

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO – FÍSICA**

THIAGO TAKAJI TSUTSUI

**EFEITOS DE UM ACOPLAMENTO COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL NO
MODELO JAYNES-CUMMINGS**

PONTA GROSSA

2025

THIAGO TAKAJI TSUTSUI

**EFEITOS DE UM ACOPLAMENTO COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL NO
MODELO JAYNES-CUMMINGS**

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Coorientador: Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro

PONTA GROSSA

2025

T882 Tsutsui, Thiago Takaji
 Efeitos de um acoplamento com dependência temporal no modelo Jaynes-
 Cummings / Thiago Takaji Tsutsui. Ponta Grossa, 2025.
 114 f.

 Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),
 Universidade Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.
 Coorientador: Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro.

 1. Óptica Quântica. 2. Modelo Jaynes-Cummings. 3. Acoplamento com
 dependência temporal. 4. Deformações quânticas. I. Andrade, Fabiano Manoel
 de. II. Castro, Antônio Sérgio Magalhães de. III. Universidade Estadual de Ponta
 Grossa. Física. IV.T.

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

THIAGO TAKAJI TSUTSUI

EFEITOS DE UM ACOPLAMENTO COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL NO
MODELO JAYNES-CUMMINGS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física Teórica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **FABIANO MANOEL DE ANDRADE**
Data: 20/03/2025 15:03:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador- _____

Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG –

Titular/Presidente

Documento assinado digitalmente
 **CELSO JORGE VILLAS BOAS**
Data: 21/03/2025 04:41:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Celso Jorge Villas Boas – UFSCar – Titular

Documento assinado digitalmente
 **RENATO MOREIRA ANGELO**
Data: 21/03/2025 10:02:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Renato Moreira Angelo – UFPR – Titular

Ponta Grossa, 20 de março de 2025.

*Dedico este trabalho ao meu jiichan,
Takaji Ishiy (in memoriam),
e à minha vó,
Rute Tsutsui (in memoriam).*

AGRADECIMENTOS

É pretensioso supor que as pessoas terão interesse em seu trabalho. É ainda *mais* pretensioso pensar que elas se envolverão pela história por trás dele. Ainda assim, mesmo em meio à quantidade volumosa de leituras que a produção de uma dissertação exige, não resisto às singelas páginas introdutórias que narram essas origens. Por isso, antes de expressar meus agradecimentos, relato a origem deste trabalho para aqueles que compartilham dessa curiosidade.

No início de 2022, procurei o Prof. Antônio Sérgio em busca de orientação para uma iniciação científica informal. No último ano da Licenciatura em Física e com a pretensão de seguir para o mestrado, meu conhecimento sobre pesquisa em Física pura era mínimo. De fato, a única certeza que tinha era minha inaptidão para a Física Experimental, descoberta a duras penas. Por outro lado, bati na porta do meu futuro coorientador munido de um interesse pela teoria da Relatividade, despertado pela disciplina de Física Moderna, ministrada pelo Prof. Gelson Biscaia no ano anterior, com uma ênfase histórica. Devido a um detalhe burocrático, no entanto, o Prof. Antônio Sérgio não poderia me orientar, e ele recomendou procurar o Prof. Fabiano de Andrade. Com uma dose de boa-fé (talvez somente “fé”), ele aceitou. O tema disponível, próximo da Relatividade, era o *Oscilador de Dirac*. A forma simples com que o professor explicou foi suficiente: “É um oscilador harmônico quântico com a equação de Dirac”.

No primeiro ano do mestrado, o Prof. Fabiano sugeriu, como tema da dissertação, a relação entre o Oscilador de Dirac e a Óptica Quântica. Nesse contexto, meu coorientador propôs que eu investigasse uma variação do oscilador com dependências temporais, buscando um mapeamento em uma generalização do modelo Jaynes-Cummings. Minha reação inicial, no entanto, não foi de entusiasmo. Havia desenvolvido um apreço pelo Oscilador de Dirac; ele parecia ter um caráter *fundamental* que eu não conseguia perceber no modelo Jaynes-Cummings. Em retrospecto, não consigo entender o que me fazia pensar daquela maneira. Após me debruçar sobre o modelo, já havia constatado meu erro. Vi como a Óptica Quântica estava próxima do coração da Física; e como poderia ser diferente? É argumentável que a luz foi o que deu início à Física Quântica, afinal.

O cerne desta dissertação, porém, tomou forma quando li dois artigos. O primeiro, escrito por Gustavo Uhdre, ex-integrante do grupo de pesquisa ao qual pertenço, tratava de deformações algébricas no modelo Jaynes-Cummings. As deformações empregadas resultavam em uma variação do modelo, potencialmente uma versão no espaço-tempo não plano. O segundo artigo foi o de Yang, Ya-Ping e Hong, que investigava como manipular o parâmetro de acoplamento do modelo Jaynes-Cummings para alterar o comportamento de um observável.

Enquanto conversava com o Prof. Fabiano, pensei: “Será que posso reproduzir os resultados das deformações ao introduzir um acoplamento com dependência temporal?” Essa pergunta me conduziu a muitas outras, e a soma das respostas (de *algumas* perguntas) obtidas resultou nesta dissertação. Nela, busquei incorporar elementos de livros-texto que aprecio, especialmente o aspecto histórico da construção do conhecimento, que tanto me cativou ao estudar a Física do

século XX.

Um ano depois da minha reação à sugestão de tema dos meus orientadores, constato que este trabalho é essencialmente sobre Óptica Quântica. Em algumas referências, inclusive, a Óptica Quântica é definida como a Teoria Quântica de Campos *não-relativística*, o que é uma ironia aprazível.

Em primeiro lugar, desejo agradecer à minha família pela educação, desde o berço. Em particular, agradeço os meus pais, Márcio Minoru Tsutsui e Glauce Rumi Ishiy Tsutsui, à minha *baachan*, Kahoru Yano Ishiy, e ao meu avô, Luiz Tsutsui.

Em segundo lugar, gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade, pela sua atenção e receptividade. Da mesma forma, agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro, pela orientação inicial e paciência.

Ao grupo Física Quântica e Informação Quântica (FQIQ) por todas as discussões frutíferas. Menção especial a Danilo Cius, Gustavo Mehanna Uhdre, Alison Antunes da Silva e Paulo Eduardo Lopes da Rosa. Estendo meus agradecimentos a todos os colegas de pós-graduação, que sempre se mostraram solícitos em me ajudar.

À minha namorada, Alycia Sasaki de Mendonça, cujo afeto e compreensão me mantiveram são nos últimos dois anos. Amo você.

Aos meus amigos, pelo amparo durante o período do mestrado. Agradeço, particularmente: Thaiane de Toledo, Pedro Hara Matoso, Julia Rudek Machado, Skye Pillsky, Igor Chornobai de Oliveira e Mahmud Hussein El Farou.

Ao meu chefe, Gilberto Gueretz, e à minha colega, Leni Kadamós, pelas concessões que possibilitaram a realização deste trabalho.

A todos os professores que influenciaram meu desenvolvimento. Especialmente ao Prof. Msc. Luis Alberto Clabonde, por ter deliberadamente mentido acerca do número π .

Aos membros da banca de qualificação e defesa, Prof. Dr. Lucas Stori de Lara, Prof. Dr. Jose Danilo Szezech Junior, Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas e Prof. Dr. Renato Moreira Angelo, pelas observações pertinentes e provocações.

Para Alexandra Asanovna Elbakyan, a criadora do Sci-Hub, e toda a comunidade responsável pela manutenção do `abnTeX22`, a suíte `LATEX` utilizada neste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências e ao Setor de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pelo suporte e pela infraestrutura fornecidos.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro (Código de Financiamento 001) e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ).

*“Un paysage, pour moi, n’existe point en tant que paysage, [...] mais il vit par ses alentours, par
l’air et la lumière, qui varient continuellement. ”*
(Claude Monet)

RESUMO

O modelo Jaynes-Cummings é considerado paradigmático na Óptica Quântica. Introduzido em 1963, ele descreve a dinâmica resultante do acoplamento entre um átomo de dois níveis e um modo quantizado do campo eletromagnético. A partir dele, emergem aspectos não clássicos da interação entre radiação e matéria, como os colapsos e renascimentos das oscilações de Rabi. Extensões do modelo que consideram, por exemplo, o movimento atômico, tornam o parâmetro de acoplamento dependente do tempo e, por consequência, a evolução temporal do sistema é alterada. Neste trabalho, exploramos os efeitos de acoplamentos com dependências temporais na inversão de população e no emaranhamento entre átomo e campo. Em particular, estudamos o cenário de um átomo se movendo em uma cavidade que não foi completamente resfriada. Análises como a que apresentaremos são importantes no contexto do Controle Quântico, onde requiere-se o gerenciamento do estado atômico. Outrossim, realizamos um estudo heurístico acerca do método que denominamos abordagem do problema inverso, onde o acoplamento é modulado a partir da inversão de população requerida. Empregamos essa técnica para simular efeitos da κ -deformação em um modelo Jaynes-Cummings não deformado.

Palavras-chave: Óptica Quântica. Modelo Jaynes-Cummings. Acoplamento com dependência temporal. Deformações quânticas.

ABSTRACT

The Jaynes-Cummings model is considered paradigmatic in Quantum Optics. Introduced in 1963, it describes the dynamics resulting from the coupling between a two-level atom and a quantized mode of the electromagnetic field. From it, non-classical aspects of the interaction between radiation and matter emerge, such as the collapses and revivals of the Rabi oscillations. Extensions of the model, which consider, for example, atomic motion, make the coupling parameter time-dependent, and as a consequence, the time evolution of the system changes. In this work, we explore the effects of time-dependent coupling parameters on the population inversion and the entanglement between atom and field. In particular, we study the scenario of an atom moving in a not completely cooled cavity. Analyses such as the one we present are important in the context of Quantum Control, where managing the atomic state is a key objective. Additionally, we conduct a heuristic study of a method we call the inverse problem approach, in which the coupling is modulated based on the desired population inversion. We apply this technique to simulate the effects of κ -deformation in an undeformed Jaynes-Cummings model.

Keywords: Quantum Optics. Jaynes-Cummings. Time-dependent coupling. Quantum deformations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representação esquemática de uma cavidade óptica, destacando a interação entre matéria e radiação. A matéria é ilustrada por um átomo de dois níveis, enquanto a radiação é descrita por um modo do campo eletromagnético. . . .	17
Figura 2	Linha do tempo fora de escala, representando eventos relevantes para esta dissertação. Os trabalhos indicados serão citados ao longo desta dissertação.	20
Figura 3	Representação esquemática da teoria fenomenológica de Einstein acerca da radiação. Os estados estacionários do átomo, 1 e 2, possuem energias E_1 e E_2 , respectivamente. A população dos níveis atômicos pode ser alterada pelos processos de emissão espontânea e estimulada, descritos pelas taxas A_{21} e B_{21} , respectivamente, além da absorção, representada pelo coeficiente B_{12} . .	22
Figura 4	Representação da cavidade unidimensional, ao longo do eixo z , com paredes condutoras em $z = 0$ e $z = L$, e do modo do campo elétrico, polarizado em x .	24
Figura 5	Representação esquemática da ação dos operadores de criação e aniquilação agindo nos estados número, com a ressalva de que não apresentamos a constante numérica $\mathcal{C}$ ($\sqrt{n}$ ou $\sqrt{n+1}$). As expressões de energia obedecem os autovalores do hamiltoniano, Eq. (2.36).	29
Figura 6	Distribuição de probabilidade para o estado coerente do campo, Eq. (2.69), empregando $\langle n \rangle = 2$ (pontos verdes), $\langle n \rangle = 6$ (pontos roxos) e $\langle n \rangle = 10$ (pontos laranjas).	34
Figura 7	Distribuição de probabilidade para o estado térmico, Eq. (2.77), empregando $\langle n \rangle = 2$ (pontos verdes), $\langle n \rangle = 6$ (pontos roxos) e $\langle n \rangle = 10$ (pontos laranjas).	36
Figura 8	Esquema ilustrando os sistemas do modelo JC, onde representamos o acoplamento através de λ . O átomo é representado por um sistema de dois níveis, excitado ($ e\rangle$) e fundamental ($ g\rangle$), enquanto o modo da cavidade é modelado como um SHO, com o número de fótons associado ao estado número $ n\rangle$. A frequência do modo da cavidade é ν , enquanto a frequência associada à transição atômica é ω	40
Figura 9	Esquema ilustrando os níveis de energia do átomo e os operadores escada $\hat{\sigma}_{\pm}$. É instrutivo compará-la com a Fig. 3.	43
Figura 10	Esquema ilustrando as interações no hamiltoniano de Rabi. <i>Contra-girantes</i> : Em (a), o campo tem $n+1$ fótons e o átomo, excitado, emite um fóton. Em (b), o átomo migra para o nível fundamental, e o campo possui n fótons. <i>Girantes</i> : Em (c), o campo tem n fótons e o átomo, excitado, emite um fóton. Em (d), o átomo migra para o nível fundamental, e o campo possui $n+1$ fótons. . . .	45

- Figura 11 Representação esquemática dos procedimentos que utilizaremos ao estudar a dinâmica. Iniciamos com o estado inicial puro ($|\Psi(0)\rangle$) ou misto ($\hat{\rho}(0)$), e, no final, obtemos a inversão de população atômica ($W(t)$) e a VNE para o subsistema atômico ($S(\hat{\rho}^A)$). Para obter a evolução temporal, empregamos a equação de Schrödinger, Eq. (3.52), ou o operador de evolução temporal $\hat{U}(t)$. 49
- Figura 12 Em (a), apresentamos o comportamento da inversão de população, Eq. (3.65), para diferentes valores de dessintonia: $\Delta = 0$ (linha sólida azul), $\Delta = 0, 25$ (linha tracejada laranja), $\Delta = 0, 50$ (linha pontilhada verde), adotando $n = 0$. Em (b), apresentamos a inversão de população na condição de ressonância, Eq. (3.66), para diferentes números de fótons inicialmente na cavidade: $n = 0$ (linha sólida azul), $n = 1$ (linha tracejada laranja), $n = 2$ (linha pontilhada verde). Em ambos os gráficos, utilizamos $\lambda = 1$ 53
- Figura 13 Inversão de população para o estado inicial excitado da TLS e coerente da cavidade, Eq. (3.68), considerando um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$. Em (a) temos um intervalo de tempo menor, enquanto em (b) podemos ver um recorte maior do comportamento de $W(t)$, Eq. (3.72). 55
- Figura 14 Inversão de população, quando a cavidade está inicialmente no estado térmico e o átomo está excitado. Utilizamos um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$ 60
- Figura 15 Apresentamos a VNE da matriz de densidade reduzida do átomo (linha sólida vermelha), quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$ e $\lambda = 1$. Para auxiliar na interpretação, incluímos a inversão de população (linha pontilhada azul) sob a mesma perspectiva. 61
- Figura 16 Em (a), iniciamos com a cavidade no estado coerente, adotando $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$. Para auxiliar na interpretação, incluímos a inversão de população (linha pontilhada azul) sob a mesma perspectiva. Em (b), exibimos os comportamentos dos autovalores $\pi_+(t)$ (linha sólida marrom) e $\pi_-(t)$ (linha pontilhada preta), utilizando os mesmos parâmetros que em (a). 63
- Figura 17 Representação esquemática do aparato experimental que permitiu a observação dos colapsos e renascimentos das RO. Átomos de Rydberg são emitidos por uma fonte (F). Posteriormente, os átomos são preparados em estados circulares de Rydberg (A), em uma caixa (B). Em seguida, esses átomos interagem com a cavidade resfriada (C), alimentada por uma fonte (S) que fornece um estado coerente de baixa amplitude. Por fim, o estado atômico é medido pelos detectores (D). 64
- Figura 18 Em (a) representamos o acoplamento senoidal, Eq. (4.15), para $m = 1$ (linha sólida laranja) e $m = 2$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, Eq. (4.17), adotando $m = 1$ (linha sólida azul) e $m = 2$ (linha tracejada amarela). Os parâmetros escolhidos foram $\lambda_0 = \zeta = 1$. 69

Figura 19	Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento senoidal, Eq. (4.17), empregando $\lambda_0 = \zeta = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $m = 1$ e, em (b), $m = 2$	70
Figura 20	Apresentamos a VNE considerando o acoplamento senoidal, empregando $\lambda_0 = \zeta = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a) adotamos $m = 1$, enquanto em (b), empregamos $m = 2$	71
Figura 21	Em (a) representamos o acoplamento linear, Eq. (4.19), para $\zeta = 0,16$ (linha sólida laranja) e $\zeta = 0,01$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $ \Psi(0)\rangle = e, 0\rangle$, Eq. (4.21), adotando $\zeta = 0,16$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,01$ (linha tracejada amarela). O parâmetro escolhido foi $\lambda_0 = 1$	73
Figura 22	Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento linear, Eq. (4.21), empregando $\lambda_0 = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,16$ e, em (b), $\zeta = 0,01$	74
Figura 23	Apresentamos a VNE considerando o acoplamento linear, empregando $\lambda_0 = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,16$ e, em (b), $\zeta = 0,01$	75
Figura 24	Em (a) representamos o acoplamento modulado pela secante hiperbólica, Eq. (4.22), para $\zeta = 0,3$ (linha sólida laranja) e $\zeta = 0,1$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $ \Psi(0)\rangle = e, 0\rangle$, Eq. (4.24), adotando $\zeta = 0,3$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,1$ (linha pontilhada amarela). O parâmetro escolhido foi $\lambda_0 = 1$. Tempos negativos foram utilizados para simular o aumento a queda no parâmetro de acoplamento.	76
Figura 25	Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento modulado pela secante hiperbólica, Eq. (4.24), empregando $\lambda_0 = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Adotamos $\zeta = 0,3$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,1$ (linha pontilhada amarela). Em (a) temos um intervalo de tempo menor, enquanto em (b) analisamos um recorte maior do comportamento da inversão de população.	77
Figura 26	Apresentamos a VNE considerando o acoplamento modulado pela secante hiperbólica, empregando $\lambda_0 = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,3$ e, em (b), $\zeta = 0,1$	78

Figura 27	Inversão de população, Eq. (4.25), para um estado inicial térmico e um átomo que se move. Consideramos um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e adotamos $\zeta = \lambda_0 = 1$. Em (a), utilizamos $m = 1$, enquanto em (b) empregamos $m = 2$	79
Figura 28	Esquema representando o funcionamento da IPA. Inserimos a inversão de população requerida, $W(t)$, na Eq. (5.11), obtendo $\lambda(t)$. Ao resolvermos o sistema de equações diferenciais (ODEs) com o parâmetro de acoplamento obtido, calculamos as probabilidades e $W(t)$	82
Figura 29	A inversão de população, Eq. (5.12), na forma de ondas triangulares (linha sólida azul), empregando $\zeta = 1$, e o parâmetro de acoplamento que causa esse comportamento (linha tracejada laranja), com duas escalas verticais para uma melhor visualização da relação entre ambas quantidades.	83
Figura 30	A inversão de população $W_\alpha(t)$ (linha sólida azul) e o parâmetro de acoplamento $\lambda_\alpha(t)$ (linha tracejada laranja) que a causa, com duas escalas verticais. Para $W_\alpha(t)$, utilizamos os parâmetros $\langle n \rangle = 5$ e $\lambda_0 = 1$	84
Figura 31	Apresentamos a diferença entre a inversão de população $\Delta W(t)$ (linha sólida azul), entre os modelos κ -JC e JC, utilizando $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$, $\langle n \rangle = 5$ e $\lambda_0 = 1$. Simultaneamente, destacamos a diferença nos parâmetros de acoplamento $\Delta \lambda(t)$ (linha tracejada laranja), que causam as respectivas inversões de população em uma cavidade inicialmente no estado de vácuo.	87
Figura 32	A inversão de população $W_n(t)$ (linha sólida azul) e o parâmetro de acoplamento $\Lambda_n(t)$ (linha tracejada laranja) que a causa em um estado inicial de número do modo da cavidade, adotando $\lambda_0 = 1$ e $n = 5$	89
Figura 33	Representação esquemática da GIPA. Iniciamos extraíndo $W_n(t)$ do somatório de $W_\gamma(t)$. Sequencialmente, inserimos $W_n(t)$ na Eq. (5.24), obtendo $\Lambda_n(t)$. Ao resolvermos as equações diferenciais com o parâmetro de acoplamento obtido, calculamos as probabilidades e $W_n(t)$. Somando $W_n(t)$, empregando a distribuição P_n^γ , obtemos $W_\gamma(t)$	90
Figura 34	A inversão de população $W_\chi(t)$ nos cenários de acoplamento constante (linha tracejada verde) e dependente do tempo (linha sólida azul), utilizando $\lambda_0 = 1$ e $\langle n \rangle = 5$	91
Figura 35	Representação esquemática da relação entre emaranhamento e VNE.	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Resumo da notação de Dirac.	20
Tabela 2	Dependências temporais no acoplamento. Na dependência temporal senoidal, adotamos $\zeta = \pi v/L$	79

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

JC	Jaynes-Cummings
EM	Eletromagnético
RO	<i>Rabi oscillations</i> (Oscilações de Rabi)
RWA	<i>Rotating-wave approximation</i> (Aproximação da onda girante)
NMR	<i>Nuclear Magnetic Resonance</i> (Ressonância Magnética Nuclear)
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i> (Eletrodinâmica Quântica)
TDJC	<i>Time-dependent Jaynes-Cummings</i> (Jaynes-Cummings dependente do tempo)
VNE	<i>Von Neumann Entropy</i> (Entropia de von Neumann)
IPA	<i>Inverse Problem Approach</i> (Abordagem do Problema Inverso)
GIPA	<i>Generalized Inverse Problem Approach</i> (Abordagem do Problema Inverso Generalizada)
UCR	<i>University of California, Riverside</i> (Universidade da Califórnia, Riverside)
WRK	Walter-Rempe-Klein
SHO	<i>Simple harmonic oscillator</i> (Oscilador harmônico simples)
TLS	<i>Two-level system</i> (Sistema de dois níveis)
BS	<i>Bare states</i> (Estados despidos)
ODE	<i>Ordinary differential equation</i> (Equação diferencial ordinária)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	SEGUNDA QUANTIZAÇÃO DA LUZ	21
2.1	COEFICIENTES DE EINSTEIN	21
2.2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	22
2.2.1	Flutuações do vácuo	30
2.3	ESTADOS COERENTES	31
2.4	ESTADOS TÉRMICOS	34
2.5	TERMO DE INTERAÇÃO ENTRE ÁTOMO E CAMPO	36
3	MODELO JAYNES-CUMMINGS	39
3.1	CONTEXTO HISTÓRICO DO MODELO JAYNES-CUMMINGS	39
3.2	HAMILTONIANO DO MODELO JAYNES-CUMMINGS	40
3.2.1	Número de excitações	46
3.3	DINÂMICA DO MODELO JAYNES-CUMMINGS	49
3.3.1	Equação de Schrödinger	50
3.3.2	Operador de evolução temporal	56
3.4	EMARANHAMENTO ENTRE ÁTOMO E CAMPO	59
3.5	VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL	62
4	ACOPLAMENTOS COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL	65
4.1	DINÂMICA DO MODELO JAYNES-CUMMINGS COM ACOPLAMENTO DEPENDENTE DO TEMPO	65
4.2	EXEMPLOS DA LITERATURA	67
4.2.1	Dependência temporal senoidal	68
4.2.2	Dependência temporal linear	71
4.2.3	Dependência temporal secante hiperbólica	72
4.3	UM ÁTOMO SE MOVENDO EM UMA CAVIDADE NÃO RESFRIADA	75
5	ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO	80
5.1	FÓRMULA DA ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO	81
5.2	DEFORMAÇÕES QUÂNTICAS	84
5.3	GENERALIZAÇÃO DA ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO	87
6	CONCLUSÕES	92
	REFERÊNCIAS	93

APÊNDICE A – EMARANHAMENTO, MATRIZ DENSIDADE E ENTROPIA DE VON NEUMANN	107
APÊNDICE B – CÁLCULOS	111

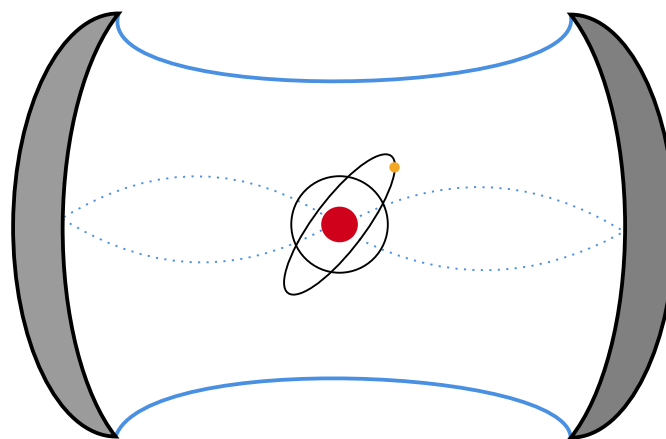
1 INTRODUÇÃO

A Óptica Quântica estuda a interação entre radiação e matéria, representada esquematicamente na Fig. 1 por meio de uma cavidade óptica. O modelo Jaynes-Cummings (JC), introduzido em 1963 (1), é um marco nesse contexto, pois descreve, em nível microscópico, a interação entre matéria, na forma de um átomo de dois níveis, e radiação, caracterizada por um modo quantizado do campo eletromagnético (EM). A partir dele, emergem aspectos não clássicos da interação entre radiação e matéria, como os colapsos e renascimentos das *Rabi oscillations* (RO). Esse aspecto do modelo foi verificado experimentalmente, no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades (2–4). Desde então, o interesse por esse sistema cresceu exponencialmente (5).

Aplicando-se a *rotating-wave approximation* (RWA) no modelo de Rabi, deriva-se o hamiltoniano do modelo JC, onde se observa a dinâmica de “flip-flop” (6), com a troca de quanta entre os graus de liberdade do sistema. Mesmo sob as aproximações que o delimitam, o modelo é frutífero, descrevendo uma variedade de fenômenos físicos. Dentre eles, estão as RO (7, 8), os colapsos e renascimentos (3, 4, 9, 10), *squeezing* (11, 12), emaranhamento entre átomo e campo (13–15), estados gato de Schrödinger (16–19) e *sub-Poissonian statistics* (20–22). Ademais, o cerne do modelo JC reside na descrição de um sistema de dois níveis acoplado a um oscilador harmônico, sendo possível mapeá-lo em sistemas de íons aprisionados (23–25) e no Oscilador de Dirac (26–29). Na área de Informação e Computação Quântica, o modelo tem aplicações no processamento de informações (30–32) e na criação de portas lógicas (33, 34).

Há também extensões do modelo para meios não-lineares (35, 36), interações com múltiplos fótons (37), e com N átomos de dois níveis ($N > 1$) (modelo de Dicke ou Tavis-Cummings) (38, 39). Além disso, existem generalizações envolvendo mais modos do campo EM e níveis atômicos (40, 41), assim como o efeito da dissipação na cavidade (42–44). Um desenvolvi-

Figura 1 – Representação esquemática de uma cavidade óptica, destacando a interação entre matéria e radiação. A matéria é ilustrada por um átomo de dois níveis, enquanto a radiação é descrita por um modo do campo eletromagnético.



Fonte: Adaptada de (6).

mento particularmente intrigante é a aplicação da álgebra deformada para a criação de versões alternativas do modelo (45–47). Recentemente, Uhdre *et al.* (48) apresentaram o modelo κ -Jaynes-Cummings (κ -JC), no cenário da álgebra κ -deformada de Poincaré-Hopf (49–52).

No âmbito das generalizações, uma que se destaca para este trabalho é o modelo *time-dependent* JC (TDJC). Nele, dependências temporais são construídas no acoplamento, na desintonia, ou em ambos (30). Fisicamente, essa extensão pode representar, por exemplo, um campo que depende do tempo ou o movimento do átomo. Naturalmente, esse panorama altera a dinâmica do sistema, e o principal objetivo deste trabalho é investigar os efeitos de *acoplamentos com dependência temporal* na dinâmica do modelo JC, com ênfase nas suas implicações para a inversão de população e no emaranhamento entre átomo e campo, quantificado através da entropia de von Neumann (VNE¹). Essa dimensão do trabalho pode ser enriquecedora, pois ilustra as consequências dos efeitos transientes na pureza dos subsistemas. Ademais, exploramos a evolução temporal da inversão de população de um átomo em movimento, dentro de uma cavidade inicialmente no estado térmico. Até onde sabemos, a evolução temporal da inversão de população desse cenário não foi abordada na literatura.

Nesse âmbito, também nos debruçamos sobre o que apelidamos de “abordagem do problema inverso” (IPA²), elaborada por Yang *et al.* (53), e sintetizada através da pergunta: “qual acoplamento com dependência temporal causa o comportamento requerido para as RO?” Essa técnica tem aplicações no contexto do Controle Quântico³ (55), onde se busca a manipulação do comportamento do sistema de dois níveis. Entretanto, devido à sua formulação original, o IPA é válido para a dinâmica de uma cavidade inicialmente no estado de vácuo. Devido a isso, aqui *generalizamos* a IPA (*generalized* IPA ou, simplesmente, GIPA) para abranger o modo do campo quando ele é descrito por uma distribuição de probabilidades.

Outrossim, empregamos a IPA e sua generalização no contexto das deformações quânticas. Como citado acima, utilizando a álgebra κ -deformada de Poincaré-Hopf, deriva-se o modelo κ -JC. Neste trabalho, apresentamos explicitamente a inversão de população do modelo κ -JC e, por meio da IPA e sua generalização, determinamos o acoplamento com dependência temporal que reproduz os efeitos da κ -deformação no modelo JC não deformado. Isso é particularmente relevante, pois pode permitir uma interpretação da deformação quântica no modelo κ -JC e, possivelmente, viabilizar uma verificação experimental em um cenário onde o acoplamento pode ser ajustado com precisão. Uma vez que a κ -deformação é comumente associada à gravidade quântica, a realização de um teste experimental nesse modelo deformado poderia abrir portas para investigações experimentais inéditas no campo da gravidade quântica (52, 56). Nossos resultados sobre a IPA foram reunidos em um artigo recentemente aceito para publicação (57), cujo manuscrito está disponível no arXiv (58).

Para cumprir esses objetivos da maneira mais clara possível, nos dois primeiros capítulos

¹ Abreviada a partir de sua tradução para o inglês, *von Neumann entropy*.

² Abreviada a partir de sua tradução para o inglês, *inverse problem approach*.

³ A área do Controle Quântico busca estabelecer protocolos para manipular sistemas quânticos (54). Um exemplo que envolve o modelo JC é o problema 7.3 da referência (34).

apresentamos conceitos fundamentais da Óptica Quântica e do modelo JC. Nosso intuito é traçar uma linha desde trabalhos fundamentais do início da Mecânica Quântica, com destaque para a teoria da radiação de Einstein e a segunda quantização da luz de Dirac, até as extensões propostas neste trabalho. Essa escolha decorre tanto de uma motivação estética quanto de um desejo de preservar o caráter pedagógico da dissertação.

É importante ressaltar que utilizaremos *luz* para nos referirmos ao campo eletromagnético como um todo, não nos restringindo ao espectro visível de frequências. Essa prática é comum em livros de Óptica Quântica (59). Nesse contexto, omitiremos o sufixo “EM” nos momentos em que o contexto deixar claro que nos referimos ao campo eletromagnético. Adicionalmente, cabe dizer que denominaremos o campo também como radiação, buscando a fluidez do texto. Com o mesmo fim, utilizaremos “modo da cavidade” e “modo do campo” intercambiavelmente.

Além disso, optamos por não traduzir os termos em inglês que não possuem uma tradução amplamente estabelecida na literatura, como *squeezing*, ou aqueles vinculados a abreviaturas amplamente utilizadas no idioma original, como RWA para *rotating-wave approximation*. No caso dos termos “entropia de von Neumann” e da “abordagem do problema inverso”, mantivemos a versão em português no texto e a sigla em inglês, dado que se referem a uma seção e a um capítulo, respectivamente, e preferimos evitar títulos em língua estrangeira.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentaremos a quantização do campo e discutiremos algumas consequências dessa abordagem. Descrevemos, também, os estados coerentes e térmicos da radiação EM, e o termo que expressa a interação entre átomo e campo. Sequencialmente, no capítulo 3 introduziremos o modelo JC, o contexto histórico do qual é oriundo e aspectos emblemáticos de sua dinâmica. Evidenciaremos dois métodos para “resolvê-lo”: a equação de Schrödinger e o operador de evolução temporal.

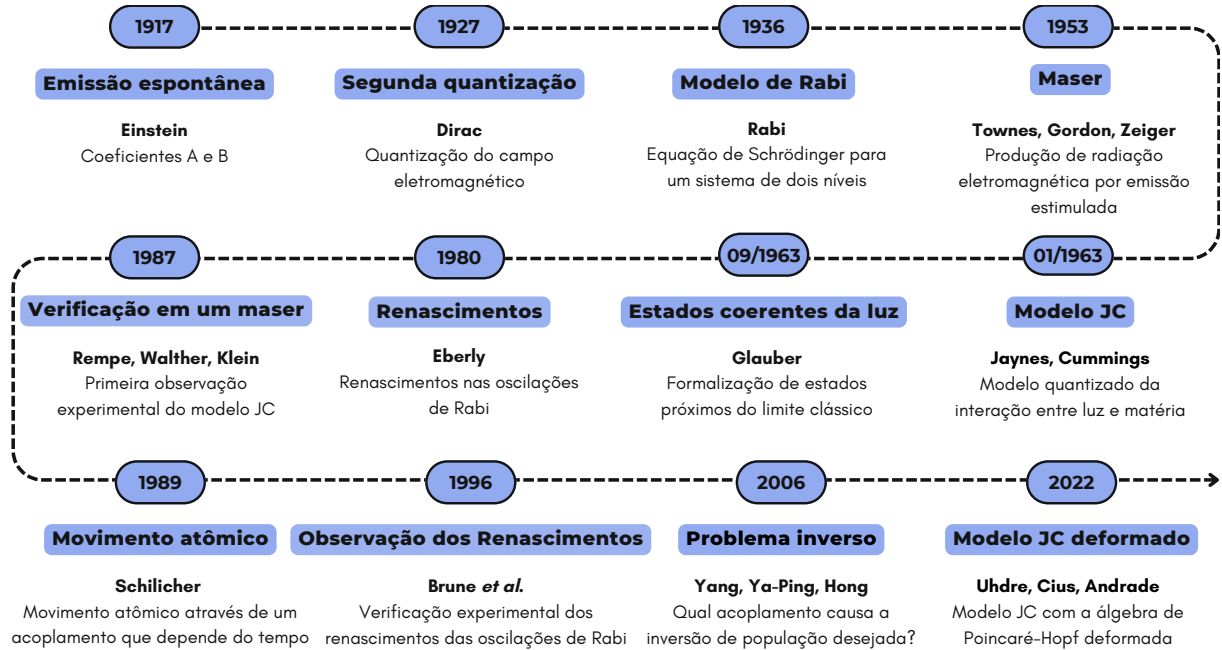
Com a fundamentação teórica dos capítulos supracitados, investigaremos a inserção de dependências temporais no parâmetro de acoplamento, a partir de exemplos da literatura, no capítulo 4. Até onde sabemos, o estudo do emaranhamento para dependências temporais do tipo secante hiperbólica (60) e linear (61), considerando o estado inicial coerente da cavidade, ainda não foi explorado na literatura. Nesse contexto, também analisaremos a inversão de população de um átomo em movimento dentro de uma cavidade que não foi completamente resfriada. A IPA será estudada no capítulo 5, onde a utilizaremos para reproduzir os efeitos da κ -deformação em um sistema JC não deformado. Com exceção da revisão feita no início desse capítulo, apresentamos contribuições originais a respeito de simulações da deformação quântica (57).

No Apêndice A, apresentaremos de forma introdutória os conceitos de matriz densidade e emaranhamento, incluindo a quantificação dessa quantidade por meio da VNE. Adicionalmente, no Apêndice B, apresentaremos cálculos que conduzem a alguns resultados discutidos nesta dissertação.

Com fins ilustrativos, expomos uma linha do tempo fora de escala na Fig. 2, com os trabalhos mais relevantes para esta dissertação. Os trabalhos indicados serão citados ao longo do texto.

Quanto aos conceitos basilares para a compreensão desta dissertação, recomendamos o capítulo 1 de (62), que faz uma revisão sistemática da matemática por trás da Mecânica Quântica,

Figura 2 – Linha do tempo fora de escala, representando eventos relevantes para esta dissertação. Os trabalhos indicados serão citados ao longo desta dissertação.



Fonte: O autor.

ou (63), que apresenta os métodos da Óptica Quântica. Ademais, utilizamos a notação de Dirac, resumida na Tabela 1. A obra (64) é amplamente reconhecida por fornecer uma fundamentação teórica robusta.

Tabela 1 – Resumo da notação de Dirac.

Notação	Descrição
$ \psi\rangle$	Vetor ou <i>ket</i> de estado.
$\langle\psi $	Vetor dual a $ \psi\rangle$, também denominado <i>bra</i> .
$\langle\psi \phi\rangle$	Produto interno entre os vetores $ \psi\rangle$ e $ \phi\rangle$.
$ \psi\rangle\langle\phi $	Produto externo entre os vetores $ \psi\rangle$ e $ \phi\rangle$.
$ \psi\rangle \otimes \phi\rangle = \psi, \phi\rangle$	Produto tensorial entre $ \psi\rangle$ e $ \phi\rangle$.
$\hat{O}$	Operador.
$\hat{O}^\dagger$	Transposta conjugada de $\hat{O}$.
$\langle\psi \hat{O} \psi\rangle$	Valor esperado do operador $\hat{O}$ em relação ao estado $ \psi\rangle$.

Fonte: Adaptada de (34, p. 62).

2 SEGUNDA QUANTIZAÇÃO DA LUZ

Neste capítulo, apresentamos a quantização do campo EM, procedimento conhecido como a “segunda quantização da luz”¹ (59, 66).

Iniciamos com o modelo fenomenológico de radiação proposto por Einstein, devido à sua relevância histórica. Em seguida, descrevemos o processo de quantização da luz, no qual a analogia com o *simple harmonic oscillator* (SHO) se torna evidente. Utilizando a representação dos estados número, os operadores de criação e aniquilação emergem naturalmente. Discutiremos suas características e a interpretação física associada a eles. Nesse contexto, expomos algumas consequências não clássicas do campo quantizado, ressaltando as flutuações do vácuo. Ademais, introduzimos os estados coerentes e térmicos do campo, cujas características se manifestarão de diferentes maneiras na dinâmica do modelo JC, explorada no próximo capítulo.

2.1 COEFICIENTES DE EINSTEIN

A teoria da radiação proposta por Einstein (67) desempenha um papel importante no estudo da interação entre radiação e matéria, especialmente no que diz respeito aos conceitos de emissão e absorção, tanto estimulada quanto espontânea. Outrossim, sob uma perspectiva didática, a exposição dessa teoria auxilia na compreensão das abstrações do modelo JC. Dedicamos, portanto, esta seção a uma *breve* explicação dessa abordagem. Cabe dizer que, devido ao período em que foi formulada, integrando a “Velha Teoria Quântica” (68), a teoria possui um acentuado caráter fenomenológico (69).

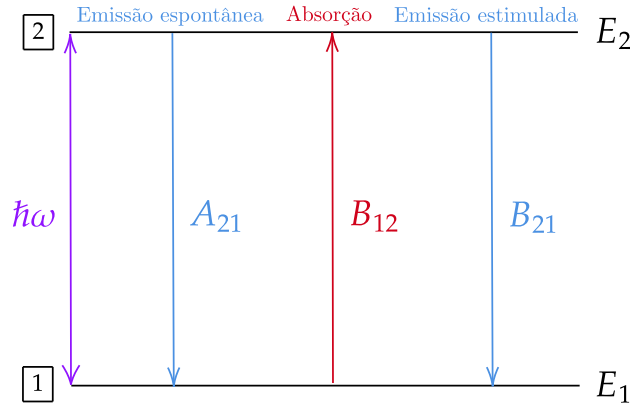
Supomos que existem N átomos no interior de uma cavidade óptica, cada um com um par de estados estacionários, 1 e 2, de energias E_1 e E_2 , respectivamente. A diferença entre as energias segue a Hipótese de Bohr, tal que

$$\hbar\omega = E_2 - E_1 > 0. \quad (2.1)$$

Os estados estacionários são ocupados de acordo com a distribuição de Boltzmann e os átomos interagem com um feixe de luz que atravessa a cavidade (69, 70). Com base nesse cenário, Einstein definiu as três formas pelas quais as populações dos níveis atômicos podem variar. Um átomo pode absorver um fóton e transitar do nível 1 para o nível 2 – processo associado ao coeficiente B_{12} . Ademais, o átomo pode emitir um fóton e migrar do nível 2 para o nível 1. Se esse processo acontece *devido* à presença de radiação, ele está associado ao coeficiente B_{21} e é denominado *emissão estimulada*. Caso contrário, a emissão é denominada *espontânea* e está associada ao coeficiente A_{21} . Resultante dos coeficientes A e B , surgem mudanças na população dos níveis atômicos. A partir desse cenário, ilustrado na Fig 3, e de alguns postulados

¹ Como aponta Kojevnikov (65), esse termo, em alguns contextos, é utilizado para se referir somente à quantização da função de onda. Adotaremos o uso mais convencional, abrangendo a quantização da radiação (59).

Figura 3 – Representação esquemática da teoria fenomenológica de Einstein acerca da radiação. Os estados estacionários do átomo, 1 e 2, possuem energias E_1 e E_2 , respectivamente. A população dos níveis atômicos pode ser alterada pelos processos de emissão espontânea e estimulada, descritos pelas taxas A_{21} e B_{21} , respectivamente, além da absorção, representada pelo coeficiente B_{12} .



Fonte: Adaptada de (70, p. 17).

físicos razoáveis, o modelo de Einstein fornece a base para o funcionamento do *laser*, como argumentado em (70).

Como argumento para destacar a importância desse modelo, vale mencionar que um dos grandes méritos da segunda quantização da luz, apresentada a seguir, foi a obtenção dos coeficientes A e B de Einstein.

2.2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

De acordo com lembranças de Dirac (66), a ideia para sua teoria da radiação surgiu acidentalmente, enquanto manipulava as equações de onda (71), sob a diretriz de tratá-las como um conjunto de variáveis que não comutam. Nas palavras do físico britânico²:

“Basicamente, considera-se a função de onda da teoria de Schrödinger, a função de onda $\psi(q)$ (onde q é uma variável que especifica um ponto no domínio da função de onda), e supõe-se que todas as $\psi(q)$ para diferentes valores de q são transformadas em operadores (operadores de Heisenberg) em vez de serem apenas números. Em seguida, considera-se as quantidades conjugadas $\bar{\psi}(q)$ e também as transforma em operadores. Supõe-se que as $\psi(q)$ comutem entre si, assim como as $\bar{\psi}(q)$, mas que as $\bar{\psi}(q)$ não comutem com as $\psi(q)$ (Dirac (72), p. 48, tradução nossa).”

Esse processo ficou conhecido como *segunda quantização*, pois consiste em tomar uma função de onda $\psi(q)$, que já é presumivelmente *quântica*, e submetê-la a uma nova quantização (65). Os operadores $\hat{\psi}(q)$ e $\hat{\bar{\psi}}(q)$, no contexto da estatística de Bose-Einstein, são interpretados fisicamente como aqueles que aumentam ou reduzem a excitação em um quanta. Logo, a utilidade

² Não utilizamos a notação de operadores no trecho uma vez que é uma citação direta.

dos operadores $\hat{\psi}(q)$ e $\hat{\bar{\psi}}(q)$ para descrever um sistema de bósons torna-se clara. Com isso em mente, Dirac decidiu explorar o problema de um conjunto de fótons interagindo com um sistema atômico. Esse estudo culminaria na quantização do campo EM, ou *segunda quantização da luz*.

No ano de 1927, Dirac publicou seu trabalho fundamental (73), estabelecendo assim os alicerces da *Quantum Electrodynamics* (QED). A metodologia utilizada envolvia a energia e a fase da radiação EM como *q-numbers*³ (75), isto é, operadores. Além disso, Dirac empregou a representação dos estados número e os operadores de criação e aniquilação. Nesse sentido, Dirac abordou a interação entre átomo e campo EM⁴ e, como mencionamos anteriormente, o principal resultado obtido foi a derivação do fenômeno das emissões estimulada e espontânea.

Ao longo do capítulo, explanaremos o processo de quantização do campo de uma forma diferente daquela adotada por Dirac, embora as características citadas acima estejam presentes. No contexto da interação entre radiação e matéria, denominaremos o método da QED, interpretando o campo EM como um operador, como abordagem *quântica*, em contraste com a abordagem *semiclássica*, que trata o campo como uma “função contínua” (1). Ademais, limitaremos nossa análise a um único modo, isto é, somente um número de onda para a radiação EM (59). Nesse sentido, seguiremos o método descrito por Scully e Zubairy (77), Gerry e Knight (78) e Loudon (70). Como estamos lidando com apenas um modo, em algumas ocasiões, optamos por nos referir ao *campo* em vez de ao *modo do campo*.

Consideremos uma cavidade unidimensional, ao longo da direção z , com paredes condutoras em $z = 0$ e $z = L$. O campo elétrico deve ser nulo nos limites da cavidade, possuindo a forma de uma onda estacionária (70). Ademais, assumimos que não há fontes de campo na cavidade e que o campo é polarizado ao longo do eixo x ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t), \quad (2.2)$$

com $\mathbf{e}_x$ sendo o versor associado ao eixo x . A cavidade e o modo do campo elétrico estão representados na Fig. 4. As equações de Maxwell para o vácuo, na ausência de fontes (79–81) e nas unidades do SI, são

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.5)$$

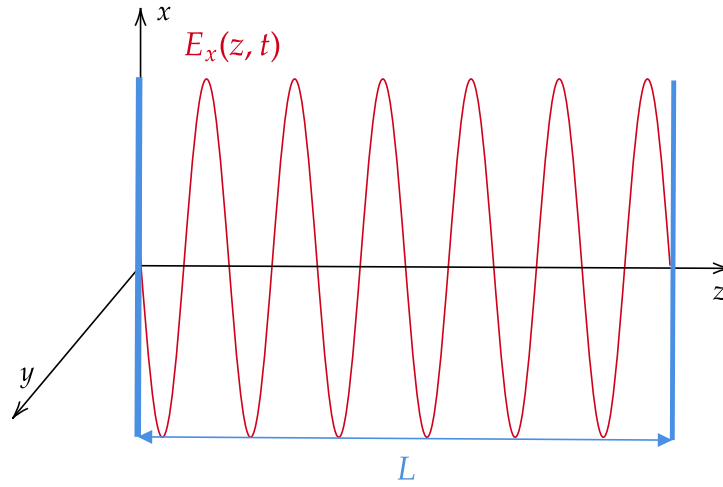
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

com $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ denotando, respectivamente, os campos elétrico e magnético, ε_0 sendo a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. O símbolo ∇

³ Dirac utilizava o termo *c-numbers* para se referir a números clássicos, reais ou complexos, e *q-numbers* para números quânticos (74).

⁴ Embora a QED seja a teoria amplamente reconhecida pela quantização do campo EM, já havia esforços prévios nesse sentido, notavelmente por Born, Heisenberg e Jordan (76).

Figura 4 – Representação da cavidade unidimensional, ao longo do eixo z , com paredes condutoras em $z = 0$ e $z = L$, e do modo do campo elétrico, polarizado em x .



Fonte: Adaptada de (78, p. 11).

representa o operador diferencial

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.7)$$

a partir do qual são definidos o divergente, $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, e o rotacional, $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, sendo $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ um campo vetorial (82).

Nesse caso, a equação de onda do campo elétrico é dada por (Apêndice B)

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

que é identificada como uma equação diferencial que possui soluções do tipo onda plana (81). Para as condições de contorno da cavidade unidimensional o modo do campo é descrito pela equação

$$E_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\nu^2}{V\epsilon_0}} q(t) \sin(kz), \quad (2.9)$$

na qual ν representa a frequência do modo, $V = LA$ denota o volume efetivo da cavidade, A simboliza a área transversal da cavidade e $q(t)$ é uma função do tempo com dimensão de comprimento (70, 78). Representando o número de onda, k está associado à frequência através de

$$k = \frac{\nu}{c}. \quad (2.10)$$

Com a frequência do modo nesse caso obedecendo

$$\nu_m = c \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Por ora, tomamos ν como uma das frequências possíveis, sem nos preocuparmos com a dependência em m . Através da Eq. (2.6), podemos formular uma expressão para o campo

magnético na cavidade, polarizado em y . Derivando a Eq. (2.9) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2\nu^2}{V\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz), \quad (2.12)$$

que reinserimos na Eq. (2.6), de tal forma que

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2\nu^2}{V\varepsilon_0}} \dot{q}(t) \sin(kz) \mathbf{e}_x. \quad (2.13)$$

Como $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ é polarizado em y , o rotacional é $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\partial_z B_y(z, t) \mathbf{e}_x$. Sendo assim, a expressão para o campo magnético é

$$\begin{aligned} B_y(z, t) &= -\mu_0 \sqrt{\frac{2\nu^2 \varepsilon_0}{V}} \dot{q}(t) \int \sin(kz) dz \\ &= \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{2\nu^2 \varepsilon_0}{V}} p(t) \cos(kz), \end{aligned} \quad (2.14)$$

com $p(t)$ simbolizando a derivada de $q(t)$ em relação ao tempo (78).

O hamiltoniano clássico H , associado a um único modo do campo EM, é dado por

$$H = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] dV \quad (2.15)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_0 E_x^2(z, t) + \mu_0^{-1} B_y^2(z, t)] dV. \quad (2.16)$$

Realizando a integração (Apêndice B), obtemos

$$H = \frac{1}{2} [\nu^2 q^2(t) + p^2(t)], \quad (2.17)$$

que é, precisamente, o hamiltoniano associado ao SHO (64), para uma partícula de massa igual à unidade. No contexto dessa equivalência, os campos elétrico e magnético desempenham os papéis de posição e momentum conjugados quando desconsideramos fatores de escala. O processo de quantização do campo, então, é o mesmo que o de um SHO (83), i.e. substituímos as quantidades clássicas $q(t)$ e $p(t)$ pelos *operadores* $\hat{q}$ e $\hat{p}$, respectivamente. Esses operadores obedecem à relação de comutação canônica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{\mathbb{1}}, \quad (2.18)$$

na qual $\hat{\mathbb{1}}$ representa o operador identidade, o qual será deixado implícito a partir deste ponto, salvo quando sua presença auxiliar na compreensão de uma equação. Adicionalmente, temos $[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$.

Devido à quantização, o hamiltoniano clássico H assume o papel de um operador no espaço de Hilbert, cuja forma é dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\nu^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2). \quad (2.19)$$

Da mesma maneira, os campos elétrico e magnético também se tornam operadores, em função de $\hat{q}$ e $\hat{p}$,

$$\hat{E}_x(z, t) = \sqrt{\frac{2\nu^2}{V\varepsilon_0}} \hat{q} \sin(kz), \quad (2.20)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \frac{\mu_0}{k} \sqrt{\frac{2\nu^2\varepsilon_0}{V}} \hat{p} \cos(kz). \quad (2.21)$$

Os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ representam observáveis e são, portanto, hermitianos. É conveniente, no entanto, introduzir o operador adimensional não hermitiano de aniquilação $\hat{a}$ e seu hermitiano $\hat{a}^\dagger$, o operador de criação. Eles são definidos por

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\nu}} (\nu\hat{q} + i\hat{p}), \quad (2.22)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\nu}} (\nu\hat{q} - i\hat{p}). \quad (2.23)$$

Naturalmente, os operadores $\hat{q}$ e $\hat{p}$ podem ser expressos em função dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, conforme

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.24)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\nu}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (2.25)$$

assim como os campos elétrico e magnético,

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \sin(kz), \quad (2.26)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = i\mathcal{B}_0 (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \cos(kz), \quad (2.27)$$

sendo $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\hbar\nu/\varepsilon_0 V}$ e $\mathcal{B}_0 = (\mu_0/k) \sqrt{\varepsilon_0 \hbar\nu^3/V}$.

Considerando que os produtos entre os operadores de aniquilação e criação são dados por

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2\hbar\nu} (\nu^2\hat{q}^2 - i\nu[\hat{q}, \hat{p}] + \hat{p}^2), \quad (2.28)$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2\hbar\nu} (\nu^2\hat{q}^2 + i\nu[\hat{q}, \hat{p}] + \hat{p}^2). \quad (2.29)$$

A partir da Eq. (2.18), conclui-se que a relação de comutação entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ é

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}. \quad (2.30)$$

Notavelmente, a partir da Eq. (2.29), podemos expressar o hamiltoniano, Eq. (2.19), através dos operadores criação e aniquilação,

$$\hat{H} = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.31)$$

No decorrer da dissertação, optamos por utilizar os operadores de criação e aniquilação ao invés dos operadores momentum e posição, devido à maneira como o modelo JC é formulado.

Nesse sentido, para discutir a natureza dos operadores de criação e aniquilação, nos baseamos em livros-texto canônicos de Mecânica Quântica (64, 83). Começamos definindo o operador número

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.32)$$

que possui autovalores n e autovetores $|n\rangle$, denominados estados número. Logo,

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.33)$$

Desta forma, podemos escrever o hamiltoniano do campo, Eq. (2.31), utilizando o operador número

$$\hat{H} = \hbar\nu \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.34)$$

É evidente que $\hat{H}$ é uma função linear de $\hat{n}$, o que permite a diagonalização simultânea de ambos os operadores (64). Em outras palavras, a representação matricial do hamiltoniano, Eq. (2.34), é diagonal quando escrita na base $|n\rangle$. Utilizando as Eqs. (2.33) e (2.34), temos

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\nu \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (2.35)$$

Logo, concluímos que os autovalores de energia são dados por

$$\mathfrak{E}_n = \hbar\nu \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.36)$$

A equação (2.36) ilustra a discretização da energia do campo. Esse é um aspecto que evidencia a hipótese da quantização, formalmente introduzida por Planck (84, 85) para explicar o comportamento da radiação do corpo negro⁵ – mesmo que o termo $1/2$ não estivesse presente no trabalho original. À luz dessa interpretação, podemos associar os autovalores de energia à presença de n fótons com energia $\hbar\nu$ (77). É importante ressaltar, contudo, que o *valor esperado* da energia não é discreto, uma vez que um estado arbitrário do campo é descrito por uma superposição de estados número, i.e.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (2.37)$$

sendo C_n um coeficiente, *a priori* complexo, cujo módulo quadrado $|C_n|^2$ representa a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|n\rangle$ ao se realizar uma medição da energia em $|\psi(t)\rangle$. Para $n = 0$, o oscilador se encontra em seu estado fundamental, e o campo, no estado de vácuo $|0\rangle$. No entanto, ainda persiste uma energia $\mathfrak{E}_0 = \hbar\nu/2$, conhecida como energia do ponto zero, conceito originalmente proposto por Planck (89), em uma reformulação do seu trabalho original (90).

⁵ É importante destacar que Ehrenfest (86) e Einstein (87) foram os primeiros a enfatizar as implicações físicas desse aspecto da teoria (88).

Para abstrair o significado físico de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, calculamos o comutador, empregando a Eq. (2.30),

$$\begin{aligned} [\hat{n}, \hat{a}] &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} \\ &= -\hat{a}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De maneira análoga, temos

$$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (2.39)$$

Empregando as Eqs. (2.38) e (2.39), começamos a investigar a ação de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ sobre os estados número. Constatamos que

$$\hat{n} \hat{a} |n\rangle = (n-1) \hat{a} |n\rangle, \quad (2.40)$$

$$\hat{n} \hat{a}^\dagger |n\rangle = (n+1) \hat{a}^\dagger |n\rangle. \quad (2.41)$$

Essas relações implicam que $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são também autovetores de $\hat{n}$, com autovalores $(n-1)$ e $(n+1)$, respectivamente. A diminuição (aumento) do quanta n , associada ao autovalor de energia na Eq. (2.36), é o que dá origem ao termo “operador de aniquilação (criação)”. A comparação das Eqs. (2.41) e (2.33) leva à conclusão que $\hat{a}|n\rangle$ e $|n-1\rangle$ possuem uma relação direta,

$$\hat{a} |n\rangle = \mathcal{C} |n-1\rangle, \quad (2.42)$$

na qual $\mathcal{C}$ representa uma constante numérica, a ser determinada. Fazendo o produto entre os dois lados da Eq. (2.42) por seus conjugados, obtemos

$$\begin{aligned} \langle n | \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{n}} | n \rangle &= \langle n-1 | \mathcal{C}^* \mathcal{C} | n-1 \rangle \\ n &= |\mathcal{C}|^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Se tomarmos $\mathcal{C}$ como positivo e real por convenção, a Eq. (2.42) se torna

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.44)$$

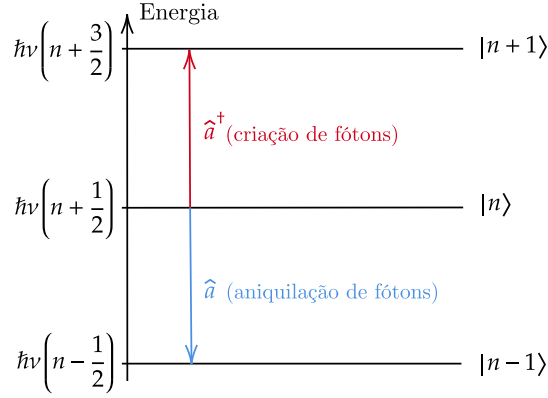
De modo similar, verifica-se que

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.45)$$

As ações dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ em estados número estão representadas na Fig. 5, com a ressalva de que não expomos a constante numérica $\mathcal{C}$ ($\sqrt{n}$ ou $\sqrt{n+1}$).

Se aplicarmos sucessivamente o operador de aniquilação $\hat{a}$ em um estado número $|n\rangle$, sendo n inicialmente positivo, o processo eventualmente terminará quando n atingir a nulidade. Poder-se-ia argumentar que, se n for inicialmente não inteiro, a sequência continuaria indefinidamente, com n atingindo valores negativos. No entanto, devido à positividade requerida da norma de $a|n\rangle$, isso não é possível; logo, os valores de n são sempre inteiros e positivos (64).

Figura 5 – Representação esquemática da ação dos operadores de criação e aniquilação agindo nos estados número, com a ressalva de que não apresentamos a constante numérica $\mathcal{C}$ ($\sqrt{n}$ ou $\sqrt{n+1}$). As expressões de energia obedecem os autovalores do hamiltoniano, Eq. (2.36).



Fonte: Adaptado de (77, p. 11).

A aplicação repetida do operador de criação $\hat{a}^\dagger$ é sintetizada através da relação

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.46)$$

Devido à hermiticidade de $\hat{n}$ e $\hat{H}$, os estados $|n\rangle$ formam um conjunto completo, i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbb{1}}, \quad (2.47)$$

e são ortonormais. Com base nisso, os elementos das representações matriciais de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ obedecem

$$\langle n'|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad (2.48)$$

$$\langle n'|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}, \quad (2.49)$$

com $\delta_{i,j}$ simbolizando o delta de Kronecker. Fica claro, através das equações acima, que os operadores de aniquilação e criação não são diagonais na base dos autovetores de $\hat{n}$. Isso é esperado, dado que $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ não comutam com $\hat{n}$, como explícito nas Eqs. (2.38) e (2.39).

A seguir, apresentamos a evolução temporal dos operadores de aniquilação e criação, tendo em mente a sua importância na elaboração do modelo JC. Partimos da equação de Heisenberg para um operador $\hat{O}$ sem dependências temporais explícitas⁶ (64),

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}]. \quad (2.50)$$

⁶ Para evitar uma notação excessivamente carregada, não distinguiremos explicitamente os operadores nas representações de Schrödinger, Heisenberg ou interação. A distinção será inferida do contexto.

Utilizando o operador hamiltoniano, Eq. (2.31), e a relação de comutação, Eq. (2.30), obtemos a equação

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \left[\hbar\nu(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \hat{a} \right] \\ &= i\nu (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= -i\nu\hat{a},\end{aligned}\tag{2.51}$$

cuja solução é

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\nu t}.\tag{2.52}$$

Considerando o conjugado da equação acima, derivamos

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\nu t}.\tag{2.53}$$

2.2.1 Flutuações do vácuo

Conforme discutido na seção anterior, especialmente no que diz respeito à Eq. (2.35), o estado número $|n\rangle$ possui uma energia bem definida. No entanto, é válido questionar se ele possui, também, um valor esperado de campo elétrico bem definido. A resposta dessa pergunta começa com o cálculo do valor esperado do observável campo elétrico, Eq. (2.26),

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{E}_x(z, t)|n\rangle &= \langle n|\mathcal{E}_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\sin(kz)|n\rangle \\ &= \mathcal{E}_0\sin(kz)(\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}|n\rangle) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Ou seja, o valor esperado para o campo é 0. Contudo, o valor esperado do quadrado do campo, que contribui para o cálculo da energia do campo, Eq. (2.16), é

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{E}_x^2(z, t)|n\rangle &= \langle n|\mathcal{E}_0^2(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2\sin^2(kz)|n\rangle \\ &= \mathcal{E}_0^2\sin^2(kz)(\langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}^2|n\rangle) \\ &= 2\mathcal{E}_0^2\sin^2(kz)\left(n + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}\tag{2.55}$$

O desvio médio $\Delta\hat{E}_x(z, t)$ é, então,

$$\begin{aligned}\Delta\hat{E}_x(z, t) &= \sqrt{\langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2} \\ &= \sqrt{2}\mathcal{E}_0\sin(kz)\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

O motivo desse desvio no campo para um número de fótons bem definido é explicado através da comutação entre o operador número e o campo,

$$\begin{aligned} [\hat{n}, \hat{E}_x(z, t)] &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) [\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{a}^\dagger \hat{a}], \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) ([\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} - \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]), \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \end{aligned} \quad (2.57)$$

A partir dessa relação de comutação, pode-se expressar a relação de incerteza (64),

$$\Delta \hat{n} \Delta \hat{E}_x(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| |\langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle|, \quad (2.58)$$

a partir da qual se torna evidente que, para um estado número, quanto maior a precisão no número de fótons, maior a dúvida no que diz respeito ao campo elétrico. Existem evidências de que essa incerteza está associada à fase do campo elétrico (78).

É relevante ressaltar que, mesmo para o estado de vácuo, o desvio médio, Eq. (2.56), é não nulo. Isso caracteriza as *flutuações do vácuo*, um corolário não clássico da quantização do campo. Essa assinatura quântica é necessária na elucidação de alguns fenômenos que envolvem a interação entre radiação e matéria (77). Por exemplo, a teoria relativística de Dirac (91, 92) prevê uma degenerescência nos níveis de energia $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$. No entanto, devido às flutuações do vácuo, isso não ocorre, ocasionando no Desvio de Lamb (93). Outro cenário, abordado anteriormente neste trabalho, é o da emissão espontânea. A explicação se baseia nas flutuações do vácuo influenciando o átomo, mesmo na ausência de radiação incidente (77).

Vale destacar o esforço de Jaynes e Cummings (1), que se propuseram a estudar “aspectos clássicos da emissão espontânea” (94). Os autores demonstraram que é possível obter a emissão espontânea sem um campo quantizado. Contudo, a abordagem utilizada por eles não corresponde ao que se entende como semiclássica na literatura. Essa abordagem foi denominada *neoclássica*, e, mesmo com essa modificação, as condições e a forma em que a emissão espontânea ocorre diferem daquelas previstas pela QED (95). Destaca-se que, quando há vácuo na cavidade, elas não ocorrem. Retomaremos essa discussão ao examinarmos as RO do modelo JC.

2.3 ESTADOS COERENTES

É tentador pensar que o limite clássico do campo EM ocorre quando o número de fótons se torna consideravelmente elevado ($n \rightarrow \infty$), de maneira que o operador número se torna uma variável contínua. No entanto, para um determinado estado número, qualquer que seja o valor de n , o valor esperado do campo é 0, Eq. (2.54). Isso contradiz a expectativa clássica, segundo a qual, para um determinado ponto em uma cavidade, o valor da intensidade do campo elétrico varia sinusoidalmente no tempo (78). De forma análoga, seria natural supor que o valor esperado do campo reproduzisse esse comportamento. Nesta seção, apresentamos os *estados coerentes*, que, neste contexto, evidenciam um limite clássico mais nítido para o campo EM.

Esses estados foram concebidos por Schrödinger, em 1926 (96), pensando no princípio da correspondência aplicado ao oscilador harmônico quântico (97). Entretanto, a partir da década de 1960, esses estados receberam uma atenção significativa, impulsionada pelos estudos de Sudarshan (98), Klauder (99, 100), e, de forma destacada, por Glauber (101–103). Glauber, ao estudar a coerência do campo EM sob a perspectiva desses estados, cunhou o termo “estados coerentes”, embora também sejam frequentemente denominados “estados semi-clássicos”. O nome “coerente” pode ser entendido como uma consequência do comportamento do pacote de ondas nesse caso, que mantém sua forma enquanto oscila ao longo do potencial harmônico, ou seja, ele *se mantém coeso*⁷ (77).

Há várias abordagens possíveis para a construção dos estados coerentes (97, 103). A revisão a seguir é baseada no livro de Gerry e Knight (78) e parte do princípio do requerimento de um valor esperado não nulo para o campo elétrico. Para que obtenhamos esse resultado, devemos inicialmente considerar a ação dos operadores de criação e aniquilação, Eqs. (2.45) e (2.44), e na expressão do operador campo elétrico, Eq. (2.26). Com isso em mente, é possível inferir que o requisito mínimo para um estado possuir valor esperado não nulo de $\hat{E}_x(z, t)$ é que ele seja uma *sobreposição* de estados número, diferindo no número n somente por ± 1 . Outro aspecto importante é que a substituição dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ por variáveis contínuas na Eq. (2.26), retorna ao caso do campo clássico. Nesse sentido, uma maneira de analisar a expressão através dessa “lente” clássica é utilizando os autovetores de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, que possuem um espectro contínuo. Esses autoestados são denotados $|\alpha\rangle$ e satisfazem as relações

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.59)$$

$$\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|. \quad (2.60)$$

Os estados coerentes são descritos por (Apêndice B)

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.61)$$

Com uma expressão para o estado coerente em mãos, calculemos o valor esperado para o campo elétrico, Eq. (2.26):

$$\langle\alpha| \hat{E}_x(z, t) |\alpha\rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz)(\alpha + \alpha^*), \quad (2.62)$$

que podemos reescrever utilizando a forma polar do estado coerente, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} \langle\alpha| \hat{E}_x(z, t) |\alpha\rangle &= \mathcal{E}_0 \sin(kz)(|\alpha|e^{i\theta} + |\alpha|e^{-i\theta}), \\ &= 2\mathcal{E}_0 |\alpha| \sin(kz) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Verificamos, na Eq. (2.63), justamente o comportamento senoidal desejado. Ademais, determinamos o valor esperado de $\hat{E}_x^2(z, t)$, tal que

$$\begin{aligned} \langle\alpha| \hat{E}_x^2(z, t) |\alpha\rangle &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) (\langle\alpha| \hat{a}^{\dagger 2} |\alpha\rangle + 2 \langle\alpha| \hat{a}^\dagger \hat{a} |\alpha\rangle + \langle\alpha| \hat{a}^2 |\alpha\rangle + 1) \\ &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) (|\alpha|^2 e^{-2i\theta} + |\alpha|^2 e^{2i\theta} + 2|\alpha|^2 + 1) \\ &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) [4|\alpha|^2 \cos^2(\theta) + 1]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

⁷ Traduzimos *coheres*, do inglês, por “se mantém coeso”, na falta de um termo mais apropriado.

Com o desvio nesse caso sendo, portanto,

$$\Delta \hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 \sin(kz), \quad (2.65)$$

que são, justamente, as flutuações do vácuo, obtidas ao empregarmos $n = 0$ na Eq. (2.56).

Quanto ao significado físico de $|\alpha|$, podemos investigá-lo através do valor esperado de $\hat{n}$. Utilizando as Eqs. (2.32), (2.59) e (2.60), obtemos a expressão⁸

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle n \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.66)$$

na qual observa-se que $|\alpha|^2$ é o número médio de fótons no campo. Logo, percebemos que o desvio, Eq. (2.65), é independente da amplitude do campo $|\alpha|$. Por conseguinte, o valor esperado para o campo elétrico, para um estado coerente, obedece as expectativas clássicas e o único desvio é o ruído do vácuo – o que acarreta na *mínima incerteza possível* (70).

Ademais, é interessante estudar o desvio do operador número, considerando um estado coerente,

$$\Delta \hat{n} = \langle n \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (2.67)$$

A incerteza não nula observada na equação acima é oriunda da natureza corpuscular da luz, que acarreta nos processos de absorção e emissão dos fótons (70). A incerteza relativa, por sua vez, é

$$\frac{\Delta \hat{n}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\langle n \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.68)$$

Constatamos que, quando o número médio de fótons aumenta $\langle n \rangle \rightarrow \infty$, a relevância do desvio, Eq. (2.67), diminui (30).

A probabilidade de medir n fótons, realizando a medição da energia, em um estado coerente é

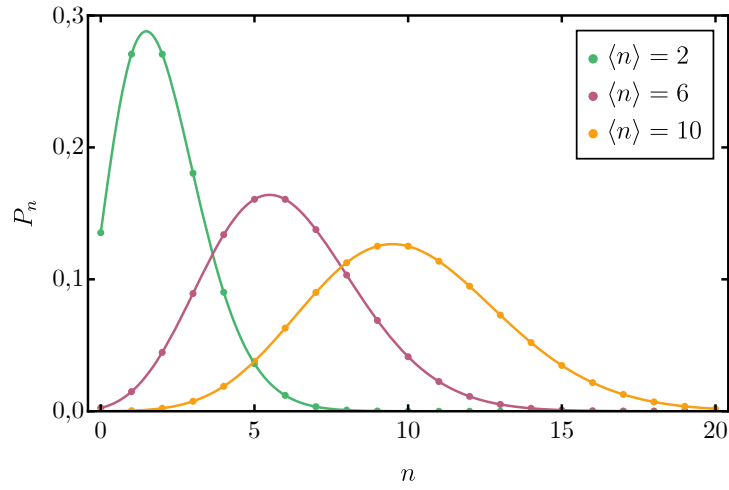
$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}, \quad (2.69)$$

classificada como distribuição de Poisson (78). O comportamento dessa distribuição está ilustrado na Fig. 6, para diferentes números médios de fótons na cavidade. Percebe-se que o pico de P_n ocorre para valores de n próximos a $\langle n \rangle$ (77), sendo essa proximidade mais evidente à medida que o valor esperado de $\hat{n}$ aumenta.

Por fim, cabe ressaltar que os estados coerentes são acessíveis experimentalmente. Eles podem ser gerados através de uma corrente elétrica oscilante (78) e a distribuição de fótons no laser se aproxima de uma distribuição de Poisson, Eq. (2.69), para excitações grandes o suficiente (77).

⁸ Omitimos o símbolo de operador ao nos referirmos ao valor médio $\langle n \rangle$ para simplificar a notação e evitar possíveis ambiguidades, especialmente quando esse valor depende do tempo.

Figura 6 – Distribuição de probabilidade para o estado coerente do campo, Eq. (2.69), empregando $\langle n \rangle = 2$ (pontos verdes), $\langle n \rangle = 6$ (pontos roxos) e $\langle n \rangle = 10$ (pontos laranjas).



Fonte: Adaptada de (70, p. 194).

2.4 ESTADOS TÉRMICOS

Outro estado da luz relevante para os objetivos deste trabalho é o estado térmico, associado a uma fonte de luz térmica (9), como uma lâmpada de descarga ou um corpo negro. No contexto da Óptica Quântica, ele foi introduzido por Glauber (103), como um estado de entropia máxima para um dado $\langle n \rangle$ – embora a matriz densidade para uma distribuição de Bose-Einstein já tivesse sido formulada por von Neumann (104). Fisicamente, esses estados correspondem aos fótons de cavidades que não foram completamente resfriadas (22). Ademais, as propriedades estatísticas desses estados foram analisadas por Hillery (21).

Na Física Estatística, aplicamos a distribuição de Boltzmann para modelar distribuições de partículas em equilíbrio térmico. Por outro lado, na Mecânica Quântica, utilizamos a matriz densidade (Apêndice A) para, sob uma perspectiva quântica, representar o estado da cavidade. Partimos da expressão (78)

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\hat{H}/k_B T\right)}{\text{Tr}\left[\exp\left(-\hat{H}/k_B T\right)\right]}, \quad (2.70)$$

na qual $\hat{H}$ corresponde à Eq. (2.34), k_B representa a constante de Boltzmann e T é a temperatura das paredes da cavidade. Calculando o traço na base $\{|n\rangle\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left[\exp\left(-\hat{H}/k_B T\right)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp\left(-\hat{H}/k_B T\right) | n \rangle \\ &= \frac{\exp(-\hbar\nu/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\nu/k_B T)} \\ &= Z, \end{aligned} \quad (2.71)$$

que denominamos *função de partição* Z . Para derivar a expressão acima utilizamos a soma infinita de uma série geométrica com quociente menor que um [$\exp(-\hbar\nu/k_B T) < 1$]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\nu n/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\nu/k_B T)}. \quad (2.72)$$

Podemos expressar a distribuição de probabilidades relacionando-a com a função de partição, ao escrever

$$P_n = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \frac{1}{Z} \exp(-\mathfrak{E}_n/k_B T), \quad (2.73)$$

com $\mathfrak{E}_n$ representando os autovalores do SHO, Eq. (2.36). O operador densidade do estado térmico, utilizando a Eq. (2.73), pode ser reinterpretado como

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n|. \quad (2.74)$$

De acordo com o formalismo proposto por von Neumann (105), o valor esperado para um observável $\hat{O}$, em relação ao estado $\hat{\rho}$, é

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}). \quad (2.75)$$

Com base nessa relação, o número médio de fótons na cavidade é

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}) = \langle n \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\nu/k_B T) - 1}. \quad (2.76)$$

Empregando as Eqs. (2.71), (2.73) e (2.76), podemos reescrever a distribuição de probabilidades como

$$P_n = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n, \quad (2.77)$$

de maneira que o estado térmico, Eq. (2.74), pode ser escrito da seguinte maneira

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n |n\rangle\langle n|. \quad (2.78)$$

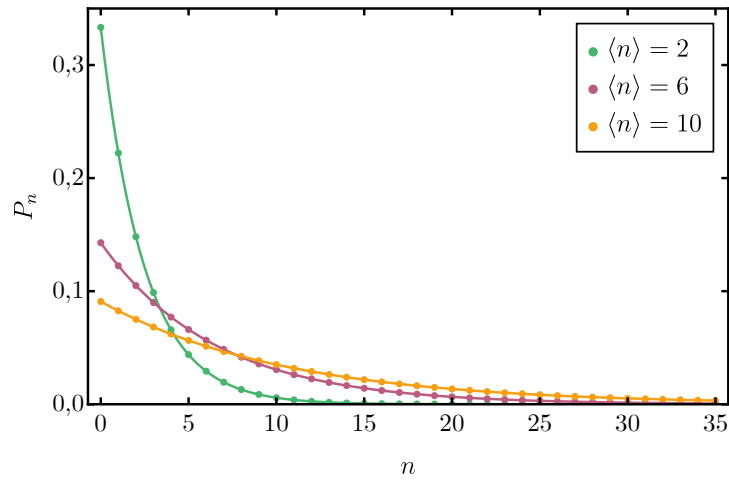
A Eq. (2.76) é classificada como uma distribuição de Bose-Einstein (106) e está representada na Fig. 7, para três casos distintos. Nesse caso, a maior chance é de medir zero fótons no campo, com a probabilidade decrescendo monotonicamente à medida que n aumenta. Cabe ressaltar que P_n não apresenta características distintas para n próximo de $\langle n \rangle$. Em outras palavras, não existe um destaque da probabilidade P_n quando $n \approx \langle n \rangle$.

Com fins de comparação com um estado coerente, apresentamos o desvio médio do operador número,

$$\Delta \hat{n} = (\langle n \rangle + \langle n \rangle^2)^{1/2}, \quad (2.79)$$

no qual fica claro que as flutuações de $\hat{n}$ são *maiores* que o número médio de fótons. A incerteza relativa nesse caso assume o valor de 1 para $\langle n \rangle \gg 1$. Para $\langle n \rangle \ll 1$, no entanto, obtemos $1/\sqrt{\langle n \rangle}$, similar ao caso de um estado coerente.

Figura 7 – Distribuição de probabilidade para o estado térmico, Eq, (2.77), empregando $\langle n \rangle = 2$ (pontos verdes), $\langle n \rangle = 6$ (pontos roxos) e $\langle n \rangle = 10$ (pontos laranjas).



Fonte: Adaptada de (78, p. 28).

2.5 TERMO DE INTERAÇÃO ENTRE ÁTOMO E CAMPO

Ao aplicar sua teoria da radiação, Dirac abordou o problema da interação entre átomo e radiação. Em vez de tratá-los como sistemas separados, o físico britânico sugeriu que ambos formam um único sistema, cuja energia é composta por três termos: um correspondente à energia atômica, outro à energia EM, e um terceiro, chamado termo de *interação*, que representa o acoplamento entre os dois. Se esse último termo for desprezado, não haverá interação entre o campo e a matéria, impossibilitando a absorção ou emissão de radiação pelo átomo (107). Dotado de um didatismo invejável, Fermi explica esse raciocínio através de uma analogia. O físico italiano compara o átomo a um pêndulo e o campo EM a uma corda oscilante. Se o pêndulo e a corda não estiverem conectados, vibram de maneira independente. No entanto, quando acoplados por um fio elástico, as vibrações da corda perturbam o pêndulo. Se as frequências de vibração forem diferentes, o efeito é mínimo. No entanto, se elas coincidirem, ocorre ressonância, e a amplitude de vibração do pêndulo aumenta significativamente, representando a absorção de radiação pelo átomo.

Nesta seção, derivaremos justamente o termo do hamiltoniano do sistema átomo-campo que descreve a *interação* entre ambos. Não assumimos o campo EM como quantizado, uma vez que essa dedução é suficientemente abrangente para ser aplicada na abordagem semiclássica.

Se um elétron, ligado a um átomo, é submetido a um potencial escalar $V(r)$, seu hamiltoniano $\hat{H}_0$, na representação de posição, é

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + V(r), \quad (2.80)$$

com $\hat{\mathbf{p}}$ sendo o operador associado ao momentum linear do elétron e m a sua massa. Na presença

de um campo EM, o hamiltoniano é modificado para incluir o acoplamento mínimo, tal que

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (2.81)$$

sendo $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\Phi(\mathbf{r}, t)$ os potenciais vetor e escalar, respectivamente, e e a carga do elétron. Aqui, utilizamos o fato de que o campo EM é invariante sob transformação de calibre (81), o que implica em

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad (2.83)$$

sendo $\chi(\mathbf{r}, t)$ a função de calibre neste contexto.

Aqui, assumimos o calibre de Coulomb, com $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ e a condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ sendo satisfeita. A vantagem dessa escolha é que a radiação é representada somente pelo potencial vetor, e portanto, o operador hamiltoniano, Eq. (2.81), assume a forma

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m}\{\hat{\mathbf{p}} - e[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t)]\}^2 - e\frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + V(r). \quad (2.84)$$

Na ausência de fontes, o potencial vetor possui a forma de uma onda plana, sendo descrito por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.85)$$

com $\mathbf{k}$ representando o vetor de onda do campo EM. Para $|\mathbf{r}|$ de dimensões atômicas e comprimentos de onda da ordem de nanômetros, obtemos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, de maneira que o vetor potencial é espacialmente homogêneo. Essa consideração é denominada *aproximação do dipolo*, e é válida para um átomo cujo tamanho é muito menor que o comprimento de onda $\iota = 2\pi/k$ (5).

Escolhendo a função de calibre $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$ e empregando a relação $\partial_t \mathbf{A}(t) = -\mathbf{E}(t)$, válida para o calibre de Coulomb, podemos reescrever o hamiltoniano, Eq. (2.84), como

$$\hat{H}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + V(r) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.86)$$

Adicionalmente, podemos escrever novamente o hamiltoniano, em função do dipolo elétrico $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, e do hamiltoniano $\hat{H}_0$, Eq. (2.80), tal que

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.87)$$

Sendo assim, concluímos que a interação entre radiação e matéria, dentro do escopo que delimitamos através das aproximações, é sintetizada através do termo $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$.

Com o termo de interação em mãos, encerramos este capítulo. Nele, devido ao caráter revisi-onal, tivemos a oportunidade de explorar, mesmo que indiretamente, uma questão fundamental: a natureza da luz. Assim, permitimo-nos concluir com uma citação de Dirac, que aborda essa temática:

“Em vez de trabalhar com a interpretação dos fótons como partículas, pode-se utilizar as componentes do campo eletromagnético. Dessa forma, obtém-se

uma harmonia completa das teorias ondulatória e corpuscular da luz. Pode-se tratar a luz como composta por ondas eletromagnéticas, cada onda sendo tratada como um oscilador; alternativamente, pode-se tratar a luz como composta por fótons, os fótons sendo bósons e cada estado de fóton correspondendo a um dos osciladores do campo eletromagnético. Assim, temos a reconciliação das teorias ondulatória e corpuscular da luz. Elas são apenas duas descrições matemáticas da mesma realidade física” (Dirac (72), p. 49, tradução nossa).

3 MODELO JAYNES-CUMMINGS

O modelo JC (1) descreve a interação de um átomo de dois níveis acoplado a um modo quantizado de uma cavidade óptica ideal, conforme ilustrado na Fig. 8. Considerando sua relevância, existe uma vasta literatura dedicada ao seu estudo. Para uma perspectiva compreensiva e atual acerca do tema, sugerimos o livro de Larson e Mavrogordatos (5).

Neste capítulo, não desejamos exaurir o modelo, e sim apresentar aspectos emblemáticos oriundos da interação entre radiação e matéria em nível microscópico. Na seção 3.1, apresentamos o contexto histórico do modelo JC. Sequencialmente, na seção 3.2, deduzimos o hamiltoniano que caracteriza a interação entre o sistema de dois níveis e o modo quantizado da cavidade. A dinâmica, de acordo com a Equação de Schrödinger e com o operador de evolução temporal, é ilustrada na seção 3.3. O emaranhamento entre átomo e campo é abordado na seção 3.4. Na seção 3.5, descrevemos qualitativa e brevemente o aparato experimental que permitiu a verificação dos colapsos e renascimentos das RO.

É importante esclarecer o protocolo adotado para as unidades ao longo desta dissertação. As grandezas físicas a que atribuiremos valores são adimensionais ou possuem dimensão de tempo ou frequência, e fixar uma escala de tempo arbitrária permite que utilizemos unidades adimensionais nos cálculos (5, 108, 109).

3.1 CONTEXTO HISTÓRICO DO MODELO JAYNES-CUMMINGS

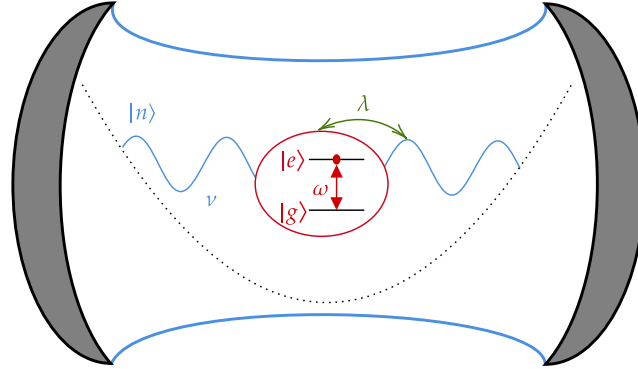
No ano de 1957, Frederick Cummings foi ao escritório de Edwin Jaynes buscando um problema para sua tese (30, 110). O tópico sugerido foi uma comparação entre as abordagens semiclássica e quântica no contexto do maser¹ – uma pesquisa oriunda da hesitação que Jaynes possuía em adotar o campo quantizado (112, 113). Anteriormente, Rabi foi o pioneiro em estabelecer a abordagem semiclássica em um sistema de dois níveis² (7, 8, 115), enquanto Jaynes posteriormente a estendeu às interações no maser (116). O trabalho de Cummings, sob a tutoria de Jaynes, culminou em um artigo publicado em 1963 (1). A principal constatação foi que a perspectiva deles da abordagem semiclássica reproduz propriedades similares às da abordagem quântica, mesmo no limite de poucos quanta no modo do campo (30).

Em 1965 (9), Cummings mostrou, utilizando a abordagem quântica, que a distribuição de fótons do modo da cavidade poderia levar a um “espalhamento” de frequências de Rabi, causando uma defasagem do que outrora seria uma evolução periódica simples. Devido a essa defasagem, ocorre o *colapso* das RO (113). No entanto, para intervalos de tempo superiores ao estudado por Cummings, o fenômeno oposto ocorre: as oscilações retornam, caracterizando o que é conhecido

¹ O maser é um dispositivo que produz radiação eletromagnética coerente através da amplificação por emissão estimulada (111).

² O problema original estudado por Rabi (77) foi o de um dipolo magnético de spin-1/2 submetido a um aparato de Stern-Gerlach (114).

Figura 8 – Esquema ilustrando os sistemas do modelo JC, onde representamos o acoplamento através de λ . O átomo é representado por um sistema de dois níveis, excitado ($|e\rangle$) e fundamental ($|g\rangle$), enquanto o modo da cavidade é modelado como um SHO, com o número de fótons associado ao estado número $|n\rangle$. A frequência do modo da cavidade é ν , enquanto a frequência associada à transição atômica é ω .



Fonte: O autor.

como *renascimento* das RO (10). Esse resultado, obtido por Eberly em 1980 (10), demonstra a sensibilidade do campo em relação à discretização dos fótons, e, conseqüentemente, aponta a assinatura quântica da radiação. Em 1987, em um experimento conduzido pelo grupo de Herbert Walther (3), obteve-se a primeira verificação experimental das previsões do modelo, verificando a natureza quântica do campo. Nove anos depois, ao analisar tempos de interação mais longos, o grupo de Haroche (4) observou os colapsos e renascimentos das RO. A partir de então, o interesse pelo modelo JC aumentou drasticamente. Atualmente, ele e suas generalizações são amplamente adotados em uma variedade de sistemas diferentes, sendo fundamental no que diz respeito a interações átomo-campo. Como apontam Knight *et al.* (113), é irônico que Jaynes, defensor da abordagem semiclássica, o tenha criado. Por outro lado, em um relato pessoal, Cummings oferece uma perspectiva positiva sobre as repercussões do modelo que leva seu nome:

“Um dia, por volta de 1989, um colega da UCR me deu um tapinha no ombro: “Vi seu nome no título de um artigo”. (“Hã?”). Um número surpreendente de novos tópicos empolgantes e importantes surgiu desde o experimento WRK de 1987, proporcionando uma árvore sempre ramificada de novas teorias e experimentos.

É tentador intitular este relato como “Tenha seu nome publicado: diagonalize uma matriz 2×2 ” (Cummings (110), p. 2, tradução nossa).

3.2 HAMILTONIANO DO MODELO JAYNES-CUMMINGS

O hamiltoniano do modelo JC é constituído por três termos, correspondentes ao átomo $\hat{H}_A$, ao campo $\hat{H}_F$, e à interação entre eles $\hat{H}_I$:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_I. \quad (3.1)$$

No subcapítulo 2.5, deduzimos o termo de interação entre campo e átomo, Eq. (2.87). Reformulamos a forma do termo de interação, assumindo tanto o campo quanto o dipolo elétrico como operadores, escrevendo-o na forma

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}. \quad (3.2)$$

Cabe ressaltar que assumimos que não há uma dependência temporal em $\hat{\mathbf{E}}$. Utilizando as Eqs. (2.2) e (2.26), podemos reescrever $\hat{H}_I$ como

$$\hat{H}_I = \hat{d}\Upsilon(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.3)$$

sendo $\hat{d} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_x$, e introduzindo

$$\Upsilon = -\mathcal{E}_0 \sin(kz). \quad (3.4)$$

Considerando a representação matricial de $\hat{d}$, têm-se os kets $|e\rangle$ e $|g\rangle$, representando os níveis excitado e fundamental do átomo, respectivamente. Embora o átomo possa apresentar múltiplos níveis em um cenário experimental, assumimos que apenas dois deles estão significativamente acoplados ao modo da cavidade³ (6, 30). A notação que utilizaremos é

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A partir daqui, nos referiremos ao átomo também como *two-level system* (TLS). Podemos escrever um operador genérico $\hat{O}$, em uma base $\{|i\rangle, i = 1, 2, 3 \dots\}$, como (64)

$$\hat{O} = \sum_i \sum_j |i\rangle \langle i| \hat{O} |j\rangle \langle j|. \quad (3.6)$$

De tal forma que, a partir da Eq. (3.6), inferimos que a expressão para o operador dipolo assume a forma (78)

$$\hat{d} = |e\rangle\langle e| \hat{d} |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \hat{d} |e\rangle\langle e| + |e\rangle\langle e| \hat{d} |g\rangle\langle g| + |g\rangle\langle g| \hat{d} |g\rangle\langle g|. \quad (3.7)$$

Para avaliar essa equação, empregamos um argumento de *paridade*; como $\hat{d}$ é ímpar⁴, ele conecta elementos de paridades opostas. Sendo assim, temos

$$\langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Considerando que $\hat{d}$ é hermitiano e as Eqs. (3.8) e (3.7), verificamos que $\hat{d}$ pode ser descrito como

$$\hat{d} = d |g\rangle\langle e| + d^* |e\rangle\langle g|, \quad (3.9)$$

³ Consequentemente, o sistema atômico está associado a um espaço de Hilbert de duas dimensões. Nesse contexto, como mostraremos adiante, usando as matrizes de Pauli podemos escrever qualquer operador em um subespaço de dois níveis (6).

⁴ Tomamos como ímpar um operador que *anti-comuta* com o operador paridade (64). Uma vez que o operador posição, do qual o dipolo depende, é ímpar, o operador dipolo também é ímpar.

na qual introduzimos os elementos do operador dipolo: $\langle g | \hat{d} | e \rangle = d$ e $\langle e | \hat{d} | g \rangle = d^*$. Os produtos externos podem ser interpretados matricialmente,

$$|e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Nesse contexto, analisamos os produtos externos através da ação deles sobre os kets $|e\rangle$,

$$\begin{aligned} |e\rangle\langle g|e\rangle &= 0, \\ |g\rangle\langle e|e\rangle &= |g\rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e $|g\rangle$,

$$\begin{aligned} |e\rangle\langle g|g\rangle &= |e\rangle, \\ |g\rangle\langle e|g\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Percebe-se que eles realizam a transição de nível no TLS, assemelhando-se aos operadores $\hat{S}_{\pm}$, que atuam sobre os autovetores do operador spin em z , $\hat{S}_z$ (64). Isso se deve ao fato de que dinâmica de ambos sistemas, o átomo de dois níveis e o spin-1/2, quando submetidos a um campo EM, são formalmente similares (117). A conexão entre os dois se dá através da álgebra $\mathfrak{su}(2)$ (60, 118), também conhecida como *álgebra de Pauli*:

$$[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k] = 2i\epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l, \quad (3.13)$$

na qual ϵ_{jkl} é o símbolo de Levi-Civita e $\hat{\sigma}_j$ representam as matrizes de Pauli (119),

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Podemos expressar a matriz $\hat{\sigma}_z$, também denominado operador de inversão (5), através de seus autovetores, Eq. (3.5), tal que

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \quad (3.15)$$

A partir da Eq. (3.15), apresentamos a ação de $\hat{\sigma}_z$ sobre os kets $|e\rangle$ e $|g\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z |e\rangle &= |e\rangle, \\ \hat{\sigma}_z |g\rangle &= -|g\rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Os produtos externos entre os estados atômicos, Eq. (3.10), são definidos como os operadores escada $\hat{\sigma}_{\pm}$,

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (3.17)$$

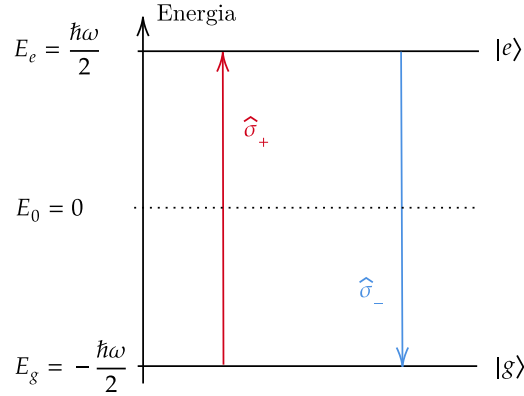
$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|, \quad (3.18)$$

que, por sua vez, possuem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z, \quad (3.19)$$

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{\pm}] = \pm 2\hat{\sigma}_{\pm}. \quad (3.20)$$

Figura 9 – Esquema ilustrando os níveis de energia do átomo e os operadores escada $\hat{\sigma}_{\pm}$. É instrutivo compará-la com a Fig. 3.



Fonte: Adaptado de (78, p. 92).

A ação dos operadores $\hat{\sigma}_{\pm}$ nos kets associados aos níveis atômicos está ilustrada na Fig. 9. A partir das Eqs. (3.9), (3.17) e (3.18), podemos expressar o operador dipolo como

$$\hat{d} = d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+, \quad (3.21)$$

que empregamos para reescrever o hamiltoniano de interação, Eq. (3.3),

$$\hat{H}_I = \Upsilon(d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.22)$$

A partir deste ponto, assumimos que d é real. Introduzimos o parâmetro de acoplamento $\lambda = \Upsilon d/\hbar$, tal que o hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (3.23)$$

Para derivar o termo atômico, $\hat{H}_A$, primeiro analisemos as energias do TLS. Tomamos como nula a energia no ponto médio entre os estados excitado e fundamental do átomo, com a energia de transição entre eles sendo $\hbar\omega = E_e - E_g$. Consequentemente, $E_e = -E_g = 1/2\hbar\omega$. Os níveis de energia atômicos, seguindo a convenção proposta, estão ilustrados na Fig. 9.

Espera-se que o hamiltoniano tenha a seguinte ação sobre os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A |e\rangle &= E_e |e\rangle, \\ \hat{H}_A |g\rangle &= E_g |g\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

É evidente que os kets $|e\rangle$ e $|g\rangle$ são autovetores de $\hat{H}_A$, de autovalor, respectivamente, E_e e E_g . Utilizando o teorema espectral (64) e a Eq. (3.15), podemos escrever o hamiltoniano atômico como

$$\begin{aligned} \hat{H}_A &= E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| \\ &= E_e(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O hamiltoniano do campo foi amplamente discutido no capítulo 2, e o reescrevemos aqui sem a energia do ponto zero,

$$\hat{H}_F = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (3.26)$$

Embora a omissão da energia do ponto zero possa parecer inusitada, considerando o enfoque anteriormente dado a ela, essa simplificação não afeta a dinâmica do sistema. As características quânticas do modelo ainda emergirão, mesmo com a exclusão desse termo.

Munidos dos três termos que constituem a Eq. (3.1), podemos construí-la explicitamente. Empregamos as Eqs. (3.1), (3.23), (3.25) e (3.26), de tal forma que o hamiltoniano do sistema é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (3.27)$$

conhecido como hamiltoniano de Rabi quântico. Para avaliarmos as interações da Eq. (3.27), é interessante analisarmos a evolução temporal de $\hat{\sigma}_\pm$ – a evolução temporal de suas contrapartes, associadas ao campo, já foi apresentada na subseção 2.2. Utilizando a equação de Heisenberg, Eq. (2.50), obtemos a equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_\pm}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_A, \hat{\sigma}_\pm] \\ &= \frac{\omega}{2}[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] \\ &= \pm i\omega\hat{\sigma}_\pm, \end{aligned} \quad (3.28)$$

cujas solução é

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega t}. \quad (3.29)$$

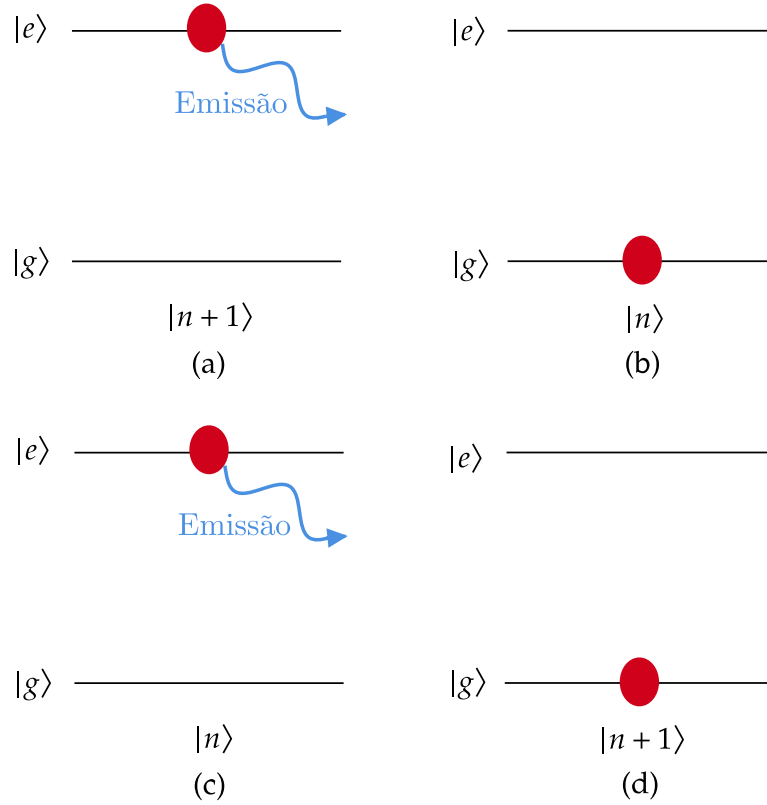
Utilizando as Eqs. (2.52), (2.53) e (3.29), podemos aproximar a dependência da evolução dos produtos dos operadores, presentes na Eq. (3.27), em relação às frequências⁵ ω e ν :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_+\hat{a} &\sim e^{i(\omega-\nu)t}, \\ \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger &\sim e^{-i(\omega-\nu)t}, \\ \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger &\sim e^{i(\omega+\nu)t}, \\ \hat{\sigma}_-\hat{a} &\sim e^{-i(\omega+\nu)t}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

No caso de quase ressonância, com $\omega \approx \nu$, os dois últimos termos oscilam rapidamente, quando comparados aos dois primeiros. Esses termos são denominados *contra-girantes*, e estão associados a interações que, quando analisados individualmente, desafiam a intuição. Eles representam a criação (aniquilação) simultânea de um fóton e uma excitação atômica (6); em $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$, o átomo é excitado e o campo *absorve* um fóton, enquanto em $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ o átomo migra para

⁵ Utilizamos a Representação de Interação para analisar a evolução temporal dos produtos e empregar uma aproximação.

Figura 10 – Esquema ilustrando as interações no hamiltoniano de Rabi. *Contra-girantes*: Em (a), o campo tem $n + 1$ fótons e o átomo, excitado, emite um fóton. Em (b), o átomo migra para o nível fundamental, e o campo possui n fótons. *Girantes*: Em (c), o campo tem n fótons e o átomo, excitado, emite um fóton. Em (d), o átomo migra para o nível fundamental, e o campo possui $n + 1$ fótons.



Fonte: O autor.

o nível fundamental e o campo *emite* um fóton. Empregamos a *aproximação da onda girante* (RWA), na qual os termos contra-girantes são desprezados⁶.

O hamiltoniano decorrente da RWA é dominado pelos produtos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ e $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$, chamados de girantes. Eles caracterizam uma “dinâmica de flip-flop” (6), com uma troca de quanta entre os graus de liberdade do TLS e do campo. Em $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$, o átomo é excitado e o campo *emite* um fóton, enquanto em $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ o átomo transita para o nível fundamental e o campo *absorve* um fóton. Outrossim, no caso ressonante $\omega = \nu$, o hamiltoniano, na representação de interação, é independente do tempo. A dinâmica dos termos contra-girantes e girantes está representada na Fig. 10.

O hamiltoniano de Rabi, Eq. (3.27), sob a RWA, é expresso por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (3.31)$$

que é o *hamiltoniano do modelo JC*. Parafraseando Salasnich, “o hamiltoniano deste modelo

⁶ Essa aproximação é válida enquanto o acoplamento não é comparável à frequência do modo da cavidade, i.e. $\lambda \ll \nu$ (30).

pode ser considerado a drosófila da Óptica Quântica: ele contém física o bastante para contemplar muitos fenômenos na óptica atômica e em cavidades da QED” (59, p. 7, tradução nossa).

3.2.1 Número de excitações

O espaço de Hilbert que representa o sistema JC, $\mathcal{H}$, é um produto tensorial entre os espaços de Hilbert do TLS, $\mathcal{H}_A$, de dimensão 2, e do campo, $\mathcal{H}_F$, de dimensão infinita (117) (Apêndice A). Sendo assim, $\mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_F. \quad (3.32)$$

Consequentemente, o hamiltoniano, Eq. (3.31), age sobre um vetor de estado definido pelo produto tensorial entre os estados do átomo, $|\psi_A\rangle$, e do modo da cavidade, $|\psi_F\rangle$,

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_F\rangle. \quad (3.33)$$

Nesse sentido, um par de estados importantes para o modelo JC são os *bare states* (BS) (5), estados produto definidos por

$$\begin{aligned} |e\rangle \otimes |n\rangle &= |e, n\rangle, \\ |g\rangle \otimes |n\rangle &= |g, n\rangle. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ao longo da próxima subseção, veremos como a dinâmica do sistema JC *centraliza* os BS, mesmo que eles *não* sejam autovetores do hamiltoniano⁷, Eq (3.31). Nesse sentido, um vetor de estado, para um instante t arbitrário, é uma combinação linear de $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t) |e, n\rangle + C_{g,n}(t) |g, n\rangle], \quad (3.35)$$

na qual $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n}(t)$ são amplitudes de probabilidade, que dependem das condições iniciais do sistema. A partir da Eq. (3.35), temos a probabilidade $P_{e,n}(t) = |C_{e,n}(t)|^2$ de encontrar o átomo no estado excitado e o campo com n fótons. Em contraste, a probabilidade $P_{g,n+1}(t) = |C_{g,n+1}(t)|^2$ expressa a probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental e a cavidade com $n + 1$ fótons. As probabilidades atômicas, considerando todos os possíveis estados da cavidade, são, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_{e,n}(t)|^2, \\ P_g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_{g,n+1}(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Outrossim, os BS, Eq. (3.34), são autovetores do operador

$$\hat{N}_E = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (3.37)$$

⁷ Os autovetores do hamiltoniano, por sua vez, são denominados *dressed states*, e não serão abordados nesta dissertação.

denominado *número de excitações*. Os autovalores dos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$ são, respectivamente, $n + 1/2$ e $n - 1/2$. Analisemos a relação de comutação desse operador com o hamiltoniano, Eq. (3.31). É fácil ver que os hamiltonianos do TLS, $\hat{H}_A$, e da cavidade, $\hat{H}_F$, comutam com $\hat{N}_E$. Apresentamos o cálculo para o termo de interação, $\hat{H}_I$,

$$[\hat{H}_I, \hat{N}_E] = \hbar\lambda \left(\left[\hat{a}\hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right] + \left[\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right] \right), \quad (3.38)$$

no qual os comutadores dos termos individuais são

$$\begin{aligned} [\hat{a}\hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger\hat{a}] &= \hat{a}\hat{\sigma}_+, \\ \left[\hat{a}\hat{\sigma}_+, \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right] &= -\hat{a}\hat{\sigma}_+, \\ [\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \hat{a}^\dagger\hat{a}] &= -\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \\ \left[\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right] &= \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo assim, fica evidente que

$$[\hat{H}, \hat{N}_E] = 0, \quad (3.40)$$

significando que $\hat{H}$ e $\hat{N}_E$ podem ser diagonalizados simultaneamente. Ou seja, o número de excitações do sistema é uma quantidade conservada. A escolha de uma base que diagonaliza $\hat{N}_E$ leva a uma estrutura diagonal em blocos no hamiltoniano (120), onde cada bloco constitui um subespaço invariante de dimensão finita. Cada bloco $\hat{h}_n$, corresponde a um número n e possui dimensão 2×2 , devido à degenerescência dos autovetores do operador número de excitações, $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$. A exceção é o estado fundamental não degenerado $|g, 0\rangle$, que forma um bloco 1×1 e é autovetor do hamiltoniano (6). Essa estrutura é fundamental para o modelo JC, uma vez que, sob certas condições iniciais, isso leva a soluções analíticas sem a necessidade de métodos aproximativos (117).

Adicionalmente, podemos reescrever o hamiltoniano, Eq. (3.31), utilizando o operador $\hat{N}_E$,

$$\hat{H} = \hbar\nu\hat{N}_E + \frac{\hbar}{2}\Delta\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger), \quad (3.41)$$

sendo Δ a dessintonia entre o TLS e o campo,

$$\Delta = \omega - \nu. \quad (3.42)$$

Como $\hbar\nu\hat{N}_E$ não contribui efetivamente para a dinâmica, podemos utilizar apenas os dois últimos termos, que denominamos $\hat{\mathcal{V}}$, para analisar a evolução temporal do sistema⁸ (5, 78). Definimos esse hamiltoniano como

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{\hbar}{2}\Delta\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (3.43)$$

⁸ Empregamos a Representação de Interação.

Essa representação é útil para tornarmos explícitos os subespaços mencionados anteriormente. Na base dos BS, Eq. (3.5), podemos expressar $\hat{\mathcal{V}}$ como (30)

$$\hat{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \hat{h}_0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{h}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{h}_n = \begin{pmatrix} \Delta_{\frac{\hbar}{2}} & \hbar\lambda\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda\sqrt{n+1} & -\Delta_{\frac{\hbar}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Na matriz, é possível ver como o hamiltoniano $\hat{\mathcal{V}}$ acopla os estados que pertencem a um único subespaço 2×2 , com os processos de emissão e absorção sendo descritos pelos elementos fora da diagonal: $\langle e, n | \hat{\mathcal{V}} | g, n+1 \rangle$ corresponde à transição $|g, n+1\rangle \rightarrow |e, n\rangle$, enquanto $\langle g, n+1 | \hat{\mathcal{V}} | e, n \rangle$ descreve $|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle$ (121).

Podemos reescrever o Hamiltoniano da Eq. (3.31) de outra forma, distinta da apresentada na Eq. (3.43). Separamos a Eq. (3.31): $\hat{H}_0$ contendo as parcelas do TLS e do campo, e $\hat{H}_I$ contendo a parcela de interação sob a RWA, tal que

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (3.45)$$

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (3.46)$$

Na Representação de interação⁹, o vetor de estado evolui temporalmente de acordo com $\hat{V}$, que é definido por¹⁰ (64)

$$\hat{V} = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (3.47)$$

enquanto os observáveis evoluem de acordo com $\hat{H}_0$. A partir das Eqs. (3.45), (3.46) e (3.47), apresentamos o cálculo de $\hat{V}$:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \hbar\lambda e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ &= \hbar\lambda [e^{i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} \hat{\sigma}_+\hat{a} e^{-i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} + e^{i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t}] \\ &= \hbar\lambda (e^{i\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t} \hat{a} e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t} + e^{i\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-i\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t} \hat{a}^\dagger e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para avaliarmos a Eq. (3.48), utilizamos a fórmula de Baker-Hausdorff (64),

$$e^{\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{-\alpha\hat{A}} = \hat{B} + \alpha[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (3.49)$$

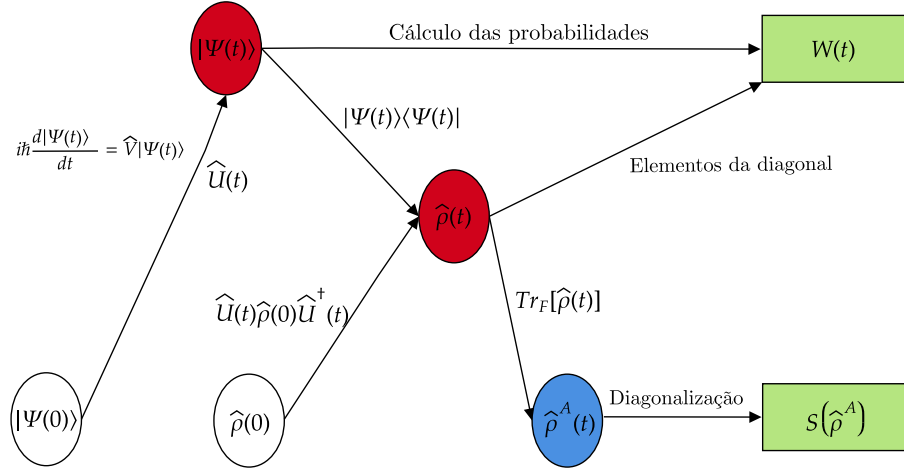
Utilizamos as Eqs. (2.38) e (3.19), de maneira que obtemos

$$\begin{aligned} e^{i(\nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} \hat{a} e^{-i(\nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} &= \hat{a} e^{-i\nu t}, \\ e^{i(\nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} \hat{a}^\dagger e^{-i(\nu\hat{a}^\dagger\hat{a})t} &= \hat{a}^\dagger e^{i\nu t}, \\ e^{i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z)t} \hat{\sigma}_\pm e^{-i(\frac{1}{2}\omega\hat{\sigma}_z)t} &= \pm \hat{\sigma}_\pm e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

⁹ A utilização do hamiltoniano $\hat{\mathcal{V}}$, na seção anterior, também é uma escolha possível somente na Representação de interação, mas não nos aprofundamos, justamente porque abordaríamos esse aspecto aqui.

¹⁰ Optamos por deixar implícita a dependência temporal de $\hat{V}$ no caso de acoplamento constante, a fim de tornar mais clara a distinção entre os cenários de acoplamento constante e dependente do tempo.

Figura 11 – Representação esquemática dos procedimentos que utilizaremos ao estudar a dinâmica. Iniciamos com o estado inicial puro ($|\Psi(0)\rangle$) ou misto ($\hat{\rho}(0)$), e, no final, obtemos a inversão de população atômica ($W(t)$) e a VNE para o subsistema atômico ($S(\hat{\rho}^A)$). Para obter a evolução temporal, empregamos a equação de Schrödinger, Eq. (3.52), ou o operador de evolução temporal $\hat{U}(t)$.



Fonte: O autor.

Empregando a Eq. (3.50), reescrevemos o hamiltoniano $\hat{V}$ como¹¹

$$\hat{V} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a}e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t}). \quad (3.51)$$

Fora da condição de ressonância, $\hat{V}$ é por vezes mais vantajoso que $\hat{\mathcal{V}}$ por ter um traço nulo na representação matricial, mesmo que as soluções sejam efetivamente as mesmas. Ainda, na literatura, existe certa preferência pelas equações diferenciais resultantes de $\hat{V}$, ao aplicarmos a Eq. de Schrödinger. Cabe ressaltar, quando $\Delta = 0$, as Eqs.(3.43) e (3.51) são iguais.

3.3 DINÂMICA DO MODELO JAYNES-CUMMINGS

Nesta seção, mostraremos duas maneiras de obter a evolução temporal do sistema. A primeira enfoca as amplitudes de probabilidade, Eq. (3.35), utilizando a Equação de Schrödinger. A segunda define um operador de evolução temporal a partir do hamiltoniano na Representação de Interação. No segundo caso, partimos da condição de ressonância. Na Fig. 11, apresentamos uma síntese dos procedimentos que utilizaremos ao estudar a dinâmica.

¹¹ Poderíamos partir da Eq. (3.43) e obter o hamiltoniano $\hat{V}$, através de uma transformação unitária que rotaciona o hamiltoniano $\hat{\mathcal{V}}$ em relação ao termo $(\hbar\Delta/2)\hat{\sigma}_z$ (30).

3.3.1 Equação de Schrödinger

Na Representação de Interação, a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{V} |\Psi(t)\rangle. \quad (3.52)$$

Como mostramos na subseção 3.2.1, o hamiltoniano do modelo JC viabiliza transições do tipo $|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$. Sendo assim, podemos aplicar a Eq. (3.52), para encontrar a evolução temporal das amplitudes $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n+1}(t)$, Eq. (3.35). Com isso em mente, utilizamos as Eqs. (3.51) e (3.35) para calcular o lado direito da Eq. (3.52),

$$\begin{aligned} \hat{V} |\Psi(t)\rangle &= \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t}) \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t) |e, n\rangle + C_{g,n}(t) |g, n\rangle] \\ &= \hbar\lambda \sum_{n=0}^{\infty} [C_{g,n}(t) \sqrt{n} e^{i\Delta t} |e, n-1\rangle + C_{e,n}(t) \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} |g, n+1\rangle]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Em contrapartida, o lado esquerdo da Eq. (3.52) é

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\dot{C}_{e,n}(t) |e, n\rangle + \dot{C}_{g,n}(t) |g, n\rangle]. \quad (3.54)$$

Projetamos as Eqs. (3.53) e (3.54) sobre os bras $\langle e, n|$ e $\langle g, n+1|$, de maneira que obtemos o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{C}_{e,n}(t) = -iC_{g,n+1}(t)\lambda\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}, \\ \dot{C}_{g,n+1}(t) = -iC_{e,n}(t)\lambda\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}. \end{cases} \quad (3.55)$$

O coeficiente $C_{e,n}(t)$ (Apêndice B) é descrito pela expressão

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= \left\{ C_{e,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} C_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

na qual Θ_n é a frequência de Rabi generalizada, definida por

$$\Theta_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}. \quad (3.57)$$

Analogamente, $C_{g,n+1}(t)$ é

$$\begin{aligned} C_{g,n+1}(t) &= \left\{ C_{g,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} C_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Com os coeficientes e uma mudança de índice em $C_{g,n+1}(t)$, podemos reescrever o estado geral, Eq. (3.35), como

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left\{ C_{e,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} C_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2} |e\rangle \right. \\
 \left. + \left\{ C_{g,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_{n-1} t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Theta_{n-1}} \sin\left(\frac{\Theta_{n-1} t}{2}\right) \right] \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n}}{\Theta_{n-1}} C_{e,n-1}(0) \sin\left(\frac{\Theta_{n-1} t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2} |g\rangle \right) |n\rangle.
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

De maneira geral, neste trabalho não estamos interessados em estudar os efeitos do estado inicial atômico sobre a dinâmica do sistema (122). Devido a isso, adotamos $C_{g,n}(0) = 0$ e $C_{e,n}(0) = C_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1$, com o TLS inicialmente excitado e o modo da cavidade com uma distribuição definida por C_n . Sob essas restrições, o vetor de estado é dado por

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_n \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2} |e\rangle \right. \\
 \left. + C_{n-1} \left[-\frac{2i\lambda\sqrt{n}}{\Theta_{n-1}} \sin\left(\frac{\Theta_{n-1} t}{2}\right) \right] e^{-i\Delta t/2} |g\rangle \right\} |n\rangle.
 \end{aligned} \quad (3.60)$$

O estudo da dinâmica proposto aqui enfoca a *inversão de população* ou *inversão atômica* $W(t)$, definida como

$$W(t) = \langle \hat{\sigma}_z \rangle = P_e(t) - P_g(t), \quad (3.61)$$

com $P_e(t)$ e $P_g(t)$ representando as probabilidades associadas ao TLS, Eq. (3.36). Essa função é experimentalmente mensurável (30, 123) e é frequentemente calculada no modelo JC e em suas extensões (124).

Como vimos no capítulo anterior, existe uma variedade de estados para o modo da cavidade. A seguir, evidenciamos o comportamento da inversão de população para os estados número e coerente.

Caso inicialmente a cavidade possua n fótons e o TLS esteja excitado, o estado do *sistema*, para $t = 0$, é

$$|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle. \quad (3.62)$$

Nesse contexto, de acordo com a Eq. (3.60), o vetor de estado em um instante t é expresso por

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle = \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2} |e, n\rangle \\
 - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) e^{-i\Delta t/2} |g, n+1\rangle.
 \end{aligned} \quad (3.63)$$

As probabilidades $P_e(t)$ e $P_g(t)$, nesse caso, são determinadas por

$$\begin{aligned}
 P_e(t) &= \frac{\Delta^2 + 2\lambda^2(n+1)[1 + \cos(\Theta_n t)]}{\Theta_n^2}, \\
 P_g(t) &= \frac{2\lambda^2(n+1)[1 - \cos(\Theta_n t)]}{\Theta_n^2}.
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Segue que a inversão de população é descrita pela equação

$$W_n(t) = \frac{\Delta^2}{\Theta_n^2} + \frac{4\lambda^2(n+1) \cos(\Theta_n t)}{\Theta_n^2}, \quad (3.65)$$

na qual inserimos o índice n para tornar explícita a dependência no número de fótons da cavidade quando $t = 0$. Para o caso ressonante, a Eq. (3.65) se reduz à

$$W_n(t) = \cos(\Omega_n t), \quad (3.66)$$

sendo Ω_n a frequência de Rabi ressonante,

$$\Omega_n = 2\lambda\sqrt{n+1}. \quad (3.67)$$

Tanto na Eq. (3.65), quanto na Eq. (3.66), é possível constatar o caráter oscilatório e periódico da inversão de população, oriundo dos processos de absorção e emissão de fótons que, nesse regime, acontecem com uma frequência constante. O comportamento que caracteriza essa mudança na ocupação dos níveis atômicos é conhecido como RO e não é exclusivo à abordagem quântica (1, 78) da interação luz-matéria.

Contudo, é interessante pontuar que, mesmo quando o estado inicial do modelo é $|e, 0\rangle$, com o modo da cavidade inicialmente no vácuo, a população do TLS ainda apresenta variações. Esse efeito advém da emissão espontânea de um fóton pelo átomo excitado, que, em seguida, o absorve e o reemite, de acordo com a frequência de Rabi (seção 2.1). Essa consequência da abordagem quantizada, denominada RO do vácuo, não se evidencia quando a abordagem semiclássica é empregada.

Os efeitos da dessintonia podem ser vistos na Fig. 12(a), com uma diminuição na amplitude máxima das RO e uma pequena mudança na frequência de Rabi. Por outro lado, um aumento no número de fótons inicialmente presentes na cavidade resulta em uma maior frequência das oscilações, como pode ser constatado na Fig. 12(b), onde considerarmos o cenário ressonante.

O fato de as RO reproduzirem um comportamento parecido ao obtido quando utilizamos a abordagem semiclássica é intrigante, uma vez que os estados número são distintivamente não clássicos (78). Isso nos leva à seguinte pergunta: qual o comportamento das RO quando o modo da cavidade se aproxima de um cenário mais clássico, isto é, quando está em um estado coerente? Para analisar essa perspectiva, consideremos o estado inicial

$$|\Psi(0)\rangle = |e, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |e, n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e, n\rangle. \quad (3.68)$$

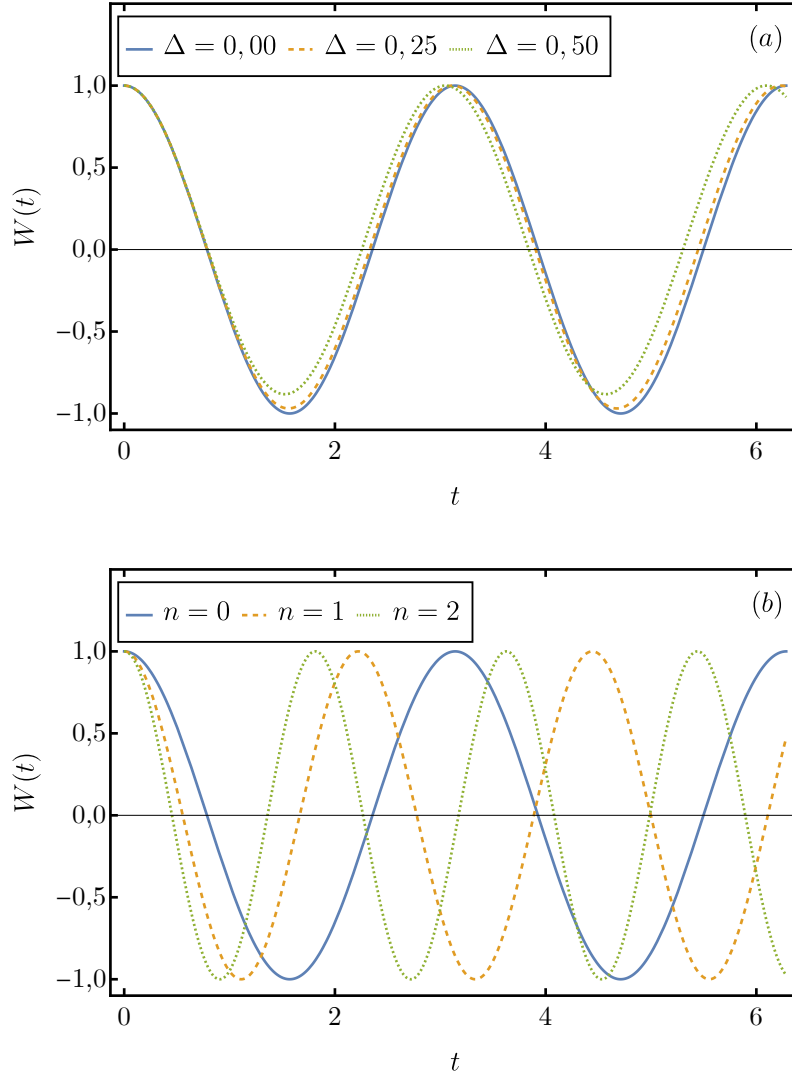
Na condição de ressonância, o vetor de estado, Eq. (3.60), para um instante t é

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |g, n+1\rangle \right]. \quad (3.69)$$

Empregando a Eq. (2.69), a inversão de população nesse caso é expressa pela equação

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(\Omega_n t), \quad (3.70)$$

Figura 12 – Em (a), apresentamos o comportamento da inversão de população, Eq. (3.65), para diferentes valores de dessintonia: $\Delta = 0$ (linha sólida azul), $\Delta = 0,25$ (linha tracejada laranja), $\Delta = 0,50$ (linha pontilhada verde), adotando $n = 0$. Em (b), apresentamos a inversão de população na condição de ressonância, Eq. (3.66), para diferentes números de fótons inicialmente na cavidade: $n = 0$ (linha sólida azul), $n = 1$ (linha tracejada laranja), $n = 2$ (linha pontilhada verde). Em ambos os gráficos, utilizamos $\lambda = 1$.



Fonte: O autor.

na qual se observa uma semelhança entre a parte dependente do tempo e a Eq. (3.66). Essa similaridade é uma consequência de um aspecto importante do modelo JC, no qual os vetores de estado para cada um dos estados número evoluem independentemente (94). Concluimos que, com ressonância e estado inicial dado pela Eq. (3.68), a inversão de população pode ser escrita como (94)

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n W_n(t), \quad (3.71)$$

$W_n(t)$ coincidindo com a inversão de população da Eq. (3.66). Nesta seção, tratamos do caso em que P_n corresponde à distribuição de Poisson, Eq. (2.69), associada aos estados coerentes. No entanto, a relação da Eq. (3.71) não se limita exclusivamente a tais estados (60, 94, 125, 126).

Explicitando a dependência do número médio de fótons e do acoplamento na Eq. (3.70), podemos escrever a inversão de população como

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cos \left(2\lambda \sqrt{n+1} t \right), \quad (3.72)$$

que não possui uma expressão analítica fechada (10). Para analisar a sua evolução temporal, do ponto de vista numérico, truncamos os estados número que formam a distribuição em um número n_f , com a condição $\sum_{n=0}^{n_f} P_n \approx 1$ sendo respeitada. A precisão desse método pode ser testada adicionando mais termos ao somatório e verificando se o resultado se altera (127).

Na Fig. 13 apresentamos o comportamento das RO nesse cenário. Observa-se um padrão de *colapsos e renascimentos*. Inicialmente, as oscilações ocorrem e, rapidamente, desaparecem (9). No entanto, depois de um certo período de repouso, as RO revivem – embora não com a mesma amplitude. Para tempos maiores, colapsos e renascimentos ocorrem sequencialmente, com os renascimentos tornando-se menos nítidos. Esse comportamento no modelo quantizado é distinto do caso semi-clássico, onde as oscilações mantêm uma amplitude constante e um caráter periódico (78).

Primeiro, analisemos o colapso das RO. Uma vez que temos uma incerteza no estado da luz $\Delta \hat{n} > 0$, Eq. (2.67), podemos inferir que existe uma *interferência negativa* nos termos da expansão da Eq. (3.72) (5). Devido aos aspectos da distribuição de Poisson, Eq. (2.69), com um pico para n próximos de $\langle n \rangle$, podemos definir uma frequência de Rabi dominante

$$\Omega_{\langle n \rangle} = 2\lambda \sqrt{\langle n \rangle + 1} \approx 2\lambda \sqrt{\langle n \rangle}, \quad \langle n \rangle \gg 1, \quad (3.73)$$

com a incerteza em $\hat{n}$ para o estado coerente sendo $\Delta \hat{n} = \langle n \rangle^{1/2}$, Eq. (2.67). Logo, podemos definir uma variação $\Omega_{\langle n \rangle \pm \Delta \hat{n}}$ ao redor da frequência dominante, Eq. (3.73),

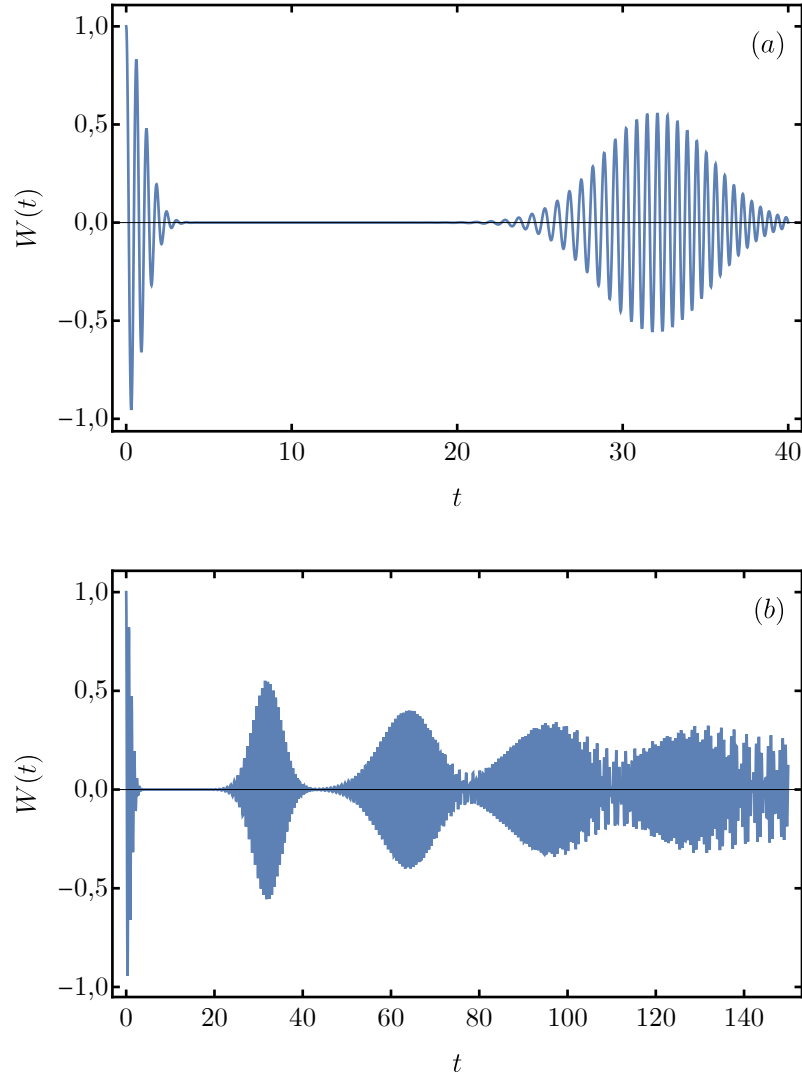
$$\Omega_{\langle n \rangle \pm \Delta \hat{n}} = 2\lambda \sqrt{\langle n \rangle \pm \Delta \hat{n}}, \quad (3.74)$$

que podemos calcular utilizando o fato de que $\langle n \rangle \gg \langle n \rangle^{1/2}$ no limite $\langle n \rangle \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Omega_{\langle n \rangle \pm \Delta \hat{n}} &= 2\lambda \langle n \rangle^{1/2} \sqrt{1 \pm \frac{1}{\langle n \rangle^{1/2}}}, \\ &\simeq 2\lambda \langle n \rangle^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2 \langle n \rangle^{1/2}} \right), \\ &= 2\lambda \langle n \rangle^{1/2} \pm \lambda. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Inicialmente, esses termos da soma oscilam em fase, resultando nas oscilações iniciais com a frequência dominante $\Omega_{\langle n \rangle}$ para $t \ll 1$. No entanto, essas contribuições sofrem um defasamento e, quando somados de acordo com a distribuição de Poisson, se anulam. Nesse

Figura 13 – Inversão de população para o estado inicial excitado da TLS e coerente da cavidade, Eq. (3.68), considerando um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$. Em (a) temos um intervalo de tempo menor, enquanto em (b) podemos ver um recorte maior do comportamento de $W(t)$, Eq. (3.72).



Fonte: Adaptada de (78).

contexto, introduzimos uma taxa de defasagem γ , que mensura o espalhamento das fases $\Omega_n t$ no intervalo $[\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}, \langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}]$, definida como a diferença máxima das frequências de Rabi (128),

$$\gamma = \Omega_{\langle n \rangle + \Delta \hat{n}} - \Omega_{\langle n \rangle - \Delta \hat{n}}. \quad (3.76)$$

Sendo assim, o tempo de colapso t_c é o período associado à essa taxa. Podemos descrevê-lo como

$$t_c = \frac{1}{\gamma}, \quad (3.77)$$

que, para $\langle n \rangle \gg 1$, se reduz à

$$t_c \simeq \frac{1}{2\lambda}. \quad (3.78)$$

Cabe dizer que os colapsos *não* são uma evidência da quantização da luz (5, 121), uma vez que uma distribuição contínua de fótons poderia levar aos colapsos (129).

Para examinar o fenômeno dos renascimentos, retornamos à Eq. (3.72); a inversão atômica é formada por uma soma de termos oscilantes, cada um com a sua respectiva frequência de Rabi Ω_n . Quando termos vizinhos oscilam fora de fase por π , eles se cancelam. Contudo, se eles oscilam em fase, ocorre uma interferência construtiva. Como, novamente, somente as frequências próximas de $\Omega_{\langle n \rangle}$ contribuem efetivamente, os *renascimentos* ocorrem em tempos t_r , quando os termos vizinhos possuem uma diferença de fase múltipla de 2π . Sendo assim, a relação entre a diferença de frequências de Rabi dominantes e o tempo de renascimento é

$$(\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1})t_r = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.79)$$

O lado esquerdo da equação acima é dado por, utilizando a Eq. (3.73),

$$\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1} = 2\lambda \left(\sqrt{\langle n \rangle + 1} - \sqrt{\langle n \rangle} \right). \quad (3.80)$$

Considerando $\langle n \rangle \gg 1$, obtemos

$$\sqrt{\langle n \rangle + 1} - \sqrt{\langle n \rangle} \simeq \sqrt{\langle n \rangle} \left(1 + \frac{1}{2\langle n \rangle} \right) - \sqrt{\langle n \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{\langle n \rangle}}. \quad (3.81)$$

Portanto, o tempo de renascimento, Eq. (3.79), é

$$t_r \simeq \frac{2\pi m}{\lambda} \sqrt{\langle n \rangle}. \quad (3.82)$$

Essa equação nos mostra que os renascimentos ocorrem em intervalos de tempo regulares, com uma dependência proporcional à $\sqrt{\langle n \rangle}$. Além disso, o fato de os fótons possuírem uma energia quantizada, por definição, permite que diferentes frequências entrem periodicamente em fase (121). É instrutivo pensar que, enquanto para calcular o tempo de colapso utilizamos um intervalo de fases, Eq. (3.76), aqui utilizamos a diferença entre fases vizinhas.

3.3.2 Operador de evolução temporal

Quando um dos dois subsistemas do modelo JC está inicialmente em um estado *misto*, a dinâmica é abordada sob a perspectiva do operador densidade. Quando lidamos com essa representação do estado, é conveniente utilizar o operador de evolução temporal, que apresentamos nesta seção. No cenário do modelo JC, o operador de evolução temporal é expresso por (64)

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t}, \quad (3.83)$$

com $\hat{V}$ sendo o hamiltoniano na Representação de interação, Eq. (3.51), considerando a condição de ressonância. Avaliamos o exponencial utilizando a expansão em série, de maneira que

$$\hat{U}(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\frac{i}{\hbar} \hat{V} t)^{\ell}}{\ell!}. \quad (3.84)$$

Para desenvolver essa série, podemos utilizar o método da indução infinita. Analisemos a ação sucessiva do hamiltoniano sobre o estado $|e, n\rangle$:

$$\begin{aligned} (\hat{V})^0 |e, n\rangle &= |e, n\rangle, \\ (\hat{V})^1 |e, n\rangle &= (\hbar\lambda)(n+1)^{1/2} |g, n+1\rangle, \\ (\hat{V})^2 |e, n\rangle &= (\hbar\lambda)^2(n+1) |e, n\rangle, \\ (\hat{V})^3 |e, n\rangle &= (\hbar\lambda)^3(n+1)^{3/2} |g, n+1\rangle, \\ &\vdots \\ (\hat{V})^{2\ell} |e, n\rangle &= (\hbar\lambda)^{2\ell}(n+1)^{\ell} |e, n\rangle, \\ (\hat{V})^{2\ell+1} |e, n\rangle &= (\hbar\lambda)^{2\ell+1}(n+1)^{\ell+1/2} |g, n+1\rangle. \end{aligned} \quad (3.85)$$

É evidente que a ação de $(\hat{V})^{2\ell}$ não provoca uma mudança no estado, além de uma constante multiplicativa. Por outro lado, a atuação de $(\hat{V})^{2\ell+1}$, além da constante, realiza a inversão do BS. Estendendo essa análise para a ação sobre o estado $|g, n+1\rangle$, podemos separar os termos pares e ímpares da expansão de $\hat{V}$ (14):

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)^{2\ell} &= (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^\ell |e\rangle\langle e| + (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\ell |g\rangle\langle g|, \\ (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)^{2\ell+1} &= (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^\ell \hat{a} |e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^\ell |g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Utilizando essas duas expressões e manipulações algébricas, podemos expressar $\hat{U}(t)$, Eq. (3.84), de uma maneira mais conveniente,

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-i\lambda t)^{2\ell}}{(2\ell)!} \left[\left(\sqrt{\hat{a} \hat{a}^\dagger} \right)^{2\ell} |e\rangle\langle e| + \left(\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \right)^{2\ell} |g\rangle\langle g| \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-i\lambda t)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \left[\frac{\left(\sqrt{\hat{a} \hat{a}^\dagger} \right)^{2\ell+1}}{\sqrt{\hat{a} \hat{a}^\dagger}} \hat{a} |e\rangle\langle g| + \hat{a}^\dagger \frac{\left(\sqrt{\hat{a} \hat{a}^\dagger} \right)^{2\ell+1}}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}} |g\rangle\langle e| \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ao utilizarmos a definição em série das funções seno e cosseno (130), escrevemos o operador de maneira mais contundente¹² (14, 30),

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \cos\left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}\right) |e\rangle\langle e| + \cos\left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}}\right) |g\rangle\langle g| \\ &\quad - i \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a} |e\rangle\langle g| - i \hat{a}^\dagger \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} |g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (3.88)$$

¹² O operador de evolução temporal considerando a dessintonia não nula pode ser encontrado na referência (126).

Para facilitar a apresentação dos cálculos, adotamos a convenção:

$$\hat{u}_{ee} = \cos \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right), \quad (3.89)$$

$$\hat{u}_{gg} = \cos \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \right), \quad (3.90)$$

$$\hat{u}_{eg} = -i \frac{\sin \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a}, \quad (3.91)$$

$$\hat{u}_{ge} = -i \hat{a}^\dagger \frac{\sin \left(\lambda t \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right)}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}}. \quad (3.92)$$

Dessa maneira, reescrevemos o operador de evolução temporal como¹³

$$\hat{U}(t) = \hat{u}_{ee} |e\rangle\langle e| + \hat{u}_{gg} |g\rangle\langle g| + \hat{u}_{eg} |e\rangle\langle g| + \hat{u}_{ge} |g\rangle\langle e|. \quad (3.93)$$

A correspondência entre as amplitudes de probabilidade e o operador $\hat{U}(t)$ torna-se evidente ao se aplicar o operador de evolução temporal ao estado inicial, Eq.(3.62), o que nos conduz diretamente à Eq.(3.63), no regime ressonante (121, 129).

Utilizando o formalismo da matriz densidade, a evolução temporal do sistema é dada por

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t), \quad (3.94)$$

sendo $\hat{\rho}(0)$ o estado do sistema em $t = 0$. Se o estado inicial for separável,

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^F(0) \otimes \hat{\rho}^A(0), \quad (3.95)$$

e o átomo estiver inicialmente excitado $\hat{\rho}^A(0) = |e\rangle\langle e|$, a matriz densidade do sistema para $t = 0$ é expressa por

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^F(0) \otimes |e\rangle\langle e|. \quad (3.96)$$

Logo, empregando as Eqs. (3.88), (3.93), (3.94) e (3.96), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \hat{u}_{ee} \hat{\rho}_F(0) \hat{u}_{ee} |e\rangle\langle e| - \hat{u}_{ge} \hat{\rho}_F(0) \hat{u}_{eg} |g\rangle\langle g| \\ & - \hat{u}_{ee} \hat{\rho}_F(0) \hat{u}_{eg} |e\rangle\langle g| + \hat{u}_{ge} \hat{\rho}_F(0) \hat{u}_{ee} |g\rangle\langle e| \end{aligned} \quad (3.97)$$

Em seguida, podemos utilizar a matriz de densidade reduzida $\hat{\rho}^A(t)$ para analisar a dinâmica do TLS ao realizar o traço sobre o grau de liberdade da cavidade,

$$\hat{\rho}^A(t) = \text{Tr}_F [\hat{\rho}(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle. \quad (3.98)$$

Consideramos que o estado inicial da cavidade $|\psi_F(0)\rangle$ é

$$|\psi_F(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (3.99)$$

¹³ Convém observar que os operadores $\hat{u}_{eg}$ e $\hat{u}_{ge}$ não são hermitianos.

de maneira que a respectiva matriz densidade do subsistema é

$$\hat{\rho}^F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 |n\rangle\langle n|. \quad (3.100)$$

Nesse contexto, empregando a Eq. (3.97), a matriz de densidade reduzida para o átomo é

$$\hat{\rho}^A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [|C_{e,n}(t)|^2 |e\rangle\langle e| + |C_{g,n}(t)|^2 |g\rangle\langle g| + C_{e,n}(t)C_{g,n}^*(t) |e\rangle\langle g| + C_{e,n}^*(t)C_{g,n}(t) |g\rangle\langle e|], \quad (3.101)$$

na qual utilizamos os coeficientes $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n}(t)$, Eq. (3.56) e (3.58), sob a condição de ressonância, para descrever os elementos de $\hat{\rho}^A(t)$. A inversão de população, nessa nova notação, pode ser escrita como

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(2\lambda\sqrt{n+1}t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(\Omega_n t), \quad (3.102)$$

que concorda com a equação previamente deduzida, Eq. (3.70), na qual P_n representa a distribuição de Poisson. Ademais, se assumirmos $\Delta = 0$ e expressarmos a Eq. (3.60) sob o formalismo da matriz densidade e, sequencialmente, traçarmos o grau de liberdade da cavidade, obtemos, justamente, a Eq. (3.101).

Um dos casos onde o modo do campo, para $t = 0$, pode ser representado diagonalmente, análogo à Eq. (3.100), é o estado térmico, Eq. (2.78). No contexto do modelo JC, ele foi primeiramente estudado por Cummings (9), e mais detalhadamente por Knight e Radmore (131). A inversão de população nesse caso, considerando o átomo inicialmente no estado excitado, é

$$W(t) = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n \cos(\Omega_n t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(\Omega_n t), \quad (3.103)$$

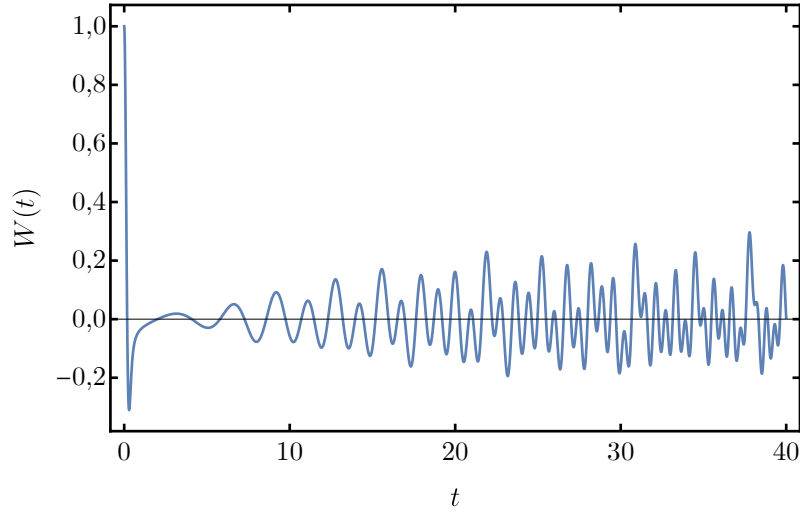
com P_n descrevendo a distribuição de Bose-Einstein, Eq. (2.77). Percebe-se que a Eq. (3.71) permanece válida quando a matriz de densidade reduzida do campo admite uma representação diagonal, mesmo no caso de estados mistos.

Na Fig. 14, apresentamos a inversão de população, quando o número médio de fótons na cavidade é $\langle n \rangle = 25$. Nota-se a ausência da estrutura de colapsos e renascimentos bem definidos observada na Fig. 13 (131). Em seu lugar, observa-se um comportamento errático: a inversão de população decresce até se aproximar de zero e, em seguida, evolui de forma irregular e sem periodicidade, mesmo em tempos longos (126). Esse comportamento se deve à maior incerteza associada à luz térmica, Eq.(2.79) (30).

3.4 EMARANHAMENTO ENTRE ÁTOMO E CAMPO

Um estado como o que é representado pela Eq. (3.35) é classificado como um *estado emaranhado* em determinados instantes, possuindo correlações quânticas entre o átomo e o

Figura 14 – Inversão de população, quando a cavidade está inicialmente no estado térmico e o átomo está excitado. Utilizamos um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$.



Fonte: Adaptada de (78).

campo (131) (Apêndice A). Essa característica do modelo JC é importante no que diz respeito a interfaces na Informação Quântica (132, 133).

Nesta seção, enfocaremos o emaranhamento entre átomo e campo, quantificando-a a partir da VNE (105) (Apêndice A). No caso do modelo JC, a pureza do estado foi inicialmente estudada por Aravind e Hirschfelder (13). Um estudo mais rigoroso foi realizado por Phoenix e Knight em 1988 (14), com o termo “emaranhamento” sendo empregado pela primeira vez em 1990 (134), pelos mesmos autores. Desde então, devido à sua importância em aplicações na Computação Quântica, esse aspecto foi amplamente estudado (127, 133, 135–138).

Sob a condição ressonante, considerando o estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, o vetor de estado, para um instante t é, a partir da Eq. (3.63),

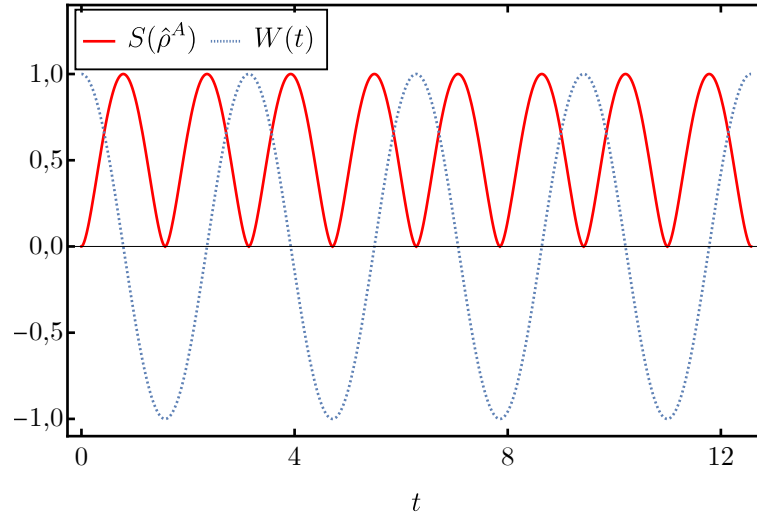
$$|\Psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) |e, n\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) |g, n+1\rangle. \quad (3.104)$$

Ao construirmos a matriz densidade nesse caso e, em seguida, realizarmos o traço sobre o grau de liberdade da cavidade, obtemos a matriz de densidade reduzida,

$$\hat{\rho}^A(t) = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) & 0 \\ 0 & \sin^2\left(\frac{\Omega_n}{2}t\right) \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

a partir da qual o cálculo da VNE é direto. O comportamento do emaranhamento nesse caso está representado na Fig. 15, onde observamos que os valores mínimos da entropia acontecem quando a inversão de população possui os valores ± 1 e, por consequência, o estado é separável. Por outro lado, quando $W(t) = 0$, a VNE possui um valor máximo e, ao realizarmos uma medida sobre o estado, obtemos o máximo de informação possível.

Figura 15 – Apresentamos a VNE da matriz de densidade reduzida do átomo (linha sólida vermelha), quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$ e $\lambda = 1$. Para auxiliar na interpretação, incluímos a inversão de população (linha pontilhada azul) sob a mesma perspectiva.



Fonte: O autor.

Naturalmente, agora prosseguimos para o cálculo do emaranhamento quando o estado inicial da cavidade é coerente. Na seção anterior, obtivemos a matriz densidade reduzida para o átomo, Eq. (3.101) – considerando a ressonância e o átomo excitado em $t = 0$. Abaixo, a reescrevemos matricialmente, na base dos BS,

$$\hat{\rho}^A(t) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} |C_{e,n}(t)|^2 & \sum_{n=0}^{\infty} C_{e,n}^*(t) C_{g,n}(t) \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_{e,n}(t) C_{g,n}^*(t) & \sum_{n=0}^{\infty} |C_{g,n}(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Podemos diagonalizar $\hat{\rho}^A(t)$ e escrevê-la como

$$\hat{\rho}^A(t) = \begin{pmatrix} \pi_+(t) & 0 \\ 0 & \pi_-(t) \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

com $\pi_{\pm}(t)$ representando os autovalores de $\hat{\rho}^A$, Eq. (3.106). Empregando a relação

$$\det [\hat{\rho}^A(t) - \pi_{\pm}(t) \hat{\mathbb{1}}] = 0, \quad (3.108)$$

obtemos

$$\pi_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [|C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n}(t)|^2] \right\}^2 + 4 \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_{e,n}(t) C_{g,n}^*(t) \right|^2} \right), \quad (3.109)$$

na qual a condição de normalização $\sum_{n=0}^{\infty} (|C_{e,n}(t)|^2 + |C_{g,n}(t)|^2) = 1$ foi utilizada. A VNE, para o subsistema atômico é, então,

$$S(\hat{\rho}^A) = -\pi_+(t) \log_2[\pi_+(t)] - \pi_-(t) \log_2[\pi_-(t)], \quad (3.110)$$

na qual a dependência temporal na VNE é implícita. Apresentamos o comportamento da VNE na Fig. 16(a), considerando um estado inicial coerente da cavidade, com $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$. Percebemos que a VNE é nula em $t = 0$, uma vez que, inicialmente, o estado do sistema é separável. Consequentemente, a matriz densidade reduzida do átomo representa um estado puro, sem emaranhamento entre o TLS e a cavidade. O comportamento para $t > 0$ pode ser compreendido a partir do comportamento dos autovalores $\pi_{\pm}(t)$, apresentado na Fig. 16(b).

É possível observar que a VNE atinge um mínimo na região de colapso da inversão de população (14). Analisando as probabilidades, vemos que $\pi_{+}(t)$ se aproxima de 1, enquanto $\pi_{-}(t)$ se aproxima de zero, o que faz com que estejamos cada vez mais perto de escrever a Eq. (3.107) como um estado puro (139) (é instrutivo conferir os comentários sobre Decomposição de Schmidt no Apêndice A). Quanto maior o número médio de fótons, maior a probabilidade de o estado se aproximar de um estado puro na metade do tempo de renascimento (15).

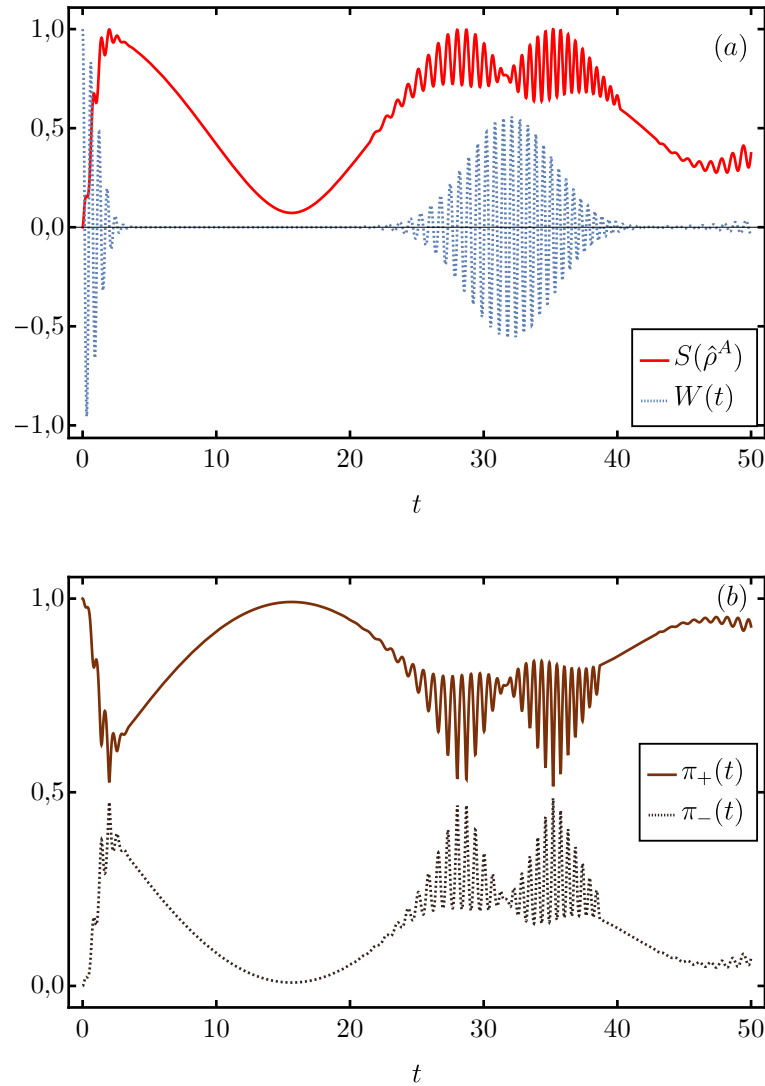
3.5 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

Nesta seção, apresentamos qualitativa e brevemente a configuração experimental que permitiu a verificação do modelo JC, descrevendo o célebre experimento do grupo de Haroche (4). Mais detalhes sobre os procedimentos experimentais podem ser encontrados nas referências (30, 78, 140).

Iniciamos com uma apresentação qualitativa do funcionamento de um maser de um átomo, responsável pelas primeiras observações das predições do modelo (2–4). Maser é um acrônimo para “*microwave amplification by stimulated emission of radiation*”. Essencialmente, o dispositivo consiste em um feixe molecular ou atômico, na qual as partículas no estado excitado de uma transição específica, na faixa de frequência de micro-ondas, são selecionadas. A interação desse feixe com um campo eletromagnético, também no espectro de micro-ondas, resulta na emissão adicional de radiação, promovendo, assim, a amplificação por emissão estimulada (111). O maser de um átomo estende essa ideia, mas para o estudo da interação de um único átomo com um modo da cavidade (2). Essa realização foi possível graças ao advento dos lasers de frequência ajustável, que viabilizou uma preparação mais precisa do estado atômico, selecionando o estado eletrônico e o intervalo de velocidades requerido. Nesse sentido, um primeiro experimento a respeito do modelo JC foi realizado por Rempe, Walther e Klein (3), utilizando uma cavidade no estado inicial térmico.

Para o subsistema atômico, cabe mencionar, são utilizados átomos de Rydberg, onde o elétron de valência possui um número quântico principal n elevado. Nesse sentido, o estado eletrônico requerido é o estado circular de Rydberg (141), onde o número quântico de momento angular ℓ é o maior possível para dado n , $\ell = n - 1$, e $|m| = \ell$, sendo m o número quântico magnético. Esses estados podem se acoplar fortemente a um único modo da cavidade, por possuírem um momento de dipolo elétrico intenso. As transições para os níveis vizinhos ocorrem na região de ondas

Figura 16 – Em (a), iniciamos com a cavidade no estado coerente, adotando $\langle n \rangle = 25$ e $\lambda = 1$. Para auxiliar na interpretação, incluímos a inversão de população (linha pontilhada azul) sob a mesma perspectiva. Em (b), exibimos os comportamentos dos autovalores $\pi_+(t)$ (linha sólida marrom) e $\pi_-(t)$ (linha pontilhada preta), utilizando os mesmos parâmetros que em (a).



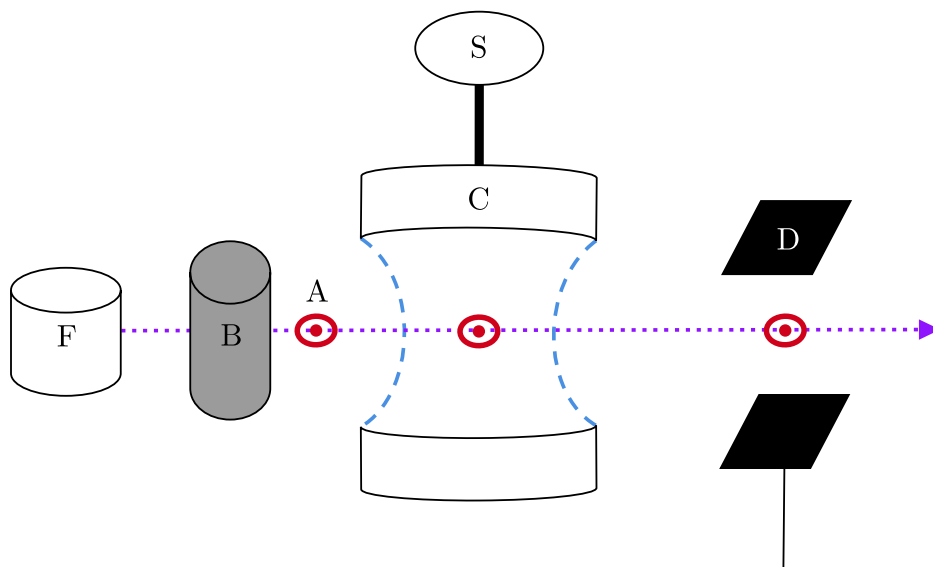
Fonte: A Fig. (a) foi adaptada de(78), enquanto a Fig. (b) foi produzida pelo autor.

milimétricas, resultando em longos tempos de decaimento¹⁴ (141). Além disso, eles podem ser detectados seletivamente por meio da ionização induzida por um campo externo. A aproximação das partículas como um sistema de dois níveis é garantida, uma vez que as transições são restritas a outros estados circulares (2, 78).

No ano de 1996, o grupo de Haroche (4) foi o responsável por analisar a dinâmica do modelo JC, com o tempo de interação requerido para um vislumbre maior da evolução temporal das

¹⁴ O tempo de decaimento do átomo está associado à emissão espontânea, sendo inversamente proporcional ao número quântico principal n .

Figura 17 – Representação esquemática do aparato experimental que permitiu a observação dos colapsos e renascimentos das RO. Átomos de Rydberg são emitidos por uma fonte (F). Posteriormente, os átomos são preparados em estados circulares de Rydberg (A), em uma caixa (B). Em seguida, esses átomos interagem com a cavidade resfriada (C), alimentada por uma fonte (S) que fornece um estado coerente de baixa amplitude. Por fim, o estado atômico é medido pelos detectores (D).



Fonte: Adaptada de (4).

populações atômicas. Nesse contexto, representamos esquematicamente o aparato experimental na Fig. 17. Os átomos de Rydberg são emitidos de uma fonte (F) e são preparados no estado circular de Rydberg $|e\rangle$ (A), em uma caixa (B) (141), através da aplicação de um campo externo¹⁵. Adicionalmente, suas velocidades também são selecionadas¹⁶. A seguir, os átomos atravessam a cavidade resfriada (C), na qual um campo eletromagnético é confinado. O estado do campo é preparado por uma fonte (S), que pode fornecer um estado coerente de amplitude baixa. Após a passagem pela cavidade, os estados são detectados por ionização de campo, pelo detector D, e a taxa de transferência $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ é medida para diversos instantes, dependendo do tempo de interação – o que possibilita a análise da taxa de transferência ao longo do tempo. O átomo subsequente experimenta o modo da cavidade restaurado ao seu estado inicial pela fonte S. Os resultados de (4) apresentam, através dessas medidas, o fenômeno dos colapsos e renascimentos das RO.

¹⁵ Utilizamos “externo” no sentido de que esse campo possui um decaimento muito rápido, e não é emaranhado com o átomo (78).

¹⁶ Neste caso, a velocidade determina o tempo de interação átomo-cavidade.

4 ACOPLAMENTOS COM DEPENDÊNCIA TEMPORAL

Como mencionamos na introdução, o modelo TDJC possui uma dependência temporal no acoplamento (60, 61, 125, 142–146) ou na dessintonia (147, 148). Essa inclusão pode surgir naturalmente de uma situação física, como o movimento atômico ou o acionamento e desligamento do maser.

É natural se perguntar se, nesse caso, o hamiltoniano ainda retém a estrutura diagonal de blocos. Com o fim de investigar esse aspecto, utilizemos novamente o hamiltoniano $\hat{\mathcal{V}}$, obtido utilizando o número de excitações, Eq. (3.43). Empregando a mesma lógica adotada na seção 3.2.1, e incorporando as dependências temporais no acoplamento e na dessintonia, podemos expressar $\hat{\mathcal{V}}(t)$ na base dos BS como

$$\hat{\mathcal{V}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \hat{h}_0(t) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{h}_1(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \hat{h}_n(t) = \begin{pmatrix} \Delta(t)\frac{\hbar}{2} & \hbar\lambda(t)\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda(t)\sqrt{n+1} & -\Delta(t)\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Percebemos que a estrutura de blocos 2×2 , agora equipada com uma dependência temporal nos elementos, é mantida. Essa circunstância permite que a generalização TDJC seja enquadrada na classe de problemas abordados com a Equação de Schrödinger de dois níveis dependente do tempo (147), na qual a solução analítica é obtida para *alguns* casos (30, 60, 144). A implementação de um acoplamento dependente do tempo no âmbito da QED de cavidades já foi sugerida na literatura (149).

O ajuste da evolução temporal do acoplamento pode levar à manipulação do estado do TLS, o que é desejável, uma vez que o controle das transições em um sistema de dois níveis desempenha um papel importante em aplicações no contexto de Controle e Computação Quântica (34, 55). Especificamente, lidamos com o átomo inicialmente excitado e dessintonia nula. Primeiro, apresentamos a equação diferencial obtida ao incluirmos a dependência temporal no acoplamento e o operador de evolução temporal sob a mesma perspectiva. Depois, apresentamos os efeitos desses acoplamentos com dependência temporal na inversão de população e na VNE, partindo de exemplos da literatura.

Em relação à notação, utilizaremos a sigla TDJC, a partir deste ponto, para nos referirmos exclusivamente ao modelo JC com dependência temporal no acoplamento. Além disso, daqui em diante, tomamos $\hbar = 1$.

4.1 DINÂMICA DO MODELO JAYNES-CUMMINGS COM ACOPLAMENTO DEPENDENTE DO TEMPO

Nesta seção, paralelamente ao que realizamos na seção 3.3, apresentamos dois métodos possíveis para a abordagem do modelo TDJC.

Partimos da introdução de uma dependência temporal explícita no acoplamento do hamiltoniano $\hat{V}$, Eq. (3.51), tal que

$$\hat{V}(t) = \lambda(t)(\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i\Delta t}). \quad (4.2)$$

Tendo em vista que podemos concentrar nossa análise nas transições entre os BS $|e, n\rangle \leftrightarrow |g, n+1\rangle$ (subseção 3.3.1), aplicamos a Equação de Schrödinger no vetor de estado, Eq. (3.35), e obtemos o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{C}_{e,n}(t) = -iC_{g,n+1}(t)\lambda(t)\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}, \\ \dot{C}_{g,n+1}(t) = -iC_{e,n}(t)\lambda(t)\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}, \end{cases} \quad (4.3)$$

que desacoplamos em

$$\begin{cases} \ddot{C}_{e,n}(t) - \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + i\Delta\right) \dot{C}_{e,n}(t) + \lambda^2(t)(n+1)C_{e,n}(t) = 0, \\ \ddot{C}_{g,n+1}(t) - \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} - i\Delta\right) \dot{C}_{g,n+1}(t) + \lambda^2(t)(n+1)C_{g,n+1}(t) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

A inserção da dependência temporal na dinâmica do modelo faz com que as ODEs resultantes não sejam trivialmente solucionáveis no caso não ressonante (144). Neste trabalho, a partir deste ponto, trabalharemos sob a restrição $\Delta = 0$. Com isso, o hamiltoniano simplifica para,

$$\hat{V}(t) = \lambda(t)(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (4.5)$$

Logo, o sistema, Eq. (4.4), pode ser escrito como

$$\begin{cases} \ddot{C}_{e,n}(t) - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \dot{C}_{e,n}(t) + \lambda^2(t)(n+1)C_{e,n}(t) = 0, \\ \ddot{C}_{g,n+1}(t) - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \dot{C}_{g,n+1}(t) + \lambda^2(t)(n+1)C_{g,n+1}(t) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

que, naturalmente, apresenta uma complexidade maior do que no caso do acoplamento constante (Apêndice B), mas uma dificuldade menor em relação ao sistema oriundo do regime com dessintonia não nula. Para uma dependência temporal arbitrária, as ODEs, Eq. (4.6), admitem soluções analíticas (60).

Uma vez que o hamiltoniano $\hat{V}(t)$, na condição de ressonância, Eq. (4.5), depende do tempo, não podemos mais utilizar o mesmo operador de evolução temporal, Eq. (3.83). Alternativamente, uma vez que os hamiltonianos em diferentes instantes comutam entre si, escrevemos o operador de evolução temporal como (64)

$$\hat{U}(t) = \exp \left[-i \int_0^t \hat{V}(t') dt' \right] = \exp \left[-iA(t)(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \right]. \quad (4.7)$$

Neste contexto, definimos a “superfície” ou “área” de acoplamento (30),

$$A(t) = \int_0^t \lambda(t') dt'. \quad (4.8)$$

Seguindo os mesmos procedimentos descritos na subseção 3.3.2, obtemos a seguinte expressão para o operador de evolução temporal,

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) = & \cos \left[A(t) \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right] |e\rangle\langle e| + \cos \left[A(t) \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \right] |g\rangle\langle g| \\ & - i \frac{\sin \left[A(t) \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right]}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} \hat{a} |e\rangle\langle g| - i \hat{a}^\dagger \frac{\sin \left[A(t) \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1} \right]}{\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1}} |g\rangle\langle e|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Percebemos na Eq. (4.9), que a extensão do TDJC não apresenta grande mudança *algébrica* no operador de evolução temporal *quando consideramos a condição de ressonância*. Basicamente, temos a substituição $\lambda_0 t \rightarrow A(t)$.

Sendo assim, é natural pensar que talvez haja uma generalização para a evolução temporal do sistema. Como já mencionado, não nos propomos a investigar os efeitos do estado inicial atômico na dinâmica do modelo. Portanto, fixamos o estado inicial do TLS como excitado e adotamos $\Delta = 0$. Sendo assim, as amplitudes de probabilidade obedecem às condições iniciais $C_{e,n}(0) = C_n$ e $C_{g,n}(0) = 0$, Eq. (3.35). Sob esses parâmetros, utilizando as ODEs, Eq. (4.6), ou o operador de evolução temporal, Eqs. (4.9), e (4.8), podemos generalizar que as soluções para os coeficientes são

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_n \cos \left[A(t) \sqrt{n+1} \right], \\ C_{g,n+1}(t) &= -i C_n \sin \left[A(t) \sqrt{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A partir das amplitudes, Eq. (4.10), obtemos a inversão de população (142),

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos \left[2A(t) \sqrt{n+1} \right], \quad (4.11)$$

na qual $P_n = |C_n|^2$ é a probabilidade associada à distribuição de fótons. Novamente, observamos uma relação similar à Eq. (3.71), mesmo com a inserção da dependência temporal no acoplamento. Cabe ressaltar que essa expressão também é válida quando consideramos um estado inicial misto com representação diagonal, e.g. o estado térmico.

4.2 EXEMPLOS DA LITERATURA

Nesta seção, apresentaremos diversos modelos do TDJC, seguindo uma ordem cronológica para os diversos cenários abordados. Com exceção da subseção 4.2.1, onde tratamos a generalização com mais detalhes, adotaremos uma abordagem fenomenológica para a inserção da dependência temporal no acoplamento, conforme os artigos que serviram de base para cada caso. Além disso, ao explorarmos esses diferentes contextos, utilizamos um parâmetro ζ , que possui unidades de frequência. Atribuímos às constantes (λ_0, ζ) valores que ressaltam seus efeitos na inversão de população ou que estão de acordo com as ordens de grandeza nas referências citadas.

4.2.1 Dependência temporal senoidal

O parâmetro de acoplamento senoidal reflete o movimento clássico do átomo dentro da cavidade¹. Ela foi inicialmente estudada por Schlicher (142) e, no contexto dos acoplamentos com dependência temporal, é uma das abordagens mais empregadas (61, 136, 143, 144, 150–153).

Ao derivarmos o termo de interação do hamiltoniano do modelo JC (seção 3.2), deduzimos que o termo de acoplamento pode ser escrito como

$$\lambda = -d\mathcal{E}_0 \sin(kz). \quad (4.12)$$

Nesta expressão, é instrutivo relembrar, d é um elemento da matriz do operador dipolo, $\mathcal{E}_0$ é uma função de parâmetros do campo elétrico e $k = \nu/c$. Para incluir o movimento do átomo, realizamos a mudança $z \rightarrow vt$ na Eq. (4.12) (125, 142, 154), sendo v a velocidade do átomo. Ademais, podemos utilizar as Eqs. (2.10) e (2.11) para reescrever o acoplamento como

$$\lambda(t) = \lambda_0 \sin\left(\frac{m\pi vt}{L}\right), \quad (4.13)$$

sendo m o número de meios comprimentos de onda do modo na cavidade e $\lambda_0 = -d\mathcal{E}_0$. No contexto do movimento do átomo, Schlicher apresenta uma interpretação física para a superfície de acoplamento, Eq. (4.8), como a área do campo pelo qual o átomo passa até o instante t . Nesse caso, ela é descrita por

$$A(t) = \frac{L}{m\pi v} \left[1 - \cos\left(\frac{m\pi vt}{L}\right) \right]. \quad (4.14)$$

Aqui, introduzimos o parâmetro² $\zeta = \pi v/L$, tal que podemos reescrever o acoplamento como

$$\lambda = \lambda_0 \sin(m\zeta t). \quad (4.15)$$

Logo, a superfície de acoplamento $A(t)$ é dada por

$$A(t) = \frac{\lambda_0}{\zeta m} [1 - \cos(m\zeta t)]. \quad (4.16)$$

Assim, a inversão de população, Eq. (4.11), para uma distribuição arbitrária de fótons P_n , é dada por

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\left\{ \frac{\xi_n}{m\zeta} [1 - \cos(m\zeta t)] \right\}, \quad (4.17)$$

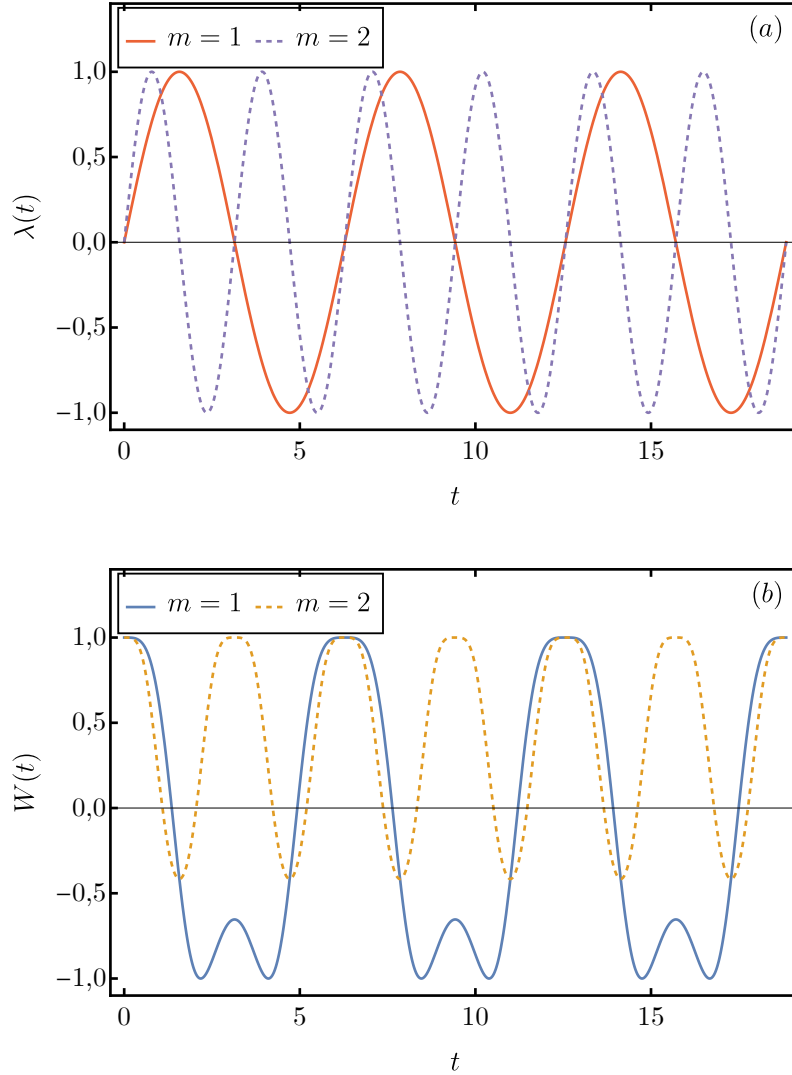
com a introdução do parâmetro ξ_n , que utilizaremos recorrentemente ao longo deste capítulo, definido por

$$\xi_n = 2\lambda_0 \sqrt{n+1}. \quad (4.18)$$

¹ Nesse caso, considera-se que a energia cinética é consideravelmente maior do que a energia de interação do modelo JC (30).

² Fisicamente, nessa perspectiva, ζ deve ser interpretado como o resultado de uma combinação de valores de v e L .

Figura 18 – Em (a) representamos o acoplamento senoidal, Eq. (4.15), para $m = 1$ (linha sólida laranja) e $m = 2$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, Eq. (4.17), adotando $m = 1$ (linha sólida azul) e $m = 2$ (linha tracejada amarela). Os parâmetros escolhidos foram $\lambda_0 = \zeta = 1$.

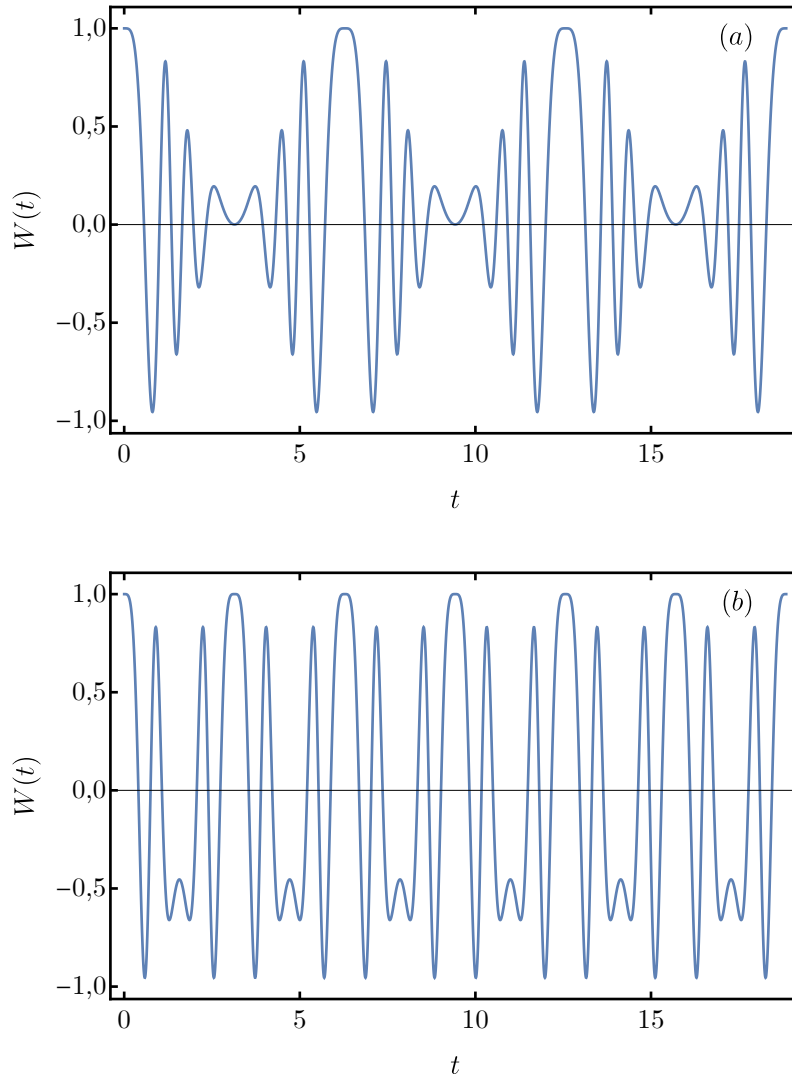


Fonte: O autor.

Apresentamos, na Fig. 18, o comportamento dessa inversão de população para os estados número e coerente do campo. Na Fig. 18(a), apresentamos o comportamento do acoplamento, para $m = 1$ e $m = 2$. Na Fig. 18(b), constatamos que a inversão de população, quando a cavidade inicialmente está vazia ($n = 0$), retém um caráter similar ao senoidal, porém com reentrâncias em múltiplos ímpares de π , para $m = 1$. Outrossim, constatamos que para $m = 2$, temos um aumento na frequência, acompanhada de diminuição na amplitude das RO.

Ao analisarmos a inversão de população proveniente do estado inicial da cavidade coerente, nas Fig. 19(a) e (b), percebemos que o movimento atômico confere à inversão de população uma

Figura 19 – Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento senoidal, Eq. (4.17), empregando $\lambda_0 = \zeta = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $m = 1$ e, em (b), $m = 2$.



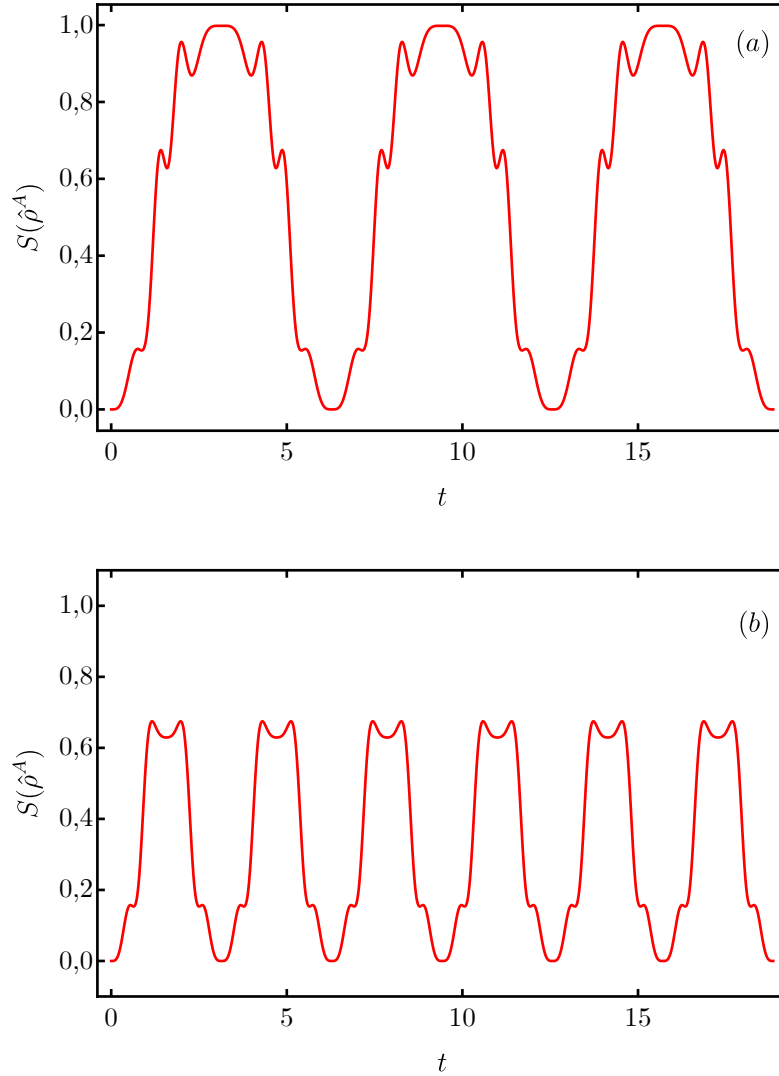
Fonte: Adaptada de (154).

periodicidade bem definida, com uma estrutura significativamente distinta daquela representada na Fig. 13 (154). Notavelmente, o período, neste caso, não depende do número médio de fótons, como seria intuitivo à luz do modelo sob acoplamento constante (10) (subseção 3.3.1), mas sim de m , como podemos constatar nas Figs. 19(a) e (b).

Nas Fig. 20, apresentamos a VNE considerando o acoplamento senoidal, para um estado inicial coerente da cavidade. Observamos que o emaranhamento do estado oscila periodicamente, e que um aumento em m resulta no aumento da frequência e na diminuição da amplitude (154).

Ainda sobre a modulação senoidal, vale destacar que Bartzis a estudou sob a perspectiva das quadraturas do campo (143), enquanto Wilkens e Meystre a estenderam para as interações no

Figura 20 – Apresentamos a VNE considerando o acoplamento senoidal, empregando $\lambda_0 = \zeta = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a) adotamos $m = 1$, enquanto em (b), empregamos $m = 2$.



Fonte: Adaptada de (154).

maser (155). Notavelmente, Fang (154), sob a perspectiva do movimento atômico, investigou o emaranhamento átomo-campo e a preparação de estados gato de Schrödinger.

4.2.2 Dependência temporal linear

Joshi e Lawande (125) consideraram o acoplamento

$$\lambda(t) = \lambda_0 \zeta t, \quad (4.19)$$

que representa a interação sob uma “varredura linear”³. Os autores visavam investigar as implicações dos efeitos transientes no acoplamento, modulados pelo parâmetro ζ . Para valores pequenos de ζ , verifica-se o que denominam de *mudança adiabática*, enquanto para valores maiores de ζ , ocorre um *salto súbito*⁴. Nesse cenário, a área do acoplamento, Eq. (4.8), é

$$A(t) = \lambda_0 \zeta \frac{t^2}{2}, \quad (4.20)$$

e a inversão de população, para uma distribuição arbitrária de fótons, é

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos\left(\frac{\xi_n}{2} \zeta t^2\right). \quad (4.21)$$

Na Fig. 21(a), apresentamos o comportamento do acoplamento no caso de salto súbito ($\zeta = 0,16$) e de mudança adiabática ($\zeta = 0,01$). Na Fig. 21(b), observamos as consequências de um salto súbito ao observarmos um aumento gradual na frequência das RO para o campo inicialmente em um estado de vácuo. Por outro lado, ao se considerar a mudança adiabática, observa-se que as oscilações evoluem de forma lenta ao longo do intervalo de tempo analisado. Nas Figs. 22(a) e (b), analisamos os efeitos das modulações em uma cavidade inicialmente no estado coerente. Mantivemos o mesmo número médio de fótons do exemplo apresentado na Fig. 13, com o intuito de facilitar a comparação: em (b), o tempo de renascimento é *maior* do que no acoplamento constante, enquanto em (a), ele é *menor*. Com isso em mente, pode-se afirmar que as RO apresentam diferenças tanto quantitativas quanto qualitativas em comparação ao cenário de acoplamento constante.

Na Fig. 23, apresentamos a VNE para o acoplamento com dependência temporal linear, considerando o estado inicial do campo como coerente. O cenário de um salto súbito está representado na Fig. 23(a), onde vemos que o aumento na intensidade do acoplamento resulta em um sistema com emaranhamento relativamente intenso. Por outro lado, quando ocorre uma mudança adiabática, como exibido na Fig. 23(b), observamos a entropia variando lentamente.

4.2.3 Dependência temporal secante hiperbólica

Dasgupta (60) propôs o acoplamento

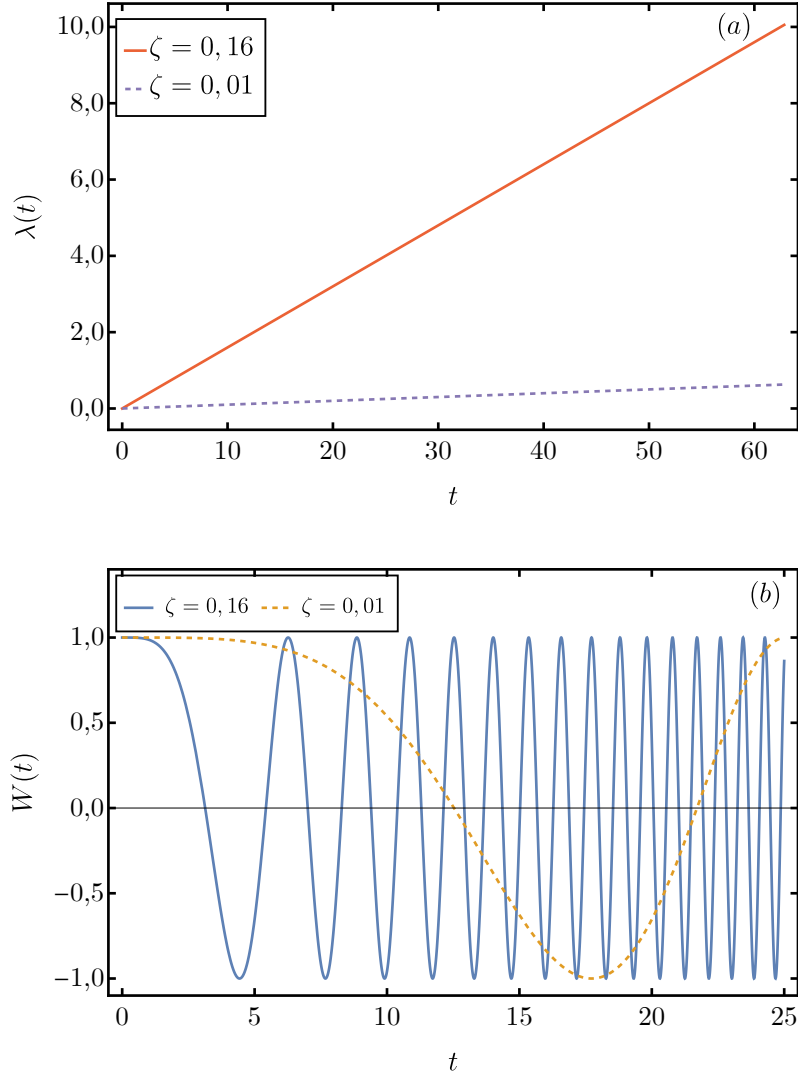
$$\lambda(t) = \lambda_0 \operatorname{sech}(\zeta t), \quad (4.22)$$

uma vez que ele permite uma solução analítica para as ODEs, Eq. (4.4), mesmo com uma dessintonia não nula. Devido à natureza da função secante hiperbólica (130), esse acoplamento possui um máximo em $t = 0$ e decai para tempos maiores. Logo, dependendo do valor do parâmetro ζ e do instante inicial, torna-se possível estudar o efeito de um crescimento ou decréscimo, adiabático ou rápido. Sendo assim, tal função permite o estudo de efeitos transientes

³ Do inglês, *linear sweep*.

⁴ Do inglês, *sudden jump*.

Figura 21 – Em (a) representamos o acoplamento linear, Eq. (4.19), para $\zeta = 0,16$ (linha sólida laranja) e $\zeta = 0,01$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, Eq. (4.21), adotando $\zeta = 0,16$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,01$ (linha tracejada amarela). O parâmetro escolhido foi $\lambda_0 = 1$.



Fonte: O autor.

no acionamento e desligamento do sistema átomo-cavidade. A superfície de acoplamento nesse caso é

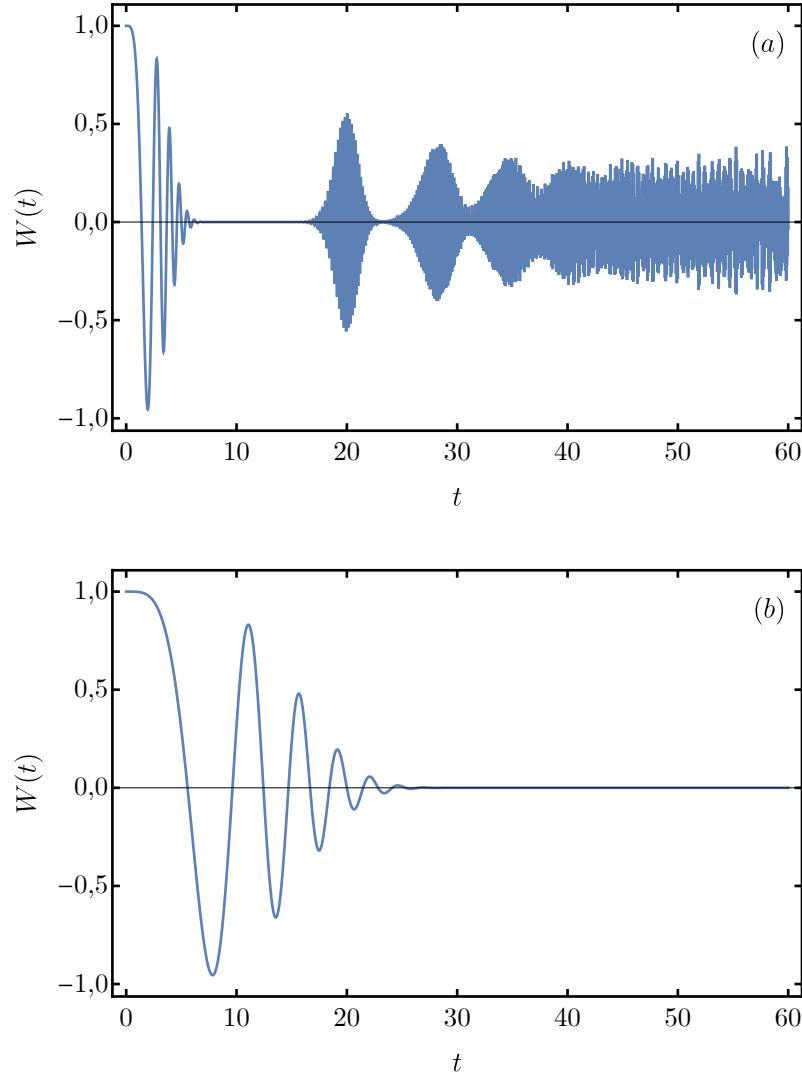
$$A(t) = \frac{\lambda_0}{\zeta} \operatorname{tg}^{-1} [\sinh(\zeta t)], \quad (4.23)$$

e a inversão de população, para uma distribuição arbitrária de fótons, é

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos \left[\frac{\xi_n}{\zeta} \operatorname{tg}^{-1} \sinh(\zeta t) \right]. \quad (4.24)$$

Na Fig. 24(a), apresentamos o acoplamento para $\zeta = 0,3$ e $\zeta = 0,1$. Seguindo o procedimento adotado por Dasgupta, utilizamos tempos negativos na Fig. 24, com o fim de simular o

Figura 22 – Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento linear, Eq. (4.21), empregando $\lambda_0 = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,16$ e, em (b), $\zeta = 0,01$.

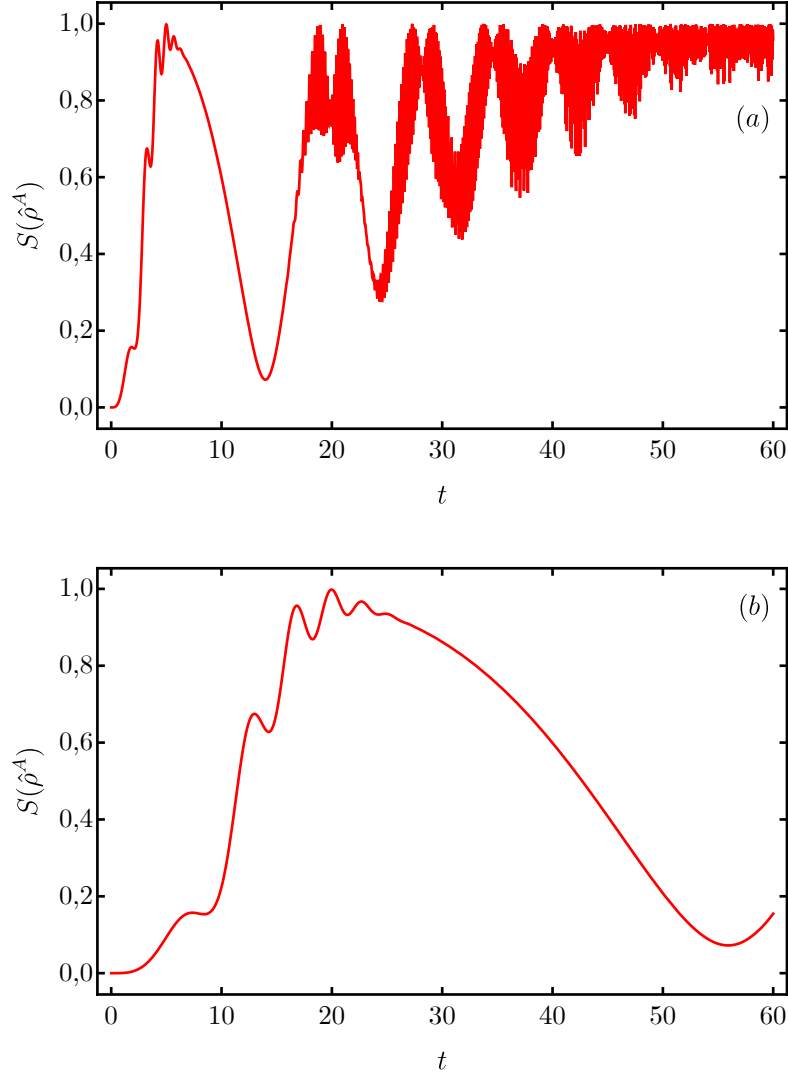


Fonte: Adaptada de (125).

efeito do aumento e subsequente queda do parâmetro de acoplamento. No contexto do Controle Quântico (150), observamos na Fig. 24(b) que, ajustando o parâmetro ζ , é possível alcançar um valor assintótico para a inversão de população. Nas Figs. 25(a) e (b), constatamos que o decaimento do acoplamento resulta no desaparecimento das RO, à medida que a interação se anula. Para ambos os valores de ζ considerados, observa-se que as interações cessam antes que ocorra o renascimento das RO. No entanto, para $\zeta = 0,3$, esse encerramento se dá de forma ainda mais precoce.

Na Fig. 26, apresentamos a VNE nesse cenário. Constatamos que, devido à natureza da modulação, também conseguimos obter valores assintóticos para o emaranhamento. Na Fig. 26(a), observamos que, diferentemente da Fig. 16(a), o emaranhamento não diminui durante

Figura 23 – Apresentamos a VNE considerando o acoplamento linear, empregando $\lambda_0 = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,16$ e, em (b), $\zeta = 0,01$.



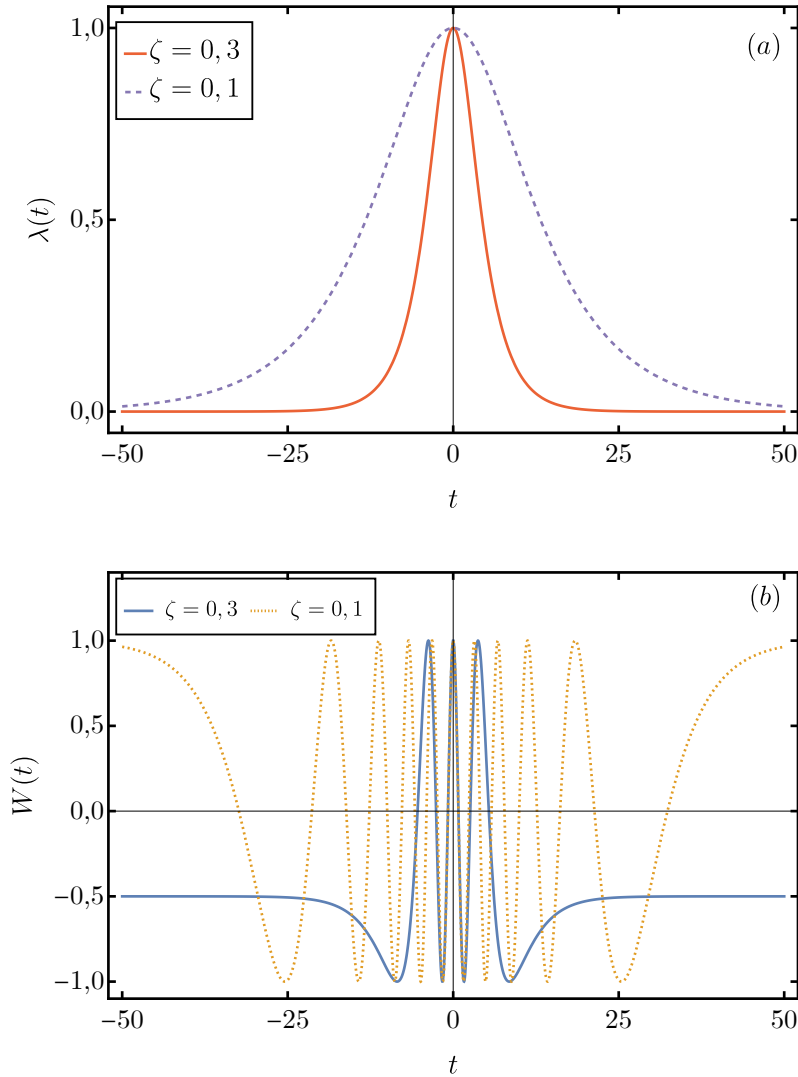
Fonte: O autor.

o colapso, pois o acoplamento se anula antes que isso ocorra. Na Fig.26(b), observa-se que a interação é interrompida nas proximidades do mínimo da VNE, resultando em um grau de emaranhamento relativamente baixo.

4.3 UM ÁTOMO SE MOVENDO EM UMA CAVIDADE NÃO RESFRIADA

Retornemos ao caso do movimento atômico (subseção 4.2.1). Nas referências citadas e nos gráficos apresentados, a evolução temporal da inversão de população é formulada a partir dos estados número e coerente da cavidade. Joshi e Xiao (153) estudaram esse acoplamento

Figura 24 – Em (a) representamos o acoplamento modulado pela secante hiperbólica, Eq. (4.22), para $\zeta = 0,3$ (linha sólida laranja) e $\zeta = 0,1$ (linha tracejada roxa). Sequencialmente, em (b), apresentamos a inversão de população resultante quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, Eq. (4.24), adotando $\zeta = 0,3$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,1$ (linha pontilhada amarela). O parâmetro escolhido foi $\lambda_0 = 1$. Tempos negativos foram utilizados para simular o aumento a queda no parâmetro de acoplamento.

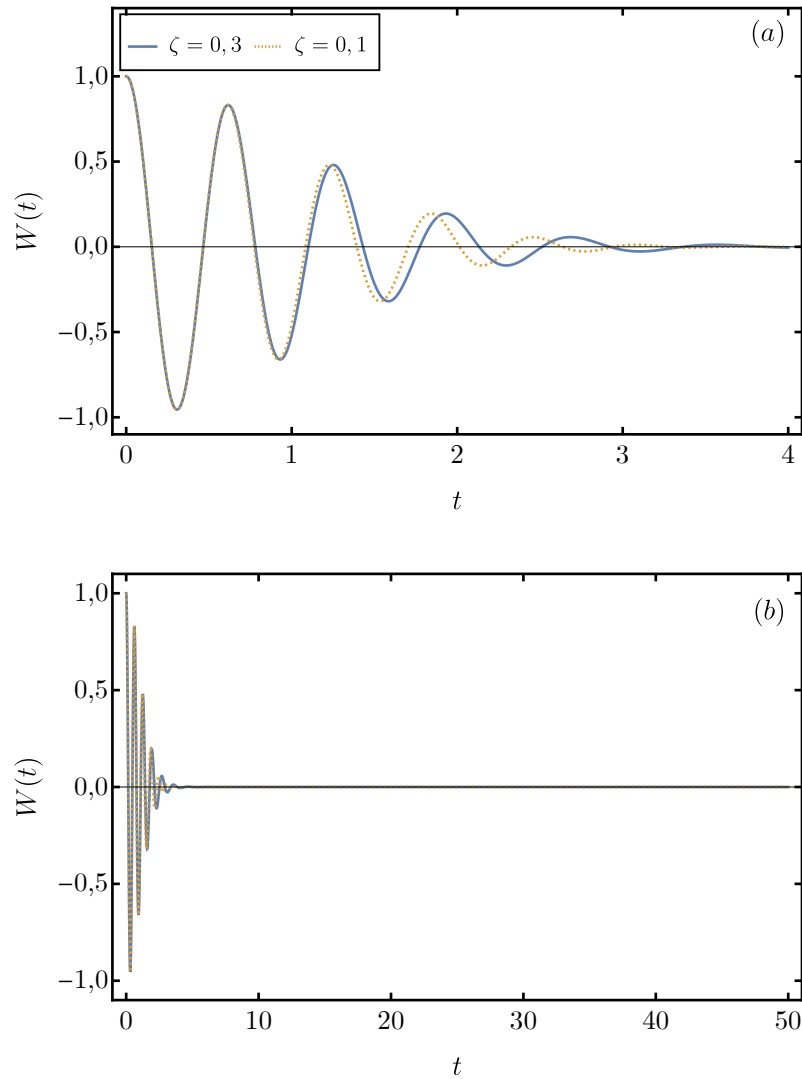


Fonte: Adaptada de (60).

considerando o campo em estado térmico, mas seu foco não estava na evolução temporal inversão de população. Adicionalmente, Fang (154) sugeriu que uma periodicidade seria encontrada, mesmo com o campo inicialmente no estado térmico, mas não estudou propriamente a situação física. Yan também estudou esse contexto, mas considerando uma generalização do modelo JC e com foco na morte súbita do emaranhamento (156).

Nesta seção, nos propomos estudar especificamente esse caso: um TLS com acoplamento modulado por uma função senoidal, em uma cavidade inicialmente no estado térmico, com o

Figura 25 – Apresentamos a inversão de população resultante do acoplamento modulado pela secante hiperbólica, Eq. (4.24), empregando $\lambda_0 = 1$ e com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Adotamos $\zeta = 0,3$ (linha sólida azul) e $\zeta = 0,1$ (linha pontilhada amarela). Em (a) temos um intervalo de tempo menor, enquanto em (b) analisamos um recorte maior do comportamento da inversão de população.

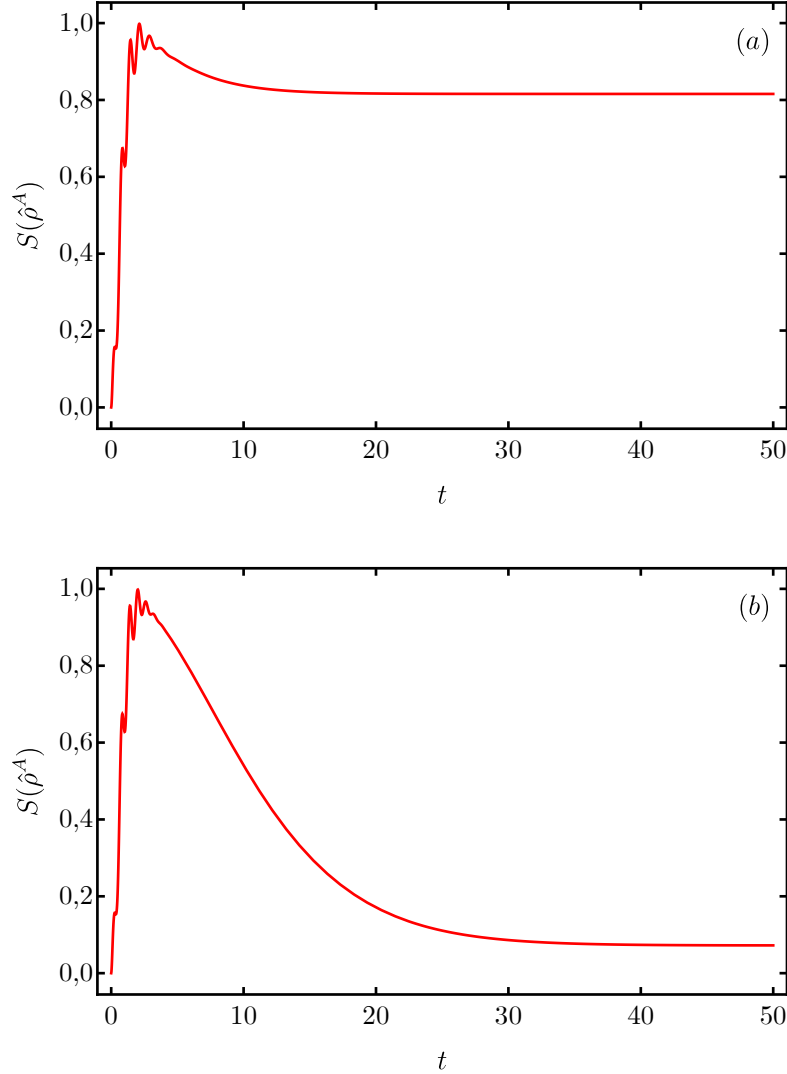


Fonte: Adaptada de (60).

enfoque nos efeitos resultantes nas RO. Fisicamente, podemos interpretar esse cenário como o de um átomo se movendo em uma cavidade não resfriada totalmente, possuindo fótons térmicos (22). No âmbito do modelo JC, o caso da luz térmica foi estudado na literatura sob diferentes perspectivas (21,22,131,153). No contexto de correlações quânticas, Azuma (157) argumenta que o estudo do estado térmico pode ser importante no futuro, como uma fonte de emaranhamento.

Nesse sentido, começemos a análise sob a perspectiva da estrutura do modo do campo, utilizando o acoplamento modulado pela Eq. (4.15). Utilizando as Eqs. (4.15), (4.17) e (2.77),

Figura 26 – Apresentamos a VNE considerando o acoplamento modulado pela secante hiperbólica, empregando $\lambda_0 = 1$, com a cavidade inicialmente no estado coerente, com o número médio de fótons $\langle n \rangle = 25$. Em (a), adotamos $\zeta = 0,3$ e, em (b), $\zeta = 0,1$.



Fonte: O autor.

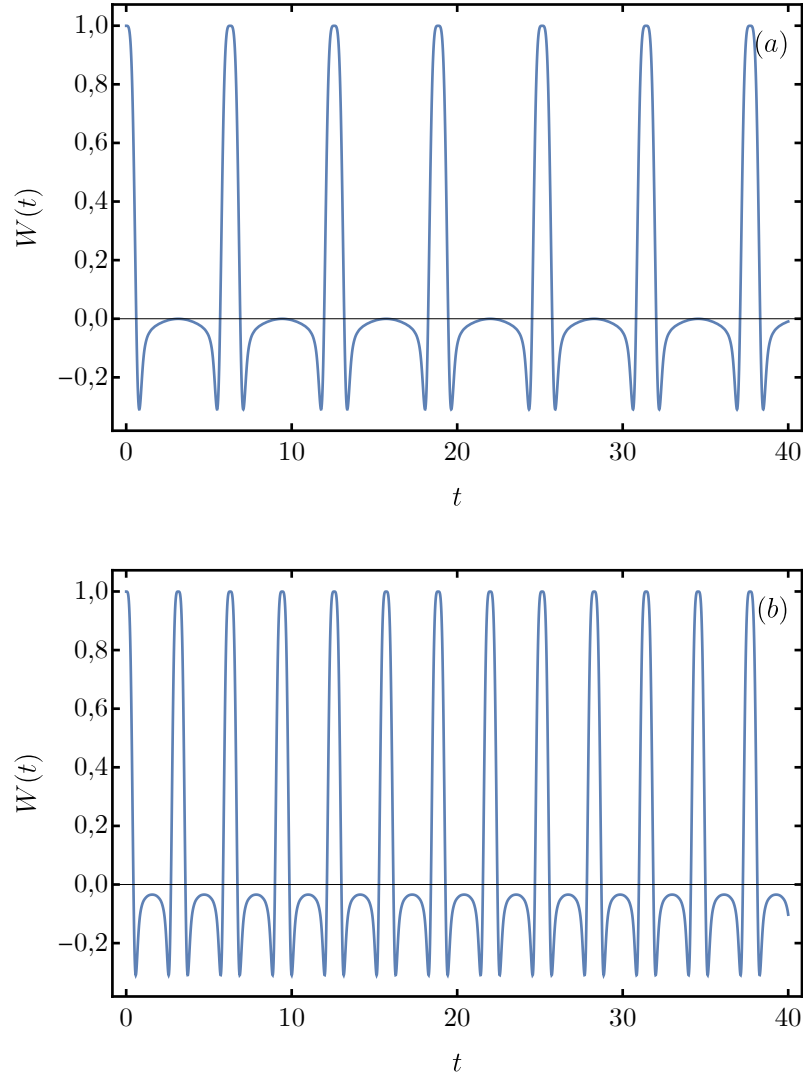
podemos escrever a inversão de população nesse caso como

$$W(t) = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n \cos \left\{ \frac{\xi_n}{m\zeta} [1 - \cos(m\zeta t)] \right\}, \quad (4.25)$$

cujo comportamento está apresentado na Fig. 27. Comparando com a Fig. 14, torna-se evidente que o comportamento errático observado anteriormente é dominado pela periodicidade do acoplamento. Isso é semelhante ao caso da cavidade inicialmente coerente, Fig. 19, onde uma frequência bem definida é observada. Outro ponto de convergência é que o aumento do número m resulta em uma diminuição no período das RO.

Encerramos este capítulo com a Tabela 2, que apresenta um panorama das dependências temporais consideradas em nosso estudo, frisando a importância da análise das propriedades do

Figura 27 – Inversão de população, Eq. (4.25), para um estado inicial térmico e um átomo que se move. Consideramos um número médio de fótons de $\langle n \rangle = 25$ e adotamos $\zeta = \lambda_0 = 1$. Em (a), utilizamos $m = 1$, enquanto em (b) empregamos $m = 2$.



Fonte: O autor.

átomo e das medidas de emaranhamento para a compreensão da dinâmica quântica no modelo de JC.

Tabela 2 – Dependências temporais no acoplamento. Na dependência temporal senoidal, adotamos $\zeta = \pi v/L$.

Acoplamento	Referência	Expressão	Superfície de acoplamento
Senoidal	Schlicher (142)	$\lambda_0 \sin(m\zeta t)$	$[1 - \cos(m\zeta t)] / (m\zeta)$
Linear	Joshi e Lawande (125)	$\lambda_0 \zeta t$	$\lambda_0 \zeta t^2 / 2$
Secante hiperbólica	Dasgupta (60)	$\lambda_0 \operatorname{sech}(\zeta t)$	$\lambda_0 / \zeta \operatorname{tg}^{-1}[\sinh(\zeta t)]$

Fonte: O autor.

5 ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO

Como constatamos no capítulo anterior, uma dependência temporal no parâmetro de acoplamento altera o comportamento das RO. É natural se perguntar se existe um meio de encontrar o parâmetro de acoplamento para uma requerida inversão de população arbitrária. De certa maneira, a Eq. (4.11) desempenha esse papel: sabendo o argumento do cosseno, podemos deduzir uma expressão para o acoplamento. No entanto, suponha que a inversão de população desejada não possa ser expressa na forma da Eq. (4.11); como proceder para induzir tal inversão de população nesse cenário? A resposta para esse problema é encontrada no método que denominamos de Abordagem do Problema Inverso (IPA), introduzida por Yang *et al.* (53). Na seção 5.1 deste capítulo, obtemos a fórmula que sintetiza a IPA e a aplicamos em dois exemplos. No contexto da Computação Quântica, o estudo dessa técnica se justifica pelas mesmas razões que motivam a investigação dos acoplamentos com dependência temporal: a busca pelo controle do estado atômico.

No entanto, neste trabalho apresentamos um uso diferente para a IPA, uma investigação física, de natureza heurística. Recentemente, Uhdre *et al.* (48) apresentaram o modelo κ -JC, no contexto da álgebra de Poincaré-Hopf κ -deformada. Na seção 5.2, apresentaremos a inversão de população do modelo κ -JC no caso ressonante, e empregamos a IPA para deduzir qual o parâmetro de acoplamento que a causa em um modelo JC não deformado. Esse fato é relevante, pois pode permitir uma interpretação da deformação quântica no modelo κ -JC, viabilizando uma possível verificação experimental em um contexto onde o acoplamento pode ser ajustado com precisão. Como a deformação κ é frequentemente associada à gravidade quântica, a realização de um teste experimental sobre essas deformações pode abrir caminho para investigações inéditas nesse domínio (52, 56).

Contudo, devido à forma como a IPA foi originalmente formulada, obtemos a inversão de população desejada considerando a cavidade no estado de vácuo em $t = 0$. Sendo assim, na seção 5.3, generalizamos a IPA para uma distribuição de estados iniciais da cavidade e derivamos um acoplamento que induz a inversão de população do modelo κ -JC em um sistema JC não deformado, com o campo estando inicialmente em um estado coerente. Isso favorece uma compreensão mais clara da conexão entre a deformação quântica e a dependência temporal no acoplamento.

É importante destacar que tanto a IPA quanto a GIPA apresentam suas particularidades. O fato de considerarmos múltiplas inversões de população e acoplamentos de diferentes naturezas torna inviável a utilização da exata mesma notação dos capítulos anteriores. Assim, este capítulo adotará uma abordagem ligeiramente distinta, buscando introduzir as mudanças de forma gradativa e apontando, com clareza, os trechos em que elas se mostram mais significativas.

5.1 FÓRMULA DA ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO

Nesta seção, deduziremos a fórmula associada à IPA (53)¹. Adotemos o hamiltoniano na representação de Dirac $\hat{V}(t)$, sob a condição de ressonância. Contudo, não assumiremos que o parâmetro de acoplamento é real, por razões que ficarão claras no decorrer da derivação. Sendo assim, $\hat{V}(t)$ é dado por

$$\hat{V}(t) = \lambda^*(t)\hat{\sigma}_+\hat{a} + \lambda(t)\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger. \quad (5.1)$$

Ademais, partimos do estado inicial, $|\Psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, com o TLS no estado excitado e a cavidade no estado de vácuo. Sendo assim, o estado do sistema para um instante t é descrito por

$$|\Psi(t)\rangle = C_e(t)|e, 0\rangle + C_g(t)|g, 1\rangle, \quad (5.2)$$

a partir do qual concluímos que dinâmica está restrita aos estados $|e, 0\rangle \leftrightarrow |g, 1\rangle$, com as amplitudes de probabilidade expressando a evolução temporal do estado. Ao aplicarmos a Equação de Schrödinger, Eq. (3.52), sobre o estado, Eq. (5.2), utilizando o hamiltoniano, Eq. (5.1), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{C}_e(t) = -iC_g(t)\lambda^*(t), \\ \dot{C}_g(t) = -iC_e(t)\lambda(t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Neste caso, a inversão de população é determinada por

$$W(t) = |C_e(t)|^2 - |C_g(t)|^2, \quad (5.4)$$

com as devidas probabilidades obedecendo à condição de normalização,

$$1 = |C_e(t)|^2 + |C_g(t)|^2. \quad (5.5)$$

Utilizando as Eqs. (5.4) e (5.5), podemos escrever os módulos das amplitudes de probabilidade como

$$\begin{aligned} |C_e(t)| &= \sqrt{\frac{1+W(t)}{2}}, \\ |C_g(t)| &= \sqrt{\frac{1-W(t)}{2}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

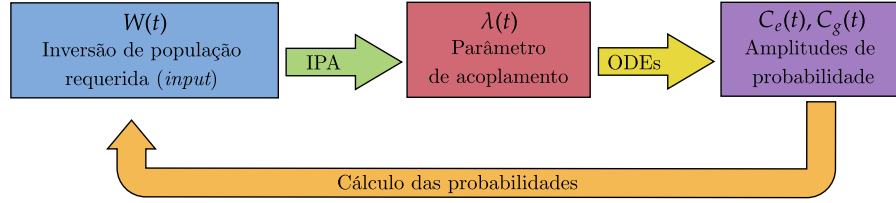
As equações acima não restringem a fase dos coeficientes, então fazemos uma escolha conveniente para nosso estudo, de maneira que expressamos as amplitudes como

$$C_e(t) = \sqrt{\frac{1+W(t)}{2}}e^{i\theta(t)}, \quad (5.7)$$

$$C_g(t) = \sqrt{\frac{1-W(t)}{2}}. \quad (5.8)$$

¹ Ao se considerar a condição de ressonância, essa modulação poderia, de forma equivalente, ser tratada por meio das equações ópticas de Bloch (30, 142). Contudo, optamos por fundamentar nosso trabalho no artigo referenciado, uma vez que ele aborda de maneira singular a questão central desta investigação: a obtenção de inversão de população por meio de um acoplamento dependente do tempo.

Figura 28 – Esquema representando o funcionamento da IPA. Inserimos a inversão de população requerida, $W(t)$, na Eq. (5.11), obtendo $\lambda(t)$. Ao resolvermos o sistema de equações diferenciais (ODEs) com o parâmetro de acoplamento obtido, calculamos as probabilidades e $W(t)$.



Fonte: O autor.

Se derivarmos a Eq. (5.8) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{C}_g(t) = -\frac{\dot{W}(t)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-W(t)}}. \quad (5.9)$$

Ao inserirmos $\dot{C}_g(t)$, Eq. (5.9), e $C_e(t)$, Eq. (5.7), na segunda equação do sistema, Eq. (5.3), obtemos uma expressão para o parâmetro de acoplamento em função da inversão de população, tal que

$$\lambda(t) = -i \frac{\dot{W}(t)}{2\sqrt{1-W^2(t)}} e^{-i\theta(t)}, \quad (5.10)$$

a partir da qual constatamos que $\lambda(t)$ depende da fase $\theta(t)$. Assumindo a fase como uma constante com o valor conveniente de $\theta(t) = \pi/2$, sendo equivalente a preparar o estado excitado com uma fase $\pi/2$ e o estado fundamental com uma fase 0. Portanto, o parâmetro de acoplamento é descrito por

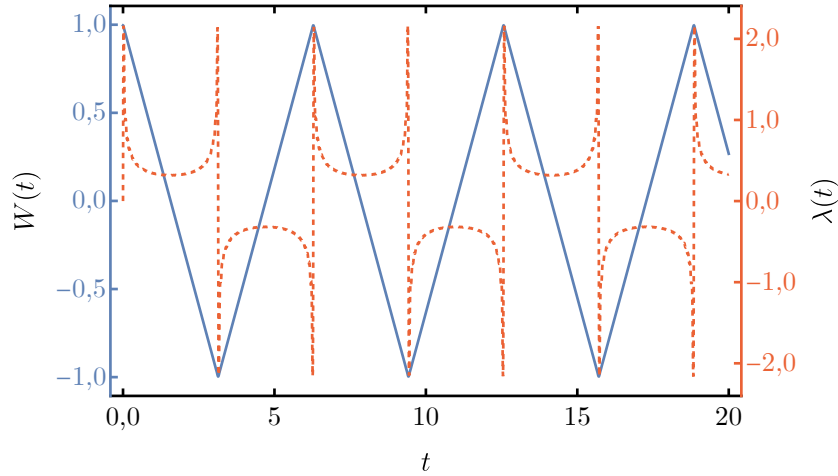
$$\lambda(t) = -\frac{\dot{W}(t)}{2\sqrt{1-W^2(t)}}, \quad (5.11)$$

que é a fórmula associada à IPA. Inserindo, como *input*, uma dada inversão de população na Eq. (5.11), obtemos um determinado parâmetro de acoplamento. Resolvendo o sistema de equações diferenciais, Eq. (5.3), utilizando o parâmetro de acoplamento obtido através da IPA, obtemos os coeficientes que resultam na inversão de população empregada como *input*. Frisamos que as condições iniciais da IPA devem ser obedecidas ao determinarmos a solução do sistema de equações diferenciais – i.e. o átomo deve estar no estado excitado e o campo no estado de vácuo em $t = 0$. Na Fig. 28, representamos esquematicamente o funcionamento da IPA.

Se empregarmos as inversões de população obtidas no capítulo anterior como *input* na Eq. (5.11), obtemos os respectivos parâmetros de acoplamento. No entanto, como mencionamos, o maior mérito da IPA diz respeito a inversões de população que não podem ser escritas no mesmo molde da Eq. (4.11). Sendo assim, apliquemos o método para responder à pergunta: “qual dependência temporal o parâmetro de acoplamento deve possuir para que a inversão de população assuma a forma de ondas triangulares?” Nesse caso, temos (158)

$$W(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\ell\right) \sin\left[\ell\left(\zeta t + \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad (5.12)$$

Figura 29 – A inversão de população, Eq. (5.12), na forma de ondas triangulares (linha sólida azul), empregando $\zeta = 1$, e o parâmetro de acoplamento que causa esse comportamento (linha tracejada laranja), com duas escalas verticais para uma melhor visualização da relação entre ambas quantidades.



Fonte: Adaptada de (53).

cujos comportamentos estão representados na Fig. 29, empregando $\zeta = 1$. Ao aplicarmos essa expressão na Eq. (5.11), obtemos um acoplamento que, se utilizado para resolver as ODEs, Eq. (5.3), resulta na inversão de população utilizada como *input*. Na Fig. 29, apresentamos o comportamento desse acoplamento.

Como discutimos no capítulo 3, um aspecto emblemático do modelo JC são os colapsos e renascimentos das RO, quando a cavidade está inicialmente no estado coerente. A existência da IPA leva à pergunta: “é possível obter esse fenômeno, com a cavidade inicialmente *no vácuo*?” Embora pareça uma questão lúdica, o estudo desse caso será útil no decorrer deste capítulo.

Denominaremos a inversão de população, descrita pela Eq. (3.72), como $W_\alpha(t)$. Efetuando a substituição $\lambda \rightarrow \lambda_0$ e utilizando o parâmetro ξ_n , Eq. (4.18), podemos reescrevê-la como

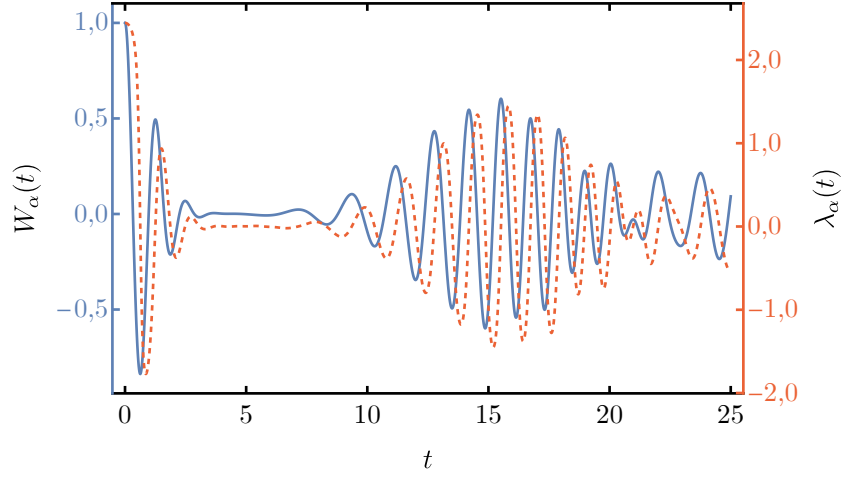
$$W_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cos(\xi_n t). \quad (5.13)$$

É importante destacar que a soma em n , *quando aplicada na IPA*, tem um significado numérico, e não físico. Da mesma maneira, $\langle n \rangle$ é somente uma característica do comportamento que desejamos mimetizar.

Utilizando a IPA, obtemos o parâmetro de acoplamento² $\lambda_\alpha(t)$. De maneira análoga à Fig. 29, apresentamos $W_\alpha(t)$ e $\lambda_\alpha(t)$ na Fig. 30. Para $W_\alpha(t)$, utilizamos os parâmetros $\langle n \rangle = 5$ e $\lambda_0 = 1$. Observa-se que o acoplamento reproduz o comportamento de $W_\alpha(t)$, “herdando” o padrão de colapsos e renascimentos. Isto posto, chegamos à conclusão que é possível, sim, obter

² A notação indica que esse parâmetro *causa* o comportamento de $W_\alpha(t)$, em uma cavidade inicialmente no vácuo, devido às limitações do IPA.

Figura 30 – A inversão de população $W_\alpha(t)$ (linha sólida azul) e o parâmetro de acoplamento $\lambda_\alpha(t)$ (linha tracejada laranja) que a causa, com duas escalas verticais. Para $W_\alpha(t)$, utilizamos os parâmetros $\langle n \rangle = 5$ e $\lambda_0 = 1$.



Fonte: O autor.

os colapsos e renascimentos das RO, mesmo com a cavidade inicialmente no estado de vácuo. Essa resposta, por sua vez, leva à pergunta que a próxima seção busca responder.

5.2 DEFORMAÇÕES QUÂNTICAS

A transição da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica introduz a não comutatividade nas estruturas algébricas (52). O espaço de fase canônico da Mecânica Quântica padrão é descrito pela álgebra de Heisenberg,

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{jk}, j = 1, 2, 3, \quad (5.14)$$

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0. \quad (5.15)$$

A Eq. (5.14) resulta no Princípio de Incerteza de Heisenberg (159), que impõe um limite à precisão das medições simultâneas de posição e momentum. Contudo, a Eq. (5.15) aponta que é possível determinar separadamente as coordenadas de posição e momentum, refletindo a presença de uma estrutura geométrica clássica – onde as coordenadas espaciais e temporais comutam – subjacente na Mecânica Quântica.

Na década de 1930, Heisenberg propôs a não-comutatividade nas coordenadas da posição (160), o que levaria a uma nova relação de incerteza. No entanto, a aplicação dessa ideia a problemas mais concretos foi realizada por Snyder (161). Nesse trabalho, o autor conclui que a quantização das coordenadas do espaço-tempo, munidos com uma unidade mínima de comprimento, conduz à não-comutatividade entre os operadores associados às coordenadas.

Em teorias relativísticas, a álgebra de Poincaré é empregada para descrever os movimentos no espaço-tempo plano, conhecido como espaço de Minkowski. As relações dessa estrutura são

$$\begin{aligned}
[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] &= 0, \\
[\hat{M}_i, \hat{P}_\mu] &= (1 - \delta_{0\mu}) i\epsilon_{ijk} \hat{P}_k, \\
[\hat{L}_i, \hat{P}_j] &= i\delta_{ij} \hat{P}_0, \\
[\hat{L}_i, \hat{P}_0] &= i\hat{P}_i, \\
[\hat{M}_i, \hat{M}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{M}_k, \\
[\hat{M}_i, \hat{L}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k, \\
[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= -i\epsilon_{ijk} \hat{M}_k,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

sendo $\hat{M}_i$ e $\hat{P}_\mu$ os geradores de rotação e quadri-momento, respectivamente. Por outro lado, $\hat{L}_i$ está associado a um *boost* no referencial³. Em termos mais familiares, $\hat{P}_i$ são as componentes do operador momentum linear, $\hat{P}_0$ é o hamiltoniano, $\hat{M}_i$ são as componentes do momentum angular e $\hat{L}_i$ são transformações de Lorentz (162). As relações de comutação, Eq. (5.16), decorrem dos elementos do Grupo de Poincaré, que representa a simetria no que diz respeito à translação, rotação e mudanças de referencial. Em virtude dessa característica, na QFT, partículas elementares se transformam conforme representações unitárias irredutíveis do Grupo de Poincaré (163). Portanto, a álgebra de Poincaré desempenha um papel fundamental no panorama moderno da Física (164).

A álgebra de κ -Poincaré-Hopf, por sua vez, é uma *deformação* da álgebra de Poincaré. Essa perspectiva teve seu início nos anos 90 (49–51), e apresenta um cenário alternativo para o estudo da Mecânica Quântica, relativística ou não (165–167). Como a álgebra de Poincaré está associada ao espaço-tempo plano, supõe-se que essa deformação está relacionada à gravidade quântica (52, 56). Além disso, o parâmetro de deformação κ possui dimensão de massa, o que corrobora essa interpretação. Neste cenário, as relações de comutação se modificam para

$$\begin{aligned}
[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] &= 0, \\
[\hat{M}_i, \hat{P}_\mu] &= (1 - \delta_{0\mu}) i\epsilon_{ijk} \hat{P}_k \\
[\hat{L}_i, \hat{P}_\mu] &= i [\hat{P}_i]^{\delta_{0\mu}} \left[\delta_{ij} \varepsilon^{-1} \sinh \left(\varepsilon \hat{P}_0 \right) \right]^{(1-\delta_{0\mu})}, \\
[\hat{M}_i, \hat{M}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{M}_k, \\
[\hat{M}_i, \hat{L}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k, \\
[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= -i\epsilon_{ijk} \left[\hat{M}_k \cosh \left(\varepsilon \hat{P}_0 \right) - \frac{\varepsilon^2}{4} \hat{P}_k \hat{P}_l \hat{M}_l \right],
\end{aligned} \tag{5.17}$$

³ Os índices latinos varrem os números (1, 2, 3), enquanto os índices gregos abrangem os números (0, 1, 2, 3).

com ε definido por⁴

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa}. \quad (5.18)$$

Recentemente, Uhdre *et al.* (48) utilizaram a álgebra de Poincaré-Hopf κ -deformada para apresentar simultaneamente os modelos κ -deformado JC (κ -JC) e Anti-JC, empregando um mapeamento introduzido por Bermudez *et al.* com o Oscilador de Dirac⁵ (28).

No trabalho citado, os autores determinaram os valores esperados de vários observáveis para o modelo κ -JC considerando um acoplamento constante. Curiosamente, se o estado inicial do modo da cavidade for um estado número, os valores esperados no modelo deformado não apresentam distinção em relação ao modelo não deformado. No entanto, para um estado inicial coerente do campo, surge uma diferença no comportamento dos observáveis. Para os propósitos deste trabalho, o valor esperado do spin na direção z do modelo κ -JC é de grande interesse, uma vez que ele está diretamente relacionado à inversão de população. Assim, assumindo um estado inicial coerente do modo da cavidade no cenário κ -JC e um estado excitado do átomo, o valor esperado do spin na direção z é fornecido em (48), sendo descrito por

$$\langle S_z(t) \rangle_\alpha^\epsilon = \frac{1}{2} - \sum_n \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \mathcal{S}_n(t) + \epsilon \sum_n \frac{\langle n \rangle^{n+1} e^{-\langle n \rangle}}{n!} [\mathcal{S}_n(t) - \mathcal{S}_{n+2}(t)]. \quad (5.19)$$

sendo $\epsilon = mc^2\varepsilon/2$ um parâmetro de deformação adimensional⁶ e

$$\mathcal{S}_n(t) = \frac{4\lambda_0^2(n+1)}{\Delta^2 + 4\lambda_0^2(n+1)} \sin^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda_0^2(n+1)} t \right]. \quad (5.20)$$

A forma como apresentamos a Eq. (5.20) difere da Eq. (52) da referência (48), pois desejamos expressá-la usando uma notação exclusiva do modelo JC. A inversão de população é o dobro do valor esperado do spin na direção z , de modo que, para o caso de ressonância, a inversão de população do modelo κ -JC é dada por

$$W_\alpha^\epsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \{ \cos(\xi_n t) + \epsilon \langle n \rangle [\cos(\xi_{n+2} t) - \cos(\xi_n t)] \}, \quad (5.21)$$

a partir da qual percebemos que a deformação se manifesta no último par de termos. Constatamos que, se $\epsilon = 0$, recuperamos o caso não deformado, Eq. (5.4).

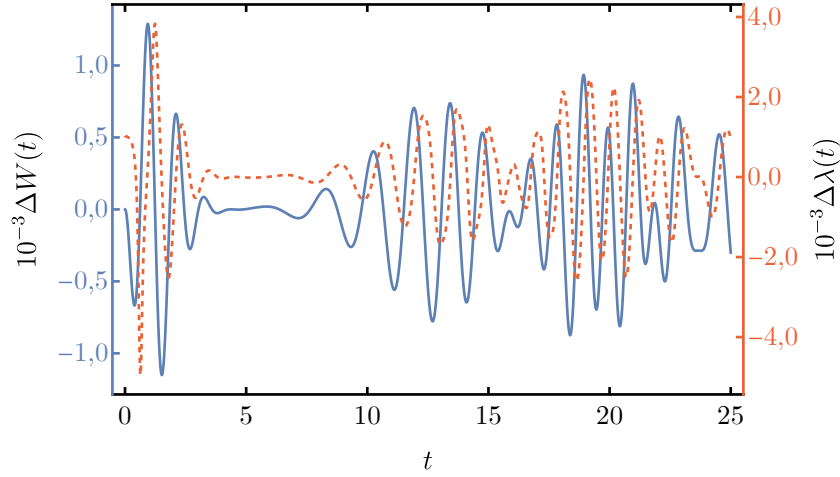
Por outro lado, utilizando a IPA, podemos reproduzir $W_\alpha^\epsilon(t)$, em um modelo JC não deformado, empregando o parâmetro de acoplamento $\lambda_\alpha^\epsilon(t)$, obtido a partir da substituição da Eq. (5.21) na Eq. (5.11), assumindo o modo da cavidade no estado de vácuo e o TLS no estado excitado em $t = 0$. Este é um resultado interessante, pois o fator ϵ se torna um número no acoplamento, e os efeitos da deformação κ na inversão de população podem ser reproduzidos

⁴ Mais precisamente, $\varepsilon = \lim_{R \rightarrow \infty} [R \ln(q)]$, sendo R a curvatura de de Sitter e q um parâmetro de deformação real (48).

⁵ O Oscilador de Dirac (27) é um sistema relativístico que pode ser mapeado de maneira exata no modelo JC quando consideramos $(2+1)$ (28), ou $(1+1)$ (168), dimensões.

⁶ Em notação relativística, é comum adotar $c = 1$, de modo que a unidade de mc^2 torna-se equivalente à de m no sistema utilizado.

Figura 31 – Apresentamos a diferença entre a inversão de população $\Delta W(t)$ (linha sólida azul), entre os modelos κ -JC e JC, utilizando $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$, $\langle n \rangle = 5$ e $\lambda_0 = 1$. Simultaneamente, destacamos a diferença nos parâmetros de acoplamento $\Delta\lambda(t)$ (linha tracejada laranja), que causam as respectivas inversões de população em uma cavidade inicialmente no estado de vácuo.



Fonte: O autor.

com um ajuste cuidadoso desse parâmetro. Além disso, as correções provenientes da deformação estão além da observabilidade nos experimentos atuais (52). A possibilidade de emular os efeitos da deformação e, em princípio, da gravidade quântica, por meio de um acoplamento dependente do tempo, pode abrir caminho para tais observações.

Podemos observar os efeitos da deformação no comportamento da inversão de população comparando os resultados para os modelos JC e κ -JC. Com esse objetivo, definimos

$$\Delta W(t) = W_{\alpha}^{\epsilon}(t) - W_{\alpha}(t), \quad (5.22)$$

$$\Delta\lambda(t) = \lambda_{\alpha}^{\epsilon}(t) - \lambda_{\alpha}(t), \quad (5.23)$$

que medem as diferenças entre a inversão de população κ -deformada e não deformada, e entre os parâmetros de acoplamento obtidos através da IPA, respectivamente. Na Fig. 31, utilizando $\epsilon = 5 \times 10^{-4}$, que é o limite superior para o parâmetro de deformação⁷ (166, 167), apresentamos essas diferenças. Observamos que, nos intervalos onde há uma diferença no parâmetro de acoplamento, também existe uma diferença na inversão de população.

5.3 GENERALIZAÇÃO DA ABORDAGEM DO PROBLEMA INVERSO

Na seção anterior, mostramos que os efeitos da deformação quântica podem ser simulados no modelo JC não deformado, ao empregarmos o acoplamento dependente do tempo $\lambda_{\alpha}^{\epsilon}(t)$,

⁷ Esse limite superior é derivado a partir do momento magnético anômalo do elétron para sistemas correlatos ao oscilador de Dirac. Para mais detalhes, consultar (166, 167).

assumindo que o modo da cavidade está inicialmente no estado de vácuo. No entanto, é relevante investigar um acoplamento capaz de gerar a mesma inversão de população no modelo JC, mas com o modo da cavidade inicialmente em um estado coerente. Com isso em mente, estabelecemos uma conexão entre o modelo TDJC não deformado e o modelo κ -JC por meio de um acoplamento, utilizando o mesmo estado inicial em ambos os modelos. Para abordar isso, introduzimos uma generalização da IPA (GIPA), que abrange inversões de população oriundas de distribuições de estados número na cavidade (57). Até onde sabemos, não há, na literatura, um método equivalente. Neste contexto, nós designaremos o parâmetro de acoplamento neste caso como $\Lambda_n(t)$ para diferenciá-lo dos cenários anteriores.

Quando o estado inicial do sistema é $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, sob a condição de ressonância, as equações diferenciais que resultam da Equação de Schrödinger são

$$\begin{cases} \dot{C}_{e,n}(t) = -i\sqrt{n+1}\Lambda_n^*(t)C_{g,n+1}(t), \\ \dot{C}_{g,n+1}(t) = -i\sqrt{n+1}\Lambda_n(t)C_{e,n}(t), \end{cases}$$

introduzindo a dependência em relação ao modo da cavidade por meio do índice n . Dessa forma, assumindo a fase como $\theta(t) = \pi/2$, a equação que governa o parâmetro de acoplamento é dada por

$$\Lambda_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \frac{-\dot{W}_n(t)}{\sqrt{1 - W_n^2(t)}}, \quad (5.24)$$

que se reduz à Eq. (5.11) para $n = 0$ com a identificação $\Lambda_0(t) \rightarrow \lambda(t)$ e $W_0(t) \rightarrow W(t)$. De fato, a mudança do caso anterior para este é o fator de escala $(n+1)^{-1/2}$, devido à estrutura algébrica do modelo JC. Portanto, utilizando o parâmetro de acoplamento na Eq. (5.24), podemos reproduzir a inversão de população desejada com o campo inicialmente contendo n fótons. É importante mencionar que precisamos assumir que o modo da cavidade foi preparado com n fótons para reproduzir $W_n(t)$ e aplicar o acoplamento $\Lambda_n(t)$.

Consideremos um cenário arbitrário em que há uma cavidade contendo n fótons inicialmente. Para fins didáticos, suponha que nosso objetivo é que o átomo tenha, ao longo do intervalo de tempo considerado, uma probabilidade de estar no estado fundamental que nunca seja maior do que a de estar no estado excitado. Nesse contexto, a inversão de população pode ser expressa como

$$W_n(t) = \cos^2\left(\frac{\xi_n t}{2}\right). \quad (5.25)$$

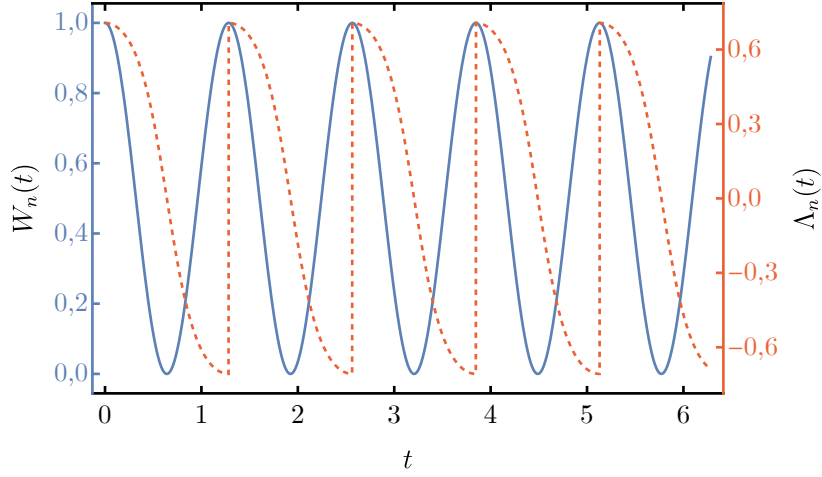
Utilizando essa expressão como *input* na Eq. (5.24), obtemos o parâmetro de acoplamento descrito por:

$$\Lambda_n(t) = \frac{\lambda_0 \sin(\xi_n t)}{2\sqrt{1 - \cos^4\left(\frac{\xi_n t}{2}\right)}}, \quad (5.26)$$

cujo comportamento, juntamente com a inversão de população que provoca, está representado na Fig. 32.

Para um acoplamento prescrito entre o campo e o átomo, vimos que a inversão de população para uma distribuição de estados de número assume a forma da Eq. (3.71) (60,125). Reescrevemo-

Figura 32 – A inversão de população $W_n(t)$ (linha sólida azul) e o parâmetro de acoplamento $\Lambda_n(t)$ (linha tracejada laranja) que a causa em um estado inicial de número do modo da cavidade, adotando $\lambda_0 = 1$ e $n = 5$.



Fonte: O autor.

na considerando a nova notação conforme

$$W_\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\gamma W_n(t). \quad (5.27)$$

O estado inicial do modo da cavidade define P_n^γ e γ representa a distribuição específica de estados utilizada. Por exemplo, para um estado inicial coerente, $P_n^\gamma \rightarrow P_n^\alpha = \exp(-|\alpha|^2)|\alpha|^{2n}/n!$, com a inversão de população, nesse caso, sendo $W_\alpha(t)$, Eq. (5.4). A abordagem proposta aqui foca em $W_n(t)$, em vez de $W_\gamma(t)$, ou seja, precisamos considerar qual inversão de população, quando somada em n e multiplicada por P_n^γ , resulta na inversão de população relacionada à distribuição específica do estado inicial da cavidade. Logo, se a inversão de população desejada é $W_\alpha(t)$, Eq. (5.4), consideramos como *input* $W_n(t) = \cos(\xi_n t)$ e obtemos $\Lambda_n(t) = \lambda_0$. Na Fig. 33, representamos esquematicamente a GIPA, ilustrando sua estrutura e os principais elementos envolvidos em sua definição e funcionamento.

Para exemplificar esse método, consideremos um caso em que a inversão de população desejada seja, convenientemente,

$$W_\chi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^\chi \cos^2\left(\frac{\xi_n}{2}t\right), \quad (5.28)$$

com P_n^χ representando a distribuição de probabilidades do estado térmico, Eq. (2.77). É importante enfatizar que, mesmo que o estado inicial da cavidade seja misto, a Eq. (5.27) ainda é válida (78, 131).

Aplicando a GIPA, com a Eq. (5.25) como *input*, obtemos $\Lambda_n(t)$, Eq. (5.26). Ao resolvermos a equação diferencial munidos de $\Lambda_n(t)$, obtemos as amplitudes de probabilidade que, ao serem ponderadas por P_n^χ , resultam em $W_\chi(t)$, Eq. (5.28). O comportamento da inversão de população

neste caso é ilustrado na Fig. 34, onde observamos que o acoplamento dependente do tempo resulta em um valor positivo para a inversão de população. Além disso, ao compararmos com o caso de acoplamento constante, observamos que a amplitude das RO também diminui.

Contudo, diferente do caso mais direto, onde não lidamos com uma distribuição de probabilidades no modo da cavidade, deve ficar claro que n não é apenas um número prescrito, mas devemos considerar seu papel na somatória sobre n na inversão de população, conforme a Eq. (5.27). Esse aspecto do acoplamento $\Lambda_n(t)$ cria uma dificuldade adicional, pois não podemos fixar um dado n e descrever sua contribuição no comportamento de $W_\chi(t)$.

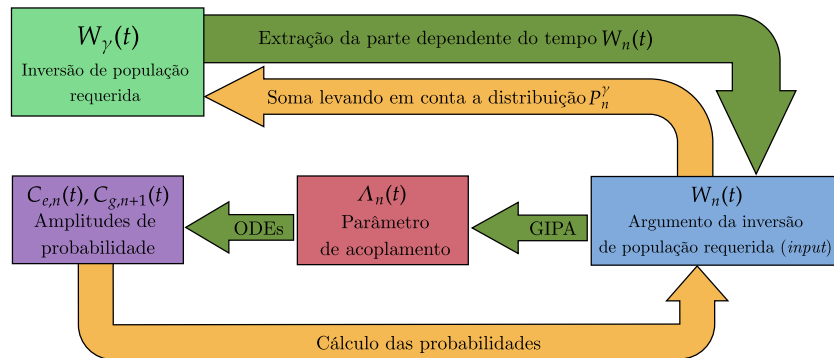
Agora, consideremos o sistema κ -deformado apresentado na seção anterior. Nesse caso, se procurarmos o parâmetro de acoplamento que gera a inversão de população $W_\alpha^\epsilon(t)$, Eq. (5.21), é imperativo inserir na GIPA a parte dependente do tempo no argumento da soma – neste caso, especificamente a parte entre colchetes. Nessa perspectiva, quando o modo da cavidade está inicialmente no estado coerente, o acoplamento dependente do tempo que simula $W_\alpha^\epsilon(t)$ é dado por

$$\Lambda_n^\epsilon(t) = \lambda_0 \frac{\sin(\xi_n t) - \epsilon \langle n \rangle \left[\sin(\xi_n t) - \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} \sin(\xi_{n+2} t) \right]}{\sqrt{1 - \cos^2(\xi_n t) - 2\epsilon \langle n \rangle [\cos(\xi_n t) \cos(\xi_{n+2} t) - \cos^2(\xi_n t)]}}. \quad (5.29)$$

Assim, quando o parâmetro de acoplamento acima é aplicado a uma cavidade inicialmente coerente, com o átomo excitado, obtemos os mesmos efeitos que aqueles causados pela κ -deformação na inversão de população.

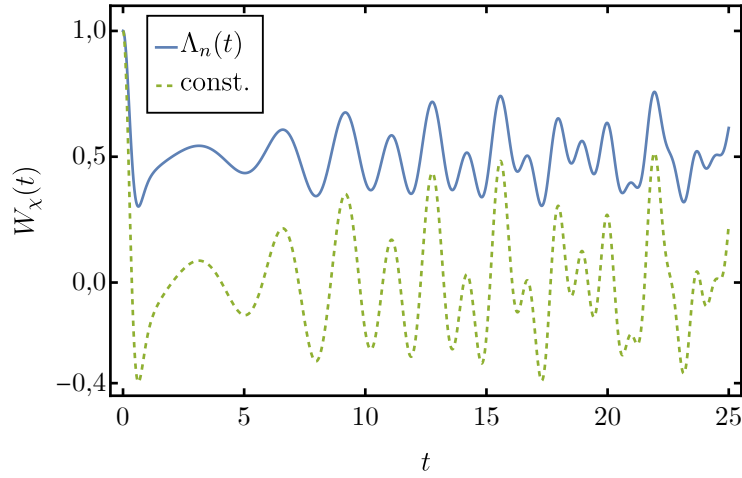
Apesar da complicação envolvendo a dependência em n na expressão do acoplamento, podemos considerar um contexto onde essa abordagem é valiosa. Consideremos um cenário onde um sistema JC é inserido em um espaço-tempo não plano, com o estado inicial $|\Psi(t)\rangle = |e, \alpha\rangle$. Se os efeitos da curvatura na inversão de população puderem ser traduzidos em um acoplamento dependente do tempo similar a $\Lambda_n^\epsilon(t)$, da mesma forma que o movimento do átomo dentro da

Figura 33 – Representação esquemática da GIPA. Iniciamos extraindo $W_n(t)$ do somatório de $W_\gamma(t)$. Sequencialmente, inserimos $W_n(t)$ na Eq. (5.24), obtendo $\Lambda_n(t)$. Ao resolvermos as equações diferenciais com o parâmetro de acoplamento obtido, calculamos as probabilidades e $W_n(t)$. Somando $W_n(t)$, empregando a distribuição P_n^γ , obtemos $W_\gamma(t)$.



Fonte: O autor.

Figura 34 – A inversão de população $W_\chi(t)$ nos cenários de acoplamento constante (linha tracejada verde) e dependente do tempo (linha sólida azul), utilizando $\lambda_0 = 1$ e $\langle n \rangle = 5$.



Fonte: O autor.

cavidade é modelado através de um acoplamento senoidal (61), a relação entre a deformação κ e a gravidade quântica se tornaria mais clara.

Em síntese, a reprodução dos efeitos de deformação quântica por meio de um parâmetro de acoplamento dependente do tempo no modelo JC não deformado sugere que, eventualmente, será possível realizar simulações investigando outros aspectos do modelo κ -JC. A observação das oscilações macroscópicas de Rabi em *junções de Josephson* (169, 170) indica que, eventualmente, pode ser possível alcançar um controle desse fator em sistemas correlacionados ao modelo JC. Nesse sentido, o GIPA apresentado aqui é notável, pois o gerenciamento das transições do TLS desempenha um papel significativo no Controle Quântico e nas aplicações de Computação Quântica (34, 55). Além disso, considerando a relação entre o modelo JC e sistemas relativísticos (28, 29, 171), é razoável sugerir que o procedimento apresentado aqui poderia levar a simulações frutíferas dos efeitos de deformação quântica também nesses sistemas relativísticos.

6 CONCLUSÕES

O modelo JC foi introduzido em 1963, como uma descrição para a interação entre radiação e matéria no maser. Neste trabalho, investigamos esse sistema e analisamos as consequências de um parâmetro de acoplamento entre luz e matéria com dependência temporal. Exploramos as implicações dessa dependência temporal na inversão de população e no emaranhamento.

Iniciamos com dois capítulos introdutórios, buscando tornar esta dissertação didaticamente acessível. No capítulo 2, realizamos uma retomada de conceitos básicos da Óptica Quântica. Sequencialmente, no capítulo 3, revisamos as características fundamentais do modelo JC, focando em aspectos de sua dinâmica.

A inserção de dependências temporais no parâmetro de acoplamento ocorreu no capítulo 4. Essa generalização simula mudanças físicas do maser, como efeitos transientes no acionamento e desligamento do sistema, ou o movimento atômico. Partindo de casos presentes na bibliografia concernente ao tema, analisamos a sensibilidade da inversão de população e da VNE em relação a diversas opções de modulação. Por exemplo, observamos que, ao se empregar uma modulação linear do acoplamento, tanto a inversão de população quanto a VNE exibem comportamentos distintos em comparação ao caso do acoplamento constante, potencialmente com o atraso ou aceleração das RO. Por outro lado, ao utilizarmos uma dependência temporal do tipo secante hiperbólica, verificamos que o sistema pode evoluir para valores assintóticos. No caso específico da modulação senoidal, percebemos um domínio da periodicidade, mesmo considerando um estado inicial coerente da cavidade. Ampliamos nossa análise para incluir o cenário de um átomo em movimento dentro de uma cavidade que não foi completamente resfriada. Matematicamente, essa situação se traduz em uma dependência temporal senoidal e um estado inicial térmico da cavidade. Apesar das maiores flutuações quânticas associadas ao estado térmico, a inversão de população ainda apresentou comportamento periódico.

No capítulo 5, realizamos um estudo acerca da IPA. Apresentamos sua fórmula, Eq. (5.11), e a aplicamos em alguns exemplos. Particularmente, a empregamos para emular os efeitos da κ -deformação em um modelo JC não deformado. Nesse sentido, generalizamos a IPA para incluir estados da cavidade que apresentam uma distribuição de probabilidades em $t = 0$. Esse estudo heurístico pode levar a simulações de deformações quânticas em cenários onde o acoplamento pode ser ajustado com precisão.

Finalizamos enfatizando que o estudo desses acoplamentos é importante no intuito de gerenciar o estado atômico, um aspecto especialmente relevante no Controle Quântico (34, 55). Nesse sentido, a observação das RO macroscópicas em circuitos (169, 170) indica que, eventualmente, pode ser possível alcançar um controle desse parâmetro em sistemas correlacionados.

REFERÊNCIAS

- 1 JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, jan. 1963. ISSN 0018-9219. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/1443594>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 2 MESCHEDE, D.; WALTHER, H.; MÜLLER, G. One-Atom Maser. *Physical Review Letters*, v. 54, n. 6, p. 551–554, fev. 1985. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.551>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 3 REMPE, G.; WALTHER, H.; KLEIN, N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Physical Review Letters*, v. 58, n. 4, p. 353–356, 1987. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.353>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 4 BRUNE, M. et al. Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1800–1803, mar 1996. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 5 LARSON, J. et al. The Jaynes–Cummings model: 60 years and still counting. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 41, n. 8, p. JCM1–JCM4, ago. 2024. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-41-8-JCM1>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 6 DE BERNARDIS, D.; MERCURIO, A.; DE LIBERATO, S. Tutorial on nonperturbative cavity quantum electrodynamics: is the Jaynes–Cummings model still relevant? *Journal of the Optical Society of America B*, v. 41, n. 8, p. C206–C221, ago. 2024. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-41-8-C206>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 7 RABI, I. I. On the Process of Space Quantization. *Physical Review*, v. 49, n. 4, p. 324–328, fev. 1936. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.49.324>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 8 RABI, I. I. Space Quantization in a Gyating Magnetic Field. *Physical Review*, v. 51, n. 8, p. 652–654, abr. 1937. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.652>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 9 CUMMINGS, F. W. Stimulated Emission of Radiation in a Single Mode. *Physical Review*, v. 140, n. 4A, p. A1051–A1056, nov. 1965. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.A1051>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 10 EBERLY, J. H.; NAROZHNY, N. B.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model. *Physical Review Letters*, v. 44, n. 20, p. 1323–1326, mai. 1980. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.44.1323>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 11 KUKLIŃSKI, J. R.; MADAJCZYK, J. L. Strong squeezing in the Jaynes–Cummings model. *Physical Review A*, v. 37, n. 8, p. 3175–3178, abr. 1988. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.37.3175>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 12 HILLERY, M. Squeezing and photon number in the Jaynes–Cummings model. *Physical Review A*, v. 39, n. 3, p. 1556–1557, fev. 1989. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.39.1556>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 13 ARAVIND, P. K.; HIRSCHFELDER, J. O. Two-state systems in semiclassical and quantized fields. *The Journal of Physical Chemistry*, v. 88, n. 21, p. 4788–4801, out. 1984. ISSN 0022-3654. Disponível em: <<https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/j150665a002>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 14 PHOENIX, S.; KNIGHT, P. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Annals of Physics*, v. 186, n. 2, p. 381–407, set. 1988. ISSN 00034916. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0003491688900061>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 15 PHOENIX, S. J. D.; KNIGHT, P. L. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 44, n. 9, p. 6023–6029, nov. 1991. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.6023>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 16 BRUNE, M. et al. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of “Schrödinger cat” states. *Physical Review A*, v. 45, n. 7, p. 5193–5214, abr. 1992. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.5193>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 17 GUO, G.-C.; ZHENG, S.-B. Generation of Schrödinger cat states via the Jaynes-Cummings model with large detuning. *Physics Letters A*, v. 223, n. 5, p. 332–336, dez. 1996. ISSN 03759601. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375960196007530>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 18 GERRY, C. C.; GROBE, R. Generation and properties of collective atomic Schrödinger-cat states. *Physical Review A*, v. 56, n. 3, p. 2390–2396, set. 1997. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.2390>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 19 GERRY, C. C. Schrödinger cat states in a Josephson junction. *Physical Review B*, v. 57, n. 13, p. 7474–7476, abr. 1998. ISSN 0163-1829. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.57.7474>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 20 SHORT, R.; MANDEL, L. Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics. *Physical Review Letters*, v. 51, n. 5, p. 384–387, ago. 1983. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.384>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 21 HILLERY, M. Bounds on sub-Poissonian field statistics in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 35, n. 10, p. 4186–4191, mai. 1987. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.35.4186>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 22 CHUMAKOV, S. M.; KOZIEROWSKI, M.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Analytical approach to the photon statistics in the thermal Jaynes-Cummings model with an initially unexcited atom. *Physical Review A*, v. 48, n. 6, p. 4594–4597, dez. 1993. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.4594>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 23 BLOCKLEY, C. A.; WALLS, D. F.; RISKEN, H. Quantum Collapses and Revivals in a Quantized Trap. *Europhysics Letters (EPL)*, v. 17, n. 6, p. 509–514, fev. 1992. ISSN 0295-5075. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/17/6/006>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 24 PEDERNALES, J. S. et al. Quantum Rabi Model with Trapped Ions. *Scientific Reports*, v. 5, n. 1, p. 15472, out. 2015. ISSN 20452322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep15472>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 25 VOGEL, W.; FILHO, R. L. d. M. Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion. *Physical Review A*, v. 52, n. 5, p. 4214–4217, nov. 1995. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.4214>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 26 ITÔ, D.; MORI, K.; CARRIERE, E. An example of dynamical systems with linear trajectory. *Il Nuovo Cimento A Series 10*, v. 51, n. 4, p. 1119–1121, out. 1967. ISSN 0369-3546. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02721775>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 27 MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAK, A. The Dirac oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, n. 17, p. L817–L819, set. 1989. ISSN 0305-4470. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 28 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; SOLANO, E. Exact mapping of the $2 + 1$ Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal. *Physical Review A*, v. 76, n. 4, p. 041801, out. 2007. ISSN 10502947. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.76.041801>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 29 BERMUDEZ, A.; MARTIN-DELGADO, M. A.; LUIS, A. Chirality quantum phase transition in the Dirac oscillator. *Physical Review A*, v. 77, n. 6, p. 063815, jun. 2008. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.063815>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 30 LARSON, J.; MAVROGORDATOS, T. *The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants*. 2. ed. Bristol: IOP Publishing, 2021. ISBN 978-0-7503-3447-1. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/book/mono/978-0-7503-3447-1>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 31 ROMANELLI, A. Generalized Jaynes-Cummings model as a quantum search algorithm. *Physical Review A*, v. 80, n. 1, p. 014302, jul. 2009. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.014302>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 32 MEHER, N.; SIVAKUMAR, S. A review on quantum information processing in cavities. *The European Physical Journal Plus*, v. 137, n. 8, p. 985, ago. 2022. ISSN 2190-5444. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1140/epjp/s13360-022-03172-x>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 33 MONROE, C. et al. Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 25, p. 4714–4717, dez. 1995. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4714>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 34 NIELSEN, M. A.; CHUAN, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-1-107-00217-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 35 BUŽEK, V.; JEX, I. Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Optics Communications*, v. 78, n. 5-6, p. 425–435, set. 1990. ISSN 00304018. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/003040189090340Y>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 36 BUŽEK, V.; JEX, I. Emission Spectra of a Two-level Atom in a Kerr-like Medium. *Journal of Modern Optics*, v. 38, n. 5, p. 987–996, mai. 1991. ISSN 0950-0340. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349114550961>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 37 SUKUMAR, C.; BUCK, B. Multi-phonon generalisation of the Jaynes-Cummings model. *Physics Letters A*, v. 83, n. 5, p. 211–213, jun. 1981. ISSN 03759601. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0375960181908252>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 38 DICKE, R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Physical Review*, v. 93, n. 1, p. 99–110, jan. 1954. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 39 TAVIS, M.; CUMMINGS, F. W. Exact solution for an n -molecule—radiation-field hamiltonian. *Physical Review*, v. 170, n. 2, p. 379–384, jun. 1968. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.170.379>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 40 LAI, W. K.; BUEK, V.; KNIGHT, P. L. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum. *Physical Review A*, v. 44, n. 9, p. 6043–6056, nov. 1991. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.6043>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 41 WU, Y.; YANG, X. Effective two-level model for a three-level atom in the Ξ configuration. *Physical Review A*, v. 56, n. 3, p. 2443–2446, set. 1997. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.2443>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 42 PURI, R. R.; AGARWAL, G. S. Collapse and revival phenomena in the Jaynes-Cummings model with cavity damping. *Physical Review A*, v. 33, n. 5, p. 3610–3613, mai. 1986. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.33.3610>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 43 BARNETT, S. M.; KNIGHT, P. L. Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance. *Physical Review A*, v. 33, n. 4, p. 2444–2448, abr. 1986. ISSN 0556-2791. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.33.2444>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 44 SCALA, M. et al. Microscopic derivation of the Jaynes-Cummings model with cavity losses. *Physical Review A*, v. 75, n. 1, p. 013811, jan. 2007. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.013811>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 45 CHAICHIAN, M.; ELLINAS, D.; KULISH, P. Quantum algebra as the dynamical symmetry of the deformed Jaynes-Cummings model. *Physical Review Letters*, v. 65, n. 8, p. 980–983, ago. 1990. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.980>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 46 SANTOS-SÁNCHEZ, O.; RÉCAMIER, J. The f -deformed jaynes-cummings model and its nonlinear coherent states. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 45, p. 015502, jan. 2012. ISSN 0953-4075. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/1/015502>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 47 DEHGHANI, A. et al. Parity Deformed Jaynes-Cummings Model: Robust Maximally Entangled States. *Scientific Reports*, v. 6, n. 1, p. 38069, dez. 2016. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep38069>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 48 UHDRE, G. M.; CIUS, D.; ANDRADE, F. M. Effects of quantum deformation on the Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, v. 105, p. 013703, jan. 2022. ISSN 2469-9926. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.105.013703>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 49 LUKIERSKI, J. et al. q -deformation of Poincaré algebra. *Physics Letters B*, v. 264, n. 3-4, p. 331–338, ago. 1991. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190358W>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 50 LUKIERSKI, J.; NOWICKI, A.; RUEGG, H. New quantum Poincaré algebra and κ -deformed field theory. *Physics Letters B*, v. 293, n. 3-4, p. 344–352, out. 1992. ISSN 03702693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939290894A>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 51 LUKIERSKI, J.; RUEGG, H. Quantum κ -Poincaré in any dimension. *Physics Letters B*, v. 329, n. 2-3, p. 189–194, jun. 1994. ISSN 03702693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269394907595>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 52 LUKIERSKI, J. Kappa-deformations: historical developments and recent results. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 804, p. 012028, jan. 2017. ISSN 1742-6588. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/804/1/012028>>.
- 53 YANG, S.; YA-PING, Y.; HONG, C. Evolution of Population Inversion Controlled by the Time-Dependent Coupling: an Inverse Problem. *Chinese Physics Letters*, v. 23, n. 5, p. 1136–1138, mai. 2006. ISSN 0256-307X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0256-307X/23/5/020>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 54 DONG, D.; PETERSEN, I. Quantum control theory and applications: a survey. *IET Control Theory & Applications*, v. 4, n. 12, p. 2651–2671, dez. 2010. ISSN 1751-8644. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/doi/10.1049/iet-cta.2009.0508>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 55 HERNÁNDEZ-SÁNCHEZ, L. et al. Effects of classical drivings on the power broadening of atomic lineshapes. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 41, n. 8, p. C68–C73, ago. 2024. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-41-8-C68>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 56 FREIDEL, L.; LIVINE, E. R. 3D Quantum Gravity and Effective Noncommutative Quantum Field Theory. *Physical Review Letters*, v. 96, n. 22, p. 221301, jun. 2006. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.221301>>.
- 57 TSUTSUI, T. T.; CASTRO, A. S. M. de; ANDRADE, F. M. Reproducing the effects of quantum deformation in the undeformed Jaynes-Cummings model. *Advanced Quantum Technologies*. No prelo.
- 58 TSUTSUI, T. T.; CASTRO, A. S. M. de; ANDRADE, F. M. Reproducing the effects of quantum deformation in the undeformed Jaynes-Cummings model. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2410.19118>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 59 SALASNICH, L. *Quantum Physics of Light and Matter*. 2. ed. Cham: Springer International Publishing, 2017. (UNITEXT for Physics). ISBN 978-3-319-52997-4. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-52998-1>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 60 DASGUPTA, A. An analytically solvable time-dependent Jaynes-Cummings model. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, v. 1, n. 1, p. 14–18, fev. 1999. ISSN 1464-4266.
- 61 JOSHI, A.; LAWANDE, S. V. Effect of atomic motion on Rydberg atoms undergoing two-photon transitions in a lossless cavity. *Physical Review A*, v. 42, n. 3, p. 1752–1756, ago. 1990. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.42.1752>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 62 SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: Springer US, 1994. ISBN 978-1-4757-0578-2. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-0576-8>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 63 PURI, R. R. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001. v. 79. (Springer Series in Optical Sciences, v. 79). ISBN 978-3-642-08732-5. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-44953-9>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 64 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. ISBN 9781108587280. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/9781108587280>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 65 KOJEVNIKOV, A. Dirac's Quantum Electrodynamics. In: BALASHOV, Y.; VIZGIN, V. (Ed.). *Einstein Studies in Russia*. Boston: Birkhäuser Boston, 2002. cap. 8, p. 229–259. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0131-1_8>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 66 NIELS BOHR LIBRARY. *Oral History: Niels Bohr Library - Oral History Interview with John Archibald Wheeler*. 2024. Disponível em: <<https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/4575-3>>. Acesso em: 12 aug. 2024.
- 67 EINSTEIN, A. Zur Quantentheorie der Strahlung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 18, n. 121, 1917.
- 68 PAIS, A. *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1982.
- 69 KLEPPNER, D. Relendo Einstein sobre radiação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 1, p. 87–91, mar. 2005. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172005000100009>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 70 LOUDON, R. *Quantum Theory of Light*. 3. ed. Oxford: Oxford Science Publications, 2000.
- 71 KRAGH, H. The genesis of Dirac's relativistic theory of electrons. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 24, n. 1, p. 31–67, 1981. ISSN 0003-9519. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00327714>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 72 DIRAC, P. A. M. The Origin of Quantum Field Theory. In: BROWN, L. M.; HODDESON, L. (Ed.). *The Birth of Particle Physics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. cap. 2, p. 39–55.
- 73 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 114, n. 767, p. 243–265, mar. 1927. ISSN 0950-1207. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1927.0039>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 74 DIRAC, P. Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 110, n. 755, p. 561–579, mar. 1926. ISSN 0950-1207. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1926.0034>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 75 JAMMER, M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Tomash Publishers, 1989. v. 12. (The History of Modern Physics, 1800-1950, v. 12).

- 76 BORN, M.; HEISENBERG, W.; JORDAN, P. Zur Quantenmechanik. II. *Zeitschrift für Physik*, v. 35, n. 8-9, p. 557–615, ago. 1926. ISSN 1434-6001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01379806>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 77 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521435956. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511813993/type/book>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 78 GERRY, C.; KNIGHT, P. *Introductory Quantum Optics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521527354.
- 79 MAXWELL, J. On physical lines of force. *Philosophical Magazine*, v. 90, n. S1, p. 11–23, fev. 2010. ISSN 1478-6435. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786431003659180>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 80 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. Nova Iorque: Wiley, 2003. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/3527600434.eap109>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 81 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781108333511. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/highereducation/product/9781108333511/book>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 82 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. 7. ed. Elsevier, 2013. ISBN 9780123846549. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/C20090306297>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 83 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics: Volume 1: Basic concepts, tools, and applications*. 2. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2019. v. 1.
- 84 PLANCK, M. Über eine Verbesserung der Wien'schen Spectralgleichung. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, v. 2, n. 13, p. 202–204, dez. 1900.
- 85 PLANCK, M. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, v. 2, n. 17, p. 237–245, dez. 1900.
- 86 EHRENFEST, P. Zur Planckschen Strahlungstheories. *Physikalische Zeitschrift*, v. 7, p. 528–532, jul. 1906.
- 87 EINSTEIN, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 322, n. 6, p. 132–148, jan. 1905. ISSN 0003-3804. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053220607>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 88 KLEIN, M. J. *Paul Ehrenfest: The making of a theoretical physicist*. 1. ed. [S.l.]: American Elsevier Pub. Co, 1970. v. 1. 330 p.
- 89 PLANCK, M. Eine neue Strahlungshypothese. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, v. 13, p. 138–148, fev. 1911.
- 90 KRAGH, H. Preludes to dark energy: zero-point energy and vacuum speculations. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 66, n. 3, p. 199–240, mai. 2012. ISSN 0003-9519. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00407-011-0092-3>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 91 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 117, n. 778, p. 610–624, fev. 1928. ISSN 0950-1207.
- 92 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the Electron. Part II. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 118, n. 779, p. 351–361, mar. 1928. ISSN 0950-1207.
- 93 LAMB, W. E.; RETHERFORD, R. C. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. *Physical Review*, v. 72, n. 3, p. 241–243, ago. 1947. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.241>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 94 SHORE, B. W.; KNIGHT, P. L. The Jaynes-Cummings Model. *Journal of Modern Optics*, v. 40, n. 7, p. 1195–1238, mar. 1993. ISSN 13623044. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349314551321>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 95 MILONNI, P. W. *An Introduction to Quantum Optics and Quantum Fluctuations*. Oxford: Oxford University Press, 2019. ISBN 0199215618. Disponível em: <<https://academic.oup.com/book/43695>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 96 SCHRÖDINGER, E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Die Naturwissenschaften*, v. 14, n. 28, p. 664–666, jul. 1926. ISSN 0028-1042. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF01507634>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 97 ZHANG, W.-M.; FENG, D. H.; GILMORE, R. Coherent states: Theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, v. 62, n. 4, p. 867–927, out. 1990. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.62.867>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 98 SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. *Physical Review Letters*, v. 10, n. 7, p. 277–279, abr. 1963. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 99 KLAUDER, J. R. Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory. *Journal of Mathematical Physics*, v. 4, n. 8, p. 1055–1058, ago. 1963. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://pubs.aip.org/jmp/article/4/8/1055/230267/Continuous-Representation-Theory-I-Postulates-of>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 100 KLAUDER, J. R. Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 4, n. 8, p. 1058–1073, ago. 1963. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://pubs.aip.org/jmp/article/4/8/1058/230252/Continuous-Representation-Theory-II-Generalized>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 101 GLAUBER, R. J. Photon Correlations. *Physical Review Letters*, v. 10, n. 3, p. 84–86, fev. 1963. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.84>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 102 GLAUBER, R. J. The Quantum Theory of Optical Coherence. *Physical Review*, v. 130, n. 6, p. 2529–2539, jun. 1963. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.2529>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 103 GLAUBER, R. J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Physical Review*, v. 131, n. 6, p. 2766–2788, set. 1963. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 104 NEUMANN, J. von. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. *Göttinger Nachrichten*, p. 273–291, nov. 1927.
- 105 NEUMANN, J. von. *Mathematical foundations of quantum mechanics*: New edition. 3. ed. Princeton: Princeton university press, 2018. ISBN 978-0-691-17856-1.
- 106 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- 107 FERMI, E. Quantum Theory of Radiation. *Reviews of Modern Physics*, v. 4, n. 1, p. 87–132, jan. 1932. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.4.87>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 108 LARSON, J. *Extended Jaynes-Cummings models in cavity QED*. Tese (Doutorado) — The Royal Institute of Technology, Albanova, 2005.
- 109 LAHA, P.; YASIR, P. A. A.; LOOCK, P. van. Tripartite multiphoton Jaynes-Cummings model: Analytical solution and Wigner nonclassicalities. *Physical Review A*, v. 111, n. 1, p. 013710, jan 2025. ISSN 2469-9926. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.111.013710>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 110 CUMMINGS, F. W. Reminiscing about thesis work with E T Jaynes at Stanford in the 1950s. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 46, n. 22, p. 220202, nov. 2013. ISSN 0953-4075. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-4075/46/22/220202>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 111 GORDON, J. P.; ZEIGER, H. J.; TOWNES, C. H. The Maser—New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard, and Spectrometer. *Physical Review*, v. 99, n. 4, p. 1264–1274, aug 1955. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.99.1264>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 112 MANDEL, L.; WOLF, E. (Ed.). *Coherence and Quantum Optics IV*. Boston: Springer US, 1978. ISBN 978-1-4757-0667-3. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-0665-9>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 113 KNIGHT, P. L. et al. Enduring relevance of the Jaynes–Cummings model: a personal perspective [Invited]. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 41, n. 8, p. C91, ago. 2024. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-41-8-C91>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 114 STERN, O.; GERLACH, W. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik*, v. 9, n. 1, p. 349–352, dez. 1922. ISSN 1434-6001.
- 115 BRAAK, D. et al. Semi-classical and quantum Rabi models: in celebration of 80 years. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 49, n. 30, p. 300301, jul. 2016. ISSN 1751-8113. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/49/30/300301>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 116 JAYNES, E. T. *Some aspects of maser theory: Microwave Laboratory Report 502*. Stanford, USA, 1958.

- 117 KLIMOV, A. B.; CHUMAKOV, S. M. *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2009. ISBN 9783527408795. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9783527624003>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 118 YU, S.; RAUCH, H.; ZHANG, Y. Algebraic approach to the Jaynes-Cummings models. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. 2585–2590, out. 1995. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.2585>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 119 PAULI, W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, v. 43, n. 9-10, p. 601–623, set. 1927. ISSN 0044-3328.
- 120 KASPER, V. et al. From the Jaynes–Cummings model to non-abelian gauge theories: a guided tour for the quantum engineer. *New Journal of Physics*, v. 22, n. 10, p. 103027, out. 2020. ISSN 1367-2630. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/abb961>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 121 BINA, M. The coherent interaction between matter and radiation. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 203, n. 1, p. 163–183, abr. 2012. ISSN 1951-6355. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1140/epjst/e2012-01541-3>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 122 VIDIELLA-BARRANCO, A.; MOYA-CESSA, H.; BUŽEK, V. Interaction of Superpositions of Coherent States of Light with Two-level Atoms. *Journal of Modern Optics*, v. 39, n. 7, p. 1441–1459, jul. 1992. ISSN 0950-0340. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500349214551481>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 123 HAROCHE, S.; RAIMOND, J.-M. *Exploring the Quantum*. Oxford University Press, 2006. ISBN 9780198509141. Disponível em: <<https://academic.oup.com/book/7346>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 124 ARROYO-CORREA, G.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. The Jaynes-Cummings model thermal revivals. *Quantum Optics: Journal of the European Optical Society Part B*, v. 2, n. 6, p. 409–421, dez. 1990. ISSN 0954-8998. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-8998/2/6/001>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 125 JOSHI, A.; LAWANDE, S. V. Generalized Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling. *Physical Review A*, v. 48, n. 3, p. 2276–2284, set. 1993. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.2276>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 126 DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. *Theory of Nonclassical States of Light*. 1. ed. Londrês: CRC Press, 2003. ISBN 9781482288223. Disponível em: <<https://www.taylorfrancis.com/books/9781482288223>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 127 BOUKOBZA, E.; TANNOR, D. J. Entropy exchange and entanglement in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 71, n. 6, p. 063821, jun. 2005. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.063821>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 128 NAVARRETE-BENLLOCH, C. Introduction to Quantum Optics. Não publicado. 2022. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/2203.13206>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 129 SCULLY, M. O.; SARGENT, M. The concept of the photon. *Physics Today*, v. 25, n. 3, p. 38–47, mar. 1972. ISSN 0031-9228. Disponível em: <<https://pubs.aip.org/physicstoday/article/25/3/38/428448/The-concept-of-the-photonIt-has-its-logical>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 130 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (Ed.). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. 1. ed. [S.l.]: Dover, 1972.
- 131 KNIGHT, P.; RADMORE, P. Quantum revivals of a two-level system driven by chaotic radiation. *Physics Letters A*, v. 90, n. 7, p. 342–346, jul. 1982. ISSN 03759601. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0375960182906259>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 132 RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565–582, ago. 2001. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.565>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 133 FASIHI, M. A.; MOJAVERI, B. Entanglement protection in Jaynes–Cummings model. *Quantum Information Processing*, v. 18, n. 3, p. 75, mar. 2019. ISSN 1570-0755. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11128-019-2195-8>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 134 PHOENIX, S. J. D.; KNIGHT, P. L. Periodicity, phase, and entropy in models of two-photon resonance. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 7, n. 1, p. 116, jan. 1990. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-7-1-116>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 135 YÖNAÇ, M.; YU, T.; EBERLY, J. H. Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 39, n. 15, p. S621–S625, ago. 2006. ISSN 0953-4075. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0953-4075/39/15/S09>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 136 PRANTS, S. V.; ULEYSKY, M. Y.; ARGONOV, V. Y. Entanglement, fidelity, and quantum-classical correlations with an atom moving in a quantized cavity field. *Physical Review A*, v. 73, n. 2, p. 023807, fev. 2006. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.023807>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 137 TAN, L.; ZHANG, Y.-Q.; ZHU, Z.-H. Entanglement dynamics of a moving multi-photon Jaynes–Cummings model in mixed states. *Chinese Physics B*, v. 20, n. 7, p. 070303, jul. 2011. ISSN 1674-1056. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1056/20/7/070303>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 138 CHENG, J.; CHEN, X.; SHAN, C.-J. Entanglement Evolution of Jaynes-Cummings Model in Resonance Case and Non-resonance Case. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 57, n. 6, p. 1823–1828, jun. 2018. ISSN 0020-7748. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10773-018-3707-5>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 139 GEA-BANACLOCHE, J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus. *Physical Review Letters*, v. 65, n. 27, p. 3385–3388, dez. 1990. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.3385>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 140 SAYRIN, C. et al. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, v. 477, n. 7362, p. 73–77, sep 2011. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature10376>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 141 NUSSENZVEIG, P. et al. Preparation of high-principal-quantum-number “circular” states of rubidium. *Physical Review A*, v. 48, n. 5, p. 3991–3994, nov 1993. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.3991>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 142 SCHLICHER, R. R. Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Optics Communications*, v. 70, n. 2, p. 97–102, fev. 1989. ISSN 00304018. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0030401889902769>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 143 BARTZIS, V. Generalized Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 180, n. 3-4, p. 428–434, jan. 1992. ISSN 03784371. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/037843719290399B>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 144 PRANTS, S.; YACOUPOVA, L. The Jaynes-Cummings Model with Modulated Field-atom Coupling in Resonator Quantum Electrodynamics. *Journal of Modern Optics*, v. 39, n. 5, p. 961–971, mai. 1992. ISSN 0950-0340. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/09500349214550991>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 145 JOSHI, A. Effects of Phase Fluctuations in the Atom-field Coupling Coefficient of the Jaynes-cummings Model. *Journal of Modern Optics*, v. 42, n. 12, p. 2561–2569, dez. 1995. ISSN 0950-0340. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/713824334>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 146 CASTRO, A. S. M. de et al. Analytically solvable Hamiltonian in invariant subspaces. *The European Physical Journal Plus*, v. 138, n. 8, p. 766, ago. 2023. ISSN 2190-5444. Disponível em: <<https://link.springer.com/10.1140/epjp/s13360-023-04375-6>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 147 LARSON, J.; STENHOLM, S. Adiabatic state preparation in a cavity. *Journal of Modern Optics*, v. 50, n. 11, p. 1663–1678, jul. 2003. ISSN 0950-0340. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500340308235512>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 148 KEELING, J.; GURARIE, V. Collapse and Revivals of the Photon Field in a Landau-Zener Process. *Physical Review Letters*, v. 101, n. 3, p. 033001, jul. 2008. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.033001>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 149 MALDONADO-MUNDO, D. et al. Investigating the generality of time-local master equations. *Physical Review A*, v. 86, n. 4, p. 042107, out. 2012. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.042107>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 150 PRANTS, S. V. Controlling atom-field dynamics. *Journal of Russian Laser Research*, v. 16, n. 1, p. 83–97, jan. 1995. ISSN 1071-2836. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF02581077>>.
- 151 PRANTS, S.; KON'KOV, L. Dynamical chaos in the interaction of moving atoms with a cavity field. *Physics Letters A*, v. 225, n. 1-3, p. 33–38, jan. 1997. ISSN 03759601. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0375960196008511>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 152 ABDALLA, M.; ABDEL-ATY, M.; OBADA, A.-S. Entropy and entanglement of time dependent two-mode Jaynes-Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 326, n. 1-2, p. 203–219, ago. 2003. ISSN 03784371. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437103002905>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 153 JOSHI, A.; XIAO, M. Atomic-coherence effect on the Jaynes-Cummings model with atomic motion. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 21, n. 9, p. 1685, set. 2004. ISSN 0740-3224. Disponível em: <<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josab-21-9-1685>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 154 FANG, M.-F. Effects of atomic motion and field mode structure on the field entropy and Schrödinger-cat states in the Jaynes–Cummings model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 259, n. 1-2, p. 193–204, out. 1998. ISSN 03784371. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378437198002349>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 155 WILKENS, M.; MEYSTRE, P. Spectrum of spontaneous emission in a Fabry-Pérot cavity: the effects of atomic motion. *Optics Communications*, v. 94, n. 1-3, p. 66–70, nov. 1992. ISSN 00304018. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0030401892904071>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 156 YAN, X.-Q. Entanglement sudden death of two atoms successive passing a cavity. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 41, n. 4, p. 1645–1650, ago. 2009. ISSN 09600779. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077908003093>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 157 AZUMA, H. Dynamics of the Bloch vector in the thermal Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*, v. 77, n. 6, p. 063820, jun. 2008. ISSN 1050-2947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.063820>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 158 TOLSTOV, G. P. *Fourier series*. Nova Iorque: Dover Publications, 1976.
- 159 HEISENBERG, W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, v. 43, n. 3-4, p. 172–198, mar. 1927. ISSN 1434-6001. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF01397280>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 160 JACKIW, R. Observations on Noncommuting Coordinates and on Fields Depending on Them. *Annales Henri Poincaré*, v. 4, n. S2, p. 913–919, dez. 2003. ISSN 1424-0637. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00023-003-0971-5>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 161 SNYDER, H. S. Quantized Space-Time. *Physical Review*, v. 71, n. 1, p. 38–41, jan. 1947. ISSN 0031-899X. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.38>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 162 OHLSSON, T. *Relativistic Quantum Physics: From advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9780521767262.
- 163 SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- 164 KOWALSKI-GLIKMAN, J. A short introduction to κ -deformation. *International Journal of Modern Physics A*, v. 32, n. 35, p. 1730026, dez. 2017. ISSN 0217-751X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X17300265>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 165 ROY, P.; ROYCHOUDHURY, R. A note on the κ deformed Landau problem. *Physics Letters B*, v. 339, n. 1-2, p. 87–89, nov. 1994. ISSN 03702693. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)91137-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)91137-1)>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 166 ANDRADE, F.; SILVA, E. Effects of quantum deformation on the spin-1/2 Aharonov–Bohm problem. *Physics Letters B*, v. 719, n. 4-5, p. 467–471, fev. 2013. ISSN 03702693. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.01.062>>. Acesso em: 08 abr. 2025.

- 167 ANDRADE, F. et al. On the κ -Dirac oscillator revisited. *Physics Letters B*, v. 731, p. 327–330, abr. 2014. ISSN 03702693. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.02.054>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 168 SADURNÍ, E. et al. The Dirac-Moshinsky oscillator: theory and applications. In: *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2011. p. 249–290. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3555484>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 169 YU, Y. et al. Coherent Temporal Oscillations of Macroscopic Quantum States in a Josephson Junction. *Science*, v. 296, n. 5569, p. 889–892, mai. 2002. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.1069452>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 170 IL'ICHEV, E. et al. Continuous Monitoring of Rabi Oscillations in a Josephson Flux Qubit. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 9, p. 097906, ago. 2003. ISSN 0031-9007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.097906>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 171 ROZMEJ, P.; ARVIEU, R. The Dirac oscillator. A relativistic version of the Jaynes-Cummings model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 28, p. 5367–5382, jul. 1999. ISSN 0305-4470. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/28/314>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 172 SCHMIDT, E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, v. 63, n. 4, p. 433–476, dez. 1907. ISSN 0025-5831. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/BF01449770>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 173 EKERT, A.; KNIGHT, P. L. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *American Journal of Physics*, v. 63, n. 5, p. 415–423, mai. 1995. ISSN 0002-9505. Disponível em: <<https://pubs.aip.org/ajp/article/63/5/415/1054682/Entangled-quantum-systems-and-the-Schmidt>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 174 NEUMANN, J. von. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. *Göttinger Nachrichten*, v. 1, p. 245–272, nov. 1927.
- 175 SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 3, p. 379–423, jul. 1948. ISSN 00058580. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/6773024>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 176 TRIBUS, M.; MCIRVINE, E. C. Energy and Information. *Scientific American*, v. 225, n. 3, p. 179–190, 1971.
- 177 ARAKI, H.; LIEB, E. H. Entropy Inequalities. In: *Inequalities*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. p. 47–57. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-55925-9_4>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 178 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 2, p. 865–942, jun 2009. ISSN 0034-6861. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>>. Acesso em: 08 abr. 2025.
- 179 STEWART, J. *Multivariable Calculus*. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.

APÊNDICE A – EMARANHAMENTO, MATRIZ DENSIDADE E ENTROPIA DE VON NEUMANN

Neste apêndice, introduzimos os conceitos de emaranhamento e matriz densidade, com o intuito de depreender a VNE. A apresentação baseia-se no Apêndice A de (18), no Capítulo 2 de (34) e no Capítulo 1 de (64).

EMARANHAMENTO

Na Mecânica Quântica, o estado físico é descrito por um vetor em um espaço vetorial complexo. Utilizando a notação de Dirac, denotamos esse vetor como *ket*, e postulamos que ele contém toda a informação disponível sobre o estado físico. Além disso, se $|\psi_i\rangle$ forem os possíveis estados quânticos de um determinado sistema, a *superposição* desses estados também constitui um estado, tal que

$$|\psi\rangle = C_1 |\psi_1\rangle + C_2 |\psi_2\rangle + \dots + C_n |\psi_n\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Se os estados $|\psi_i\rangle$ forem ortonormais ($\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$), também possuímos a condição de normalização

$$1 = |C_1|^2 + |C_2|^2 + \dots + |C_n|^2, \quad (\text{A.2})$$

onde $|C_i|^2$, de acordo com a interpretação de Born, corresponde à probabilidade de obter o estado $|\psi_i\rangle$ perante uma medição. No entanto, existem cenários em que o vetor de estado do sistema não é conhecido com exatidão, devido à interação com outro sistema. Neste caso, tratamos de um sistema composto, cujo espaço vetorial corresponde ao produto tensorial dos espaços dos sistemas componentes. Embora seja possível descrever o estado do sistema total por um vetor de estado, não podemos fazer o mesmo para os subsistemas interagentes.

Por exemplo, consideremos dois sistemas físicos de interesse, A e B , com espaços associados $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente. O espaço do sistema composto é dado por

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (\text{A.3})$$

Para ilustrar o vetor de estado, consideremos que os sistemas A e B possuem estados quânticos $|\psi_A^i\rangle$ e $|\psi_B^i\rangle$ ($i = 1, 2$), respectivamente. Um possível vetor de estado para o sistema é

$$|\psi_{AB}\rangle = C_u |\psi_A^1, \psi_B^2\rangle + C_v |\psi_A^2, \psi_B^1\rangle, \quad (\text{A.4})$$

com a notação $|\psi_A^i, \psi_B^j\rangle = |\psi_A^i\rangle \otimes |\psi_B^j\rangle$. As amplitudes de probabilidades são representadas por C_u e C_v , de tal forma que $|C_u|^2 + |C_v|^2 = 1$. O estado expresso pela Eq. (A.4) é denominado *emaranhado*, uma vez que não pode ser escrito como um estado produto dos dois subsistemas,

$$|\psi_{AB}\rangle \neq |\psi_A, \psi_B\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Em outras palavras, não é possível associar ao subsistema A um vetor de estado que o descreva de forma independente do subsistema B . De forma análoga, também não se pode definir um vetor de estado para B que o represente independentemente de A . Palpavelmente, o emaranhamento pode ser compreendido como uma limitação na descrição independente dos graus de liberdade do sistema como um todo (34). Na seção 3.4, quantificamos o emaranhamento no modelo JC, através da VNE.

Quando lidamos com dois subsistemas, o sistema é denominado bipartite. Útil quando um dos subsistemas possui dimensão n ($n \neq 2$), a decomposição de Schmidt (172, 173) garante que, para um sistema bipartite e um estado global puro, existe uma base ortonormal $\{|a_i(t)\rangle, i = 1, 2, 3 \dots\}$ para o subsistema A e $\{|b_j(t)\rangle, j = 1, 2, 3 \dots\}$, para o subsistema B , tal que o estado do sistema, $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$, pode ser escrito como

$$|\psi_{AB}(t)\rangle = \sum_i \mu_i(t) |a_i(t), b_i(t)\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Na expressão acima, o limite superior do índice i é a *menor* das dimensões dos espaços de Hilbert envolvidos. No caso do modelo JC, por exemplo, a decomposição de Schmidt permite que possamos escrever o vetor de estado em função de dois termos, mesmo que o espaço da cavidade tenha dimensão infinita.

MATRIZ DENSIDADE

Alternativo à representação de vetor de estado, o formalismo do operador densidade, representado por $\hat{\rho}$, oferece uma abordagem mais apropriada para lidarmos com *ensembles*. Essa perspectiva foi introduzida por von Neumann em 1927 (174), estabelecendo os fundamentos para as previsões estatísticas derivadas da Mecânica Quântica. É pertinente citar que utilizaremos os termos “matriz densidade” e “operador densidade” de maneira intercambiável ao longo do texto.

Para um *ensemble* de estados $|\psi_i\rangle$, definimos $\hat{\rho}$ como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (\text{A.7})$$

Na Eq. (A.7), $\hat{\rho}$ descreve um *estado misto*, que corresponde a uma mistura probabilística p_i dos estados $|\psi_i\rangle$ do sistema. Se todas as probabilidades, com exceção da j -ésima, forem anuladas, obtemos

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (\text{A.8})$$

que é o operador densidade associado a um estado puro. De fato, podemos classificar um estado como puro ou misto com base no traço do operador densidade; se o traço $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ for igual a 1, o estado é puro. Caso seja menor que 1, o estado é misto. Como veremos, esses conceitos estão diretamente relacionados ao emaranhamento entre os subsistemas.

Nesse sentido, se o estado de um sistema bipartite for separável, o operador densidade $\hat{\rho}^{AB}$ é descrito por

$$\hat{\rho}^{AB} = \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B, \quad (\text{A.9})$$

onde denotamos A e B como os subsistemas interagentes.

No caso da Eq. (A.4), o operador densidade é descrito como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{AB} = & |C_u|^2 |\psi_A^1, \psi_B^2\rangle\langle\psi_A^1, \psi_B^2| + C_u C_v^* |\psi_A^1, \psi_B^2\rangle\langle\psi_A^2, \psi_B^1| \\ & + C_v C_u^* |\psi_A^2, \psi_B^1\rangle\langle\psi_A^1, \psi_B^2| + |C_v|^2 |\psi_A^2, \psi_B^1\rangle\langle\psi_A^2, \psi_B^1|. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A partir da Eq. (A.9), definimos o operador de densidade reduzido, que representa um dos subsistemas interagentes. Podemos obter esses operadores ao traçarmos o grau de liberdade associado ao outro subsistema

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^A &= \text{Tr}_B(\hat{\rho}^{AB}), \\ \hat{\rho}^B &= \text{Tr}_A(\hat{\rho}^{AB}). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A partir da Eq. (A.10), podemos calcular o operador de densidade reduzido para o subsistema A :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^A &= \langle\psi_B^1|\hat{\rho}^{AB}|\psi_B^1\rangle + \langle\psi_B^2|\hat{\rho}^{AB}|\psi_B^2\rangle \\ &= |C_u|^2 |\psi_A^1\rangle\langle\psi_A^1| + |C_v|^2 |\psi_A^2\rangle\langle\psi_A^2|. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

No nosso exemplo, percebemos que, de maneira geral, $\hat{\rho}^A$ é *misto*, mesmo que o estado $|\psi_{AB}\rangle$, Eq. (A.4), seja puro. Isso indica que podemos relacionar o emaranhamento do sistema com a mistura estatística da matriz de densidade reduzida do subsistema. De acordo com o critério que mencionamos anteriormente, concluímos que se $\text{Tr}[(\hat{\rho}^A)^2] = 1$, o estado $|\psi_{AB}\rangle$ é separável¹. Caso contrário, ele é emaranhado.

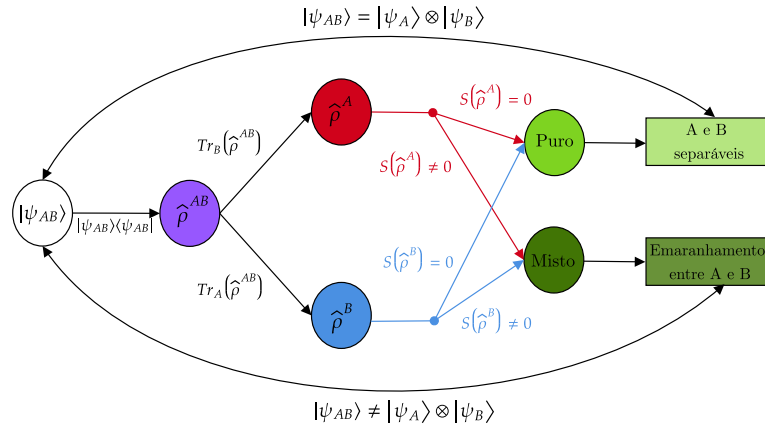
ENTROPIA DE VON NEUMANN

A VNE (104) é uma generalização quântica da entropia de Shannon (175), a qual, por sua vez, está associada à informação contida em uma distribuição de probabilidade clássica (176). Denotando por $S(\hat{\rho})$ a VNE, temos que $S(\hat{\rho}) = 0$ quando o estado $\hat{\rho}$ é puro. Por outro lado, se o estado for misto, então $S(\hat{\rho}) > 0$ (78).

Naturalmente, de acordo com a relação entre emaranhamento e pureza, isso indica que a VNE é um instrumento valioso para a quantificação do emaranhamento entre os subsistemas. Em outras palavras, ao calcular a VNE da matriz densidade reduzida de um dos subsistemas, obtemos uma medida da mistura do subsistema, que, por sua vez, é proporcional ao emaranhamento de um subsistema em relação ao outro. Nesse sentido, Araki e Lieb (177) provaram que, para um sistema bipartite genérico, $S(\hat{\rho}^A) = S(\hat{\rho}^B)$, isto é, B está emaranhado com A da mesma maneira que A está emaranhado com B . Em síntese, conclui-se que a VNE é uma boa medida do emaranhamento para estados iniciais puros e um sistema bipartite (34). Uma discussão mais aprofundada sobre a teoria do emaranhamento pode ser encontrada em (178).

¹ De forma paralela à VNE, existe a entropia linear, que se relaciona de maneira mais direta com a pureza.

Figura 35 – Representação esquemática da relação entre emaranhamento e VNE.



Fonte: O autor.

A VNE, para um operador densidade $\hat{\rho}$, é definida como

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}), \quad (\text{A.13})$$

onde fizemos a escolha da base 2 no logaritmo, mais conveniente para este trabalho.

Em uma base onde $\hat{\rho}$ é diagonal com autovalores $\mu_i(t)$, a VNE pode ser compreendida como

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_i \mu_i(t) \log_2 \mu_i(t). \quad (\text{A.14})$$

Por exemplo, podemos considerar o caso da Eq. (A.12). Os seus autovalores são $|C_u|^2$ e $|C_v|^2$, e a sua VNE é descrita por

$$S(\hat{\rho})^A = -|C_u|^2 \log_2 |C_u|^2 - |C_v|^2 \log_2 |C_v|^2. \quad (\text{A.15})$$

Se $|C_v|^2 = 0$ ou $|C_u|^2 = 0$, temos que $S(\hat{\rho})^A = 0$. Consequentemente, o subsistema é puro e o estado global é separável, conforme esperado. Por outro lado, se $|C_v|^2 = |C_u|^2 = 1/2$, então $S(\hat{\rho})^A = \log_2 2 = 1$, indicando que o subsistema apresenta a máxima mistura estatística, e o emaranhamento do sistema também atinge seu valor máximo.

Representamos esquematicamente o mecanismo que relaciona emaranhamento e a VNE na Fig. 35, para um sistema bipartite genérico.

APÊNDICE B – CÁLCULOS

Neste apêndice, apresentamos alguns cálculos que optamos por omitir ao longo do texto.

SOLUÇÃO DE ONDA PLANA PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

As equações de Maxwell formam um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas (81). Utilizando a identidade (179)

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.1})$$

podemos desacoplá-las. Utilizando as Eqs. (2.3), (2.5), (2.6) e (B.1), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right) &= \nabla[\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}_0] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ -\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] &= -\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Empregando a relação

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (\text{B.3})$$

onde c representa a velocidade da luz no vácuo, podemos reescrever a Eq. (B.2) como

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.4})$$

HAMILTONIANO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO CLÁSSICO

No subcapítulo 2.2, apresentamos o Hamiltoniano clássico H , associado a um único modo do campo EM. O reescrevemos abaixo, por conveniência,

$$H = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] dV \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \underbrace{[\varepsilon_0 E_x^2(z, t)]}_{(a)} + \underbrace{[\mu_0^{-1} B_y^2(z, t)]}_{(b)} dV. \quad (\text{B.6})$$

Para facilitar o processo de integração, calculamos separadamente as partes elétrica (a) e magnética (b).

(a) Parte elétrica:

$$\begin{aligned}
 \int_V \varepsilon_0 E_x^2(z, t) dV &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^L \varepsilon_0 E_x^2(z, t) dx dy dz \\
 &= \varepsilon_0 \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy}_A \int_0^L E_x^2(z, t) dz \\
 &= \varepsilon_0 A \int_0^L \frac{2\nu^2}{V \varepsilon_0} q^2(t) \sin^2(kz) dz \\
 &= \frac{2A\nu^2}{V} q^2(t) \int_0^L \sin^2(kz) dz \\
 &= \frac{2A\nu^2}{V} q^2(t) \int_0^L \left(\frac{1 - \cos(2kz)}{2} \right) dz \\
 &= \frac{A\nu^2}{V} q^2(t) \left| z - \frac{\sin(2kz)}{2k} \right|_0^L \\
 &= \frac{\overbrace{LA}^V \nu^2}{V} q^2(t) \\
 &= \nu^2 q^2(t).
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

(b) Parte magnética:

$$\begin{aligned}
 \int_V \mu_0^{-1} B_y^2(z, t) dV &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^L \mu_0^{-1} B_y^2(z, t) dx dy dz \\
 &= \frac{2\nu^2 \varepsilon_0 \mu_0 A}{k^2 V} p^2(t) \int_0^L \cos^2(kz) dz \\
 &= \frac{2A}{V} p^2(t) \int_0^L \left[\frac{1}{2} \cos(2kz) + \frac{1}{2} \right] dz \\
 &= \frac{2A}{V} p^2(t) \left| \frac{\sin(2kz)}{2k} + z \right|_0^L \\
 &= p^2(t).
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Expusemos a conta (b) de maneira menos explícita, devido à semelhança com o desenvolvimento anterior. Utilizamos as Eqs. (B.3) e (2.10).

EXPRESSÃO PARA O ESTADO COERENTE

Como os estados número formam um conjunto completo, podemos expressar $|\alpha\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \tag{B.9}$$

com os coeficientes obedecendo à condição

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1. \quad (\text{B.10})$$

Através da relação de autovetor, Eq. (2.59), e da ação do operador aniquilação, Eq. (2.44), obtemos

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (\text{B.11})$$

onde podemos comparar os coeficientes ao manipularmos n , tal que

$$\alpha C_{n-1} = C_n \sqrt{n}, \quad (\text{B.12})$$

que podemos apresentar explicitamente como

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (\text{B.13})$$

O coeficiente C_0 pode ser determinado através do fato que $|\alpha\rangle$ é normalizado, tal que

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \alpha | \alpha \rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Utilizando a definição da função e^x de acordo com a série de Taylor (130), obtemos

$$C_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (\text{B.15})$$

Sendo assim, os estados coerentes normalizados são

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{B.16})$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MODELO JAYNES-CUMMINGS

No subcapítulo 3.3 extraímos o sistema de ODEs, Eq. (3.55), a partir da aplicação da equação de Schrödinger, Eq. (3.52), no estado do modelo JC. Para maior clareza, reescrevemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \dot{C}_{e,n}(t) = -iC_{g,n+1}(t)\lambda\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}, \\ \dot{C}_{g,n+1}(t) = -iC_{e,n}(t)\lambda\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}. \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Desacoplamos a Eq. (B.17) em

$$\begin{cases} \ddot{C}_{e,n}(t) - i\Delta\dot{C}_{e,n}(t) + \lambda^2(n+1)C_{e,n}(t) = 0, \\ \ddot{C}_{g,n+1}(t) + i\Delta\dot{C}_{g,n+1}(t) + \lambda^2(n+1)C_{g,n+1}(t) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Resolvamos a equação para $C_{e,n}(t)$, Eq. (B.18). Iniciamos com a hipótese de uma solução do tipo

$$C_{e,n}(t) = e^{i\vartheta t}. \quad (\text{B.19})$$

Ao inserirmos a Eq. (B.19) na ODE para $C_{e,n}(t)$, obtemos

$$\vartheta^2 - \vartheta\Delta - \lambda^2(n+1) = 0. \quad (\text{B.20})$$

Resolvemos a Eq. (B.20), de maneira que evidenciamos as seguintes raízes

$$\vartheta_{\pm} = \frac{1}{2}(\Delta \pm \Theta_n), \quad (\text{B.21})$$

onde $\Theta_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)}$. Sendo assim, obtemos soluções genéricas do tipo

$$C_{e,n}(t) = A_+ e^{i\vartheta_+ t} + A_- e^{i\vartheta_- t}. \quad (\text{B.22})$$

A partir da equação acima, possuímos as seguintes expressões para $t = 0$,

$$\begin{aligned} C_{e,n}(0) &= A_+ + A_-, \\ \dot{C}_{e,n}(0) &= iA_+\vartheta_+ + iA_-\vartheta_-. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Além disso, utilizando a Eq. (B.17), obtemos

$$\dot{C}_{e,n}(0) = -iC_{g,n+1}(0)\lambda\sqrt{n+1}. \quad (\text{B.24})$$

A partir das Eqs. (B.23) e (B.24), obtemos os coeficientes $A_{\pm}$:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{C_{e,n}(0)\Theta_n - C_{e,n}(0)\Delta + 2C_{g,n+1}(0)\lambda\sqrt{n+1}}{2\Theta_n} \\ A_- &= \frac{C_{e,n}(0)(\Delta + \Theta_n) - 2C_{g,n+1}(0)\lambda\sqrt{n+1}}{2\Theta_n}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Reescrevendo a Eq. (B.22) da seguinte maneira,

$$C_{e,n}(t) = e^{\frac{i}{2}\Delta t} (A_+ e^{\frac{i}{2}\Theta_n t} + A_- e^{-\frac{i}{2}\Theta_n t}), \quad (\text{B.26})$$

utilizando a relação de Euler e os coeficientes, Eq. (B.25), obtemos

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= \left\{ C_{e,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} C_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Repetindo o mesmo processo para $C_{g,n+1}(t)$, Eq. (B.18),

$$\begin{aligned} C_{g,n+1}(t) &= \left\{ C_{g,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Theta_n} \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2i\lambda\sqrt{n+1}}{\Theta_n} C_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Theta_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$