

CARLOS ADALBERTO SCHNAIDER BATISTA

Sincronização em Rede Sem Escala

PONTA GROSSA
2007

TERMO DE APROVAÇÃO

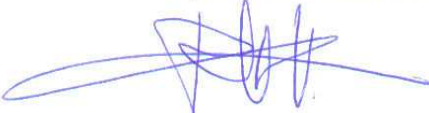
CARLOS ADALBERTO SCHNAIDER BATISTA

"SINCRONIZAÇÃO EM REDE SEM ESCALA."

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:


Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR


Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física, UFPR/PR


Prof. Dr. Antonio Sérgio Magalhães de Castro
Departamento de Física, UEPG/PR

Ponta Grossa, 23 de março de 2007.

CARLOS ADALBERTO SCHNAIDER BATISTA

Sincronização em Rede Sem Escala

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciências, Área de Concentração: Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista.

PONTA GROSSA
2007

Batista, Carlos Adalberto Schnaider
B333s Sincronização em rede sem escala / Carlos Adalberto
Schnaider. Ponta Grossa, 2007.
76 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Antonio Marcos Batista.

1. Rede sem escala. 2. Rede neural caótica. 3.
Sincronização. 4. Cérebro. I. Batista, Antonio Marcos. II.
Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Ciências.
III. T.

CDD: 530

à Deus

ao meu orientador que é um "irmão"
para mim, Prof. Dr. Antonio Marcos
Batista.

À minha família,

aos professores A. M. Batista (UEPG), R. L. Viana (UFPR), S. R. Lopes (UFPR), S. E. de S. Pinto (UEPG), L. Caldas (IF-SP) e J. C. Pontes, doutorando (UFPR), pelas discussões e produção de dois artigos submetidos referentes aos assuntos abordados nesta dissertação, Coerência de Direção e Sincronização de Fase,

à todos os professores, secretários e alunos que de alguma forma contribuíram para a minha formação durante o curso,

e a CAPES pela contemplação da bolsa de estudos para a minha manutenção e dedicação exclusiva ao curso.

Resumo

Consideramos uma rede de mapas acoplados que exhibe a propriedade de rede sem escala. A conectividade de cada sítio obedece uma distribuição tipo lei de potência. Analisamos uma forma fraca do comportamento coerente espaço-temporal, a coerência de direção, que apresenta uma característica comum nos estados que sincronizam completamente, como um comportamento transitório mediado através de uma intermitência. Foi estudado tal fenômeno e sua dependência com os parâmetros de acoplamento de uma rede sem escala. Da recente evidência experimental que a rede neural, em algumas áreas do córtex do cérebro, apresenta a propriedade de rede sem escala, isto é, a conectividade ou o número de conexões de um neurônio é distribuída de acordo com uma lei de potência, tal que os neurônios mais conectados são menos prováveis do que os com pouca conexões, uma resposta coerente de um conjunto de neurônios pode ser descrita através da sincronização de fase caótica da atividade dos seus disparos. Foi usado um mapa bidimensional proposto por Rulkov que descreve os disparos dos neurônios em uma rede sem escala e investigamos a sincronização de fase caótica, em particular a sua dependência com as propriedades do acoplamento.

Abstract

We considered a coupled chaotic logistic map lattice exhibiting the scale free property: the outreach connectivity of each node obeys a power-law distribution. We analyzed a weak form of coherent spatio-temporal behavior, the direction coherent, which presents features common to completely synchronized states, like a transitional behavior mediated through intermitent behavior. We studied such phenomena and their dependence on the parameters of the coupled scale free lattice. Of the recent experimental evidence that the neural network in some areas of the brain cortex presents scale free property, i.e. the neuron connectivity is distributed according to a power-law such the more connected neurons are most likely to couple with other well-connected ones, a coherent output of neurons in such assemblies can be described through a chaotic phase synchronization of their bursting activity. We used a two-dimensional map proposed by Rulkov to describe neurons with spiking-bursting in a scale free network and investigate their chaotic phase synchronization, in particular its dependence on the coupling properties.

Conteúdo

1	Introdução	12
2	Mapas e Conceitos Básicos	15
2.1	Mapas Unidimensionais	15
2.1.1	Estabilidade de Pontos Fixos	18
2.1.2	Pontos Periódicos	19
2.1.3	Mapa Logístico	20
2.1.4	Diagrama de Bifurcações para o Mapa Logístico	22
2.1.5	Expoente de Lyapunov para o Mapa Logístico	25
2.2	Mapas Bidimensionais	28
2.2.1	Mapa de Rulkov	28
2.2.2	Diagrama de Bifurcações e Expoente de Lyapunov para o Mapa de Rulkov	29
3	Sistemas Dinâmicos Acoplados	32

3.1	Redes de Mapas Acoplados	33
3.1.1	Acoplamento Local	34
3.1.2	Acoplamento Global	36
3.1.3	Rede Sem-Escala	44
4	Coerência de Direção (CD)	53
5	Sincronização de Fase Caótica de uma Rede Neural Sem Escala	61
5.1	Sincronização de Fase de Disparos Neurais	66
5.2	Sincronização de Frequência com Perturbação Externa	69
6	Conclusões	74

Capítulo 1

Introdução

Redes com topologia complexa [1] possuem aplicações tanto em ciência como em tecnologia. Tais redes tem como sítios representando indivíduos ou organizações, e conexões funcionando como as relações entre ambos [2]. Em particular, descobertas de características de redes sem escala [3] em sistemas complexos. Estas redes apresentam um comportamento com uma distribuição de conexões do tipo lei de potência [4]; significa que muitos sítios na rede possuem poucas conexões e um pequeno grupo deles com várias conexões. Apenas com o atual aumento na acessibilidade na base de dados de redes do mundo real e o surgimento de poderosos computadores, foi possível construir uma série de estudos empíricos das propriedades de redes na biologia, tecnologia e relacionamentos sociais.

Como exemplo de comportamento destes sistemas complexos, que envolvem um número muito grande de constituintes, é o surgimento do caos, fenômeno estudado nos anos 70, quando Yorke [5] e o biólogo Robert May [6]. Iniciaram os estudos das propriedades da assim chamada "equação logística" que, entre outras coisas, fornece um modelo simples para o crescimento de populações. Essa equação funciona recursivamente de modo a se obterem novos resultados e dependendo de como você utiliza um fator, que é conhecido como parâmetro de controle, os resultados podem se tornar altamente periódicos ou caóticos.

A sincronização de sistemas caóticos tem sido um estudo de considerável atenção nos últimos anos. Tal estudo tem aplicações na comunicação [7],

controle de caos em sistemas biomédicos [8], e de identificação [9]. Recentemente, o conceito de sincronização de caos foi estendida para a sincronização de fase em sistemas a tempo discreto, como por exemplo a coerência de direção (CD) de sistemas caóticos estudados por Hu e Liu [10]. Nesse processo, a interação de sistemas caóticos não-idênticos pode levar ao travamento perfeito de suas fases [11] e, além disso, suas amplitudes permanecerem descorrelacionadas. O travamento da fase caótica fica evidenciado em uma grande população de indivíduos dinamicamente acoplados, onde na separação de cada indivíduo pode residir um atrator caótico, característica estudada por Hu e Liu [10].

Um dos mais inspirantes e desafiantes problemas é a exploração da sincronização em sistemas neurobiológicos, onde um múltiplo tempo de escala (spike-picos e burst-disparos) de comportamento caótico é frequentemente observado. Típicos exemplos são: (i) o Gerador Central de Padrão [12], que produz estouros rítmicos comuns, enquanto que os neurônios individuais, se isolados, exibem estouros irregulares, (ii) neurônios do tálamo durante períodos de sonolência [13], desatenção e sono, (iii) neurônios dopaminérgicos da parte medial do cérebro, que exibem picos e disparos [14].

Efeitos de um sinal periódico aplicado na dinâmica de um neurônio isolado [15] ou um pequeno grupo deles, também têm sido estudados experimentalmente e teoricamente. Eles mostram um resultado impressionante sob os testes padrões de caos temporal ao fenômeno de travamento de fase externa [16]. O desenvolvimento de uma técnica de controle da dinâmica de um conjunto de neurônios significa que por meio de um *sinal localmente imposto*, isto é, por um sinal aplicado em um único elemento, possibilita algumas vantagens, como tirar o sistema de seu estado de sincronização

Nesta dissertação será feito um relato sobre um novo fenômeno em que a atividade local de cada mapa pode mostrar a CD. Será dada uma definição da CD em sistemas iterados e o seu mecanismo será quantificado através de medidas apropriadas, bem como a investigação do efeito de um limiar de sincronização de fase caótica mútua em um conjunto de disparos neurais oscilantes.

Assim, a dissertação foi organizada da seguinte forma: no capítulo 2

será feita uma introdução de mapas, conceitos básicos e suas implicações. No capítulo 3 um estudo sobre sistemas dinâmicos acoplados com interações locais, globais e sem escala. No capítulo 4 será reportado sobre uma forma fraca de sincronização, a coerência de direção que é uma analogia com sistemas que apresentam sincronização de fase. No capítulo 5 veremos qual foi o resultado da implementação de uma rede neural dentro da rede sem escala. Finalmente no capítulo 6 as conclusões, comentários e disposições finais.

Capítulo 2

Mapas e Conceitos Básicos

A existência da dinâmica caótica tem sido discutida na literatura matemática (dinâmica não linear) durante vários anos. Com contribuições de Poincaré, Birkoff, Cortwright e Littlewood, Levinson, Smales, Kolmogorov e seus estudantes, entre outros [17]. Sistemas caóticos vem sendo amplamente estudado em diversas áreas tais como: Ecologia, Economia, Física, Química, Engenharia, Mecânica dos Flúidos, etc. Todavia, estes estudos necessitam do conhecimento de algumas definições básicas, para o seu entendimento.

2.1 Mapas Unidimensionais

Uma função $f(x) = 2x$ determina que, para cada valor de x , um número duas vezes maior é obtido. Este é um modelo matemático simples. Podemos imaginar que x denota uma população de bactérias em uma cultura de laboratório e $f(x)$ a população uma hora depois. A população dobra a cada hora através de f . Se a cultura possui uma população inicial de 10000 bactérias, então após uma hora teremos $f(10000) = 20000$ bactérias, duas horas $f(f(10000)) = 40000$ bactérias e assim sucessivamente.

Um sistema dinâmico consiste na determinação de possíveis estados através de um modelo que determina um estado presente em termos dos estados

passados. O exemplo do crescimento da população de bactérias evolui no tempo através de $x_n = f(x_{n-1}) = 2x_{n-1}$, onde a variável n representa o tempo, e x_n designa a população para um tempo n . Se desejarmos que o modelo seja determinístico, significará que podemos determinar o estado presente de uma população, por exemplo, unicamente dos estados passados.

Do exemplo utilizado é observado que o valor inicial de x é maior que zero, e do modelo para o crescimento a população cresce sem fronteiras. Então precisamos de um fator multiplicativo tal que o crescimento não continue infinitamente. Em outras palavras, a função $f(x) = 2x$ pode ser corrigida para uma certa escala de populações da forma $g(x) = 2x(1 - x)$, onde x é medido em milhões. Neste modelo, a população inicial corresponde a $x = 0,01$ milhões. Enquanto a população x é pequena, o fator $(1 - x)$ é próximo de um, e $g(x)$ assemelha-se à função $f(x)$. Por outro lado, se a população é distante de zero, $g(x)$ não é proporcional a população x mas ao produto de x pelo "espaço restante" $(1 - x)$. Isto é, um efeito não linear e o modelo dado por $g(x)$ é um exemplo de um crescimento logístico.

Nas Figuras (2.1a) e (2.1b) podemos ver que $g(x)$ possui um limite inferior para o tamanho da população, com o qual podemos dizer que há um estado estacionário. Enquanto que $f(x)$ mostrou um crescimento que uma população multiplicada por um fator constante por unidade de tempo, é chamado de crescimento exponencial.

Um mapa unidimensional é uma equação da forma,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ são os valores discretos do tempo e $f(x_n)$ é uma função não-linear. Fornecido uma condição inicial x_0 , podemos obter os demais valores através de sucessivas iterações. A órbita de x para $f(x)$ determina os pontos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$, e o ponto inicial x da órbita é chamada de valor inicial da mesma. Uma órbita de período m é o conjunto de pontos fixos $x_0^*, x_1^*, \dots$ tais que

$$x^* = f^m(x^*), \quad (2.2)$$

onde f^m é a m -ésima iterada do mapa. A representação gráfica de uma órbita, figura (2.2), é feita pelo esboço de uma função f junto com uma linha diagonal $y = x$,

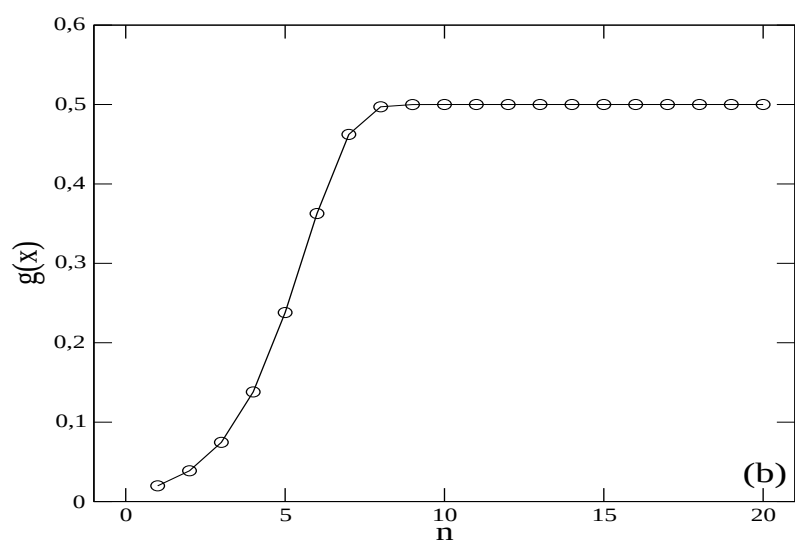
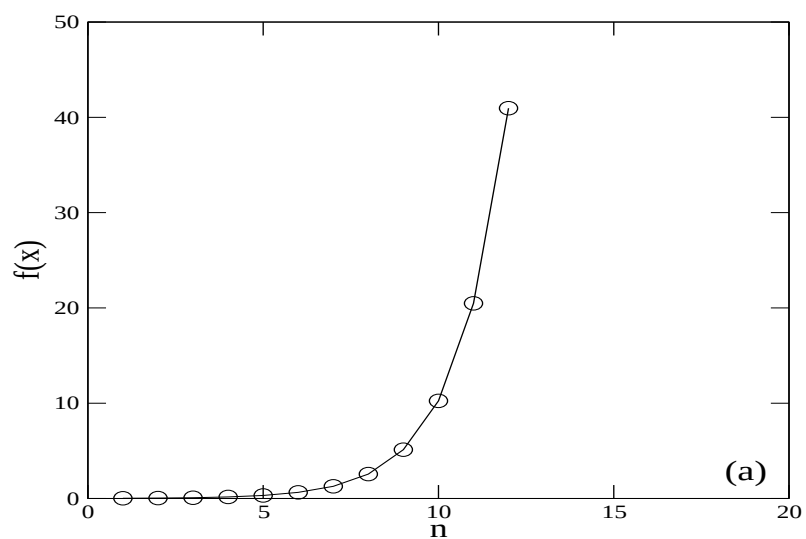


Figura 2.1: Comparação entre modelos de crescimento para (a) $f(x) = 2x$ e (b) $g(x) = 2x(1 - x)$.

onde o único ponto fixo de $f(x) = 2x$ é $x = 0$, dado um valor inicial $x = 0,1$ e após uma iterada encontramos o valor de f sendo $0,2$ e então traçamos uma linha vertical pontilhada unindo esses dois pontos. Na sequência encontra-se o valor de $f(0,2)$, sendo que este valor como se fosse outro valor inicial que no caso é $0,4$, e na ordem tornamos a colocar o valor que sai dentro do respectivo valor que entra. Feito isso, traçamos uma linha horizontal pontilhada entre o valor que entra e valor que sai $(0,1; 0,2)$, ou mais especificamente, entre $f(x) = 2x$ e $y = x$.

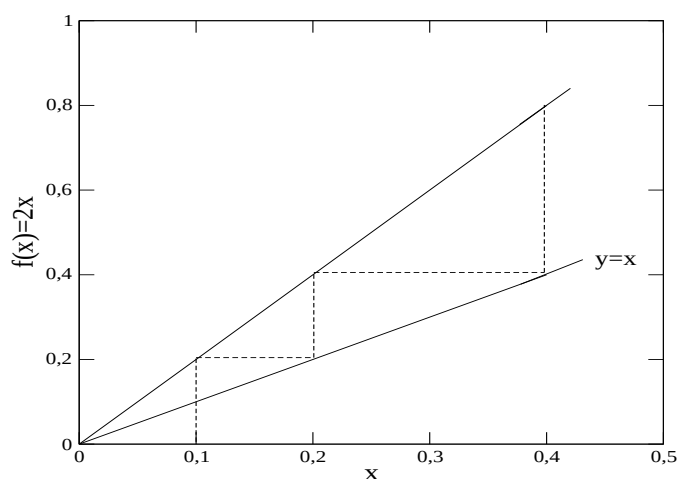


Figura 2.2: Representação gráfica de $f(x) = 2x$.

2.1.1 Estabilidade de Pontos Fixos

Um ponto x^* é um ponto fixo do mapa f se $f(x^*) = x^*$ e a análise da estabilidade local ou linear do ponto fixo é feita através do estudo das iterações do mapa em suas vizinhanças. Seja uma iteração x_n próximo ao ponto fixo x^* , tal que

$$\delta_n = |x_n - x^*|, \quad (2.3)$$

de (2.1) e (2.3), temos

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= |x_{n+1} - x^*| \\ &= |f(x_n) - x^*| \\ &= |f(x^* + \delta_n) - x^*|,\end{aligned}\tag{2.4}$$

desenvolvendo $f(x^* + \delta_n)$ em série de Taylor, temos

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \left| f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} \delta_n - x^* \right| \\ &= \left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| \delta_n.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Portanto, se $\delta_{n+1} < \delta_n$ as iterações estão convergindo para x^* , logo ele é estável, sendo assim

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| < 1,\tag{2.6}$$

se $\delta_{n+1} > \delta_n$ as iterações estão se afastando de x^* , portanto ele é instável e temos

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| > 1,\tag{2.7}$$

ou ainda, se $|f'(x^*)| = 1$ ou $|f'(x^*)| = 0$ o ponto fixo será dito neutro e superestável, respectivamente.

2.1.2 Pontos Periódicos

Comportamento para valores grandes do tempo n que corresponde a um ciclo em que a órbita toma dois valores diferentes em instantes alternados. Uma órbita com esta propriedade chamamos de órbita periódica de período dois. O ponto fixo ainda existe e quase todas as condições iniciais se aproximam da órbita de período dois.

Seja a sequência $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma órbita do sistema dinâmico, $f(x_n) = x_{n+1}$. Um elemento qualquer na sequência pode ser diretamente obtido a partir de x_0 , por meio da função composta f^n ,

$$x_n = f^n(x_0).\tag{2.8}$$

Uma órbita de período 2 é uma seqüência com dois valores repetidos $(x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$. Os pontos x_0 e x_1 são pontos periódicos com período igual a 2. Para que isso aconteça, é suficiente que $f^2(x_0) = x_0$, como $f(x_0) = x_1$ temos também que $f^2(x_1) = x_1$. Assim x_0 e x_1 são pontos fixos de $f^2(x)$. O ciclo será atrativo ou repulsivo (estável ou instável) segundo o valor que a derivada de f^2 tiver em cada ponto do ciclo.

Para calcular a derivada de f^2 em x_0 usa-se a regra da cadeia

$$(f^2(x_0))' = (f(f(x_0)))' = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1), \quad (2.9)$$

a derivada de f^2 é igual nos dois pontos x_0 e x_1 que fazem parte do ciclo, e é igual ao produto da derivada de f nos dois pontos.

De forma geral, se $f^m(x_0) = x_0$, existe um ciclo de período m , formado pelo conjunto $x_0, x_1, \dots, x_m$. Todos os pontos no conjunto serão pontos fixos de f^m . Se o valor absoluto do produto de $f'(x_i)$ para os m pontos no ciclo for maior que 1, o ciclo será repulsivo; se o produto for menor que 1, o ciclo será atrativo e se o produto for igual a 1, o ciclo será neutro.

Uma órbita de período 2 é mostrada na Figura (2.3). Vê-se que mesmo para valores diferentes de condições iniciais, com apenas duas iteradas da função $g(x) = 3,3x(1-x)$, as Figuras (2.3 a) e (2.3 b) apresentam órbitas periódicas e o mesmo comportamento para a Figura (2.3 c), que no entanto necessitou de três iteradas para alcançar a periodicidade.

2.1.3 Mapa Logístico

Um exemplo de mapa unidimensional é o mapa logístico, o qual será utilizado posteriormente nesta dissertação, que pode também ser um modelo proposto para estudar o crescimento de populações e é dado por

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.10)$$

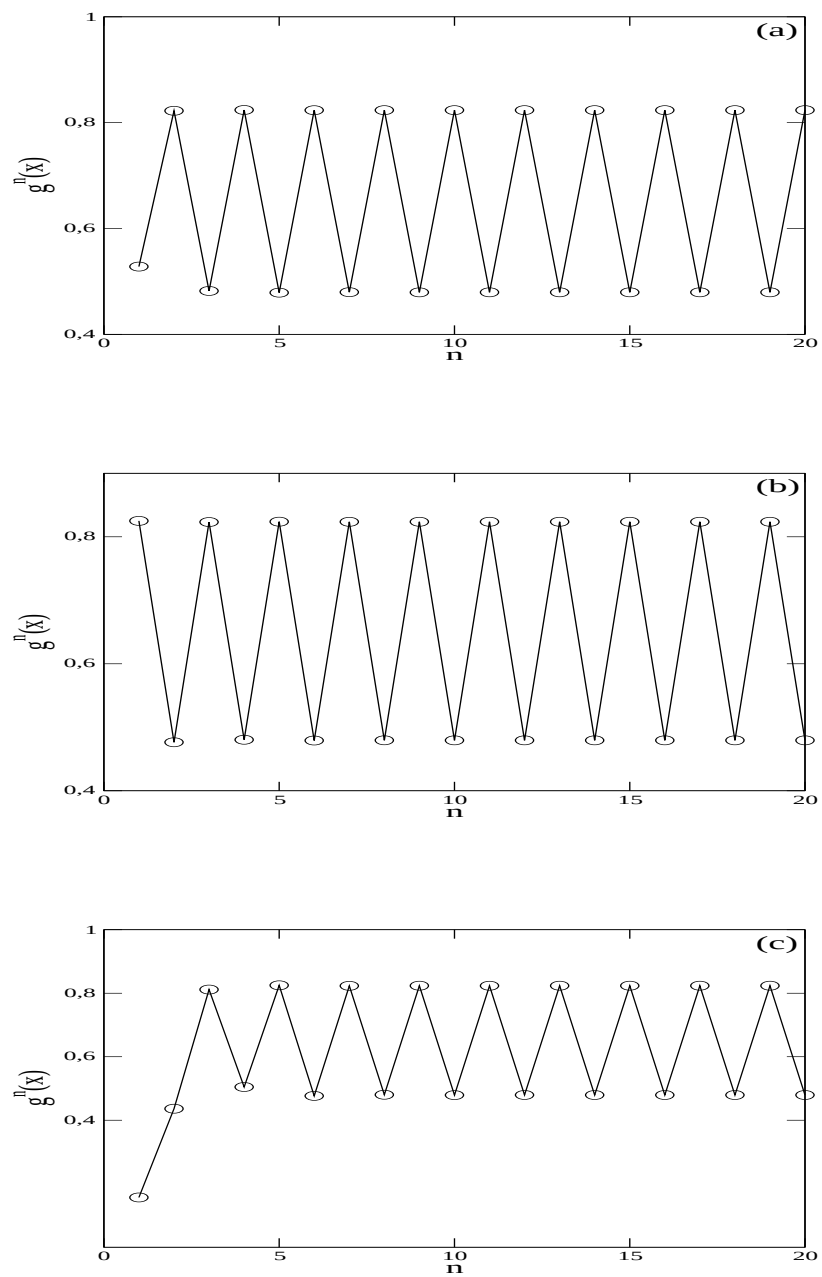


Figura 2.3: Três condições iniciais diferentes para o modelo logístico $g(x) = 3,3x(1 - x)$. Cada uma delas se aproxima de uma órbita de período 2.

onde x representa a população nas gerações n e $n + 1$ e r a taxa de crescimento ou parâmetro de controle, que fica compreendido no intervalo $0 \leq r \leq 4$. O termo $(1 - x_n)$ representa a competição, que impede o crescimento constante do tamanho da população.

O tipo de oscilação obtido para as populações varia com a taxa de crescimento, podendo assumir variações entre 2, 4, 8 etc estados estacionários, como é mostrado nas Figuras (2.4 a) e (2.4 b), ou variações completamente aperiódicas, Figura (2.4 c) . Este comportamento é observado em um diagrama de bifurcações. Este diagrama mostra a evolução do sistema até o estado de caos.

2.1.4 Diagrama de Bifurcações para o Mapa Logístico

O estudo do diagrama de bifurcações de mapas permite observar como pontos fixos estáveis de um sistema dinâmico se comportam devido à variação de um ou mais parâmetros do sistema. Sendo genérico o termo “bifurcação”, o que é mais importante neste processo é como um ponto fixo altera a sua estabilidade ou instabilidade devido à alteração destes parâmetros. Então, da equação (2.10), podemos ver na figura (2.5), como se comporta a variável de estado x durante a evolução do parâmetro de controle r , com uma condição inicial $x_0 = 0,2$, 250 pontos e 1000 iterações transientes descartadas. Tempo transiente é um certo número dos primeiros pontos da órbita que são descartados, para dar tempo para que a órbita evolua para o seu comportamento final, quer este seja uma órbita periódica ou caótica. Chama-se isto de *descartar o transiente*.

O que se observa é que, para $1,0 \leq r < r_\infty$, temos um regime de bifurcações e para $r_\infty < r \leq 4,0$ predomina uma região caótica, onde $r_\infty \approx 3,57$ é um ponto onde há uma acumulação da cascata de bifurcações. Para $r > 4,0$, resulta em $x \rightarrow \infty$ e para $r > r_\infty$, região caótica, a trajetória depende sensivelmente das condições iniciais. Existem sub-regiões, como por exemplo na figura (2.5b), $r = 3,74$, denominadas *janelas*, que exibem comportamento periódico, que são caracterizadas por órbitas de período ímpar e podem também sofrer bifurcações.

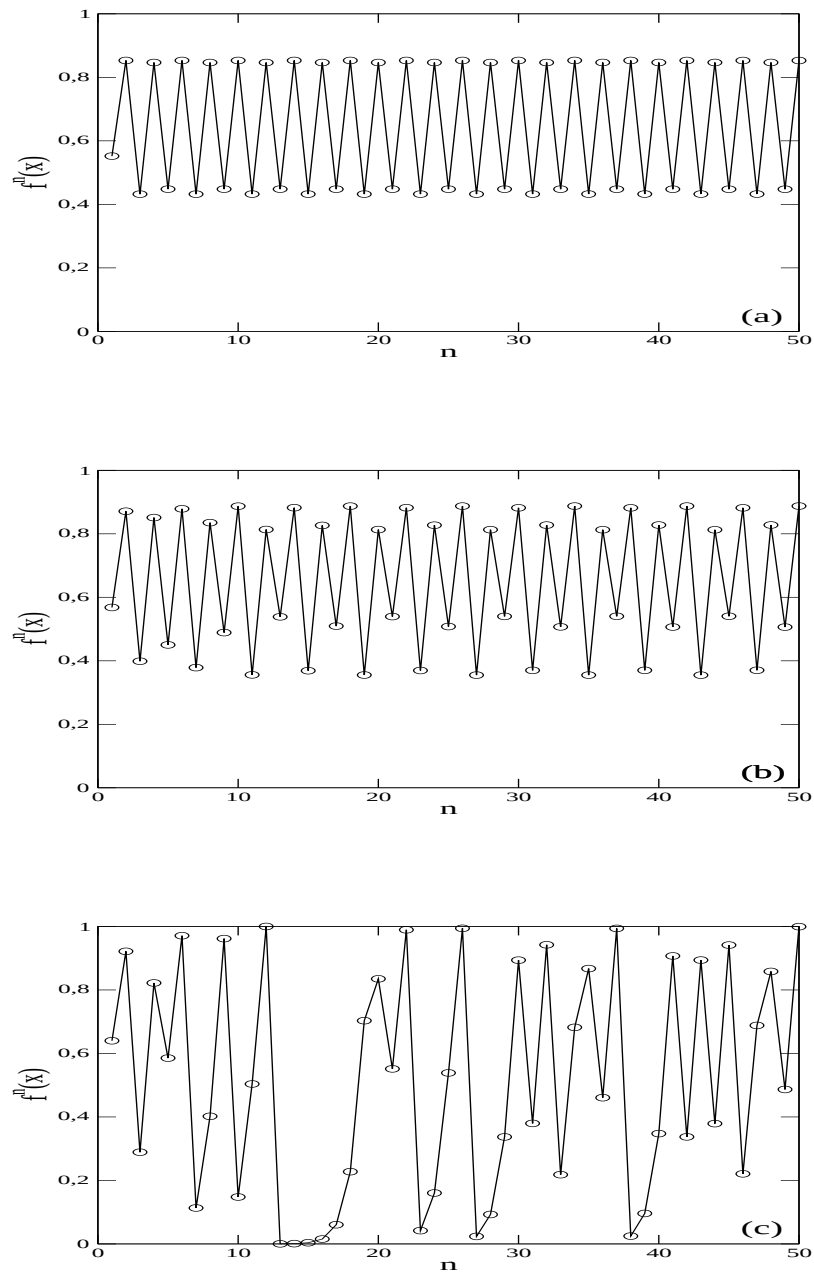


Figura 2.4: Valores diferentes para o parâmetro de controle ou taxa de crescimento r usando o modelo logístico $f(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n)$ com (a) $r=3,45$ e período 4; (b) $r=3,6$ com período 8 e (c) $r=4,0$ aperiódico.

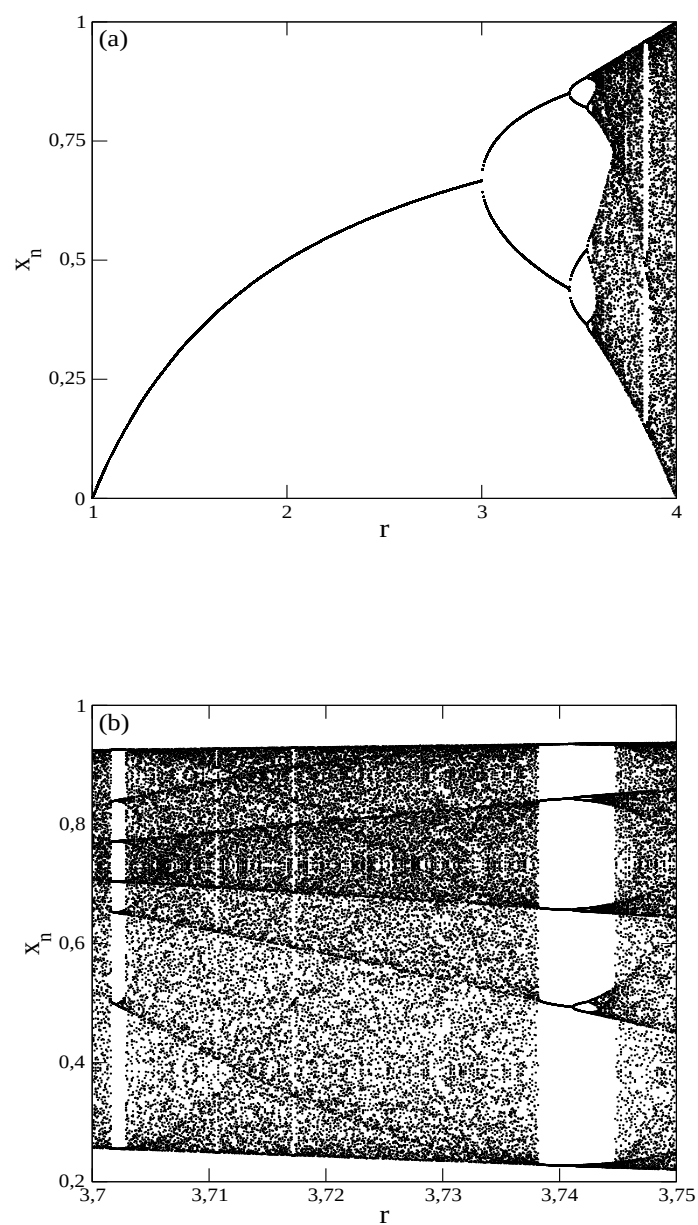


Figura 2.5: Diagramas de bifurcações para o mapa logístico; (a) panorama geral; (b) ampliação do intervalo $3,7 \leq r \leq 3,75$, foram feitas 1100 iterações das quais 1000 foram descartadas.

2.1.5 Expoente de Lyapunov para o Mapa Logístico

Se x_0 é um ponto fixo de um mapa unidimensional f e $f'(x_0) = a > 1$, então as órbitas de cada ponto x perto de x_0 separam-se de x_0 por uma razão multiplicativa de aproximadamente a por iteração, até a órbita de x mover-se significativamente para longe de x_0 .

Num regime caótico o sistema apresenta grande sensibilidade às condições iniciais [5], as quais, originalmente muito próximas divergem exponencialmente com o tempo. O expoente de Lyapunov mede esta divergência.

Da figura (2.6) obtemos

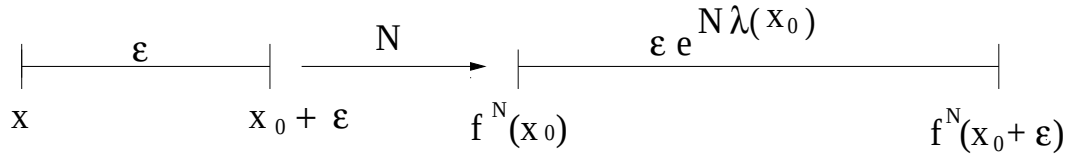


Figura 2.6: Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde N é o número de iterações.

$$\epsilon e^{N \lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)|, \quad (2.11)$$

tal que, quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, resulta para $\lambda(x_0)$

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|, \\ \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|, \end{aligned} \quad (2.12)$$

portanto, da equação acima conclui-se que $e^{\lambda(x_0)}$ é o fator médio pelo qual a distância entre os pontos adjacentes próximos variam após um grande número de iterações.

Usando a regra da cadeia em (2.12),

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx^2} \right|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad (2.13)$$

onde $x_1 = f(x_0)$ e o expoente de Lyapunov torna-se

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|, \quad (2.14)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{n=0}^{N-1} f'(x_n) \right|, \quad (2.15)$$

e

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln |f'(x_n)|, \quad (2.16)$$

Se $\lambda(x_0) > 0$ o sistema apresenta um regime caótico e para $\lambda(x_0) \leq 0$ regular, figuras (2.7). Para estas figuras foi implementado o mapa logístico dentro da equação (2.16) e verificado o comportamento das bifurcações para $1 < r \leq r_\infty$, onde r_∞ é ponto de acumulação, nessas regiões o expoente é sempre negativo, com excessões no pontos de bifurcações onde o expoente é nulo. Para $r_\infty < r \leq 4,0$ o expoente de Lyapunov é predominantemente positivo com regiões de *janelas*, $\lambda < 0$, caracterizando um comportamento regular.

O expoente de Lyapunov pode ser generalizado para um mapa em D dimensões, onde temos D expoentes para direções espaciais diferentes,

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_D}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\text{magnitudo dos autovalores de } \prod_{n=0}^{N-1} J(\vec{x}) \right)^{1/N}, \quad (2.17)$$

e

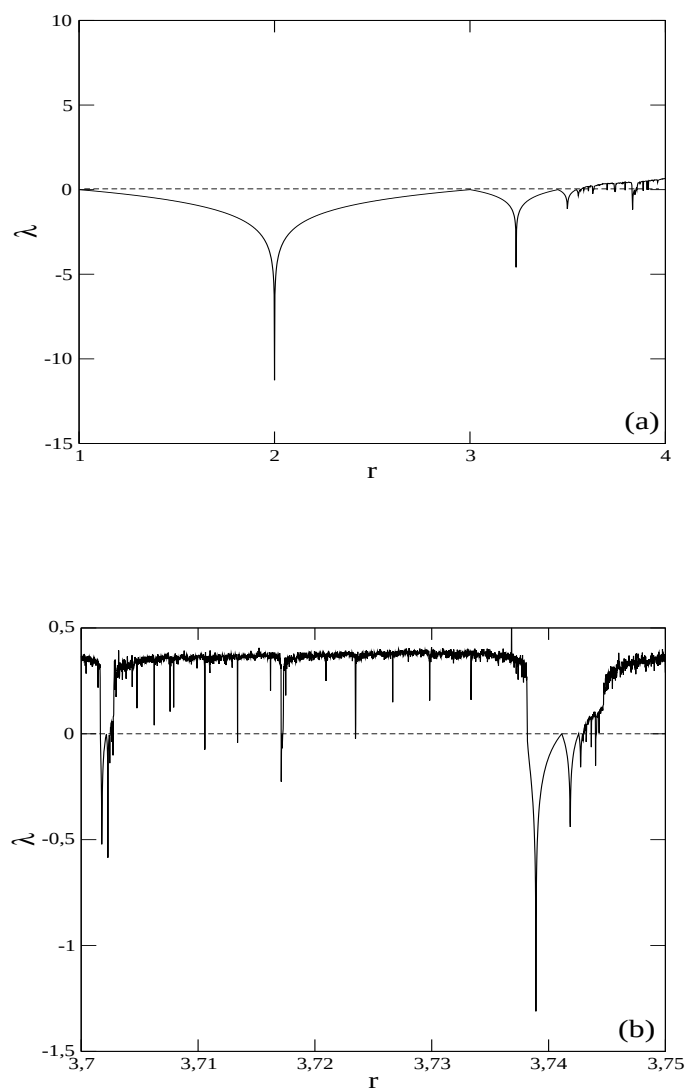


Figura 2.7: Expoente de Lyapunov para o mapa logístico; (a) $1 \leq r \leq 4$; (b) $3,7 \leq r \leq 3,75$, foram descartadas 1000 iterações transientes.

$$J(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.18)$$

é a matriz Jacobiana do mapa D -dimensional

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n). \quad (2.19)$$

2.2 Mapas Bidimensionais

2.2.1 Mapa de Rulkov

Um mapa bi-dimensional, como o mapa de Rulkov [18], é dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n \\ y_{n+1} &= y_n - \sigma x_n + \beta, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde x_n e y_n são as variáveis dinâmicas, respectivamente, rápida e lenta, α , σ e β são parâmetros do sistema. A equação (2.20) fornece o comportamento individual dos sítios, tal que a evolução lenta de y_n para um passo m é dada por

$$y_{n+1} = y_n - m(\alpha + \sigma \overline{x, m}), \quad (2.21)$$

sendo que $\overline{x, m} = (\sum_{j=n+1}^{n+m} x^{(j)})/m$ é o valor médio de x_n calculado para m consecutivas iterações. Então, vemos que de (2.21) o valor de y_n aumenta durante os m passos se $\overline{x, m} < -\beta$, e diminui se $\overline{x, m} > -\beta$. Em relação à lenta variação de y_n , podemos considerar que a dinâmica de x_n é independente nas equações (2.20), assumir que y_n é um parâmetro $\gamma = y_n$, para pequenos valores de α e β . Portanto, a dinâmica rápida do sítio pode ser entendida da análise de um mapa unidimensional,

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha, \gamma) \equiv \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + \gamma, \quad (2.22)$$

e realizar semelhantes estudos que foram feitos para o mapa logístico, ou seja, diagrama de bifurcações e expoente de Lyapunov.

2.2.2 Diagrama de Bifurcações e Expoente de Lyapunov para o Mapa de Rulkov

As principais propriedades dinâmicas da equação (2.22) estão claras nas figura (2.8) e figura (2.9), que são os resultados da análise do diagrama de bifurcação em conjunto com o cálculo do expoente de Lyapunov,

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln |f'(x_n)|, \quad (2.23)$$

onde a função $f(x_n)$ agora é a equação (2.22), que mostra para o regime de bifurcações que há uma tendência do mapa ir para uma região estável a medida que o valor do parâmetro de controle γ é acrescido. No expoente de Lyapunov temos regiões onde predominam as janelas em que o expoente é menor que 0, nos pontos de bifurcações o expoente é exatamente zero e quando finaliza a região caótica o expoente de Lyapunov é sempre menor que zero.

O mapa (2.22) tem três pontos fixos, x_1^*, x_2^* e x_3^* e utilizando as definições para a estabilidade de mapas (2.6) e (2.7), temos

$$f'(x) = \frac{-2\alpha x}{(1+x^2)^2}, \quad (2.24)$$

e substituindo o primeiro ponto fixo $x_1^* \approx -2,0$ da figura (2.9), para $\alpha = 4,1$, temos $f'(2,0) \approx 0,65$, o que se conclui ser um ponto fixo estável. Para $x_2^* \approx -1,3$, encontramos $f'(-1,3) \approx 1,47$ que é um ponto fixo instável, e x_3^* pode mudar de estabilidade dependendo do valor de γ .

O final do comportamento caótico é devido à crise, fenômeno conhecido quando um atrator caótico apresenta uma característica de aparecimento ou desaparecimento abrupto, ou ainda, mudar descontinuamente de tamanho, do atrator caótico no sistema (2.22). Quando a trajetória deste mapa está dentro do atrator, então $\overline{x_{n,1}} > -\beta/\sigma$, Figura (2.9), e o valor de $\gamma \equiv \gamma_n$ decresce até a trajetória caótica da dinâmica rápida retornar para o ponto fixo x_1^* . Isto é possível apenas depois do

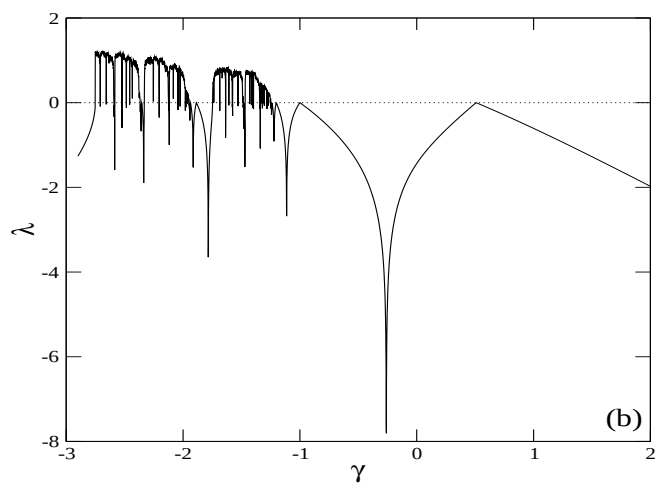
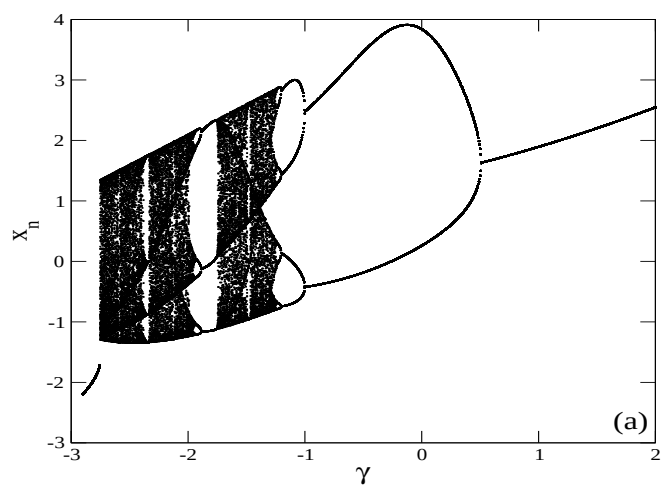


Figura 2.8: (a) Diagrama de bifurcações e (b) expoente de Lyapunov para a equação (2.22), foram feitas 2200 iterações das quais 2000 descartadas.

parâmetro da dinâmica rápida atravessar o valor de bifurcação, o qual corresponde ao caso quando a trajetória do máximo da função $x_{max} = f(0, \alpha, \gamma)$ mapear dentro de um ponto fixo instável x_2^* .

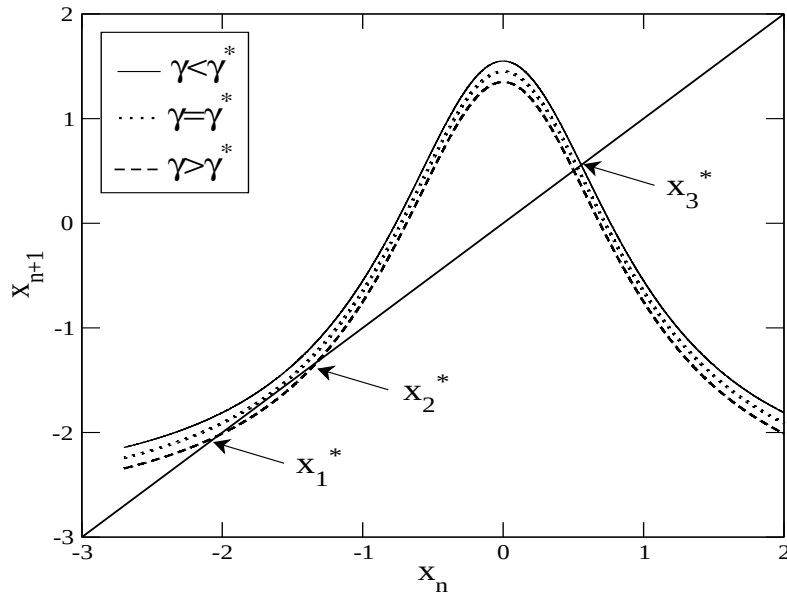


Figura 2.9: Diagrama de retorno para a função $f(x_n, \alpha, \gamma)$ para $\alpha = 4, 1$ e diferentes valores de γ . Para $\gamma = -2,65$: curva contínua; $\gamma = \gamma^* = -2,75$: curva pontilhada; $\gamma = -2,85$: curva tracejada. x_1^* , x_2^* e x_3^* são os pontos fixos do mapa. γ^* corresponde ao valor da bifurcação onde surgem os pontos fixos x_1^* e x_2^* .

Capítulo 3

Sistemas Dinâmicos Acoplados

Sistemas dinâmicos espaço temporais têm por característica possuir muitos graus de liberdade e o estudo do caos nesses sistemas tem sido uma das áreas mais ativas na dinâmica-não linear nos últimos anos.

Os sistemas dinâmicos espaço-temporais são classificados através das características do espaço, tempo e/ou das variáveis locais de estado. Na tabela (3.1) podemos identificar a hierarquia dos sistemas conforme a classificação espacial temporal e a variável de estado. Os principais tipos são:

Sistema	Espaço	Tempo	Variável de Estado
Equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínua
Cadeia de Osciladores	discreto	contínuo	contínua
Autômatos celulares	discreto	discreto	discreta
Redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínua

Tabela 3.1: Tabela hierárquica conforme a classificação espacial, temporal e a variável de estado

a) Equações diferenciais parciais: apresentam a continuidade no espaço, no tempo e na variável de estado. No contexto de problemas Físicos, onde não ocorrem discretização, é normal o uso de equações diferenciais parciais.

b) Cadeias de osciladores: são caracterizadas pelo espaço discreto, enquanto o tempo e a variável de estado são contínuos.

c) Autômato celular: é um sistema no qual o tempo, o espaço, e a variável de estado são discretos.

d) Rede de Mapas Acoplados: apresenta discretização no espaço e no tempo, e a variável de estado é contínua. São mais complexas em estrutura do que os autômatos celulares devido à capacidade de informação local. A existência de um espaço e tempo discretos, faz com que as redes de mapas acoplados sejam mais simples do que as equações diferenciais parciais que requerem uma quantidade muito grande de informações para especificar o estado e exigem muitos recursos computacionais para realizar as simulações [19]. Esta dissertação será baseada em redes de mapas acoplados.

As redes de mapas acoplados foram introduzidas em dinâmica não linear por Kunihiko Kaneko [20] em 1983 e teve de outros pesquisadores contribuições como Kuramoto[21], Crutchfield [19], Isola [22]. Desde então, vem sendo objeto de estudos por parte de vários grupos de pesquisadores. A dimensão da rede na maioria dos casos é inteira ($N = 1, 2, 3, \dots$) e a cada elemento da rede é atribuído uma variável de estado real N -dimensional $x^{(i)} \in R^D$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ é o índice que identifica o i -ésimo sítio de uma rede unidimensional com N sítios.

3.1 Redes de Mapas Acoplados

Interações entre dinâmicas caóticas e formações de padrões vêm sendo estudadas com o uso de redes de mapas acoplados. Essas interações podem ser locais, onde os sítios da rede interagem com os vizinhos mais próximos, ou globais, onde é assumido que o sítio interage com o campo médio produzido pela rede (Kaneko [23]).

3.1.1 Acoplamento Local

Redes de mapas acoplados localmente mostram uma variedade de fenômenos incluindo formações de domínios (na variável de estado x), coexistência de domínios mostrando movimentos regulares e caóticos, intermitência e outros mais. Foram amplamente estudados por Kaneko [23] e Crutchfield [19].

A forma do acoplamento local é dada por,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2}[f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)})], \quad (3.1)$$

onde vemos claramente pelo termo de acoplamento $[f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)})]$, que a interação espacial é somente entre os vizinhos mais próximos a cada sítio analisado. A intensidade do acoplamento ε varia no intervalo $[0, 1]$ sendo $\varepsilon = 0$ para uma dinâmica individual dos sítios. O fator 2 que divide o parâmetro de acoplamento normaliza a equação e i é a posição de cada sítio na rede ($i = 1, 2, 3, \dots, N$).

Para N mapas acoplados onde as fronteiras da rede, $x^{(0)}$ e $x^{(n+1)}$ são consideradas fixas, e condições iniciais aleatórias para o mapa logístico, com $r < 3$, qualquer condição inicial da rede se aproxima assintoticamente de uma única solução de $x^{(i)}$, que é o ponto fixo estável de período 1 do mapa desacoplado. Para $r > 3$, no entanto, o sistema pode se organizar dentro de domínios nos quais a variável de estado x apresenta as formações de transições superiores (*kinks*) ou inferiores (*antikinks*), figura (3.1).

Com o aumento do parâmetro de controle r há uma duplicação de período entre os domínios, figura (3.2). Na formação dos domínios, o mapa logístico desacoplado possui um valor de r para o qual possui dois pontos fixos periódicos ($r > 3$), cada mapa aproxima-se assintoticamente para uma solução com dois pontos fixos estáveis. Para sistemas acoplados esta estrutura persiste. No entanto, os *kinks* são suavizados e alongados sobre vários sítios da rede. Os *kinks* e *antikinks* trocam de lugar em sucessivas iterações, formando um nó estacionário e centralizado para um período instável de ciclo 2^p , $f^{(2^p)}(x^*) = x^*$.

Para r próximo de r_∞ , dependendo da intensidade de acoplamento, o movimento dentro dos domínios individuais pode ser caótico figura (3.3). Quando r

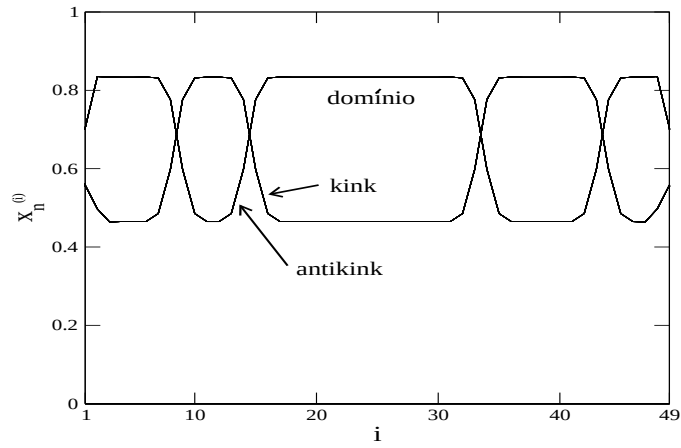


Figura 3.1: Comportamento de uma rede de mapas acoplados para um acoplamento local com $N = 49$ sítios, $r=3,32$ e $\varepsilon = 0,3$. Foram feitas 10040 iterações sendo 10000 descartadas.

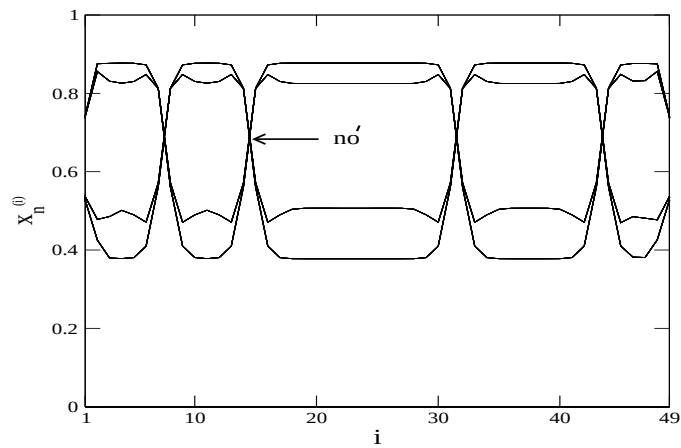


Figura 3.2: Comportamento de uma rede de mapas acoplados localmente com $N = 49$ sítios, $r=3,51$ e $\varepsilon = 0,3$. Foram feitas 10040 iterações sendo 10000 descartadas.

aumenta, os longos domínios tornam-se pequenos domínios caóticos, a tal ponto de a estrutura vir a ser constituída de domínios caóticos extensos e domínios regulares pequenos. Se aumentarmos mais ainda o valor de r a dinâmica da rede apresentará outros comportamentos. Porém, o perfil caótico ficará mais evidente como é mostrado na figura (3.4).

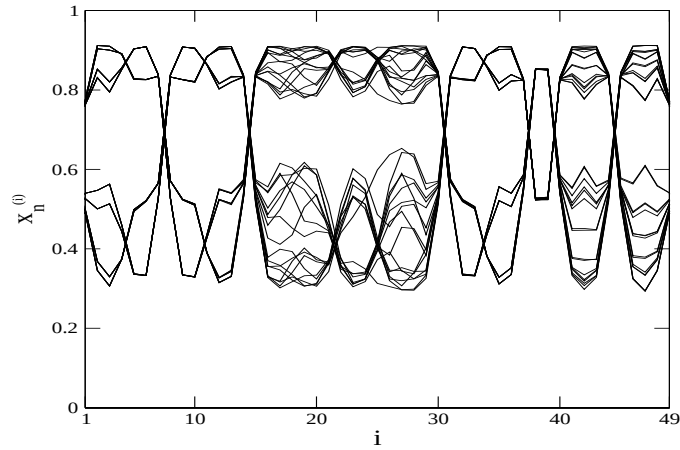


Figura 3.3: Comportamento de uma rede de mapas acoplados localmente com $N = 49$ sítios, $r=3,65$ e $\varepsilon = 0,3$. Foram feitas 10040 iterações sendo 10000 descartadas.

3.1.2 Acoplamento Global

Para uma rede de mapas acoplados onde, espacialmente, a interação é global, precisamos de um modelo no qual se seleccionarmos um sítio da rede ele é influenciado por todos os sítios ou o campo médio produzido pela rede. Para isso é utilizado uma equação da seguinte forma,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j \neq i}^{N-1} f(x_n^{(j)}), \quad (3.2)$$

onde ε é a intensidade de acoplamento entre os sítios da rede, compreendido no

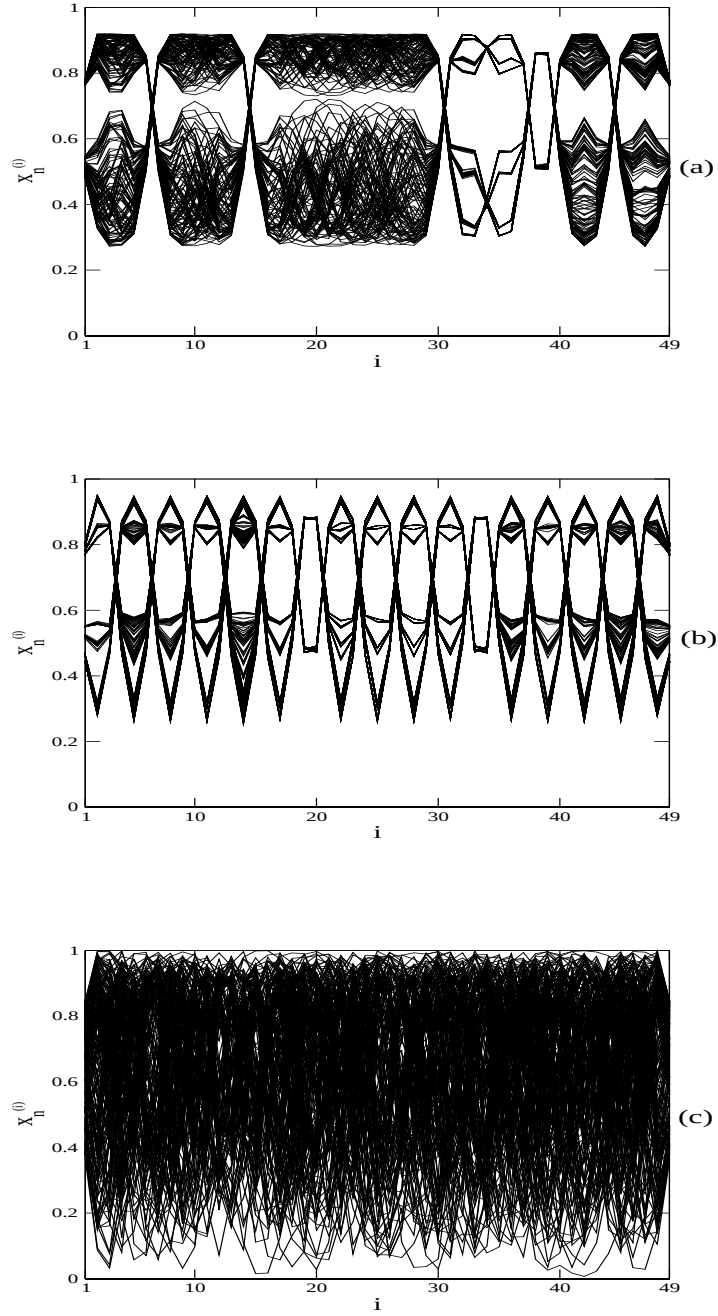


Figura 3.4: Comportamento de uma rede de mapas acoplados localmente com $N = 49$ sítios, $\varepsilon = 0,3$ para (a) $r = 3,8$; (b) $r = 3,9$ e (c) $r = 4,0$. Foram feitas 10200 iterações sendo 10000 descartadas.

intervalo $[0, 1]$, N é o tamanho da rede, e i é a posição de cada sítio ($i = 1, 2, 3, \dots, N$).

Um diagnóstico numérico para uma rede de mapas acoplados globalmente, é o parâmetro de ordem complexo R , introduzido por Kuramoto [24] que faz uma análise da sincronização de amplitude, dado por

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \varphi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp\left(2\pi i x_n^{(j)}\right), \quad (3.3)$$

onde R_n e φ_n são a amplitude e o ângulo respectivamente, de um vetor fase para uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas.

Como observamos, a equação (3.3) é composta por um termo imaginário que fisicamente não possui significado. Em decorrência disto, o termo $\exp(2\pi i x_n^{(j)})$ será decomposto usando a relação de Euler

$$\exp(2\pi i x_n^{(j)}) = \cos(2\pi x_n^{(j)}) + i \sin(2\pi x_n^{(j)}). \quad (3.4)$$

Calculando o módulo de um número complexo $z = a + bi$, onde

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3.5)$$

das equações 3.4 e 3.5, resulta em

$$R_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sqrt{[\cos(2\pi x_n^{(j)})]^2 + [\sin(2\pi x_n^{(j)})]^2}. \quad (3.6)$$

A figura (3.5) mostra o comportamento do parâmetro de ordem em função do tempo para 100 mapas logísticos acoplados globalmente. Quando $\varepsilon = 0,6$ há uma sincronização completa da rede sob um relativo crescimento de $n = 1$ para $n \approx 10$, figura (3.5 - círculos). Porém, se a rede é submetida a um valor de intensidade de acoplamento da ordem de $\varepsilon = 0,1$, a rede não sincroniza. O valor

do parâmetro de ordem tem um pico máximo em aproximadamente 7, 3, e algumas oscilações irrelevantes, figura (3.5 - quadrados). Podemos concluir do estudo do parâmetro de ordem, que os vetores de fase da rede quando, estão muito próximos, R_n se aproxima de 1, ou exatamente 1 para um situação em que todos os vetores estão em fase.

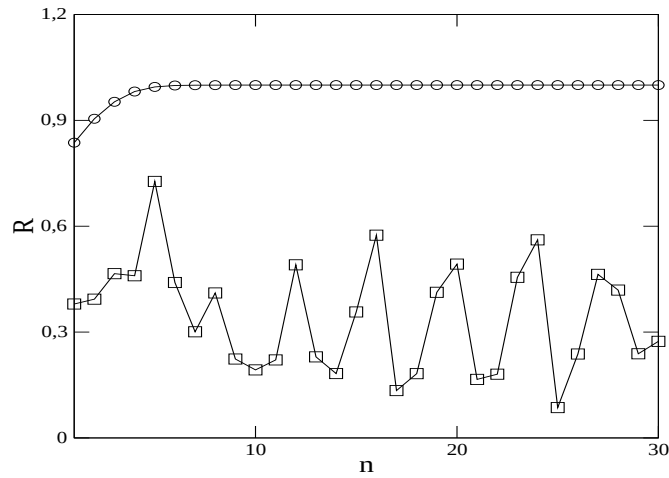


Figura 3.5: Parâmetro de ordem versus o tempo para uma rede de mapas logísticos acoplados globalmente, considerando $N = 100$, $r = 4,0$; círculos $\varepsilon = 0,6$; quadrados $\varepsilon = 0,1$. Foram feitas 2000 iterações e 1000 descartadas.

Uma aplicação do acoplamento global foi proposto por Rulkov [18] para estudar células neurais.

A introdução de um acoplamento entre células resulta na sincronização dos seus *disparos*, característica observada em alguns sistemas da natureza, como os neurônios por exemplo. Enquanto os disparos tornam-se sincronizados, as oscilações rápidas e caóticas das células durante os disparos permanecem dessincronizadas.

O acoplamento proposto por Rulkov é

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)} \\
y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} + \beta,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde N é o tamanho da rede e $(i = 1, 2, 3, \dots, N)$ identifica a posição espacial de cada célula na rede. O parâmetro $\alpha^{(i)}$ é distribuído aleatoriamente em um determinado intervalo.

Para uma intensidade de acoplamento $\varepsilon = 0$, figura (3.6), não há sincronização dos disparos e a medida em que vamos selecionando células com diferentes valores de parâmetro de controle ($\alpha = 4, 1; 4, 3; 4, 5$ e $4, 7$) em uma rede com 100 células, a regularidade dos disparos perde-se cada vez mais conforme os valores crescentes de α .

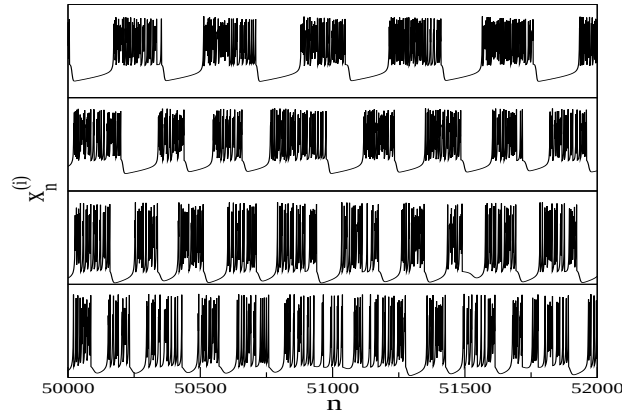


Figura 3.6: Série temporal para os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 1$; (b) $\alpha = 4, 3$; (c) $\alpha = 4, 5$; (d) $\alpha = 4, 7$; $\sigma = \beta = 0,001$, $N = 100$ e $\varepsilon = 0$.

Por outro lado, se a intensidade de acoplamento ε é diferente de 0, ocorre uma regularidade nos disparos das células da rede, como é visto na figura (3.7). Mesmo o valor do parâmetro de controle submetido a células diferentes em

níveis de padrões caóticos consideráveis provocados por α , para este tipo de acoplamento há uma determinada regularização entre os disparos. Porém, se o valor da intensidade do acoplamento entre as células é acrescido mais e mais, consequentemente a regularização entre os disparos segue nesta mesma linha de raciocínio em relação à regularidade, o que é visto na figura (3.8).

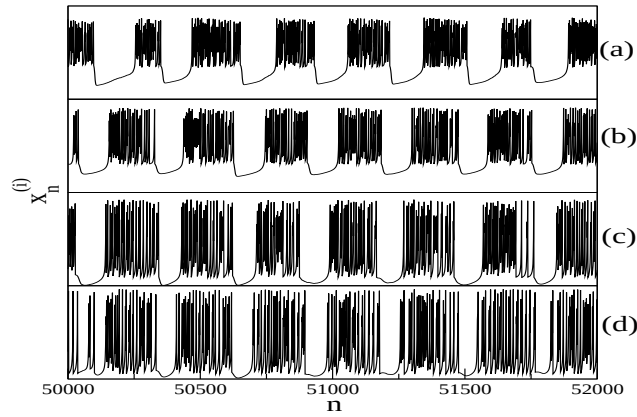


Figura 3.7: Série temporal exibindo os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 1$; (b) $\alpha = 4, 3$; (c) $\alpha = 4, 5$; (d) $\alpha = 4, 7$; $\sigma = \beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0,04$.

No entanto, quando o valor da intensidade de acoplamento ε entre as células da rede atinge patamares da ordem de $\varepsilon \approx 0,5$ os disparos começam a perder a sua forma, ou seja, os disparos característicos tomam uma forma alongada e consequentemente em um número menor de ocorrências dentro de um intervalo de tempo considerado, como mostra a figura (3.9).

Considerando um valor de intensidade de acoplamento $\varepsilon = 1$, a afirmação que *os disparos medidos em cada célula caótica tornam-se quase sincronizados*, tem que ser reescrita como *os disparos tornam-se inexistentes*. Como podemos ver na figura (3.10) a dinâmica produzida por tal intensidade de acoplamento é como se estivéssemos estudando oscilações harmônicas. Contudo, estes resultados observados nestas últimas figuras, (3.9) e (3.10), para investigações de

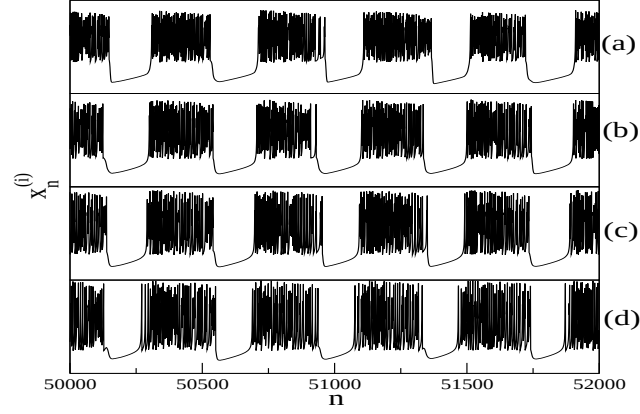


Figura 3.8: Série temporal mostrando os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 1$; (b) $\alpha = 4, 3$; (c) $\alpha = 4, 5$; (d) $\alpha = 4, 7$; $\sigma = \beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0, 1$.

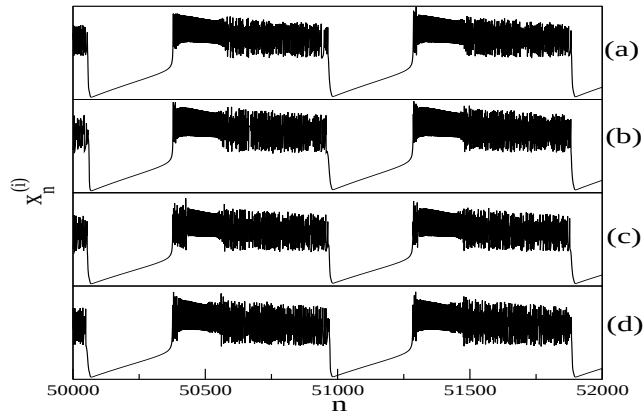


Figura 3.9: Série temporal apresentando os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 1$; (b) $\alpha = 4, 3$; (c) $\alpha = 4, 5$; (d) $\alpha = 4, 7$; $\sigma = \beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0, 5$.

um comportamento de uma rede neural não seriam úteis, pois eles fogem das observações experimentais por não apresentarem a característica dos disparos como os apresentados, por exemplo, na figura (3.7).

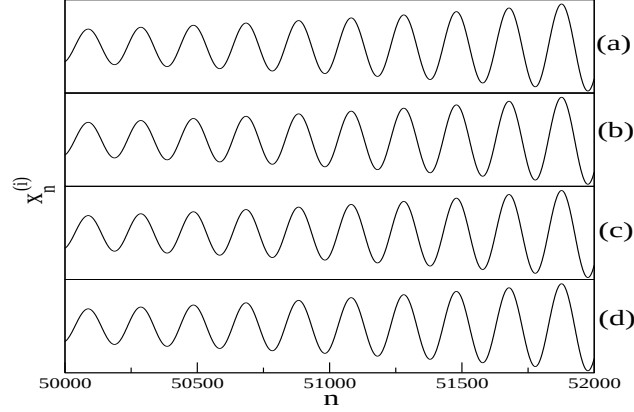


Figura 3.10: Série temporal para os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 1$; (b) $\alpha = 4, 3$; (c) $\alpha = 4, 5$; (d) $\alpha = 4, 7$; $\sigma = \beta = 0, 001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 1, 0$.

O parâmetro externo σ define a dinâmica da variável rápida $x_n^{(i)}$, o qual pode gerar ou não uma formação que pode ser interpretada como picos (spikes). Para um valor de $\sigma = 0, 001$, que é considerado na literatura um valor padrão, uma intensidade de acoplamento $\varepsilon = 0, 04$ e quatro células observadas com $\alpha = 4, 0; 4, 2; 4, 4$ e $4, 6$ em uma rede com $N = 100$, vê na figura (3.11) que para um valor de $\alpha = 4, 0$ os disparos característicos não tem uma forma definida e para valores superiores o comportamento é similar a uma célula como na figura (3.7).

Quando tomamos valores superiores do valor padrão, no caso $\sigma = 0, 002$ para a Figura (3.12), nota-se uma predominância dos spikes, exceto para a Figura (3.12 a), que mantém o comportamento dos disparos, mas de uma forma mais alongada. Por outro lado, a medida que diminuimos o valor de σ de $0, 001$ os disparos começam a diminuir como é visto nas figuras (3.13) e (3.14), até para um valor $\sigma = 0, 00055$ onde as células não apresentam nenhuma característica

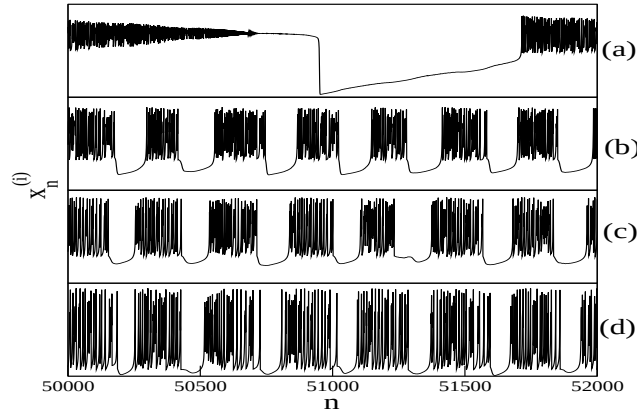


Figura 3.11: Série temporal para os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 0$; (b) $\alpha = 4, 2$; (c) $\alpha = 4, 4$; (d) $\alpha = 4, 6$; $\sigma = \beta = 0, 001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0, 04$.

comportamental frente ao valor padronizado $\sigma = 0, 001$.

3.1.3 Rede Sem-Escala

Recentemente, as pesquisas estão voltadas à análise de estruturas e dinâmicas de redes que são compostas por elementos não idênticos, que possuem uma interação não local e são observadas em muitas disciplinas, englobando desde a biologia molecular até a ciência computacional [25, 26]. A maior dificuldade está na descrição da topologia destes sistemas, pois a maioria deles tem a forma complexa na qual os sítios são os elementos da rede com determinadas conexões. Como exemplo, uma rede genética complexa na qual os sítios são as proteínas e genes, e as interações químicas entre eles são as conexões [27]. Um nível diferente de organização é uma enorme rede que é formada pelo sistema nervoso, onde os sítios são os neurônios e os axônios são as suas conexões [28]. Redes em ciência social onde os vértices são os indivíduos ou organizações e as conexões representadas pelas interações sociais entre elas [29], ou a rede mundial de computadores (World Wide Web - WWW), onde os

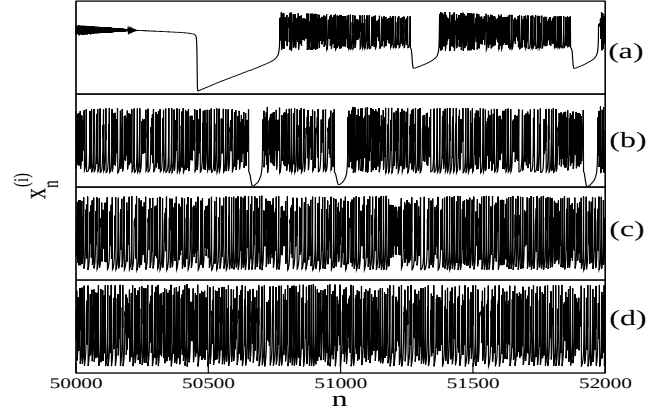


Figura 3.12: Série temporal apresentando os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 0$; (b) $\alpha = 4, 2$; (c) $\alpha = 4, 4$; (d) $\alpha = 4, 6$; $\sigma = 0,002$; $\beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0,04$.

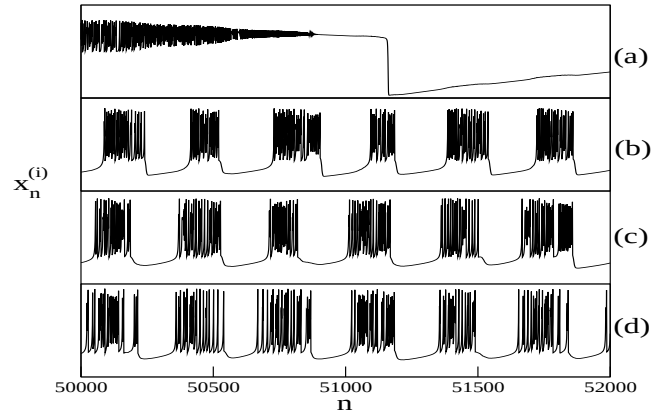


Figura 3.13: Série temporal exibindo os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 0$; (b) $\alpha = 4, 2$; (c) $\alpha = 4, 4$; (d) $\alpha = 4, 6$; $\sigma = 0,0008$; $\beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0,04$.

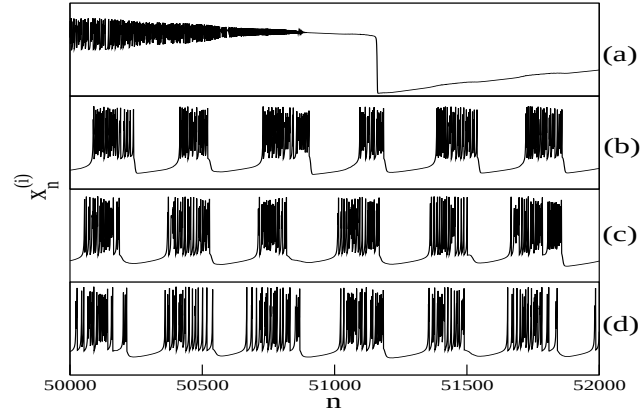


Figura 3.14: Série temporal mostrando os disparos fornecidos pela dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 0$; (b) $\alpha = 4, 2$; (c) $\alpha = 4, 4$; (d) $\alpha = 4, 6$; $\sigma = 0,0006$; $\beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0,04$.

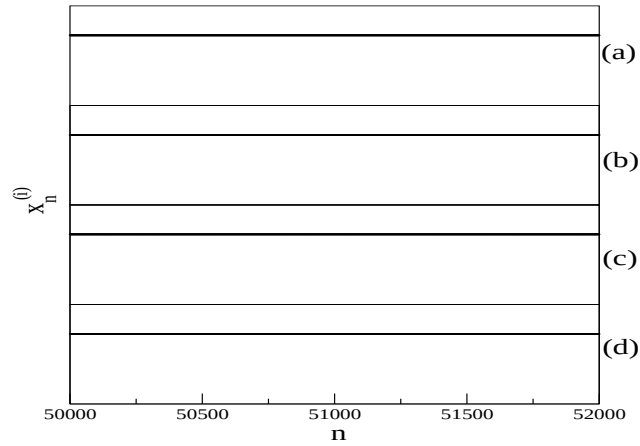


Figura 3.15: Série temporal para a dinâmica rápida $x_n^{(i)}$ sendo (a) $\alpha = 4, 0$; (b) $\alpha = 4, 2$; (c) $\alpha = 4, 4$; (d) $\alpha = 4, 6$; $\sigma = 0,00055$; $\beta = 0,001$ e $N = 100$ células acopladas com uma intensidade $\varepsilon = 0,04$.

vértices são os documentos HTML conectados pelos *links* apontando de uma página para outra [4].

Tradicionalmente, redes com topologias complexas são descritas pela teoria de grafos randômicos de Erdős e Renyi (ER) [4]. Estas redes têm por característica apresentar um alto grau de auto-organização mostrando uma propriedade de larga escala em redes complexas. Entretanto, independente do sistema e da identidade de seus constituintes, a probabilidade $P(k)$ que cada sítio interage com outro k sítio decai com uma lei de potência, seguindo $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Este resultado indica que redes grandes auto organizam-se dentro de um estado sem escala [4], uma característica que não é prevista por todos os modelos de redes randômicas existentes. Atribui-se essa dificuldade ao incorporar o crescimento e conexão preferencial, duas peças chaves de redes reais que são:

1) Crescimento - partindo de um número fixo de elementos que são conectados randomicamente (modelo-ER), com o intuito de simular uma rede no mundo real, elas são formadas pela contínua adição de novos sítios.

2) Conexão Preferencial - redes reais apresentam uma conexão preferencial. Por exemplo: um ator novato, é mais comum ele atuar com um ator bem famoso do que com um menos famoso, consequentemente, a probabilidade com que esse ator novato atue em conjunto com um ator famoso é maior do que com um menos famoso.

Estes dois aspectos genéricos de redes reais não eram incorporados nos modelos que assumiam um número fixo de sítios N , que são randomicamente conectados, modelo-ER figura (3.16 a), onde N sítios são conectados com uma probabilidade P_{ER} . O número total de conexões do sistema é dado por $n = P_{ER}N(N-1)/2$. O exemplo mostra uma rede com $N = 10$ sítios para $P_{ER} = 0,0$ e $P_{ER} = 0,2$. Para $P_{ER} = 0,0$ não há conexões no sistema. Seleccionados cada par de sítios que são conectados com probabilidade $P_{ER} = 0,2$. A figura mostra o resultado deste procedimento, obtendo uma rede um total de $n = 9$ conexões. Para $P_{ER} = 1$ a rede é completamente conectada. No modelo proposto por Watts e Strogats, figura (3.16 b), começa-se com uma rede regular em uma dimensão com os vizinhos mais próximos conectados, sendo a média da conectividade $\langle k \rangle = 4$. A fração P_{WS} é reescrita

randomicamente. O exemplo apresenta uma rede com $N = 10$ sítios. Para $P_{WS} = 0$ o sistema é uma rede regular com $2N = 20$ conexões. Para $P_{WS} = 0,3$, $2P_{WS}N = 6$ conexões foram reconectadas randomicamente. Note que para $P_{WS} = 1$ é obtida uma rede randômica, equivalente para o modelo ER com $P_{ER} = \langle k \rangle / N = 0,4$. Mas ambos têm uma característica em comum nos seus modelos, que é a probabilidade de encontrar um sítio fortemente conectado, isto é, com grande k , decai exponencialmente com k ; então os sítios com grande conectividade são, praticamente ausentes.

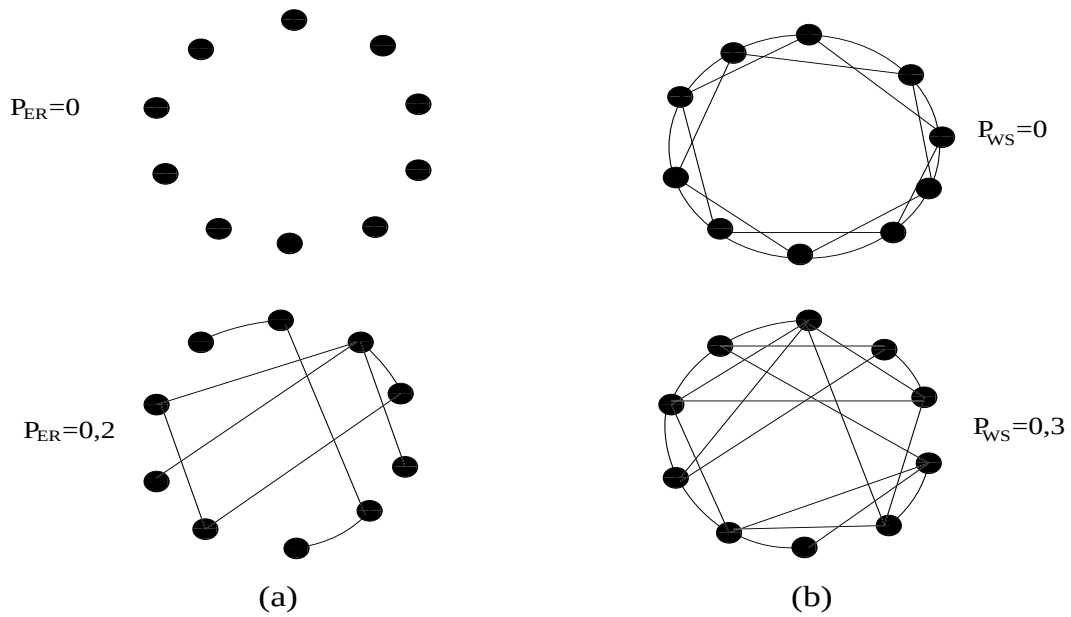


Figura 3.16: Ilustração dos modelos de (a) Erdős-Rényi e (b) Watts-Strogatz.

Em suma, algumas redes reais se expandem continuamente pela adição de novos sítios, e conectam-se preferencialmente a outros que já estão com muitas conexões no sistema. Modelos de redes randômicas, as quais, assumem que sítios são conectados randomicamente e uniformemente, contrastam com sistemas reais que exibem conectividade preferencial como bem visto no exemplo do ator novato atuar preferencialmente com ator mais famoso, indica que a probabilidade com a qual um novo sítio se conecta a sítios já presentes na rede **não** é uniforme e há uma grande probabilidade dele ser conectado a um sítio que tem um grande número de conexões.

Ao longo da história da ciência, foram produzidos vários modelos de redes randômicas, e recentes estudos estão associando estes modelos com o mundo

real, tal como sistemas de informações, econômicas e biológicas. A maior investigação até hoje foi feita por Erdős e Renyi, [30], onde eles utilizaram o primeiro estudo de aspecto estatístico de grafos randômicos, baseado em um método probabilístico. O modelo era simples, assumia que todos os sítios da rede eram equivalentes, e quaisquer par destes eram conectados com a mesma probabilidade P . Dentre outras propriedades dos gráficos randômicos figura (3.17 a), Erdős e Renyi, observaram o surgimento de uma espécie de “enraizamento” dos sítios, e a probabilidade $P(k)$ que cada sítio na rede interage com outro sítio seguia uma distribuição de Poisson, $P(k) = e^{-\gamma} \gamma^k / k!$, onde k são as conexões e γ é a inclinação da reta ajustada.

Uma classe de redes complexas que tem recebido grande atenção é a rede sem escala figura (3.17 b), para a qual a conectividade ou número de conexões de cada sítio, apresenta uma dependência estatística tipo lei de potência. Então em uma rede sem escala, um pequeno número de sítios possui uma grande conectividade, enquanto que a maioria dos sítios são encontrados com baixa conectividade. Especificamente $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, denota a probabilidade de encontrar um sítio com conectividade entre k e $k + dk$. A distribuição tipo lei de potência fica evidente, como uma consequência de dois mecanismos genéricos que já foram citados: redes expandem pela adição de novos sítios e novos sítios são conectados preferencialmente a outros que já estão presentes na rede com muitas conexões.

Muitos problemas envolvem redes sem escala, e têm sido tratados de um ponto de vista grafo-teórico. Por exemplo, redes neurais, que são encaixadas em uma rede tri-dimensional no cérebro, onde os sítios são os neurônios, conectados pelos axônios e dentritos [32]. Há vários trabalhos recentes que usam o implemento de redes sem escala, portanto para investigar modelos dinâmicos de uma função cerebral, por exemplo, é necessário desenvolver métodos para generalizar e analisar sistemas dinâmicos acoplados de redes sem escala.

Assim, para este estudo no qual a dinâmica do sistema possui um tempo discreto, que tem por papel de funcionar como um processamento de informações entre neurônios e com a prescrição de um acoplamento de uma rede sem escala com uma dependência característica tipo lei de potência e da evidência experimental que os neurônios exibem um comportamento caótico, será feito o uso do

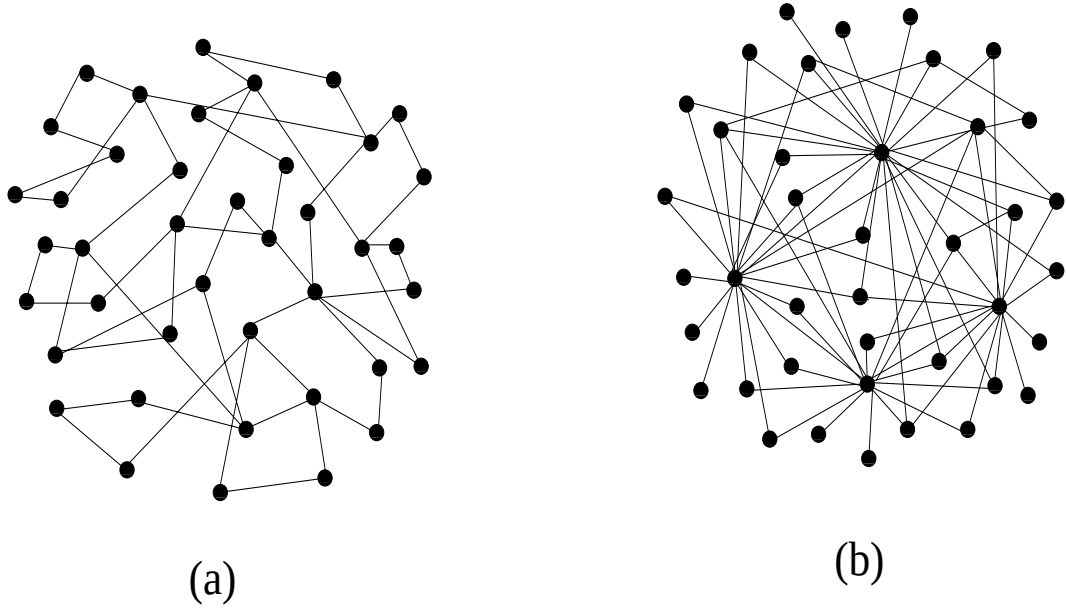


Figura 3.17: Topologias para as redes (a) randômica e (b) sem escala.

acoplamento de mapas logísticos e de Rulkov. Para a rede considerada a intensidade do acoplamento é considerada com o mesmo valor para todos os sítios.

Redes de mapas acoplados são amplamente reconhecidos como simples, mas paradigmáticos para sistemas complexos em redes neurais. Em particular, será examinado uma cadeia de mapas logísticos acoplados $f(x) = rx(1 - x)$, onde $x_n^{(i)} \in [0, 1]$ representa a variável de estado para o sítio i ($i = 1, 2, 3, \dots$) para n tempos e também usaremos o mapa de Rulkov.

Nesta dissertação utilizaremos o seguinte modelo,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{k^{(i)}} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}), \quad (3.8)$$

onde $\varepsilon > 0$ é a intensidade de acoplamento e assumindo que cada sítios i é acoplado com ele mesmo e com $k^{(i)}$ outros sítios escolhidos randômicamente ao longo da rede de acordo com uma distribuição de probabilidade $P(k) \sim k^{-\gamma}$, k é a conectividade, ou o número de conexões por sítio e condições iniciais randômicas para $x_0^{(i)}$.

A rede é construída por uma sequência de passos $s = 0, 1, 2, \dots, s_{max}$; começando com uma semente com $N_0 = 11$ sítios, figura (3.18). Para cada passo s um novo sítio é adicionado na rede de tamanho N_s , tal que ele é conectado a $l = 2$ sítios escolhidos randomicamente. De acordo com a distribuição de uma rede sem escala, estas conexões devem ocorrer preferencialmente a sítios que possuem mais conexões. Isto é feito utilizando uma probabilidade diferente para cada sítio $P_n^{(i)} = k_n^{(i)} / N_n$, onde $k_n^{(i)}$ é o número de conexões por sítio para cada passo s . Este processo é repetido até atingir um tamanho de rede N desejado, no qual foi escolhido $N = 230$ nas simulações numéricas desenvolvidas nesta dissertação. Depois de um número de s_{max} de passos temos $k^{(i)}$ conexões por sítio, correspondendo a probabilidade $P^{(i)} = k^{(i)} / N$. A figura (3.19) mostra um histograma para um número de sítios com uma conectividade k obtida no procedimento para uma rede com $N = 230$ sítios. A aproximação numérica para a distribuição mostra uma lei de potência $P(k) \sim k^{-\gamma}$ com inclinação $\gamma = 2,08$.

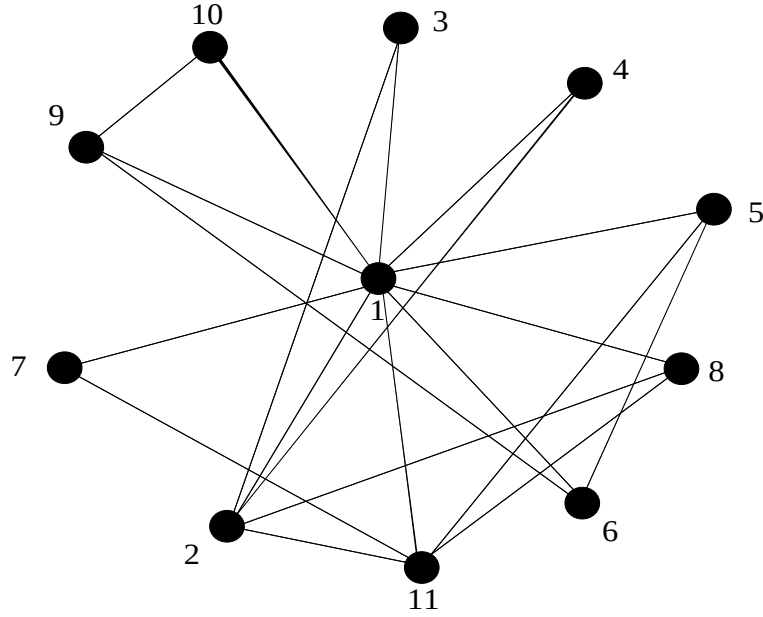


Figura 3.18: Diagrama da semente inicial com $N_0 = 11$ sítios acoplados.

Reescrevendo (3.8) na forma

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{k^{(i)}} \sum_{j=1}^N g_{ij}f(x_n^{(j)}), \quad (3.9)$$

onde g_{ij} são os elementos de uma matriz conectividade $N \times N$, e $g_{ij} = 1$ se os sítios i e j são conectados e zero em outros casos. A matriz de conectividade é simétrica $g_{ij} = g_{ji}$ devido ao processo de construção da rede sem escala, isto é, a conectividade da matriz evolui através de um número finito de passos conservando a sua simetria.

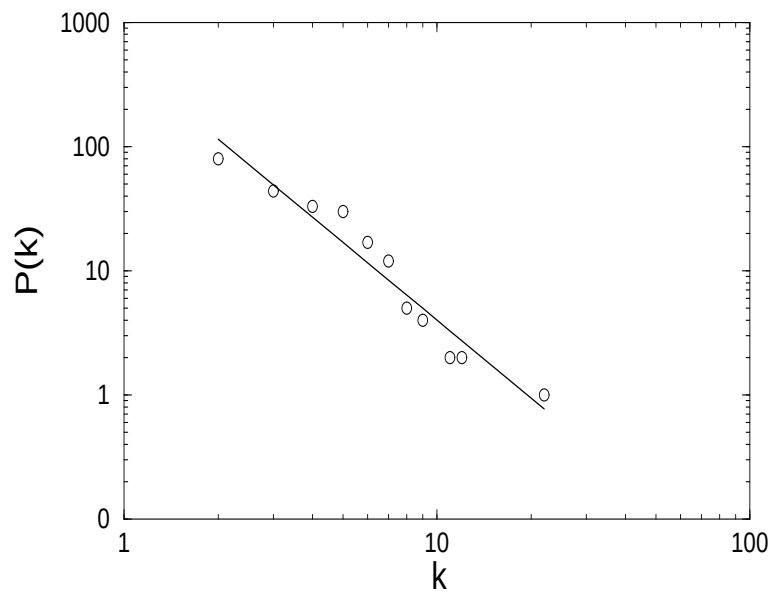


Figura 3.19: Distribuição de probabilidade da conectividade para uma rede de mapas acoplados com $N = 230$ sítios. A linha sólida é a regressão com uma inclinação 2,08.

Capítulo 4

Coerência de Direção (CD)

Consideramos o caso de unidades idênticas e a equação (3.9) descrevendo o comportamento de mapas logísticos idênticos acoplados em um completo estado caótico. Na seqüência, concentrando-se em um sistema com $N = 230$, impondo condições iniciais randômicas. As simulações numéricas mostram que com o aumento do acoplamento ε , para determinados valores do parâmetro de controle r mais e mais sítios têm um comportamento similar e esta similaridade não muda com o tempo. Então denominam-se estes estados que mostram máximos (mínimos) locais, para o mesmo tempo, como estados com coerência de direção. A figura (4.1) mostra o comportamento oscilatório de 230 sítios para uma intensidade de acoplamento $\varepsilon = 0,9$. Mesmo os sítios possuindo os máximos (mínimos) para o mesmo tempo, as amplitudes permanecem diferentes [10]. Na figura (4.1) foram superpostos dois perfis para dois tempos sucessivos logo após um grande número de transiente desprezado, para uma rede de mapas logísticos acoplados, onde a direção é indicada pelas setas.

Agora, a chave do problema é encontrar uma boa definição para a coerência de direção para sistemas a tempo discreto. Podemos presumir que a coerência de direção para estes sistemas pode ter algo com a direção da variável de estado. Para caracterizar quantitativamente a transição da coerência de direção $d_n^{(i)}$ em sistemas iterados, defini-se para os sítios da rede [33],

$$d_n^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_n^{(i)}/x_{n-1}^{(i)} > 1; \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Em decorrência desta definição para $d_n^{(i)}$, em que as amplitudes dos sítios se comportam caoticamente, ocorre que entre duas iterações temporais do mapa, o padrão espacial pode apresentar uma coerência na direção. Isto é, como se dispuséssemos um número determinado de pessoas em uma escadaria de igreja por exemplo, e cada pessoa em um degrau diferente da outra e então de um instante de tempo t para um tempo $t + 1$ todas as pessoas subissem ou descessem um degrau. Neste caso as pessoas estariam em degraus diferentes (amplitudes), entretanto todas se movimentaram na mesma direção (coerentemente direcionados). Esse fenômeno pode exibir algumas variações, como um estado de sincronização completa ou intermitência entre os estados coerentes, os quais dependerão dos valores dos parâmetros do sistema.

Como os sítios estão sempre oscilando, $d_n^{(i)}$ denota uma coerência de direção ou um conjunto de coerências de direções. Baseado nesta definição, podemos dizer o tempo para o qual todos os perfis dos sítios na figura (4.1) estão coerentemente direcionados. Para tempos maiores, um certo número de sítios (ou a rede inteira) pode permanecer coerente ou não coerente. Se há uma informação relevante quanto às amplitudes, se aumentam ou diminuem, a definição para a coerência de direção é suficiente.

Definindo $N_n^{(0)} = \sum_{i=1}^N (d_n^{(i)} = 0)$ e $N_n^{(1)} = \sum_{i=1}^N (d_n^{(i)} = 1)$ como o número de sítios da rede para um tempo n com direção d_n equivalente a 0 e 1 respectivamente, pode-se definir uma razão de coerência ρ_n como

$$\rho_n \equiv \frac{1}{N} \max(N_n^{(0)}, N_n^{(1)}), \quad (4.1)$$

neste caminho podemos ver que, se as direções de todos os sítio “saltam” entre 0 e 1, a razão se aproxima de um valor constante. Se $\rho = 1$, todos os sítios da rede estão em uma direção coerente. O menor valor para esta razão é $\rho = 1/2$, uma situação em que a metade dos sítios tem $d_n^{(i)} = 0$.

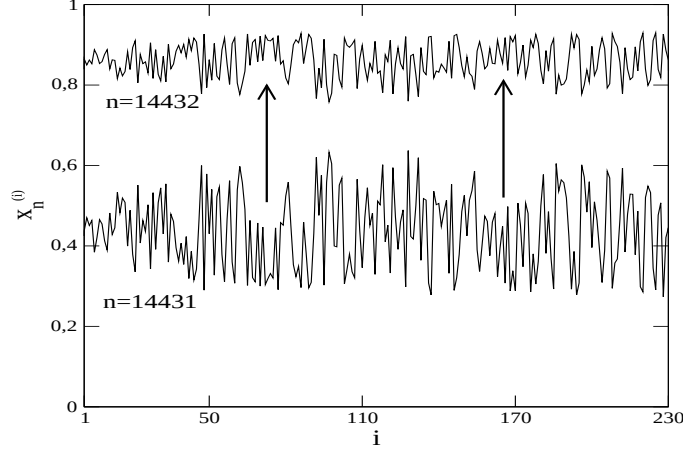


Figura 4.1: Superposição de dois comportamentos espaciais para os tempos $n = 14431$ e 14432 para uma rede sem escala com $N = 230$ mapas acoplados, $r = 3,72$ e $\varepsilon = 0,9$. As setas indicam a coerência de direção.

Como a rede evolui com o tempo, esta razão pode ter comportamentos distintos. Para alguns valores dos parâmetros, figura (4.2 a), a razão de coerência cresce monotonicamente e satura em 1 depois de um número de iterações, tal que para esta figura não foram descartadas as iterações transiente com o intuito de mostrar como a razão da CD comporta-se desde o seu tempo inicial até o tempo em que se deseja observar a dinâmica. Por outro lado, para outros valores dos parâmetros pode surgir um comportamento intermitente, como é ilustrado na figura (4.2 b), onde ρ_n tem comportamentos laminares para 1,0 e irregulares para $\rho_n < 1$.

Para analisar ambas as situações dentro de uma mesma estrutura, definimos a quantidade $F = N_p/\Delta_n$, onde N_p é o número de ocorrências de sítios com coerência de direção, isto é, para os quais $\rho_n = 1$, em um intervalo de tempo Δ_n . Assim, F é interpretada como uma fração de mapas com completa coerência de direção em um dado intervalo de tempo. Por exemplo, na figura (4.2 a), se considerarmos um intervalo de tempo inteiro $\Delta_n = 10$, temos um fração de aproximadamente 60%. Na figura (4.2 b) esta fração é consideravelmente pequena devido

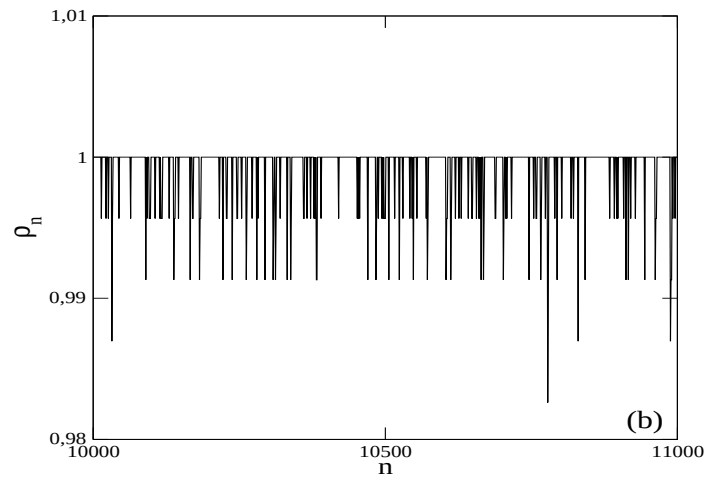
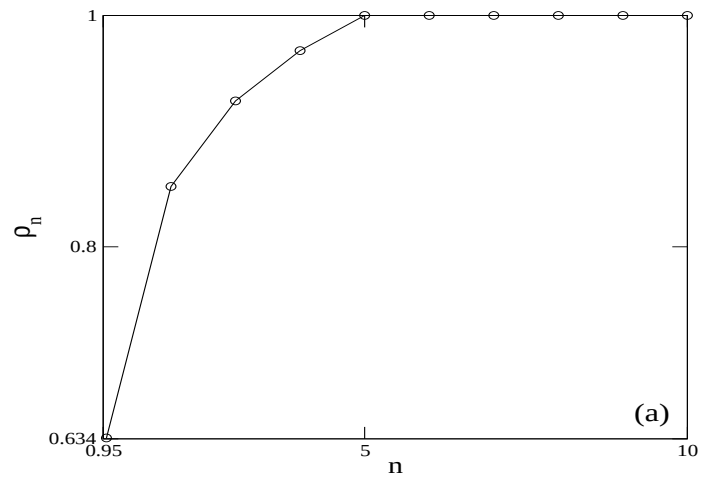


Figura 4.2: Razão da coerência de direção para $N = 230$, (a) $r = 3,69$ e $\varepsilon = 0,9$; (b) $r = 3,72$ e $\varepsilon_c = 0,33831$.

a vários estouros para os quais $\rho_n < 1$, no intervalo de tempo $\Delta_n = 1000$.

Esta fração de tempo onde todos os sítios da rede são coerentes depende da intensidade do acoplamento ε e pode apresentar uma transição crítica, como é mostrado na figura (4.3 a), onde o mapa logístico acoplado com $r = 3,69$ exibe uma transição abrupta de F , de 0 para 1 em $\varepsilon^* \approx 0,32$. Isto significa que com o aumento da intensidade do acoplamento, uma rede completamente não-coerente pode subitamente vir a ser completamente coerente. Há outro ponto crítico onde a transição não é tão abrupta, ocorrendo para outros parâmetros de controle r , como em $\varepsilon_c \approx 0,37$ figura (4.3 b). Para valores superiores do parâmetro de controle, como por exemplo $r = 4,0$, a transição não ocorre, Figura (4.3 c).

Uma característica observada na rede é que, para $\varepsilon > \varepsilon_c$, há um comportamento intermitente [34] entre as regiões laminares de $\rho = 1$ e estouros com $\rho < 1$, como foi observado na figura (4.1 b). As fases laminares têm diferentes comprimentos e seus histogramas normalizados mostram que para dois diferentes valores pós-críticos de intensidade de acoplamento, uma distribuição de probabilidade pode ser ajustada por uma exponencial $P(\tau) \sim e^{-\alpha\tau}$, onde τ é o tamanho da fase laminar e α a inclinação da reta ajustada, figura (4.4), com diferentes valores de α de acordo com a intensidade de acoplamento. Então, para a figura (4.4a) a correlação obtida foi de $-0,973$, e para figura (4.4 b) $-0,971$.

O valor crítico da intensidade de acoplamento ε_c depende do parâmetro de não linearidade r , mas não do tamanho da rede [35]. Vemos na figura (4.5) o comportamento de ε_c *versus* o tamanho da rede N para um valor do parâmetro de controle $r = 3,72$ e observa-se que ε_c exibe flutuações em torno de $\varepsilon_c = 0,35$ de menores amplitudes a medida que N cresce.

A observação de uma segunda transição entre um estado não coerente para um comportamento de coerência completa ocorre para um valor de ε^* quando a intensidade do acoplamento cresce monotonicamente com o parâmetro de não-linearidade r , como é mostrado na figura (4.6). Os valores de r na figura são para os quais somente os seus ε^* correspondentes aparecem, o que não ocorre em situações como nas figuras (4.3 b) (4.3 c).

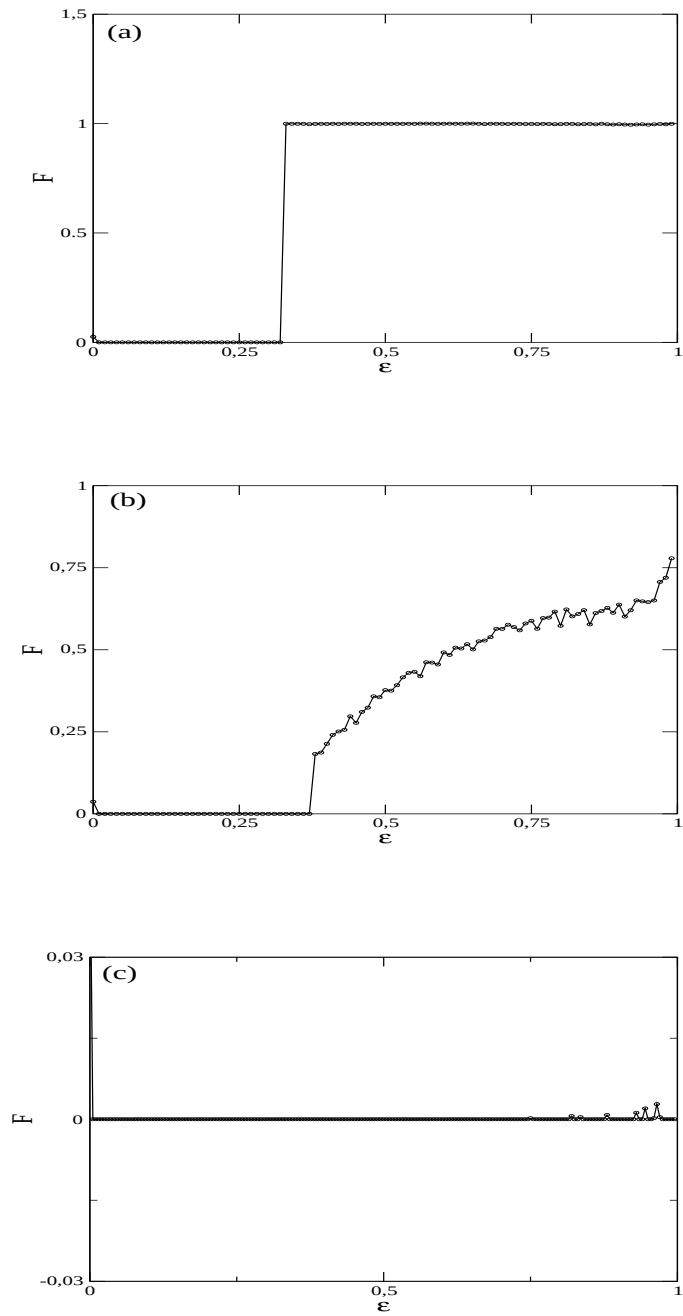


Figura 4.3: Limiar dos estados coerentes versus a intensidade de acoplamento para uma rede sem escala com $N = 230$ e (a) $r = 3,69$; (b) $r = 3,77$; (c) $r = 4,00$. Foram realizadas 10000 iterações das quais 5000 descartadas.

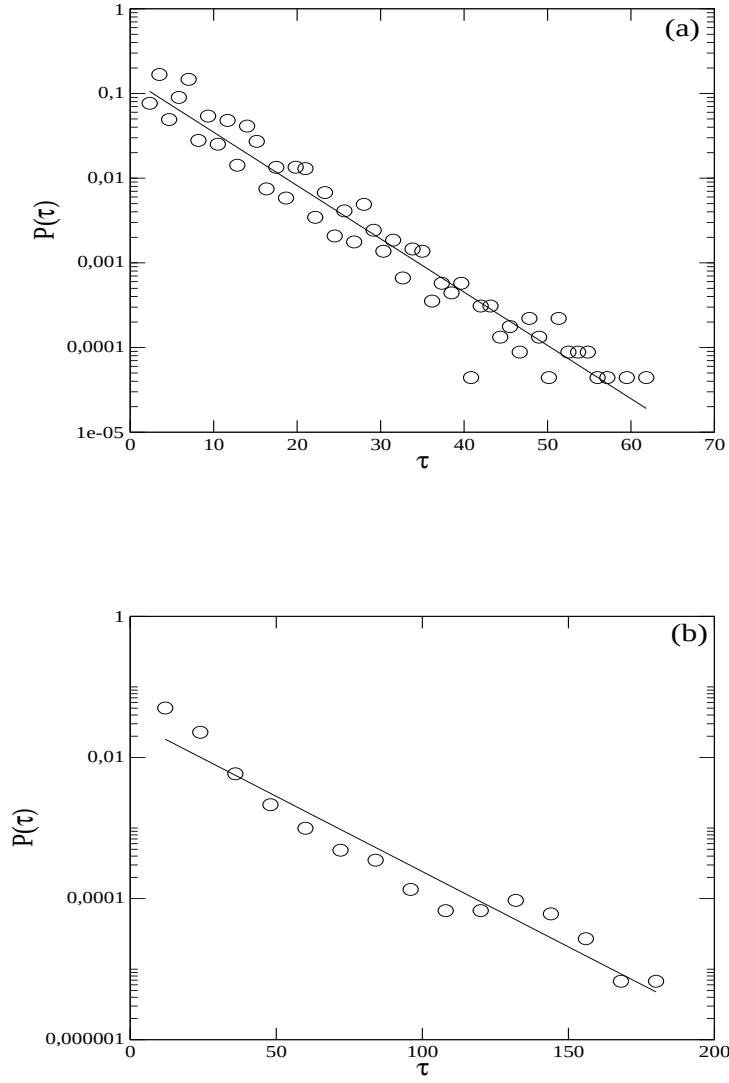


Figura 4.4: Distribuição dos platôs de coerência de direção para uma rede sem escala com $N = 230$, $r = 3,72$, e (a) $\varepsilon = 0,33831$; (b) $\varepsilon = 0,7$. As linhas sólidas representam as regressões com inclinações 0,144 e 0,049, respectivamente. Foram feitas 140000 iterações e descartadas 100000.

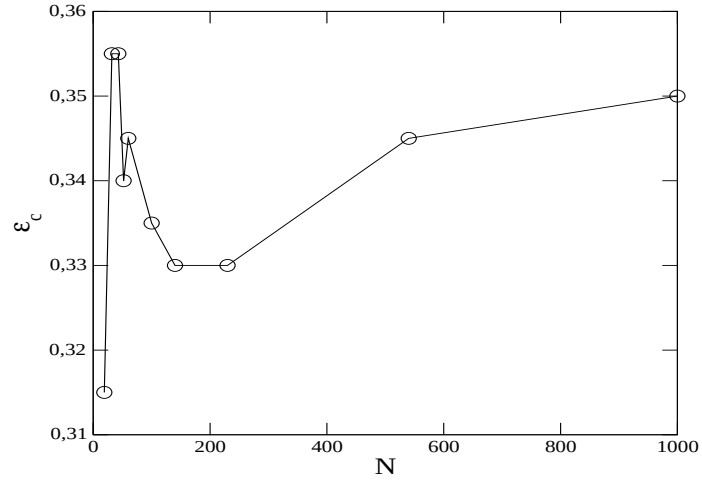


Figura 4.5: Comportamento da intensidade de acoplamento crítico *versus* tamanho da rede para $r = 3,72$. Foram feitas 140000 iterações e descartadas 100000.

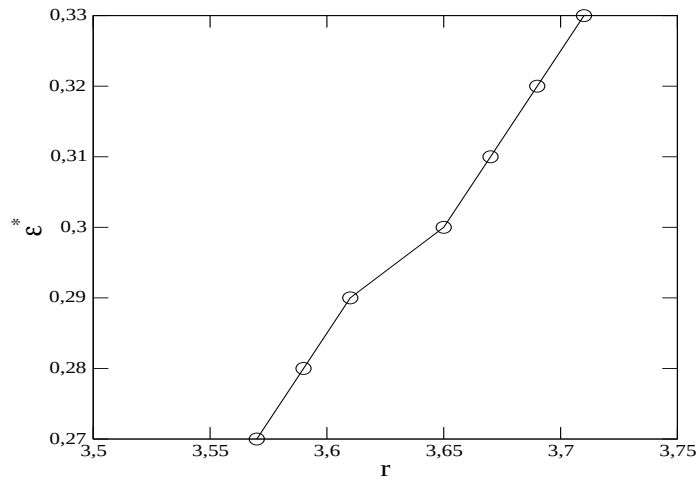


Figura 4.6: Intensidade de acoplamento crítica *versus* r , para $N = 230$. Foram feitas 140000 iterações e descartadas 100000.

Capítulo 5

Sincronização de Fase Caótica de uma Rede Neural Sem Escala

Uma rede neural tem uma propensão natural para armazenar conhecimento e torná-lo disponível para uso. Neurônios comportam-se como somadores algébricos, adicionam entradas excitatórias e subtraem entradas inibidoras, possuem uma propriedade limiar que este dispare um sinal através de um axônio ao exceder um determinado valor. Em uma rede biológica os sinais entre os neurônios são transmitidos por pulsos elétricos viajando ao longo do axônio. Estes pulsos atingem o próximo neurônio em terminais chamados sinapses, encontrados principalmente em um conjunto de ramos de processamento emergente do corpo da célula conhecidos como dendritos e é usada para armazenar este conhecimento.

Muitos estudos têm sido feitos em neurônios artificiais com uma dinâmica não estável [36, 37]. Estes estudos são motivados por resultados obtidos em cérebros de mamíferos [38, 39]. Skarda e Freeman [39] investigaram sinais de eletroencefalograma, oscilações no bulbo olfativo do coelho e observaram que o cérebro realmente "deve usar mecanismos semelhantes aos computacionais". Eles sugeriram que para entender a função do cérebro é necessário saber como o sistema sensorial processa a sua informação e basearam o seu modelo em atividades cerebrais caóticas. Além disso, propuseram que o cérebro se comporta caoticamente por diversos motivos, sendo o principal deles baseado na observação de que o caos é uma forma básica para a atividade neural coletiva em todo o processo de percepção, onde

age como uma fonte de ruído controlada, de modo a certificar um contínuo acesso aos padrões aprendidos anteriormente, e como modo de aprender novos padrões. Em outras palavras, eles observaram que o cérebro faz uma espécie de busca caótica, varrendo todo o espaço de fase tentando encontrar o padrão que melhor se assemelhe ao padrão percebido. No córtex visual do gato, por exemplo, os estímulos sincronizados específicos foram reportados por Eckhorn, Grey e Singer [38]. Babloyants e Dextexhe [40] analisaram o eletroencefalograma humano em vários estados mentais e sugeriram que o caos tem um papel fundamental na resposta a estímulos externos.

O cérebro, um enorme sistema formado por neurônios, é constituído por centenas de módulos especiais com diferentes funções e cada um deles como sendo uma rede complexa, onde cada neurônio recebe uma excitação de alguns milhares de outros neurônios [41]. A atividade neural apresenta dois tempos de escala distintos: (i) uma escala de tempo rápida, caracterizada por picos repetitivos; (ii) um tempo de escala lento com intervalo de disparos de picos. Em observações de experiências biológicas e simulações numéricas, mostram que neurônios isolados podem desenvolver disparos irregulares, enquanto que um conjunto de disparos irregulares podem sincronizar e produzir uma regularidade. A sincronização de fase caótica é definida como sendo a ocorrência de uma certa relação entre as fases interagentes do sistema, especificamente nos disparos como veremos a seguir, enquanto isso as amplitudes dos picos apresentam um regime caótico.

A transição para uma sincronização de fase dos disparos ocorre do resultado da intensidade do acoplamento que pode ser forte o bastante para um sistema acoplado globalmente onde cada neurônio interage com o campo médio produzido pela rede [15]. O princípio de uma sincronização completa é dependente apenas do número de conexões k recebida por cada neurônio provido com k conexões, não importando outros detalhes da rede [42].

Agora será apresentado um modelo que demonstra o efeito de sincronização e regularização de uma dinâmica caótica de um grupo de células que desenvolvem um comportamento no qual possui disparos caóticos reproduzidos pelas seguintes equações.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)} \\
y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} + \beta,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

que são as mesmas equações utilizadas para um sistema dinâmico acoplado do capítulo 3, equação (3.7). A evolução lenta de $y_n^{(i)}$ é realizada para pequenos valores dos parâmetros positivos β e σ , os quais consideramos 0,001, figura (5.3 b). Os valores dos parâmetros $\alpha^{(i)}$ serão distribuídos randomicamente no intervalo $[4, 1; 4, 4]$, onde o mapa produz oscilações caóticas em $x_n^{(i)}$. Quando $\varepsilon = 0$, dependendo do valor de $\alpha^{(i)}$, temos dois comportamentos diferentes de regimes qualitativos: oscilações caóticas contínuas e disparos caóticos [18] mostrados na figura (5.1). Como podemos ver nas figuras a duração média dos disparos é bastante sensível aos valores de $\alpha^{(i)}$. As figuras (5.1 b) e (5.1 d) mostram a sincronização dos disparos utilizando o acoplamento global dado pelas equações (5.1) considerando uma intensidade de acoplamento igual a $\varepsilon = 0,04$. Para $\varepsilon = 0,0$ percebe-se que o fato dos sítios estarem desacoplados há uma irregularidade nos disparos, figuras (5.1 a) e (5.1 c).

Estes resultados foram, originalmente, demonstrados por Nikolai F. Rulkov [18]. O que se desenvolverá a partir deste ponto será uma implementação deste modelo dentro de um sistema em que há um comportamento onde um número fixo de constituintes da rede aumenta pela adição de outros novos sítios, ou seja, uma rede sem escala,

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + (x_n^{(i)})^2} + y_n^{(i)} + \frac{\varepsilon}{k^{(i)}} \sum_{j=1}^N g_{ij} x_n^{(j)} \\
y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} + \beta,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

onde as considerações para esta equação, são as mesmas para as equações (3.7 e 3.9) do capítulo 3. Assim, para uma rede sem escala com $4,1 \leq \alpha^{(i)} \leq 4,4$, $N = 230$ sítios e uma intensidade de acoplamento $\varepsilon = 0,04$, da equação (5.2) foi obtida a figura (5.2). Esta figura mostra um comportamento semelhante ao produzido originalmente pela figura (5.1), com um acréscimo de informações nas figuras (5.2 a) e (5.2b) que mostram o comportamento de um indicador para outros diagnósticos, que é o campo médio produzido pela rede,

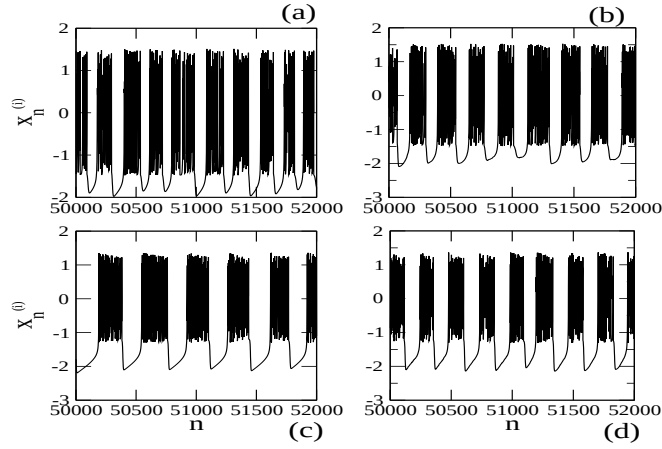


Figura 5.1: Comportamento da variável estado rápida $x_n^{(i)}$ para uma rede com 230 sítios e apenas dois deles analisados, (a) $\alpha = 4, 4$ e (c) $\alpha = 4, 1$, $\varepsilon = 0, 0$. Para (b) $\alpha = 4, 4$ e (d) $\alpha = 4, 1$, $\varepsilon = 0, 04$.

$$M = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}. \quad (5.3)$$

Na figura (5.3 a), observa-se o comportamento da variável de estado rápida $x_n^{(i)}$ em que fica evidenciado os disparos, e na (b) temos a variável lenta $y_n^{(i)}$ para os n_k disparos dos k -ésimos disparos. Ao compararmos as figuras de onde foram retiradas as informações do tempo em que ocorrem os disparos, fica claro o comportamento da dinâmica, porque se quiséssemos da figura superior tal informação, ela de alguma forma não seria precisa, pois não apresenta aparentemente nenhum padrão quantitativo. Ou seja, para desenvolver a simulação numérica provavelmente teria uma perda de precisão. Ao contrário da figura abaixo para $y_n^{(i)}$ onde se tem um padrão bem definido que facilita a visualização dos n_k , que correspondem aos picos da variável lenta. Da análise das figuras verifica-se que há a existência de um tempo característico entre os disparos, permitindo assim, introduzir uma fase dos disparos de cada oscilador no i -ésimo sítio $\varphi_n^{(i)}$

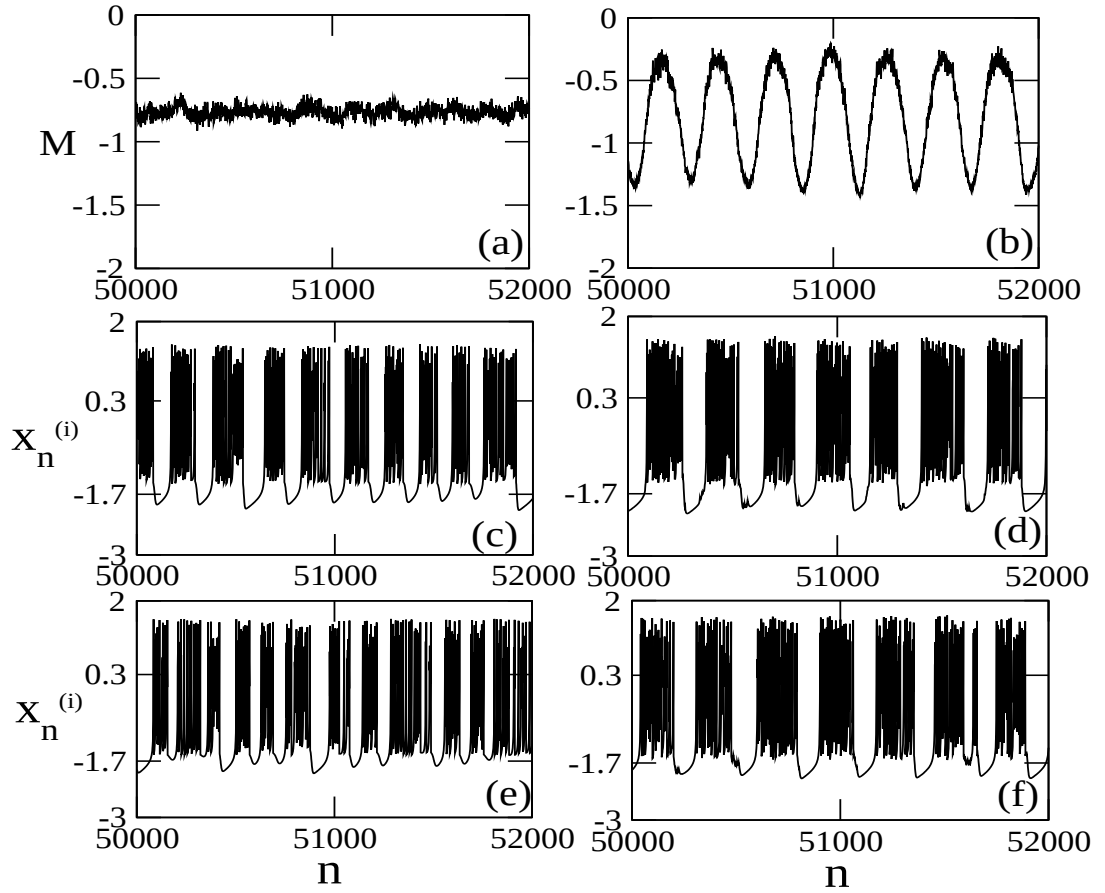


Figura 5.2: Comportamento da variável $x_n^{(i)}$ para uma rede sem escala com $N = 230$ sítios dos quais analisados apenas dois deles, sendo (a) e (b) o comportamento do campo médio; (c) e (e) $\alpha = 4, 1$ e $\alpha = 4, 4$, (d) e (f) $\alpha = 4, 1$ e $\alpha = 4, 4$ respectivamente; coluna à esquerda $\varepsilon = 0$ e coluna à direita $\varepsilon = 0, 04$.

$$\varphi(n) = 2\pi k + 2\pi \frac{n - n_k}{n_{k+1} - n_k}, \quad (5.4)$$

que cresce linearmente entre os n_k disparos para os quais começam, sendo k o número de um disparo e há um acréscimo de 2π a cada intervalo de tempo $n_{k+1} - n_k$.

A frequência dos disparos é uma velocidade média do aumento da fase, dada por

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(0)}{n}. \quad (5.5)$$

Se todos neurônios da rede estão desacoplados eles geram disparos aleatórios no tempo, causando um estado não coerente. Se acoplados, podem forçar os disparos a acontecerem aproximadamente no mesmo instante. Portanto a característica proeminente de sincronização de fase caótica é que as fases podem ser mutuamente ajustadas, enquanto que as amplitudes podem permanecer completamente descorrelacionadas. Então em dois neurônios sincronizados em fase no tempo, os disparos estão próximos, mas as suas amplitudes permanecem descorrelacionados.

5.1 Sincronização de Fase de Disparos Neurais

Na figura (5.4) é mostrado o comportamento da evolução temporal da fase dos disparos. O que se observa é um crescimento monotônico da fase com o tempo. Se os neurônios estão desacoplados este comportamento apresenta inclinações com típicas diferenças e quando acoplados, $\varepsilon = 0,04$, há uma aproximação, mesmo para diferentes valores de α .

Da mesma forma que foi utilizado o parâmetro de ordem (3.3) para o acoplamento global (3.2), será usado para a rede sem escala com o mapa de Rulkov. No entanto agora será implementado para a fase (5.4),

$$z_n = R_n \exp(i\theta_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp\left(i\varphi_n^{(j)}\right), \quad (5.6)$$

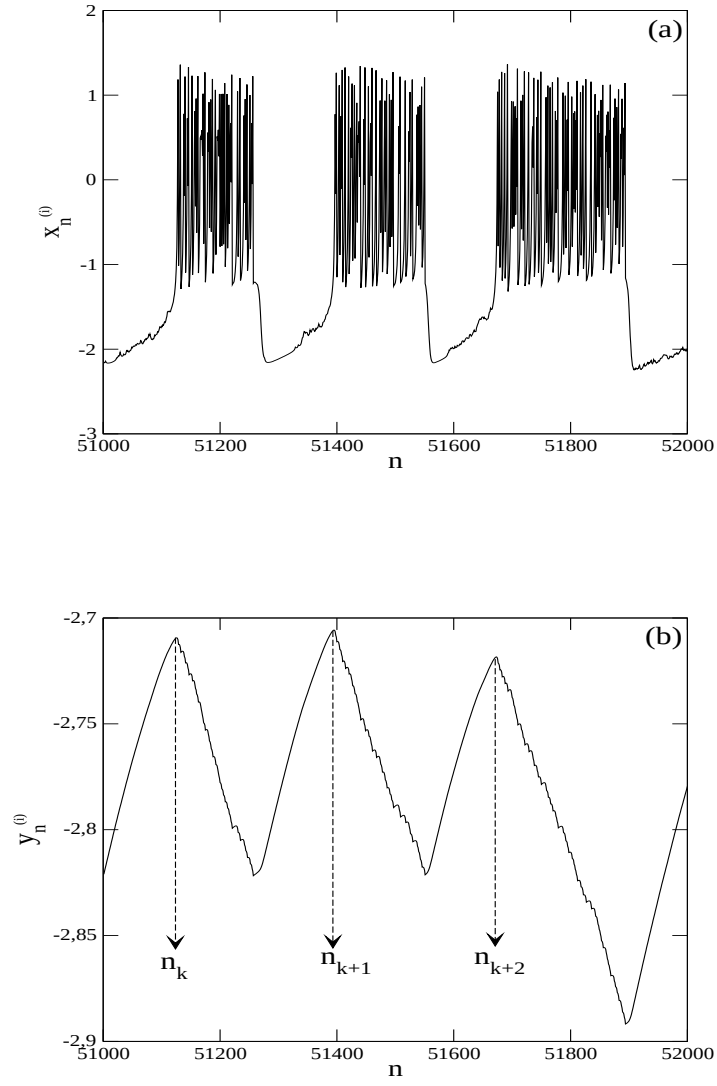


Figura 5.3: Série temporal de $x_n^{(i)}$ e $y_n^{(i)}$ para $\alpha^{(i)} = 4, 1$, $\sigma = \beta = 0,001$; (a) para $x_n^{(i)}$ e (b) definição de n_k dos disparos em $y_n^{(i)}$, para um determinado sítios da rede.

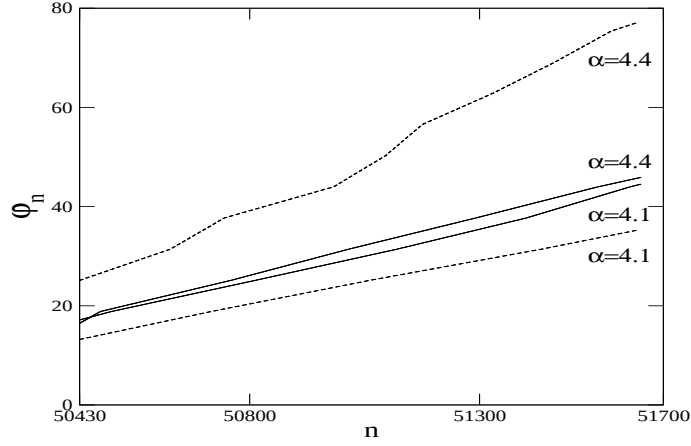


Figura 5.4: Evolução temporal da fase dos disparos para dois sítios em uma rede com $N = 230$, $\alpha^{(i)} = 4,1$ e $\alpha^{(i)} = 4,4$, para uma rede de Rulkov sem escala com $\varepsilon = 0$ (linhas pontilhadas) e $\varepsilon = 0,04$ (linhas contínuas).

Para mapas desacoplados podemos esperar um comportamento para o qual as fases dos disparos φ_n são descorrelacionados espacialmente tal que a contribuição para o resultado da somatória em (5.6) é tipicamente pequeno. Por outro lado, em um estado completamente sincronizado a magnitude do parâmetro de ordem é igual a 1, indicando uma superposição coerente dos vetores de fase para todos os sítios. A figura (5.5) mostra a média temporal da magnitude do parâmetro de ordem,

$$\overline{R}_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=m}^T R_n, \quad (5.7)$$

A figura mostra que, para diferentes conexões l , para as quais cada sítio adicionado na rede é conectado, há um comportamento distinto para o parâmetro de ordem [43]. Se para cada sítio que é adicionado na rede é permitido uma conexão $l=1$, a magnitude $\overline{R}_n$ possui valores que no máximo alcançam 0,75. Quando para cada sítio que entra na rede é permitido duas conexões $l=2$, a rede já apresenta uma boa característica de sincronização, e para $l=3$ o comportamento é semelhante à configuração anterior, com uma sensível melhora dos estados sincronizados. Logo para trabalhar com outras propriedades que exigem sincronização dos disparos, $l=2$

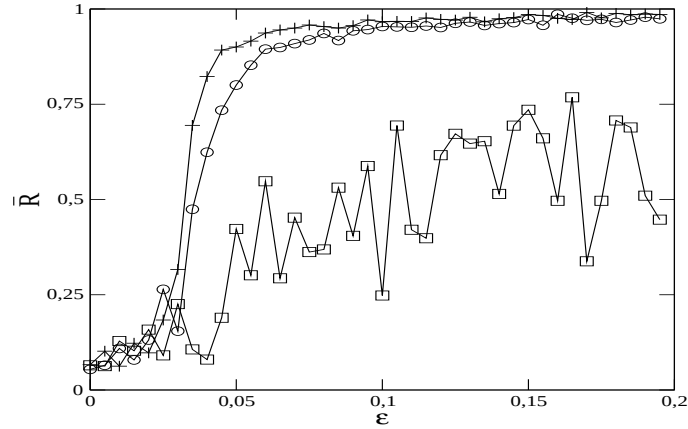


Figura 5.5: Média temporal da magnitude do parâmetro de ordem em função da intensidade do acoplamento ε para uma rede sem escala com o mapa de Rulkov com $N = 230$ sítios para: quadrados $l=1$; círculos $l=2$ e cruzes $l=3$. Foram feitas 52000 iterações das quais 50000 descartadas.

é o suficiente.

5.2 Sincronização de Frequência com Perturbação Externa

Na seção anterior foi visto que neurônios acoplados em uma rede sem escala são capazes de sincronizar os disparos, mas mantendo as amplitudes descorrelacionadas. Alguns deles sincronizam em uma dada frequência. Sendo assim será investigado a seguir a aplicação de um sinal externo com o intuito de obter ou não esta sincronização. O estímulo externo do cérebro tem sido intensivamente estudado com respeito à aplicação de um potencial no controle de patologias rítmicas. Da sincronização de neurônios pode ser pensado em um modelo para simular uma doença como o mal de Parkinson, tremores e epilepsias [44]. Esta intervenção é possível pela inserção de microeletrodos dentro de uma região danificada do cérebro e aplicando

sinais elétricos apropriados [45].

O objetivo é obter a sincronização dos neurônios com a frequência do sinal externo. No entanto, o problema é como e quando esta sincronização pode ocorrer ou não devido a variação dos parâmetros da rede. Rosenblum e Pikovsky propuseram uma ideia de como isto pode ser implementado em redes globalmente acopladas [46]. Ivachenko [15] propôs o uso de um sinal aditivo em um sítio da rede, com amplitude d e frequência ω .

Para o caso da rede sem escala um dos sítios é selecionado. Um sinal harmônico é inserido ao neurônio com $i = I$ da seguinte forma:

$$x_{n+1}^{(I)} = \frac{\alpha^{(I)}}{1 + \left(x_n^{(I)}\right)^2} + y_n^{(I)} + \frac{\varepsilon}{k^{(I)}} \sum_{j=i}^N g_{Ij} x_n^{(j)} + d \sin(\omega n), \quad (5.8)$$

onde d é a amplitude do sinal aplicado e foi escolhido $I = 1$ que é o sítio da rede que possui maior conectividade $k^{(i)}$. Investigamos o efeito desta perturbação externa na sincronização dos disparos.

Quando os neurônios sincronizam com a perturbação a atividade dos disparos correspondem a frequências próximas a um valor comum, $\Omega^{(i)} \approx \omega$. A partir de um determinado valor da amplitude da perturbação é possível observar a sincronização das frequências $\Omega^{(i)}$ dos neurônios com as frequências da perturbação ω , como pode ser visto na figura (5.6).

Se a amplitude do sinal é baixa, figura (5.6 a), as frequências observadas decrescem com o crescimento de ω sem exibir $\Omega^{(i)} = \omega$. Em (5.6 b) há o surgimento de sincronização de frequências para um valor de amplitude de aproximadamente 0,09 e para um pequeno intervalo ao redor de $\omega = 0,013$. O tamanho deste intervalo cresce com o aumento da amplitude d , figuras [5.6 (c)] e [5.6 (d)], sendo uma situação em que Arnold propôs existir esta estrutura para osciladores periódicos forçados [47].

Da característica das conexões de uma rede sem escala, pode haver

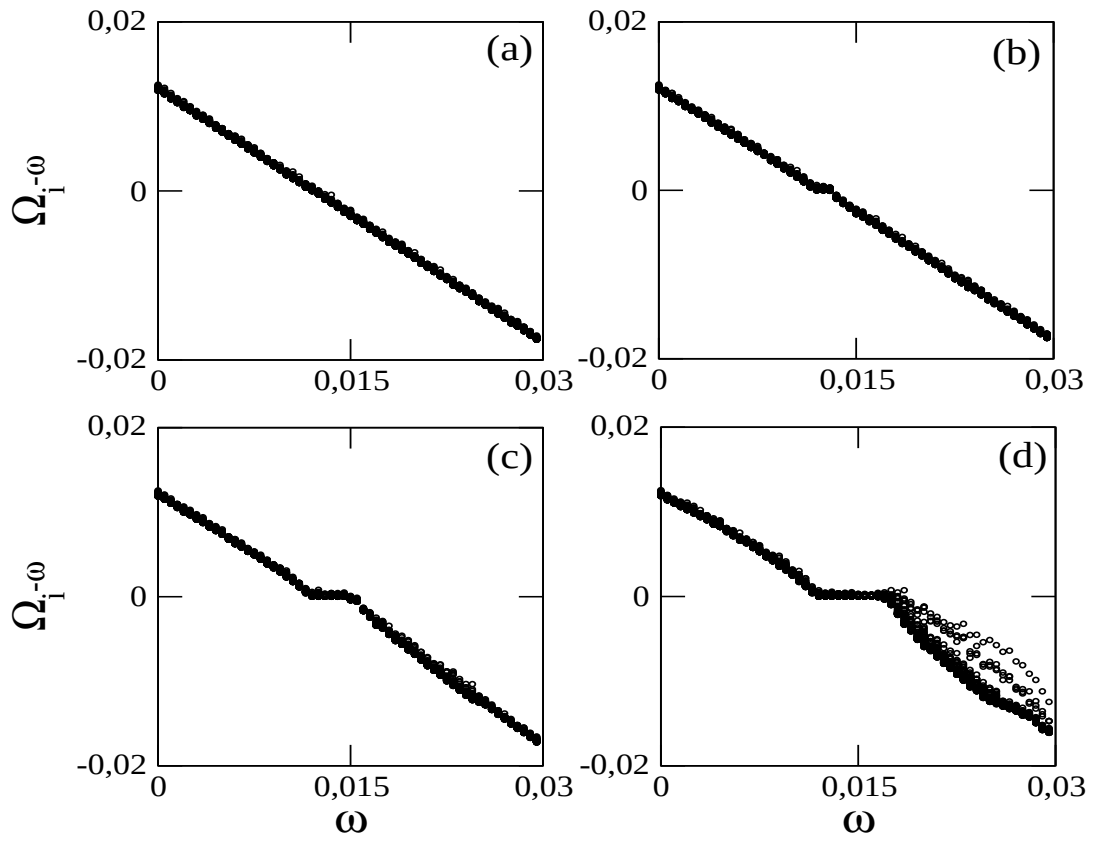


Figura 5.6: Diferença entre as frequências *versus* a frequência externa para uma rede sem escala com $\varepsilon = 0,2$ com amplitudes (a) $d = 0,05$; (b) $d = 0,09$; (c) $d = 0,15$ e (d) $d = 0,20$. Foram feitas 160000 iterações e 100000 descartadas.

uma influência nos resultados na escolha de um sítio [43]. Se escolhermos um sítio com muitas conexões a influência do controle externo é naturalmente maior do que um com poucas conexões. De acordo com a figura (5.7 a) o sítio com maior número de conexões é o $i = 1$ que possui 17 conexões e os demais com menos de 9. A eficácia da conectividade $k^{(i)}$ para a qual ela pode produzir um determinado tamanho de platô de sincronização foi calculada pela largura dos intervalos da frequência de travamento $\Delta\omega$, como mostra a figura (5.6) para um intensidade de perturbação $d = 0,2$. O sítio $i = 1$ tem um intervalo de travamento de frequências quase três vezes maior que o restante dos sítios, figura (5.7 b). Se observarmos com cuidado podemos comparar as extremidades das figuras, que na extremidade esquerda compreendida no intervalo $[1, 4]$, há uma coerência entre o grau de conectividade e o tamanho da frequência de travamento, por outro lado, na extremidade direita não há correlação direta entre essas duas quantidades, mostrando que $\Delta\omega$ independe do sítio tomado.

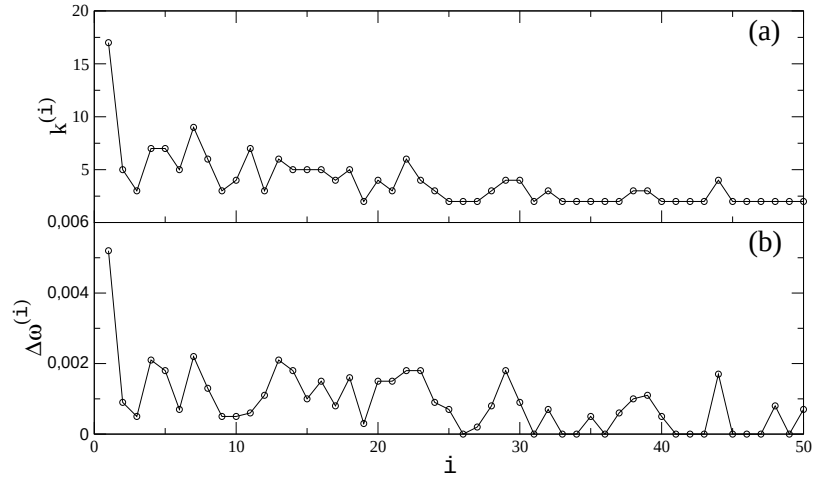


Figura 5.7: (a) Conectividade por sítio e um rede sem escala e (b) largura dos intervalos de travamento de frequência *versus* sítio da rede para um sinal com amplitude $d = 0,20$.

Conforme a posição espacial dos sítios da rede cresce há um decréscimo monotônico do grau de conectividades, figura (5.7 a). Para os tamanhos $\Delta\omega$, figura (5.7 b), esse decréscimo é percebido de uma forma mais sutil, se tomássemos a média

de $\Delta\omega$ possivelmente a caracterização de tal comportamento seria melhor visto.

Capítulo 6

Conclusões

Esta dissertação teve por objetivo o estudo e implementação de redes de mapas acoplados caóticos. Foi explorado um modelo de rede de crescimento contínuo e conexão preferencial, incluindo uma rede neural nestas características. Como dinâmica local, ou a dinâmica com respeito a cada sítio da rede em separado, foram considerados os mapas logístico, equação (2.10) e de Rulkov, equação (2.20), que possuem uma baixa dimensionalidade.

A rede utilizada nesta dissertação foi desenvolvida com o intuito de apresentar uma distribuição tipo lei de potência, que ficou evidenciado na figura (3.19), com uma lei de potência $k^{-\gamma}$ com coeficiente angular $\gamma = 2,08$. Em uma rede neural estudada na referência [41] foi encontrado que γ tem os valores entre 2,0 e 2,2 sendo que o valor obtido nesta dissertação ficou dentro deste intervalo.

Embora os sítios comportem-se caoticamente, quando acoplados eles podem de uma certa forma desenvolver um estado de coerência de direção. Em muitos casos os osciladores podem apresentar amplitudes diferentes com um regime caótico, mas com uma coerência de direção. Tais variações foram estudadas no capítulo 4, onde a fração dos estados coerentes é calculada em função da variação do parâmetro de acoplamento ε . Se o valor do parâmetro de controle r é considerado dentro de uma região de caos fraco ($r = 3,69$), há uma súbita coerência de direção completa. Para valores intermediários de r surge a intermitência e o comportamento da fração apresenta um caráter crescente. Quando o sistema é submetido a caos forte,

$r = 4, 0$, estados coerentes aparecem apenas em eventuais casos. Se a dinâmica da rede apresenta intermitência dos estados de coerência de direção podemos estudar os platôs dos estados coerentes através da distribuição dos seus respectivos tamanhos. Verificamos que a distribuição dos tamanhos dos platôs apresenta um comportamento exponencial.

Estudamos a dependência dos estados coerentes com os valores dos parâmetros e tamanho da rede, assim o modelo foi submetido a duas condições. Primeiro, fixado o parâmetro de controle em $r = 3,72$, constatou-se que o limiar da coerência de direção estabilizou-se para tamanhos de rede superiores a valores da ordem de 10^3 , figura (4.5). A outra condição foi em que a rede é fixada e os parâmetros de ordem r e acoplamento ε são variados. A figura (4.6) mostrou duas regiões: uma a esquerda que contém todos os possíveis valores onde há coerência de direção, e a outra a direita onde a rede se submetida a valores de r e ε não haverá estados com coerência de direção.

O trabalho reportado nesta dissertação foi então, utilizando essa base de conhecimentos, recursos computacionais e modelos de rede de mapas acoplados caoticamente, modelar uma rede artificial de neurônios acoplados. Foi possível investigar uma sincronização de fase dos disparos após ter definido uma dinâmica conveniente para a fase dos disparos. Observando que a fase de diferentes mapas acoplados submetem-se a similares evoluções com tempo devido ao crescimento da intensidade do acoplamento entre eles. Isto pode realçar a eficácia da rede, desde que a informação possa ser codificada no intervalo entre a fase, tal que agrupamentos de neurônios similares possam atuar cooperativamente na ordem para produzir um resultado coerente. A caracterização destes efeitos coletivos foi realizado usando vários diagnósticos numéricos, como a análise dos platôs de frequências perturbados e um parâmetro de ordem complexo.

Na figura (5.5), para o comportamento do parâmetro de ordem, verificamos que ocorre sincronização dos disparos para $l \geq 2$ [43]. Na referência [48], considerando o mapa logístico, foi demonstrado que a sincronização de caos para as amplitudes ocorre para $l \geq 8$. Para a sincronização dos disparos é suficiente usar $l = 2$.

A proposta de um estímulo externo em algumas áreas do cérebro é eficaz no controle de certos comportamentos dinâmicos [46] usando um sinal externo periódico em um determinado sítio da rede. Foi observado o surgimento de uma frequência de travamento entre os disparos e a frequência aplicada. A largura do intervalo da frequência de travamento aumenta com a amplitude aplicada devido a evolução caótica associada com a dinâmica dos disparos. A largura também depende de qual sítio a perturbação é aplicada, sendo que a maior largura é obtida aplicando a perturbação no sítio com maior número de conexões.

Como trabalhos futuros estudaremos o mapa de Rulkov considerando outras formas de acoplamento. Uma das formas possíveis é o acoplamento entre redes utilizado na referência [49].

Bibliografia

- [1] *Eds. S. Borhnoldt e H. G. Schuster.* Eds. S. Borhnoldt e H. G. Schuster, Wiley-VCH Verlag (2003).
- [2] R. Albert e A. L. Barabási. Physics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74, 47 (2002).
- [3] A. L. Barabási e R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 54, 39 (1999).
- [4] A. L. Barabási e R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 509 (1999).
- [5] K. Alligood; T. Sauer e J.A. Yorke. Chaos: An introduction to dynamical systems. *Ed. Springer-Verlag; New York*, (1997).
- [6] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261, 459 (1976).
- [7] L. Jun-Guo e X. Yu-Geng. Chaos communication based on synchronization of discrete-time chaotic systems. *Chinese Phys.*, 14, 2 (2005).
- [8] S. Wuchty. Molecular biology evolution. *Oxford Journals, Oxford University Press*, 18 (2001).
- [9] O. De Feo. Self-emergence of chaos in the identification of irregular periodic behavior. *CHAOS*, 13, 4 (2003).
- [10] B. Hu e Z. Liu. Phase synchronization of two-dimensional lattices of coupled chaotic maps. *Phys. Rev. E*, 62, 2 (2000).

- [11] L. Ren e B. Ermentrout. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D*, 143, 56-73 (2000).
- [12] R. M. Harris-Warrick. Dynamics biological networks: The stomatogastric nervous system. *R. M. Harris-Warrick (MIT, Cambridge, MA)*, (1992).
- [13] M. Steirad; D. A. McCormick e T. J. Sejnowski. Thalamocortical oscillations in the sleeping and aroused brain. *Science*, 262, 679 (1993).
- [14] W. Schultz. *J. Neurophysiological*, 80, 1 (1998).
- [15] M. V. Ivachenko; G. V. Osipov; V.D. Shalfeev e J. Kurths. Phase synchronization in ensembles of bursting oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 134101 (2004).
- [16] A. Szücs; P. Varona; A. R. Volkovskii; H.D. Abarbanel; M. I. Rabinovich e A. I. Selverston. Interacting biological and electronic neurons generate realistic oscillatory rhythms. *NeuroReport*, 11, 563 (2000).
- [17] University of St. Andrews Scotland. History of mathematics. Maio, (2000).
- [18] N. F. Rulkov. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Phys. Rev. Lett.*, 86, 1 (2001).
- [19] K. Kaneko e J. P. Crutchfield. Directions in chaos. *Hao Bai Lin (Ed.)*, 272, (1987).
- [20] Wiley e Sons K. Kaneko, edited by K. Kaneko. In theory and applications of coupled map lattices. *Chichester*, (1993).
- [21] S. E. de S. Pinto e R. L. Viana. *Phys. Rev. E*, 61, 5154 (2000).
- [22] S. Isola; A. Politi; S. Ruffo e A. Torcini. Lyapunov spectrum of coupled map lattices. *Phys. Lett. A*, 143, 8 (1990).
- [23] K. Kaneko. Coupled maps with global and local interactions. *American Institute of Physics, An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10, 2, 359-365 (2000).
- [24] Y. Kuramoto. Chemical oscillations, waves and turbulence. *Spring-Verlag*, Berlin, (1984).

- [25] R. Gallagher. Beyond reductionism. *Science*, 284, 79 (1999).
- [26] R. F. Service. Exploring the systems of life. *Science*, 284, 80 (1999).
- [27] G. Weng; U. S. Bhalla e R. Lyengar. Complexity in biological signalling systems. *Science*, 92, 284 (1999).
- [28] C. Koch e G. Laurent. Complexity and the nervous system. *Science*, 96, 284 (1999).
- [29] S. Wasserman e K. Faust. Social network analysis. *University Press*, (1994).
- [30] H. Jeong. Complex scale-free networks. *Physica A*, 321, 226 (2003).
- [31] M. F. Shlesinger e J. Klafter. Accelerated diffusion in josephson junctions and related chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 54, 2551 (1985).
- [32] J. L. Hindmarsh e R. M. Rose. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 221, 1222 (1984).
- [33] W. Wang; Z. Liu e B. Hu. Phase order in chaotic maps and in coupled map lattices. *Phys. Rev. Lett.* 84, 2610, (2000).
- [34] A. M. Batista; S. E. de S. Pinto; R. L. Viana e S. R. Lopes. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling. *Phys. Rev. E*, 65, 056209 (2002).
- [35] C. A. S. Batista; A. M. Batista; S.E. de S. Pinto; R. L. Viana e I. L. Caldas. Direction coherence in scale-free lattices of chaotic maps. *submetido*, (2006).
- [36] D. Farmer; A. Lapedes; N. Packard e B. Wendroff. Evolution; games and learning models for adaptation in machines in nature. *Physica D*, 22, 1 (1986).
- [37] K. Aihara e M. Toyoda. Chaotic neural networks. *Phys. Lett. A*, 6, 33 (1990).
- [38] R. Eckhorn; R. Bauer; W. Jordan; M. Brosh; W. Kruse e H. J. Reiboeck. Coherent oscillations: an mechanism of feature linking in visual cortex? *Biological Cybernetics*, 60, 2 (1988).

- [39] A. Skarda; C. Nicolis e M. Slazar. Evidence of chaotic in order to make sense of world. *Behavioral and Brain Sciences*, 10, (1987).
- [40] A. Babloyanz; C. Nicolis e M. Slazar. Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle. *Phys. Lett.*, 111, 152 (1985).
- [41] D. R. Chialvo. Critical brain networks. *Physica A*, 340, 756 (2004).
- [42] I. Belykh; E. de Lange e M. Hasler. Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology. *Phys. Rev. Lett.*, 94, 188101 (2005).
- [43] C. A. S. Batista; A. M. Batista; J. A. C. Pontes; R. L. Viana e S. R. Lopes. Chaotic phase synchronization of bursting neurons in scale-free. *submetido*, (2006).
- [44] J. Milton e P. Jung. Epilepsy as a dynamic disease. (Springer Verlag, Berlin (2003).
- [45] M. Rosenblum e A. Pikowsky. Delayed feedback suppression of collective rhythmic activity in a neural ensemble. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16, 7 (2006).
- [46] M. Rosenblum e A. Pikowsky. Delayed feedback control of collective synchrony: An approach of suppression of pathological brain rhythms. *Phys. Rev. E*, 041904, 70 (2004).
- [47] G. V. Osipov; A. S. Pikovsky; M. G. Rosenblum e J. Kurths. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical rössler oscillators. *Phys. Rev. E*, 55, 3 (1997).
- [48] P. G. Lind; J. A. C. Gallas e H. Hermann. Coherence in scale-free networks of chaotic maps. *Phys. Rev. E*, 70, 056207 (2004).
- [49] L. Huang; K. Park; Y. C. Lai; L. Yang e K. Yang. Abnormal synchronization in complex clustered networks. *Phys. Rev. Letters*, 97, 164101-1 (2006).