n], r[n + 1])$ em um plano de dois eixos ortogonais com $0 \leq n \leq N - 1$, sendo N o comprimento da série temporal.

Como exemplo, nas Figuras 2.20(a) e 2.20(b) são mostrados, respectivamente, um sinal de ruído branco $\varepsilon[n]$ normalmente distribuído com média zero e variância unitária com $N = 1000$ e seu gráfico de Poincaré. Como os pontos não apresentam nenhum tipo de correlação, seu gráfico de Poincaré não apresenta uma forma geométrica clara e bem definida.

Figura 2.20: (a) Ruído branco com média zero e variância unitária e respectivo (b) gráfico de Poincaré.

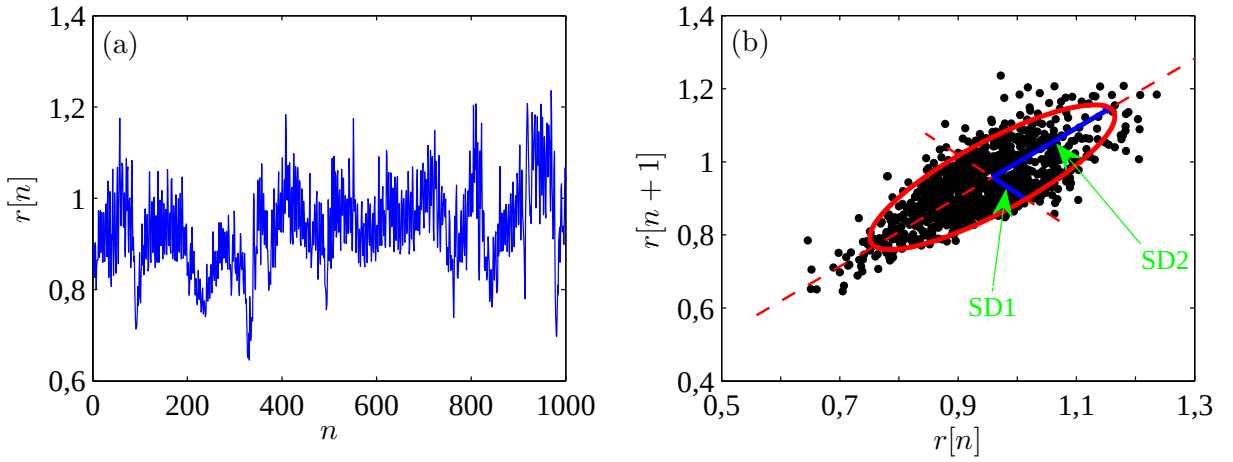


Fonte: O autor.

Por outro lado, os tacogramas RR que são objetos de estudo neste trabalho, apresentam um gráfico de Poincaré em forma de elipse, conforme apresentado em vários textos

[13, 32, 48]. Para verificar isso, nas Figuras 2.21(a) e 2.21(b) são apresentados um tacograma experimental $r[n]$ de um adulto saudável com $N = 1000$ batimentos e seu respectivo gráfico de Poincaré. Neste caso, observa-se claramente que os pontos do gráfico de Poincaré agrupam-se em formato geométrico de elipse e, desta forma, apresentam certo tipo de correlação. Na Figura 2.21(b), a elipse destacada em vermelho foi ajustada pelo método dos mínimos quadrados.

Figura 2.21: (a) Tacograma de um adulto saudável e respectivo gráfico de Poincaré (b).



Fonte: O autor.

Além disso, quando se ajusta uma elipse ao gráfico de Poincaré, é possível calcular dois índices práticos bastante utilizados em cardiologia. Um deles ($SD1$), é relativo ao eixo menor da elipse (largura) e se relaciona com a variabilidade de batimentos de curto prazo. O segundo ($SD2$), está relacionado com o eixo maior da elipse (comprimento) e refere-se a batimentos de longo prazo [49]. Na Figura 2.21(b) são mostrados os dois índices que são calculados por

$$SD1 = \frac{\sqrt{2}}{2} SD(r[n] - r[n+1]) \quad (2.49)$$

e

$$SD2 = \sqrt{2SD(r[n])^2 - \frac{1}{2}SD(r[n] - r[n+1])^2}, \quad (2.50)$$

onde SD representa o desvio padrão amostral, calculado genericamente para um sinal $x[n]$ por

$$SD(x[n]) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \bar{x})^2}, \quad (2.51)$$

com N representando o comprimento do sinal. Para o tacograma mostrado na Figura 2.21(a), tem-se $SD1 = 48,7615\text{ms}$ e $SD2 = 124,6366\text{ms}$.

2.5 Análise de Flutuação sem Tendência

No estudo de dinâmica não linear existem vários modos de se analisar sinais não estacionários, provenientes de sistemas complexos como, por exemplo, o cálculo de expoentes escalares que indicam a presença (ou não) de propriedades fractais, isto é, a presença de auto-similaridade [50, 51].

O método de Análise de Flutuação sem Tendência (AFsT) é aplicado para quantificar correlações de curto e longo alcance em séries temporais, inclusive não estacionárias. Inicialmente, foi introduzido para estudar sequências genéticas de DNA [17] e vem sendo aplicado em várias áreas das ciências biológicas, como a cardiologia [52, 53]. O método baseia-se na análise de flutuações dos dados após a retirada de tendências locais da série temporal original integrada.

Seja $r[n]$, $n = 0, \dots, N - 1$ uma série temporal, neste trabalho representando um tacograma RR. A série integrada $R[k]$ é obtida por

$$R[k] = \sum_{n=0}^k (r[n] - \bar{r}), \quad (2.52)$$

onde $\bar{r}$ é a média temporal de $r[n]$.

As flutuações em janelas de comprimento λ são quantificadas pela chamada função de flutuação,

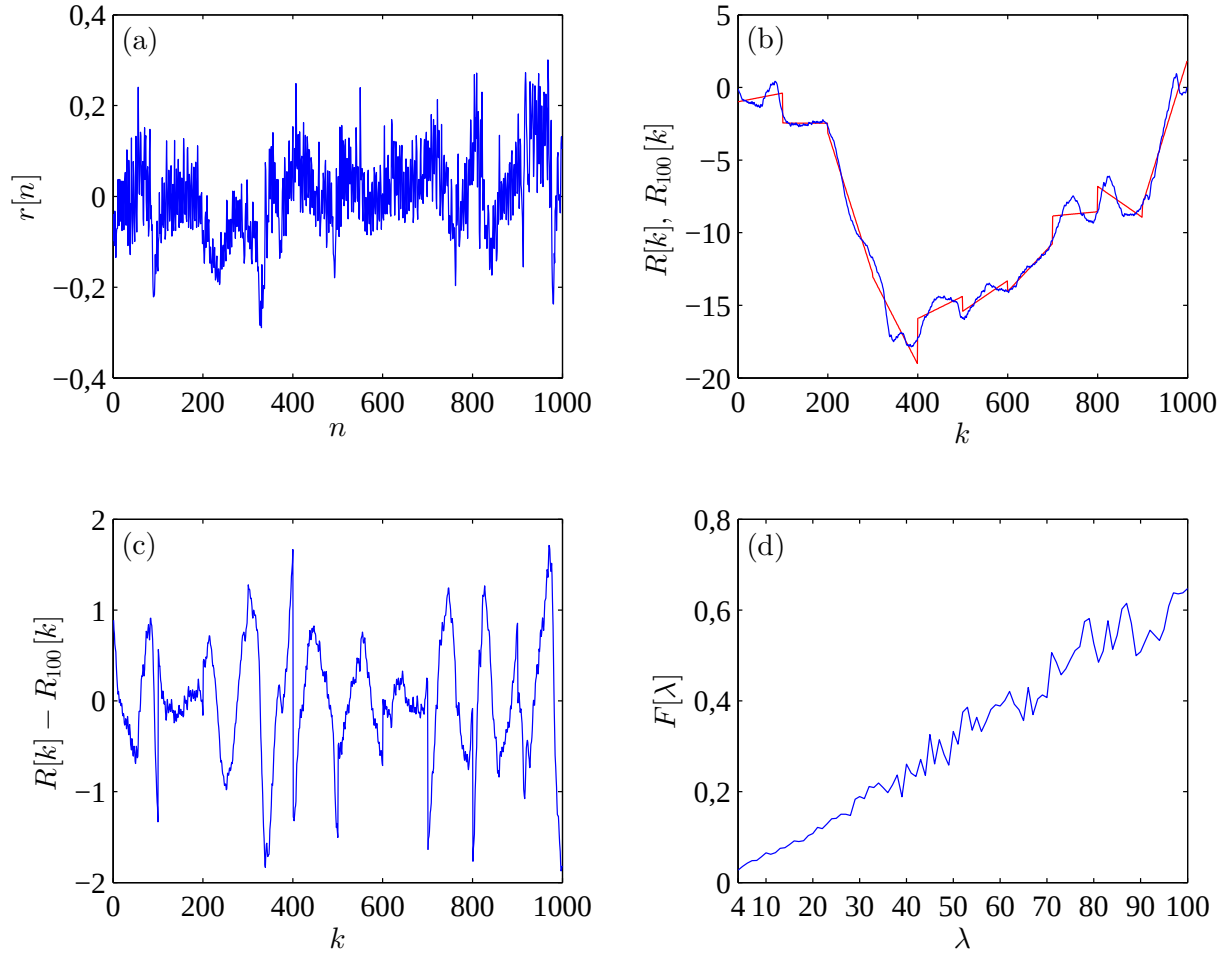
$$F[\lambda] = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (R[k] - R_{\lambda}[k])^2}, \quad (2.53)$$

com $R_{\lambda}[k]$ sendo a tendência local, ajustada por meio de uma reta simples.

Como exemplo dos sinais envolvidos nesta análise, a Figura 2.22(a) mostra um tacograma $r[n]$ de um adulto saudável (com média zero). Na Figura 2.22(b) se mostra o tacograma integrado $R[k]$ (em azul) e as tendências locais em janelas de comprimento $\lambda = 100$, isto é, $R_{100}[k]$ (em vermelho). Na Figura 2.22(c) são apresentadas as flutuações $R[k] - R_{100}[k]$ para $\lambda = 100$ e na Figura 2.22(d) é mostrada a função de flutuação $F[\lambda]$ para $4 \leq \lambda \leq 100$.

Além da função de flutuação $F[\lambda]$ a AFsT faz uso de um coeficiente α tomado como sendo o coeficiente angular da reta que melhor aproxima a $F[\lambda]$ em escala logarítmica, isto é, $\log_{10}(F(\lambda))$ versus $\log_{10} \lambda$, conforme mostra a Figura 2.23. Se esse gráfico seguir uma linha reta, então há uma auto-similaridade estatística da forma $F[\lambda] \propto \lambda^{\alpha}$ [17]. O parâmetro α é conhecido como expoente escalar ou parâmetro de auto-similaridade,

Figura 2.22: (a) Tacograma de um adulto sadio, (b) tacograma integrado (em azul) e tendências locais para $\lambda = 100$ (em vermelho), (c) flutuações obtidas para $\lambda = 100$ e (d) função de flutuação para $4 \leq \lambda \leq 100$.



Fonte: O autor.

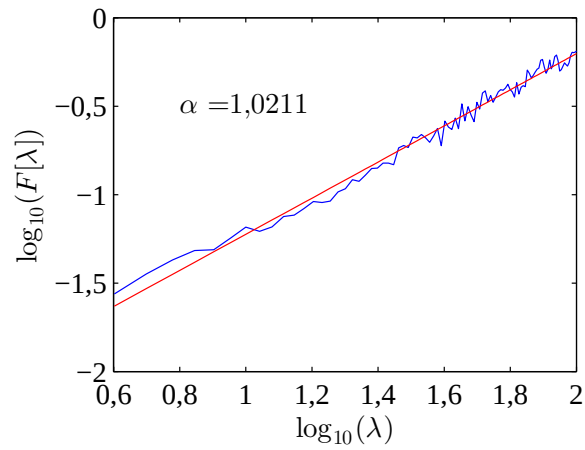
sendo relacionado com a função de correlação da série original da seguinte forma [17]:

1. $\alpha < 0,5$: Sinal anti-correlacionado;
2. $\alpha = 0,5$: Sinal descorrelacionado (ruído branco);
3. $\alpha > 0,5$: Autocorrelação positiva no sinal;
4. $\alpha = 1$: Ruído rosa do tipo $1/f$;
5. $\alpha = 1,5$: Ruído (movimento) Browniano ou caminhada aleatória.

Para o tacograma RR apresentado na Figura 2.22(a), $\alpha = 1,0211$, isto é, o valor apresentado está entre o conhecido ruído rosa e o movimento Browniano. No Capítulo

4, é analisada a faixa de valores apresentadas pelos dados experimentais, tanto saudáveis quanto patológicos.

Figura 2.23: Em azul o gráfico de $\log_{10}(F[\lambda])$ *versus* $\log_{10}(\lambda)$ e em vermelho a reta que melhor aproxima $\log_{10}(F[\lambda])$, com coeficiente angular $\alpha = 1,0211$.



Fonte: O autor.

3 *Modelo Matemático dos Batimentos Cardíacos*

O racionalismo é a principal corrente filosófica sobre a qual a Física Teórica está amparada, tendo como seu principal ícone o filósofo René Descartes que, aliás, na quinta parte de seu famoso Discurso [54] já mostrava inquietação quando tentava explicar o funcionamento do coração utilizando a razão. Nessa linha de pensamento surgiram os modelos matemáticos na tentativa de analisar e explicar vários fenômenos da Natureza. No caso do coração, a dinâmica dos batimentos cardíacos vem se destacando e sendo objeto de amplo estudo matemático, principalmente devido ao coração desempenhar uma função fundamental no funcionamento do corpo humano.

A ideia da chamada Física Cardiovascular, introduzida em 2007 por Wessel e colaboradores [55], é apresentar um panorama sobre os desafios de se desenvolver métodos e técnicas que permitam auxiliar no diagnóstico médico, diminuindo os riscos aos pacientes. É uma área interdisciplinar que associa medicina, física, biologia, engenharia e matemática, interligando diversos pesquisadores e saberes.

O primeiro modelo matemático para simular os batimentos cardíacos é recente e data de 1928 com o trabalho de Van der Pol e Van der Mark [24], onde a possibilidade de utilização de circuitos eletrônicos para reproduzir os batimentos cardíacos foi introduzida de forma colateral ao estudo dos retificadores a base de válvulas do tipo triodo [25]. No trabalho original, Van der Pol e Van der Mark utilizam osciladores acoplados baseados na equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu(1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = F(t), \quad (3.1)$$

para representar os nódulos SA e AV, assim como o complexo de His e as fibras de Purkinje, presentes no coração e responsáveis pelo controle da atividade elétrica do órgão. Nesse caso, $y(t)$ representa o potencial de ação do coração, μ é um parâmetro escalar relacionado à não-linearidade e à dissipação de energia e $F(t)$ é uma excitação externa.

Em 2004, Grudzinski e Zebrowski [22] propuseram algumas modificações na Equação

(3.1), via análise topológica do espaço de fase, com o objetivo de reproduzir de forma mais realista o potencial de ação do marca-passo natural e introduziram osciladores acoplados baseados na equação

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \mu(y - v_1)(y - v_2) \frac{dy}{dt} + \frac{y(y + d)(y + e)}{de} = F(t). \quad (3.2)$$

Essa nova equação, apresenta dois pontos fixos adicionais e um termo de dissipação assimétrico que permite mudar a frequência de disparo do marca-passo natural sem alterar o comprimento do período refratário. Os parâmetros μ , v_1 , v_2 , e e d são relacionados com alterações no potencial limiar, potencial de repouso, período refratário e período de despolarização espontânea que, por sua vez, são importantes características fisiológicas do coração [22]. Essas modificações foram de grande importância, visto que, o modelo baseado na Equação (3.1) possui simplesmente interesse físico para estudos de caos e sincronismo, uma vez que alterando o parâmetro α , todas as características fisiológicas mencionadas são simultaneamente alteradas e distanciam o modelo dos dados experimentais.

Recentemente, um grupo de pesquisadores da UFRJ liderados pelo Prof. Dr. Marcelo Savi apresentou uma série de trabalhos [10, 56, 11] onde consideraram também um modelo envolvendo três osciladores acoplados baseados na Equação (3.2) sendo um para representar o nódulo SA, outro para o nódulo AV e um terceiro para representar o complexo de His-Purkinje (HP) e, além disso, passaram a considerar atraso de tempo entre a transmissão dos sinais entre os três osciladores. No entanto, apesar desse modelo apresentar um caráter fenomenológico interessante, ele nos leva a uma quantidade elevada de parâmetros para serem avaliados, além de várias condições iniciais para serem consideradas nas equações diferenciais. Certamente isso traz um cenário rico para a dinâmica não linear como o estudo de sincronismo, caos e controle de ritmos. Contudo, dificulta trabalhos como este, onde o foco é dado sobre a Variabilidade da Frequência Cardíaca. Sendo assim, aqui é utilizado um modelo de três equações diferenciais ordinárias acopladas baseado em modulações de exponenciais gaussianas que possui menor demanda computacional e uma dinâmica requintada, introduzido por McSharry et al. [12],

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x - \omega y, \\ \dot{y} &= \gamma y + \omega x, \\ \dot{z} &= z_0 - z - \sum_i a_i \Delta \theta_i e^{-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $i \in \{P, Q, R, S, T\}$, $\gamma = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$, $\theta = \arctan 2(y, x)$ e

$z_0(t) = A \sin(2\pi f_r t)$ representando a respiração, onde $A = 0,15\text{mV}$ e $f_r = 0,25\text{Hz}$.

Os parâmetros a_i , b_i e θ_i são apresentados na Tabela 3.1. Conforme visto na introdução, a frequência cardíaca média (f_c) afeta a morfologia do ECG. Em particular, a largura do complexo QRS diminui quando aumenta f_c . Isso é esperado, visto que quando a atividade simpática aumenta, a velocidade de condução pelos ventrículos aumenta juntamente com f_c . Desta forma, a despolarização ventricular (representada pelo complexo QRS) é menor. Essas alterações são replicadas no modelo pela modificação da largura das exponenciais b_i e pela posição dos ângulos θ_i por meio de um fator dependente da frequência cardíaca média $\beta = \sqrt{60/f_c}$, com f_c em bpm.

A frequência angular $\omega(t)$ é calculada por

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{r(t)}, \quad (3.4)$$

onde

$$r(t) = r[n], \quad t_n \leq t < t_{n+1} \quad (3.5)$$

é uma função seccionalmente contínua com $t_{n+1} = t_n + r[n]$ ($t_0 = 0$ em $\theta = \theta_R = 0^\circ$) sendo $r[n]$ o tacograma RR com $0 \leq n \leq N - 1$, sendo N o número de batimentos, em bpm.

Tabela 3.1: Parâmetros do modelo apresentado na Equação (3.3), onde $\beta = \sqrt{60/f_c}$.

Índice (i)	θ_i	a_i	b_i
P	$-60^\circ \sqrt{\beta}$	1, 2	$0,25\beta$
Q	$-15^\circ \beta$	-5, 0	$0,1\beta$
R	0°	30, 0	$0,1\beta$
S	$15^\circ \beta$	-7, 5	$0,1\beta$
T	$90^\circ \sqrt{\beta}$	0, 75	$0,4\beta$

Fonte: Adaptada de McSharry e colaboradores [12].

No modelo original, proposto por McSharry et al. [12], o tacograma RR é determinado pela TFTD inversa do espectro $R(f)$, com módulo (Figura 3.1(a))

$$|R_G(f)| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi c_1^2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_1}{c_1}\right)^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi c_2^2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_2}{c_2}\right)^2}}, \quad (3.6)$$

sendo $c_1 = c_2 = 0,01$, $f_1 = 0,1\text{Hz}$, $f_2 = 0,25\text{Hz}$, $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 0,5$ e fase ϕ aleatória uniformemente distribuída entre $-\pi$ e π , isto é, no artigo original o tacograma RR é calculado por

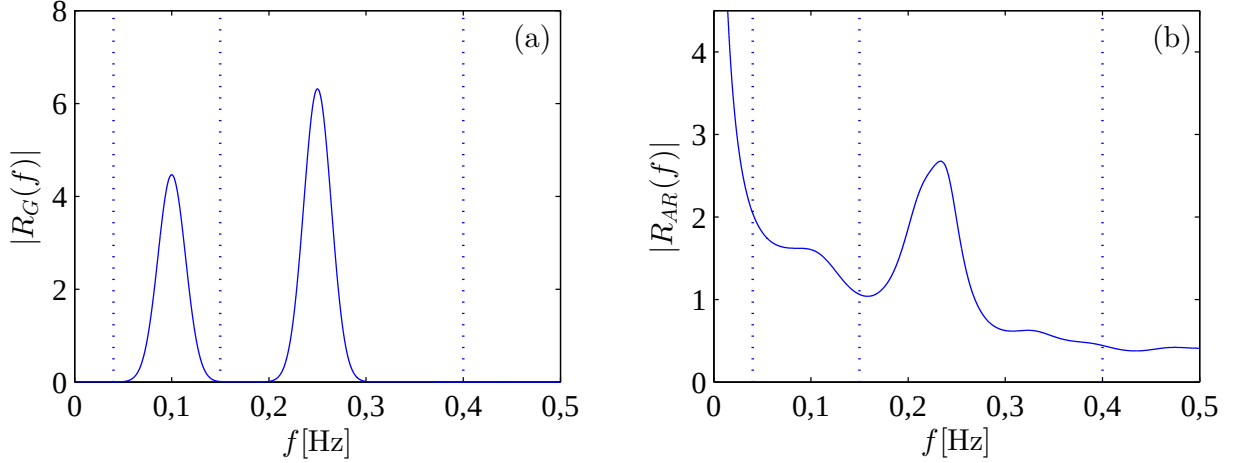
$$r[n] = \int_{-1/2}^{1/2} |R_G(f)| e^{i\phi} e^{i2\pi f n} df, \quad (3.7)$$

com $\phi \sim U(-\pi, \pi)$.

Como visto na introdução, o coração é controlado pelo SNA que, por sua vez, é dividido em SNS e SNP associados, respectivamente, as bandas BF ($(0,04 \leq f \leq 0,15)\text{Hz}$) e AF ($(0,15 \leq f \leq 0,4)\text{Hz}$). Sob condições saudáveis normais, o ritmo sinusal do coração é controlado pelo SNP. Caso o sujeito passe por uma situação de alerta, o aumento da frequência cardíaca passa a ser controlada pelo SNS. Desta forma, para um sujeito saudável em condições de repouso, se espera baixa atividade em baixas frequências e alta atividade em altas frequências.

Foi nesse sentido, que McSharry e colaboradores [12] propuseram a distribuição gaussiana bimodal da Equação (3.6) para o espectro do tacograma, cujo gráfico é mostrado na Figura 3.1(a). Em BF, o pico encontrado em 0,1Hz representa as ondas de Mayer, relacionadas com a regulação da pressão sanguínea [35]. A atividade em AF é devida a Arritmia Sinusal Respiratória (ASR), cuja frequência é síncrona com a frequência de respiração (f_r) e, neste caso, igual a $f_{ASR} = 0,25\text{Hz}$ (15mm).

Figura 3.1: Espectro dos tacogramas RR: (a) modelo original gaussiano $|R_G(f)|$ proposto por McSharry e colaboradores; (b) modelo AR proposto neste trabalho $|R_{AR}(f)|$.



Fonte: O autor.

Ocorre que, o espectro para sujeitos saudáveis não apresenta uma forma bem definida, com picos bem separados conforme sugere a Figura 3.1(a). Na verdade, em situações reais, aparece uma atividade na banda $0 \leq f \leq 0,04\text{Hz}$, não considerado na Figura 3.1(a), e os picos em BF e AF se unem e não são distintos e bem separados. Isso nos levou a procura de alternativas que pudessem reproduzir de forma mais realista o espectro dos tacogramas de sujeitos saudáveis e nos levou ao estudo dos modelos autorregressivos (AR).

Sendo assim, neste trabalho o procedimento de geração do tacograma RR é alterado.

Ao invés de se utilizar a Equação (3.7), a sequência $r[n]$ é tomada como sendo a realização de um processo estocástico AR de ordem $p = 16$, tal como

$$r[n] = \sum_{l=1}^p d_l r[n-l] + \varepsilon[n], \quad (3.8)$$

onde os coeficientes d_l são mostrados na Tabela 3.2. Neste caso, o espectro, tomado como a TFTD da Equação (3.8) é

$$|R_{AR}(f)| = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{l=1}^p d_l e^{-i2\pi fl} \right|}, \quad (3.9)$$

mostrado na Figura 3.1(b).

Tabela 3.2: Valores dos coeficientes do processo AR considerado para a geração do tacograma $r[n]$.

$d_1 = -0,9099$	$d_2 = 0,5188$	$d_3 = -0,2840$	$d_4 = -0,2063$
$d_5 = 0,0382$	$d_6 = 0,0709$	$d_7 = 0,0305$	$d_8 = -0,1533$
$d_9 = 0,0009$	$d_{10} = -0,0070$	$d_{11} = -0,0218$	$d_{12} = 0,0043$
$d_{13} = 0,0316$	$d_{14} = 0,0155$	$d_{15} = -0,0591$	$d_{16} = 0,0252$

Fonte: O autor.

Os processos AR possuem características peculiares. Os sinais provenientes desses processos podem ser interpretados como sendo a saída um filtro digital com função de transferência $H(z)$ dada por

$$H(z) = \frac{1}{D(z)}, \quad (3.10)$$

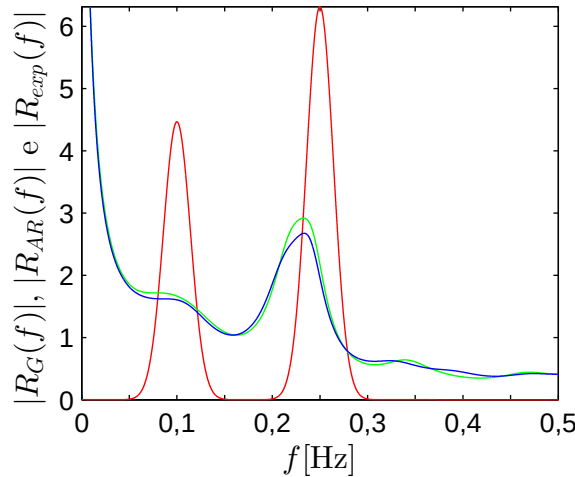
com $D(z) = 1 - \sum_{l=1}^p d_l z^{-l}$, considerando um ruído branco $\varepsilon[n]$ de média nula e variância unitária aplicado na entrada. Esse tipo de filtro possui somente pólos (raízes de $D(z)$) e, com isso, picos acentuados podem ser implementados no domínio da frequência. Isso permitiu que os coeficientes d_l presentes na Tabela 3.2 fossem calculados, isto é, de acordo com a posição dos pólos no plano z é possível calcular os coeficientes d_l através de operações matemáticas simples.

Outro aspecto importante nos processos AR é a seleção da ordem p do modelo. Nesse sentido, se destacam os critérios de Akaike [57], utilizados para a determinação da ordem ideal, para cada aplicação. Boardman e colaboradores [15] estudaram a melhor ordem de modelos AR para se ajustar um modelo AR a dados experimentais de VFC e encontraram a ordem $p = 16$ como sendo a ideal, a qual adotamos neste trabalho.

A Figura 3.2 mostra uma comparação entre os espectros dos tacogramas propostos por McSharry e colaboradores $|R_G(f)|$ (vermelho), um experimental $|R_{exp}(f)|$ (verde) e a proposição feita neste trabalho $|R_{AR}(f)|$ (azul). Claramente se percebe a proximidade dos espectros experimental e autorregressivo que, por sua vez, se distanciam bastante do gaussiano.

O modelo original propõe um espectro, e desta forma, um resultado muito regular. Isso não é comum na natureza do ECG, visto que, algumas alterações e variações são normais dada a habilidade do coração em responder a vários estímulos e situações de alerta pelo qual o corpo passa durante o dia, além de possíveis desordens induzidas por doenças [58, 59]. Sendo assim, neste estudo se propõe um modelo mais realista, sensível à essas particularidades do coração.

Figura 3.2: Comparação entre os espectros do modelo gaussiano $|R(f)|$ (vermelho), do modelo AR proposto neste trabalho $|R_{AR}(f)|$ (azul) e de um experimental $|R_{exp}(f)|$ (verde).



Fonte: O autor.

Cabe ressaltar que a utilização de processos AR para modelar tacogramas RR é muito utilizada por cardiologistas e por *softwares* que analisam a VFC. Contudo, a prática utilizada pelos pesquisadores até o momento, é o ajuste de curvas de dados experimentais para se adaptarem a um determinado processo AR.

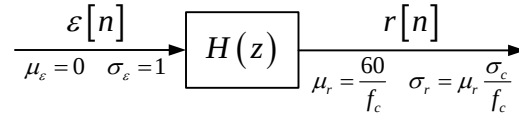
Neste trabalho, é apresentada uma contribuição inédita, no sentido que se realiza a introdução de um modelo AR previamente à integração das equações diferenciais do modelo. Isso até o momento não tinha sido realizado e, em trabalho recente [16], mostramos que essa alteração no procedimento de geração do tacograma permite que sejam obtidos sinais de ECG mais próximos dos dados experimentais quando considerados aspectos de variabilidade da frequência cardíaca. Em suma, para se compreender a geração do ECG

nas condições apresentadas acima, utiliza-se um procedimento bem definido. Primeiramente, deve ser gerado um tacograma $r[n]$, com N batimentos desejados. Para isso, se passa um ruído branco $\varepsilon[n]$ com $\mu_\varepsilon = 0$ e $\sigma_\varepsilon = 1$ por um filtro digital com função de transferência $H(z)$ dada pela Equação (3.10), utilizando os parâmetros d_l apresentados na Tabela 3.2. Em seguida, são atribuídos valor médio (μ_r) e desvio padrão (σ_r) ao sinal $r[n]$, como

$$\mu_r = \frac{60}{f_c} \quad \text{e} \quad \sigma_r = \mu_r \frac{\sigma_c}{f_c}, \quad (3.11)$$

onde f_c e σ_c representam, respectivamente, a frequência cardíaca média desejada e seu desvio padrão, ambos em bpm. Esse primeiro processo é ilustrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Geração de um tacograma RR com base em um processo AR.



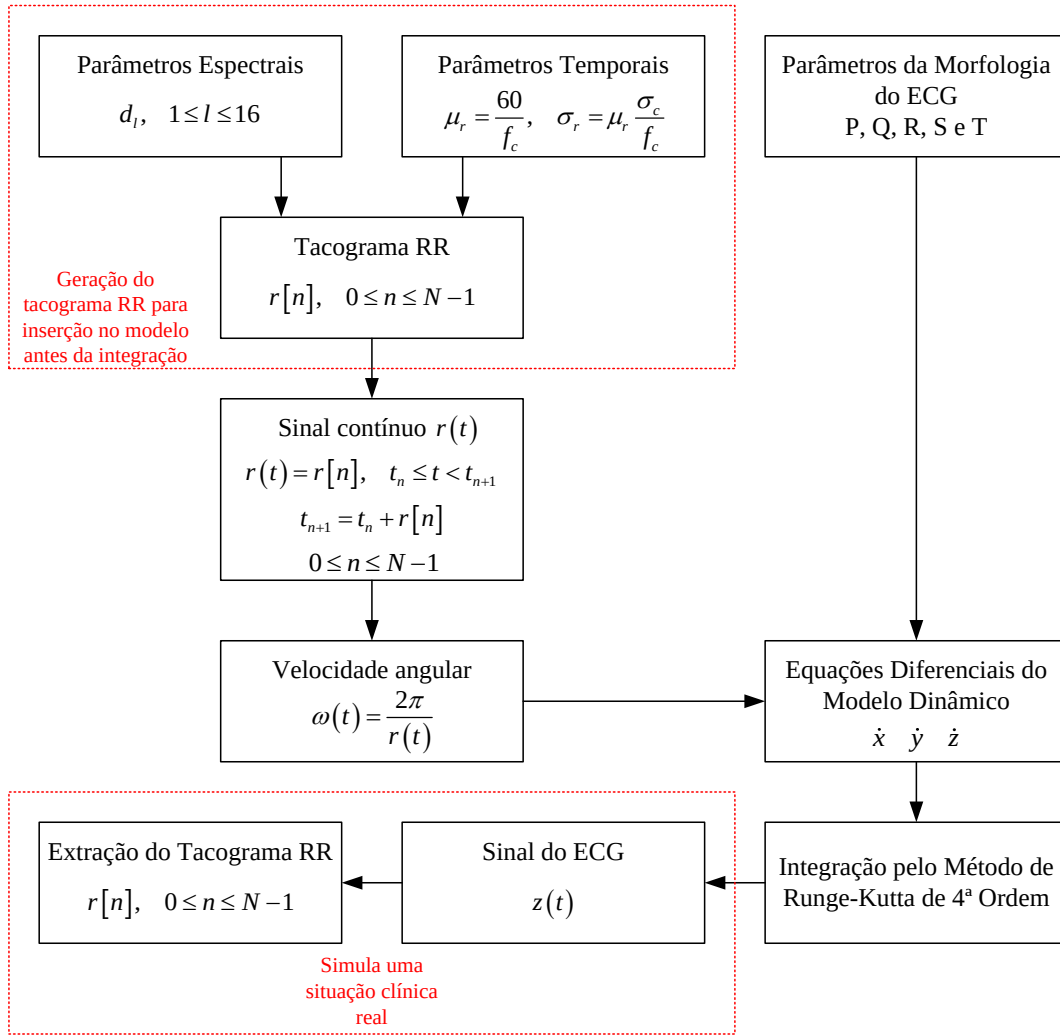
Fonte: O autor.

Após essa primeira etapa de geração do tacograma, calcula-se a função seccionalmente contínua $r(t)$ com base na Equação (3.5) e, em seguida, a frequência angular $\omega(t)$ (Equação (3.4)). Por fim, associando $\omega(t)$ e os parâmetros morfológicos presentes na Tabela 3.1 ao modelo dinâmico da Equação (3.3) e integrando pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração $T_s = 1/F_s$, com F_s sendo a frequência de amostragem desejada, se obtém o sinal de ECG. A Figura 3.4 apresenta um esquema detalhando o processo de geração do ECG mencionado acima.

As Figuras 3.5(a) e 3.5(b) mostram a variável $z(t)$ do modelo da Equação (3.3), respectivamente, para um adulto saudável e para um adulto com DAC. A DAC altera significativamente a VFC de um paciente, mas não altera a morfologia do ECG em repouso. Na geração dos ECGs das Figuras 3.5(a) e 3.5(b) é considerada frequência cardíaca média igual a $f_c = 70\text{bpm}$ e desvio padrão $\sigma_c = 6\text{bpm}$ para o paciente saudável e $f_c = 70\text{bpm}$ e $\sigma_c = 2\text{bpm}$ para simular uma pessoa com DAC. Para a integração é utilizada $F_s = 512\text{Hz}$.

Nas Figuras 3.5(c) e 3.5(d) são mostrados os respectivos tacogramas extraídos das Figuras 3.5(a) e 3.5(b). Na vigência dos sintomas (dores torácicas quando se faz esforço) pode apresentar um infradesnívelamento do segmento ST ou uma inversão da onda T. Em situações de repouso, a morfologia do ECG de um adulto saudável ou com DAC não se altera. Contudo, a VFC é diferente e apresenta menor variância nos pacientes com a doença. Isso nos leva a crer que esse tipo de patologia (DAC) influencia na perda

Figura 3.4: Esquema para geração do ECG e extração do tacograma via modelo.



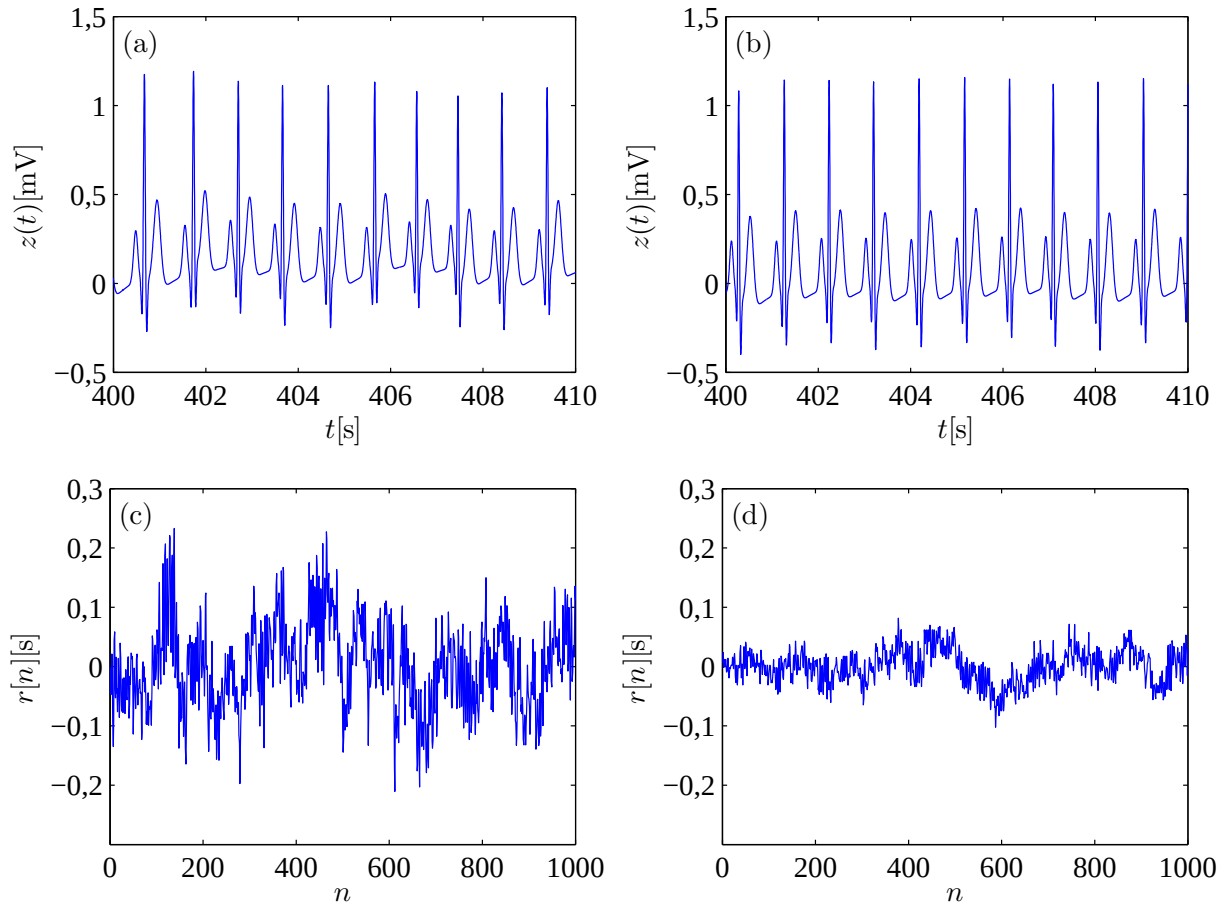
Fonte: O autor.

de energia do coração, isto é, como essa doença altera a região no entorno do coração com o acúmulo de gordura nas artérias, a potência do coração diminui e leva a graves complicações.

Cabe ressaltar novamente que, segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), as doenças cardíacas são as que mais matam no mundo e, dentre elas, as DACs são as mais comumente encontradas, tanto em homens quanto em mulheres. Além disso, como essas doenças são silenciosas e na maior parte assintomáticas, os pacientes descobrem quando se tem um quadro avançado de complicações, necessitando de atendimentos imediatos para que o coração não pare devido ao acúmulo de placas de gordura, colesterol, cálcio ou colágeno nas artérias próximas ao coração.

Sendo assim, quando buscam-se formas de se compreender o funcionamento dessas

Figura 3.5: ECG por simulação: (a) adulto saudável; (b) Adulto com DAC. Tacogramas RR retirados para 1000 batimentos: (c) adulto saudável; (d) adulto com DAC.



Fonte: O autor.

patologias do ponto de vista matemático é possível chegar a conclusões importantes e que possam explicar as relações entre as várias variáveis inerentes ao processo. Vários estudos apontam que cigarro, bebida e hábitos alimentares não saudáveis podem levar ao acúmulo de gorduras nas paredes das artérias. Desta forma, o estilo de vida é fundamental para o controle de patologias cardíacas coronarianas.

No próximo Capítulo, são comparados os dados simulados por esse modelo proposto com dados experimentais de pacientes saudáveis e de pacientes com algum tipo de DAC.

4 *Resultados*

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos durante a pesquisa. Primeiramente, é realizada uma análise exploratória dos dados experimentais disponíveis por meio da comparação dos indicadores discutidos na Fundamentação Teórica, isto é, energias em baixa e alta frequências no espectro wavelet (E^{wBF} e E^{wAF}), indicadores do gráfico de Poincaré ($SD1$ e $SD2$) e Análise de Flutuação (α e $F[\lambda]$).

Após essa primeira análise dos dados experimentais, é realizado o confronto entre os tacogramas RR retirados do modelo matemático e dos adultos saudáveis. Por fim, a mesma ideia é aplicada para os adultos com DAC, isto é, comparamos os tacogramas simulados com os experimentais.

Todo o estudo foi realizado utilizando o *software* MATLAB[®] e os *scripts* foram implementados de forma autoral, isto é, não foram utilizadas rotinas de outros pesquisadores. Os códigos estão disponíveis no Apêndice C, sendo que as funções estão divididas da seguinte forma: para a decomposição wavelet se utiliza a função *custom_dwt*; para o cálculo dos indicadores do gráfico de Poincaré é utilizada a função *custom_poincare*; e para o cálculo dos indicadores da AFsT é utilizada a função *custom_dfa*.

4.1 Análise Exploratória dos Dados Experimentais

Neste estudo são utilizados 124 tacogramas experimentais com $N = 1000$ batimentos cada, coletados na Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto pelo grupo do Prof. Dr. Moacyr Fernandes de Godoy, sendo 62 tacogramas de pacientes saudáveis e 62 tacogramas de pacientes com algum tipo de Doença Arterial Coronariana (DAC) grave.

O protocolo experimental consistiu em 20 minutos de captação da frequência cardíaca em repouso, de forma contínua, com o voluntário em decúbito dorsal, sem nenhum tipo de estímulo visual ou sonoro em um colchonete realizando respiração espontânea. Os voluntários foram orientados a não realizar movimentos de ampla amplitude e a não dormir nem

falar durante a captação com o cardiófrequencímetro, que foi realizada individualmente. Para a análise da VFC, o padrão do comportamento foi gravado batimento a batimento, durante todo o protocolo, com uma taxa de amostragem de 1000Hz. Para análise dos dados foram utilizados $N = 1000$ batimentos (iRR) consecutivos após ter sido feita filtragem digital complementada por manual, para eliminação de batimentos ectópicos prematuros e artefatos, tal que somente séries com mais de 95% de batimentos sinusais foram incluídas no estudo.

Aqui, os tacogramas saudáveis e doentes são denotados, respectivamente, por $r_s[\xi, n]$ e $r_d[\xi, n]$, com $0 \leq \xi \leq \Xi - 1$, $0 \leq n \leq N - 1$, $\Xi = 62$ pacientes e $N = 1000$ batimentos. Durante o texto é utilizada a notação unificada $r_{s,d}[\xi, n]$ para se referir aos dois grupos em estudos (saudáveis(s) e doentes(d)). As frequências cardíacas instantâneas são obtidas por

$$f_{s,d}[\xi, n] = \frac{60}{r_{s,d}[\xi, n]} \quad (4.1)$$

em batimentos por minuto (bpm).

A frequência cardíaca média de cada paciente $\bar{f}_{s,d}[\xi]$ é calculada por,

$$\bar{f}_{s,d}[\xi] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_{s,d}[\xi, n], \quad (4.2)$$

com $0 \leq \xi \leq \Xi - 1$. A frequência cardíaca média do grupo de pacientes saudáveis e do grupo de doentes $\bar{f}_{s,d}$ e seus respectivos desvios padrão ($s_{s,d}$) são determinados, respectivamente, por

$$\bar{f}_{s,d} = \frac{1}{\Xi} \sum_{\xi=0}^{\Xi-1} \bar{f}_{s,d}[\xi] \quad \text{e} \quad s_{s,d} = \sqrt{\frac{1}{\Xi-1} \sum_{\xi=0}^{\Xi-1} (\bar{f}_{s,d}[\xi] - \bar{f}_{s,d})^2}. \quad (4.3)$$

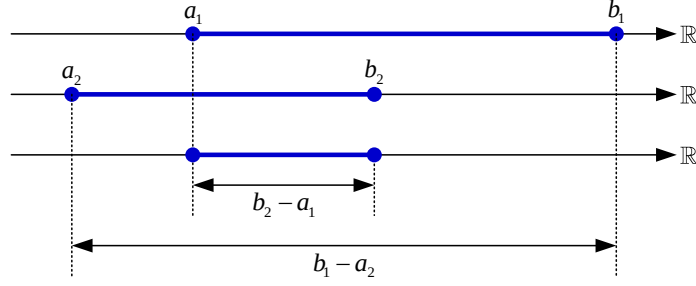
Calculando essas frequências médias (e os respectivos desvios) para os dois grupos, obtemos $\bar{f}_s = (69,4075 \pm 9,9362)\text{bpm}$ e $\bar{f}_d = (64,9137 \pm 10,1497)\text{bpm}$.

Definindo a sobreposição percentual entre dois intervalos de números reais $I_1 = [a_1, b_1]$ e $I_2 = [a_2, b_2]$ como

$$\Delta S\% = \frac{b_2 - a_1}{b_1 - a_2} \cdot 100, \quad (4.4)$$

com $a_2 \leq a_1$ e $b_2 \leq b_1$, conforme mostra a Figura 4.1, é possível notar que há 63,44% de intersecção entre os intervalos das frequências cardíacas médias dos dois grupos (saudáveis e doentes), tal que não temos segurança em afirmar que a frequência cardíaca média é diferente entre sujeitos saudáveis e com alguma DAC, isto é, essa classe de patologias não influencia na frequência cardíaca em repouso.

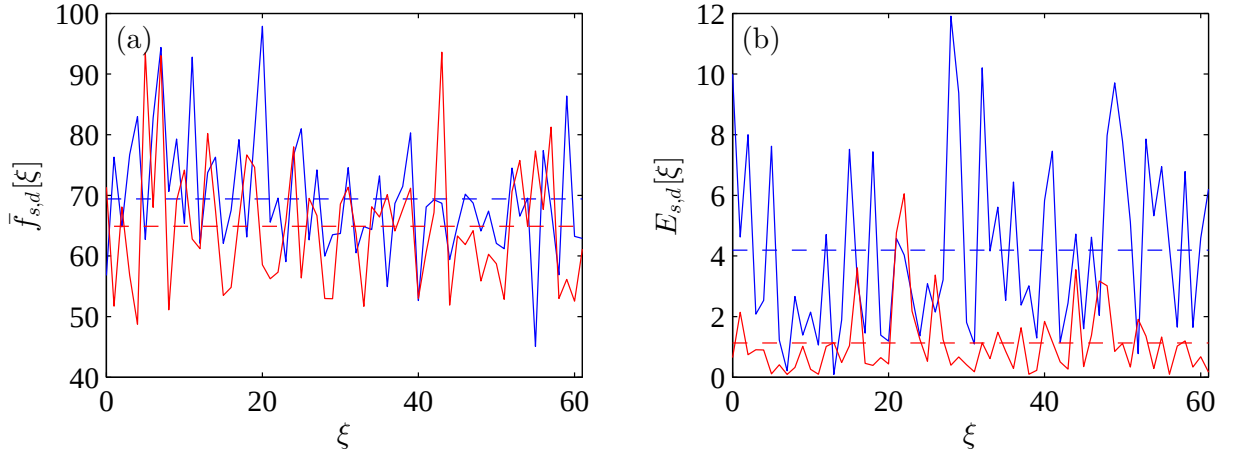
Figura 4.1: Sobreposição entre dois intervalos de números reais $I_1 = [a_1, b_1]$ e $I_2 = [a_2, b_2]$.



Fonte: O autor.

A Figura 4.2(a) mostra as frequências cardíacas médias de cada paciente $\bar{f}_{s,d}[\xi]$, assim como os valores médios de cada grupo (em pontilhado). Em azul os saudáveis e em vermelho os doentes. Claramente observa-se que os dois grupos são muito próximos quando comparadas as frequências cardíacas.

Figura 4.2: (a) Frequência cardíaca média de cada paciente experimental $\bar{f}_{s,d}$ e (b) energia do tacograma de cada paciente $E_{s,d}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

Para o cálculo dos próximos indicadores (energias, AFsT e Poincaré), é feita previamente uma remoção de tendência central [57] nos tacogramas $r_{s,d}[\xi, n]$. Com isso, se passa a considerar somente a variabilidade das séries temporais, visto que seus valores médios passam a ser nulos.

A energia dos tacogramas é determinada por

$$E_{s,d}[\xi] = \|r_{s,d}[\xi]\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (r_{s,d}[\xi, n])^2, \quad (4.5)$$

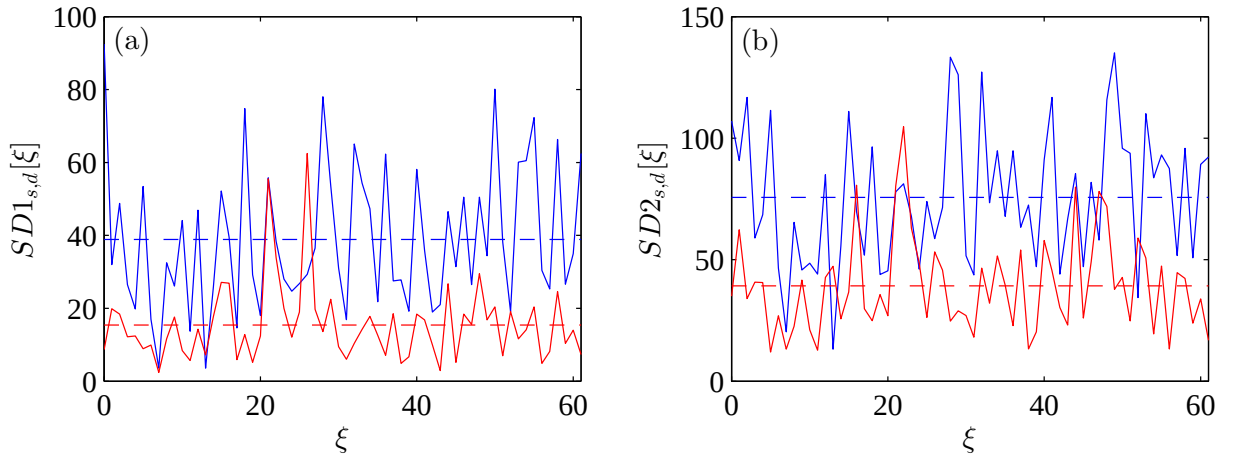
com $0 \leq \xi \leq \Xi - 1$. Desta forma, a energia média para cada grupo de pacientes ($\bar{E}_{s,d}$) pode ser calculada por

$$\bar{E}_{s,d} = \frac{1}{\Xi} \sum_{\xi=0}^{\Xi-1} E_{s,d}[\xi]. \quad (4.6)$$

Os valores encontrados para a energia média de cada grupo (com desvio padrão) são $\bar{E}_s = (4,1918 \pm 2,9101)s^2$ e $\bar{E}_d = (1,2331 \pm 1,3699)s^2$. Observa-se uma grande diferença entre os valores encontrados (18,25% de sobreposição). Isso sugere que as séries temporais do caso patológico perdem em variabilidade quando comparadas com pacientes saudáveis. A Figura 4.2(b) mostra as energias de cada paciente $E_{s,d}[\xi]$, assim como os valores médios em pontilhado. Nesse caso, é possível observar alguma diferença entre os grupos.

Na sequência, fazendo a análise pelos gráficos de Poincaré encontramos para o grupo de indivíduos saudáveis os índices médios $\overline{SD1}_s = (38,8613 \pm 19,6376)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_s = (75,6355 \pm 28,2030)\text{ms}$, ao passo que para o grupo patológico os valores médios são $\overline{SD1}_d = (15,8355 \pm 10,8353)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_d = (40,5671 \pm 21,4979)\text{ms}$. A Figura 4.3(a) mostra os valores de $SD1_{s,d}[\xi]$ e a Figura 4.3(b) os valores de $SD2_{s,d}[\xi]$ para o grupo de pacientes saudáveis e com DAC. Novamente, observam-se valores médios de $SD1$ e $SD2$ diferentes para os dois grupos.

Figura 4.3: Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente experimental: (a) $SD1_{s,d}$ e (b) $SD2_{s,d}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.

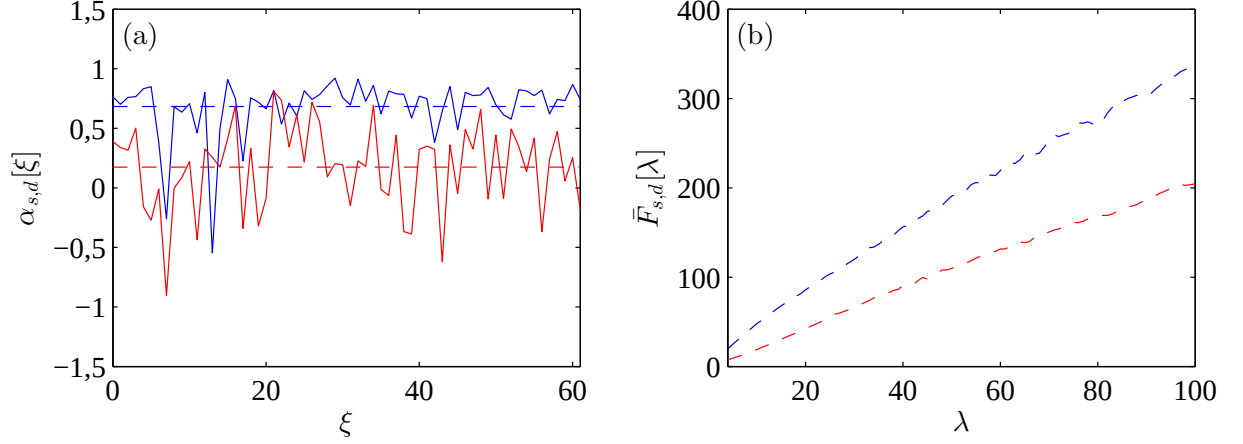


Fonte: O autor.

Em seguida, utilizando a Análise de Flutuação sem Tendência (AFsT) apresentada na Seção 2.5, com janelas de comprimento variando no intervalo $4 \leq \lambda \leq 100$, obtemos o valor médio do coeficiente α para ambos os grupos de pessoas, isto é, $\bar{\alpha}_s = 0,6822 \pm 0,2430$ para as pessoas saudáveis e $\bar{\alpha}_d = 0,1960 \pm 0,3600$ para os doentes. A Figura 4.4(a) mostra os coeficientes $\alpha_{s,d}[\xi]$ para cada paciente, assim como o valor médio para cada grupo. Além

disso, as funções de flutuação média do grupo de pessoas saudáveis ($\bar{F}_s[\lambda]$) e do grupo patológico ($\bar{F}_d[\lambda]$) são mostradas na Figura 4.4(b).

Figura 4.4: AFsT de cada paciente experimental: (a) coeficiente $\alpha_{s,d}$ e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_{s,d}[\lambda]$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.

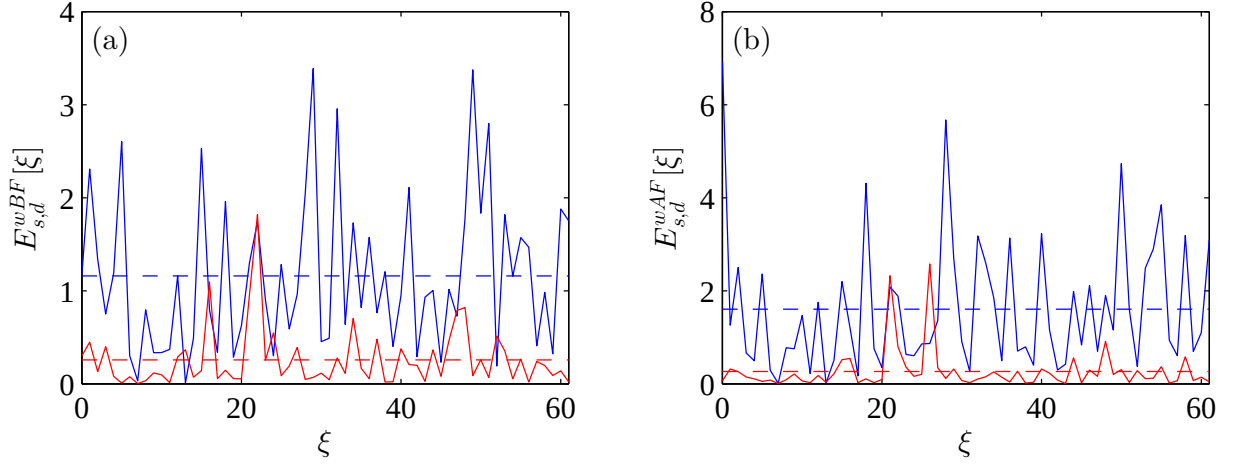


Fonte: O autor.

Com relação à energia no espectro wavelet, os valores médios encontrados para baixa frequência são $\bar{E}_s^{wBF} = (1,1591 \pm 0,8298)s^2$ e $\bar{E}_d^{wBF} = (0,3041 \pm 0,4397)s^2$. Para alta frequência, $\bar{E}_s^{wAF} = (1,6020 \pm 1,4201)s^2$ e $\bar{E}_d^{wAF} = (0,2762 \pm 0,4327)s^2$. As Figuras 4.5(a) e 4.5(b) mostram as energias $E_{s,d}^{wBF}[\xi]$ e $E_{s,d}^{wAF}[\xi]$ para cada indivíduo. Percebe-se que as energias em cada banda são menores no caso patológico, assim como a energia total de cada sinal. A Tabela 4.1 mostra todos os valores médios dos indicadores calculados nesta seção, a fim de facilitar a comparação entre os grupos de pacientes.

Concluindo essa análise inicial dos dados experimentais, observamos que tirando a frequência cardíaca média dos pacientes, em todos os outros indicadores calculados é possível observar diferenças entre os grupos saudável e patológico. Na verdade, as energias nas bandas BF e AF se relacionam, respectivamente, com os indicadores $SD2$ e $SD1$ dos gráficos de Poincaré. Essa relação foi observada enquanto se fazia a análise exploratória dos dados, mas até o momento, não foi possível estabelecer uma conexão matematicamente segura para essa observação. O que tem-se de concreto é que as DACs diminuem a energia do coração, visto que modificam seu entorno, comprometendo a irrigação sanguínea do órgão. Isso é verificado nas próximas seções, onde os dados experimentais são comparados com o modelo matemático em ambas as situações: saudáveis e doentes.

Figura 4.5: Energia Wavelet de cada paciente experimental: (a) baixa frequência $E_{s,d}^{wBF}$ e (b) alta frequência $E_{s,d}^{wAF}$. Em azul os saudáveis, em vermelho os patológicos e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

Tabela 4.1: Valores médios dos indicadores encontrados para os pacientes experimentais.

Indicadores	Saudável	DAC
$\bar{f}_{s,d}$ [bpm]	$69,4075 \pm 9,9362$	$64,9137 \pm 10,1497$
$\bar{E}_{s,d}$ [s ²]	$4,1918 \pm 2,9101$	$1,2331 \pm 1,3699$
$\bar{\alpha}_{s,d}$	$0,6822 \pm 0,2430$	$0,1960 \pm 0,3600$
$\overline{SD1}_{s,d}$ [ms]	$38,8613 \pm 19,6376$	$15,8355 \pm 10,8353$
$\overline{SD2}_{s,d}$ [ms]	$75,6355 \pm 28,2030$	$40,5671 \pm 21,4979$
$\bar{E}_{s,d}^{wBF}$ [s ²]	$1,1591 \pm 0,8298$	$0,3041 \pm 0,4397$
$\bar{E}_{s,d}^{wAF}$ [s ²]	$1,6020 \pm 1,4201$	$0,2762 \pm 0,4327$

Fonte: O autor.

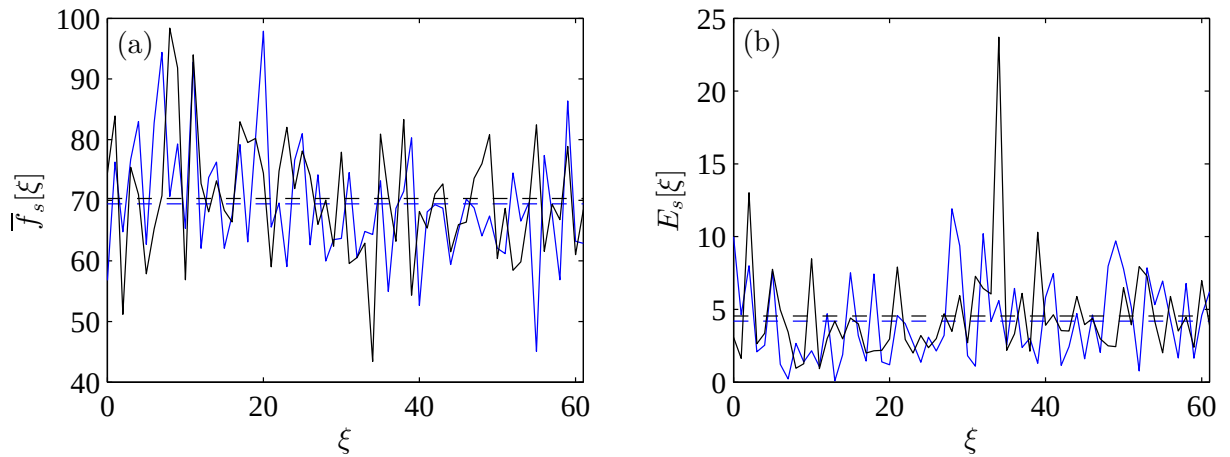
4.2 Análise do Modelo Matemático para Batimentos Saudáveis

O modelo matemático para o estudo dos batimentos cardíacos foi discutido no Capítulo anterior. Para que seja possível a comparação entre os dados simulados e experimentais são gerados 62 sinais de ECG teóricos utilizando o processo AR com frequência cardíaca f_c normalmente distribuída no intervalo $50 \leq f_c \leq 100$ bpm e desvio padrão $\sigma_c = 5$ bpm. Em seguida, são retirados seus tacogramas teóricos para serem comparados com os 62 tacogramas experimentais coletados de adultos saudáveis e cujos indicadores calculados são mostrados na segunda coluna da Tabela 4.1. Todos os tacogramas RR em estudo possuem $N = 1000$ batimentos cardíacos.

A Figura 4.6(a) mostra as frequências cardíacas médias de cada paciente (simulados e experimentais). Em pontilhado, os valores médios das frequências cardíacas de cada grupo: $\bar{f}_s = (70,2940 \pm 10,1601)\text{bpm}$ (teórico) e $\bar{f}_s = (69,4075 \pm 9,9362)\text{bpm}$ (experimental). Os intervalos possuem 91,55% de sobreposição sendo possível notar grande semelhança, inclusive na variabilidade das séries temporais.

Na Figura 4.6(b) são apresentadas as energias dos tacogramas saudáveis teóricos e experimentais. Novamente, observam-se valores médios bem próximos, isto é, $\bar{E}_s = (4,5467 \pm 3,3903)\text{s}^2$ para o modelo teórico contra $\bar{E}_s = (4,1918 \pm 2,9101)\text{s}^2$ para o experimental, correspondendo a 85,64% de sobreposição. Lembrando que para o cálculo da energia e dos demais indicadores, excluindo a frequência cardíaca, os tacogramas são considerados sem tendência e com valor médio nulo.

Figura 4.6: (a) Frequência cardíaca média de cada paciente $\bar{f}_s$ e (b) energia do tacograma de cada paciente E_s . Em preto os valores simulados, em azul os valores experimentais e em pontilhado os valores médios.

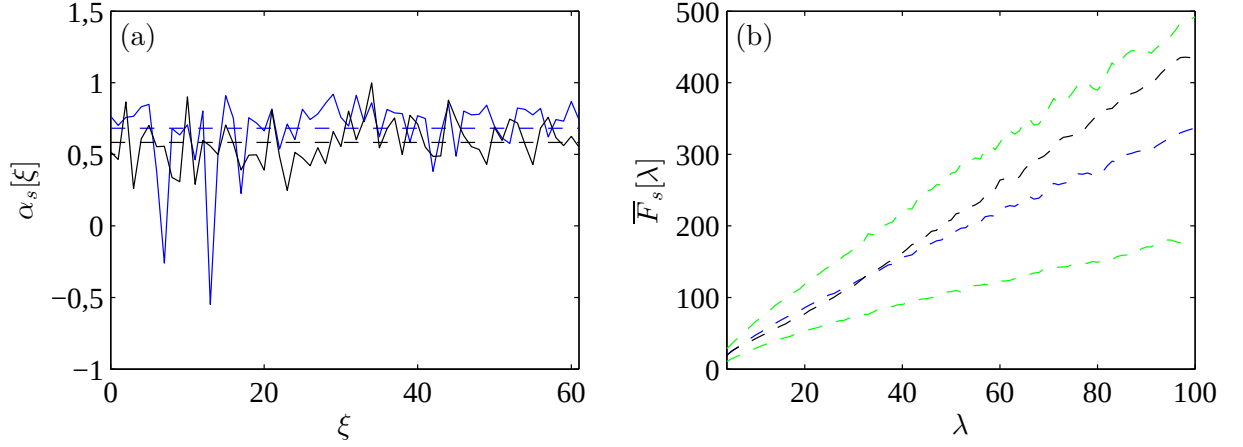


Fonte: O autor.

A Figura 4.7(a) exibe o comportamento do coeficiente α da AFsT, onde observa-se grande semelhança entre os valores médios: $\bar{\alpha}_s = 0,5831 \pm 0,1584$ para o teórico e $\bar{\alpha}_s = 0,6822 \pm 0,2430$ para o experimental (60,34% de intersecção dos intervalos). Na Figura 4.7(b) mostra-se os valores médios das funções de flutuação do grupo de normais teóricos e experimentais. As linhas pontilhadas em verde mostradas na Figura 4.7(b) representam os limites superiores e inferiores calculados via dados experimentais, isto é, o intervalo de confiança experimental. Desta forma, a pequena divergência nas extremidades dos valores médios teóricos (em preto) e experimentais (em azul) não condena o resultado, visto que ainda assim estão dentro da faixa de tolerância permitida pelos dados experimentais.

Os índices dos gráficos de Poincaré ($SD1_s[\xi]$ e $SD2_s[\xi]$) são mostrados, respectiva-

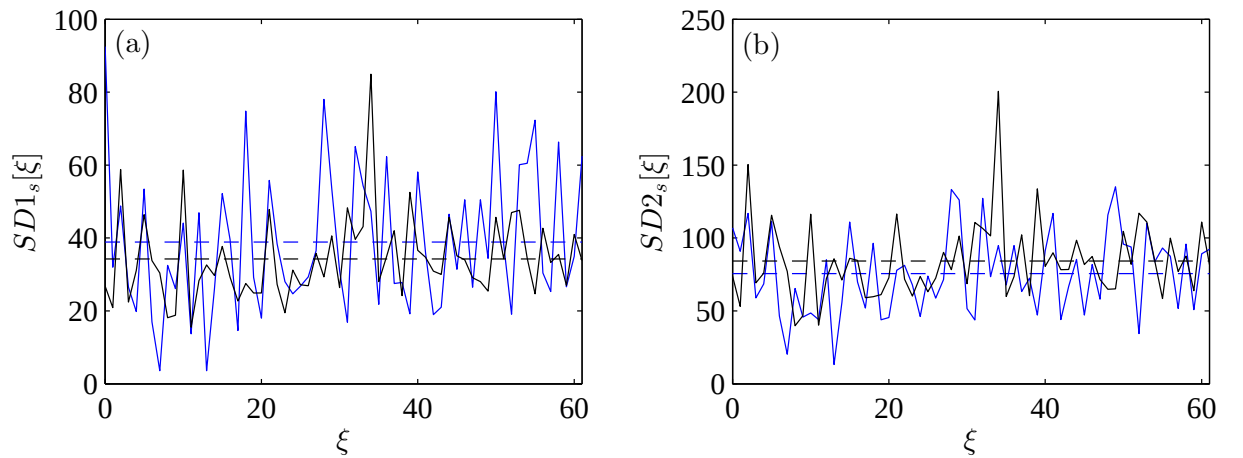
Figura 4.7: AFsT de cada paciente saudável: (a) coeficiente α_s e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_s[\lambda]$. Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

mente, nas Figuras 4.8(a) e 4.8(b). Os valores médios desses índices para os pacientes simulados são $\overline{SD1}_s = (34, 2758 \pm 11, 5831)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_s = (84, 2597 \pm 26, 5918)\text{ms}$. Para os pacientes experimentais, tem-se $\overline{SD1}_s = (38, 8613 \pm 19, 6376)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_s = (75, 6355 \pm 28, 2030)\text{ms}$. Novamente, temos valores médios próximos e cobertura de 58,99% e 72,80%, respectivamente, para $SD1_s$ e $SD2_s$. É interessante notar que em todos os valores médios observam-se desvios altos comparados com os valores centrais. Isso acontece devido a grande variabilidade dos dados experimentais e a possível presença de *outliers*.

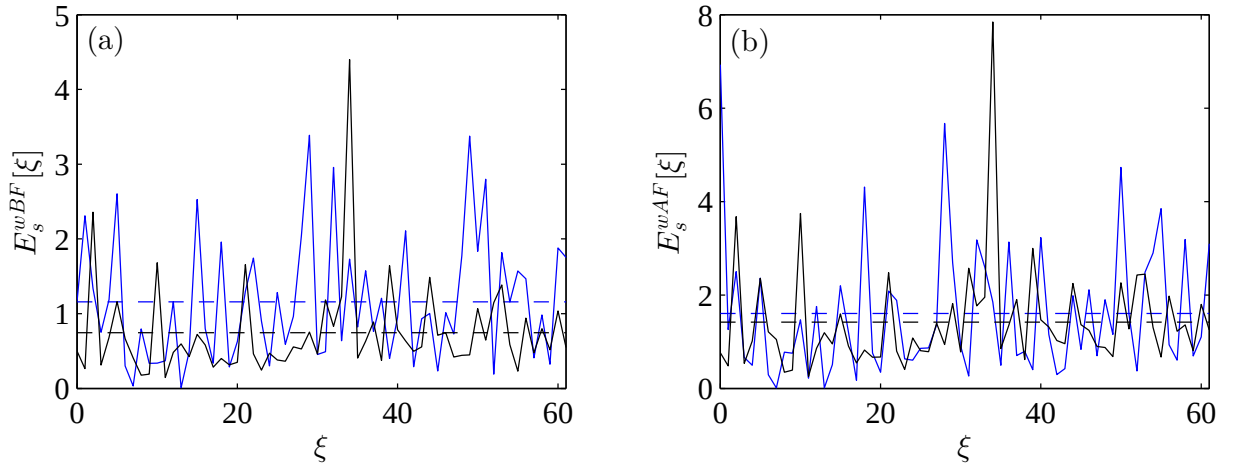
Figura 4.8: Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente saudável: (a) $SD1_s$ e (b) $SD2_s$. Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

As energias wavelet de baixa e alta frequência ($E_s^{wBF}[\xi]$ e $E_s^{wAF}[\xi]$) são mostradas, respectivamente, nas Figuras 4.9(a) e 4.9(b), com valores médios $\overline{E}_s^{wBF} = (0,7461 \pm 0,6387)s^2$ e $\overline{E}_s^{wAF} = (1,4205 \pm 1,1298)s^2$ para os pacientes simulados e $\overline{E}_s^{wBF} = (1,1591 \pm 0,8298)s^2$ e $\overline{E}_s^{wAF} = (1,6020 \pm 1,4201)s^2$ para os pacientes saudáveis experimentais. Notam-se valores médios próximos em todos os casos. Contudo, os desvios são significativos, mostrando que os dados possuem alta variabilidade de energia.

Figura 4.9: Energia wavelet de cada paciente saudável: (a) baixa frequência E_s^{wBF} e (b) alta frequência E_s^{wAF} . Em preto os saudáveis simulados, em azul os saudáveis experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

A Tabela 4.2 mostra um comparativo entre os valores médios dos indicadores calculados para tacogramas RR de adultos saudáveis experimentais e teóricos, obtidos via modelo matemático. Todos os indicadores mostram valores próximos e intervalos que apresentam significativa intersecção, tal que tem-se segurança em afirmar que o modelo conseguiu se adaptar aos dados experimentais, considerando os indicadores analisados.

4.3 Análise do Modelo Matemático para Batimentos com DAC

O modelo matemático para o estudo dos adultos com DAC é o mesmo utilizado para adultos saudáveis. Da mesma forma, são gerados 62 sinais de ECG teóricos utilizando o processo AR com frequência cardíaca normalmente distribuída no intervalo $50 \leq f_c \leq 100$ bpm. Contudo, utiliza-se $\sigma_c = 2,5$ bpm ao invés de $\sigma_c = 5$ bpm para o caso saudável, para compensar a diferença de energia. Em seguida, são retirados seus tacogramas teóricos para serem comparados com os 62 tacogramas experimentais coletados de adultos com DAC.

Tabela 4.2: Cálculo dos valores médios dos indicadores de adultos jovens saudáveis (simulados e experimentais).

Indicadores	Teórico (Modelo)	Experimental	Sobreposição (%)
$\bar{f}_s$ [bpm]	$70,2940 \pm 10,1601$	$69,4075 \pm 9,9362$	91,55
$\bar{E}_s$ [s ²]	$4,5467 \pm 3,3903$	$4,1918 \pm 2,9101$	85,64
$\bar{\alpha}_s$	$0,5831 \pm 0,1584$	$0,6822 \pm 0,2430$	60,34
$\overline{SD1}_s$ [ms]	$34,2758 \pm 11,5831$	$38,8613 \pm 19,6376$	58,99
$\overline{SD2}_s$ [ms]	$84,2597 \pm 26,5918$	$75,6355 \pm 28,2030$	72,80
$\bar{E}_s^{wBF}$ [s ²]	$0,7461 \pm 0,6387$	$1,1591 \pm 0,8298$	56,10
$\bar{E}_s^{wAF}$ [s ²]	$1,4205 \pm 1,1298$	$1,6020 \pm 1,4201$	79,56

Fonte: O autor.

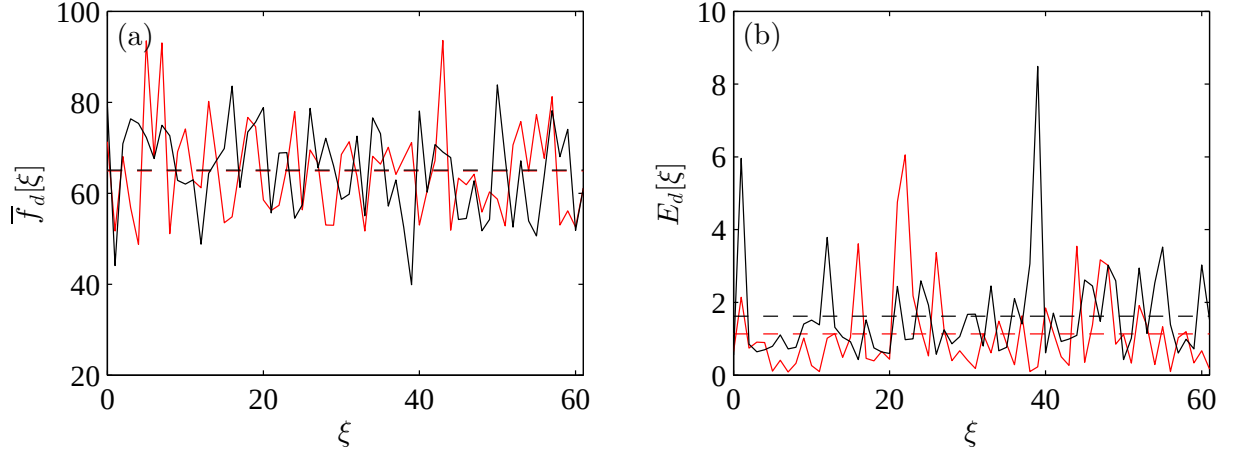
Todos os tacogramas possuem $N = 1000$ batimentos cardíacos. Salienta-se aqui, que na análise prévia dos dados experimentais, não foram observadas alterações na frequência cardíaca média de pacientes saudáveis e com DAC. Por outro lado, a variabilidade das séries era diferente. Por isso, manteve-se o intervalo das frequências simuladas e alterou-se o desvio padrão dos batimentos.

A Figura 4.10(a) mostra as frequências cardíacas médias de cada paciente. Em vermelho os experimentais e em preto os simulados. Em pontilhado, os valores médios das frequências cardíacas de cada grupo: $\bar{f}_d = (65,1007 \pm 9,9538)\text{bpm}$ (teórico) e $\bar{f}_d = (64,9137 \pm 10,1497)\text{bpm}$ (experimental). Os intervalos possuem 98,07% de sobreposição sendo possível notar grande semelhança, inclusive na variabilidade das séries temporais.

A Figura 4.10(b) são apresentadas as energias dos tacogramas patológicos teóricos e experimentais. Novamente, se observam valores médios bem próximos, isto é, $\bar{E}_d = (1,6211 \pm 1,3508)\text{s}^2$ para o modelo teórico e $\bar{E}_s = (1,2331 \pm 1,3699)\text{s}^2$ para o experimental, representando 75,04% de sobreposição. Lembrando que para o cálculo da energia e dos demais indicadores, excluindo a frequência cardíaca, os tacogramas são considerados sem tendência e com valor médio nulo. Deve-se notar que o desvio padrão da energia experimental é maior que seu valor médio. Isso acontece devido a grande variabilidade dos dados experimentais.

A Figura 4.11(a) exhibe o comportamento do coeficiente α da AFsT (Seção 2.5), onde observa-se certa semelhança entre os valores médios: $\bar{\alpha}_d = 0,3502 \pm 0,1485$ para o teórico e $\bar{\alpha}_d = 0,1960 \pm 0,3600$ para o experimental (41,25% de intersecção dos intervalos). Na Figura 4.11(b) mostram-se os valores médios das funções de flutuação dos grupos DAC

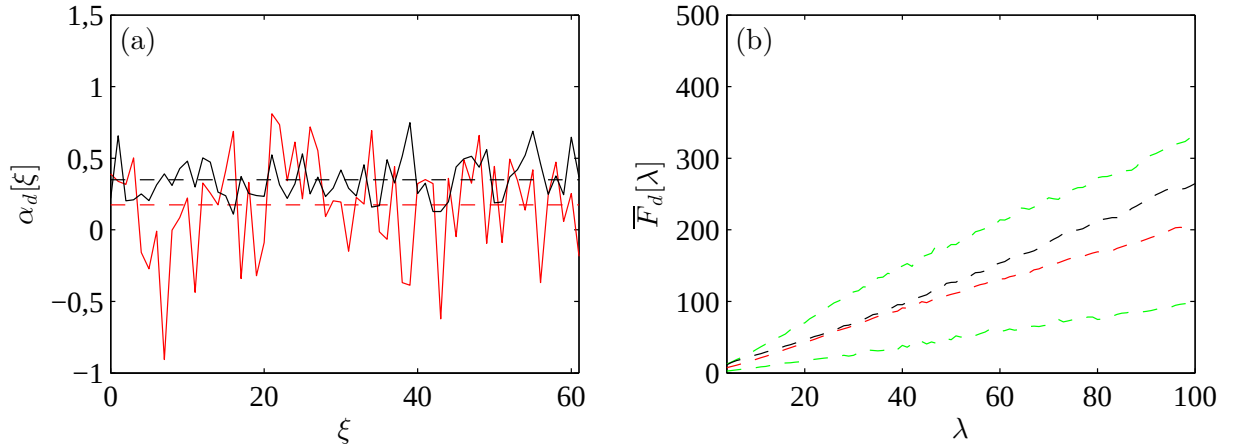
Figura 4.10: (a) Frequência cardíaca média de cada paciente $\bar{f}_d$ e (b) energia do tacograma de cada paciente E_d . Em preto os valores simulados e em vermelho os valores experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

teóricos e experimentais. Novamente, as linhas pontilhadas em verde mostram os limites superiores e inferiores calculados via dados experimentais, tal que, a pequena divergência nas extremidades dos valores médios teóricos (em preto) e experimentais (em vermelho) não condena o resultado, visto que ainda assim estão dentro da faixa de tolerância.

Figura 4.11: AFsT de cada paciente com DAC: (a) coeficiente α_d e (b) funções de flutuação média $\bar{F}_d[\lambda]$. Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.

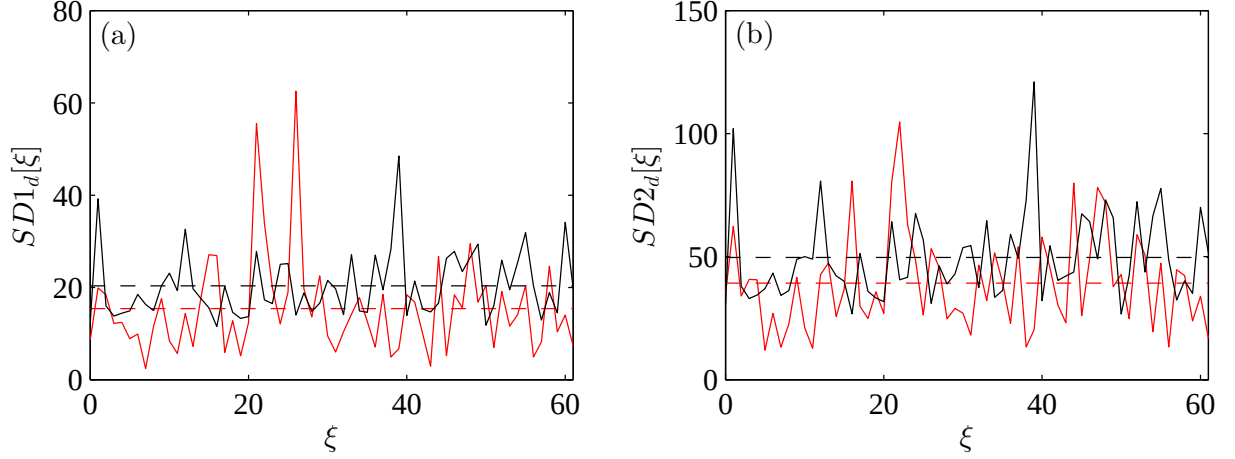


Fonte: O autor.

Os índices dos gráficos de Poincaré ($SD1_d[\xi]$ e $SD2_d[\xi]$) são mostrados, respectivamente, nas Figuras 4.12(a) e 4.12(b). Os valores médios desses índices para os pacientes simulados são $\overline{SD1}_d = (20,3194 \pm 7,1813)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_d = (49,6387 \pm 17,9669)\text{ms}$. Para os pacientes experimentais, tem-se $\overline{SD1}_d = (15,8355 \pm 10,8353)\text{ms}$ e $\overline{SD2}_d =$

(40, 5671 $\pm$ 21, 4979)ms. Novamente, temos valores médios próximos e cobertura de 60,15% e 62,62%, respectivamente, para $SD1_d$ e $SD2_d$.

Figura 4.12: Índices dos gráficos de Poincaré de cada paciente com DAC: (a) $SD1_d$ e (b) $SD2_d$. Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

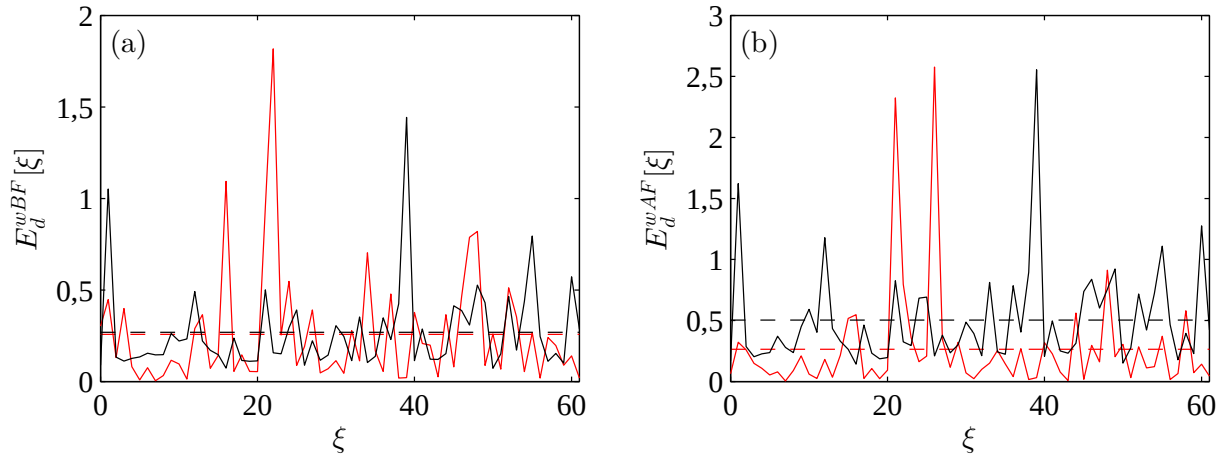
As energias wavelet de baixas e altas frequências ($E_d^{wBF}[\xi]$ e $E_d^{wAF}[\xi]$) são mostradas, respectivamente, nas Figuras 4.13(a) e 4.13(b), com valores médios $\overline{E}_d^{wBF} = (0, 2689 \pm 0, 2359)s^2$ e $\overline{E}_d^{wAF} = (0, 5025 \pm 0, 4075)s^2$ para os pacientes simulados e $\overline{E}_d^{wBF} = 0, 3041 \pm 0, 4397 s^2$ e $\overline{E}_d^{wAF} = (0, 2762 \pm 0, 4327)s^2$ para os pacientes doentes experimentais. Notam-se valores médios próximos em todos os casos, mas com desvios significativos, mostrando novamente que os dados possuem alta variabilidade de energia.

A Tabela 4.3 mostra um comparativo entre os valores médios dos indicadores calculados para tacogramas RR de adultos doentes experimentais e teóricos, obtidos via modelo matemático. Neste caso, também há segurança em afirmar que o modelo matemático conseguiu reproduzir o comportamento do coração sob influência de DAC, no que tange à VFC.

Analisando todo o contexto, tanto de adultos saudáveis quanto de adultos com algum tipo de DAC e confrontando com os resultados simulados via modelo matemático, observa-se que o modelo está adequado para estudar esse tipo de patologia. Além disso, foi possível verificar que realmente as DACs não são patologias internas do coração, isto é, por atuarem no entorno do órgão elas enfraquecem os batimentos, isto é, a energia do coração e podem provocar uma parada cardíaca.

Esse enfraquecimento provocado pelo entupimento das artérias coronárias são repro-

Figura 4.13: Energia wavelet de cada paciente com DAC: (a) baixa frequência E_d^{wBF} e (b) alta frequência E_d^{wAF} . Em preto os pacientes com DAC simulados, em vermelho os pacientes com DAC experimentais e em pontilhado os valores médios.



Fonte: O autor.

Tabela 4.3: Cálculo dos valores médios dos indicadores de adultos com Doença Arterial Coronariana (simulados e experimentais).

Indicadores	Teórico (Modelo)	Experimental	Sobreposição (%)
f_d [bpm]	$65, 1007 \pm 9, 9538$	$64, 9137 \pm 10, 1497$	98, 07
$\bar{E}_d$ [s ²]	$1, 6211 \pm 1, 3508$	$1, 2331 \pm 1, 3699$	75, 04
$\bar{\alpha}_d$	$0, 3502 \pm 0, 1485$	$0, 1960 \pm 0, 3600$	41, 25
$\overline{SD1}_d$ [ms]	$20, 3194 \pm 7, 1813$	$15, 8355 \pm 10, 8353$	60, 15
$\overline{SD2}_d$ [ms]	$49, 6387 \pm 17, 9669$	$40, 5671 \pm 21, 4979$	62, 62
$\bar{E}_d^{wBF}$ [s ²]	$0, 2689 \pm 0, 2359$	$0, 3041 \pm 0, 4397$	53, 66
$\bar{E}_d^{wAF}$ [s ²]	$0, 5025 \pm 0, 4075$	$0, 2762 \pm 0, 4327$	57, 55

Fonte: O autor.

duzidos no modelo matemático apresentado na Equação (3.3) quando de altera um único parâmetro, a variância dos batimentos (σ_c^2), inteiramente ligado com a energia do coração. Desta forma, essa classe de doenças leva o coração à falência diminuindo sua energia e sua potência para bombear sangue para o correto funcionamento do corpo humano.

5 Conclusão

Foi estudado um modelo matemático dado por equações diferenciais acopladas que descreve sinais de eletrocardiogramas de pessoas saudáveis e de pessoas com doenças arteriais coronarianas, respeitando as características do tacograma RR. Neste modelo, proposto originalmente por McSharry e colaboradores [12], os tacogramas RR são gerados por um espectro composto por duas funções gaussianas, que incorporam as ondas de Mayer e a arritmia sinusal respiratória em frequências de 0, 1Hz e 0, 25Hz, respectivamente. Ocorre que o uso de duas gaussianas estava em desacordo com os dados experimentais utilizados neste trabalho, dado o fato de que os picos encontrados no espectro não eram isoladamente separados, como sugerido no trabalho original. Neste sentido, foi proposto um processo estocástico autorregressivo para se obter tacogramas RR mais próximos dos reais. Foi observado que o espectro de potência do processo AR é mais próximo do espectro de potência dos dados experimentais. Isso foi mostrado em trabalho recente [16] cujo arXiv está presente no apêndice D.

No mesmo escopo, estudamos as doenças arteriais coronarianas e concluímos que essa classe de patologias não está associada diretamente com o coração. Essas doenças alteram a vizinhança do coração e fazem com que a potência (energia) do órgão diminua levando a complicações sérias. Essa diminuição de energia é observada pela menor variabilidade nos tacogramas. O mesmo modelo utilizado para modelar batimentos saudáveis foi utilizado para modelar batimentos patológicos, sendo que somente um parâmetro foi alterado para se conseguir proximidade com os dados experimentais, isto é, alterando somente a variância dos batimentos do indivíduo (σ_c) se obtém tacogramas relacionados com DAC's. Isso foi bem reproduzido no modelo matemático.

Como ferramentas para comparação entre dados simulados e experimentais, optou-se pela análise espectral por wavelets, pelos indicadores dos gráficos de Poincaré e pela análise de flutuação sem tendência. Tanto para batimentos saudáveis quanto para batimentos com DAC's, os indicadores calculados se aproximaram de forma bem interessante dos dados experimentais. Além disso, o diagnóstico feito por esses indicadores é clássico e bem aceito

pelos cardiologistas, amparando este trabalho do ponto de vista clínico.

Por fim, acreditamos que o modelo matemático com processo autorregressivo constitui um importante passo no desenvolvimento de estratégias para simular sinais de eletrocardiograma, tal que, nossas simulações permitem obter e também fazer previsão de sinais de eletrocardiograma de indivíduos nas mesmas situações analisadas durante o trabalho.

Como trabalhos futuros, destacamos a análise dinâmica do modelo proposto no sentido de se estudar caos e influências externas no modelo que possam relacionar-se com alguma situação de controle como, por exemplo, marca-passos artificiais e medicamentos. Há muito material na literatura que sinaliza que os tacogramas RR apresentam um comportamento caótico. Contudo, não há nenhum modelo matemático casado com dados experimentais que ampare essa afirmação. Como trabalho futuro, pretendemos investigar esse cenário, pois vários pesquisadores acreditam que algumas arritmias e outras patologias sejam associadas a tacogramas caóticos.

Além disso, há estudos relacionados com a válvula mitral do coração que biologicamente apresenta muitos problemas que levam a complicações sérias. Tentar reproduzir esse comportamento via modelo matemáticos pode representar um grande avanço na compreensão de alguns problemas que acometem várias pessoas pelo mundo.

Referências

- [1] MOHRMAN, D. E.; HELLER, L. J. *Fisiologia Cardiovascular*. 6. ed. Porto Alegre: Mc-Graw-Hill, 2008.
- [2] CURTIS, H. *Biologia*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1977.
- [3] HALL, J. E. *Guyton & Hall Tratado de Fisiologia Médica*. 13. ed. São Paulo: Elsevier, 2016.
- [4] SYKES, A. H. **A D Waller and the Electrocardiogram, 1887.** *British Medical Journal*, v. 294, p. 1396–1398, 1987.
- [5] RIVERA-RUIZ, M.; CAJAVILCA, C.; VARON, J. **Einthoven’s String Galvanometer: The First Electrocardiograph.** *Texas Heart Institute Journal*, v. 35, n. 2, p. 174–178, 2008.
- [6] DE GAETANO, A.; PANUNZI, S.; RINALDI, F.; RISI, A.; SCIANDRONE, M. **A Patient Adaptable ECG Beat Classifier Based on Neural Networks.** *Appl Math Comput*, v. 213, p. 243–249, 2009.
- [7] KUDINOV, A. N.; LEBEDEV, D. Y.; TSVETKOV, V. P.; TSVETKOV, I. V. **Mathematical Model of the Multifractal Dynamics and Analysis of Heart Rates.** *Math Models Comput Simul*, v. 7, p. 214–221, 2015.
- [8] SCHENONE, E.; COLIN, A.; GERBEAU, J. F. **Numerical Simulation of Electrocardiograms for Full Cardiac Cycles in Healthy and Pathological Conditions.** *Int J Numer Meth Biomed Eng*, v. 32, p. e02744, 2016.
- [9] VAN DER POL, B. **On Relaxation Oscillations.** *Philosophical Magazine*, v. 2, p. 978–992, 1926.
- [10] GOIS, S. R. F. S. M.; SAVI, M. A. **An Analysis of Heart Rhythm Dynamics using a Three-Coupled Oscillator Model.** *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 41, n. 5, p. 2553–2565, 2009.
- [11] FERREIRA, B. B.; SAVI, M. A.; PAULA, A. S. **Chaos Control Applied to Cardiac Rhythms Represented by ECG Signals.** *Physica Scripta*, Stockholm, v. 89, n. 10, p. 105203, 2014.
- [12] MCSHARRY, P. E.; CLIFFORD, G. D.; TARASSENKO, L.; SMITH, L. A. **A Dynamical Model for Generating Synthetic Electrocardiogram Signals.** *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 50, n. 3, p. 289–294, 2003.
- [13] ACHARYA, U. R.; JOSEPH, K. P.; KANNATHAL, N.; LIM, C. M.; SURI, J. S. **Heart Rate Variability: A Review.** *Med. Bio. Eng. Comput.*, v. 44, p. 1031–1051, 2006.

- [14] YASUMA, F.; HAYANO, J. **Respiratory Sinus Arrhythmia: Why does the Heartbeat Synchronize with Respiratory Rhythm?** *Chest*, v. 125, p. 683–690, 2004.
- [15] BOARDMAN, A.; SCHLINDWEIN, F. S.; ROCHA, A. P.; LEITE, A. **A Study on the Optimum Order of Autoregressive Models for Heart Rate Variability.** *Physiological Measurement*, v. 23, p. 325–336, 2002.
- [16] EVARISTO, R. M.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; IAROSZ, K. C.; SZEZECH JR, J. D.; GODOY, M. F. **Mathematical Model with Autoregressive Process for Electrocardiogram Signals.** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 57, p. 415–421, 2018.
- [17] PENG, C. K.; V., B. S.; HAVLIN, S.; SIMONS, M.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. **Mosaic Organization of DNA Nucleotides.** *Phys. Rev. E*, v. 49, p. 1685–1689, 1994.
- [18] GUZIK, P.; PISKORSKI, J.; KRAUZE, T.; SCHNEIDER, R.; WESSELING, K. H.; A., W.; WYSOCKI, H. **Correlations Between the Poincaré Plot and Conventional Heart Rate Variability Parameters Assessed During Paced Breathing.** *J Physiol Sci*, v. 57, p. 63–71, 2007.
- [19] RIBEIRO, A. G.; COTTA, R. M. M.; RIBEIRO, S. M. R. **A Promoção da Saúde e a Prevenção Integrada dos Fatores de Risco para Doenças Cardiovasculares.** *Ciênc. Saúde Coletiva*, v. 17, p. 7–17, 2012.
- [20] GODOY, M. F. **Teoria do Caos Aplicada à Medicina.** 2003. p. 179. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, 2003.
- [21] BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A. **Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso.** Porto Alegre: Artmed, 2008.
- [22] GRUDZINSKI, K.; ZEBROWSKI, J. J. **Modeling Cardiac Pacemakers with Relaxation Oscillators.** *Physica A*, Amsterdam, v. 336, n. 1, p. 153–162, 2004.
- [23] SANTOS, A. M.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. **Rhythm Synchronization and Chaotic Modulation of Coupled Van der Pol Oscillators in a Model for the Heartbeat.** *Physica A*, Amsterdam, v. 338, n. 3, p. 335–355, 2004.
- [24] VAN DER POL, B.; VAN DER MARK, J. **The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillator and an Electrical Model of the Heart.** *The London, Edinburgh and Dublin Physiological Magazine and Journal of Science*, v. 6, p. 763–775, 1928.
- [25] VIANA, R. L. **Oscilações de Relaxação e suas Aplicações - II.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 3, p. 3305, 2011.
- [26] DUBIN, D. **Interpretação Rápida do ECG.** São Paulo: EPUB, 1996.
- [27] FELDMAN, J.; GOLDWASSER, G. P. **Eletrocardiograma: recomendações para a sua interpretação.** *Revista da SOCERJ*, v. 17, n. 4, p. 251–256, 2004.

- [28] PASTORE, C.; PINHO, C.; GERMINIANI, H.; SAMESSIMA, N.; MANO, R. **Diretrizes da Sociedade Brasileira de Cardiologia sobre Análise e Emissão de Laudos Eletrocardiográficos.** *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*, v. 93, p. 1–19, 2009.
- [29] BAZZET, H. C. **An Analysis of the Time-Relations of Electrocardiograms.** *Heart*, v. 7, p. 353–370, 1920.
- [30] ZHANG, R.; IWASAKI, K.; ZUCKERMAN, J. H.; BEHBEHANI, K.; CRANDALL, C. G.; LEVINE, B. D. **Mechanism of Blood Pressure and R-R Variability: Insights from Ganglion Blockade in Humans.** *Journal of Physiology*, v. 543, n. 1, p. 337–348, 2002.
- [31] LOPES, P. F. F.; OLIVEIRA, M. I. B.; ANDRÉ, S. M. S.; NASCIMENTO, D. L. A.; SILVA, C. S. S.; REBOUÇAS, G. M.; FELIPE, T. R.; FILHO, N. J. B. A.; MEDEIROS, H. J. **Aplicabilidade Clínica da Variabilidade da Frequência Cardíaca.** *Revista Neurociências*, v. 21, n. 4, p. 600–603, 2013.
- [32] MALIK, M. **Heart Rate Variability.** *European Heart Journal*, v. 17, p. 354–381, 1996.
- [33] GROSSMAN, P.; TAYLOR, E. **Toward Understanding Respiratory Sinus Arrhythmia: Relations to Cardiac Vagal Tone, Evolution and Biobehavioral Functions.** *Biological Psychology*, v. 24, p. 263–285, 2007.
- [34] JULIEN, C. **The Enigma of Mayer Waves: Facts and Models.** *Cardiovascular Research*, v. 70, p. 12–21, 2006.
- [35] DEBOER, R. W.; KAREMAKER, J. M.; STRACKEE, J. **Hemodynamic Fluctuations and Baroreflex Sensitivity in Humans: A Beat-to-Beat Model.** *American Journal of Physiology*, v. 253, n. 3, p. 680–689, 1987.
- [36] ELGHOZI, J. L.; LAUDE, D.; GIRARD, A. **Effects of Respiration on Blood Pressure and Heart Rate Variability in Humans.** *Clin Exp Pharmacol Physiol*, v. 18, n. 11, p. 735–742, 1991.
- [37] CESAR, L.; FERREIRA, J. F.; ARMAGANIJAN, D.; GOWDAK, L. H.; MANSUR, A. P.; BODANESE, L. C.; ET AL. **Diretriz de Doença Coronária Estável.** *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*, v. 103, n. 2 Supl. 2, p. 1–59, 2014.
- [38] OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-Time Signal Processing.** 3. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [39] PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. **Digital Signal Processing.** 4. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [40] PINNA, G. D.; MAESTRI, R.; DI CESARE, A.; COLOMBO, R.; MINUCO, G. **The Accuracy of Power-Spectrum Analysis of Heart Rate Variability from Annotated RR Lists Generated by Holter Systems.** *Physiological Measurement*, v. 15, n. 2, p. 163, 1994.

- [41] GROSSMANN, A.; MORLET, J. **Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape.** *SIAM J. Math. Anal.*, v. 15, p. 723–736, 1984.
- [42] DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets.** Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [43] MALLAT, S. **A Wavelet Tour of Signal Processing.** 3. ed. Cambridge: Academic Press, 2003.
- [44] MALLAT, S. G. **A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation.** *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989.
- [45] AKANSU, A. N.; HADDAD, R. A. **Multiresolution Signal Decomposition.** 2. ed. Massachusetts: Academic Press, 2000.
- [46] PERCIVAL, D. B.; WALDEN, A. T. **Wavelet Methods for Time Series Analysis.** New York: Cambridge University Press, 2000.
- [47] VIDAKOVIC, B. **Statistical Modeling by Wavelets.** New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [48] GOLINSKA, A. K. **Poincaré Plots in Analysis of Selected Biomedical Signals.** *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, v. 35, n. 48, p. 117–127, 2013.
- [49] ROY, B.; GHATAK, S. **Métodos não-lineares para avaliar mudanças na variabilidade da frequência cardíaca em pacientes com diabetes tipo 2.** *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*, v. 101, p. 317–327, 10 2013.
- [50] GOLINSKA, A. K. **Detrended Fluctuation Analysis (DFA) in Biomedical Signal Processing: Selected Examples.** *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, v. 29, n. 42, p. 107–115, 2012.
- [51] LEE, J. M.; KIM, D. J.; KIM, I. Y.; PARK, K. S.; KIM, S. I. **Detrended Fluctuation Analysis of EEG in Sleep Apnea using MIT/BIH Polysomnography Data.** *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, v. 32, n. 1, p. 37–47, 2002.
- [52] PENG, C. K.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E.; GOLDBERGER, A. L. **Quantification of Scaling Exponents and Crossover Phenomena in Nonstationary Heartbeat Time Series.** *Chaos*, v. 5, p. 82–87, 1995.
- [53] GIFANI, P.; RABIEE, H. R.; HASHEMI, M. H.; TASLIMI, P.; GHANBARI, M. **Optimal fractal-scaling analysis of human EEG dynamic for depth of anesthesia quantification.** *Journal of the Franklin Institute*, v. 344, n. 3, p. 212–229, 2007.
- [54] DESCARTES, R. **Discurso do Método.** Porto Alegre: L&PM, 2012.
- [55] WESSEL, N.; KURTHS, J.; DITTO, W.; BAUERNSCHMITT, R. **Introduction: Cardiovascular Physics.** *Chaos*, v. 17, n. 1, p. 015101, 2007.
- [56] FERREIRA, B. B.; SAVI, M. A.; PAULA, A. S. **Chaos Control Applied to Heart Rhythm Dynamics.** *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 44, n. 8, p. 587–599, 2011.

- [57] BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer, 1991.
- [58] FERREIRA, M. T.; MESSIAS, M.; VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M. **Caracterização do Comportamento Caótico da Variabilidade da Frequência Cardíaca (VFC) em Jovens Saudáveis**. *TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.*, v. 11, n. 2, p. 141–150, 2010.
- [59] VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M.; HOSHI, R. A.; CARVALHO, T. D.; GODOY, M. F. **Noções Básicas de Variabilidade da Frequência Cardíaca e sua Aplicabilidade Clínica**. *Rev. Bras. Cir. Cardiovasc.*, v. 24, n. 2, p. 205–217, 2009.
- [60] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

APÊNDICE A – Espaços $L_2(\mathbb{R})$ e $l_2(\mathbb{Z})$

A.1 Espaço $L_2(\mathbb{R})$

O espaço $L_2(\mathbb{R})$ representa o espaço de funções (sinais de tempo contínuo) quadraticamente integráveis, isto é, de energia finita. A energia de um sinal $x(t)$ é finita ao longo de todo eixo dos reais quando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (\text{A.1})$$

Desta forma, o espaço

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \right. \right\} \quad (\text{A.2})$$

é um espaço de Hilbert, sendo o produto interno de dois sinais $x_1(t) \in L_2(\mathbb{R})$ e $x_2(t) \in L_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt, \quad (\text{A.3})$$

onde o asterisco representa o conjugado complexo. Dois sinais x_1 e x_2 são ditos ortogonais quando $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

A norma de um sinal $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ é definida por,

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad (\text{A.4})$$

sendo proveniente do produto interno, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A convolução entre $x_1(t) \in L_2(\mathbb{R})$ e $x_2(t) \in L_2(\mathbb{R})$ é definida por

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u) x_2(t-u) du. \quad (\text{A.5})$$

Nesta descrição topológica se utiliza o conceito de integral de Lebesgue e toda a

Análise de Fourier e, conseqüentemente, a Análise Wavelet são realizadas nesse contexto. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [60].

A.2 Espaço $l_2(\mathbb{Z})$

O espaço $l_2(\mathbb{Z})$ representa o espaço das sequências (sinais de tempo discreto) quadraticamente somáveis, isto é, de energia finita. A energia de um sinal $x[n]$ é finita quando

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (\text{A.6})$$

O espaço $l_2(\mathbb{Z})$ também é um espaço de Hilbert, sendo o produto interno de dois sinais $x_1[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ e $x_2[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ definido por

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2^*[n], \quad (\text{A.7})$$

onde o asterisco representa o conjugado complexo. Dois sinais x_1 e x_2 são ditos ortogonais quando $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

A norma de um sinal $x[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ é definida por,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2}, \quad (\text{A.8})$$

sendo proveniente do produto interno, isto é, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A convolução discreta entre $x_1[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ e $x_2[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ é definida por

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]. \quad (\text{A.9})$$

Em geral, os sinais de tempo discreto, quando analisados estaticamente como neste caso, possuem comprimento finito N , isto é, $x[n]$, com $0 \leq n \leq N-1$. Isso permite que eles sejam escritos na forma de matrizes coluna, isto é, $\mathbf{x} = (x[0] \cdots x[N-1])^T$.

Com isso, podemos escrever que

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = \mathbf{x}_1^H \mathbf{x}_2, \quad (\text{A.10})$$

com H representando a transposição hermitiana (transposta conjugada). Além disso, a

norma se torna,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}. \quad (\text{A.11})$$

Para sinais discretos, recomenda-se a utilização da convolução circular

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k)_N], \quad (\text{A.12})$$

onde $(n-k)_N = (n-k) \bmod N$.

O processamento de sinais como um todo está amparado neste dois espaços, sendo que maiores detalhes de sua construção topológica podem ser encontrados na referência [60].

APÊNDICE B – Bancos de Filtros QMF e Filtros de Daubechies

B.1 Decimação

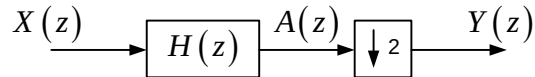
A operação de decimação utilizada na Transformada Wavelet está relacionada com o processamento multitaxa de sinais [38, 39], sendo representada na Figura B.1, isto é, trata-se de uma filtragem seguida de uma redução da taxa de amostragem por fator 2. Pela figura, temos que, $a[n] = x[n] * h[n]$ tal que

$$y[n] = a[2n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] h[2n - l]. \quad (\text{B.1})$$

A transformada z da Equação (B.1) é

$$Y(z) = \frac{1}{2} [A(z^{1/2}) + A(-z^{1/2})] = \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) H(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) H(-z^{1/2})]. \quad (\text{B.2})$$

Figura B.1: Decimação por fator dois no domínio z .



Fonte: O autor.

B.2 Interpolação

A operação de interpolação também está relacionada com o processamento multitaxa de sinais, sendo representada na Figura B.2. Nesse caso, temos que,

$$a[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \delta[n-2l], \quad (\text{B.3})$$

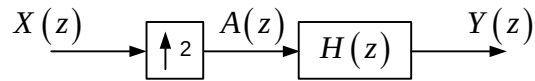
tal que

$$y[n] = a[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] h[n-2l]. \quad (\text{B.4})$$

No domínio z , temos que $A(z) = X(z^2)$, tal que

$$Y(z) = A(z) H(z) = X(z^2) H(z). \quad (\text{B.5})$$

Figura B.2: Interpolação por fator dois no domínio z .

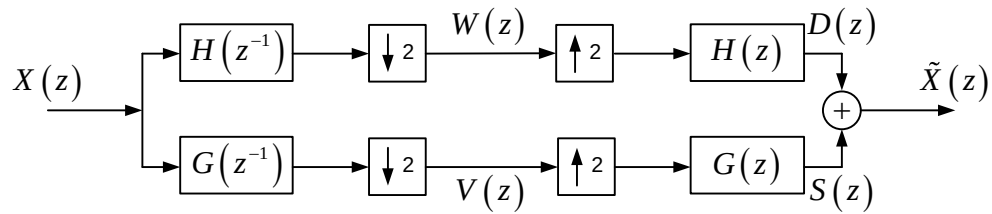


Fonte: O autor.

B.3 Bancos de Filtros Espelhados em Quadratura

O banco de filtros apresentado na Figura B.3 é a base da decomposição wavelet. Nesta seção, apresentamos as configurações básicas dessa construção.

Figura B.3: Banco de filtros utilizado na decomposição wavelet.



Fonte: O autor.

Esse banco decompõe o sinal original $x[n]$ em duas bandas principais de frequências e, sob algumas condições, é possível reconstruir o sinal original somando essas componentes derivadas. De forma ideal, para conseguirmos uma reconstrução perfeita, devemos ter $\tilde{X}(z) = X(z)$.

De acordo com a Figura B.3 e com o que foi discutido anteriormente sobre decimação e interpolação, temos que

$$W(z) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) H(z^{-1/2}) + X(-z^{1/2}) H(-z^{-1/2})] \quad (\text{B.6})$$

e

$$V(z) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) G(z^{-1/2}) + X(-z^{1/2}) G(-z^{-1/2})]. \quad (\text{B.7})$$

Além disso,

$$D(z) = W(z^2) H(z) = \frac{1}{2} [X(z) H(z^{-1}) + X(-z) H(-z^{-1})] H(z) \quad (\text{B.8})$$

e

$$S(z) = V(z^2) G(z) = \frac{1}{2} [X(z) G(z^{-1}) + X(-z) G(-z^{-1})] G(z), \quad (\text{B.9})$$

tal que,

$$\tilde{X}(z) = D(z) + S(z) = \frac{1}{2} A(z) X(z) + \frac{1}{2} B(z) X(-z) \quad (\text{B.10})$$

com

$$A(z) = H(z) H(z^{-1}) + G(z) G(z^{-1}) \quad (\text{B.11})$$

e

$$B(z) = H(z) H(-z^{-1}) + G(z) G(-z^{-1}). \quad (\text{B.12})$$

Desta forma, para que se tenha reconstrução perfeita ($\tilde{X}(z) = X(z)$), devemos ter que $A(z) = 2$ e $B(z) = 0$.

Resolvendo esse sistema, encontramos que

$$H(z) = -z^{-1} G(-z^{-1}). \quad (\text{B.13})$$

Essa relação, que no domínio do tempo pode ser escrita como $h[n] = (-1)^n g[1-n]$, é chamada relação de quadratura e, com ela, o banco de filtros mostrado na Figura B.3 é chamado de Banco de Filtros Espelhados em Quadratura (QMF - Quadrature Mirror Filters). Ela garante que a reconstrução dos sinais decompostos seja perfeita como se deseja quando se utiliza alguma transformada.

B.4 Filtros de Daubechies

As wavelets propostas por Ingrid Daubechies [42] revolucionaram toda a teoria sobre o assunto. Ela foi a pioneira a construir bases de wavelets ortogonais de suporte compacto que levam a filtros de comprimento finito (FIR) e podem ser implementadas sem nenhum tipo de truncamento na resposta impulsiva dos filtros. Aqui são apresentadas as principais

ideias sobre o assunto, a começar que ideia de que o filtro $G(\omega)$ pode ser escrito como

$$G(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega), \quad (\text{B.14})$$

onde $\mathcal{L}(\omega)$ é um polinômio trigonométrico. Logo, podemos escrever que

$$|G(\omega)|^2 = 2 \cos^{2N} \left(\frac{\omega}{2} \right) |\mathcal{L}(\omega)|^2, \quad (\text{B.15})$$

tal que a condição de ortogonalidade das wavelets é satisfeita, isto é,

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 2. \quad (\text{B.16})$$

O polinômio $|\mathcal{L}(\omega)|^2$ é um polinômio trigonométrico em $\cos \omega$ do tipo

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos^k \omega, \quad (\text{B.17})$$

que pode ser reescrito em termos de $\sin^2 \frac{\omega}{2}$, como

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos^k \omega = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^k. \quad (\text{B.18})$$

Além disso, podemos escrever

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = P(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k (1 - 2y)^k, \quad (\text{B.19})$$

com $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$, tal que $|\mathcal{L}(\omega + \pi)|^2 = P(1 - y)$ e

$$\begin{aligned} |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 &= 2 \cos^{2N} \left(\frac{\omega}{2} \right) |\mathcal{L}(\omega)|^2 + 2 \sin^{2N} \left(\frac{\omega}{2} \right) |\mathcal{L}(\omega + \pi)|^2 = \\ &= 2(1 - y)^N P(y) + 2y^N P(1 - y) = 2, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

tal que,

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1. \quad (\text{B.21})$$

Daubechies [42] mostrou que a única solução da Equação (B.21) é da forma

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k, \quad (\text{B.22})$$

isto é,

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \sin^{2k} \frac{\omega}{2}. \quad (\text{B.23})$$

O problema agora é retirar a raiz quadrada da Equação (B.23). A função $|\mathcal{L}(\omega)|^2$ é contínua, par e 2π -periódica, tal que, pode ser expandida em série trigonométrica de Fourier, isto é,

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos k\omega, \quad (\text{B.24})$$

com

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{L}(\omega)|^2 \cos(k\omega) d\omega. \quad (\text{B.25})$$

Com os coeficientes a_k obtidos pela Equação (B.25) construímos um polinômio auxiliar na variável $z = e^{-i\omega}$ como

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_{|k|} z^{N-1+k}. \quad (\text{B.26})$$

Como nessa construção $P_A(z) = z^{2(N-1)} P_A(z^{-1})$ então, os zeros de $P_A(z)$ aparecem em pares recíprocos se forem reais (r_i, r_i^{-1}) e em quádruplas ($z_i, \bar{z}_i, z_i^{-1}, \bar{z}_i^{-1}$) se forem complexos. Assumindo, por exemplo, que r_j, z_j e $\bar{z}_j$ estejam fora da circunferência unitária então, r_j^{-1}, z_j^{-1} e $\bar{z}_j^{-1}$ estarão dentro. Com essas considerações, podemos fatorar o polinômio $P_A(z)$ da seguinte forma

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_{N-1} \left[\prod_{i=1}^I (z - r_i) (z - r_i^{-1}) \right] \left[\prod_{j=1}^J (z - z_j) (z - \bar{z}_j) (z - z_j^{-1}) (z - \bar{z}_j^{-1}) \right], \quad (\text{B.27})$$

onde $r_1, \dots, r_I$ são reais, $z_1, \dots, z_J$ são complexos e $I + 2J = N - 1$. Com isso, considerando que $|(z - z_j)(z - \bar{z}_j^{-1})| = |z_j|^{-1} |z - z_j|^2$, é possível escrever

$$|P_A(z)| = \frac{1}{2} |a_{N-1}| \cdot \prod_{i=1}^I |r_i^{-1}| \cdot \prod_{j=1}^J |z_j^{-1}|^{-2} \cdot \left| \prod_{i=1}^I (z - r_i) \prod_{j=1}^J (z - z_j) (z - \bar{z}_j) \right|^2, \quad (\text{B.28})$$

tal que, $\mathcal{L}(z) = \sqrt{|P_A(z)|}$, isto é,

$$\mathcal{L}(z) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} |a_{N-1}| \cdot \prod_{i=1}^I |r_i^{-1}| \cdot \prod_{j=1}^J |z_j^{-1}|^{-2} \left| \prod_{i=1}^I (z - r_i) \prod_{j=1}^J (z - z_j) (z - \bar{z}_j) \right|^2}, \quad (\text{B.29})$$

onde o sinal é escolhido de tal forma que $\mathcal{L}(0) = 1$. Note que $\deg[P_A(z)] = \deg[|\mathcal{L}(z)|^2] = N - 1$.

Finalmente, substituindo $\mathcal{L}(z)$ na Equação (B.14) encontram-se os coeficientes do filtro wavelet $G(z)$ da família Daubechies desejados $g_0, g_1, \dots, g_{2N-1}$, isto é,

$$G(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^N \mathcal{L}(z). \quad (\text{B.30})$$

O cálculo manual dos coeficientes é possível ser realizado somente para N pequeno. Desta forma, abaixo, apresenta-se um script autoral em MATLAB que pode ser utilizado para a construção dos coeficientes dos filtros de Daubechies de ordem N qualquer.

```

clc;
clear;
format long;
N = 2;
w = linspace(0,2*pi,10000);
f = zeros(1,length(w));
for k=0:N-1
    f = f + nchoosek(N-1+k,k)*(sin(w/2)).^(2*k);
end
figure(1);
hold on; plot(w,f,'blue');
a = zeros(1,N);
for k=0:N-1
    a(k+1) = (1/pi)*trapz(w,f.*cos(k*w));
end
Pa = 1/2*[fliplr(a(2:length(a))) a];
figure(2); zplane(Pa,1)
r_Pa = roots(Pa);
r_Q = [];
for k=1:length(r_Pa)
    if abs(r_Pa(k))>1
        r_Q = [r_Q r_Pa(k)];
    end
end
Q = poly(r_Q);
fator = 0.5*abs(a(N));
for k=1:length(r_Q)
    fator = fator*(1/abs(r_Q(k)));
end
fator = sqrt(fator);
Q = Q*fator;
if polyval(Q,1)<0
    Q=-Q;
end
A = 1;
for k=1:N
    A = conv(A,[1 1]);
end
A=A/2^N;
g = sqrt(2)*conv(A,Q); %Filtro Passa-Baixas - Escala
h = qmf(g,1); %Filtro Passa-Altas - Wavelet

```

APÊNDICE C – Scripts em Matlab

Neste apêndice são apresentados os scripts em Matlab utilizados durante a realização da pesquisa.

Decomposição pela Transformada Wavelet Discreta (TWD):

```
function C = custom_dwt(X,J,wname)

% CUSTOM_DWT Decomposicao 1-D em J niveis utilizando a Tranformada Wavelet Discreta(dwt).
%
% Retorna a decomposicao atraves da dwt, em J<=J_max niveis utilizando uma wavelet especifica.
% O comprimento N de X deve ser um multiplo inteiro de 2^k, k natural. Com isso, teremos que J_max=log2(N).
% C = [W_1'; W_2'; ... ; W_J'; V_J'] conforme Percival & Walden 2002.

N = length(X);
if J>log2(N)
    error('J superior ao permitido.');
```

end

```
[g,h] = wfilters(wname,'r');
```

C = zeros(J+1,N/2);

V = X;

```
for j=1:J
    N = length(V);
    g = periodized(g,N);
    h = periodized(h,N);
    W = cconv([h(1) fliplr(h(2:length(h)))],V,N);
    W = downsample(W,2);
    V = cconv([g(1) fliplr(g(2:length(g)))],V,N);
    V = downsample(V,2);
    C(j,1:length(W)) = W;

    if j==J
        C(j+1,1:length(V)) = V;
    end
end
```

end

Reconstrução pela Transformada Wavelet Discreta (TWD) Inversa:

```

function X = custom_idwt(C,wname)

[nlin,ncol] = size(C);
N = 2*ncol;
J_max = log2(N);
J = nlin - 1;

V = C(J+1,1:2^(J_max-J));
C(J+1,:)=[];

for j=J:-1:1
    V = upsample(V,2);
    W = C(j,1:2^(J_max-j));
    W = upsample(W,2);
    N = length(V);
    [g,h] = wfilters(wname,'r');
    g = periodized(g,N);
    h = periodized(h,N);

    if j==J_max
        V = cconv(g,V',N) + cconv(h,W',N);
    else
        V = cconv(g,V,N) + cconv(h,W,N);
    end
end
X = V;
end

```

Cálculo dos índices SD1 e SD2 dos Gráficos de Poincaré:

```

function [sd1, sd2] = custom_poincare(rr)
    sd = diff(rr);
    sd1 = sqrt( 0.5*std(sd)^2 );
    sd2 = sqrt( 2*(std(rr)^2) - (0.5*std(sd)^2) );
end

```

Cálculo de $F[\lambda]$ e α da AFsT:

```

function [alpha,F_n] = custom_dfa(data,n1,n2)
    [r, c] = size(data);
    if r>c; data = data'; end

    n = n1:1:n2;
    nLen = length(n);
    F_n = zeros(1,nLen);
    mu = mean(data);

    for i=1:nLen
        N = length(data);
        nWin = floor(N/n(i));
        N1 = nWin*n(i);
        Yn = zeros(1,N1);
    end

```

```

yk = cumsum(data(1:N1)-mu);

for j=1:nWin
    p = polyfit(1:n(i),yk(((j-1)*n(i)+1):j*n(i)),1);
    Yn(((j-1)*n(i)+1):j*n(i))=polyval(p,1:n(i));
end

F_n(i) = sqrt( sum((yk-Yn).^2)/N1 );
end

a = polyfit(log10(n),log10(F_n),1);
alpha=round(a(1).*1000)./1000;
end

```

Modelo Matemático para Simulação do ECG:

```

function [t, s, ipeaks] = custom_ecgsyn(sfint,N,Anoise,hrmean,hrstd)

thetai = [-60 -15 0 15 90]; thetai = thetai*(pi/180);
ai = [1.2 -5 30 -7.5 0.75];
bi = [0.25 0.1 0.1 0.1 0.4];

beta = sqrt(hrmean/60);
bi = beta*bi;
thetai = [sqrt(beta) beta 1 beta sqrt(beta)].*thetai;

rrn = custom_rrprocess(hrmean,hrstd,N);

dt = 1/sfint;
rrt = zeros(round(sum(rrn)/dt),1);
tecg=0;
j = 1;
i = 1;
while j <= length(rrn)
    tecg = tecg+rrn(j);
    ip = round(tecg/dt);
    rrt(i:ip) = rrn(j);
    i = ip+1;
    j = j+1;
end
Nt = ip;

x0 = [1,0,0.04];
tspan = 0:dt:(Nt-1)*dt;
[t,X] = ode45(@custom_derivsecgsyn,tspan,x0,[],rrt,sfint,thetai,ai,bi);

ipeaks = custom_detectpeaks(X,thetai,sfint);

z = X(:,3);
zmin = min(z);
zmax = max(z);
zrange = zmax - zmin;
z = (z - zmin)*(1.6)/zrange -0.4;

eta = 2*rand(length(z),1)-1;

```

```

    s = z + Anoise*eta;
end

function rr = custom_rrprocess(hrmean,hrstd,n)
    rrmean = 60/hrmean;
    rrstd = rrmean*(hrstd/hrmean);

    A = [1 -0.909892958610592 0.518812549649139 -0.284013279332866 -0.206314040341774 0.0382210497051044
        0.0709449117947327 0.0305328770006541 -0.153286919634266 0.000926003772877002 -0.00701948585640593
        -0.0218056945412021 0.00431238415781554 0.0315633667427958 0.0155136110686656 -0.0591130621267629
        0.0251961065861089];
    x = filter(1,A,randn(n,1));

    xstd = std(x);
    ratio = rrstd/xstd;
    rr = rrmean + x*ratio;
end

function dxdt = custom_derivsecgsyn(t,x,rr,sfint,ti,ai,bi)
    ta = atan2(x(2),x(1));
    a0 = 1.0 - sqrt(x(1)^2 + x(2)^2);
    ip = 1+floor(t*sfint);
    w0 = 2*pi/rr(ip);

    fresp = 0.25;
    zbase = 0.00015*sin(2*pi*fresp*t);

    dx1dt = a0*x(1) - w0*x(2);
    dx2dt = a0*x(2) + w0*x(1);

    dti = rem(ta - ti, 2*pi);
    dx3dt = - sum(ai.*dti.*exp(-0.5*(dti./bi).^2)) - 1.0*(x(3) - zbase);

    dxdt = [dx1dt; dx2dt; dx3dt];
end

function ind = custom_detectpeaks(X, thetap, sfecg)
    N = length(X);
    theta = atan2(X(:,2),X(:,1));
    ind0 = zeros(N,1);
    for i=1:N-1
        a = ( (theta(i) <= thetap) & (thetap <= theta(i+1)) );
        j = find(a==1);
        if ~isempty(j)
            d1 = thetap(j) - theta(i);
            d2 = theta(i+1) - thetap(j);
            if d1 < d2
                ind0(i) = j;
            else
                ind0(i+1) = j;
            end
        end
    end
end

```

```

d = ceil(sfecg/64);
d = max([2 d]);
ind = zeros(N,1);
z = X(:,3);
zmin = min(z);
zmax = max(z);
zext = [zmin zmax zmin zmax zmin];
sext = [1 -1 1 -1 1];
for i=1:5
    clear ind1 Z k vmax imax iext;
    ind1 = find(ind0==i);
    n = length(ind1);
    Z = ones(n,2*d+1)*zext(i)*sext(i);
    for j=-d:d
        k = find( (1 <= ind1+j) & (ind1+j <= N) );
        Z(k,d+j+1) = z(ind1(k)+j)*sext(i);
    end
    [vmax, ivmax] = max(Z,[],2);
    iext = ind1 + ivmax-d-1;
    ind(iext) = i;
end
end

```

APÊNDICE D – Trabalhos Publicados

Mathematical model with autoregressive process for electrocardiogram signals

Ronaldo M Evaristo^{1,2}, Antonio M Batista^{2,3,4,5}, Ricardo L Viana⁶, Kelly C Iarosz^{4,5}, José D Szezech Jr^{2,3}, Moacir F de Godoy⁷

¹*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná, Telêmaco Borba, PR, Brazil.*

²*Pós-Graduação em Ciências, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brazil.*

³*Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brazil.*

⁴*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brazil.*

⁵*Institute for Complex Systems and Mathematical Biology, Aberdeen, Scotland, UK.*

⁶*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brazil.*

⁷*Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, SP, Brazil.*

Abstract

The cardiovascular system is composed of the heart, blood and blood vessels. Regarding the heart, cardiac conditions are determined by the electrocardiogram, that is a noninvasive medical procedure. In this work, we propose autoregressive process in a mathematical model based on coupled differential equations in order to obtain the tachograms and the electrocardiogram signals of young adults with normal heartbeats. Our results are compared with experimental tachogram by means of Poincaré plot and detrended fluctuation analysis. We verify that the results from the model with autoregressive process show good agreement with experimental measures from tachogram generated by electrical activity of the heartbeat. With the tachogram we build the electrocardiogram by means of coupled differential equations.

Keywords: heartbeat, autoregressive model, electrocardiogram

*Corresponding author: antoniomarcosbatista@gmail.com

1. Introduction

The cardiovascular system (CVS) is responsible for supplying the human organs with blood. It is composed by the heart, the arteries, and the veins. The heart has as function to pump blood throughout the body, that is realised by means of contractions [1]. The human heart beats an average 72 beats per minute and pumps 0.07 liters of blood per beat [2, 3]. The contraction and relaxation of the heart is obtained by a single cycle of the electrocardiogram signal (ECG), namely the ECG records of the electrical activity of the heart. Waller in 1887 [4] measured for the first time the electrical activity from the heart, and the first practical electrocardiograph was invented by Einthoven in 1901 [5] that it was used as a tool for the diagnosis of cardiac abnormalities.

In the recent past, several theoretical investigations pertaining to CVS have been carried out to analyse electrocardiogram signal [6, 7, 8]. Mathematical models have been developed to understand physiological function and disfunction in CVS. A mathematical model which have been used to generate ECG signals is the Van der Pol oscillator [9]. Gois and Savi considered three modified Van der Pol oscillators connected by time delay coupling to describe heart rhythm behaviour [10]. The coupled Van der Pol oscillators was also used in studies about the control of irregular behaviour in pathological heart rhythms [11]. McSharry and collaborators [12] introduced a dynamical model to describe generating synthetic electrocardiogram signals. This model is based on a set of three ordinary differential equations in that it is incorporated the respiratory sinus arrhythmia (RSA) by means of a bimodal power spectrum consisting of the sum of two Gaussian distributions.

In this work, instead two Gaussian distributions we propose an autoregressive (AR) process for the RSA to obtain the tachograms and, consequently, the ECGs of young adults with normal heartbeats. AR model can be used to quantify gains and delays by which cardiac interval, lung volume, blood pressure and sympathetic activity affect each other [13]. Cardiologists utilise AR model when they are interested in fit tachograms through mathematical regressions softwares. The tachogram is a signal that allows the study of heart rate variability (HRV) [14, 15]. Boardman and collaborators [16] study autoregressive model for the HRV. They found the optimum order of autoregressive model which can be used for spectral analysis of short segments of tachograms. We compare the results obtained from two Gaussian distributions and AR process with experimental tachograms of healthy young adults. To do that, we use as diagnostic tools the Poincaré plot [17]

and detrended fluctuation analysis (DFA) [18]. We have verified that the result with AR process agrees with the experimental tachogram more closely than the result with two Gaussian distributions. This way, we generate the ECG by means of coupled differential equations considering the AR process to obtain the tachogram and the frequency of the ECG. The frequency is an important parameter in the mathematical model for the ECG signal, and variation in the frequency produces variation in the times elapsed between successive heartbeats.

This article is organised as follows: in Section 2 we introduce the ECG model with autoregressive process for tachograms, in Section 3 we compare our results with experimental data, and in the last Section we draw our conclusions.

2. The mathematical model

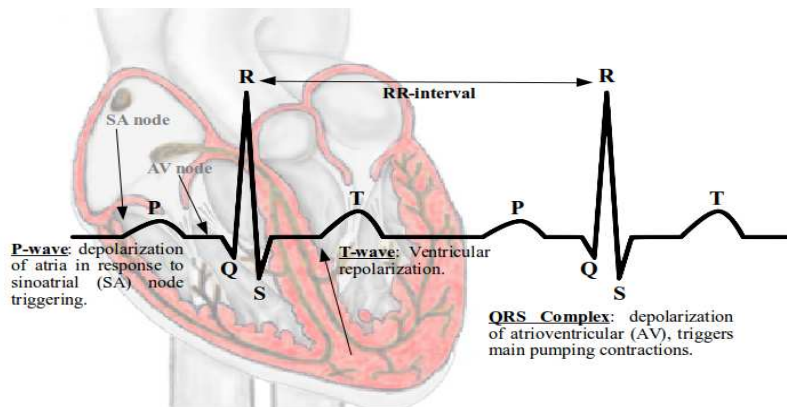


Figure 1: (Colour online) ECG following a normal heartbeat.

The ECG is a noninvasive method used to measure electrical activity of the heart through electrodes placed on the surface of the skin. Figure 1 shows the relationship between the cardiac conduction and the ECG. In the sinoatrial node (SA), known as natural pacemaker, the heartbeat starts. The atrioventricular node (AV) is responsible for the passage of electrical signals from the atria to the ventricles. At last, the signal arrives at the Purkinje fibers and makes the heart contract to pump blood, where the R-

Table 1: Parameters for Equation (1).

index (i)	time (s)	θ_i (rad)	a_i	b_i
P	-0.2	$-\pi/3$	1.2	0.25
Q	-0.05	$-\pi/12$	-5.0	0.1
R	0	0	30.0	0.1
S	0.05	$\pi/12$	-7.5	0.1
T	0.3	$\pi/2$	0.75	0.4

peak occurs. The time between successive R-peaks is the RR-interval and the series of RR-intervals is known as RR tachogram.

McSharry and collaborators [12] argued that the heartbeat can be described by means of three coupled ordinary differential equations with the inclusion of RSA at the high frequencies (f_{RSA}) and Mayer waves (MW) at the low frequencies (f_{MW}). The equations are given by

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha x - \omega y, \\
 \dot{y} &= \alpha y + \omega x, \\
 \dot{z} &= z_0 - z - \sum_i a_i \Delta\theta_i e^{-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}},
 \end{aligned} \tag{1}$$

where $i \in \{P, Q, R, S, T\}$, $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Delta\theta_i = \theta - \theta_i \pmod{2\pi}$, $\theta = \text{atan2}(y, x)$ ($-\pi \leq \text{atan2}(y, x) \leq \pi$), $z_0(t) = A \sin(2\pi f_{\text{RSA}} t)$, and $A = 0.15\text{mV}$. Visual analysis of a ECG from a normal individual is used to obtain the times, as well as the angles θ_i , the a_i and b_i values for the PQRST points. The parameters values are given in Table 1 according to Reference [12].

The frequency $\omega(t)$ controls the variations in the RR-intervals, and it is given by

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{r(t)}, \tag{2}$$

where $r(t)$ is the continuous version of the $r(n)$ time series which is obtained from the inverse discrete-time Fourier transform (DTFT) [19, 20] of the power spectrum

$$|H_G(f)|^2 = \frac{\sigma_{\text{MW}}^2}{\sqrt{2\pi c_{\text{MW}}^2}} \exp \frac{(f - f_{\text{MW}})^2}{2c_{\text{MW}}^2} + \frac{\sigma_{\text{RSA}}^2}{\sqrt{2\pi c_{\text{RSA}}^2}} \exp \frac{(f - f_{\text{RSA}})^2}{2c_{\text{RSA}}^2}, \tag{3}$$

with phase randomly distributed from 0 to 2π [12]. The tachogram exhibits similarity with a real one when the phase is randomly distributed. Figure

2(a) exhibits the power spectrum $|H_G(f)|$ for $f_{MW} = 0.1\text{Hz}$, $f_{RSA} = 0.25\text{Hz}$, $c_{MW} = 0.01$, $c_{RSA} = 0.01$, and $\sigma_{MW}^2/\sigma_{RSA}^2 = 0.5$. The values of the frequencies f_{MW} and f_{RSA} are motivated by the power spectrum of a real RR tachogram. The f_{MW} value is approximately equal to 0.1 in humans, and it is related to arterial pressure occurring spontaneously in conscious subjects. RSA is characterised by the presence of oscillations in the tachogram considering the parasympathetic activity. It is synchronous with the breathing rate which for normal subjects is equal to 15 breaths per minute, i.e., $f_{RSA} = 0.25\text{Hz}$. The spectrum has a bimodal form, where one peak is located in the low frequency range $0.04 \leq f < 0.15\text{Hz}$ and the other is located in the high frequency range $0.15 \leq f \leq 0.4\text{Hz}$. These two bands appear due to the effects of both Mayer waves and RSA. The tachogram $r(n)$ is generated by the inverse DTFT from the power spectrum $|H_G(f)|$ with random phase. To obtain the continuous signal $r(t)$, first we increase the sample rate of $r(n)$ to the same sample rate of the desired ECG by interpolation [12, 19, 20]. Then, a R-peak detection algorithm [12] is applied to the interpolated signal to determine $r(t)$, as a result $\omega(t)$ (Eq. 2) is calculated and the ECG is built by means of Equation (1).

In this work, in order to model electrocardiogram signals we propose an autoregressive (AR) stochastic process [16] to determine $\omega(t)$. The AR process of order p is defined as

$$R(n) = \sum_{l=1}^p d_l R(n-l) + \epsilon(n), \quad (4)$$

where $\epsilon(n)$ is a white noise with zero mean and unit variance. Boardman and collaborators [16] found that $p = 16$ is an optimum order of autoregressive model for heart rate variability. The AR power spectrum density is

$$|H_{AR}(f)| = \frac{1}{|1 - \sum_{l=1}^p d_l e^{-i2\pi fl}|}, \quad (5)$$

with the coefficients values given in Table 2. The coefficients values for the AR power spectrum density have been adjusted to be used for the set of data that we obtained from healthy individuals. The presence of arrhythmia can influence the coefficients values, and as a consequence it would be necessary to calculate the new coefficients values.

Figure 2(b) shows the power spectrum calculated from the tachogram generated by means of the AR process. In place of the two separated Gaussian distributions, the AR process produces a damped in the power spectrum,

Table 2: Coefficients values for the AR power spectrum density (Eq. 5).

$d_1 = -0.9099$	$d_2 = 0.5188$	$d_3 = -0.2840$	$d_4 = -0.2063$
$d_5 = 0.0382$	$d_6 = 0.0709$	$d_7 = 0.0305$	$d_8 = -0.1533$
$d_9 = 0.0009$	$d_{10} = -0.0070$	$d_{11} = -0.0218$	$d_{12} = 0.0043$
$d_{13} = 0.0316$	$d_{14} = 0.0155$	$d_{15} = -0.0591$	$d_{16} = 0.0252$

and as consequence the separation between the frequency components cannot be exactly identified, as in real situation. This way, with the tachogram $r(n)$ we find $r(t)$ (interpolation followed by R-peak detection) and $\omega(t)$ to build the ECG using Equation (1).

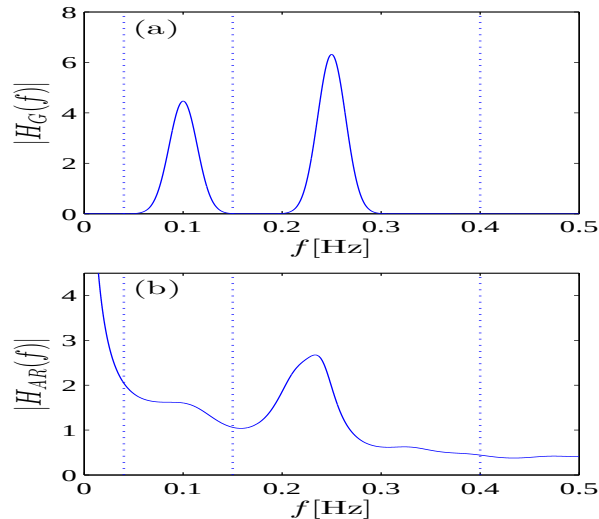


Figure 2: Power spectrum from (a) Equation (3) and (b) Equation (5).

3. Results and discussions

In this work, the power spectrum is considered to obtain the theoretical tachogram and consequently the frequency (Eq. 2) that is used in Equation (1) to build the ECG. We generate 124 theoretical ECG signals, being 62 from the Gaussian spectrum and 62 from the AR spectrum. Then, we obtain their respective tachograms and compare them with 62 experimental tachograms collected from healthy adults. The experimental protocol consisted of 20min

of monitoring of the heartbeat frequency in resting from patients without sound and visual stimulations in a supine rest position. The heartbeats were recording with a sample rate of 1000Hz, and 1000 RR intervals were analysed. The experimental tachograms were filtered to remove ectopic beats and noise effects. We calculate the power spectrum from Gaussian distributions (blue), AR process (red), and experimental data (green), as shown in Figure 3(a). The green dashed lines exhibit the confidence interval of the experimental power spectrum that are calculated from 62 experimental tachograms.

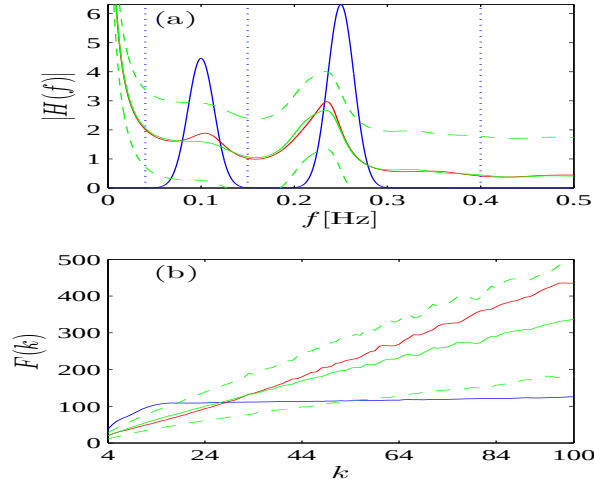


Figure 3: (Colour online) (a) Power spectrum and (b) detrended fluctuation analysis (DFA) for Gaussian distributions (blue), AR process (red), and experimental data (green). The green dashed lines exhibit the confidence interval of the experimental power spectrum that are calculated from 62 experimental tachograms.

With regard to Figure 3(a), we see that the power spectrum from AR process has a shape closer the experimental result than the power spectrum from the Gaussian distributions. This way, in order to verify the agreement among the experimental tachogram and the tachograms obtained from theoretical power spectra we have utilised the detrended fluctuation analysis (DFA) [21, 22]. DFA yields a fluctuation function $F(k)$ as a function of k , given by [18]

$$F(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [r_I(n) - r_k(n)]^2}, \quad (6)$$

where $N = 1000$, $r_I(n) = \sum_{l=0}^n r(l)$ is the cumulative sum of the $r(n)$, k is the box size that partitions the time interval of the tachogram, and $r_k(n)$ is the local trend in each box. DFA is a nonlinear dynamical analysis that have been used for the understanding of biological systems [18]. Moreover, the DFA allows the detection of long-range correlations embedded in a patchy landscape.

Figure 3(b) shows the mean DFAs for $4 < k < 100$, where linear regressions present slopes equal to 0.1955 ± 0.0150 , 0.7034 ± 0.0686 , and 0.6817 ± 0.2448 for Gaussian distributions, AR process and experimental data, respectively. The experimental data are collected from 62 healthy young adults. Each one with length equal to 1000 heartbeats without trend removal. In general, ectopic beats or noise effects are excluded of time series through filters [23]. As a result, the DFA for the tachogram generated by the experimental data and AR process are in close agreement with each other. Whereas DFA for the Gaussian distributions exhibits a good agreement only for $k < 20$.

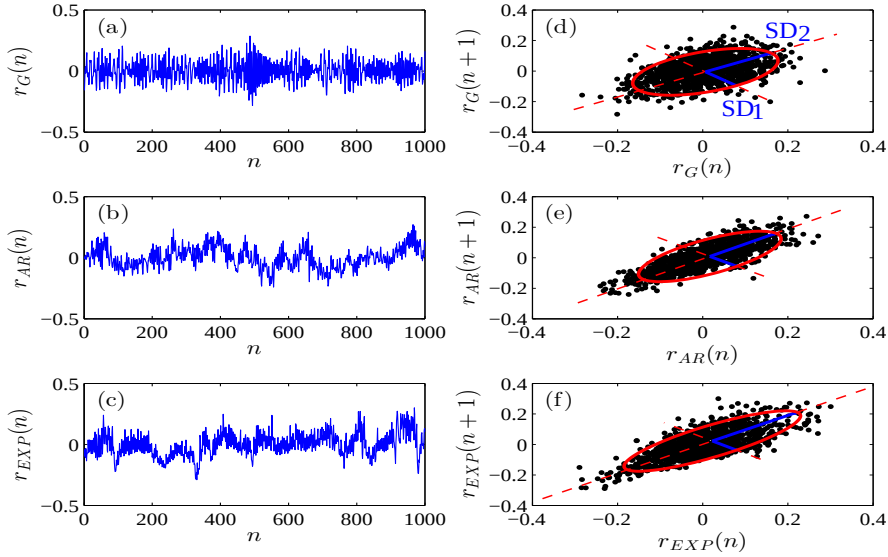


Figure 4: (Colour online) Tachograms generated by (a) the sum of two Gaussian distributions, (b) the AR process, (c) experimental data, and respective Poincaré plots in (d), (e), and (f).

Through the Gaussian power spectrum with phases randomly distributed between 0 and 2π we build a ECG and extract the tachogram $r_G(n)$ shown in

Table 3: Mean SD1 and SD2 values for the theoretical and experimental tachograms with p -values of the Wilcoxon rank sum test.

RR-intervals	$r_G(62)$ [A]	$r_{AR}(62)$ [B]	$r_{EXP}(62)$ [C]	p -value
SD1 [ms]	63.9 ± 1.9	32.8 ± 10.5	38.8 ± 19.6	0.0 [A $\times$ C] 0.2 [B $\times$ C]
SD2 [ms]	103.4 ± 2.6	82.0 ± 26.2	79.0 ± 28.5	0.0 [A $\times$ C] 0.6 [B $\times$ C]

Figure 4(a). A tachogram extracted of ECG generated by the AR spectrum $r_{AR}(n)$ is illustrated in Figure 4(b) and an experimental tachogram $r_{EXP}(n)$ of the healthy adult is in Figure 4(c). In Figures 4(d), 4(e), and 4(f) we calculate the respective Poincaré plots. The Poincaré plot is a visualising technique to analyse RR intervals, where it is computed the standard deviation of points perpendicular to the axis (SD1) and points along (SD2) the axis of line-of-identity. Table 3 exhibits the mean SD1 and SD2 values of the tachograms shown in Figure 4. Comparing the Poincaré plots we see that both SD1 and SD2 for the AR process agree with the experimental results better than the method based on the Gaussian distribution.

In addition, we calculate the p -values according to the two-sided Wilcoxon rank sum test [24] of the SD1 and SD2 time series from the simulated and experimental data. This statistical test verifies if two paired time series have the same distribution when the data cannot be assumed to be normally distributed. We find that the p -values of SD1 and SD2 are greater than 0.05 for the AR process, consequently the time series of SD1 and SD2 in the AR process and the experimental data have the same distributions. However, the same does not happen for the Gaussian distributions, where the p -values are less than 0.05.

All in all, we obtain the tachogram $r(n)$ (discrete-time) by means of the AR process. Then, an interpolation followed by a R-peak detection allows us to determine the signal $r(t)$ (continuous-time). As a result, we calculate $\omega(t)$ and solve the ordinary differential equations to build the ECG signal. We use the fourth order Runge-Kutta method to solve the ordinary differential equations, where we consider a fixed time step $\Delta t = 1/f_s$ and sampling frequency $f_s = 256\text{Hz}$. Figure 5 shows the ECG signal in the time interval $0 \leq t \leq 20\text{s}$, where $z(t)$ yields a synthetic ECG with a realistic PQRST morphology according to Figure 1.

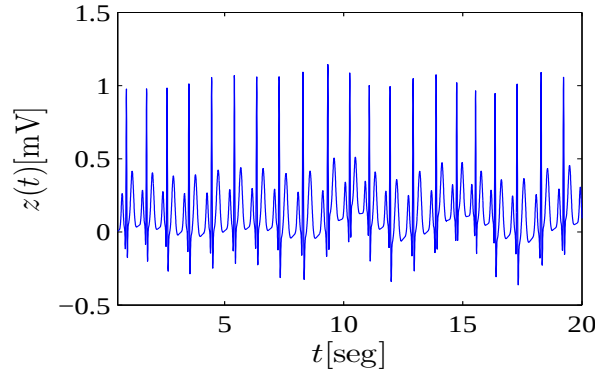


Figure 5: ECG signal generated by means of Equation (1) considering AR process.

4. Conclusions

In conclusion, we have studied a mathematical model given by coupled differential equations that describes electrocardiogram signals and it was proposed by McSharry and collaborators [12]. In the original model, the frequency is calculated from a power spectrum with two Gaussian distributions that incorporates both respiratory sinus arrhythmia and Mayer waves. The use of two Gaussian distributions is in disagreement with our experimental data obtained from healthy adults, due to the fact that the two distributions are not well separated in the power spectrum. This way, we propose to calculate the frequency by means of the AR process. We believe that our model also allows the study of respiratory sinus arrhythmia.

We verify that the power spectrum from AR process has a good agreement with the power spectrum from experimental data. We have also compared the tachograms generated from Gaussian distributions and AR process with the experimental tachogram using DFA and Poincaré plot. As a result, in both DFA and Poincaré plot, the tachogram generated considering the AR process is in closer agreement with experimental data than the two Gaussian. As a consequence, with the tachogram, the frequency is calculated and the ECG signal can be built utilising coupled differential equations with AR process.

We believe that the mathematical model with autoregressive process constitutes an important step toward developing strategies to simulate electrocardiogram signals. We have considered many experimental tachograms from

healthy adults to obtain the parameters, this way our simulations allow to obtain and also to do forecast of electrocardiogram signals of individuals in the same situation analysed in this work. We have tested our results using experimental tachograms obtained from 62 healthy patients without sound and visual stimulations in a supine rest position. In future works, we plan to do the same analyse considering patients with different clinical conditions.

Acknowledgements

This study was possible by partial financial support from the following agencies: Fundação Araucária, Brazilian National Council for Scientific and Technological Development (CNPq), Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), and São Paulo Research Foundation (FAPESP) process numbers 2011/19296-1, 2015/07311-7, and 2016/16148-5.

References

- [1] Mohrman DM, Heller LJ. Cardiovascular physiology. New York: McGraw-Hill Education; 2014.
- [2] Curtis H. Biology. New York: Worth; 1989.
- [3] Hall J. Guyton and hall textbook of medical physiology. Philadelphia: Elsevier; 2011.
- [4] Sykes AH. A D Waller and the electrocardiogram. Br Med J 1987; 294:1396-1398.
- [5] Rivera-Ruiz M, Cajavilca C, Varon J. Einthoven's string galvanometer. Tex Heart Inst J 2008;35:174-178.
- [6] de Gaetano A, Panunzi S, Rinaldi F, Risi A, Sciandrone M. A patient adaptable ECG beat classifier based on neural networks. Appl Math Comput 2009;213:243-249.
- [7] Kudinov AN, Lebedev DY, Tsvetkov VP, Tsvetkov IV, Mathematical model of the multifractal dynamics and analysis of heart rates. Math Models Comput Simul 2015;7:214-221.

- [8] Schenone E, Colin A, Gerbeau J-F. Numerical simulation of electrocardiograms for full cardiac cycles in healthy and pathological conditions. *Int J Numer Meth Biomed Engng* 2016;32:e02744.
- [9] Van der Pol B. On relaxation oscillations. *Philos Mag* 1926;7:978-992.
- [10] Gois SRFSM, Savi MA. An analysis of hearth rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model. *Chaos Solitons Fractals* 2009;41:2553-2565.
- [11] Ferreira BB, Savi MA, de Paula AS. Chaos control applied to cardiac rhythms represented by ECG signals. *Phys Scripta* 2014;89:105203.
- [12] McSharry PE, Clifford GD, Tarassenko L, Smith LA. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. *IEEE Trans Biomed Eng* 2003;50:289-294.
- [13] Cohen MA, Taylor JA. Short-term cardiovascular oscillations in man: measuring and modelling the physiologies. *J Physiol* 2002;542:669-683.
- [14] Yasuma F, Hayano J. Why does the heartbeat synchronize with respiratory rhythm? *Chest* 2004;125:683-690.
- [15] Acharya UR, Joseph KP, Kannathal N, Lim CM, Suri JS. Heart rate variability: a review. *Med Bio Eng Comput* 2006;44:1031-1051.
- [16] Boardman A, Schlindwein FS, Rocha AP, Leite A. A study on the optimum order of autoregressive models for heart rate variability. *Physiol Meas* 2002;23:325-336.
- [17] Guzik P, Piskorski J, Krauze T, Schneider R, Wesseling KH, Wykretowicz A, Wysocki H. Correlations between the Poincaré plot and conventional heart rate variability parameters assessed during paced breathing. *J Physiol Sci* 2007;57:63-71.
- [18] Peng C-K, Buldyrev SV, Havlin S, Simons M, Stanley HE, Goldberger AL. Mosaic Organization of DNA Nucleotides. *Phys Rev E* 1994;49:1685-1689.
- [19] Oppenheim AV, Schafer RW. Discrete-time signal processing. New Jersey: Pearson Prentice Hall; 2010.

- [20] Proakis JG, Manolakis DG. Digital signal processing. New Jersey: Pearson Prentice Hall; 2007.
- [21] Hu K, Ivanov PCh, Chen Z, Carpena P, Stanley HE. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. Phys Rev E 2001;64:011114.
- [22] Chen Z, Ivanov PCh, Hu K, Stanley HE. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis. Phys Rev E 2002;65:041107.
- [23] Santos L, Barroso JJ, Macau EEN, Godoy MF. Application of an automatic adaptive filter for Heart Rate Variability analysis. Med Eng Phys 2013;35:1778-1785.
- [24] Wilcoxon F. Individual comparisons by ranking methods. Biometrics Bulletin 1945;1:80-83.

Análise Wavelet de Tacogramas Teóricos e Experimentais de Adultos Sadios

Ronaldo M. Evaristo¹

Laboratório de Controle e Processos Industriais, IFPR, Telêmaco Borba, PR

Programa de Pós-Graduação em Ciências, UEPG, Ponta Grossa, PR

Antonio M. Batista² José D. Szezech Jr³

Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, Ponta Grossa, PR

Ricardo L. Viana⁴

Departamento de Física, UFPR, Curitiba, PR

Kelly C. Iarosz⁵

Instituto de Física, USP, São Paulo, SP

Moacir F. de Godoy⁶

Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, FAMERP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. O crescente número de casos envolvendo doenças cardiovasculares vem motivando a comunidade científica a buscar novas técnicas, modelos matemáticos e inovações tecnológicas para complementar os métodos de avaliação de desempenho do coração já existentes. Dentre tais, destacam-se as análises não invasivas, capazes de detectar patologias leves e moderadas. Tomando-se esse viés, apresenta-se neste trabalho um modelo matemático que simula a morfologia do eletrocardiograma de um adulto sadio e leva a tacogramas mais realistas quando comparados com dados experimentais de 62 pacientes sadios.

Palavras-chave. Coração, Variabilidade da Frequência Cardíaca, Processos Autorregressivos, Transformada Wavelet Discreta.

1 Introdução

O coração humano é um órgão monitorado pelo Sistema Nervoso Autônomo (SNA), responsável por controlar a vida vegetativa (involuntária), isto é, a musculatura lisa, a musculatura cardíaca e as glândulas exócrinas, cujas funções se relacionam com os sistemas respiratório, circulatório e gastrointestinal do sujeito [2]. É dividido em dois subsistemas: Sistema Nervoso Simpático (SNS) e Sistema Nervoso Parassimpático (SNP). O SNP é responsável pelo controle do corpo em repouso, enquanto que o SNS atua em situações de alerta como, por exemplo, susto, medo, exercícios físicos e estresse mental [1].

¹ronaldo.evaristo@ifpr.edu.br

²antoniomarcosbatista@gmail.com

³jdani@gmail.com

⁴rlv640@gmail.com

⁵kiaarosz@gmail.com

⁶mf60204@gmail.com

No coração, o regime sinusal (funcionamento normal em, aproximadamente, 70 batimentos por minuto (bpm)) é controlado pelo SNP. Caso o sujeito passe por alguma situação de alerta, o aumento da atividade cardíaca é controlado pelo SNS [2].

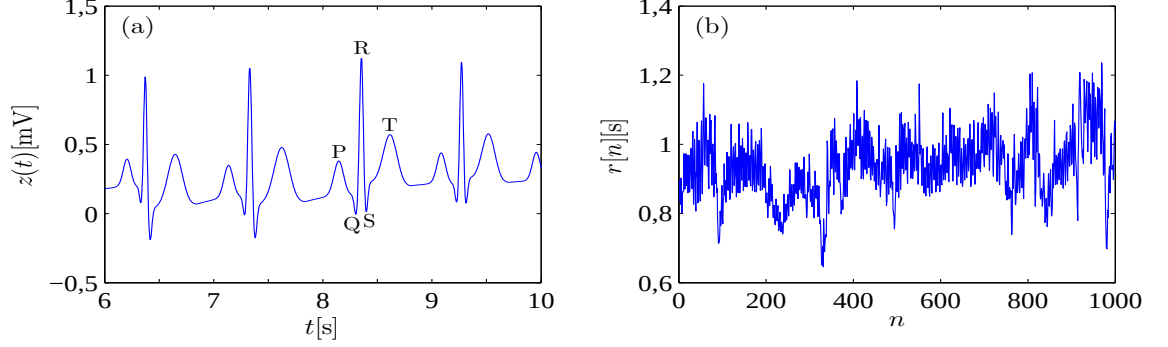


Figura 1: Medidas de atividades elétricas no coração. Em (a) apresenta-se a morfologia padrão do eletrocardiograma de um adulto sadio, enquanto que em (b) encontra-se seu respectivo tacograma.

O registro mais utilizado para avaliar a atividade elétrica do coração é o eletrocardiograma (ECG), cuja forma padrão é apresentada na Figura 1(a) possuindo três formas de onda básicas (P, QRS e T). A onda P representa a despolarização (contração) dos átrios. Neste momento, o sangue passa dos átrios para os ventrículos. O complexo QRS representa a contração ventricular (sístole), onde o sangue é forçado para fora dos ventrículos, sentido aos pulmões e ao resto do corpo. A onda T representa a repolarização dos ventrículos (diástole), isto é, a relaxação do coração. Neste momento o sangue venoso (não oxigenado) entra no átrio direito, enquanto o sangue oxigenado (arterial) oriundo dos pulmões acessa o átrio esquerdo, ficando o coração preparado para o próximo ciclo [5].

A análise da Variabilidade da Frequência Cardíaca (VFC) [11] via ECG é um método não invasivo importante na detecção de patologias leves e moderadas associadas ao SNA como arritmias, bradicardias e taquicardias, além de distúrbios na relação entre os SNS e SNP. Esta análise é feita pela avaliação do intervalo entre ondas R consecutivas. O sinal de tempo discreto obtido pelo registro desses intervalos RR, denotado por $r[n]$, com $0 \leq n \leq N - 1$, é conhecido como tacograma. A Figura 1(b) mostra um exemplo de tacograma, obtido da Figura 1(a).

Na referência [1] são revisadas várias técnicas para análise do tacograma, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Além disso, os autores descrevem as relações entre a VFC e pacientes pertencentes a alguns grupos de risco como consumo de álcool e cigarro, uso de medicamentos, diabetes, entre outros.

No domínio da frequência, o espectro do tacograma possui duas bandas principais [1, 10]: Baixa Frequência (BF), intervalo $0,04 \leq f \leq 0,15\text{Hz}$; Alta Frequência (AF), intervalo $0,15 \leq f \leq 0,4\text{Hz}$. As atividades dos SNP e SNS são associadas, respectivamente, às bandas AF e BF. Como durante o exame o sujeito permanece acordado em posição de repouso, se espera somente a atuação do SNP. Desta forma, um paciente sadio deve possuir baixa atividade em BF e alta em AF.

Neste trabalho apresenta-se, por meio do espectro de energia da Transformada Wavelet

Discreta (TWD) [4, 12] que o tacograma pode ser melhor aproximado por um processo estocástico autorregressivo (AR) do que por meio dos espectros gaussianos introduzidos em [7].

Por fim, estrutura-se este trabalho da seguinte forma: na Seção 2 é apresentado o modelo matemático responsável por simular os batimentos cardíacos; a Seção 3 trata da Transformada Wavelet Discreta (TWD); na Seção 4 são mostrados os resultados obtidos e na última seção as conclusões são apresentadas.

2 Modelo Matemático para Batimentos Cardíacos

Neste trabalho, é utilizado um modelo matemático de três equações diferenciais acopladas introduzido por McSharry e colaboradores [7],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \omega y, \\ \dot{y} &= \alpha y + \omega x, \\ \dot{z} &= z_0 - z - \sum_i a_i \Delta\theta_i e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\theta_i}{b_i}\right)^2},\end{aligned}\tag{1}$$

com $i \in \{P, Q, R, S, T\}$, $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\Delta\theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$, $\theta = \arctan 2(y, x)$ e $z_0(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$, onde a amplitude é dada por $A = 0,15\text{mV}$ e a frequência de respiração do indivíduo adulto é dada por $f_2 = 0,25\text{Hz}$. Os demais parâmetros do modelo são apresentados na Tabela 1, salvo a velocidade angular ω que é calculada por $\omega(t) = 2\pi/r(t)$, onde $r(t)$ é a conversão discreto-contínua do tacograma $r[n]$ [8].

Tabela 1: Parâmetros do modelo apresentado na Equação (1).

Índice (i)	P	Q	R	S	T
Tempo [s]	-0,2	-0,05	0	0,05	0,3
θ_i [rad]	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
a_i	1,2	-5	30	-7,5	0,75
b_i	0,25	0,1	0,1	0,1	0,4

No trabalho apresentado originalmente por McSharry *et al.* [7], o tacograma $r[n]$ é determinado pela transformada inversa de Fourier [8] do espectro $H_G(f) = |H_G(f)| e^{i\Phi}$, com módulo (Figura 2(a))

$$|H_G(f)| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}c_1^2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_1}{c_1}\right)^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}c_2^2} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{f-f_2}{c_2}\right)^2}},\tag{2}$$

fase Φ aleatória uniformemente distribuída entre $-\pi$ e π e $f_1 = 0,1\text{Hz}$, $f_2 = 0,25\text{Hz}$, $c_1 = 0,01$, $c_2 = 0,01$ e $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 0,5$.

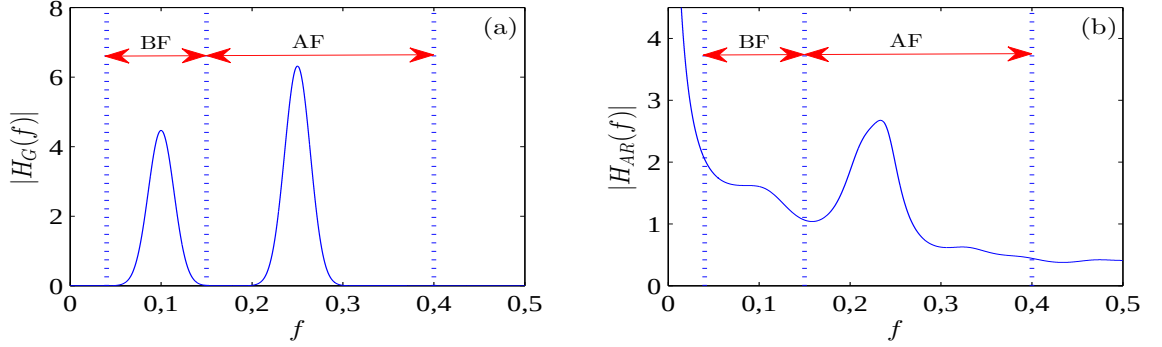


Figura 2: Representação do espectro gaussiano (a) e espectro autorregressivo (b), com suas respectivas faixas de baixa frequência (BF) e alta frequência (AF).

Aqui, o procedimento de geração do tacograma é alterado. Ao invés de se utilizar a Equação (2), a sequência $r[n]$ é tomada como sendo uma realização de um processo AR,

$$R[n] = \sum_{l=1}^p d_l R[n-l] + \varepsilon[n], \quad (3)$$

onde $\varepsilon[n]$ é um ruído branco com média zero e variância unitária. A ordem do modelo é $p = 16$, com base no trabalho de Boardman et al. [3], e os coeficientes utilizados são: $d_1 = -0,9099$, $d_2 = 0,5188$, $d_3 = -0,2840$, $d_4 = -0,2063$, $d_5 = 0,0382$, $d_6 = 0,0709$, $d_7 = 0,0305$, $d_8 = -0,1533$, $d_9 = 0,0009$, $d_{10} = -0,0070$, $d_{11} = -0,0218$, $d_{12} = 0,0043$, $d_{13} = 0,0316$, $d_{14} = 0,0155$, $d_{15} = -0,0591$ e $d_{16} = 0,0252$.

O espectro da Equação (3) é obtido por

$$|H_{AR}(f)| = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{l=1}^p d_l e^{-i2\pi fl} \right|}, \quad (4)$$

mostrado na Figura 2(b).

3 Transformada *Wavelet* Discreta (TWD)

A TWD é um tipo de decomposição em multibandas baseada em bancos de filtros espelhados em quadratura de dois canais [8], conforme mostra a Figura 3. Os filtros wavelet $\{h[n] : n = 0, \dots, L-1\}$ e escala $\{g[n] : n = 0, \dots, L-1\}$ são construídos de acordo com a família de wavelets utilizada, sendo L o comprimento do filtro. Neste trabalho, foi escolhida a família de Daubechies [4] com $L = 80$ e não foram considerados aspectos de reconstrução.

Os coeficientes $w[n]$ e $v[n]$ são obtidos por convoluções circulares de $r[n]$ com as versões reversas dos filtros $h[n]$ e $g[n]$ seguidas de decimação por fator dois.

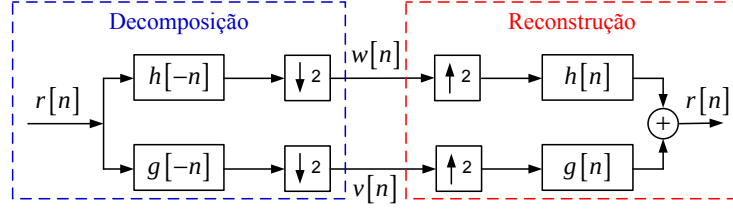


Figura 3: Banco de filtros utilizado pela Transformada Wavelet Discreta.

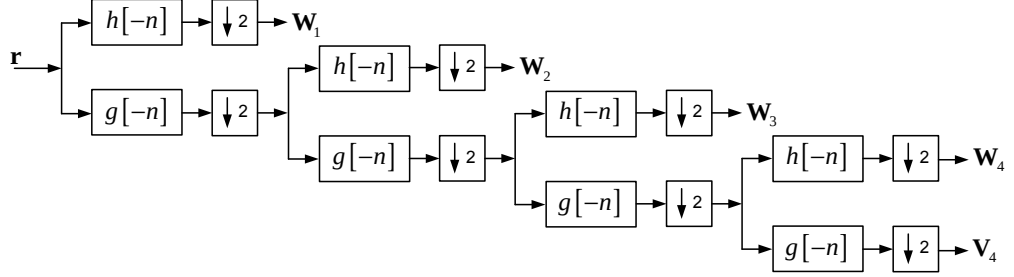


Figura 4: Esquema representativo da decomposição de um tacograma em quatro níveis pela Transformada Wavelet Discreta.

A Figura 4 mostra a decomposição em quatro níveis utilizada neste estudo. Os sinais são representados por matrizes, visto que possuem comprimento finito.

A Figura 5 mostra a relação entre os coeficientes wavelet e suas respectivas bandas de frequências e como as bandas BF e AF se distribuem sobre o espectro. Isso permite que sejam definidas duas bandas: Wavelet Baixa Frequência (wBF), intervalo $\frac{1}{32} \leq f \leq \frac{1}{8}\text{Hz}$; Wavelet Alta Frequência (wAF), intervalo $\frac{1}{8} \leq f \leq \frac{1}{2}\text{Hz}$.

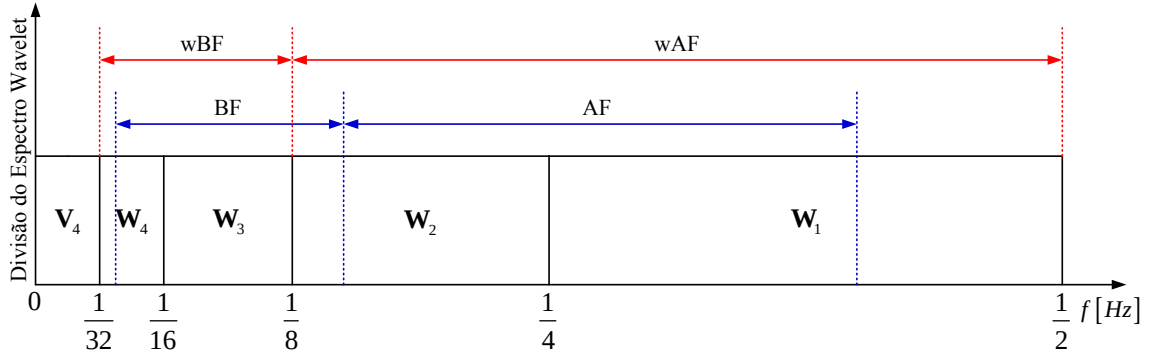


Figura 5: Esboço da divisão do espectro de frequências feita pela Transformada Wavelet Discreta.

A energia do tacograma pode ser calculada por $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{V}_4\|^2 + \sum_{j=1}^4 \|\mathbf{W}_j\|^2$, com $\|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r}$. Já, as energias nas bandas wBF e wAF podem ser determinadas por,

$$\|\mathbf{W}_{AF}\|^2 = \|\mathbf{W}_1\|^2 + \|\mathbf{W}_2\|^2 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{W}_{BF}\|^2 = \|\mathbf{W}_3\|^2 + \|\mathbf{W}_4\|^2. \quad (5)$$

4 Resultados

Neste trabalho, utiliza-se o espectro a fim de se obter a velocidade angular ω utilizada na Equação (1) e consequentemente o ECG. São gerados 124 sinais de ECG teóricos, sendo 62 pelo espectro gaussiano (Eq.(2)) e 62 pelo espectro autorregressivo (Eq. (4)) e, em seguida, são retirados seus respectivos tacogramas para serem comparados com 62 tacogramas experimentais coletados de adultos sadios. Todos os tacogramas possuem $N = 1000$.

Para cada tacograma são calculadas as energias da Equação (5) e obtidas $\|W_{BF}\|_G^2$, $\|W_{BF}\|_{AR}^2$ e $\|W_{BF}\|_{EXP}^2$ para baixa frequência (Figura 6(a)) e $\|W_{AF}\|_G^2$, $\|W_{AF}\|_{AR}^2$ e $\|W_{AF}\|_{EXP}^2$ para alta frequência (Figura 6(b)). Os índices se referem aos tacogramas obtidos pelos espectros gaussiano (G), autorregressivo (AR) e experimental (EXP).

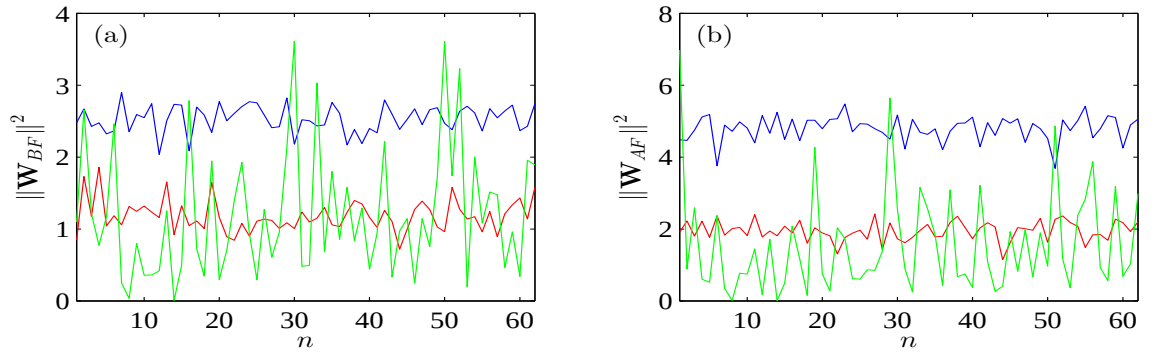


Figura 6: Energia dos tacogramas nas bandas (a) wBF e (b) wAF. Em azul, o gaussiano; em vermelho o autorregressivo; em verde o experimental.

Analisando as Figuras 6(a) e 6(b), observa-se claramente que ambas as bandas (wBF e wAF), a energia obtida do tacograma autorregressivo se aproxima melhor, em média, da energia do tacograma experimental quando comparado ao tacograma gaussiano. Por outro lado, a variabilidade das energias experimentais são maiores. Isso é comum na natureza do ECG, visto que, o coração possui a habilidade de responder a vários estímulos e situações de alerta pelo qual o corpo passa durante o dia, além de possíveis desordens induzidas por doenças [6, 11], complicadas de serem modeladas e previstas matematicamente. Isso complementa nossos resultados anteriores e provê novas perspectivas na área.

5 Conclusões

No presente trabalho, estudou-se um modelo matemático dado por equações diferenciais acopladas que descrevem sinais de eletrocardiograma. Estabeleceu-se comparações entre tacogramas teóricos gerados por espectros gaussianos e autorregressivos com tacogramas experimentais de 62 pacientes sadios. Conclui-se que os tacogramas obtidos de processos autorregressivos levam a resultados mais realistas, quando comparadas suas energias no espectro da Transformada Wavelet Discreta.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, Fundação Araucária e FAPESP (2011/19296-1, 2015/07311-7, 2016/16148-5).

Referências

- [1] U. R. Acharya, K. P. Joseph, N. Kannathal, C. M. Lim, and J. S. Suri, Heart rate variability: a review, *Med. Bio. Eng. Comput.*, 44:1031–1051, 2006. DOI 10.1007/s11517-006-0119-0.
- [2] M. F. Bear, B. W. Connors e M. A. Paradiso. *Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso*. Artmed, Porto Alegre, 2008.
- [3] A. Boardman, F. S. Schlindwein, A. P. Rocha, and A. Leite, A study on the optimum order of autoregressive models for heart rate variability, *Physiological Measurement*, 23:325–336, 2002. DOI 10.1088/0967-3334/23/2/308.
- [4] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [5] D. Dubin. *Interpretação rápida do ECG*. EPUB, São Paulo, 1996.
- [6] M. T. Ferreira, M. Messias, L. C. M. Vanderlei e C. M. Pastre, Caracterização do comportamento caótico da variabilidade da frequência cardíaca (VFC) em jovens saudáveis, *TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.*, 11:141–150, 2010.
- [7] P. E. McSharry, G. D. Clifford, L. Tarassenko, and L. A. Smith, A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 50:289–294, 2003. DOI 10.1109/TBME.2003.808805.
- [8] A. V. Oppenheim, and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. 3. ed., Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2010.
- [9] C. -K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A.L. Goldberger, Mosaic organization of DNA nucleotides, *Phys. Rev. E*, 49:1685–1689, 1994. DOI 10.1103/PhysRevE.49.1685.
- [10] Task Force of the European Society of Cardiology and the North American Society of Pacing and Electrophysiology, Heart rate variability: standards of measurement, physiological interpretation and clinical use, *Circulation*, 93:1043–1065, 1996. DOI <http://dx.doi.org/10.1161/01.CIR.93.5.1043>.
- [11] L. C. M. Vanderlei, C. M. Pastre, R. A. Hoshi, T. D. Carvalho e M. F. Godoy, Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica, *Rev. Bras. Cir. Cardiovasc.*, 24:205–217, 2009.
- [12] B. Vidakovic. *Statistical Modeling by Wavelets*. John Wiley & Sons, New York, 1999.