

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS /
FÍSICA

MSc. Rodrigo Frehse Pereira

**Perturbações em sistemas com variabilidade da dimensão
instável transversal**

Ponta Grossa, 2013

MSc. Rodrigo Frehse Pereira

**Perturbações em sistemas com variabilidade da dimensão
instável transversal**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Ciências/Física do Setor de Ciências Exatas
da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como
requisito para a obtenção de grau de Doutor em
Ciências/Física.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto

Ponta Grossa

2013

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor Tratamento da Informação BICEN/UEPG

- P436 Pereira, Rodrigo Frehse
Pertubações em sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal / Rodrigo Frehse Pereira. Ponta Grossa, 2013. 110f.
- Tese (Doutorado em Ciências – área de concentração : Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
 Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto.
1. Variabilidade de dimensão instável. 2. Caos. 3. Medida natural invariante. 4. Sistemas não-hiperbólicos. 5. Órbitas periódicas instáveis. I. Pinto, Sandro Ely de Souza. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Doutorado em Ciências. III. T.

CDD: 530

Agradecimentos

- À minha querida esposa, Sabrina, pelo amor, pelo carinho e por compreender que esse trabalho demandou tempo e dedicação;
- Aos meus pais, Tadeu e Heloísa, pelo apoio e incentivo sempre presente em toda a minha vida acadêmica;
- Ao Dr. Sandro Ely de Souza Pinto, pela orientação dessa tese, por minha formação acadêmica, por minha iniciação à vida intelectual e pela amizade;
- Ao Dr. Murilo da Silva Baptista, pela supervisão e hospitalidade durante o estágio de doutoramento sanduíche no *Institute for Complex Systems and Mathematical Biology* na *University of Aberdeen* na Escócia;
- À CAPES, pelo suporte financeiro, *via* convênio PROAP/CAPES, pela bolsa de doutoramento pelo Programa Demanda Social e pela bolsa de doutoramento sanduíche *via* Programa Institucional de Bolsas de Doutorado Sanduíche no Exterior, processo BEX: 5706/11-4.

*“The absence of alternatives clears
the mind marvelously”*

- Henry Kissinger

Resumo

A variabilidade da dimensão instável (VDI) é uma forma extrema de não-hiperbolicidade. É um fenômeno estruturalmente estável, típico para sistemas caóticos de alta dimensionalidade, que implica restrições severas ao sombreamento de soluções perturbadas. As perturbações são inevitáveis na modelagem de fenômenos físicos, uma vez que nenhum sistema pode ser isolado completamente, os estados e os parâmetros não podem ser determinados sem incertezas e qualquer abordagem numérica dos modelos é afetada por erros de arredondamento e/ou truncamento. Portanto, a falta da sombreabilidade em sistemas exibindo VDI apresenta um desafio à modelagem. Visando revelar os efeitos das perturbações, uma classe desses sistemas não-hiperbólicos é estudada. Esses sistemas apresentam variabilidade da dimensão instável transversal (VDIT), significando que a dinâmica pode ser decomposta na forma de um produto direto assimétrico, *i. e.* o espaço de fase é dividido em dois componentes: um hiperbólico e caótico, dito longitudinal, e um transversal e não-hiperbólico. Mais ainda, na ausência de perturbações, o componente longitudinal é um atrator global do sistema. Um protótipo composto de dois mapas caóticos lineares por partes acoplados é apresentado para o estudo dos efeitos da VDIT. Esse sistema possui um subespaço invariante $\mathcal{S}$ que caracteriza a sincronização completa de caos e a VDI, quando presente, é transversal a esse subespaço. Valendo-se da linearidade (por partes) das equações, um método analítico para o cálculo das órbitas periódicas instáveis é apresentado. O conjunto de todas as órbitas periódicas instáveis (OPIs) é um dos fundamentos da dinâmica caótica e suas propriedades fornecem informações valiosas sobre o comportamento assintótico do sistema como, por exemplo, a medida natural invariante. Assim, a intensidade da VDIT é estudada analiticamente pelo cálculo da medida de contraste, que quantifica a diferença entre o peso estatístico associado às OPIs com dimensão instável distintas. O efeito das perturbações é modelado pela introdução de um pequeno desvio nos parâmetros, ao invés da adição de ruído, a fim de manter o determinismo do modelo. Consequentemente, a caracterização da dinâmica em termos das OPIs ainda é possível. Demonstra-se a existência de um conjunto denso $\mathcal{G}$ de OPIs fora do subespaço invariante consistente com um repulsor caótico. Na presença de perturbações, $\mathcal{G}$ se funde com o conjunto $\mathcal{H}$ das OPIs previamente em $\mathcal{S}$, dando origem a um novo estado estacionário não-hiperbólico. A análise de $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ fornece uma explicação topológica ao comportamento de sistemas com variabilidade da dimensão instável sob a ação de perturbações. Mais ainda, a relação entre o conjunto de OPIs imersas em um atrator caótico e sua medida natural, provada apenas para sistemas hiperbólicos, é aplicada com sucesso nesse sistema: mostra-se que o erro entre as medidas naturais estimadas numericamente e pelas OPIs é decrescente com p , o período das OPIs consideradas. Conjectura-se, portanto, a coincidência entre ambas no limite $p \rightarrow \infty$. Logo, apresenta-se uma resposta positiva à estimativa numérica da medida natural em sistemas não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável.

Palavras-chave: variabilidade da dimensão instável, caos, medida natural invariante, sistemas não-hiperbólicos, órbitas periódicas instáveis.

Abstract

Unstable dimension variability (UDV) is an extreme form of nonhyperbolicity. It is a structurally stable phenomenon, typical for high dimensional chaotic systems, which implies severe restrictions to shadowing of perturbed solutions. Perturbations are unavoidable in modelling Physical phenomena, since no system can be made completely isolated, states and parameters cannot be determined without uncertainties and any numeric approach to such models is affected by truncation and/or roundoff errors. Thus, the lack of shadowability in systems exhibiting UDV presents a challenge for modelling. Aiming to unveil the effect of perturbations a class of nonhyperbolic systems is studied. These systems present transversal unstable dimension variability (TUDV), which means the dynamics can be split in a skew direct product form, *i. e.* the phase space is decomposed in two components: a hyperbolic chaotic one, called longitudinal, and a nonhyperbolic transversal one. Moreover, in the absence of perturbations, the longitudinal component is a global attractor of the system. A prototype composed of two coupled piecewise-linear chaotic maps is presented in order to study the TUDV effects. This system has an invariant subspace $\mathcal{S}$ which characterizes the complete chaos synchronization and UDV, when present, is transversal to it. Taking advantage of (piecewise) linearity of the equations, an analytical method for unstable periodic orbits' computation is presented. The set of all unstable periodic orbits (UPOs) is one of the building block of chaotic dynamics and its properties provide valuable informations about the asymptotic behaviour of the system as, for instance, the invariant natural measure. Therefore, the TUDV's intensity is analytically studied by computing the contrast measure, which quantifies the difference between the statistical weights associated to UPOs with different unstable dimension. The effect of perturbations is modelled by the introduction of a small parameter mismatch, instead of noise addition, in order to keep the model's determinism. Consequently, the characterization of dynamics by means of UPOs is still possible. It is shown the existence of a dense set $\mathcal{G}$ of UPOs outside the invariant subspace consistent with a chaotic repeller. When perturbation takes place, $\mathcal{G}$ merges with the set $\mathcal{H}$ of UPOs previously in $\mathcal{S}$, given rise to a new nonhyperbolic stationary state. The analysis of $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ provides a topological explanation to the behaviour of systems with TUDV under perturbations. Moreover, the relation between the set of UPOs embedded in a chaotic attractor and its natural measure, proven only for hyperbolic systems, is successfully applied to this system: the error between the natural measure estimated both numerically and by means of UPOs is shown to be decreasing with p , the considered UPOs' period. It is conjectured the coincidence between both in $p \rightarrow \infty$ limit. Hence, a positive answer to reliability of numerical estimation to natural measure in nonhyperbolic systems *via* unstable dimension variability is presented.

Keywords: unstable dimension variability, chaos, invariant natural measure, nonhyperbolic systems, unstable periodic orbits.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração do conceito de estabilidade.	p. 14
1.2	O emaranhado homoclínico.	p. 15
1.3	O atrator de Lorenz.	p. 16
1.4	O mapa de primeiro retorno de Lorenz.	p. 18
1.5	A separação exponencial de duas trajetórias do sistema de Lorenz.	p. 18
1.6	O sombreamento de trajetrias.	p. 20
2.1	A deformação de uma esfera em um elipsoide pela ação da dinâmica.	p. 35
2.2	A quebra do sombreamento devido a não-hiperbolicidade.	p. 39
2.3	O particionamento do espaço de fase por variedades estável e instável.	p. 44
2.4	As imagens e pré-imagens de uma célula de Markov.	p. 45
2.5	A localização proibida para as imagens e pré-imagens.	p. 47
2.6	A medida de contraste como uma função da intensidade do acoplamento.	p. 51
3.1	A função do mapa do bangalô e sua dinâmica simbólica.	p. 55
3.2	As direções longitudinal e transversal.	p. 61
3.3	As curvas de nível do expoente de Lyapunov transversal em termos dos parâmetros a e ε	p. 63
3.4	A imagem dos intervalos de linearidade de dois mapas do bangalô acoplados.	p. 69
4.1	A medida de contraste no espaço de parâmetros $a \times \lambda_2$	p. 74
4.2	Séries temporais da distância ao subespaço invariante transversalmente estável para condições iniciais típicas.	p. 80
4.3	Séries temporais para o sistema na presença de ruído.	p. 82
4.4	Séries temporais de sistemas quase-idênticos acoplados.	p. 88
4.5	A localização dos pontos p -fixos para mapas idênticos e quase-idênticos acoplados.	p. 89
4.6	O esquema para a magnificação de perturbações em sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal.	p. 92
4.7	A medida natural no sistema de coordenadas $x^{(1)} \times x^{(2)}$	p. 93
4.8	A medida natural no sistema de coordenadas $u \times \log_{10} z $	p. 94

4.9	O decaimento do erro na estimativa da medida natural com o período das órbitas periódicas consideradas.	p. 96
-----	--	-------

Conteúdo

1	Introdução	p. 11
2	Fundamentação teórica	p. 26
2.1	Os sistemas dinâmicos caóticos	p. 27
2.1.1	A evolução de medidas e densidades	p. 30
2.1.2	Partições e dinâmica simbólica	p. 33
2.1.3	Os expoentes de Lyapunov	p. 34
2.1.4	A hiperbolicidade	p. 36
2.2	Os sistemas espacialmente estendidos	p. 41
2.2.1	A sincronização completa de caos	p. 42
2.3	As órbitas periódicas instáveis	p. 43
2.3.1	A medida natural	p. 43
2.3.2	A enumeração de órbitas periódicas instáveis	p. 47
2.4	A caracterização da variabilidade da dimensão instável	p. 48
2.4.1	Os expoentes de Lyapunov locais	p. 48
2.4.2	A medida de contraste	p. 49
2.4.3	O expoente de não-hiperbolicidade	p. 51
3	Metodologia	p. 53
3.1	O modelo	p. 54
3.1.1	O mapa do bangalô	p. 54
3.1.2	Os mapas acoplados	p. 57
3.2	A sincronização de caos	p. 59
3.2.1	O caso hiperbólico	p. 64
3.3	As órbitas periódicas instáveis	p. 65
3.3.1	A solução formal	p. 65
3.3.2	As soluções periódicas	p. 67

4	Resultados	p. 72
4.1	A variabilidade da dimensão instável transversal	p. 73
4.1.1	A medida de contraste	p. 73
4.1.2	A convergência ao subespaço invariante $\mathcal{S}$	p. 79
4.2	O efeito do ruído	p. 81
4.3	O estado estacionário para sistemas quase-idênticos	p. 83
4.3.1	O nível de perturbação	p. 84
4.3.2	As órbitas periódicas instáveis	p. 88
4.3.3	A medida natural invariante	p. 91
5	Conclusões	p. 97
5.1	Trabalhos Futuros	p. 101
	Bibliografia	p. 102
	Apêndice A – Produção bibliográfica de Mar/2009 a Dez/2012	p. 107
A.1	Physica A, 388:2515–2525 (2009)	p. 107
A.2	Physica A, 389:5279–5286 (2010)	p. 108
A.3	Physical Review E, 83:037201(4) (2011)	p. 108
A.4	Journal of Physics: Conference Series, 285:012043(8) (2011)	p. 108
A.5	Physical Review E, 86:016216(5) (2012)	p. 109
A.6	Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18:1491–1498 (2013)	p. 109

1 *Introdução*

O início da Teoria dos Sistemas Dinâmicos se funde com a origem da Física como ciência exata, pois foi com a descrição matemática do movimento de corpos que Galileu Galilei introduziu o método científico nas ciências naturais. Ao equacionar, por exemplo, a posição de um corpo em um plano inclinado em função do tempo de deslocamento e de sua localização inicial, Galileu associou ao problema físico um sistema dinâmico. Basicamente, um sistema dinâmico é um conjunto de regras matemáticas que determinam como o estado do sistema se altera com a variação de um parâmetro independente, usualmente denominado *tempo*.

Enquanto o objetivo principal da Física é, a partir da observação, descrever fenômenos naturais com a elaboração de modelos, o objetivo da Teoria dos Sistemas Dinâmicos é determinar as propriedades matemáticas desses modelos. As Mecânicas Clássica e Quântica representam muito bem essa associação, pois valem-se da descrição matemática para caracterizar o estado de um sistema físico, bem como sua evolução. A derivação da Mecânica Estatística em termos da Mecânica Clássica feita por Boltzmann utiliza-se massivamente de ferramentas da teoria dos sistemas dinâmicos e o formalismo de *ensembles*, introduzido por Gibbs, fundamenta-se na descrição de estados estacionários de sistemas dinâmicos.

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos surgiu, portanto, como um ramo da Matemática Aplicada, valendo-se de ferramentas da Álgebra Linear, do Cálculo, da Análise, da Teoria de Medidas e Probabilidades, da Geometria, da Topologia e da Teoria dos Números. Não sendo possível precisar a data, a especificidade dos trabalhos matemáticos tratando das propriedades desses sistemas consolidou a Teoria dos Sistemas Dinâmicos como uma área fundamental da Matemática,

sendo o seu objeto de estudo representado por [1]

$$x(t) = \Phi^t x(t_0), \quad (1.1)$$

com $t_0, t \in \mathbb{T}$ e $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, sendo $d \in \mathbb{N}$ a dimensão de Ω e Φ^t o operador de evolução. O conjunto $\mathbb{T}$ é dado por $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ dependendo da natureza do operador de evolução.

A Eq. (1.1) descreve em símbolos matemáticos um *sistema dinâmico*. O parâmetro escalar t é comumente denominado *tempo* e o vetor $x(t)$ o *estado* do sistema dinâmico no instante de tempo t . O conjunto de todos os estados possíveis do sistema define o *espaço de fase* Ω . Fixando-se $x(t_0)$, denominado *estado* ou *condição inicial*, e t , a Eq. (1.1) descreve uma solução específica do sistema dinâmico, sendo o operador Φ^t uma representação formal dessa solução. Para $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, a sucessão de soluções $x(t_i)$ para $t_{i+1} > t_i$ define uma *trajetória* em Ω , representada pela sequência

$$\{x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)\} \equiv \{x(t_i)\}_{i=0}^n. \quad (1.2)$$

Tipicamente, uma representação explícita para o operador Φ^t em termos de t e $x(t_0)$ não é possível, sendo o sistema dinâmico definido por uma regra de evolução implícita. Por exemplo, a equação de Newton [2],

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \equiv \ddot{x}(t) = -\frac{1}{m} \nabla \phi(x, t) \quad (1.3)$$

que descreve a posição de uma partícula de massa m , sob a ação de um potencial $\phi(x, t)$, em função do tempo t e das condições iniciais $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$, define um sistema dinâmico. Todavia, exceto para alguns potenciais específicos, a Eq. (1.3) não pode ser explicitamente resolvida, *i. e.* o vetor de estado $x(t)$ não pode ser escrito em termos de funções analíticas. Isso não significa, no entanto, que $x(t)$ não possa ser determinado. Pelo contrário, sob condições bastante brandas, o Teorema de Cauchy-Lipschitz garante a existência e unicidade das soluções de equações diferenciais [3]. Eis um exemplo do objetivo principal da Teoria dos Sistemas Dinâmicos: a possibilidade de fazer afirmações sobre as propriedades das soluções de um sistema dinâmico sem, necessariamente, conhecê-las. Nesse caso, a propriedade em questão é a existência, determinada unicamente pelas condições iniciais e pelas propriedades matemáticas do potencial $\phi(x, t)$. Contudo, a obtenção de outras propriedades pode requerer informações

adicionais sobre o sistema dinâmico.

Os sistemas dinâmicos podem ser separados em diferentes classes de acordo com as propriedades das regras de evolução que os definem. Por exemplo, um sistema dinâmico pode ser *determinístico* ou *estocástico*. No primeiro caso, as regras de evolução¹ determinam *unicamente* o estado $x(t)$ em função de $x(t_0)$. No segundo, as regras de evolução definem as probabilidades de cada um dos estados possíveis no tempo t como uma função de $x(t_0)$. Deve-se ressaltar, no entanto, que um sistema dinâmico estocástico cuja variável de estado é $x(t)$ *define* um sistema dinâmico determinístico cuja variável de estado é $\Psi(x, t)$, a densidade de probabilidade dos estados $x \in \Omega$. Se as regras de evolução não dependem explicitamente do tempo, o sistema dinâmico é dito *autônomo*. Sistemas dinâmicos estocásticos são classificados em markovianos e não-markovianos segundo a dependência das probabilidades de transição de um estado $x(t)$ com os estados anteriores $x(t')$, $t' < t$. Um sistema dinâmico determinístico é dito *limitado* se existe um t' tal que $x(t) \in \Omega' \subset \Omega$ para todos $x(t_0) \in \Omega$ e $t > t'$, sendo Ω' um subconjunto finito de Ω . Caso contrário o sistema é dito *ilimitado* ou *aberto*.

As propriedades do espaço de fase Ω e do parâmetro livre t também classificam os sistemas dinâmicos. Caso $t \in \mathbb{Z}$ ($t \in \mathbb{R}$), diz-se que o sistema dinâmico é *a tempo discreto* (*a tempo contínuo*). Sistemas dinâmicos determinísticos, autônomos a tempo discreto ou contínuo são, respectiva e tipicamente representados por mapas,

$$x(t+1) = F(x(t)), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x(0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (1.4)$$

e fluxos,

$$\frac{d}{dt}x(t) \equiv \dot{x} = F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (1.5)$$

sendo, em cada caso, F a respectiva representação para a regra de evolução. Ainda, caso o espaço de fase do mapa possa ser mapeado em $\mathbb{Z}^d$, *i. e.* caso os estados possíveis do sistema definam um conjunto enumerável, tal sistema é denominado *autômato celular*.

Assim, os sistemas dinâmicos autônomos, determinísticos e limitados definem uma subclasse dos sistemas dinâmicos. Por fim, esses sistemas dinâmicos ainda podem ser classificados

¹Para o caso de um sistema dinâmico a tempo contínuo, requer-se que a unicidade das soluções da equação diferencial definida pelo sistema.

segundo características compartilhadas por suas soluções como, por exemplo, a *estabilidade*. A estabilidade é determinada em termos das propriedades da evolução temporal de condições iniciais próximas em Ω . Na Figura 1.1 os conceitos de *estabilidade*, *estabilidade assintótica* e *instabilidade* estão ilustrados pela representação de duas trajetórias iniciadas em $x_0 = x(t_0)$ e $y_0 = x(t_0) + \delta$ sendo δ um pequeno desvio tal que x_0 e y_0 representam pontos distintos mas muito próximos em Ω .

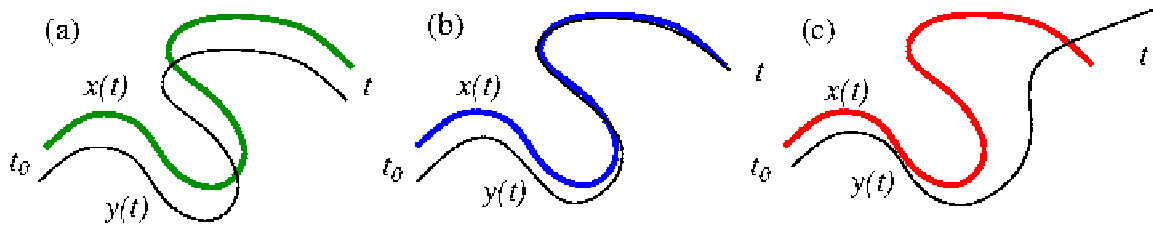


Figura 1.1: Representação esquemática dos conceitos de (a) estabilidade, (b) estabilidade assintótica e (c) instabilidade da solução $x(t)$ de um fluxo. Fonte: adaptado de [4].

Sistemas mecânicos descritos pela Eq. (1.3) com potenciais satisfazendo $\nabla\phi(x) = 0$ são ditos sistemas *conservativos* e não podem apresentar estabilidade assintótica, pois satisfazem o teorema de Liouville e preservam volumes no espaço de fase Ω [5]. Quando volumes em Ω finito não são preservados pela regra de evolução F o sistema é dito *dissipativo* [4].

Nesse trabalho, sistemas dinâmicos da classe caracterizada como determinístico, limitado e instável serão estudados. Tal classe foi primeiramente identificada e estudada por Henri Poincaré, no início do século XX, em seus famosos estudos sobre a estabilidade do sistema solar [6]. Seguindo o processo científico, Poincaré reduziu o problema ao estudo da estabilidade de um sistema dinâmico composto por um corpo puntual de massa m orbitando em torno de dois corpos massivos de massa M , $M \gg m$, estáticos, sob a ação de seus campos gravitacionais [7]. Poincaré verificou, já nesse modelo bastante simplificado, a possibilidade de soluções *instáveis* em sistemas determinísticos e *limitados*. Mais especificamente, demonstrou a existência de interseções de variedades² invariantes no espaço de fase do problema. Tais variedades representam estados instáveis do sistema e, por serem invariantes, a existência de uma intersecção implica a existência de *infinitas* outras [8]. Esta ideia está ilustrada na Figura 1.2. Poincaré

²Uma variedade d -dimensional é um conjunto que, localmente, é representado por um espaço Euclidiano d -dimensional. Por exemplo, uma curva suave e diferenciável no plano $\mathbb{R}^2$ define uma variedade unidimensional, pois pode ser retificada ponto a ponto.

utilizou essa estrutura geométrica, denominada *emaranhado homoclínico*, para inferir que a evolução temporal de qualquer configuração típica desse problema de três corpos seria *instável* e *aperiódica*. Após o também famoso trabalho de Li e Yorke [9], essa forma de comportamento passou a ser denominada *caótica*.

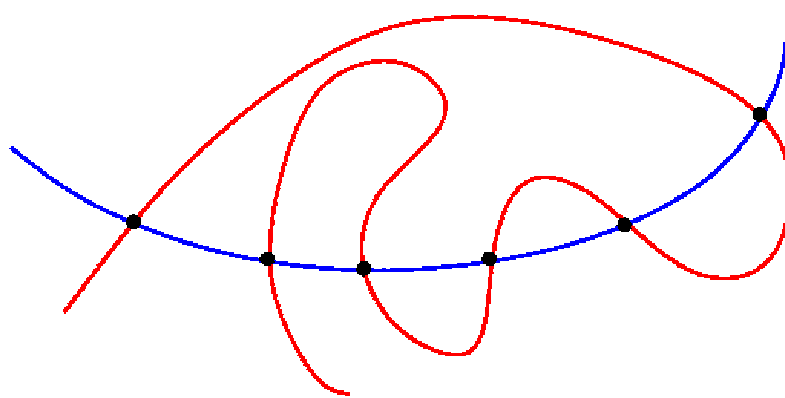


Figura 1.2: Representação esquemática do emaranhado homoclínico introduzido por Henri Poincaré. As linhas vermelhas (azuis) representam variedades instáveis (estáveis) e os símbolos ● indicam as interseções entre as mesmas. Fonte: adaptado de [4].

Ao longo do século XX, diversos matemáticos dedicaram suas carreiras ao estudo de sistemas dinâmicos que apresentavam, em seus espaços de fases, comportamentos semelhantes aos representados na Figura 1.2; para citar alguns: Kolmogorov (1903–1987), Arnold (1937–2010), Moser (1928–1999) e Smale (1930–). Propriedades matemáticas importantes como a existência e a tipicidade do emaranhado homoclínico e suas consequências, como a ergodicidade de soluções típicas, foram demonstradas para uma grande classe de sistemas. Entretanto, foi na década de 1960, com o artigo intitulado *Deterministic Nonperiodic Flow* [10] que Edward Lorenz (1917–2008) introduziu uma mudança de paradigma nas ciências naturais, principalmente na Física. Estudando um modelo bastante simplificado para a convecção, Lorenz constatou que o comportamento agora dito caótico poderia ser típico em sistemas físicos; até então, era consenso na comunidade científica que modelos como o estudado por Poincaré eram frutos das simplificações e aproximações matemáticas e não uma propriedade intrínseca do sistema [11].

Para ilustrar os conceitos e motivar o objeto primeiro de estudo desta tese, considere alguns

resultados referentes ao sistema proposto e estudado por Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) \\ \dot{y} &= \beta x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \gamma z\end{aligned}\tag{1.6}$$

em que α , β e γ são parâmetros reais. A Eq. (1.6) define um fluxo, um sistema determinístico a tempo contínuo, como na Eq. (1.5), *dissipativo*, com $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dependendo dos parâmetros escolhidos, as soluções da Eq. (1.6) podem apresentar comportamentos distintos: as trajetórias podem convergir para um estado estacionário fixo, para estados estacionários periódicos, podem divergir ou apresentar comportamento caótico. Um exemplo desse último caso está indicado na Figura 1.3, para os parâmetros clássicos $\alpha = 10$, $\beta = 28$ e $\gamma = 8/3$ [12]. Percebe-se, a partir das séries temporais indicadas, que a trajetória gerada pela Eq. (1.6) (para os parâmetros escolhidos) é aperiódica.

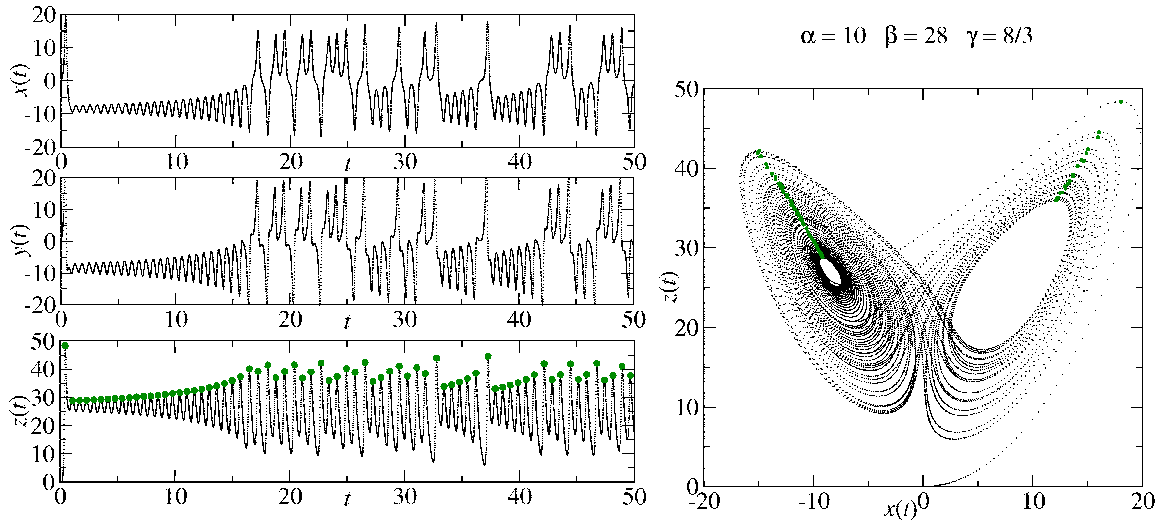


Figura 1.3: Uma representação do atrator do sistema de Lorenz, Eq. (1.6), sendo a projeção de uma trajetória típica no plano $x \times z$ indicada à direita, e as séries temporais de x , y e z à esquerda. Os pontos indicados em verde representam os máximos locais de $z(t)$. Fonte: adaptado de [12].

Devido à não-linearidade das Eq. (1.6), na década de 1960, Lorenz estudou numericamente as soluções. Ao tentar reproduzir alguns resultados previamente obtidos e impressos com três algoritmos significativos³, ele notou que o computador apresentava soluções distintas e completamente descorrelacionadas à previamente obtida, a despeito do *determinismo* da Eq. (1.6).

³Nessa época, os computadores eram valvulados, e seus *hardwares* eram muito mais lentos que os atuais. Lorenz optou por imprimir apenas alguns algoritmos significativos para otimizar o tempo de execução dos cálculos.

Inicialmente, Lorenz chegou a cogitar que tal observação fosse resultado de uma falha em seu computador [11]. Mas, descartada essa hipótese, Lorenz, que possuía um alto grau de instrução matemática, iniciou uma análise detalhada das soluções da Eq. (1.6). Introduzindo uma variável discreta h_n como sendo o máximo local de $z(t)$,

$$h_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad h_n = z(s_n), \quad s_n = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \min_{t > s_{n-1}} \{t : z(t \pm \delta t) < z(t)\}, \quad (1.7)$$

Lorenz reduziu o estudo do fluxo tridimensional à análise de um mapa, da forma da Eq. (1.4), unidimensional de primeiros retornos dado por

$$h_{n+1} \equiv L(h_n). \quad (1.8)$$

Depois de seu trabalho, o mapa (1.8) é denominado *mapa de Lorenz*. Na Figura 1.4 a ação do mapa (1.8) está indicada. Lorenz percebeu uma grande semelhança, denominada equivalência topológica, entre o mapa L e o mapa da tenda, definido no intervalo unitário $[0, 1]$ por (a ação do mapa da tenda pode ser visualizada na Figura 3.1)

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{se } 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2 - 2x_n & \text{se } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}. \quad (1.9)$$

O mapa da Eq. (1.9) já era bastante conhecido pelos matemáticos, sabendo-se gozar das propriedades de *instabilidade*, *aperiodicidade* e *ergodicidade* [13]. Suportado por essa semelhança, Lorenz concluiu que o sistema (1.6) é *caótico*. Os resultados indicados na Figura 1.4 ilustram bem que as soluções do sistema de Lorenz são aperiódicas e limitadas. A *instabilidade* dessas soluções pode ser quantificada determinando-se a evolução de uma perturbação inicial, como foi ilustrado na Figura 1.1. A Figura 1.5 indica tal evolução para duas condições iniciais muito próximas, $|\delta| \sim 10^{-12}$. A linha indicada representa um ajuste da seguinte expressão

$$|\delta(t)| = |\delta(0)| \exp(\lambda t). \quad (1.10)$$

Tipicamente, a divergência média entre duas trajetórias inicialmente próximas não depende da localização das condições iniciais e a taxa de divergência exponencial λ é determinada pelo *expoente de Lyapunov máximo*. A partir de um determinado instante ($t \sim 80$ na Figura 1.5) as

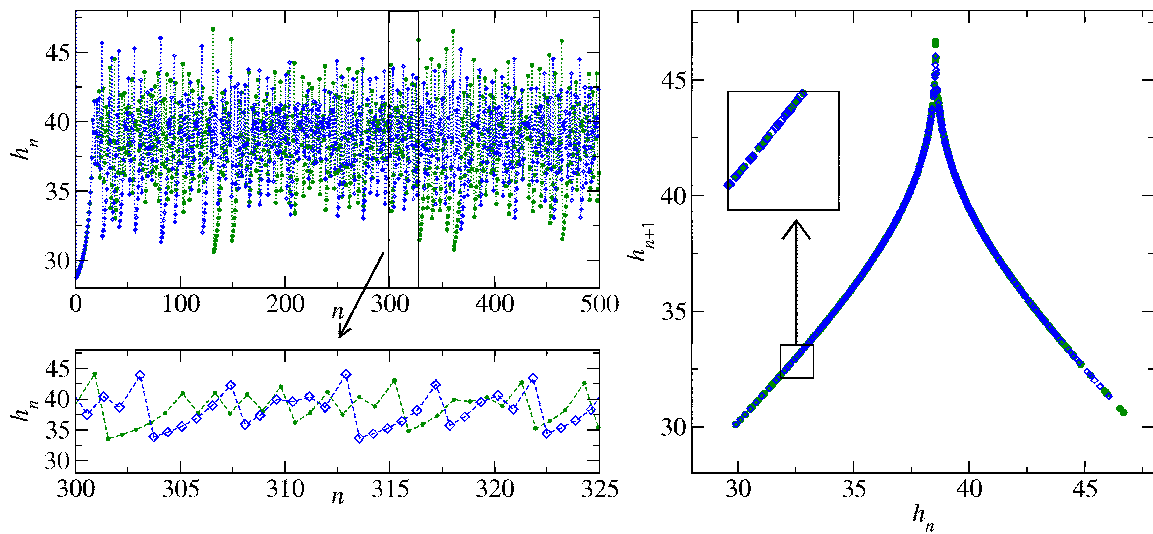


Figura 1.4: (à direita) O mapa de primeiro retorno do sistema de Lorenz, dado pela Eq. (1.8), para os mesmos parâmetros da Figura 1.3. (à esquerda) A série temporal de duas condições iniciais muito próximas, indicadas pelas cores verde e azul. Percebe-se que apesar de apresentarem evoluções temporais completamente distintas, as duas soluções resultam no mesmo mapa de primeiro retorno. Fonte: adaptado de [11].

trajetórias se afastam a ponto de perderem a correlação. Deste instante em diante tipicamente $|\delta(t)|$ apresenta oscilações em torno da ordem de grandeza do atrator.

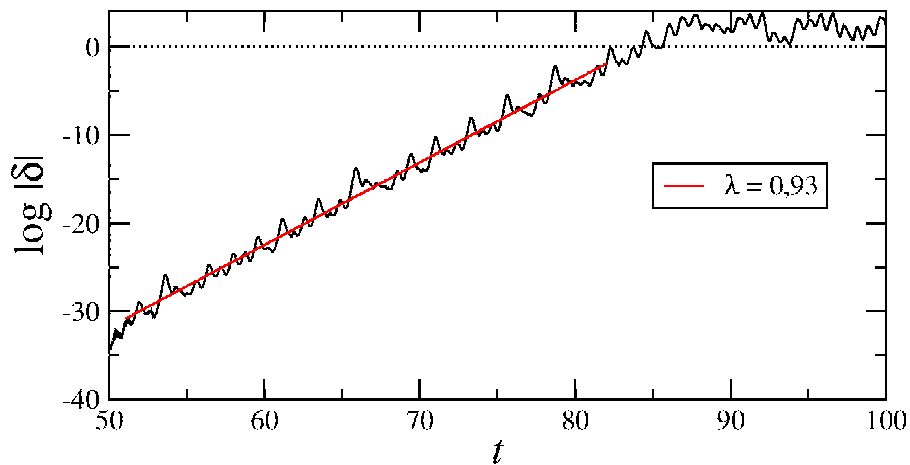


Figura 1.5: A separação de duas trajetórias inicialmente próximas para o sistema de Lorenz, com os mesmos parâmetros da Figura 1.3. Fonte: adaptado de [12].

A apresentação do sistema de Lorenz é motivada por ilustrar as principais características da classe de sistemas dinâmicos estudada nesse trabalho. Primeira: sistemas físicos podem exibir comportamento caótico. Segunda: que perturbações $|\delta|$ são exponencialmente magnificadas devido à instabilidade das soluções de sistemas dinâmicos caóticos. Outro elemento importante é que o comportamento dinâmico de um fluxo pode ser estudado a partir da introdução de

um *mapa*. O mapa de Lorenz, Eq. (1.8), é uma ilustração de uma maneira sistemática de se fazer tal discretização temporal: com a definição de uma seção de Poincaré. Seja $\mathcal{P}(x) = 0$ uma hipersuperfície definida no espaço de fase Ω tal que toda trajetória do fluxo F a intersecta transversalmente. Como o fluxo é determinístico, cada ponto de interseção é univocamente definido pelo ponto anterior, o que define um mapa P , dito *mapa de Poincaré*. Tipicamente, o intervalo de tempo entre duas interseções não é idêntico (exceto para soluções periódicas) e, portanto, existe uma outra função T que determina esse intervalo de tempo, dita *função de tempo de primeiro retorno*. Assim, P e T reduzem o fluxo F a um mapa

$$x_{n+1} = P(x_n) \quad \text{e} \quad t_{n+1} = t_n + T(x_n), \quad (1.11)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ as coordenadas sobre a superfície escolhida [1]. Assim, *todo* fluxo dado pela Eq. (1.5) pode ser reduzido a um mapa, Eq. (1.4), sendo a escolha da seção de Poincaré mais apropriada dependente das propriedades do fluxo.

O quarto ponto a ser salientado é a Figura 1.4. A semelhança entre a ação do mapa de Lorenz com o mapa da tenda (ou mais ainda, com o mapa do bangalô, definido na Eq. (3.1), no Capítulo 3) justifica a introdução na Física de modelos dinâmicos simples, cujas propriedades matemáticas podem ser rigorosamente determinadas. Os resultados matemáticos existentes para o mapa da tenda, que não possui, em princípio, nenhuma motivação física, fundamentaram Lorenz na caracterização da dinâmica de seu modelo.

A instabilidade, a aperiodicidade e a perda da correlação das soluções, ilustradas também na Figura 1.4, indicam que sistemas caóticos podem e devem ser estudados a partir da análise estatística de suas trajetórias. A superposição do mapa de Lorenz construído a partir das duas condições iniciais *distintas* na Figura 1.4 ilustra o fato que o atrator de Lorenz é ergódico, no sentido que trajetórias diferentes percorrerão, ao longo da evolução temporal, diferentes regiões do espaço de fase com uma mesma frequência específica.

Por fim, a divergência exponencial das soluções levanta uma questão fundamental à modelagem: dado que sistemas caóticos são presentes na natureza e que suas soluções são intrinsecamente instáveis, qual a capacidade e a significância de fazer previsões em um modelo

que apresenta dinâmica caótica? Esse questionamento, posto em um nível mais prático, representa o seguinte: qual é a confiabilidade das soluções numéricas⁴, invariavelmente sujeitas a erros de arredondamento e/ou truncamento, desses sistemas? Para ilustrar como essas questões são respondidas, na Figura 1.6 está indicada a evolução temporal de três condições iniciais $x(t_0)$, $y(t_0) = x(t_0) + \delta$ (com $|\delta| \ll 1$) e $z(t_0)$ de um fluxo F caótico arbitrário. Como $x(t_0)$ e $y(t_0)$ estão inicialmente próximos seguem, por um certo período de tempo t' , trajetórias aproximadamente idênticas, mas, devido à instabilidade, afastam-se e tornam-se descorrelacionadas para $t > t'' > t'$. A trajetória de $z(t)$, entretanto, após um tempo τ , torna-se e mantém-se próxima à trajetória $y(t)$ para todo $t > \tau$, a despeito de suas condições iniciais bastante distintas $|y(t_0) - z(t_0)| \gg |\delta|$. Diz-se, então, que a trajetória $z(t)$ *sombreia* a trajetória $y(t)$ ou, equivalentemente, que a trajetória $y(t)$ é *sombreada* por $z(t)$ [14]. Note que o esquema indicado na Figura 1.6 pode ser estendido para perturbações $\delta \rightarrow \delta(t)$, o que representaria um modelo para os erros introduzidos sistematicamente pelo cálculo numérico da solução.

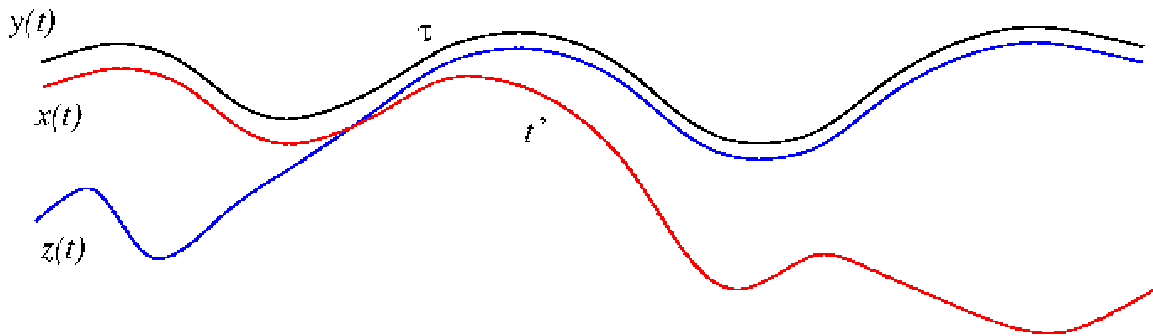


Figura 1.6: Representação esquemática do sombreamento da trajetória $y(t)$ por $z(t)$. Fonte: adaptado de [4].

O sombreamento de trajetórias é, portanto, a justificativa para o uso de cálculos numéricos na análise de sistemas caóticos. É também, em um nível muito mais fundamental, a razão pela qual é possível descrever matematicamente sistemas naturais que apresentam comportamento caótico. Na Figura 1.6, a trajetória $y(t)$ pode representar uma solução obtida a partir de um erro δ na determinação da condição inicial real dada por $x(t_0)$. Tal erro pode ser de cunho experimental ou pode representar, por exemplo, a limitação computacional no armazenamento de $x(t_0)$. A evolução temporal de $y(t)$ representa, após um certo intervalo de tempo, uma trajetória

⁴Deve-se salientar que o comportamento caótico *requer* a não-linearidade das equações que definem o sistema e, portanto, tipicamente, soluções analíticas fechadas não são possíveis.

não-perturbada iniciada em $z(t_0)$. Assim, qualquer estatística computada sobre $y(t)$ (ou seja, sobre a condição inicial $x(t_0)$ com uma perturbação δ) no limite $t \rightarrow \infty$ representará, fielmente, a estatística proveniente da solução *real* $z(t)$. A ergodicidade então fornece o fundamento final para a caracterização dos sistemas caóticos, pois qualquer condição inicial típica $y(t_0)$ assintoticamente fornecerá a estatística *verdadeira* do sistema. Em outras palavras, o sombreamento garante a caracterização estatística do estado assintótico (nesse caso, do atrator caótico).

Ressalta-se que as perturbações δ não precisam ser, necessariamente, provenientes de erros numéricos. Ao descrever um sistema natural com a introdução de um modelo matemático, algumas simplificações são necessariamente feitas. Restringindo-se ainda ao âmbito da Física Clássica⁵, nenhum sistema pode ser completamente isolado ou completamente descrito por equações matemáticas. Assim, modelar qualquer observação física $y(t)$ por um sistema dinâmico F é assumir, explícita ou implicitamente, que as soluções $x(t)$ de F são sombreadas por $y(t)$. Portanto, o modelo F deve *admitir a existência de sombreamento*.

O sombreamento das trajetórias pode ser matematicamente demonstrado para uma subclasse dos sistemas dinâmicos aqui considerados: os determinísticos, limitados, a tempo discreto *ou* contínuo, caóticos e *hiperbólicos*. A hiperbolicidade é uma propriedade matemática bastante restritiva (vide seção 2.1.4 do próximo capítulo) que, em poucas palavras, se refere à possibilidade de uma linearização do sistema dinâmico F em cada ponto $x \in \Omega$ que seja consistente com a evolução da dinâmica. Mas também é uma propriedade bastante poderosa, pois possibilita a obtenção de diversos resultados matematicamente rigorosos.

Basicamente, existem duas maneiras de um sistema dinâmico violar a hiperbolicidade: (i) quando a linearização de F em alguns pontos de Ω resulta em um sistema de dimensão inferior à d ; ou (ii) quando a linearização não é consistente com a dinâmica de F . O primeiro caso ocorre tipicamente tanto em sistemas caóticos Hamiltonianos quanto dissipativos, sendo caracterizado principalmente pela existência de pontos de tangências entre as variedades estável e instável em Ω [11]. Nesses casos, demonstra-se que o sombreamento só é possível para tempos *finitos*, mas que podem ser feitos *arbitrariamente longos* (vide Figura 2.2 do próximo capítulo) [15, 16]. O

⁵Ou seja, desconsiderando-se o princípio da incerteza da Mecânica Quântica, o qual implica na impossibilidade intrínseca de se fazer $\delta = 0$.

segundo caso é observado em sistemas dinâmicos cujas trajetórias são repelidas em direções distintas para diferentes regiões do espaço de fase. Tais sistemas são ditos *não-hiperbólicos* via *variabilidade da dimensão instável* e pode-se demonstrar que são não-sombreáveis mesmo para intervalos de tempos finitos e muito pequenos⁶ [17, 18] (vide, também, a Figura 2.2).

O primeiro sistema físico reportado com essa forma de não-hiperbolicidade foi o modelo para um rotor duplo periodicamente pulsado, na presença de dissipação [19]. Verifica-se, no entanto, que a variabilidade da dimensão instável é *típica* nos sistemas dinâmicos caóticos [20,21], sendo verificada na descrição de sistemas mecânicos [22], elétricos [23], sistemas espacialmente estendidos descritos por redes de osciladores acoplados [23] e por equações diferenciais parciais [24] e sistemas biológicos [25, 26]. Mais ainda, demonstra-se que esta forma de não-hiperbolicidade é o suporte para algumas classes de sistemas observados na natureza como, por exemplo, sistemas dinâmicos com multi-estabilidade e com bacias de atração crivadas [27], *i. e.*, quando nas vizinhanças de qualquer ponto $x \in \Omega$ que converge para um determinado atrator $\mathcal{A}$ existe um ponto y que pertence à bacia de atração de um atrator $\mathcal{B}$ distinto. Esse é o mecanismo para a representação determinística de certas formas de bi-estabilidade [22, 26, 28]. Assim, faz-se fundamental a compreensão da dinâmica de sistemas com variabilidade da dimensão instável, bem como o estudo da significância da modelagem nessa classe de sistemas não-hiperbólicos.

Um passo importante nesse sentido foi dado por Ying-Cheng Lai e colaboradores [20,21], ao investigar as propriedades da caracterização estatística de sistemas apresentando variabilidade da dimensão instável com a introdução artificial de perturbação nos modelos. Estes verificaram, por exemplo, que no modelo do rotor duplo pulsado a energia média do sistema varia suavemente com a intensidade do pulso no intervalo de parâmetros em que ocorre a variabilidade da dimensão instável. Mais ainda, demonstraram que essa energia não é sensível à adição de perturbações de diversas ordens de grandeza. Portanto, do estudo de um exemplo específico, Lai e colaboradores levantaram a conjectura de que embora não-sombreáveis, algumas quantidades estatísticas podem bem ser determinadas em sistemas com variabilidade da dimensão

⁶Da mesma ordem de grandeza das escalas de tempo características do sistema dinâmico, como o tempo de Lyapunov ou de correlação, por exemplo.

instável. Ou seja, embora a modelagem determinística não seja possível nesses sistemas, o tratamento numérico-estatístico é ainda possível.

Alguns anos depois, Timothy Sauer [18, 29] elaborou um contra-exemplo para a referida conjectura. Sauer analisou o efeito da introdução de perturbações artificiais na determinação numérica da medida natural invariante do sistema proposto. A medida natural invariante é uma função que associa a cada subintervalo $\mathcal{A} \subset \Omega$ a fração de tempo que uma trajetória típica infinitamente longa permanece imersa em $\mathcal{A}$. A análise estatística de qualquer quantidade em um sistema caótico é fornecida pela medida natural invariante. Portanto, a abordagem adotada se refere a *todas* as quantidades estatísticas possíveis do sistema (e não uma quantidade específica, como a energia total, por exemplo). Sauer verificou que para uma classe de sistemas caóticos não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável a determinação numérica da medida natural invariante é extremamente sensível à introdução de perturbações. Mais precisamente, demonstrou que o erro entre a medida natural invariante determinada numericamente para os sistemas com e sem ruído apresenta um comportamento algébrico com a magnitude da perturbação:

$$|\langle \mu \rangle_\delta - \langle \mu \rangle| = K_\mu \delta^h \quad (1.12)$$

em que $\langle \mu \rangle_\delta$ e $\langle \mu \rangle$ são, respectivamente, as representações para a medida natural do sistema com e sem a adição de um ruído branco de magnitude δ e K_μ uma constante. O expoente h , dito *expoente de hiperbolicidade*, pode ser calculado em termos de propriedades fundamentais do sistema dinâmico [17]. Esse expoente, que pode ser utilizado para quantificar a intensidade da não-hiperbolicidade em sistemas com variabilidade da dimensão instável, assume, para certas configurações de parâmetro, valores arbitrariamente pequenos. Nesses casos, mesmo perturbações muito pequenas podem representar desvios várias ordens de magnitude maiores na medida natural invariante.

O contra-exemplo proposto por Sauer define uma subclasse dos sistemas dinâmicos não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável. O espaço de fase de tais sistemas é bi-dimensional, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, mas a dinâmica pode ser decomposta na forma de um produto direto

assimétrico, *i. e.* o sistema dinâmico $x \mapsto F(x)$ pode ser escrito como

$$x \doteq (x, y) \mapsto (f(x), g_a(x, y)). \quad (1.13)$$

Mais precisamente, a evolução temporal de x influencia a dinâmica de y mas a recíproca não é verdadeira. Mais ainda, assume-se que f é um mapa unidimensional caótico e que existe uma variedade unidimensional invariante $\mathcal{S}$ definida por $g_a(x, y) = C$, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante. A decomposição descrita pela Eq. (1.13) define duas direções em Ω , a dinâmica *longitudinal*, contida em $\mathcal{S}$ e regida por f , e a dinâmica *transversal*, contida em $\Omega \setminus \mathcal{S}$ e regida por $g_a(x, y)$. Como f é unidimensional, a variabilidade da dimensão instável nos sistemas descritos pela Eq. (1.13), quando presente, ocorre *necessariamente* na direção transversal e diz-se que o sistema dinâmico apresenta *variabilidade da dimensão instável transversal* (vide definição 1 no próximo capítulo).

Portanto, o objeto de estudo da presente tese é a classe de sistemas dinâmicos determinísticos, a tempo discreto, caóticos e não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável transversal, sendo voltada a atenção à inclusão de perturbações nesses sistemas. O principal resultado obtido é a caracterização do estado estacionário assintótico (atrator) do sistema em termos do conjunto de órbitas periódicas instáveis existentes no espaço de fase. Demonstra-se que a adição de qualquer perturbação no sistema destrói a invariância de $\mathcal{S}$, não sendo mais possível a decomposição da dinâmica na forma do produto assimétrico (1.13). Assim, a variabilidade da dimensão instável não mais ocorre em uma direção transversal e espera-se a concordância da abordagem numérico-estatística com a estatística real do sistema. Demonstra-se também, que na ausência de perturbações, a variabilidade da dimensão instável é, para um dado conjunto de parâmetros, um efeito transiente. Nesses casos, as trajetórias típicas do sistema aproximam-se assintoticamente de $\mathcal{S}$ e o sistema é, finalmente, regido *apenas* pela dinâmica longitudinal. Em suma, apresenta-se um estudo detalhado com a elucidação do mecanismo dinâmico por trás da Eq. (1.12) e uma resposta positiva à conjectura de Ying-Cheng Lai sobre a caracterização estatística de sistemas dinâmicos não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável.

A exposição está organizada da seguinte maneira: no próximo capítulo encontram-se uma

revisão das definições e dos resultados referentes a sistemas dinâmicos caóticos necessários para o desenvolvimento da tese. No Capítulo 3 o modelo matemático escolhido para o estudo é descrito e suas propriedades dinâmicas calculadas. Ainda nesse capítulo, um método original para a determinação das órbitas periódicas instáveis no modelo proposto é apresentado e exemplificado. A análise das órbitas periódicas instáveis compõem o cerne dessa tese. Os resultados estão indicados e discutidos no Capítulo 4, sendo as conclusões deixadas para o capítulo final. Ainda, encontra-se no Apêndice A uma relação da produção bibliográfica do autor durante o período de doutoramento.

2 *Fundamentação teórica*

Nesse capítulo estão apresentadas as definições e os resultados referentes à Teoria dos Sistemas Dinâmicos necessários para o desenvolvimento da tese nos próximos capítulos, bem como para a fundamentação e formalização da exposição feita no capítulo anterior. Evidentemente, esse capítulo não visa compilar toda a teoria, tampouco apresenta exaustivos exemplos sobre os assuntos abordados. Há tempos o comportamento caótico está presente nos livros didáticos de Mecânica Clássica, por exemplo, tornando os conceitos de *hiper-sensibilidade às condições iniciais*, *aperiodicidade*, *imprevisibilidade* e *caos* comuns a qualquer pesquisador e/ou admirador entusiasta das ciências naturais. Também é verdade que a onda de cientificismo, iniciada no século XIX, encarregou-se de divulgar, e muitas vezes distorcer, tais conceitos. Assim, definições e resultados associados a sistemas caóticos que podem ser encontrados na literatura não-específica de Sistemas Dinâmicos (como os livros de Mecânica Clássica [2, 7, 30]) estão brevemente apresentados. O que se refere a desenvolvimentos mais recentes e/ou mais específicos, como as definições de não-hiperbolicidade e sombreamento, estão expostos em mais detalhes e exemplificados no presente capítulo. Sempre que possível, visando a coerência e brevidade, os exemplos apresentados são relacionados aos resultados indicados nos Capítulos 3 e 4. Quando não indicado o contrário, o conteúdo aqui presente representa uma síntese dos livros de K. Alligood [11], de P. Cvitanovic [31], de J. Dorfman [32], de P. Gaspard [1], de J. Guckenheimer [5], de D. Gulick [13], de A. Katok [3], de E. Ott [4] e da coletânea de artigos intitulada *The theory of chaotic attractors* [33].

2.1 Os sistemas dinâmicos caóticos

Conforme indicado na Introdução, os sistemas dinâmicos determinísticos a tempo contínuo, descritos por fluxos, podem ser reduzidos a mapas a partir da introdução de uma seção de Poincaré apropriada. Assim, as definições e propriedades aqui apresentadas restringem-se a mapas. Seja $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x_0 \in \Omega$ um sistema dinâmico determinístico, limitado e a tempo discreto definido pelo mapa $F(\Omega) \subset \Omega$. O conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é dito ser o espaço de fase e d é a dimensão do mapa. A sequência gerada pelas sucessivas aplicações de F definem a trajetória de x_0 denotada por

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \equiv \{x_k\}_{k=0}^n. \quad (2.1)$$

Convencionase F^n como a n -ésima composição de F , *i. e.* $F^n(x) \equiv F^{n-1}(F(x))$. O conjunto limite (para frente), também dito conjunto limite ω , de x_0 é definido como

$$\omega(x_0) = \{x \in \Omega, N \in \mathbb{Z}_+, \varepsilon \in \mathbb{R} : \forall N, \varepsilon, \exists n > N, |F^n(x_0) - x| < \varepsilon\}$$

ou seja, o conjunto de todos os pontos em Ω que a trajetória de x_0 torna-se arbitrariamente próxima um número indeterminado de vezes. Caso o conjunto limite ω de um ponto $y \in \Omega$ esteja contido em $\omega(x_0)$, diz-se que a trajetória iniciada em y é atraída para $\omega(x_0)$. Por definição, pontos fixos,

$$x^* = F(x^*), \quad (2.2)$$

e pontos p -periódicos (ou p -fixos),

$$x = F^p(x), \quad (2.3)$$

satisfazem

$$\omega(x'_0) = \{x'_k\}_{k=0}^{p-1}. \quad (2.4)$$

Uma trajetória $\{x_k\}$ de F é dita caótica se é aperiódica e instável. Uma trajetória é dita aperiódica se

$$|x_k - x_j| > 0 \quad (2.5)$$

para todo $k, j \in \mathbb{Z}_+$ com $j > k$, e instável se possui pelo menos um expoente de Lyapunov

positivo (definição dada na seção 2.1.3). Se $\{x_k\}$ é uma trajetória caótica e $x_0 \in \omega(x_0)$, então $\omega(x_0) \equiv \mathcal{A}$ é dito um *conjunto caótico*.

Se $\mathcal{B} \subset \Omega$ é tal que

$$\int_{\mathcal{B}} dx > 0, \quad (2.6)$$

diz-se que $\mathcal{B}$ possui medida de Lebesgue positiva¹. Caso exista um conjunto $\mathcal{B}$ de medida de Lebesgue positiva tal que para todo $y \in \mathcal{B}$ seja verdade que $\omega(y) \subset \omega(x_0)$, diz-se que $\mathcal{A}$ é um atrator caótico. A bacia de atração de $\mathcal{A}$ é dada por

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \{x \in \Omega : \omega(x) \subset \mathcal{A}\}. \quad (2.7)$$

Note que para $\mathcal{A}$ ser um *atrator* caótico é necessário que $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ possua medida de Lebesgue positiva. Isso representa que uma condição inicial $x_0 \in \Omega$ tomada aleatoriamente em Ω possui uma probabilidade não-nula de convergir para $\mathcal{A}$ com a evolução temporal. Define-se aqui o conceito de *para quase-todo* $x \in \mathcal{B}$ como o conjunto de todos os pontos em $\mathcal{B}$ exceto, possivelmente, os compreendidos por um subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ de medida de Lebesgue nula. Denomina-se os $x \in \mathcal{B}$ de pontos *típicos* e, analogamente, de *atípicos* todos os pontos contidos em $\mathcal{C}$.

Caso $\mathcal{G} = \Omega \setminus \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ seja um conjunto de medida de Lebesgue nula, diz-se que o atrator caótico $\mathcal{A}$ é um atrator *global* de F : todas as condições iniciais *típicas* convergem assintoticamente para $\mathcal{A}$.

A um ponto $x \in \Omega$ podem ser definidas duas variedades invariantes quanto à F . Denota-se por

$$\mathcal{W}_e(x) = \left\{ y \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^n(x) - F^n(y)\| = 0 \right\}, \quad (2.8)$$

a *variedade estável* de x e por

$$\mathcal{W}_i(x) = \left\{ y \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{-n}(x) - F^{-n}(y)\| = 0 \right\}, \quad (2.9)$$

sua *variedade instável*. Para qualquer $x \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ típico, $\text{Cl } \mathcal{W}_i(x) = \mathcal{A}$, ou seja, o fechamento da

¹Por exemplo, dado um conjunto aberto $\mathcal{S} = \sum_k (a_k, b_k)$ composto da união de intervalos disjuntos, a medida de Lebesgue de $\mathcal{S}$ é dada por $\sum_k (b_k - a_k)$.

variedade instável de x é o conjunto limite ω que define o atrator caótico $\mathcal{A}$.

A caracterização estatística de um atrator caótico se dá pelo cálculo de médias temporais de uma função de interesse φ calculada sobre qualquer trajetória $\{x_k\}$ com $x_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$. Denota-se essa média por

$$\langle \varphi(x_0) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \equiv \langle \varphi \rangle_{\mathcal{A}}. \quad (2.10)$$

Por definição, a média acima deve ser independente de x_0 para quase-todo $x_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ e, por isso, denota-se $\langle \varphi \rangle_{\mathcal{A}}$ como o valor esperado para a média temporal da função teste para o atrator $\mathcal{A}$.

Uma função teste bastante útil na caracterização da dinâmica caótica é a função indicadora $\chi_{\mathcal{D}}(x)$ definida por

$$\chi_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (\mathcal{D} \cup \partial \mathcal{D}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (2.11)$$

A notação $\partial \mathcal{D}$ representa a borda de $\mathcal{D}$ de tal modo que

$$(\mathcal{D} \cup \partial \mathcal{D}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \{x \in \Omega, y \in \mathcal{D} : \text{dist}(x, y) < \delta\}, \quad (2.12)$$

sendo $\text{dist}(x, y)$ a distância Euclidiana entre x e y ou qualquer outra métrica apropriada definida em Ω . Ou seja, $\partial \mathcal{D} = \text{Cl } \mathcal{D} - \text{Int } \mathcal{D}$, sendo $\text{Int } \mathcal{D}$ a notação para o interior de $\mathcal{D}$.

Uma medida probabilística² $\mu(\mathcal{D}; x_0)$ pode ser associada a cada subconjunto $\mathcal{D} \subset \Omega$ por

$$\mu(\mathcal{D}; x_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\mathcal{D}}(x_k) = \langle \chi_{\mathcal{D}}(x_0) \rangle. \quad (2.13)$$

Se $\mathcal{A}$ for um atrator (caótico) global em Ω , a Eq. (2.13) não depende explicitamente de x_0 e define a *medida natural* de F em $\mathcal{D}$, denotada por $\mu(\mathcal{D})$. Nesses casos, também, omite-se o índice $\mathcal{A}$.

A medida natural representa, portanto, a fração de tempo que uma trajetória típica do sistema permanece em um dado subconjunto ou, equivalentemente, a probabilidade de que um

²Matematicamente, uma medida $\mu(\mathcal{A})$ é uma maneira de se associar um número real não-negativo a um conjunto $\mathcal{A}$ de tal modo que $\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B})$ sempre que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \Omega$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Uma medida é dita probabilística se $\mu(\Omega) = 1$, implicando $0 \leq \mu(\mathcal{A}) \leq 1$ para quaisquer $\mathcal{A} \subset \Omega$.

ponto arbitrário da trajetória esteja contido nesse subconjunto. A definição da medida natural pela Eq. (2.13) é uma manifestação da ergodicidade típica dos sistemas caóticos, para os quais observa-se a igualdade:

$$\langle \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x) d\mu(x) \quad (2.14)$$

ou seja, as médias temporais definidas em (2.10) são equivalentemente determinadas por médias espaciais em Ω , ponderadas pela medida natural μ de F . A densidade de medida natural $d\mu(x)$ na Eq. (2.14) é definida implicitamente por

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} d\mu(x), \quad (2.15)$$

para todo e qualquer $\mathcal{D} \subset \Omega$, tal que a medida natural define, também, uma *densidade natural invariante* $\rho(x)$ tal que

$$d\mu(x) = \rho(x) dx. \quad (2.16)$$

Assim, a Eq. (2.14) relaciona a média temporal de uma função teste $\varphi(x)$ com uma média espacial ponderada por $\rho(x)$ de $\varphi(x)$ em Ω .

De posse da medida natural $\mu(\mathcal{D}) \forall \mathcal{D} \subset \Omega$ ou, equivalentemente, da densidade invariante $\rho(x)$, $\forall x \in \Omega$, é possível o cálculo da estatística de *qualquer* função teste. Ou seja, a dinâmica de F está *completamente* caracterizada. Mas, tipicamente, não é possível obter uma expressão analítica para a medida e métodos aproximativos ou numéricos são utilizados. Numericamente, $\rho(x)$ pode ser determinado a partir do particionamento de Ω em diversas caixas de volume ε , indexadas por $\mathcal{D}_q$, determinando-se $\langle \chi_{\mathcal{D}_q} \rangle$ para cada uma das caixas, truncando o limite da Eq. (2.10) para algum n finito suficientemente grande, e assumindo $\rho(x)$ constante em $\mathcal{D}_q$. Então,

$$\rho(x) = \varepsilon^{-1} \langle \chi_{\mathcal{D}_q} \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}_q.$$

Conforme $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $n \rightarrow \infty$ essa aproximação se torna cada vez mais refinada.

2.1.1 A evolução de medidas e densidades

A densidade natural invariante pode ser também definida a partir da introdução de um operador de evolução de densidades [31]. Seja $\rho(x, t)$ a representação de uma densidade de tra-

jetórias em Ω em um determinado instante de tempo t , e seja $\mathcal{L}^t$ um operador de evolução tal que

$$\rho(x, t) = \mathcal{L}^t \rho(x, 0). \quad (2.17)$$

Observe que a Eq. (2.17) *define* um sistema dinâmico para a “variável” de estado $\rho(x, t)$. A Eq. (2.17) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\rho(y, t) = \int_{\Omega} \delta(y - F^t(x)) \rho(x, 0) dx \quad (2.18)$$

sendo $\delta(\cdot)$ a função delta de Dirac d -dimensional. Das propriedades de integração da função δ , o operador $\mathcal{L}^t$ pode ser escrito como

$$\mathcal{L}^t \rho(y) = \sum_{x=F^{-t}(y)} \frac{\rho(x)}{|\det DF^t(x)|}. \quad (2.19)$$

Nessa expressão, $DF^t(x)$ representa a matriz Jacobiana (vide Eq. (2.33)) aplicada à função F^t e calculada no ponto x ; e o somatório é sobre todos os pontos em Ω que satisfazem

$$F^t(x) = y, \quad (2.20)$$

em que F pode ser uma função não-invertível, significando que a Eq. (2.20) possui mais de uma solução para um mesmo x . As Eqs. (2.17), (2.18) e (2.19) definem o *operador de Perron-Frobenius* para o mapa F [31]:

$$\mathcal{L}^t(x, y) = \delta(x - F^t(y)). \quad (2.21)$$

Conforme definido na seção anterior, o sistema dinâmico F que contém um atrator global e caótico $\mathcal{A}$ define unicamente uma densidade *invariante* $\rho(x)$. Ou seja, $\rho(x)$ deve ser uma solução da Eq. (2.17) para $t = 1$:

$$\mathcal{L} \rho(x) = \rho(x), \quad (2.22)$$

definindo $\rho(x)$ como uma *auto-função* de $\mathcal{L}$ associada ao autovalor unitário.

Em alguns casos³, a densidade invariante é intrinsecamente uma função constante por partes em Ω , de tal modo que a Eq. (2.21) define um operador matricial. Seja $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$

³Quando o mapa F admite um particionamento de Markov em Ω .

um particionamento fechado de Ω tal que $\rho(x) = \rho_i$ é constante em cada uma das partições C_i . Então x e y na Eq. (2.21) são substituídos por índices $i, j = 1, \dots, K$, tal que

$$\mathcal{L}(x, y) \rightarrow [L]_{ij} \quad (2.23)$$

e L é uma matriz $K \times K$ cujos elementos são $[L]_{ij}$. Nesses casos, a Eq. (2.22) se torna um problema de autovetor e autovalor,

$$L\rho = \rho, \quad (2.24)$$

sendo ρ um vetor K -dimensional definido por seus componentes $\rho^{(i)} = \rho_i$, sendo

$$\rho_i \equiv \mu(C_i) \left/ \int_{C_i} dx \right. . \quad (2.25)$$

Na versão matricial, o elemento $[L]_{ij}$ representa a probabilidade de transição entre a partição C_i e C_j , ou seja, representa a fração de C_i que é mapeada em C_j por F . Logo, L define uma matriz estocástica [34] pois

$$[L]_{ij} \geq 0 \forall i, j \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^K [L]_{ij} = 1 \forall j. \quad (2.26)$$

Portanto, o teorema de Perron-Frobenius [1] garante a existência e unicidade de um autovetor ρ associado ao autovalor unitário. Mais ainda, garante que todos os outros autovalores de L são menores que um, em norma. Assim, qualquer densidade inicial considerada, $\rho(x, 0)$, constante nas partições C_i pode ser escrita como um vetor ($t = 0$)

$$\rho(t) : \quad \rho^{(i)}(t) = \int_{C_i} \rho(x, t) dx \left/ \int_{C_i} dx \right. \quad (2.27)$$

que, por sua vez, pode ser expandido em termos dos autovetores r_k de L :

$$\rho(0) = \sum_{k=1}^K (\rho(0) \cdot r_k) r_k. \quad (2.28)$$

Denotando r_k como o autovalor associado ao autovetor r_k de L , a evolução da densidade inicial $\rho(x, 0)$ com F pode ser calculada por

$$\rho(t) = L^t \rho(0) = \sum_{k=1}^K (\rho(0) \cdot r_k) L^t r_k = \sum_{k=1}^K (\rho(0) \cdot r_k) (r_k)^t r_k. \quad (2.29)$$

Seja $r_1 = 1$ tal que $r_1 = \rho$. Como $|r_k| < 1$ para todo $k > 1$, o limite de $t \rightarrow \infty$ na equação acima

resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho, \quad (2.30)$$

indicando que a evolução de qualquer densidade inicial da forma (2.27) evolui para a densidade invariante de F que é dada pelo autovetor de L associado ao autovalor unitário.

2.1.2 Partições e dinâmica simbólica

A forma matricial do operador de Perron-Frobenius, Eq. (2.23), está intimamente ligada à matriz de transição T de F associada ao particionamento $\mathcal{C}$ de Ω :

$$[T]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } F(C_i) \cap C_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } F(C_i) \cap C_j = \emptyset \end{cases}. \quad (2.31)$$

Enquanto os elementos de L representam a probabilidade de transição, os de T indicam apenas a possibilidade de transição. Diz-se, portanto, que T representa *topologicamente* a dinâmica de F (com relação ao particionamento $\mathcal{C}$) enquanto que L caracteriza *metricamente* a dinâmica. Perceba que a distinção é apenas quanto ao peso associado a cada uma das transições.

Os elementos das potências da matriz de transição fornecem informações sobre as combinações $F(C_i) \cap F(F(C_i)) \cap \dots \cap C_j$. Ou seja, $[T^n]_{ij}$ representa o número de caminhos distintos que são possíveis para, partindo-se de C_i , alcançar a partição C_j com n iteradas de F .

Um particionamento bastante útil para a análise da dinâmica é dado por $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ tal que $\partial C_i \equiv \text{Cl} C_i \setminus \text{Int} C_i$ é composto, exclusivamente, de porções das variedades estável e instável de $\mathcal{A}$. Ou seja, a borda de cada célula C_k pode ser decomposta tal que $\partial C_k = \partial_e C_k \cup \partial_i C_k$ e $\partial_{e,i} C_k$ pertencem, respectivamente, à variedade estável e instável de $\mathcal{A}$. Requer-se ainda, que as variedades estável e instável de quaisquer dois pontos em C_i se interseccionem em C_i :

$$\forall x, x' \in C_i. \quad \mathcal{W}_e(x) \cap \mathcal{W}_i(x') \in C_i.$$

Tal particionamento, definido em termos das variedades estável e instável de $\mathcal{A}$, pode representar um particionamento de Markov para Ω se satisfizer as seguintes condições:

- i. $K \in \mathbb{N}, K < \infty$;

ii. $\text{Int}C_i \cap \text{Int}C_j = \emptyset, \forall i, j$;

iii. Se $x \in \text{Int}C_i$ e $F(x) \in \text{Int}C_j$, então

$$F(\mathcal{W}_i(x) \cap C_i) \supset \mathcal{W}_i(F(x)) \cap C_j \quad \text{e} \quad F(\mathcal{W}_e(x) \cap C_i) \supset \mathcal{W}_e(F(x)) \cap C_j.$$

Ou seja, o particionamento deve ser finito, disjunto e as bordas de cada partição devem mapear completamente a borda de uma outra partição (ou uma união de várias outras). Sistemas dinâmicos hiperbólicos *sempre* admitem uma partição de Ω com essas propriedades [33].

A principal vantagem do particionamento de Markov é que as transições possíveis a partir de uma partição C_i *independem* das partições que mapeam C_i , *i. e.* dado que uma trajetória encontra-se em C_i no instante de tempo τ , as possíveis partições alcançadas por $F(x_\tau)$ *independem* de $\{x_k\}_{k=0}^{\tau-1}$.

Assim, um particionamento de Markov $\mathcal{C}$ permite uma associação biunívoca do sistema dinâmico F e uma sequência simbólica tomada de um alfabeto $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, K\}$ cuja gramática é determinada pela matriz T . Assim, qualquer ponto $x_0 \in \Omega$ pode ser representado por uma sequência infinita de símbolos $S = \{s_k\}$. Tal sequência é definida implicitamente pela transformação

$$\Phi(S) = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^{-k}(C_{s_k}) = x_0,$$

ou seja, $x_k \in C_{s_k}$.

2.1.3 Os expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov de uma trajetória $\{x_k\}$ quantificam a estabilidade desta quanto a perturbações infinitesimais típicas. Para a definição, considere $g : \omega \rightarrow \omega$ um mapa caótico d -dimensional e sua expansão em série de Taylor até primeira ordem:

$$g(x) \approx (x - x') + Dg(x)|_{x'}(x - x'), \quad (2.32)$$

em que $Dg(x)$ é a matriz Jacobiana d -dimensional cujos elementos são dados por

$$[Dg(x)]_{ab} \equiv \frac{\partial g_a(x)}{\partial x^{(b)}}. \quad (2.33)$$

Assim, a cada iterada, duas trajetórias infinitesimalmente próximas, dadas por $\{x_k\}$ e $\{x'_k\}$ afastam-se (ou aproximam-se) segundo

$$\delta x_n = Dg(x_n)|_{x'_n}, \quad (2.34)$$

que, pela regra da cadeia, é dado por

$$\delta x_n = \prod_{k=0}^{n-1} Dg(x_k)|_{x'_k}. \quad (2.35)$$

Assim, define-se os d expoentes de Lyapunov de $g(x)$ calculados sobre $\{x_k\}$ como [35]

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Dg^{(n)}(x_0)v_k\|, \quad (2.36)$$

sendo v_k um vetor típico em $\mathbb{E}_x^{(k)} \setminus \mathbb{E}_x^{(k+1)}$, com $\mathbb{E}_x^{(1)} \equiv \Omega$. A Figura 2.1 representa, de modo esquemático, a ação do mapa g nas trajetórias vizinhas a x . A deformação do espaço de fase é quantificada pelos expoentes de Lyapunov. A esfera d -dimensional em 2.1(a) se deforma em um elipsoide cujos eixos são ampliados ou reduzidos exponencialmente a uma taxa dada por λ_k . Tais eixos são determinados pelas autodireções de $Dg(x_n)$, dadas pelos vetores $Dg^{(n)}(x_0)v_k$ na Eq. (2.36). Esses vetores definem, portanto, direções principais para a dinâmica. De fato, as variedades estável e instável, indicadas pelas linhas azul e vermelha, respectivamente, na Figura 2.1, são tangentes aos subespaços definidos pelos autovetores estáveis e instáveis de $Dg^{(n)}(x_0)$. Define-se um autovetor v_k como estável se $\lambda_k \leq 0$ e instável caso $\lambda_k > 0$.

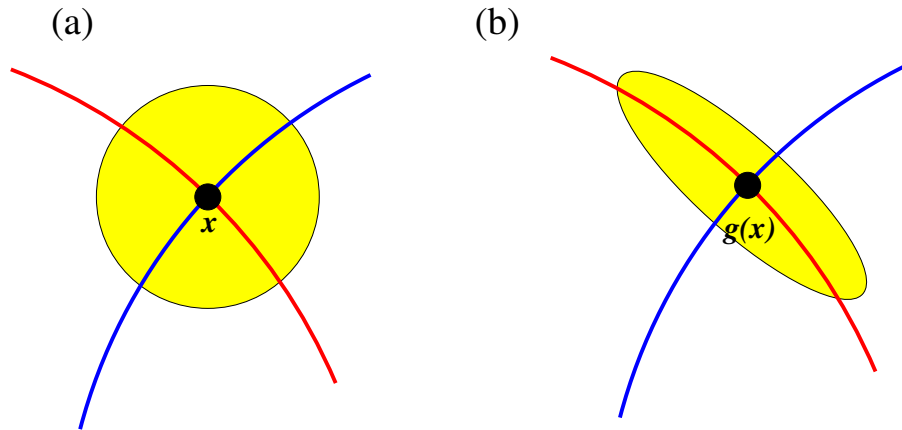


Figura 2.1: A ilustração pictórica da deformação do espaço de fase quantificada pelos expoentes de Lyapunov. (a) Uma esfera de condições iniciais próximas a um ponto x é mapeada para um (b) elipsoide em torno de $g(x)$, sendo que os eixos se expandem nas direções instáveis e se contraem nas estáveis. Fonte: adaptado de [11].

Embora os expoentes de Lyapunov sejam definidos em termos de uma trajetória $\{x_k\}$, esse não deve depender da condição inicial x_0 , desde que esta seja típica, devido à ergodicidade indicada na Eq. (2.14). Percebe-se, por fim, que se $d = 1$, a expressão (2.36) se torna:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{d}{dx} g(x_k) \right|. \quad (2.37)$$

A demonstração da existência e unicidade dos expoentes de Lyapunov é possível apenas para algumas classes de sistemas [11]. A positividade de pelo menos um expoente de Lyapunov implica *hipersensibilidade às condições iniciais*, característica fundamental dos sistemas caóticos. Assim, usualmente, associa-se $\lambda_1 > 0$ ao comportamento caótico.

2.1.4 A hiperbolicidade

Deve-se salientar que, como já foi indicado na Introdução, a grande maioria dos resultados e propriedades apresentadas até aqui nesse capítulo requerem, explícita ou implicitamente, que o sistema dinâmico F seja *hiperbólico*. Um subconjunto $\mathcal{D} \subset \Omega$ é dito hiperbólico se [5]

1. para qualquer $x \in \mathcal{D}$ o espaço tangente⁴ de uma trajetória pode ser decomposto como

$$\mathcal{T}\Omega(x) = \mathbb{E}_i(x) \oplus \mathbb{E}_e(x) \oplus F(x),$$

ou seja, respectivamente, em subespaços instável e estável, juntamente com a direção do fluxo;

2. existe uma constante positiva κ e uma função positiva $c(x, x')$ tais que, $\forall t > 0$, $u \in \mathbb{E}_i(x)$, $s \in \mathbb{E}_e(x)$ e para qualquer $x \in \mathcal{D}$, as seguintes condições são *sempre* satisfeitas

$$\begin{aligned} |DF^t(x)s| &\leq \frac{1}{c(x, F^t(x))} e^{-\kappa t} |s|, \\ |DF^t(x)u| &\geq c(x, F^t(x)) e^{+\kappa t} |u|, \\ \theta_{ie}(F^t(x)) &\geq c(x, F^t(x)) \theta_{ie}(x), \end{aligned}$$

sendo $\theta_{is}(x)$ o ângulo entre os subespaços instável e estável de x .

⁴O espaço tangente é o espaço definido por x e pelos autovetores de $DF(x)$.

O termo *sistema dinâmico hiperbólico* se refere a qualquer sistema dinâmico F em que o espaço de fase seja hiperbólico, *i. e.* $\mathcal{D} = \Omega$. Se qualquer uma das condições acima for violada, o sistema é dito *não-hiperbólico*. Ainda, se Ω for não-hiperbólico, mas existir um subconjunto $\mathcal{D} \subset \Omega$ hiperbólico tal que $F(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, então o sistema é dito *globalmente* não-hiperbólico com uma porção hiperbólica (ou com um subespaço invariante hiperbólico).

A hiperbolicidade é uma propriedade atípica dos sistemas dinâmicos mas amplamente utilizada na análise destes sistemas. Isto decorre do fato de que a imensa maioria dos resultados analíticos em sistemas dinâmicos só podem ser derivados e/ou demonstrados sobre a hipótese da hiperbolicidade. Vê-se, da própria definição (Seção 2.1.3), que a validade da análise de estabilidade linear de um determinado estado do sistema só é garantida se este estiver contido em um subespaço hiperbólico. Sistemas hiperbólicos e *mixing*⁵ são ditos satisfazer o *Axioma-A* [3].

As formas de não-hiperbolicidade e o sombreamento

Em muitos dos sistemas dinâmicos caóticos não é possível encontrar soluções analíticas exatas e apenas soluções numéricas são obtidas. Invariavelmente, estas soluções ditas *pseudo-trajetórias* ou δ -trajetórias, são inexatas devido à discretização de sistemas a tempo contínuo e à precisão finita dos computadores [14].

Para sistemas hiperbólicos, pode-se mostrar [5, 14] que qualquer *pseudo-trajetória* pode ser continuamente deformada em uma trajetória real (vide Figura 1.6 no capítulo anterior). Isso significa que a cada iterada do mapa (ou passo da integração) existe uma trajetória real tão próxima da pseudo-trajetória quanto se desejar. Assim, apesar da solução numérica ser apenas aproximada, estará sempre próxima a uma solução real. Diz-se então que a trajetória real *sombreia* a pseudo-trajetória por um tempo indeterminadamente longo. Portanto, quantidades estatísticas calculadas sobre a pseudo-trajetória serão consistentes com as das soluções reais⁶.

Para sistemas não-hiperbólicos este sombreamento por tempo indeterminado não é garantido. Na verdade, para essa classe de sistemas, o tempo que uma pseudo-trajetória é continu-

⁵Um sistema é dito *mixing* se para quaisquer dois subconjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ mensuráveis de Ω tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F^{-n}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A})\mu(\mathcal{B})$.

⁶Embora, muitas vezes estas não possam ser verificadas.

amente sombreada por uma trajetória real, dito *tempo de sombreamento* [18], está relacionado com o tempo que a pseudo-trajetória permanece em uma região hiperbólica do sistema. Quando a pseudo-trajetória visita uma região não-hiperbólica nenhuma trajetória real é capaz de sombreá-la. Isto porque nestas regiões, ditas “*glitches*”⁷, todas as trajetórias reais divergem da pseudo-trajetória.

Não-hiperbolicidade via Tangências Seja $x^* \in \Omega$ um ponto fixo isolado cujas variedades estável e instável são, respectivamente, $\mathcal{W}_e(x^*)$ e $\mathcal{W}_i(x^*)$. Se $\mathcal{W}_e(x^*)$ e $\mathcal{W}_i(x^*)$ forem tangentes em algum ponto $x \in \mathcal{A} \subset \Omega$, $\mathcal{A}$ é dito não-hiperbólico. Uma representação esquemática de como isso implica não-sombreamento está indicada na Figura 2.2 (esquerda). Os pontos y_k pertencem à órbita de uma pseudo-trajetória sujeita a algum tipo de erro, como por exemplo erros de arredondamento/truncamento. Considere que nas $(k - 1)$ iteradas, esta trajetória visita regiões distintas de Ω e hiperbólicas. Portanto, durante as $(k - 1)$ iteradas a pseudo-trajetória é continuamente sombreada. Agora, assuma que o erro afete a próxima iterada de tal maneira que o ponto y_k seja projetado para o outro lado de $\mathcal{W}_e(x^*)$. A partir deste momento, qualquer trajetória real que poderia sombrear as iteradas de y_k divergirá exponencialmente da pseudo-trajetória. Isto porque todas as trajetórias reais seguirão a variedade instável indicada na Figura 2.2. Logo, existe um *glitch* na k -ésima iterada de y_0 e nenhuma trajetória sombreia continuamente a pseudo-trajetória.

Assim, após visitar uma região não-hiperbólica por tangências, qualquer quantidade calculada a partir de uma pseudo-trajetória pode não mais representar uma boa aproximação do valor real desta quantidade. Neste caso, o tempo de sombreamento seria $(k - 1)$ iteradas.

Não-hiperbolicidade via Variabilidade da Dimensão Instável Outro tipo de *glitch* ocorre quando a pseudo-trajetória visita regiões na qual a dimensão da variedade instável (e, consequentemente, estável) é diferente. Diz-se, então, que este *glitch* é devido à *variabilidade da dimensão instável* destas regiões. Isto pode ocorrer quando pontos periódicos imersos nestas

⁷Não existe na literatura uma tradução padrão para o termo *glitch* - cuja tradução literal é pequeno defeito ou pequena falha. Mas a idéia é justamente que nestes *glitches* a trajetória sente os efeitos da não-hiperbolicidade do sistema.

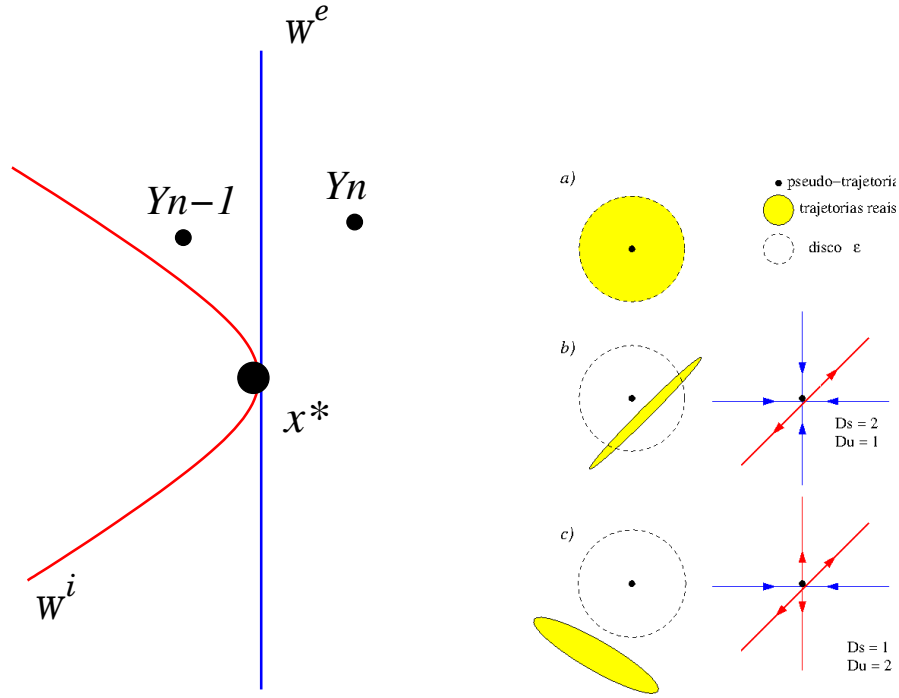


Figura 2.2: Após o *glitch* nenhuma trajetória real é capaz de continuar sombreando a órbita de y_0 . Fonte: adaptado de [14].

regiões apresentam um número diferente de autodireções instáveis. Neste caso, pelo menos um expoente de Lyapunov calculado a tempos finitos deve flutuar em torno de zero [19] (vide Seção 2.4.1).

Como a variedade da dimensão instável implica *glitch* está representado, de forma pictórica, na Figura 2.2 (direita). Considere um sistema tridimensional com pelo menos dois pontos periódicos x_1^* e x_2^* , sendo a dimensão de $\mathcal{W}_i(x_1^*)$ ($\mathcal{W}_i(x_2^*)$) um (dois), e uma pseudo-trajetória iniciada nas vizinhanças de x_1^* . Agora, assuma que todas as trajetórias reais distando no máximo ϵ da pseudo-trajetória são capazes de sombreá-la⁸. Portanto, todas as trajetórias (reais) contidas em uma bola $\mathcal{B}$ de raio ϵ (região em amarelo na Figura 2.2(a)) centrada no ponto inicial da pseudo-trajetória são “candidatas” a trajetórias sombreantes. Como a pseudo-trajetória está na vizinhança do ponto periódico x_1^* , suas primeiras iteradas permaneceram próximas à sua órbita. Mas $\mathcal{B}$ é deformada, alongando-se nas direções instáveis e se contraindo nas direções estáveis que são aproximadamente⁹ as direções de $\mathcal{W}_i(x_1^*)$ e $\mathcal{W}_e(x_1^*)$, respectivamente. Embora ainda

⁸Em sistemas hiperbólicos ao menos uma trajetória satisfaz esta condição por toda a evolução temporal do sistema mesmo no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

⁹Pois a pseudo-trajetória está na vizinhança da órbita de x_1^* .

existam trajetórias reais distando menos que ε da pseudo-trajetória, como indicado na Figura 2.2(b), esta não pertence mais à região $\mathcal{B}$. Ou seja, passa a existir uma distância δ finita entre a pseudo-trajetória e *todas* as trajetórias reais. Esta situação permanece até quando a pseudo-trajetória alcança a vizinhança de x_2^* . Nesta região existe uma nova direção instável e, com a evolução temporal do sistema, a distância δ passa a crescer exponencialmente nesta nova direção. Em algum momento esta divergência resulta em $\delta > \varepsilon$ e portanto não existe nenhuma trajetória real sombreando continuamente a pseudo-trajetória [36].

Como foi discutido na Introdução, Lai e colaboradores apresentaram a conjectura, baseada na análise numérica dos efeitos de perturbações no cálculo de médias temporais, de que a análise estatística de sistemas não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável ainda seria possível, a despeito da quebra do sombreamento das trajetórias. Como um contra-exemplo à essa conjectura, Sauer apresentou e analisou uma classe de sistemas não-hiperbólicos cuja medida natural invariante é extremamente sensível a perturbações. Tal classe de sistemas, definidos aqui como *sistemas não-hiperbólicos via variabilidade da dimensão instável transversal*, formam o objeto primeiro desse estudo.

Definição 1 *Seja $F : \Omega \mapsto \Omega \subset \mathbb{R}^d$ um mapa caótico d -dimensional. Seja $\mathcal{S} \subset \Omega$ um subespaço invariante, $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, com dimensão $d_{\mathcal{S}} < d$. Seja, ainda, a dinâmica em $\mathcal{S}$ caótica e descrita pelo mapa $d_{\mathcal{S}}$ -dimensional $f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, de tal modo que*

$$x \mapsto F(x) \equiv (y, z) \mapsto (f(y), g_a(y, z)),$$

com $y \in \mathcal{S}$, $z \in \Gamma \equiv \Omega \setminus \mathcal{S}$ e $x = \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix}^T$. O mapa f define a dinâmica longitudinal e g_a a dinâmica transversal à $\mathcal{S}$, parametrizada por $a \in \mathbb{R}$. A matriz Jacobiana de F é bloco-diagonal,

$$DF(x) \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix},$$

com $d_{\mathcal{S}}$ autovalores longitudinais e $d_{\Gamma} = d - d_{\mathcal{S}}$ transversais. O sistema F apresenta variabilidade da dimensão instável transversal para um dado a quando existe em $\mathcal{S}$ pelo menos dois pontos periódicos, y_1 e y_2 , com períodos p_1 e p_2 , respectivamente, cujo número de autovalores

de $DF^{P_i}(y_i)$ associados a autodireções instáveis em Γ é distinto.

2.2 Os sistemas espacialmente estendidos

Um mapa N -dimensional composto de uma rede de N mapas caóticos linearmente acoplados pode ser definido para se estudar as propriedades dinâmicas de sistemas espacialmente estendidos. Seja $f : \omega \mapsto \omega$, $\omega = [0, 1]$, um mapa unidimensional caótico e seja A uma matriz $N \times N$. Define-se a rede como

$$x_{n+1} = F(x_n) = Af(x_n), \quad (2.38)$$

sendo $x_n \doteq \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(N)} \end{bmatrix}^T$, $f(x_n) \doteq \begin{bmatrix} f(x^{(1)}) & f(x^{(2)}) & \dots & f(x^{(N)}) \end{bmatrix}^T$ e $F : \Omega \mapsto \Omega$ com $\Omega = \omega^N$. A matriz A , dita *matriz de acoplamento*, define a interação entre os N elementos da rede.

A rede (2.38) pode representar a discretização espacial de uma equação diferencial parcial em N elementos, por exemplo. Definindo a matriz A por

$$[A]_{ij} = \begin{cases} (1 - \varepsilon) & \text{se } i = j \\ \frac{\varepsilon}{2} & \text{se } i = (j \pm 1) \bmod N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.39)$$

vê-se que o sistema (2.38) se torna

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \varepsilon \frac{f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i-1)})}{2}, \quad (2.40)$$

uma representação para um acoplamento difusivo entre os elementos em um anel (*i. e.* condições de contorno periódicas).

Sistemas definidos na forma da Eq. (2.38) fornecem também uma maneira sistemática para se construir modelos de alta dimensionalidade. Dependendo das propriedades da matriz de acoplamento A , bem como da dinâmical local f escolhida, diversos fenômenos característicos de sistemas caóticos espacialmente estendidos, como caos espaço-temporal, a sincronização e a supressão de caos podem ser sistematicamente estudados [37].

2.2.1 A sincronização completa de caos

O comportamento da evolução temporal das redes definidas pela Eq. (2.38) separa também esses sistemas em diversas classes. Seja x_n o vetor de estado da rede no instante de tempo n . Diz-se que a rede apresenta *sincronização completa de caos* se [37]

$$x_n^{(i)} = x_n^{(j)} \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \quad (2.41)$$

i. e., todos os elementos que compõem a rede estão *exatamente* no mesmo estado no mesmo instante de tempo. Como as redes na forma da Eq. (2.38) podem definir, e historicamente o definem, o acoplamento entre osciladores, costuma-se denominar essa forma de sincronização como *sincronização de amplitude*.

A Eq. (2.41) define um subespaço $\mathcal{S} \subset \Omega$, dito o *subespaço de sincronização*, dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \Omega, s \in \omega : x^{(i)} = s, \forall i \right\}. \quad (2.42)$$

De acordo com as propriedades da matriz de acoplamento, o subespaço $\mathcal{S}$ pode ser invariante quanto à dinâmica. De fato, $\mathcal{S}$ é invariante *se e somente se*

$$[A]_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N [A]_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (2.43)$$

ou seja, se a A é uma matriz estocástica. Assim, para $x \in \mathcal{S}$, $f(x) = f(s)1$, sendo 1 um vetor N dimensional com todos os componentes unitários, e

$$x_{n+1} = F(x_n) = Af(x_n) = f(s_n)A1 = f(s_n)1,$$

ou seja, a dinâmica em $\mathcal{S}$ é determinada apenas pela dinâmica local f .

Como $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, o subespaço $\mathcal{S}$ pode ser feito um atrator global do sistema. Para isso, a matriz de acoplamento A deve ser escolhida tal que todos os expoentes de Lyapunov calculados, *via* Eq. (2.36), para as direções $v_k \in \Gamma \equiv \Omega \setminus \mathcal{S}$ sejam negativos. O sistema da Eq. (2.38), satisfazendo as condições da Eq. (2.43), define um sistema que, por construção, satisfaz diversas condições para a ocorrência de variabilidade da dimensão instável transversal (definição 1). A dinâmica *longitudinal* é governada pelo mapa local f caótico, por construção, e a dinâmica

transversal é $N - 1$ dimensional, definida em Γ . Caso f não seja um mapa hiperbólico uniformemente expansor, i. e. caso $\frac{df(s)}{ds}$ não seja constante para todo $s \in \omega$, é possível ajustar os componentes de A para que o número de autovalores de $DF(x)$ associado a direções transversais instáveis seja diferente para pelo menos dois pontos p -periódicos, x_1 e x_2 , imersos em $\mathcal{S}$.

2.3 As órbitas periódicas instáveis

Seja, aqui e no que segue, o conjunto de pontos fixos de F^τ imersos em $\mathcal{S}$ denotado por

$$\mathcal{F}_\tau(\mathcal{S}; F) \equiv \{x \in \mathcal{S} : F^\tau(x) = x\} \quad (2.44)$$

e, quando não houver risco de confusão, por $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau(\mathcal{S}) = \mathcal{F}_\tau(\mathcal{S}; F)$. Assim, $\mathcal{F}_\tau(\Omega)$ representa o conjunto de todos os pontos τ -fixos do sistema F . A entropia topológica h_T de F é, para sistemas hiperbólicos, dada por [38]:

$$h_T(p) \equiv \frac{1}{p} \log \# \mathcal{F}_p(\Omega, F), \quad h_T = \lim_{p \rightarrow \infty} h_T(p). \quad (2.45)$$

Sistemas caóticos possuem entropia topológica positiva ($h_T > 0$) e, portanto, a união de $\mathcal{F}_p(\Omega, F)$ para todos $p \rightarrow \infty$ forma um conjunto *infinito enumerável*.

Os principais resultados indicados no Capítulo 4 baseam-se na análise das propriedades topológicas e métricas de F em termos de $\mathcal{F}_p(\Omega)$.

2.3.1 A medida natural

Nesta seção uma expressão para a medida natural de um atrator em função das *órbitas periódicas instáveis* contidas neste atrator é derivada. Tal resultado justifica, de maneira formal, a afirmação de que o conjunto das órbitas periódicas instáveis compõe o esqueleto sobre o qual a dinâmica caótica é construída. O desenvolvimento apresentado a seguir assume que $f : \Omega \rightarrow \Omega$ é um mapa caótico d dimensional satisfazendo o Axioma A e é devido à Grebogi, Ott e Yorke [39].

Uma maneira sistemática de se particionar o espaço de fase é considerar células delimitadas pelas variedades estável e instável. Denote cada célula por C_k . Se estas partições forem pequenas, a curvatura das variedades podem ser desprezadas e pode-se aproximar estas células por paralelogramos, como indicado na Figura 2.3. Devido à hipótese do sistema ser hiperbólico, as variedades cruzam-se sempre de modo não tangente, donde a construção destes paralelogramos é sempre possível.

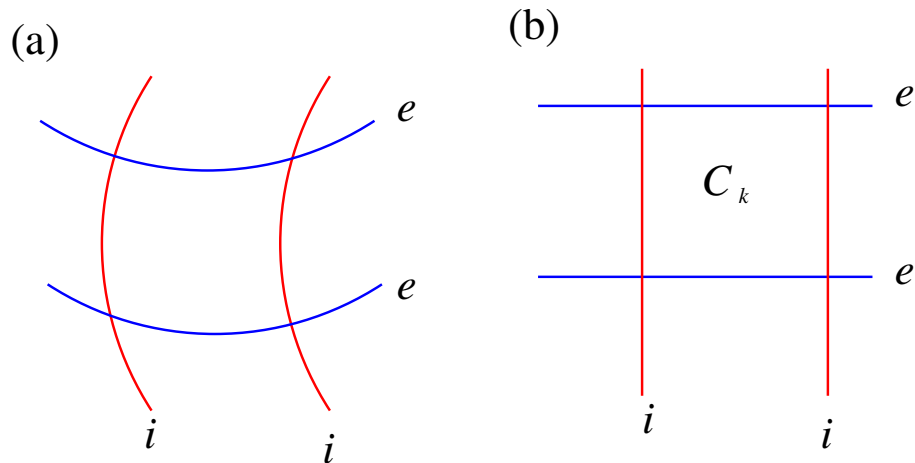


Figura 2.3: (a) Ilustração esquemática da partição do espaço de fase em termos das variedades estável, indicada em azul, e instável, indicada em vermelho. (b) Aproximação por paralelogramos: as células C_k são suficientemente pequenas para que a curvatura das variedades possa ser desprezada. Fonte: adaptado de [39].

Considere agora uma partição específica C_j e um conjunto de condições iniciais respeitando a medida natural do atrator caótico nesta partição. Após n iteradas, algumas destas condições iniciais podem retornar à C_j . Como estamos assumindo sistemas que satisfazem o Axioma A, a fração de condições iniciais¹⁰ que retornam para C_j quando $n \rightarrow \infty$ é igual à medida natural desta célula, $\mu(C_j)$.

Seja x_0 uma das condições iniciais que retorna à C_j após n iteradas. Esta construção está representada esquematicamente na Figura 2.4, na qual a variedade estável está representada na horizontal e a variedade instável na vertical. Embora a figura esteja ilustrando um espaço bidimensional, entende-se que localmente, dentro e nas vizinhanças de cada célula C_j , tais variedades são representadas por espaços Euclidianos com dimensão d_e , para a variedade estável, e d_i , para a variedade instável, sendo, portanto, as linhas apenas uma representação pictórica

¹⁰Para isto, assumem-se infinitas condições iniciais.

unidimensional de espaços com dimensões d_e e d_i .

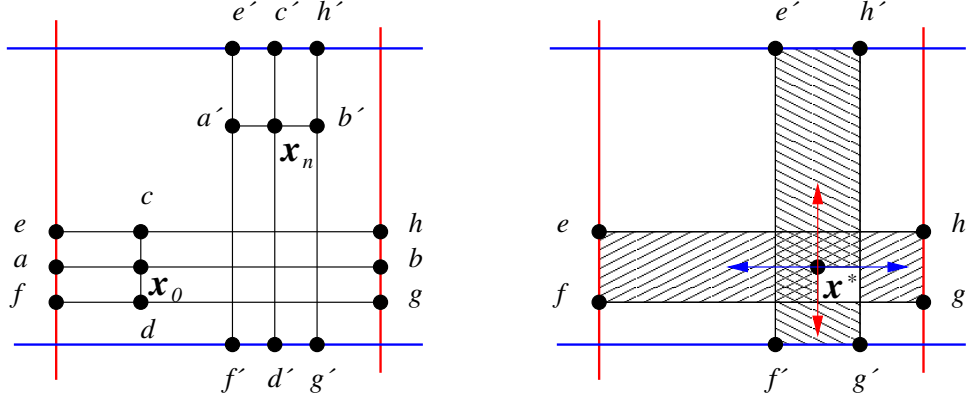


Figura 2.4: Representação esquemática da fração da área de C_j que retorna após n iterações. Fonte: adaptado de [39].

As linhas $\overline{ab}$ e $\overline{c'd'}$ formam um segmento das variedades estável e instável, respectivamente. A imagem após n iterações do segmento sobre a variedade estável está indicada pela linha $\overline{a'b'}$, enquanto que a n -ésima pré-imagem do segmento sobre a variedade instável é dada pela linha $\overline{cd}$. Agora, pode-se determinar o conjunto de pontos dentro de C_j que retornam a esta partição após n iterações. Para isto, considere os segmentos da variedade instável $\overline{e'f'}$ e $\overline{g'h'}$ passando por a' e b' , respectivamente (ver Figura 2.4). Por construção, estes dois segmentos formam a imagem após n iterações dos segmentos $\overline{ef}$ e $\overline{gh}$, que representam porções da variedade estável. Assim, todos os pontos no interior do retângulo $efgh$ hachurado na Figura 2.4 retornam à C_j após n iterações e estão contidos no retângulo $e'f'g'h'$.

Necessariamente, a interseção dos dois retângulos contém um ponto fixo do mapa n -vezes iterado, seja ele um ponto de período n ou m tal que $n = rm$ e $r \in \mathbb{Z}_+$. Por hipótese, este ponto é uma sela com dimensão instável d_i e dimensão estável d_e . A expressão para a medida pode então ser relacionada às órbitas periódicas fazendo este argumento com $x_n = x_0 \equiv x^*$, ou seja, construindo os retângulos indicados na Figura 2.4 considerando o ponto de período n . As dimensões de tais retângulos podem agora ser associadas aos autovalores de x^* . Sejam $L(x^*)$ e $L^{(e)}(x^*)$ respectivamente o produto da magnitude dos autovalores instáveis e estáveis de x^* :

$$L(x^*) = \prod_{k=0}^{d_i-1} |\eta_k(x^*)| \quad (2.46)$$

$$L^{(e)}(x^*) = \prod_{k=d-d_e}^{d-1} |\eta_k(x^*)|, \quad (2.47)$$

sendo $\eta_k(x^*)$ os autovalores de $Df^n(x^*)$ decrescentemente ordenados segundo suas magnitudes,

$$|\eta_0(x^*)| \geq |\eta_1(x^*)| \geq \cdots \geq |\eta_{d_i-1}(x^*)| > 1 > |\eta_{d-d_e}(x^*)| \geq \cdots \geq |\eta_{d-1}(x^*)|. \quad (2.48)$$

Ao assumir C_j tão pequena de maneira que a curvatura das variedades seja nula, considera-se que a dinâmica em C_j é dominada pelo termo linear de f^n , ou seja,

$$x_n = (x_0 - x^*) + Df^n(x^*)(x_0 - x^*), \quad (2.49)$$

portanto, todos os segmentos considerados na construção dos retângulos na Figura 2.4 sobre a variedade estável têm sua magnitude reduzida pelo fator $L^{(e)}(x^*)$ e aqueles sobre a variedade instável têm sua magnitude ampliada pelo fator $L(x^*)$. Assim, a área do retângulo $efgh$, que forma a pré-imagem de $e'f'g'h'$, delimitado verticalmente pelas porções da variedade instável é determinada pelo fator $1/L(x^*)$. Uma vez que a medida natural do atrator varia suavemente na direção instável e C_j é pequena, pode-se assumir que nesta célula a medida do atrator é uniforme. Logo, a fração da área de C_j ocupada pelo retângulo $efgh$ é dada por $1/L_i(x^*)$. Como para $n \rightarrow \infty$ esta fração é igual à fração de condições iniciais que retornam à C_j , tem-se a expressão para a medida natural da célula em função dos autovalores instáveis de x^* :

$$\mu(C_j) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{x \in \mathcal{F}_\tau(C_j)} \frac{1}{L_\tau(x)}, \quad (2.50)$$

na qual o somatório foi introduzido de maneira a considerar a contribuição de todos os pontos fixos x^* do mapa n vezes iterado contidos em C_j . Isto é possível, pois pode-se decompor C_j em diversas células disjuntas menores, de modo que cada uma contenha apenas um ponto τ -fixo. Como a medida natural é aditiva, devido à ergodicidade, tem-se a expressão (2.50).

Duas observações são necessárias na derivação da Eq. (2.50). Primeiro, embora este resultado seja obtido através da aproximação linear do mapa f^p dentro de C_j , a expressão para a medida é formalmente válida, pois pode-se mostrar que esta aproximação difere no máximo por um fator $1 \pm \varepsilon$ do valor obtido por um cálculo mais detalhado, sendo ε dependente das dimensões de C_j e da segunda derivada de $f^p(x^*)$. Como se pode escolher C_j arbitrariamente pequeno, sempre é possível fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ e, portanto, (2.50) é formalmente válida. O segundo fato é que na construção dos retângulos na Figura 2.4 considera-se que a imagem de $\overline{ab}$ e a

pré-imagem de $\overline{c'd'}$ estão completamente contidas em C_j . Esta é uma condição necessária para o desenvolvimento da Eq. (2.50). O ponto a ser considerado é que tais células podem ser escolhidas como partições de Markov do espaço de fase e, como consequência, um segmento interior de C_j não pode ser mapeado, nem pode ter sua imagem, parcialmente fora de C_j , por definição. Como sistemas que satisfazem o axioma A necessariamente possuem partições de Markov, situações como a indicada na Figura 2.5 não ocorrem.

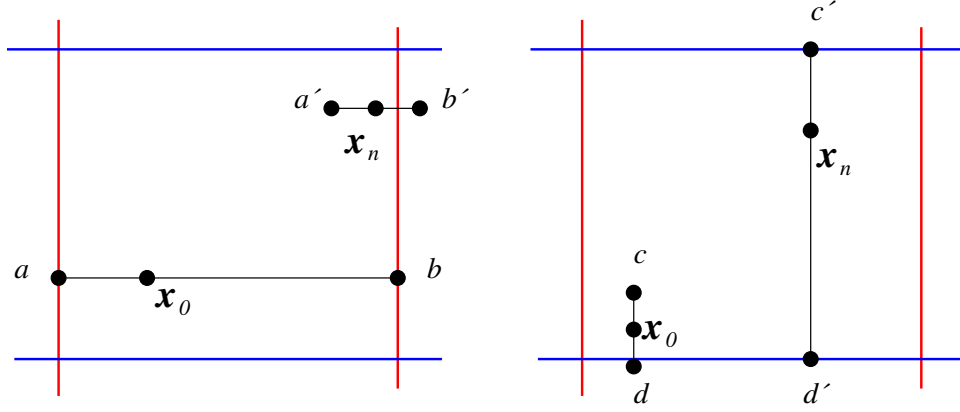


Figura 2.5: Exemplo de localização proibida para as imagens e pré-imagens quando as células C_k formam partições de Markov. Fonte: adaptado de [39].

2.3.2 A enumeração de órbitas periódicas instáveis

Fica claro, portanto, que o conhecimento do conjunto das órbitas periódicas de um mapa caótico F possibilita uma caracterização sistemática e, em muitos casos, rigorosa da dinâmica. No entanto, a determinação de $\mathcal{F}_p$ não é, tipicamente, uma tarefa trivial. Formalmente, a Eq. (2.44) define tais pontos como, simplesmente, o conjunto de zeros da função d -dimensional definida por

$$G_p(x) \equiv F^p(x) - x. \quad (2.51)$$

A não-trivialidade surge do fato que $F(x)$ é *necessariamente* uma função não-linear. Lembrando que $F^p(x) = F \circ F \circ \dots \circ F(x)$, ou seja, p composições de F , $G_p(x)$ é, tipicamente, uma função extremamente irregular. Geralmente, os métodos numéricos são iterativos¹¹ e têm sua eficiência associada à suavidade da função. Por exemplo, o método de Newton-Raphson [13]

¹¹Apenas como uma curiosidade, tais métodos *definem* um sistema dinâmico e muitas das ferramentas aqui apresentadas podem, e de fato são [40], ser utilizadas em seu estudo e otimização.

necessita de uma condição inicial y_0 na vizinhança linear do zero z para que $y_n \rightarrow z$, com convergência quadrática. Quanto mais irregular é $G_p(x)$, menor é a região em que y_0 pode ser escolhido. Mais ainda, como indicado na seção 2.1.2, o número de elementos de $\mathcal{F}_p$ cresce *exponencialmente* com p . Ou seja, o número de zeros da Eq. (2.51) torna-se exponencialmente grande com p . Assim, o desenvolvimento de métodos numéricos otimizados para o cálculo de pontos periódicos instáveis em sistemas caóticos tornou-se, por si só, um ramo de pesquisa [41–43]. Na seção 3.3, no próximo capítulo, um método analítico, otimizado *semi-analiticamente*, é apresentado para estudar o modelo proposto na presente tese. Tal método é, no entanto, bastante restrito, pois vale-se da linearidade por partes das equações que definem o sistema, propriedade que não está presente nos sistemas típicos. Mas vale aqui salientar que, de posse dos métodos propostos por Biham e Wenzel [44], Schmelcher e Diakonov [45] e Davidchack e Lai [42], os resultados aqui apresentados podem ser estendidos para sistemas suaves, ou suaves por partes, limitando-se a análise apenas à viabilidade computacional da aplicação de tais métodos.

2.4 A caracterização da variabilidade da dimensão instável

2.4.1 Os expoentes de Lyapunov locais

Os expoentes de Lyapunov, definidos na Seção 2.1.3, são quantidades assintóticas que caracterizam o comportamento médio do sistema nas d diferentes direções. Mas, exceto para sistemas uniformemente hiperbólicos, as taxas de contração e expansão não são constantes para todos os pontos em Ω . Define-se, portanto, o espectro de expoentes de Lyapunov locais, também denominados como *expoentes de Lyapunov a tempo finito*, como

$$\lambda_k(x, n) = \frac{1}{n} \ln \|DF^n(x)v_k\|. \quad (2.52)$$

Percebe-se duas diferenças com a Eq. (2.36): (i) a quantidade $\lambda_k(x, n)$ é definida a *tempo finito* n , tal que a dependência com x deve ser explicitamente mantida e (ii) os vetores v_k agora são definidos como os autovetores de $DF^n(x)$, indexados de tal modo que o espectro definido pela Eq. (2.52) seja não-crescente com k . Essa segunda diferença é crucial pois o particionamento

de Ω nos subespaços $\mathbb{E}^{(k)}$, como no caso a tempo infinito, não é mais único. Evidentemente, tem-se

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(x, n) \quad (2.53)$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Os expoentes de Lyapunov a tempo finito são então estudados a partir de suas distribuições. Seja $\psi(\lambda'_k(n))$ a densidade de probabilidade de se obter um $\lambda_k(x, n)$ entre $\lambda'_k(n)$ e $\lambda'_k(n) + d\lambda'_k(n)$ para uma amostragem de um *ensemble* de trajetórias de tamanho n distribuídas em Ω de acordo com a densidade natural invariante $\rho(x)$. Então, o expoente de Lyapunov (a tempo infinito) também é dado por

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda'_k(n) \psi(\lambda'_k(n)) d\lambda'_k(n), \quad (2.54)$$

para qualquer $n > t_c$, o tempo de correlação do sistema.

A distribuição dos expoentes de Lyapunov locais pode então ser utilizada para a caracterização da dinâmica não-hiperbólica em sistemas com variabilidade da dimensão instável. Seja $\phi_k(n)$ definido por

$$\phi_k(n) = \int_0^{+\infty} \psi(\lambda'_k(n)) d\lambda'_k(n), \quad (2.55)$$

ou seja, $\phi_k(n)$ representa a probabilidade de se obter o k -ésimo expoente de Lyapunov a tempo n positivo. Para n suficientemente grande, $\phi_k(n) \notin \{0, 1\}$ é um indicativo de que o sistema apresenta variabilidade da dimensão instável na k -ésima direção [46]. No entanto, a Eq. (2.55) pode não ser um indicativo preciso para a variabilidade da dimensão instável, pois os vetores v_k utilizados no cálculo de $\lambda_k(x, n)$ não são *invariantes*. Ademais, sistemas não-hiperbólicos *via* tangências homoclínicas também podem exibir uma flutuação de algum (ou alguns) expoente de Lyapunov a tempo finito em torno de zero, *i. e.*, assumindo valores positivos e negativos para diferentes $x \in \Omega$.

2.4.2 A medida de contraste

Um diagnóstico *robusto* para a variabilidade da dimensão instável transversal foi introduzido por Ying-Cheng Lai [47], baseado na determinação da medida natural invariante de um

sistema caótico em termos de suas órbitas periódicas instáveis. Seja $\mathcal{F}_p(\mathcal{S})$ o conjunto de todos os pontos p -fixos de F restritos à $\mathcal{S}$, o subespaço invariante. Assuma, por simplicidade (e por ser suficiente para o tratamento nos próximos capítulos) que Ω é bidimensional e, portanto, $\dim(\mathcal{S}) = 1$. Sejam, portanto, $\eta_\perp(q)$ e $\eta_\parallel(q)$ os autovalores transversal e longitudinal, respectivamente, de $DF^p(x(q))$, a matriz Jacobiana calculada sobre o q -ésimo elemento de $\mathcal{F}_p(\mathcal{S})$. Define-se, respectivamente, o *peso associado* aos pontos p -periódicos com dimensão instável 1 e 2 por

$$\mu_1(p) = \sum_{x(q) \in \mathcal{F}_p(\mathcal{S})} \frac{1}{|\eta_\parallel(q)|} \Theta(1 - |\eta_\perp(q)|) \quad (2.56)$$

e

$$\mu_2(p) = \sum_{x(q) \in \mathcal{F}_p(\mathcal{S})} \frac{1}{|\eta_\parallel(q)|} \Theta(|\eta_\perp(q)| - 1), \quad (2.57)$$

sendo $\Theta(\cdot)$ a função degrau de Heaviside. Percebe-se, por comparação com os resultados indicados na seção 2.3.1, que $\mu_1(p)$ e $\mu_2(p)$ representam uma aproximação de ordem p para a medida natural, restrita à $\mathcal{S}$, associada às regiões com dimensão instável distinta¹². Portanto, a seguinte quantidade, denominada *medida de contraste*,

$$C_p = \left| \frac{\mu_1(p) - \mu_2(p)}{\mu_1(p) + \mu_2(p)} \right| \quad (2.58)$$

quantifica a variabilidade da dimensão instável transversal em $\mathcal{S}$. Note que $0 \leq C_p < 1$ implica a existência de pontos p -fixos com dimensão instável distinta. Assim, apenas quando $C_p = 1$ para *todos* os valores de p o subespaço $\mathcal{S}$ é hiperbólico. No outro extremo, quando $C_p = 0$ a variabilidade da dimensão instável transversal é dita *mais intensa*, pois a medida associada às regiões com dimensão instável um e dois é idêntica.

Do mesmo modo que espera-se que a medida natural seja melhor representada pelos elementos de $\mathcal{F}_p$ conforme maiores períodos p são considerados, a caracterização da variabilidade da dimensão instável transversal *via* medida de contraste se torna mais acurada para períodos mais altos. A Figura 2.6 representa a dependência de C_p com p e com um parâmetro de controle ε (para a definição do sistema dinâmico em questão, vide capítulo 3). Esse parâmetro de controle ε influencia apenas a dinâmica transversal à $\mathcal{S}$ ($a = \varepsilon$ na definição 1) de tal modo

¹²Por construção, nesse caso, todo ponto p -fixo possui pelo menos uma direção instável associada à $\mathcal{S}$.

que o comportamento indicado na Figura 2.6 é típico para sistemas dinâmicos não-hiperbólicos com variabilidade da dimensão instável transversal. Percebe-se que o sistema é não-hiperbólico para um grande intervalo do parâmetro ε e que C_p torna-se mais suave com o incremento de p . Mais ainda, a linha vertical na Figura 2.6 representa o parâmetro crítico ε_c para o qual $\mathcal{S}$ torna-se instável (nesse caso, como decréscimo de ε) e percebe-se que a variabilidade da dimensão instável é mais intensa para parâmetros próximos ao parâmetro crítico.

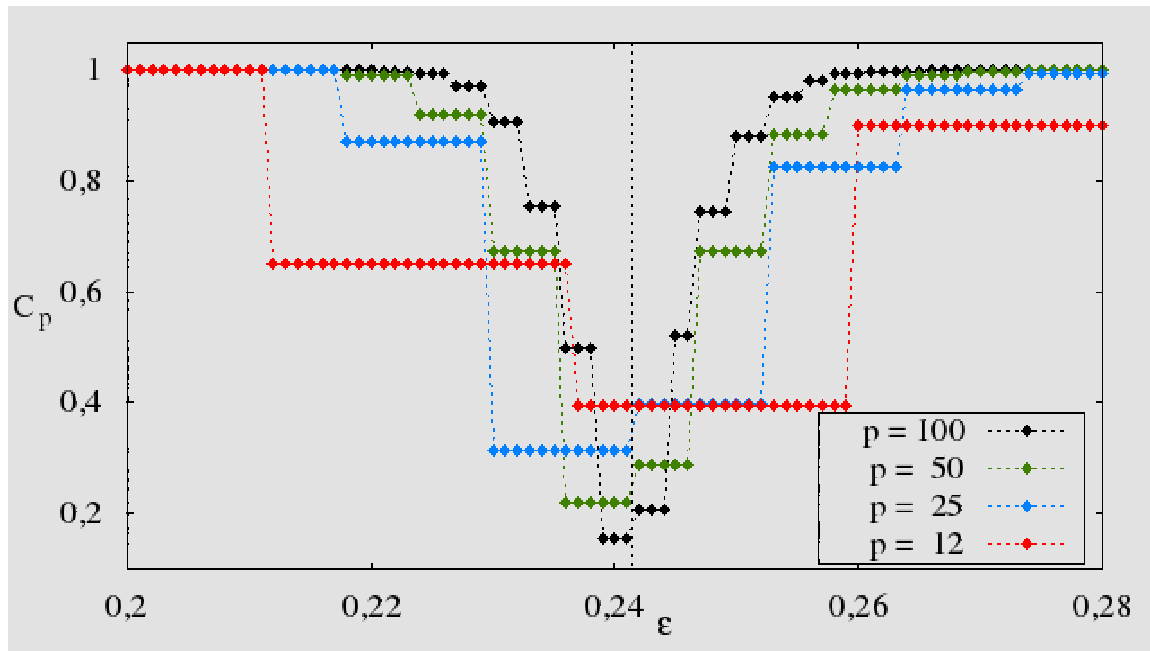


Figura 2.6: Exemplo do cálculo da medida de contraste, Eq. (2.58), para um sistema com variabilidade da dimensão instável transversal (vide Eq. (3.9) do próximo capítulo). A linha tracejada vertical indica o parâmetro crítico para o qual o subespaço $\mathcal{S}$ perde a estabilidade transversal. Fonte: o autor.

2.4.3 O expoente de não-hiperbolicidade

Timothy D. Sauer e colaboradores [17] derivaram uma expressão para a distância de sobreamento, definida como a distância entre um dado ponto da pseudo-trajetória e seu correspondente na trajetória real sobreante, em termos do nível de perturbação δ e das propriedades dos expoentes de Lyapunov a tempo finito que flutua em torno de zero. Mais especificamente, foi demonstrado que a distribuição do logaritmo das distâncias de sobreamento, y , é aproximadamente exponencial, dada por

$$p(y) = h e^{-h(y - \log \delta)} \quad (2.59)$$

sendo $y > \log \delta$ e h , dito *expoente de hiperbolicidade*, dado em termos da magnitude do expoente de Lyapunov a tempo y que oscila em torno de zero, $|m|$, e de sua variância σ^2 :

$$h = \frac{2|m|}{\sigma^2}. \quad (2.60)$$

Assim, as Eqs. (2.59) e (2.60) relacionam as propriedades de sombreamento de um sistema com variabilidade da dimensão instável transversal com os dois primeiros momentos da distribuição do maior expoente de Lyapunov transversal que oscila em torno de zero. Dessa relação, Sauer derivou uma expressão para o desvio esperado na determinação numérica da medida natural em termos do nível de perturbação δ (idem à Eq. (1.12)):

$$|\langle \mu \rangle_\delta - \langle \mu \rangle| = K_\mu \delta^h, \quad (2.61)$$

sendo h dado pela Eq. (2.60), K_μ uma constante positiva e $|\langle \mu \rangle_\delta - \langle \mu \rangle|$ o desvio entre as medidas naturais obtidas pelas trajetórias com e sem perturbação.

A principal consequência da variabilidade da dimensão instável evidenciada pela a Eq. (2.61) é que, caso $h \ll 1$, mesmo perturbações muito pequenas podem resultar em grandes desvios (várias ordens de magnitude maiores) na determinação da medida natural. Como dito na seção anterior, quando a variabilidade da dimensão instável é muito intensa, $|m| \approx 0$ e $\sigma^2 \gg |m|$ de modo que $h \ll 1$. Nos próximos capítulos é demonstrado que, na presença de perturbações, o subespaço $\mathcal{S}$ não é mais invariante e, portanto, os resultados derivados a partir da Eq. (2.59) não mais se aplicam, pois em sua dedução *requer-se* a existência de um subespaço invariante.

3 *Metodologia*

Nesse capítulo estão descritos o modelo e os métodos utilizados para a caracterização da variabilidade da dimensão instável transversal, bem como o efeito de perturbações no sistema. Conforme descrito nos capítulos anteriores, um modelo para avaliar a variabilidade da dimensão instável transversal deve possuir um subespaço invariante que contenha, para algum conjunto de parâmetros, um atrator global caótico. Uma maneira sistemática de construir tal modelo é considerar mapas caóticos linearmente acoplados, assumindo o subespaço que caracteriza a sincronização completa de caos como o referido subespaço invariante. Na Seção 3.1, o modelo é construído a partir do acoplamento difusivo de dois mapas do bangalô acoplados. Devido à linearidade por partes do mapa do bangalô, diversos resultados analíticos podem ser derivados e essa é a principal motivação de sua escolha. Os critérios para que o subespaço de sincronização seja um atrator global do sistema estão descritos na Seção 3.2. A existência (e intensidade) da variabilidade da dimensão instável transversal nesse subespaço forma um dos resultados da presente tese e está demonstrada no próximo capítulo, Seção 4.1.1. A caracterização da dinâmica do modelo apresentado na presença de perturbações requer a determinação das órbitas periódicas instáveis do sistema e, para esse fim, um método analítico para o cálculo de tais órbitas foi desenvolvido e encontra-se descrito na Seção 3.3. Por fim, a Seção 3.3.2 descreve uma otimização, que pode ser obtida analiticamente ou *semi*-analiticamente, para o referido método. Deve-se acrescentar, também, que os resultados apresentados no próximo capítulo são qualitativamente independentes da precisão computacional utilizada nos experimentos numéricos. Aqui, todas as simulações foram implementadas em linguagem C, utilizando variáveis do tipo *long double*¹ – o erro no cálculo das órbitas periódicas é da ordem da precisão numérica.

¹Precisão dupla, até $\sim 10^{-18}$.

3.1 O modelo

3.1.1 O mapa do bangalô

Seja $f : \omega \mapsto \omega$ um mapa unidimensional caótico do intervalo $\omega = [0, 1]$ nele mesmo, definido por [48]:

$$f(x; a) = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x & \text{se } x \in I_1 \equiv [0, a) \\ \frac{2a}{1-2a}x + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{se } x \in I_2 \equiv [a, \frac{1}{2}) \\ \frac{2a}{1-2a}(1-x) + \frac{1-3a}{1-2a} & \text{se } x \in I_3 \equiv [\frac{1}{2}, 1-a) \\ \frac{1-a}{a}(1-x) & \text{se } x \in I_4 \equiv [1-a, 1] \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo $a \in (0, 1/2)$ um parâmetro real de controle. Por razões notacionais, que ficarão evidentes nas seções 3.3 e 4.2, o mapa (3.1) também pode ser escrito como

$$f(x; a) = \beta_a^{(i)}x + \alpha_a^{(i)}, \quad (3.2)$$

sendo i determinado tal que $x \in I_i$ e

$$\begin{aligned} \beta_a^{(1)} &= \frac{1-a}{a} & \text{e} & \quad \alpha_a^{(1)} = 0 \\ \beta_a^{(2)} &= \frac{2a}{1-2a} & \text{e} & \quad \alpha_a^{(2)} = \frac{1-3a}{1-2a} \\ \beta_a^{(3)} &= \frac{2a}{2a-1} \equiv -\beta_a^{(2)} & \text{e} & \quad \alpha_a^{(3)} = \frac{1-a}{1-2a} \equiv \beta_a^{(2)} + \alpha_a^{(2)} \\ \beta_a^{(4)} &= \frac{a-1}{a} \equiv -\beta_a^{(1)} & \text{e} & \quad \alpha_a^{(4)} = \frac{1-a}{a} \equiv \beta_a^{(1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

O mapa (3.1) é caótico e seu expoente de Lyapunov possui uma dependência suave com o parâmetro a [49]. A forma (3.2) reforça o fato que o mapa do bangalô é linear por partes, com quatro intervalos de linearidade I_i , $i = 1, 2, 3$ e 4 , exceto para o caso em que $a = 1/3$. Para esse valor de parâmetro a Eq. (3.1) se reduz ao mapa da tenda usual [11] (mesmo que na Eq. (1.9)),

$$x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 2-2x & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

com apenas dois intervalos de linearidade.

Exemplos da ação do mapa do bangalô estão indicados na Figura 3.1(a), sendo a função $f(x; a)$ definida na Eq. (3.1) indicada para três valores do parâmetro de controle: $a = 0, 25,$

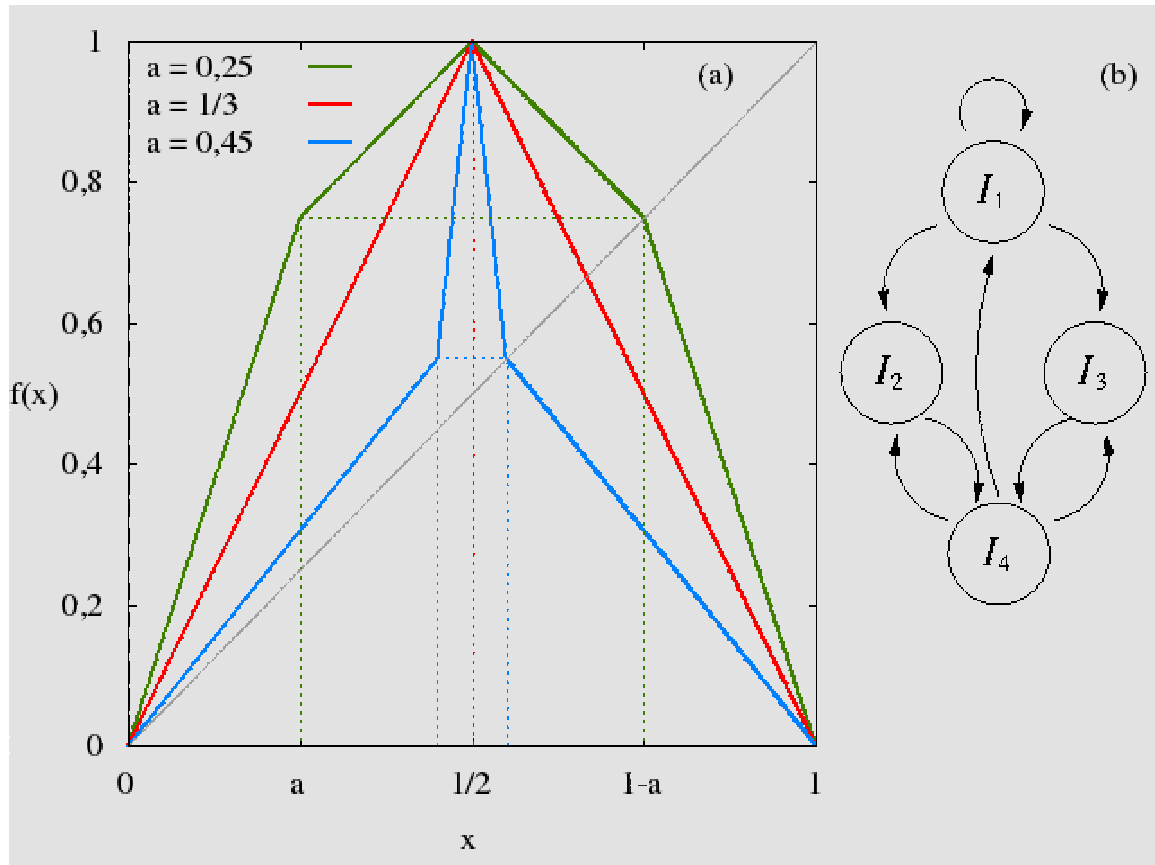


Figura 3.1: (a) Representação da função $f(x; a)$ que define o mapa do bangalô para três parâmetros distintos: $a = 0,25$, $a = 1/3$ e $a = 0,45$. As partições indicadas se referem ao primeiro caso. (b) Grafo representando as possíveis transações dos intervalos de linearidade do mapa do bangalô. Fonte: o autor.

$a = 1/3$ e $a = 0,45$. O mapa é simétrico em torno de $x = 1/2$ e possui um ponto fixo ($x = f(x)$) à direita exatamente no ponto de descontinuidade do mapa. Nos três casos, percebe-se que os intervalos de linearidade do mapa do bangalô também representam partições de Markov de ω (vide seção 2.1.2). De fato, o mapa (3.1) foi definido de tal forma que essa propriedade é satisfeita para qualquer valor de a . Essa afirmação pode ser facilmente verificada observando-se a linearidade de f em cada um dos intervalos I_i e a imagem de seus extremos [50]:

$$\left. \begin{array}{l} f(0; a) = 0 \\ f(a; a) = 1 - a \\ f(1/2; a) = 1 \\ f(1 - a; a) = 1 - a \\ f(1; a) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(I_1) = (I_1 \cup I_2 \cup I_3) \\ f(I_2) = I_4 \\ f(I_3) = I_4 \\ f(I_4) = (I_1 \cup I_2 \cup I_3) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Segundo a notação definida na seção 2.1.2, a Eq. (3.5) pode ser representada pelo grafo indicado na Figura 3.1(b). As setas indicam quais intervalos de linearidade podem ser alcançados, com uma iteração do mapa, a partir de cada intervalo I_i . Ainda segundo indicado na seção 2.1.2, a esse grafo está associada uma matriz de transferência T dada por

$$T \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

O maior autovalor dessa matriz é $t = 2$ de tal modo que a entropia topológica do mapa (3.1) é $h_T = \log 2$ para todo valor de a .

Embora a dinâmica topológica do mapa do bangalô seja independente de a , as propriedades métricas dependem suavemente desse parâmetro. A determinação da densidade natural invariante de f pode ser intuitivamente obtida, exemplificando o formalismo apresentado na Seção 2.1.1. Assuma que f admite uma densidade invariante $\rho(x)$ tal que

$$\rho(x) = \rho(f^{-1}(x)).$$

Assuma ainda que $\rho(x) = c_i$ para $x \in I_i$, sendo $c_i \in \mathbb{R}_+$. Devido à linearidade de f em I_i , a “quantidade de medida”, dada por

$$\mu_i = \int_{I_i} d\mu = \int_{I_i} \rho(x) dx = c_i \int_{I_i} dx = c_i |I_i|,$$

sendo $|I_i|$ a medida de Lebesgue do intervalo I_i , deve ser uniformemente distribuída nos intervalos $f(I_i)$. Assim, segundo o grafo da Figura 3.1(b) ou, equivalentemente, a Eq. (3.5), a medida μ_1 é distribuída, pela ação de f , nos intervalos I_1 , I_2 e I_3 de acordo com as proporções a , $(0,5 - a)$ e $(0,5 - a)$, respectivamente, todas normalizadas por suas somas $a + (0,5 - a) + (0,5 - a) = (1 - a)$. Note que essas proporções são nada mais que a medida de Lebesgue dos referidos intervalos. Portanto, a densidade invariante do mapa do bangalô deve satisfazer as seguintes relações:

$$\mu_1 = \frac{a}{1-a} (\mu_1 + \mu_4), \quad \mu_2 = \frac{\frac{1}{2}-a}{1-a} (\mu_1 + \mu_4), \quad \mu_3 = \frac{\frac{1}{2}-a}{1-a} (\mu_1 + \mu_4) \quad \text{e} \quad \mu_4 = \mu_2 + \mu_3.$$

Tais relações formam um sistema linearmente dependente de 4 equações e 4 incógnitas. A indeterminação desse sistema pode ser eliminada observando-se a condição de normalização

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1.$$

Assim, obtém-se

$$\mu_1 = \frac{a}{2-3a}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{1-2a}{2(2-3a)} \quad \text{e} \quad \mu_4 = \frac{1-2a}{2-3a}.$$

Como $\mu_i = c_i |I_i|$, a densidade invariante é finalmente obtida:

$$c_1 = \frac{\mu_1}{a} = \frac{1}{2-3a}, \quad c_2 = \frac{\mu_2}{\frac{1-2a}{2}} = \frac{1}{2-3a} = c_3 \quad \text{e} \quad c_4 = \frac{\mu_4}{a} = \frac{1-2a}{a(2-3a)}$$

de tal modo que

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-3a} & \text{se } x \in (I_1 \cup I_2 \cup I_3) = [0, (1-a)) \\ \frac{1-2a}{a(2-3a)} & \text{se } x \in I_4 = [(1-a), 1] \end{cases}. \quad (3.7)$$

De posse da densidade natural invariante e valendo-se da ergodicidade dos mapas (fortemente) caóticos, Eq. (2.14), o expoente de Lyapunov do mapa do bangalô em função do parâmetro a pode ser facilmente obtido pelas Equações (2.37) e (3.7), observando que $f'(x; a) = \beta_a^{(i)}$ dado pela Eq. (3.3):

$$\lambda(a) = \int_{\omega} \log |f'(x; a)| d\mu(x) = \frac{1-a}{2-3a} \log \left(\frac{1-a}{a} \right) + \frac{1-2a}{2-3a} \log \left(\frac{2a}{1-2a} \right). \quad (3.8)$$

Como a função $\log(x)$ é suave para $x \neq 0$, a expressão (3.8) confirma a dependência suave do expoente de Lyapunov do mapa do bangalô com o parâmetro de controle a [48, 49].

As propriedades dinâmicas determinadas nessa seção serão de grande valia na caracterização da dinâmica transversal apresentada nas seções 3.2 e 4.1.1.

3.1.2 Os mapas acoplados

Conforme discutido na Seção 2.2, sistemas compostos de mapas acoplados podem representar modelos para problemas espacialmente extensos. Dentre os possíveis fenômenos dinâmicos

exibidos por esses sistemas está a sincronização completa de caos e, como já foi reiteradamente nesse texto, o subespaço de sincronização é o modelo simplificado escolhido para o estudo da variabilidade da dimensão instável transversal. Assim sendo, nessa seção um sistema mínimo para a sincronização (completa) de caos é definido pelo acoplamento, simétrico e difusivo, de dois mapas do bangalô.

Seja, portanto, $x \mapsto F(x)$ um mapa bidimensional com

$$F(x) = A(\varepsilon) f(x; a), \quad (3.9)$$

tal que

$$A(\varepsilon) \doteq \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon) & \varepsilon \\ \varepsilon & (1 - \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e

$$f(x; a) \doteq \begin{bmatrix} f^{(1)}(x; a) & f^{(2)}(x; a) \end{bmatrix}^T, \quad f^{(i)}(x; a) \equiv f(x^{(i)}; a). \quad (3.11)$$

Na Eq. (3.11), T indica a operação matricial de transposição. A matriz de acoplamento $A(\varepsilon)$ na Eq. (3.9) descreve a interação, quantificada pelo parâmetro $\varepsilon \in [0, 1]$, entre os dois mapas, representando uma versão bidimensional do acoplamento difusivo presente na Eq. (2.40).

A matriz de acoplamento $A(\varepsilon)$ dita uma matriz estocástica [34], pois a soma dos elementos de cada uma de suas linhas é igual a unidade e todos seus elementos são não-negativos. Isso garante que o espaço de fase do mapa (3.9) definido por

$$\Omega = \omega \times \omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

seja invariante: $F(\Omega) \subset \Omega$. Por consistência com a dinâmica local, requer-se que toda condição inicial para a Eq. (3.9) satisfaça $x_0^{(i)} \in \omega$ tal que $x_0 \in \Omega$.

Outra vantagem do acoplamento dado pela Eq. (3.10) é que o subespaço de sincronização $\mathcal{S}$, definido na Eq. (2.42) é mantido invariante quanto à ação de F : $F(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Isso é

facilmente verificado pois, para $x \in \mathcal{S}$, tem-se

$$f(x; a) \stackrel{\circ}{=} f(s; a) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que $s = x^{(1)} = x^{(2)}$. Como a Eq. (3.10) define uma matriz estocástica, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ é o autovetor de $A(\varepsilon)$ associado ao autovalor igual a 1 e, portanto, tem-se

$$x \mapsto f(x; a)$$

que, evidentemente, pertence à $\mathcal{S}$. Uma vez que isso é verdade para todo $s \in \omega$ (equivalentemente $x \in \mathcal{S}$) e $f(\omega; a) = \omega$, a invariância de $\mathcal{S}$ quanto a F está demonstrada.

3.2 A sincronização de caos

Na seção anterior a existência e a invariância do subespaço de sincronização $\mathcal{S}$ para o modelo (3.9) foram demonstradas. Entretanto é necessário determinar a estabilidade transversal desse subespaço. Novamente, as escolhas da dinâmica local, Eq. (3.1), e do acoplamento, Eq. (3.10), simplificam a tarefa. Seja $x_0 \in \mathcal{S}$, tal que $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = s_0$, uma condição inicial típica. Segundo a Eq. (2.36), o espectro de expoentes de Lyapunov de $\mathcal{S}$ é dado por

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(x_0) e_k|$$

em que e_k é um vetor unitário típico satisfazendo $e_k \in \mathbb{E}^{(k)} \setminus \mathbb{E}^{(k+1)}$ com $\mathbb{E}^{(1)} = \Omega$. Em $\mathcal{S}$, a matriz Jacobiana assume a seguinte forma simplificada (aqui e no que segue, $A = A(\varepsilon)$ por simplicidade de notação):

$$DF^n(x_0) = \prod_{t=0}^{n-1} DF(x_t) = \prod_{t=0}^{n-1} (Af(x_t)) = \prod_{t=0}^{n-1} (f(s_t)A) = \left(\prod_{t=0}^{n-1} f(s_t) \right) A^n$$

de modo que

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \left(\prod_{t=0}^{n-1} f(s_t) \right) A^n e_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \log |f(s_t)| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |A^n e_k|. \quad (3.12)$$

O primeiro termo da última equação nada mais é, segundo a Eq. (2.37), que o expoente de Lyapunov da dinâmica local, λ_f , regida por f , nesse caso dado por (3.8). O segundo termo pode ser facilmente calculado a partir da expansão de e_k em termos dos autovetores da matriz de acoplamento A . Resolvendo o problema de autovalores (e autovetores):

$$Av_i = \chi_i v_i$$

obtem-se

$$\chi_1 = 1, \quad v_1 \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \chi_2 = 1 - 2\varepsilon \quad \text{e} \quad v_2 \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

sendo os autovetores v_i devidamente normalizados.

Assim, o vetor e_k pode ser escrito como

$$e_k = \sum_{i=1}^2 (e_k \cdot v_i) v_i$$

de modo que

$$A^n e_k = \sum_{i=1}^2 (e_k \cdot v_i) A^n v_i = \sum_{i=1}^2 (e_k \cdot v_i) \chi_i^n v_i = (e_k \cdot v_1) v_1 + (e_k \cdot v_2) (1 - 2\varepsilon)^n v_2.$$

Uma vez que e_1 é um vetor *típico* em Ω , $(e_k \cdot v_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$ e $|1 - 2\varepsilon| < 1$ para $0 < \varepsilon < 1$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n e_1 = (e_1 \cdot v_1) v_1 + (e_1 \cdot v_2) v_2 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2\varepsilon)^n = (e_1 \cdot v_1) v_1, \quad (3.14)$$

Substituindo na Eq. (3.12), obtém-se

$$\lambda_1 = \lambda_f + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(e_1 \cdot v_1) v_1| = \lambda_f,$$

ou seja, o maior expoente de Lyapunov de $\mathcal{S}$ é dado pelo expoente de Lyapunov da dinâmica local e o vetor de Lyapunov associado é, pela Eq. (3.14), o autovetor v_1 de A . Logo, e_2 deve ser um vetor típico em $\Omega \setminus \text{span}(v_1)$, ou seja, $e_2 = v_2$. Observando que $(e_2 \cdot v_i) = \delta_{i2}$ e substituindo na Eq. (3.12), obtém-se

$$\lambda_2 = \lambda_f + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(1 - 2\varepsilon)^n| = \lambda_f + \log |1 - 2\varepsilon|.$$

Assim, a dinâmica em $\mathcal{S}$ é sempre caótica, pois $\lambda_f > 0$, e o segundo expoente de Lyapunov de $\mathcal{S}$ depende apenas de λ_f e da intensidade do acoplamento.

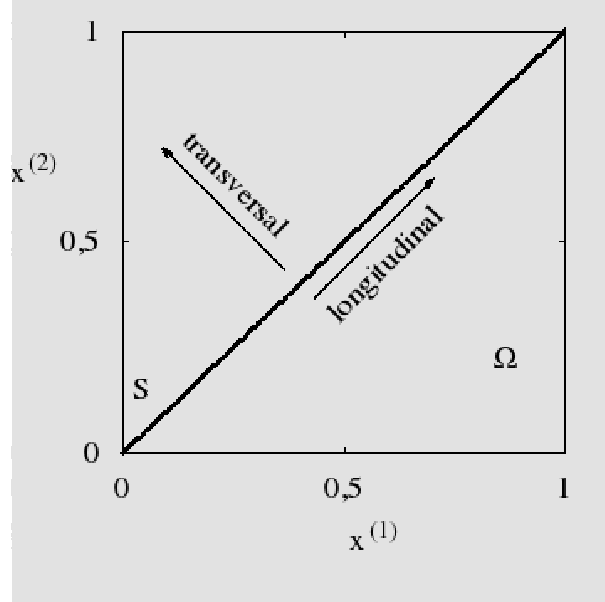


Figura 3.2: Representação das direções longitudinal e transversal em Ω . Fonte: o autor.

Novamente, a análise dinâmica do modelo (3.9) revela uma conveniência. Como encontra-se esboçado na Figura 3.2, os autovetores de A definem direções preferenciais em Ω . Mais precisamente, v_1 e v_2 coincidem com os vetores de Lyapunov em todos os pontos de $\mathcal{S}$. Define-se, portanto, v_1 como a direção *longitudinal* relativa à $\mathcal{S}$, pois v_1 é paralelo à $\mathcal{S}$ e, por questões mnemônicas, as quantidades associadas à essa direção são representadas pelo símbolo “ $\parallel$ ”. Por exemplo, $v_1 \rightarrow v_{\parallel}$ e $\lambda_1 = \lambda_f = \lambda_{\parallel}$. Analogamente, define-se v_2 como a direção *transversal* de $\mathcal{S}$ e utiliza-se o símbolo “ $\perp$ ”. Assim, a estabilidade transversal de $\mathcal{S}$ é determinada por

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel} + \log |1 - 2\varepsilon|. \quad (3.15)$$

As direções longitudinal e transversal indicadas na Figura 3.2 sugerem a introdução de um novo sistema de coordenadas:

$$u_n \equiv \frac{x_n^{(1)} + x_n^{(2)}}{2} \quad \text{e} \quad z_n = \frac{x_n^{(1)} - x_n^{(2)}}{2} \quad (3.16)$$

representando a projeção (a menos de um fator de proporcionalidade) de x_n nas direções v_1 e v_2 , respectivamente, ou, equivalentemente, uma rotação por $-\pi/4$. Essa rotação nas coordenadas

é conveniente para a análise da dinâmica transversal à $\mathcal{S}$ pois $|z_n|$ quantifica a distância entre o ponto $x_n \in \Omega$ da trajetória e o subespaço invariante $\mathcal{S}$. Evidentemente, $z_n = 0$ implica $x_n \in \mathcal{S}$. Em diversas situações, no próximo capítulo, o sistema de coordenadas (3.16) será utilizado.

A dinâmica transversal é, segundo a Eq. (3.15), parametrizada pela intensidade do acoplamento ε e pelo parâmetro a do mapa do bangalô (uma vez que $\lambda_{\parallel} = \lambda(a)$ dado pela Eq. (3.8)). Conforme ficará claro na Seção 4.1.1, a variabilidade da dimensão instável transversal, objeto primeiro dessa tese, varia de intensidade com a alteração dos parâmetros a e ε . A fim de quantificar os efeitos devido *apenas* à não-hiperbolicidade de $\mathcal{S}$ é conveniente fixar o comportamento médio da dinâmica transversal, parametrizando a dinâmica transversal por $\lambda_{\perp}$ ao invés de ε . Para isso, evidencia-se ε na Eq. (3.15) para obter:

$$\varepsilon = \frac{1 \pm \exp(\lambda_{\perp} - \lambda_{\parallel})}{2}. \quad (3.17)$$

Devido ao módulo presente na Eq. (3.15), a inversão de ε como uma função de $\lambda_{\perp}$ não é única. Define-se, portanto,

$$\varepsilon(\lambda_{\perp}; a) = \frac{1 - \exp(\lambda_{\perp} - \lambda_{\parallel}(a))}{2} \quad (3.18)$$

e

$$\varepsilon'(\lambda_{\perp}; a) = \frac{1 + \exp(\lambda_{\perp} - \lambda_{\parallel}(a))}{2}. \quad (3.19)$$

Assim, a intensidade de acoplamento pode ser ajustada de tal modo que a dinâmica transversal é caracterizada pelo dado $\lambda_{\perp}$. Evidentemente, deve-se observar as restrições $0 \leq \varepsilon \leq 1$ para que os resultados aqui apresentados mantenham-se formalmente válidos.

De posse das Eqs. (3.15) ou (3.17) a estabilidade transversal de $\mathcal{S}$ pode ser facilmente determinada. A transição de transversalmente estável para instável (ou *vice-versa*) se dá quando $\lambda_{\perp} = 0$. Denomina-se intensidade de acoplamento crítica o valor de ε para o qual $\lambda_{\perp} = 0$, sendo tais intensidades dadas por

$$\varepsilon_c = \frac{1 - \exp(-\lambda(a))}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon'_c = \frac{1 + \exp(-\lambda(a))}{2}, \quad (3.20)$$

com $\lambda(a)$ dado pela Eq. (3.8). A dependência de $\lambda_{\perp}$ com a e ε , bem como as curvas críticas ε_c e ε'_c estão indicadas na Figura 3.3.

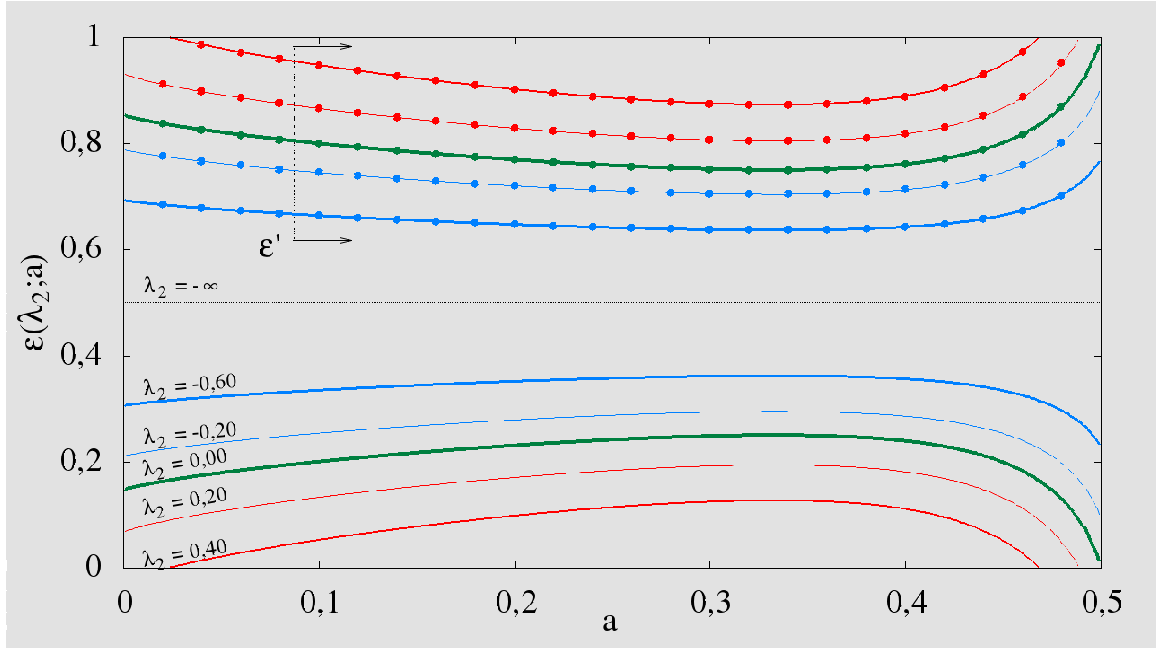


Figura 3.3: Curvas de nível no plano de parâmetros $a \times \varepsilon$ caracterizadas pelo mesmo expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\perp} \equiv \lambda_2$. As linhas acompanhadas dos símbolos $\bullet$ representam os resultados para ε' . Percebe-se a simetria dos resultados com relação à $\varepsilon = 0,50$, intensidade do acoplamento que resulta em super-estabilidade transversal de $\mathcal{S}$. As linhas em vermelho (azul) indicam $\lambda_{\perp} > 0$ ($\lambda_{\perp} < 0$) e as em verde representam ε_c , dado pela Eq. (3.20). Fonte: o autor.

Toda a análise apresentada nessa seção se refere à estabilidade transversal *local* de $\mathcal{S}$. A estabilidade *global* de $\mathcal{S}$ é extremamente difícil de ser demonstrada para sistemas compostos de mapas caóticos acoplados, sendo possível em alguns casos específicos em a que dinâmica é *globalmente* hiperbólica [51]. No presente modelo, a estabilidade global de $\mathcal{S}$ é demonstrada na próxima seção apenas para $a = 1/3$.

Conforme discutido na Seção 2.1.3, os expoentes de Lyapunov representam quantidades assintóticas locais e, portanto, a negatividade do expoente de Lyapunov transversal garante a sincronização de trajetórias em

$$\Sigma_{\Delta} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \mathcal{S}) < \Delta\}$$

apenas para Δ suficientemente pequenos². Tipicamente, observa-se empiricamente (numericamente) que a estabilidade linear de $\mathcal{S}$ coincide com a estabilidade global de $\mathcal{S}$. Em todos os exemplos estudados no próximo capítulo, as soluções numéricas da Eq. (3.9) tornam-se

²O valor de Δ está relacionado ao “tamanho” da vizinhança linear de $\mathcal{S}$, ou seja, à medida de Lebesgue da região em torno de $\mathcal{S}$ em que o mapa é linear (ou sua componente linear é a dominante).

arbitrariamente próximas (até a precisão do cálculo numérico) de $\mathcal{S}$ sempre que $\lambda_{\perp} < 0$.

3.2.1 O caso hiperbólico

Como foi dito, o mapa do bangalô recupera o mapa da tenda para $a = 1/3$. Para esse valor de parâmetro o mapa f , escrito de maneira mais compacta na Eq. (3.4), exibe apenas dois intervalos de linearidade, $I_1 = [0, 1/2)$ e $I_2 = [1/2, 1]$. Mais ainda, os coeficientes $\beta_{1/3}^{(i)}$ dados pela Eq. (3.3) são todos iguais a 2, em módulo. Assim, a Eq. (3.9) pode ser conveniente reescrita como

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= (1 - \varepsilon) 2x_n^{(1)} + \varepsilon 2x_n^{(2)} \\ x_{n+1}^{(2)} &= (1 - \varepsilon) 2x_n^{(2)} + \varepsilon 2x_n^{(1)} \end{aligned} \right\} \text{ se } x_n \in \Omega_{11}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= (1 - \varepsilon) (2 - 2x_n^{(1)}) + \varepsilon 2x_n^{(2)} \\ x_{n+1}^{(2)} &= (1 - \varepsilon) 2x_n^{(2)} + \varepsilon (2 - 2x_n^{(1)}) \end{aligned} \right\} \text{ se } x_n \in \Omega_{21}$$

e de maneira análoga para $x_n \in \Omega_{12}$ e $x_n \in \Omega_{22}$, sendo $\Omega_{ij} = I_i \times I_j$ os quatro intervalos de linearidade do sistema. A convergência ao subespaço $\mathcal{S}$ transversalmente estável pode ser demonstrada considerando a coordenada z_n introduzida na Eq. (3.16):

$$z_{n+1} = \frac{x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}}{2} = \begin{cases} 2(1 - 2\varepsilon) z_n & \text{se } x_n \in \Omega_{11} \\ 2(1 - 2\varepsilon) (u_n - 1) & \text{se } x_n \in \Omega_{21} \\ 2(1 - 2\varepsilon) (1 - u_n) & \text{se } x_n \in \Omega_{12} \\ -2(1 - 2\varepsilon) z_n & \text{se } x_n \in \Omega_{22} \end{cases}. \quad (3.21)$$

Da Eq. (3.15), com $\lambda_{\parallel} = \log 2$, obtém-se

$$\lambda_{\perp} = \log 2 + \log |1 - 2\varepsilon| \quad \Rightarrow \quad |2(1 - 2\varepsilon)| = e^{\lambda_{\perp}}.$$

Quando $x_n \in \Omega_{21}$, tem-se, pela definição dos intervalos, $1 \geq x_n^{(1)} \geq 1/2$ de tal modo que

$$x_n^{(1)} \geq 1/2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_n^{(1)} \leq 1/2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_n^{(1)} \leq x_n^{(1)}$$

e, portanto

$$|u_n - 1| = |x_n^{(1)} + x_n^{(2)} - 1| = |(1 - x_n^{(1)}) - x_n^{(2)}| \leq |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| \leq |z_n|.$$

Com isso, encontra-se

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = e^{\lambda_\perp} \quad \text{se} \quad x_n \in (\Omega_{11} \cup \Omega_{22}) \quad \text{e} \quad \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq e^{\lambda_\perp} \quad \text{se} \quad x_n \in (\Omega_{21} \cup \Omega_{12}).$$

Portanto, quando $\lambda_\perp < 0$, ou seja, quando $\mathcal{S}$ é transversalmente estável, $e^{\lambda_\perp} < 1$ e qualquer trajetória em Ω aproxima-se de $\mathcal{S}$ com a ação do mapa. Esse resultado garante a estabilidade transversal *global* de $\mathcal{S}$. Observa-se, também, que a convergência deve ser *monotônica*. E, por fim, quando $|z_n| \ll 1$, a trajetória encontra-se principalmente em $\Omega_{11} \cup \Omega_{22}$ de tal modo que a distância ao subespaço $\mathcal{S}$ decai exponencialmente a uma taxa dada por $\lambda_\perp$.

3.3 As órbitas periódicas instáveis

3.3.1 A solução formal

A principal motivação para a utilização de mapas lineares por partes acoplados é a possibilidade da determinação sistemática e completa de todos os pontos periódicos do sistema. A metodologia aqui descrita para o cálculo de tais órbitas é original e compõe um dos fundamentos dos resultados da presente tese. No entanto, por se tratar essencialmente de um exercício de Álgebra Linear e noções básicas de Dinâmica Simbólica, optou-se por expô-la neste capítulo.

O sistema (3.9) com a dinâmica local dada pela Eq. (3.1) pode ser escrito convenientemente na seguinte maneira:

$$x_{n+1} = A(\beta_n x_n + \alpha_n), \quad (3.22)$$

sendo $A = A(\varepsilon)$ a matriz de acoplamento dada na Eq. (3.10), β_n uma matriz e α_n um vetor definidos segundo os intervalos de linearidade da dinâmica local,

$$\beta_n \doteq \begin{bmatrix} \beta_n^{(1)} & 0 \\ 0 & \beta_n^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_n \doteq \begin{bmatrix} \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

nos quais $\beta_n^{(i)}$ e $\alpha_n^{(i)}$ representam os coeficientes do intervalo de linearidade em que $x_n^{(i)}$ se encontra no tempo n .

A resolução recursiva da Eq. (3.22) fornece:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= A\beta_n x_n + A\alpha_n \\
 x_{n+2} &= A\beta_{n+1}A\beta_n x_n + A\beta_{n+1}A\alpha_n + A\alpha_{n+1} \\
 x_{n+3} &= A\beta_{n+2}A\beta_{n+1}A\beta_n x_n + A\beta_{n+2}A\beta_{n+1}A\alpha_n + A\beta_{n+2}A\alpha_{n+1} + A\alpha_{n+2} \\
 &\vdots \\
 x_{n+m} &= \left(\prod_{k=0}^{m-1} (A\beta_{n+k}) \right) x_n + \sum_{s=0}^{m-1} \left(\prod_{l=s+1}^{m-1} (A\beta_{n+l}) \right) A\alpha_{n+s}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

convencionando-se os produtórios como produtos pela esquerda, *i. e.*

$$\prod_{k=0}^2 \beta_k \equiv \beta_2 \beta_1 \beta_0,$$

e, por simplicidade notacional,

$$\sum_{l=a}^b M_l = 0 \quad \text{e} \quad \prod_{l=a}^b M_l = 1$$

sempre que $a > b$.

A Eq. (3.23) é a solução formal do sistema (3.22) e, portanto, os pontos p -periódicos ou, mais precisamente, os pontos p -fixos, são dados por

$$x_{n+p} = F^p(x_n) \equiv x_n.$$

Assim, qualquer ponto p -fixo da Eq. (3.22) é formalmente escrito como

$$x = \left(1 - \prod_{k=0}^{p-1} (A\beta_k) \right)^{-1} \sum_{s=0}^{p-1} \left(\prod_{l=s+1}^{p-1} (A\beta_l) \right) A\alpha_s, \tag{3.24}$$

na qual $m \rightarrow p$ e o índice n foi assumido nulo e omitido.

Todos os pontos p -fixos da Eq. (3.22) são dados pela Eq. (3.24), mas a recíproca não é verdadeira. Uma maneira sistemática de se obter os pontos p -fixos dessa solução formal está descrita na próxima seção.

3.3.2 As soluções periódicas

A Eq. (3.24), além de fornecer todos os pontos p -fixos possíveis, associa univocamente a cada um uma representação simbólica. A sequência $\{(\beta_0, \alpha_0), (\beta_1, \alpha_1), \dots, (\beta_{p-1}, \alpha_{p-1})\}$, que pode ser mapeada em

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_{p-1}\}$$

com $s_k = (s_k^{(1)}, s_k^{(2)})$ de tal modo que $x_k^{(i)} \in I_{s_k^{(i)}}$, representa unicamente um ponto p -fixo. A unicidade é garantida pela linearidade do sistema em cada um dos intervalos I_k . Assim, o seguinte algoritmo é capaz de determinar *todos* os pontos p -fixos para um p arbitrário:

- i. Construa todas as sequências S de tamanho p possíveis;
- ii. Substitua cada sequência S na Eq. (3.24) para encontrar $x(S)$;
- iii. Verifique se $F^p(x(S)) = x(S)$:
 - se *sim*, $x(S)$ é um ponto p -fixo de F , armazene-o;
 - se *não*, $x(S)$ não é um ponto p -fixo de F , descarte-o;

O número de sequências S na etapa (i.), $\#(S)$, é dado por $(N_f)^{Dp}$, sendo N_f o número de intervalos de linearidade da dinâmica local f e D o número de mapas acoplados. Ou seja, a quantidade de sequências a serem consideradas cresce exponencialmente com o período p , a uma taxa dada por $D \log N_f$. Para o modelo em questão, $N_f = 4$ e $D = 2$ e, portanto,

$$\#(S) = e^{p \log 16} = 16^p.$$

Como foi argumentado no capítulo anterior, Seção 2.3.1, pontos com períodos relativamente longos devem ser utilizados na caracterização de um sistema dinâmico em termos de suas órbitas periódicas. Assim, embora esse algoritmo seja extremamente simples em sua essência é, atualmente, computacionalmente impraticável uma vez que, para $p = 15$, por exemplo, a etapa (i.) teria $\#(S) \sim 10^{18}$ repetições.

Uma otimização do algoritmo pode ser obtida a partir de algumas noções básicas de dinâmica simbólica. A apresentação de tal otimização fornece também a explicação da existência de

soluções da Eq. (3.24) que não representam pontos p -fixos do sistema (3.22).

Um ponto p -periódico $x(S)$ caracterizado pela sequência S de tamanho p é também um ponto τ -periódico caracterizado pela sequência S' toda vez que τ seja um múltiplo positivo de p , $\tau = kp$, e S' seja composto de k repetições da sequência S . Ou seja, a existência do ponto p -periódico $x(S)$ representa a possibilidade de infinitas repetições da sequência S . Mas existem sequências que não podem se repetir indefinidamente. Um exemplo simples foi discutido na Seção 3.1.1.

Dado que uma trajetória é caracterizada por $s_n = (\beta_n, \alpha_n)$, ou, de maneira mais geral, por $\{s_k\}_{k=0}^n$, no instante de tempo n , o conjunto de todos s_{n+1} definem a gramática desta sequência simbólica. O algoritmo apresentado anteriormente despreza as regras de transição entre os símbolos s_n e s_{n+1} e, por isso, tipicamente, torna-se extremamente ineficiente (embora totalmente eficaz). A otimização da determinação dos pontos p -fixos é obtida pela consideração dessas regras de transição.

Se um ponto $x(P_p)$ obtido pela Eq. (3.24) não satisfaz $F^p(x(P_p)) = x(P_p)$, então existe um τ finito para o qual a sequência $P'_{\tau p}$ gerada por τ repetições de P_p contém uma transição proibida entre dois intervalos de linearidade do sistema (3.22). Deve-se salientar que este τ pode ser um número natural arbitrariamente grande. Assim, a Eq. (3.24) fornece *todos e apenas* os pontos p -fixos do mapa F quando apenas sequências S_p , cujas infinitas repetições são permitidas, são consideradas. Evidentemente, a determinação dessas sequências S_p é tipicamente não-trivial. Por exemplo, para dois mapas do bangalô acoplados, apenas para $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1/2$ e $\varepsilon = 1$ as regras de transição entre os intervalos de linearidade são trivialmente obtidas.

Computacionalmente, a otimização da determinação dos pontos p -fixos se faz a partir do refinamento das sequências simbólicas possíveis. Dado que uma sequência P_k é proibida, todas as sequências S'_p que contem P_k são eliminadas, reduzindo o número total de sequências a ser considerado. A determinação de sequências proibidas, ou das regras de poda³, é uma ferramenta importante do estudo da dinâmica simbólica em sistemas dinâmicos. Tipicamente, as regras de poda resultam em uma redução exponencial do número de símbolos admissíveis com o

³Do inglês, *pruning rules*.

incremento do tamanho das sequências simbólicas consideradas. Assim, a determinação do conjunto de símbolos proibidos $\{P_k\}$ torna o algoritmo exponencialmente otimizado com o incremento de k .

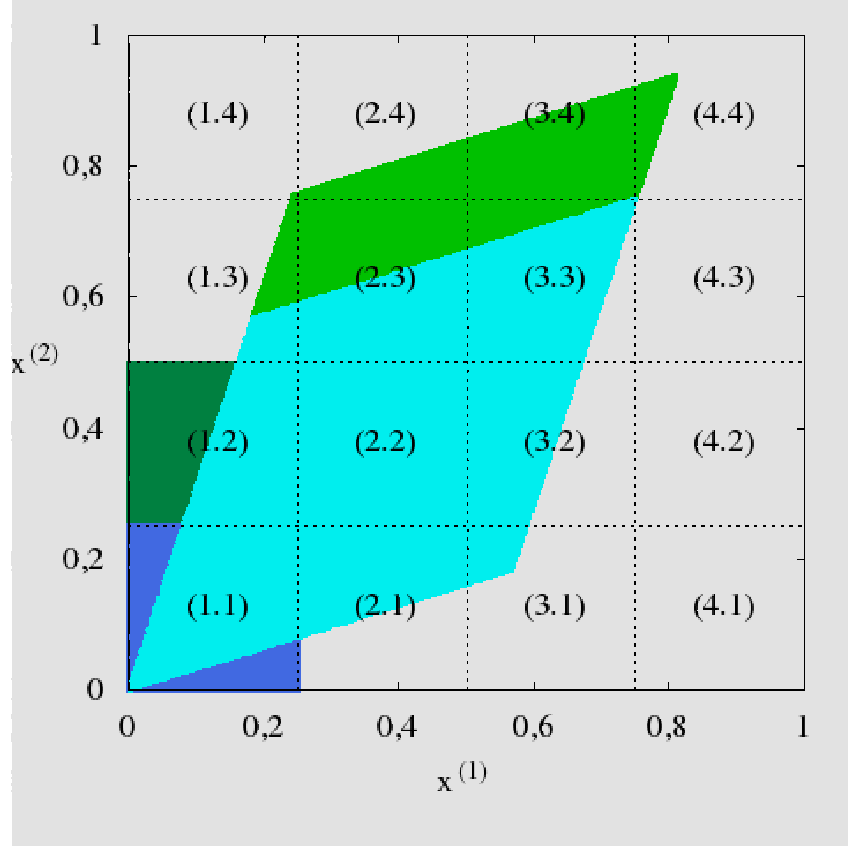


Figura 3.4: Ilustração da ação do mapa nos intervalos de linearidade. As linhas tracejadas representam os intervalos para dois mapas do bangalô acoplados com $a = 0,25$, sendo as partições indicadas (i, j) tais que $x^{(1)} \in I_i$ e $x^{(2)} \in I_j$. Em azul escuro (verde escuro) estão indicados os pontos da partição $(1, 1)$ $((1, 2))$ e em azul claro (verde claro) a imagem desta partição sobre o mapa Eq. (3.22), com $\lambda_{\perp} = -0,01$. Fonte: o autor.

Para exemplificar o método, sejam F dado pela Eq. (3.22), f pela Eq. (3.1) com $a = 0,25$ e $\varepsilon = \varepsilon(-0,01; 0,25)$ dado pela Eq. (3.18). Na Figura 3.4 estão indicados os 16 intervalos de linearidade deste mapa. Cada partição é definida por

$$I_{ij} \equiv \left\{ x \in \Omega : x^{(1)} \in I_i, x^{(2)} \in I_j \right\}$$

e indexada por (i, j) . Na mesma figura, está ilustrada a ação de F em dois intervalos de linearidade, *viz.* $(1, 1)$ e $(1, 2)$. Percebe-se que assumir que todas as transições entre as partições são admissíveis considera um número de símbolos possíveis muito maior que o real. Por exem-

plo, ao invés das 16 partições, o intervalo $(1,1)$ alcança apenas 9 e o intervalo $(1,2)$ apenas 7. Devido à linearidade de F em I_{ij} , $F(I_{ij})$ define um intervalo contínuo em Ω que pode ser determinado pelas imagens dos extremos (bordas) de I_{ij} . Desta maneira, a possibilidade de transição entre as 16 partições é determinada, com os resultados para este exemplo sintetizados na seguinte matriz de transição (vide Eq. (2.31)):

$$\begin{array}{c}
 i \\
 i \ j
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \equiv T_1 \quad (3.25)$$

Como discutido na Seção 2.1.2, o número de pontos p -fixos é limitado por $\text{tr } T_1^P$. Como fica evidente na Figura 3.4, os intervalos de linearidade de F não definem partições de Markov e, portanto, o número de pontos p -fixos de F é, tipicamente, muito menor que $\text{tr } T_1^P$. Para efeito de comparação, a Tabela 3.1 exhibe o número de símbolos possíveis para a aproximação de ordem 0 (T_0 , uma matriz de transição 16×16 com todos os elementos iguais a 1), dada pelo algoritmo não otimizado descrito acima, para a aproximação de ordem 1, descrita por T_1 na Eq. (3.25), e o número de pontos p -fixos de F , para os mesmos parâmetros da Figura 3.4, determinados pela Eq. (3.24).

Pela Tabela 3.1 fica evidente que a consideração de T_1 ao invés de T_0 na determinação dos símbolos possíveis representa uma otimização excelente para a utilização da Eq. (3.24) na determinação dos pontos p -fixos de F . Ainda assim, percebe-se que T_1 superestima o

p	$\text{tr} T_0^p$	$\text{tr} T_1^p$	$\text{tr} T_2^p$	$\text{tr} T_3^p$	$\#\mathcal{F}_p(\Omega, F)$
1	16	3	–	–	2
2	256	35	11	–	4
3	4.096	159	–	15	14
4	65.536	931	91	–	20
5	1.048.576	5.023	–	–	37
6	16.777.216	27.827	833	345	124
–	–	–	–	–	–
$\frac{\log T_i^p}{p}$	2,7726	1,7056	1,1208	0,9739	0,8034

Tabela 3.1: Comparação entre o número de símbolos periódicos possíveis (com restrição simbólica de ordem 0, 1, 2 e 3) e o número de pontos p -fixos de F para os mesmos parâmetros da Figura 3.4. A última linha da Tabela fornece uma estimativa da otimização do método com o incremento da ordem das restrições simbólicas.

número de sequências simbólicas periódicas possíveis. Aproximações de ordem superior requerem a análise dos intervalos de linearidade de F^k , resultando em uma maior complexidade na construção de T_k , compensada por uma maior otimização na determinação da lista de símbolos periódicos admissíveis. Na Tabela 3.1 estão indicados o número de símbolos possíveis para T_2 e T_3 . Nesses casos, apenas os pontos p -fixos satisfazendo $p = \tau k$ com $\tau = 1, 2, \dots$ estão acessíveis, pois são pontos τ -fixos de F^k . A última linha da Tabela apresenta uma estimativa da taxa de crescimento exponencial do número de símbolos possíveis em função de p , ficando evidente a otimização do método com aumento de k . Para comparação, na última coluna, a entropia topológica de F foi estimada segundo a Eq. (2.45). Deve-se salientar que para $k \gg 1$ os intervalos de linearidade de F^k se aproximam de partições de Markov de tal modo que [11]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{tr} T_k}{\#\mathcal{F}_1(\Omega, F^k)} = \mathcal{O}(1).$$

4 *Resultados*

Neste capítulo estão descritos os principais resultados referentes à caracterização da dinâmica não-hiperbólica do modelo proposto no Capítulo 3. Na primeira seção a variabilidade da dimensão instável transversal ao subespaço $\mathcal{S}$ é demonstrada e quantificada pelo cálculo exato da medida de contraste, definida na Eq. (2.58), para períodos p arbitrários. Apresenta-se, também, que a convergência de trajetórias típicas para $\mathcal{S}$ quando $\lambda_{\perp} < 0$ é afetada pela presença e intensidade da variabilidade da dimensão instável nesse subespaço. Na Seção 4.2, o efeito da introdução de perturbações no sistema está ilustrado pela evolução temporal de trajetórias sob a ação de um ruído estocástico. A fim de caracterizar, topológica e metricamente a dinâmica do sistema com ruído, uma perturbação no parâmetro das dinâmicas locais é introduzida na Seção 4.3.1, definindo um sistema de mapas *quase-idênticos* acoplados. Ainda nesta seção, a evolução temporal desse sistema é investigada numericamente. Nas duas últimas seções o posicionamento das órbitas periódicas instáveis, bem como a medida associada a estas, é estudado. Tais órbitas são obtidas pelo método descrito no capítulo anterior. O estado estacionário assintótico do sistema é determinado numericamente e em função do conjunto de todos os pontos p -fixos do sistema, demonstrando-se a concordância entre ambas abordagens. Como consequência, a validade da Eq. (2.50) é verificada para um sistema não-hiperbólico com variabilidade da dimensão instável; é dada uma resposta positiva à conjectura de que soluções numéricas representam bem a estatística desses sistemas e, por fim, o mecanismo para a suposta magnificação de ruído em sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal é descrito.

4.1 A variabilidade da dimensão instável transversal

4.1.1 A medida de contraste

Conforme descrito na Seção 2.4.2, a medida de contraste, dada pela Eq. (2.58), é um quantificador preciso para o estudo da variabilidade da dimensão instável, pois pondera sobre o peso estatístico de órbitas periódicas com dimensões instáveis distintas. Para o cálculo dessa medida faz-se necessária a determinação do conjunto de pontos p -periódicos do sistema. Como indicado na Figura 2.6, a caracterização se torna mais precisa com o incremento do período p considerado. Embora existam métodos numéricos eficientes e precisos para a determinação dos pontos p -periódicos, devido ao crescimento exponencial da quantidade de tais pontos com o período, a caracterização da variabilidade da dimensão instável *via* medida de contraste nem sempre é satisfatória. Isso se deve à limitação dos recursos computacionais para o cálculo do conjunto de todos os pontos p -periódicos.

No modelo proposto no capítulo anterior, entretanto, a variabilidade da dimensão instável ocorre em um subespaço invariante do sistema. Devido à dinâmica local assumida, regida pelo mapa do bangalô, uma expressão *analítica e exata* para a medida de contraste para períodos p arbitrários pode ser determinada. Assim, a caracterização do grau de não-hiperbolicidade do sistema da Eq. (3.9), indicada na Figura 4.1, é possível. A derivação aqui apresentada pode ser estendida para a análise da variabilidade da dimensão instável de qualquer sistema cuja dinâmica no subespaço invariante seja linear por partes (isso inclui, por exemplo, o subespaço de sincronização de redes compostas de N mapas lineares por partes acoplados).

A determinação da medida de contraste C_p , Eq. (2.58), requer o cálculo dos autovalores de todos os pontos p -fixos do sistema. Os autovalores longitudinais fornecem o peso associado a cada ponto p -fixo e os transversais definem sua dimensão instável. Valendo-se da relativa simplicidade da dinâmica simbólica do mapa do bangalô, representada pelo grafo na Figura

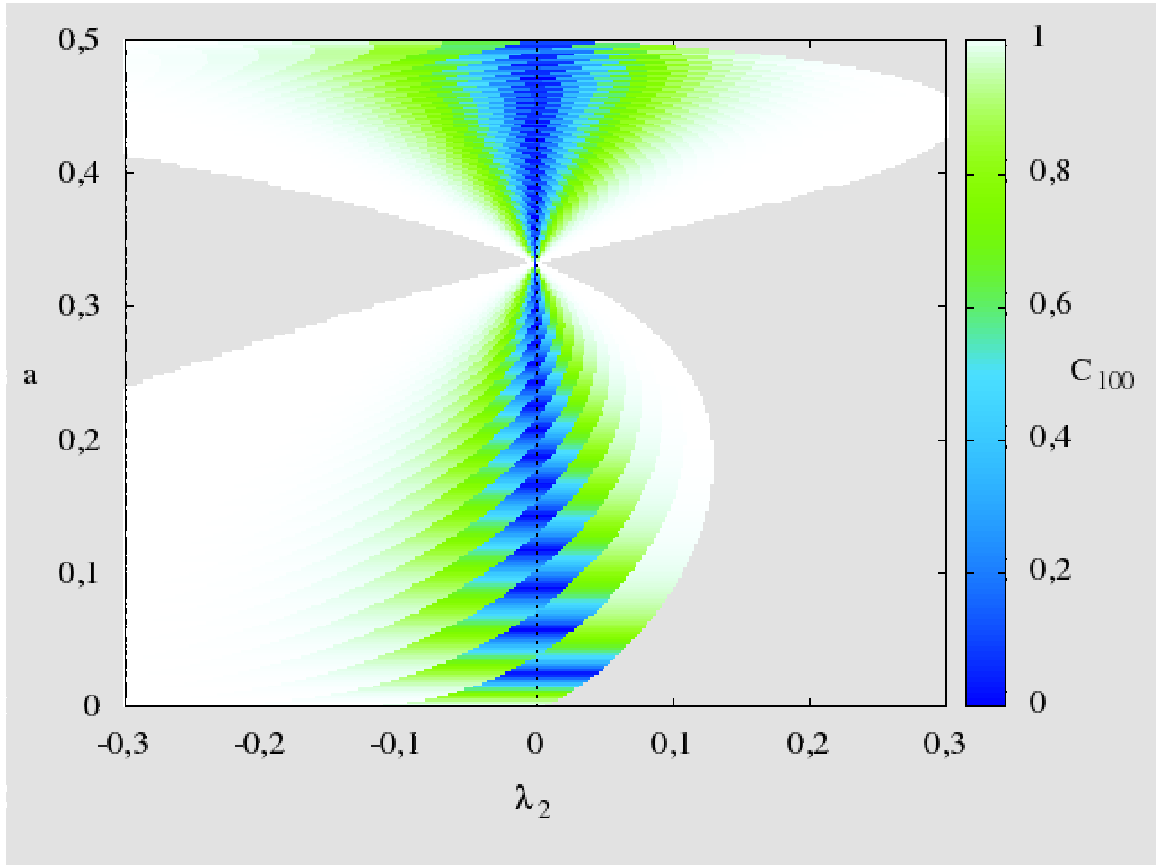


Figura 4.1: A medida de contraste C_p com $p = 100$, indicada em escala de cores, calculada no subespaço invariante $\mathcal{S}$ da Eq. (3.9) em função da dinâmica local, Eq. (3.1), parametrizada por a , e da dinâmica transversal, parametrizada por $\lambda_{\perp} \equiv \lambda_2$, sendo a intensidade do acoplamento ε determinada pela Eq. (3.18). A linha vertical tracejada representa $\varepsilon = \varepsilon(0, a)$, valor para qual o subespaço $\mathcal{S}$ altera sua estabilidade transversal. Fonte: o autor.

3.1(b), tais autovalores podem ser sistematicamente calculados. Seja T_{ψ} a matriz

$$T_{\psi} \doteq \begin{bmatrix} t_{\psi}^{(1)} & t_{\psi}^{(1)} & t_{\psi}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{\psi}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & t_{\psi}^{(3)} \\ t_{\psi}^{(4)} & t_{\psi}^{(4)} & t_{\psi}^{(4)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Uma vez que $t_{\psi}^{(i)} = 1 \forall i$ recupera a matriz de transferência T do mapa do bangalô, Eq. (3.6), a matriz dada na Eq. (4.1) é dita uma matriz de transferência generalizada. Exatamente como $[T^p]_{ij}$ representa o número de caminhos distintos com p passos no grafo da Figura 3.1(b) iniciados em i e que alcançarão j , os elementos de $[T_{\psi}^p]_{ij}$ retêm o itinerário de cada um desses

caminhos possíveis. Por exemplo,

$$[T^3]_{11} = 3,$$

ou seja, existem três caminhos distintos iniciando em I_1 que retornarão a esse intervalo após 3 passos, e

$$[T_\psi^3]_{11} = t_\psi^{(1)} t_\psi^{(1)} t_\psi^{(1)} + t_\psi^{(1)} t_\psi^{(2)} t_\psi^{(4)} + t_\psi^{(1)} t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)},$$

especificando os três itinerários possíveis como 111, 124 e 134. Como os intervalos de linearidade do mapa do bangalô definem uma partição geratriz de ω , qualquer itinerário indicado por um elemento na diagonal de T_ψ^p representa um ciclo periódico do mapa f . Assim, o traço de T_ψ^p fornece todos os itinerários p -periódicos possíveis para o grafo da Figura 3.1 e, consequentemente, para os pontos p -periódicos imersos em $\mathcal{S}$.

A única ressalva a ser considerada na associação dos itinerários periódicos dados pelo traço de T_ψ^p com os pontos p -periódicos do mapa do bangalô é o ponto fixo $x^* = 1 - a$. Pela definição do mapa, esse ponto está sempre na fronteira dos intervalos I_3 e I_4 (ponto de não diferenciabilidade de f) e a vizinhança à esquerda de x^* mapeia a vizinhança à sua direita, e vice-versa. Assim, o ponto fixo x^* é caracterizado pelo itinerário periódico $343434 \dots \equiv \overline{34}$ que seria, erroneamente, associado a uma órbita de período 2, contendo dois pontos 2-fixos. Portanto, ao elemento $[T_\psi^p]_{44}$ deve ser subtraído $(t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^{p/2}$ quando p é par e adicionado $(t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^{p/2}$ quando p é ímpar.

p	$\text{tr } T_\psi^p$
1	$t_\psi^{(1)} + (t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^{1/2}$
2	$(t_\psi^{(1)})^2 + 2t_\psi^{(2)} t_\psi^{(4)} + (t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})$
3	$(t_\psi^{(1)})^3 + 3t_\psi^{(1)} t_\psi^{(2)} t_\psi^{(4)} + 3t_\psi^{(1)} t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)} + (t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^{3/2}$
4	$(t_\psi^{(1)})^4 + 4(t_\psi^{(1)})^2 t_\psi^{(2)} t_\psi^{(4)} + 4(t_\psi^{(1)})^2 t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)} + 4t_\psi^{(2)} t_\psi^{(3)} (t_\psi^{(4)})^2 + 2(t_\psi^{(2)} t_\psi^{(4)})^2 + (t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^2$

Tabela 4.1: Lista do traço das primeiras p -ésimas potências da matriz de transferência generalizada, Eq. (4.1), já aplicada a correção relacionada ao itinerário do ponto fixo $x^* = 1 - a$. Em azul (vermelho) estão indicados os termos corrigidos pela adição (subtração) de $(t_\psi^{(3)} t_\psi^{(4)})^{p/2}$.

Observada essa pequena¹ ressalva, uma lista do traço de T_ψ^p para ps pequenos está indicada

¹Note que para $p \gg 1$ essa correção se torna desprezível.

na Tabela 4.1. Por exemplo, no traço de T_ψ^4 ficam claros os pontos fixos, a órbita de período dois e os 12 pontos de período 4. Mais ainda, vê-se que o traço de T_ψ^p representa uma soma sobre *todos* os pontos p -fixos do mapa do bangalô, sendo cada termo ponderado pelo número de pontos p -fixos associados aos respectivos símbolos (índices e expoentes de $t_\psi^{(i)}$).

A expressão para a medida natural em termos das órbitas periódicas requer o somatório, sobre *todos* os pontos p -fixos, de $L(x)$, a magnitude do produto dos autovalores instáveis de $DF^p(x)$. Para mapas lineares por partes, esses autovalores dependem apenas dos intervalos de linearidade visitados pela órbita p -periódica. Para mapas unidimensionais, como o mapa do bangalô, a matriz Jacobiana é substituída pela derivada do mapa e essa derivada não mais depende da ordem cronológica em que os intervalos de linearidade são visitados. Fica agora evidente a motivação para a definição da matriz de transferência generalizada, Eq. (4.1), e das elucubrações sobre o traço de T_ψ^p . Fazendo-se $t_\psi^{(i)} = \left| \beta_a^{(i)} \right|^{-1}$, ou seja, associando-se ao itinerário dos intervalos visitados I_i o inverso da magnitude da derivada de f , dados pela Eq. (3.3), obtém-se

$$\mu_p(\omega) = \text{tr } T_\psi^p, \quad \psi = \left| \beta_a^{(i)} \right|^{-1}, \quad (4.2)$$

sendo $\mu_p(\omega)$ definido pela Eq. (2.50) a período p finito.

Como o autovalor transversal de cada ponto p -fixo de F é dado, segundo a Eq. (3.15), por

$$\eta_\perp(q) = (1 - 2\varepsilon)^p \eta_\parallel(q), \quad (4.3)$$

sendo q um índice associado a cada ponto em $\mathcal{F}_p(F, \mathcal{S})$, a Eq. (4.2) fornece, termo a termo, toda a informação necessária para o cálculo da medida de contraste. Cada termo representa a medida associada a todos os itinerários possíveis cujos símbolos são determinados pelos expoentes de $\psi^{(i)}$, e os coeficientes desses termos representam a multiplicidade dos respectivos autovalores. Determinando pela Eq. (4.3) a estabilidade transversal de cada termo, as medidas associadas aos pontos p -fixos transversalmente estáveis e instáveis, dadas respectivamente pelas Eqs. (2.56) e (2.57), são determinadas.

Assim, a determinação da medida de contraste depende somente do cálculo do traço indicado na Eq. (4.2), que pode ser facilmente obtido pela relação entre o traço de uma matriz e

seus autovalores [52]:

$$\text{tr } T^n = \sum_{i=1}^N \tau_i^n \quad (4.4)$$

sendo T^n a n -ésima potência de T , uma matriz quadrada N -dimensional cujos autovalores são τ_i .

Os autovalores de T_ψ podem ser encontrados a partir da fatoração do determinante característico [52],

$$\det(T_\psi - \tau \mathbb{I}) = 0$$

sendo $\mathbb{I}$ a matriz identidade quadridimensional. Substituindo e fatorando, tem-se

$$\det \begin{pmatrix} t_\psi^{(1)} - \tau & t_\psi^{(1)} & t_\psi^{(1)} & 0 \\ 0 & -\tau & 0 & t_\psi^{(2)} \\ 0 & 0 & -\tau & t_\psi^{(3)} \\ t_\psi^{(4)} & t_\psi^{(4)} & t_\psi^{(4)} & -\tau \end{pmatrix} = \tau \det \begin{pmatrix} t_\psi^{(1)} - \tau & t_\psi^{(1)} & 0 \\ 0 & -\tau & t_\psi^{(3)} \\ t_\psi^{(4)} & t_\psi^{(4)} & -\tau \end{pmatrix} - t_\psi^{(2)} \det \begin{pmatrix} t_\psi^{(1)} - \tau & t_\psi^{(1)} & t_\psi^{(1)} \\ 0 & 0 & -\tau \\ t_\psi^{(4)} & t_\psi^{(4)} & t_\psi^{(4)} \end{pmatrix} = 0.$$

Resolvendo para τ , encontra-se

$$\tau_{1,2} = \frac{t_\psi^{(1)} \pm \theta}{2} \quad \text{e} \quad \tau_{3,4} = 0, \quad (4.5)$$

sendo

$$\theta \equiv \sqrt{\left(t_\psi^{(1)}\right)^2 + 4t_\psi^{(4)}\left(t_\psi^{(2)} + t_\psi^{(3)}\right)}$$

por simplicidade de notação. Assim, o traço na Eq. (4.2) é obtido pelas Eqs. (4.4) e (4.5):

$$\text{tr } T_\psi^p = \sum_{i=1}^4 \tau_i^p = \left(\frac{t_\psi^{(1)} + \theta}{2}\right)^p + \left(\frac{t_\psi^{(1)} - \theta}{2}\right)^p = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(t_\psi^{(1)}\right)^k \theta^{n-k} [1 + (-1)^k], \quad (4.6)$$

sendo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ a notação para a combinação de n elementos k a k .

A fim de se obter uma expressão para $\text{tr } T_\psi^p$ e termos explícitos dos autovalores, θ^{n-k} pode ser escrito como

$$\theta^{n-k} = \left(t_\psi^{(1)}\right)^{n-k} \sum_{w=0}^{\frac{n-k}{2}} \binom{\frac{n-k}{2}}{w} \left(\frac{2}{t_\psi^{(1)}}\right)^{2w} \sum_{r=0}^w \binom{w}{r} \left(t_\psi^{(2)}\right)^r \left(t_\psi^{(3)}\right)^{w-r} \left(t_\psi^{(4)}\right)^w, \quad (4.7)$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \text{tr } T_\psi^p = & \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left[1 + (-1)^{p-k} \right] \sum_{w=0}^{\frac{p-k}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{p-2w} \times \\ & \times \sum_{r=0}^w \binom{\frac{p-k}{2}}{w} \binom{w}{r} \left(t_\psi^{(1)} \right)^{p-2w} \left(t_\psi^{(2)} \right)^r \left(t_\psi^{(3)} \right)^{w-r} \left(t_\psi^{(4)} \right)^w, \quad (4.8) \end{aligned}$$

observando que o termo $\left[1 + (-1)^{p-k} \right]$ elimina todos $(p-k)$ ímpares. Deve-se observar, no entanto, a correção à expressão (4.8) exemplificada na Tabela 4.1.

A Eq. (4.8) fornece, portanto, todas as possíveis combinações dos símbolos associados aos intervalos de linearidade I_i . A soma dos coeficientes de um determinado termo, $\left(t_\psi^{(1)} \right)^{n_1} \left(t_\psi^{(2)} \right)^{n_2} \times \left(t_\psi^{(3)} \right)^{n_3} \left(t_\psi^{(4)} \right)^{n_4}$ representa o número de pontos p -fixos cuja órbita a tempo p visita n_i vezes cada intervalo I_i .

Fazendo $t_\psi^{(i)} = \left| \beta_a^{(i)} \right|^{-1}$ na Eq. (4.8) para calcular o peso dos pontos p -fixos associados a cada termo e $t_\psi^{(i)} = \left| (1 - 2\varepsilon) \beta_a^{(i)} \right|$ para determinar a respectiva dimensão instável, a medida de contraste para $p = 100$ foi calculada como uma função do parâmetro a da dinâmica local e do expoente de Lyapunov transversal, $\lambda_\perp$, determinando a intensidade de acoplamento ε pela Eq. (3.18). Os resultado está indicado em escala de cores na Figura 4.1. A opção de parametrizar o acoplamento por $\lambda_\perp$ ao invés de ε no cálculo da medida de contraste visa salientar que, para um mesmo expoente de Lyapunov transversal, a intensidade da variabilidade da dimensão instável pode ser bem distinta. Destaca-se que a Figura 4.1 apresenta regiões suaves-por-partes. As curvas limítrofes dessas regiões são determinadas pelos parâmetros em que algum itinerário n_1, n_2, n_3 e n_4 resulta em $|\eta_\perp| = 1$. Como o mapa (3.9) é linear por partes, essas regiões são suaves-por-partes para qualquer p finito.

A Figura 4.1 mostra o intervalo de parâmetros para o qual o sistema (3.9) é não-hiperbólico, caracterizando a variabilidade da dimensão instável como um fenômeno típico e robusto, pois o conjunto dos pontos no plano $a \times \varepsilon(\lambda_\perp; a)$ para os quais $C_p \neq 1$ possui medida de Lebesgue positiva. Verifica-se, também, que a não-hiperbolicidade de $\mathcal{S}$ não está associada com a estabilidade transversal desse subespaço. Nas seções seguintes apenas os casos com $\lambda_\perp < 0$

foram analisados pois apenas quando $\mathcal{S}$ é transversalmente estável os efeitos da perturbação são evidentes.

Por fim, destaca-se que para $a = 1/3$, caso em que o mapa do bangalô recupera o mapa da tenda, $C_p = 1$ para todo $\lambda_\perp$, caracterizando o sistema composto de dois mapas da tenda acoplados como hiperbólicos. É justamente apenas nesse caso em que a convergência monotônica das trajetórias ao subespaço de sincronização é observada e demonstrada. Deve-se ressaltar, no entanto, que apenas a hiperbolicidade da dinâmica *não garante* essa convergência monótona.

4.1.2 A convergência ao subespaço invariante $\mathcal{S}$

O efeito da variabilidade da dimensão instável transversal à $\mathcal{S}$ pode ser verificado na convergência de trajetórias típicas ao subespaço de sincronização, quando este é transversalmente estável ($\lambda_\perp < 0$). De um modo geral, espera-se que a convergência à $\mathcal{S}$ se dê, em média, a uma taxa exponencial dada pelo maior expoente de Lyapunov transversal à $\mathcal{S}$. Portanto, para salientar o efeito da VDI transversal à $\mathcal{S}$, a evolução temporal da distância ao subespaço de sincronização está indicada na Figura 4.2 para diferentes realizações do sistema. Três parâmetros distintos para a dinâmica local estão representados: $a = 0,25$, $a = 0,30$ e $a = 1/3$. Em todos os casos, a intensidade do acoplamento ε foi ajustada pela Eq. (3.18) para que $\lambda_\perp = -0,01$. Para destacar que os comportamentos apresentados são típicos, o mesmo conjunto de condições iniciais (aleatórias) foi utilizado para cada valor do parâmetro a . Percebe-se que, embora a dinâmica transversal seja caracterizada pelo mesmo expoente de Lyapunov transversal, o comportamento dinâmico nos três casos é bastante distinto.

Primeiramente, para $a = 1/3$, observa-se a convergência monotônica das trajetórias para $\mathcal{S}$, conforme demonstrado na seção 3.2.1. O decaimento de $\log_{10} |z_n|$ com n é dado por $\lambda_\perp / \log 10$. Neste caso, o sistema é hiperbólico e não há VDI, como foi quantificado pela medida de contraste na seção anterior (Figura 4.1), pois $C_p = 1$ para qualquer p quando $a = 1/3$. Deve-se salientar, no entanto, que a hiperbolicidade de F não implica a convergência uniforme das trajetórias [51].

Para os outros dois casos indicados na Figura 4.2, observa-se $|z_n| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ mas a

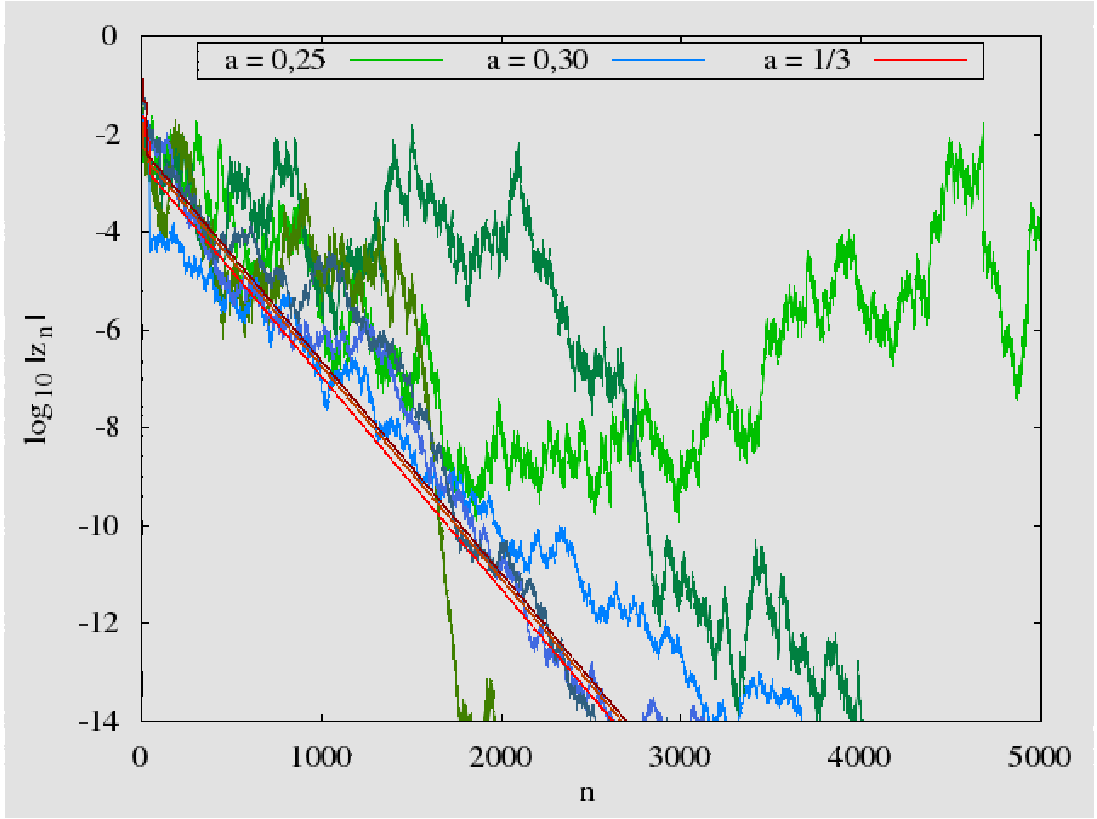


Figura 4.2: A série temporal do logaritmo (na base 10) do valor absoluto de $z_n \equiv (x_n^{(1)} - x_n^{(2)})/2$ para diferentes valores de parâmetros do sistema com $\lambda_{\perp} = -0,01$. Em tons de verde (respectivamente azul e vermelho) estão indicadas as evoluções de três condições iniciais típicas para $a = 0,25$ ($a = 0,30$ e $a = 1/3$), cuja medida de contraste em $\mathcal{S}$ é $C_{100} = 0,2065$ ($C_{100} = 0,5508$ e $C_{100} = 1,0000$). A trajetória com $z_{5000} > 10^{-14}$ alcança $\mathcal{S}$ para $n \approx 10.000$ (não mostrado para não prejudicar a visualização da figura). Fonte: o autor.

convergência não é monotônica. Esse comportamento coincide com o fato de que, para esses parâmetros, F é não-hiperbólico pois existe variabilidade da dimensão instável transversal à $\mathcal{S}$. Percebe-se, também, que a evolução temporal de z_n é mais irregular para $a = 0,25$ que para $a = 0,30$ embora, novamente, a dinâmica transversal seja caracterizada pelo mesmo $\lambda_{\perp}$. O que difere, nesses dois casos, é a intensidade da VDI, quantificada pela medida de contraste: $C_{100} = 0,2065$ para $a = 0,25$ enquanto que $C_{100} = 0,5508$ para $a = 0,30$. Ou seja, a VDI é muito mais intensa quando $a = 0,25$, causando uma maior flutuação na série temporal da distância ao subespaço de sincronização.

Ainda na Figura 4.2 fica claro que a não-hiperbolicidade de $\mathcal{S}$ não dificulta, necessariamente, a sincronização de caos. O mecanismo dinâmico responsável pela VDI transversal fornece, simultaneamente, “barreiras” e “atalhos” à sincronização. A existência de órbitas

periódicas transversalmente muito instáveis, responsáveis pelo rápido distanciamento da trajetória de $\mathcal{S}$ é condição suficiente para a existência de órbitas periódicas transversalmente muito estáveis, responsáveis por uma convergência mais rápida à $\mathcal{S}$, devido à imposição $\lambda_{\perp} < 0$. Esse mecanismo foi descrito e quantificado por Lai e colaboradores [53, 54], além de outros autores [27, 55, 56], no estudo de bifurcações do tipo *blowout*.

4.2 O efeito do ruído

O comportamento apresentado na Figura 4.2 foi utilizado para argumentar que sistemas dinâmicos não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável seriam extremamente sensíveis à adição de ruído [18]. Seja o sistema (3.9) perturbado na seguinte forma:

$$x_{n+1} = Af(x_n) + \xi_n \quad (4.9)$$

sendo ξ_n um ruído aleatório² satisfazendo $|\xi_n| = \xi \ll 1$ para todo n . A motivação dessa forma ruído é simular os efeitos de erros de truncamento e arredondamento presentes em simulações numéricas de sistemas dinâmicos, erros esses que podem ter implicações severas em sistemas dinâmicos não-hiperbólicos (vide Seção 2.1.4).

A evolução temporal da Eq. (4.9) está indicada na Figura 4.3 para o mesmo conjunto de parâmetros utilizados na Figura 4.2, fazendo-se $\xi = 10^{-6}$. Primeiro, nota-se que, evidentemente, $|z_n| \rightarrow 0$ não é mais observado em nenhum dos casos.

Para $a = 1/3$, Figura 4.3(c), a trajetória com a ação do ruído permanece nas vizinhanças de $\mathcal{S}$, oscilando em torno de $|z_n| \sim \xi$. Este comportamento é facilmente explicado com argumentos locais: a dinâmica em $\mathcal{S}$ é hiperbólica e caótica, ou seja, perturbações são magnificadas nas direções instáveis e atenuadas nas direções estáveis. Devido à hiperbolicidade de F em $\mathcal{S}$ essas direções são bem definidas e variam suavemente em todos os pontos do subespaço de sincronização. Como $\lambda_{\perp} < 0$, a magnificação do ruído se dá apenas ao longo de $\mathcal{S}$. Embora tal justificativa pareça suficiente, deve-se salientar que, para $a = 1/3$, pode-se demonstrar que,

² Assume-se que a amplitude do ruído é constante e apenas a direção de ξ_n é determinada aleatoriamente, com uma distribuição uniforme e δ -correlacionada.

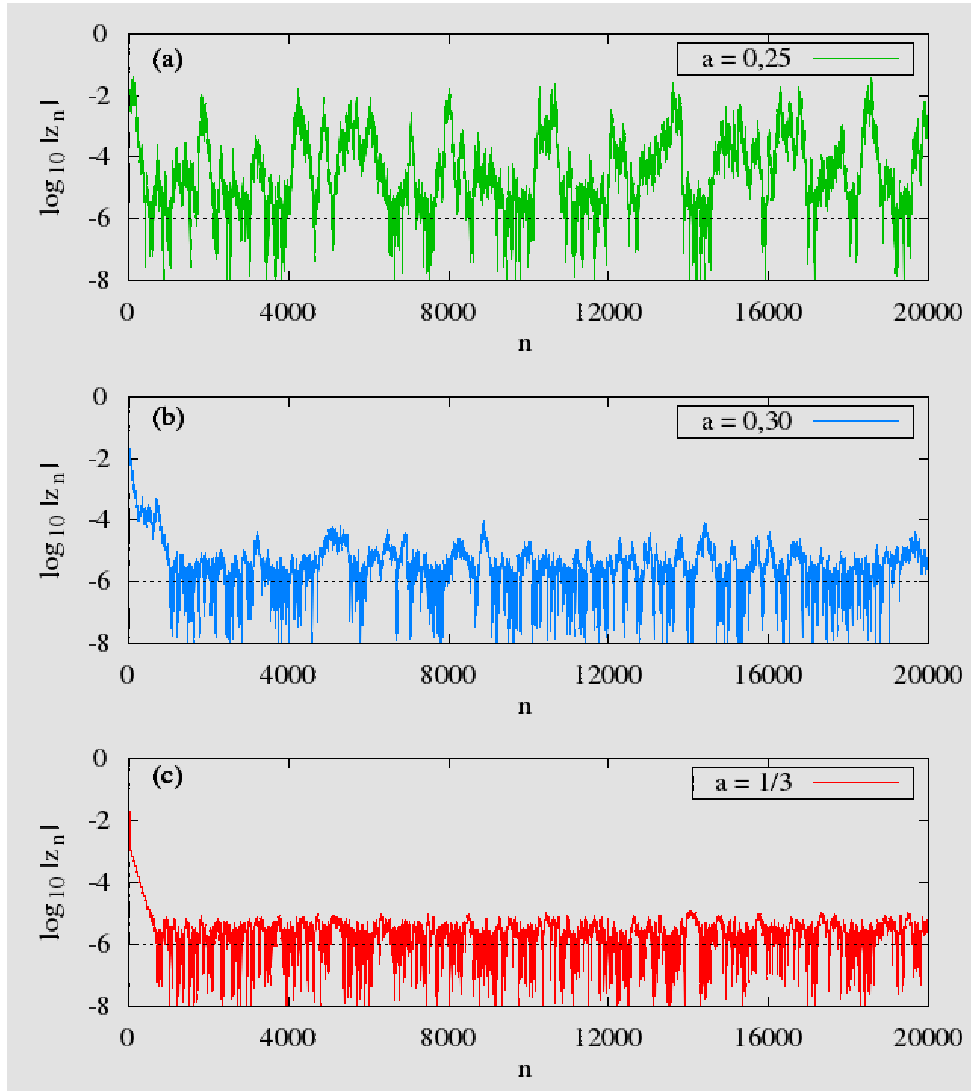


Figura 4.3: A evolução temporal da Eq. (4.9) para os mesmos parâmetros utilizados na Figura 4.2: (a) $a = 0,25$, (b) $a = 0,30$ e (c) $a = 1/3$, $\varepsilon = \varepsilon(-0,01;a)$ de tal modo que $\lambda_{\perp} = -0,01$ e $\xi = 10^{-6}$. A linha tracejada representa o nível de ruído adicionado a cada iterada do mapa. Fonte: o autor.

na ausência de ruído, $|z_n|$ decresce monotonicamente com n , em qualquer ponto de Ω (e não apenas na vizinhança linear de $\mathcal{S}$, vide Seção 3.2.1).

Para $a = 0,25$ e $a = 0,30$, Figuras 4.3(a) e 4.3(b), respectivamente, o ruído $\xi = 10^{-6}$ é magnificado em várias ordens de grandeza, embora $\lambda_{\perp} = -0,01$ em todos os casos. Está evidente na Figura 4.3 que a magnificação do ruído é mais intensa e frequente para $a = 0,25$, justamente o caso (dentre os três apresentados) em que a variabilidade da dimensão instável é mais intensa. A análise local, nas vizinhanças de $\mathcal{S}$, fornece uma explicação satisfatória para tal observação, devido à presença de órbitas periódicas transversalmente mais instáveis para

$a = 0,25$ que para $a = 0,30$, como discutido na seção anterior.

O fenômeno da magnificação de ruído em sistemas caóticos não-hiperbólicos com variabilidade da dimensão instável transversal a um subespaço invariante é típico [18, 55, 57] e foi caracterizado na literatura a partir da introdução do expoente de não-hiperbolicidade (vide seção 2.4.3). Tal expoente é determinado a partir de quantidades locais no subespaço invariante. Na próxima seção, uma análise não-local da dinâmica é apresentada a partir das órbitas periódicas instáveis existentes em Ω (e não apenas em $\mathcal{S}$) e da introdução de sistemas acoplados quase-idênticos.

4.3 O estado estacionário para sistemas quase-idênticos

Os resultados desta seção são motivados pela seguinte observação: a adição de um ruído ξ a cada instante de tempo, considerada na seção anterior, destrói a invariância do subespaço de sincronização, fazendo com que os efeitos da variabilidade da dimensão instável transversal à $\mathcal{S}$ se tornem permanentes. Assim, mesmo quando $\lambda_{\perp} < 0$, o estado assintótico do sistema não é mais o subespaço $\mathcal{S}$ e uma trajetória infinitamente longa define uma medida invariante no espaço de fase que é não nula em $\Gamma = \Omega \setminus \mathcal{S}$. Esta medida caracteriza um estado estacionário de não-equilíbrio, pois no momento em que o ruído é feito nulo, a convergência à $\mathcal{S}$ é novamente observada. Visando construir um sistema *determinístico* não-hiperbólico cuja medida invariante possua propriedades similares as do sistema (4.9) com $\xi > 0$, a Eq. (3.9) é reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= (1 - \varepsilon) f(x_n^{(1)}; a^{(1)}) + \varepsilon f(x_n^{(2)}; a^{(2)}) \\ x_{n+1}^{(2)} &= \varepsilon f(x_n^{(1)}; a^{(1)}) + (1 - \varepsilon) f(x_n^{(2)}; a^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na Eq. (4.10) o acoplamento ainda é linear, descrito pela matriz $A = A(\varepsilon)$ dada na Eq. (3.10), mas agora os parâmetros que definem a dinâmica local são explicitamente distintos, $a^{(1)} \neq a^{(2)}$. Como, tipicamente $f(s; a^{(1)}) \neq f(s; a^{(2)})$, o subespaço de sincronização $\mathcal{S}$ não é mais invariante mediante a ação de F . Se $f(s; a)$ for um mapa suave por partes, tem-se $f(s; a^{(1)}) \approx f(s; a^{(2)})$ quando $a^{(1)} \approx a^{(2)}$ para quase todo $s \in \omega$. Nesse caso, $\mathcal{S}$ ainda é não-invariante

quanto a ação de F , mas observa-se $F(\mathcal{S}) \approx \mathcal{S}$.

A seguir, na seção 4.3.1, esse abuso de notação $F(\mathcal{S}) \approx \mathcal{S}$ está especificado para o seguinte modelo: Seja

$$x \mapsto F(x) : \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} &= (1 - \varepsilon) f(x_n^{(1)}; a - \delta/2) + \varepsilon f(x_n^{(2)}; a + \delta/2) \\ x_{n+1}^{(2)} &= \varepsilon f(x_n^{(1)}; a - \delta/2) + (1 - \varepsilon) f(x_n^{(2)}; a + \delta/2) \end{cases}, \quad (4.11)$$

um sistema dinâmico composto de dois mapas do bangalô (Eq. (3.1)) quase-idênticos linearmente acoplados. Por “quase-idênticos” entende-se que $a^{(1)} = a - \delta/2$ e $a^{(2)} = a + \delta/2$ com $|\delta| \ll 1$ de tal modo que $(a^{(1)} - a^{(2)}) = \delta$. Pode-se interpretar o sistema (4.11) como um modelo para dois mapas idênticos acoplados com imprecisão δ na determinação do parâmetro a . O espaço de fase de F ainda é $\Omega = \omega \times \omega$, sendo $\omega = [0, 1]$ o espaço de fase da Eq. (3.1). A equação (4.11) ainda define um sistema bidimensional linear por partes, cuja solução formal é dada pela Eq. (3.23), de modo que o método descrito na seção 3.3 para a determinação dos pontos periódicos igualmente se aplica.

4.3.1 O nível de perturbação

A dependência da dinâmica do mapa do bangalô com relação a uma perturbação δ , $|\delta| \ll 1$, no parâmetro a pode ser estudada considerando-se a expansão dos coeficientes $\beta_a^{(i)}$ e $\alpha_a^{(i)}$ em δ até primeira ordem:

$$\begin{aligned} \beta_{a \pm \delta}^{(1)} &= \frac{1 - (a \pm \delta)}{a \pm \delta} = \frac{1 - a}{a} \mp \frac{\delta}{a^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \beta_a^{(1)} \mp \frac{\delta}{a^2} \\ \beta_{a \pm \delta}^{(2)} &= \frac{2(a \pm \delta)}{1 - 2(a \pm \delta)} = \frac{2a}{1 - 2a} \pm \frac{2\delta}{(1 - 2a)^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \beta_a^{(2)} \pm \frac{2\delta}{(1 - 2a)^2} \\ \alpha_{a \pm \delta}^{(2)} &= \frac{1 - 3(a \pm \delta)}{1 - 2(a \pm \delta)} = \frac{1 - 3a}{1 - 2a} \mp \frac{\delta}{(1 - 2a)^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \alpha_a^{(2)} \mp \frac{\delta}{(1 - 2a)^2}. \end{aligned}$$

Os coeficientes restantes são determinados por combinações lineares destes:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{a\pm\delta}^{(1)} &= 0 \\
 \beta_{a\pm\delta}^{(3)} &= -\beta_{a\pm\delta}^{(2)} \approx \beta_a^{(3)} \mp \frac{2\delta}{(1-2a)^2} \\
 \alpha_{a\pm\delta}^{(3)} &= \alpha_{a\pm\delta}^{(2)} + \beta_{a\pm\delta}^{(2)} \approx \alpha_a^{(2)} + \beta_a^{(2)} \pm \frac{\delta}{(1-2a)^2} \\
 \beta_{a\pm\delta}^{(4)} &= -\beta_{a\pm\delta}^{(1)} = \beta_a^{(4)} \pm \frac{\delta}{a^2} \\
 \alpha_{a\pm\delta}^{(4)} &= \beta_{a\pm\delta}^{(1)} = \beta_a^{(1)} \mp \frac{\delta}{a^2}
 \end{aligned}$$

Assim, para uma condição inicial típica $s \in I_i$, tem-se

$$\Delta_{\pm\delta}^{(i)}(s) \equiv |f_a(s) - f_{a\pm\delta}(s)| = \left| \left(\beta_a^{(i)} s + \alpha_a^{(i)} \right) - \left(\beta_{a\pm\delta}^{(i)} s + \alpha_{a\pm\delta}^{(i)} \right) \right| = \left| \left(\beta_a^{(i)} - \beta_{a\pm\delta}^{(i)} \right) s + \left(\alpha_a^{(i)} - \alpha_{a\pm\delta}^{(i)} \right) \right|.$$

Aqui e no que segue, assume-se que os intervalos de linearidade I_i do mapa f_a e $f_{a\pm\delta}$ são os mesmos. Como a medida de Lebesgue destes intervalos depende linearmente de a e f_a é uma função contínua em $\omega = [0, 1]$, a intersecção de $I_a^{(i)}$ com $I_{a\pm\delta}^{(i+1)}$ tem medida de Lebesgue δ e medida natural proporcional à δ . Uma vez que δ é uma perturbação no parâmetro satisfazendo $|\delta| \ll 1$, o erro introduzido na aproximação $I_{a\pm\delta}^{(i)} \equiv I_a^{(a)}$ é desprezível.

Assim sendo, obtém-se

$$\Delta_{\pm\delta}(s) = \begin{cases} \Delta_{\pm\delta}^{(1)}(s) = \left| \pm \frac{\delta}{a^2} s \right| = \frac{\delta}{a^2} s \\ \Delta_{\pm\delta}^{(2)}(s) = \left| \mp \frac{2\delta}{(1-2a)^2} s \pm \frac{\delta}{(1-2a)^2} \right| = \frac{\delta}{(1-2a)^2} (1 - 2s) \\ \Delta_{\pm\delta}^{(3)}(s) = \left| \pm \frac{2\delta}{(1-2a)^2} s \mp \frac{\delta}{(1-2a)^2} \right| = \frac{\delta}{(1-2a)^2} (2s - 1) \\ \Delta_{\pm\delta}^{(4)}(s) = \left| \mp \frac{\delta}{a^2} s \pm \frac{\delta}{a^2} \right| = \frac{\delta}{a^2} (1 - s) \end{cases}.$$

Portanto, o erro médio obtido em uma iterada do mapa do bangalô com uma incerteza δ no parâmetro a é dado por

$$\langle \Delta_{\pm\delta} \rangle = \int_{\omega} \Delta_{\pm\delta}(s) d\mu(s)$$

sendo $d\mu(s) = \rho(s) ds$ dado pela Eq. (3.7). Como a densidade natural invariante do mapa do bangalô é constante por partes, tem-se

$$\int_{\omega} \Delta_{\pm\delta}(s) d\mu(s) = \sum_{i=1}^4 \int_{I_a^{(i)}} \Delta_{\pm\delta}^{(i)}(s) \rho_a^{(i)} ds,$$

com

$$\begin{aligned}
\int_{I_a^{(1)}} \Delta_{\pm\delta}^{(1)}(s) \rho_a^{(1)} ds &= \left(\frac{1}{2-3a} \right) \left(\frac{\delta}{a^2} \right) \int_0^a s ds = \frac{1}{2(2-3a)} \delta \\
\int_{I_a^{(2)}} \Delta_{\pm\delta}^{(2)}(s) \rho_a^{(2)} ds &= \left(\frac{1}{2-3a} \right) \left(\frac{\delta}{(1-2a)^2} \right) \int_a^{1/2} (1-2s) ds = \frac{(a^2 - a + \frac{1}{4})}{(2-3a)(1-2a)^2} \delta \\
\int_{I_a^{(3)}} \Delta_{\pm\delta}^{(3)}(s) \rho_a^{(3)} ds &= \left(\frac{1}{2-3a} \right) \left(\frac{\delta}{(1-2a)^2} \right) \int_{1/2}^{1-a} (2s-1) ds = \frac{(a^2 - a + \frac{1}{4})}{(2-3a)(1-2a)^2} \delta \\
\int_{I_a^{(4)}} \Delta_{\pm\delta}^{(4)}(s) \rho_a^{(4)} ds &= \left(\frac{1-2a}{a(2-3a)} \right) \left(\frac{\delta}{a^2} \right) \int_0^a (1-s) ds = \frac{(1-2a)}{2a(2-3a)} \delta
\end{aligned}$$

tal que

$$\langle \Delta_{\pm\delta} \rangle = \frac{\delta}{2a(2-3a)} \equiv \delta D(a). \quad (4.12)$$

Logo, percebe-se que $\langle \Delta_{\pm\delta} \rangle$ é linear em δ , mas possui uma dependência não-trivial com a . $D(a)$ possui seu mínimo em $a = 1/3$, exatamente no caso em que o mapa do bangalô recupera o mapa da tenda. Para $0 < a < 1/3$ o coeficiente $D(a)$ é crescente e ilimitado com o decréscimo de a , observando-se $D(a) \sim a^{-1}$ para $0 < a \ll 1/3$. Para $1/3 > a > 1/2$, $D(a)$ é crescente com a tal que

$$\lim_{a \rightarrow 1/2} D(a) = 2.$$

Determinado o efeito médio da perturbação no parâmetro do mapa do bangalô, pode-se caracterizar a ação da Eq. (4.11) no subespaço de sincronização $\mathcal{S}$. Seja

$$\Delta x_{n+1} = |x_{n+1}^{(1)} - x_{n+1}^{(2)}| = |1 - 2\varepsilon| \left| f(x_n^{(1)}; a - \delta/2) - f(x_n^{(2)}; a + \delta/2) \right|.$$

Assim, a discrepância da evolução de um estado $s \in \mathcal{S}$ é dada por

$$\Delta s = |1 - 2\varepsilon| |f(s; a - \delta/2) - f(s; a + \delta/2)|,$$

de tal modo que

$$\langle \Delta s \rangle = |1 - 2\varepsilon| \langle |f(s; a - \delta/2) - f(s; a + \delta/2)| \rangle = |1 - 2\varepsilon| D(a) \delta, \quad (4.13)$$

Nota-se que esta discrepância média representa a ação média a tempo 1 da evolução de dois mapas quase-idênticos. Evidentemente, devido à natureza caótica das dinâmicas locais, qualquer discrepância é magnificada, em média, por um fator e^{λ_1} a cada instante de tempo. A expressão

(4.13) indica qual o valor de δ , para a e ε dados, que resultará em uma discrepância média $\langle \Delta s \rangle$. Ou seja, pela Eq. (4.13), pode-se determinar o nível de perturbação δ nos parâmetros da dinâmica local para que o subespaço de sincronização $\mathcal{S}$ seja deformado de maneira análoga à adição de um ruído com módulo $\xi = \langle \Delta s \rangle$ nas variáveis de estado.

Assim, o efeito da adição de ruído ξ no sistema (4.9), pode ser deterministicamente modelado pelo sistema (4.11) fazendo-se

$$\delta = \frac{\xi}{|1 - 2\varepsilon| D(a)}. \quad (4.14)$$

Deve-se salientar que ε deve estar limitado entre $\varepsilon_c(a) < \varepsilon < \varepsilon'_c(a)$, dados pela Eq. (3.20), de modo que $\mathcal{S}$ seja transversalmente estável (no regime $\delta = 0$). Mais ainda, δ deve ser suficientemente pequeno para que a aproximação linear nos coeficientes da dinâmica local seja válida.

Na Figura 4.4 estão indicadas três evoluções temporais típicas para o sistema composto de dois mapas do bangalô quase-idênticos acoplados, Eq. (4.11). Para efeito de comparação, os parâmetros foram ajustados de acordo com os utilizados na evolução do sistema com ruído aditivo, Eq. (4.9), Figura 4.3. Nos três casos da Figura 4.4, a intensidade do acoplamento ε foi ajustada para que $\lambda_{\perp} = -0,01$ pela Eq. (3.18) e então o desvio δ nos parâmetros da dinâmica local foi determinado pela Eq. (4.14) ($\delta = 1,22 \times 10^{-6}$, $\delta = 1,32 \times 10^{-6}$ e $\delta = 1,34 \times 10^{-6}$ nas Figuras 4.4 (a), (b) e (c), respectivamente).

As Figuras 4.3 e 4.4 devem ser comparadas qualitativamente. Primeiro, em ambas a convergência $|z_n| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ não é mais observada, como esperado. Segundo, a ação da perturbação δ nos parâmetros da dinâmica local na Figura 4.4 recupera alguns aspectos apresentados pelo sistema sob ação de ruído, Figura 4.3: a distância da trajetória ao subespaço $\mathcal{S}$ fica oscilando em torno do nível de ruído $\delta \sim 10^{-6}$ no caso hiperbólico, Figura 4.4(c), e exibe afastamentos em várias ordens de grandeza nos casos não-hiperbólicos, Figuras 4.4(a) e Figura 4.4(b), sendo tais afastamentos mais expressivos e frequentes para $a = 0,25$ que para $a = 0,30$.

A principal diferença entre os resultados da Figura 4.3 e Figura 4.4 é o sistema dinâmico que os geraram. Enquanto que no primeiro há a adição de ruído, o segundo é um resultado

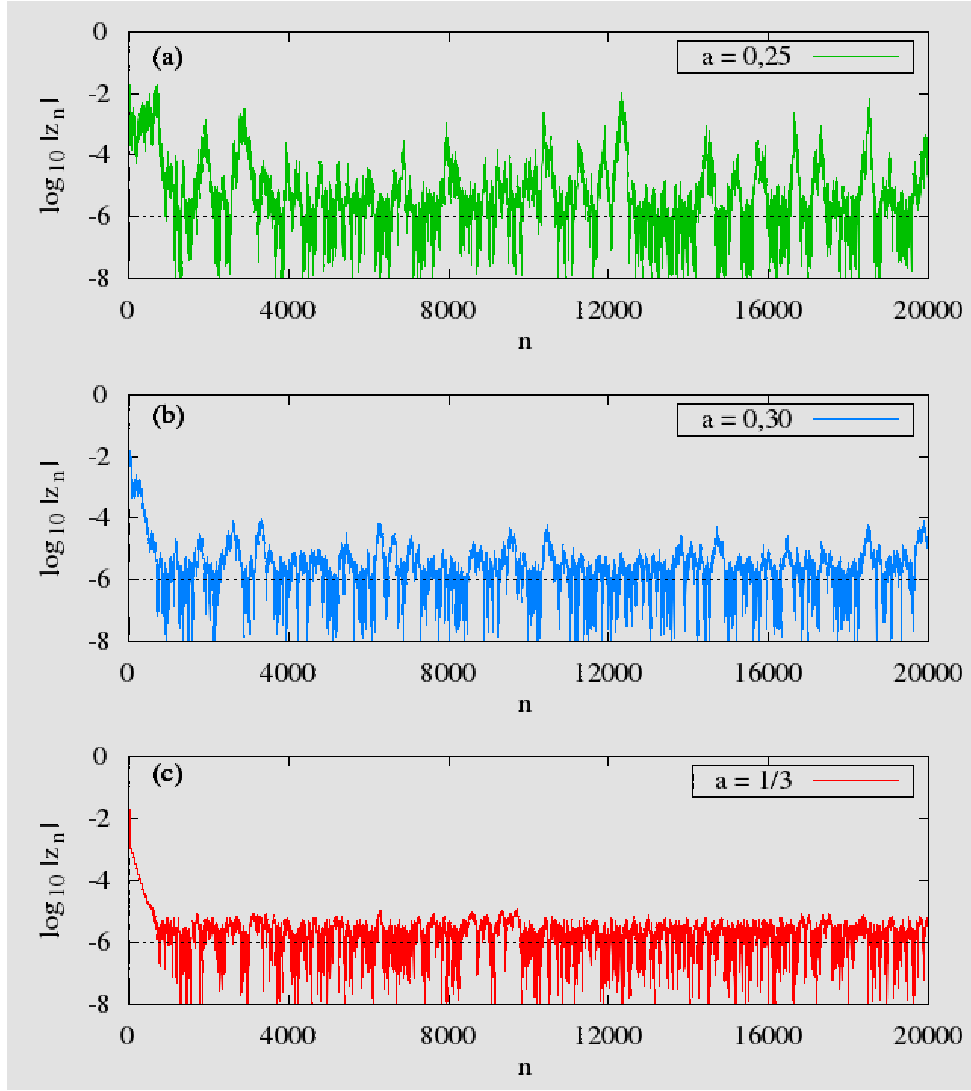


Figura 4.4: A evolução temporal do sistema (4.11) com ε ajustado para $\lambda_{\perp} = -0,01$, δ dado por (4.14) com $\xi = 10^{-6}$ e (a) $a = 0,25$, (b) $a = 0,30$ e (c) $a = 1/3$. A linha tracejada representa o nível de ruído $\xi = 10^{-6}$ a ser simulado pelo desvio nos parâmetros $a^{(1)} = a - \delta/2$ e $a^{(2)} = a + \delta/2$. Fonte: o autor.

puramente determinístico. A invariância de $\mathcal{S}$ é quebrada devido à própria ação do mapa, mas a Eq. (4.11) ainda permite a determinação exata das órbitas periódicas instáveis em Ω . Na próxima seção está demonstrado como estas órbitas explicam o comportamento observado *nos dois* sistemas e, ainda, como caracterizam o estado estacionário da Eq. (4.11).

4.3.2 As órbitas periódicas instáveis

Essa seção pode ser considerada uma abordagem topológica ao fenômeno observado na seção anterior. Valendo-se da linearidade por partes da Eq. (4.11) e do método descrito na Seção

3.3, o conjunto de pontos p -fixos da Eq. (4.11) pode ser determinado. Como descrito na Seção 2.3.1, a localização (bem como os autovalores) dos pontos periódicos fornecem informações sobre a dinâmica.

Na Figura 4.5 está indicada a localização dos pontos p -fixos para dois mapas do bangalô idênticos acoplados, Eq. (3.9), Figuras 4.5(a) e 4.5(c), e para dois mapas do bangalô quase-idênticos ($\delta = 1,22 \times 10^{-6}$) acoplados, Eq. (4.11), Figuras 4.5(b) e 4.5(d), com $a = 0,25$, $\lambda_{\perp} = -0,01$ e $p = 20$ em todos os casos. Note que o exemplo dado na seção 3.3 para o cálculo dos pontos periódicos descreve a metodologia utilizada na geração desse resultado. As Figuras 4.5(c) e 4.5(d) indicam a (o logaritmo na base 10 da) distância que os pontos p -fixos estão do subespaço $\mathcal{S}$.

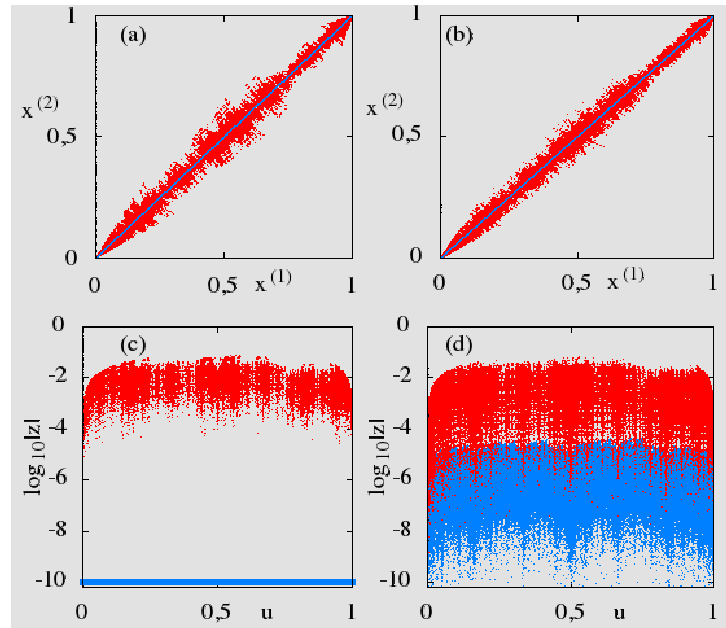


Figura 4.5: Representação de todos os pontos p -fixos para $a = 0,25$ e $\lambda_{\perp} = -0,01$ para os mapas idênticos (coluna da esquerda) e quase-idênticos, com $\delta = 1,22 \times 10^{-6}$ (coluna da direita), acoplados. Na primeira linha, os pontos p -fixos estão indicados em $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Na segunda, o sistema de coordenadas foi rotacionado, via Eq. (3.16), para salientar a localização e a estrutura das órbitas periódicas nas vizinhanças de $\mathcal{S}$: $u = (x^{(1)} + x^{(2)})/2$ e $z = (x^{(1)} - x^{(2)})/2$. Os pontos p -fixos em vermelho pertencem à $\mathcal{G}_p$ e os em azul à $\mathcal{H}_p$ (vide Eq. (4.15)). Em todos os casos, $p = 20$. Fonte: o autor.

Como descrito na Seção 3.3, cada órbita p -periódica pode ser unicamente representada por uma sequência de símbolos S_p associados à sequência de intervalos de linearidade do mapa visitados pela órbita. Seja $S_p(q)$ uma sequência simbólica que caracterize um ponto p -fixo

$x_p(q)$ indexado por q tal que

$$S_p(q) = \{s_k(q)\}_{k=0}^{p-1}, \quad s_k(q) = \left(s_k^{(1)}(q), s_k^{(2)}(q)\right), \quad F^k(x_p(q)) \in \left(I_{s_k^{(1)}(q)} \times I_{s_k^{(2)}(q)}\right).$$

Ou seja, $s_k^{(i)}(q)$ representa o índice do intervalo de linearidade que contém o i -ésimo componente da k -ésima iterada de $x(q)$. Evidentemente, para mapas idênticos acoplados, todos e somente os pontos p -periódicos imersos em $\mathcal{S}$ satisfazem $s_k^{(1)}(q) = s_k^{(2)}(q) \forall k = 0, 1, \dots, p-1$.

Assim, os pontos p -periódicos podem ser separados em dois subconjuntos $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p &\equiv \left\{x_p(q) \in \mathcal{F}_p(\Omega, F) : \sum_{k=0}^{p-1} \left|s_k^{(1)}(q) - s_k^{(2)}(q)\right| = 0\right\} \\ \mathcal{G}_p &\equiv \left\{x_p(q) \in \mathcal{F}_p(\Omega, F) : \sum_{k=0}^{p-1} \left|s_k^{(1)}(q) - s_k^{(2)}(q)\right| > 0\right\} \equiv \mathcal{F}_p(\Omega, F) \setminus \mathcal{H}_p \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ou seja, para sistemas compostos de mapas idênticos acoplados, $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{G}_p \subset \Gamma$, sendo $\Gamma \equiv \Omega \setminus \mathcal{S}$. Assim, denomina-se qualquer $x_p(q) \in \mathcal{H}_p$ de um *ponto p -fixo associado à sincronização* e qualquer $x_p(q) \in \mathcal{G}_p$ de um *ponto p -fixo associado à dessincronização*. Uma vez que mapas quase-idênticos acoplados representam *pequenas perturbações* nesses subconjuntos, essa denominação será mantida em ambos os casos. Na Figura 4.5 os pontos p -fixos pertencentes a $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$ estão indicados em azul e vermelho, respectivamente. Na Figura 4.5(c) os pontos em $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{S}$ foram deslocados de $\log_{10}|z| = -\infty$ para $\log_{10}|z| = -12$ para efeitos de visualização apenas.

As Figuras 4.5(a)–(d) apresentam uma explicação topológica aos comportamentos apresentados nas Figuras 4.2 e 4.4. Para o caso de mapas idênticos acoplados, coluna da esquerda da Figura 4.5, observa-se que $\mathcal{G}_p$ possui alguns poucos pontos próximos a $\mathcal{S}$ e uma grande densidade de pontos distantes de $\mathcal{S}$. Como discutido e demonstrado na seção 4.1.1, ocorre variabilidade da dimensão instável transversal a $\mathcal{S}$ e, portanto, trajetórias próximas, mas fora de $\mathcal{S}$, podem ser repelidas por um tempo finito. Seja $\{x_k\}$ uma dessas trajetórias. É possível que em um dado instante de tempo n essa trajetória se afaste de $\mathcal{S}$ e alcance a vizinhança de um ponto $x_p(q)$ pertencente a $\mathcal{G}_p$. Assim, para algum m finito³, observa-se $x_{n+k} \approx F^k(x_p(q))$ para $k = 0, 1, \dots, m$. Ao escapar das vizinhanças de $x_p(q)$, a trajetória pode voltar às vizinhanças de $\mathcal{S}$ ou alcançar a vizinhança de outro ponto p -periódico contido em $\mathcal{G}_p$. Esse mecanismo,

³O valor exato desse m depende do quão próximo a trajetória está do ponto p -periódico e da magnitude do maior autovalor da matriz Jacobiana de F^p calculada sobre esse ponto.

completamente análogo à existência de uma sela (ou repulsor) caótico em Γ , explica o comportamento errático de z_n na Figura 4.2 antes de $|z_n| \rightarrow 0$.

Para o caso dos mapas quase-idênticos acoplados, Figuras 4.5(b) e (d), observa-se que os conjuntos $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$ se misturam em uma grande região do espaço de fase. Isto se deve principalmente ao fato da quebra da invariância de $\mathcal{S}$ quanto a F . Assim, o mecanismo transiente descrito acima para a Eq. (3.9) torna-se permanente para a Eq. (4.11), pois $\mathcal{H}_p$ não está mais contido em um subespaço invariante. Note que os resultados apresentados para o sistema perturbado por ruído, Eq. (4.9), na seção 4.2, são igualmente explicados por este mecanismo, apenas sendo o ruído a causa das recorrentes visitas de trajetórias típicas às vizinhanças de $\mathcal{G}_p$.

A Figura 4.6 sintetiza em um esquema o mecanismo dinâmico descrito nessa seção.

A partir da relação entre as órbitas periódicas instáveis e a medida natural invariante de um sistema dinâmico, Eq. (2.50), os argumentos heurísticos e topológicos aqui apresentados são quantificados, na próxima seção, a partir da abordagem métrica do sistema (4.11). Vale salientar que a validade da Eq. (2.50) é demonstrada apenas para sistemas hiperbólicos [39], tendo sido verificada para sistemas não-hiperbólicos *via* tangências homoclínicas [58, 59], e sendo originalmente aplicada em sistemas com variabilidade da dimensão instável no presente trabalho.

4.3.3 A medida natural invariante

Seja, nessa seção, F o sistema formado por dois mapas do bangalô quase-idênticos acoplados, Eq. (4.11).

Uma vez que, tipicamente, os intervalos de linearidade de F^k não definem em Ω um particionamento de Markov (para k finito), os intervalos em que a densidade natural invariante é constante por partes não são facilmente identificados. Portanto, para a caracterização métrica da dinâmica de F o seguinte particionamento de Ω foi utilizado:

$$\mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}_{ij}(\varepsilon) = \left\{ x \in \Omega : \left\lfloor x^{(1)} / \varepsilon \right\rfloor = i, \left\lfloor x^{(2)} / \varepsilon \right\rfloor = j \right\}, \quad (4.16)$$

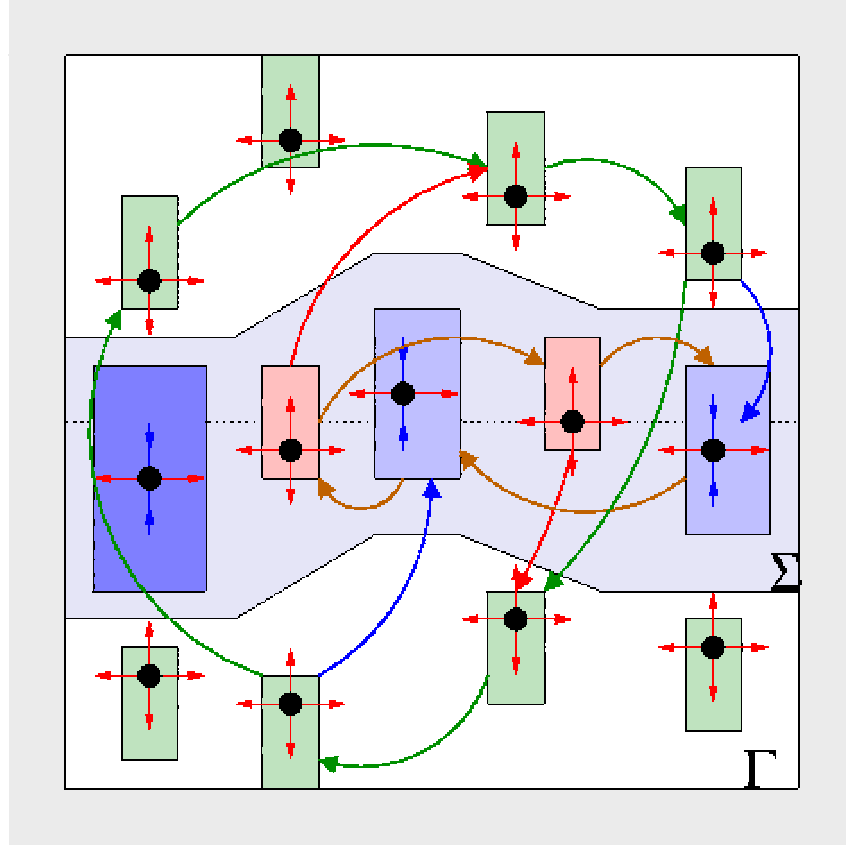


Figura 4.6: Representação esquemática do mecanismo para a magnificação das perturbações em sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal, presente na direção vertical. As caixas azuis e vermelhas ilustram, respectivamente, as vizinhanças de órbitas periódicas pertencentes a $\mathcal{H}_p$ com dimensão instável um e dois. As caixas verdes ilustram as vizinhanças das órbitas pertencentes a $\mathcal{G}_p$. As setas pequenas, formando um sinal de +, ilustram as autodireções estáveis (em azul) e instáveis (em vermelho) dos pontos p -fixos, representados por $\bullet$. As setas grandes ilustram transições possíveis entre as caixas. Seguindo as setas verdes, a trajetória mantém-se nas vizinhanças de $\mathcal{G}_p$; seguindo as amarelas, nas vizinhanças de $\mathcal{H}_p$. As setas em vermelho ilustram as transições de $\mathcal{H}_p$ para $\mathcal{G}_p$ e as azuis, de $\mathcal{G}_p$ para $\mathcal{H}_p$. Note que essas duas últimas estão relacionadas com a dimensão instável dos pontos pertencentes a $\mathcal{H}_p$. Fonte: o autor.

sendo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor \equiv \max_{k \in \mathbb{Z}} \{k \leq x\},$$

e $i, j = 0, 1, \dots, B$. A Eq. (4.16) define um gradeado particionando Ω em B^2 caixas de tamanho ε . Define-se a medida natural invariante da partição $\mathcal{B}_{ij}$ como

$$\mu(\mathcal{B}_{ij}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_N(\mathcal{B}_{ij}),$$

sendo

$$\tilde{\mu}_N(\mathcal{B}_{ij}) = \frac{1}{N} \# \{0 \leq n < N : F^n(x_0) \in \mathcal{B}_{ij}\}, \quad (4.17)$$

para qualquer x_0 típico. Desconsidera-se, aqui, a possibilidade da dependência de $\mu(\mathcal{B}_{ij})$ com x_0 . Nos limites $N \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ a Eq. (4.17) reproduz a densidade invariante de F :

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_N(\mathcal{B}_{ij}(\varepsilon)), \quad x \in \mathcal{B}_{ij}(\varepsilon).$$

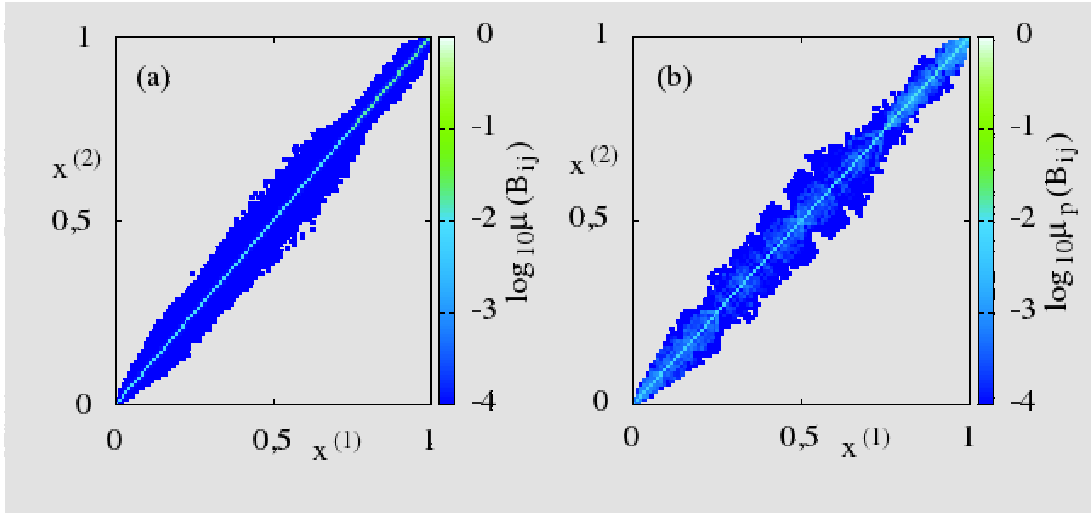


Figura 4.7: Estimativa para a medida natural invariante em um gradeado com caixas quadradas de lado $\varepsilon = 10^{-2}$, indicada na escala de cores, para o sistema (4.11) com $a = 0,25$, $\lambda_{\perp} = -0,01$ e $\delta = 1,22 \times 10^{-6}$ gerada (a) *via* Eq. (4.17), com uma trajetória numérica típica com $N = 10^8$ pontos e (b) *via* Eq. (4.19), utilizando o conjunto de todos os pontos p -fixos em Ω com $p = 18$. Fonte: o autor.

Para efeito da caracterização numérica da medida natural de F , as partições e as trajetórias consideradas devem ser, evidentemente, finitas. Os resultados aqui apresentados foram gerados com $N = 10^8$ e $\varepsilon = 10^{-2}$. A razão entre o número de caixas ε^{-2} e o número de pontos N fornece uma estimativa da flutuação estatística na determinação de $\tilde{\mu}(\mathcal{B}_{ij})$ uma vez que, para mapas lineares por partes, $\rho(x)$ é, tipicamente, finita. Na Figura 4.7(a) essa estimativa numérica para a medida natural no gradeado $\mathcal{B}_{ij}$ está indicada em escala de cores para os mesmos parâmetros na Eq. (4.11) utilizados na seção anterior: $a = 0,25$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_{\perp}, a)$ com $\lambda_{\perp} = -0,01$ e $\delta = 1,22 \times 10^{-6}$ ajustado por $\xi = 10^{-6}$ pela Eq. (4.14). Percebe-se que a maior densidade da medida natural se concentra nas vizinhanças de $\mathcal{S}$, consistente com o fato de $\lambda_{\perp} < 0$ para o caso $\delta = 0$. Mas fica também evidente que $\mu(\mathcal{B}_{ij}) > 0$ para diversas caixas $\mathcal{B}_{ij}$ com $i \neq j$, ou

seja, caixas em Γ , caracterizando o comportamento ilustrado na Figura 4.4(a) como permanente.

Para os parâmetros utilizados, motivados pela análise da intensidade da variabilidade da dimensão instável no início do capítulo, a medida natural é nula em uma grande região de Ω e fortemente concentrada em torno de $\mathcal{S}$. Para caracterizar o estado estacionário de F nas vizinhanças de $\mathcal{S}$ o seguinte particionamento de Ω foi utilizado:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ij} = \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\varepsilon) = \left\{ x \in \Omega, u = \frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2}, z = \frac{x^{(1)} - x^{(2)}}{2} : \lfloor u/\varepsilon \rfloor = i, \left\lfloor \log_{10} \left| \frac{z}{z_{\min}} \right| / \varepsilon \right\rfloor = j \right\}, \quad (4.18)$$

ou seja, considerando a rotação do sistemas de coordenadas, dado pela Eq. (3.16), e o logaritmo da distância $|z|$ ao subespaço $\mathcal{S}$. Na Eq. (4.18) $|z_{\min}|$ representa a menor distância observada. Para as perturbações consideradas, $z_{\min} = 10^{-12}$. A Figura 4.8(a) apresenta $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{B}}_{ij})$ para os mesmos parâmetros da Figura 4.7(a). Observa-se que $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{B}}_{ij})$ concentra-se em torno de $|z| \approx \delta$ e também que $\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{B}}_{ij}) > 0$ para caixas associadas a $|z| \gg \delta$. Esse resultado corrobora as argumentações sobre o estado estacionário de F apresentadas nas seções anteriores.

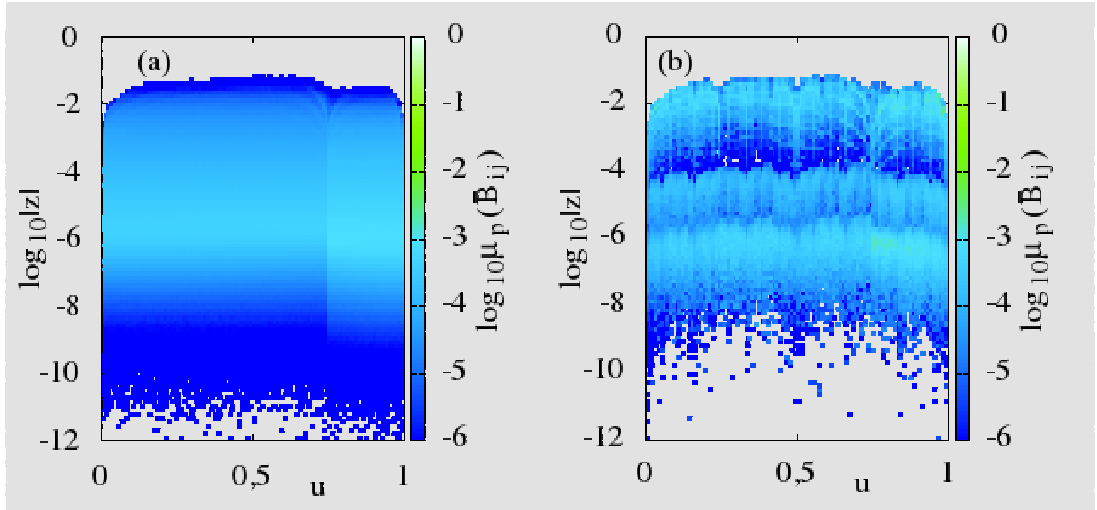


Figura 4.8: O mesmo resultado da Figura 4.7 utilizando as caixas $\tilde{\mathcal{B}}_{ij}$ para salientar o comportamento da medida natural nas vizinhanças de $\mathcal{S}$. Fonte: o autor.

A determinação da medida natural invariante até o momento foi realizada em termos da evolução numérica de uma trajetória típica de F . Para tal, fez-se uso da conjectura lançada por Y.-C. Lai e colaboradores [60] (vide seção 2.1.4) sobre a caracterização estatística de sistemas caóticos não-hiperbólicos *via* variabilidade da dimensão instável: embora não-sombreáveis, as soluções numéricas nesses sistemas são capazes de reproduzir, com alto grau de fidelidade,

a estatística do sistema dinâmico. As Figuras 4.7(b) e 4.8(b) apresentam um resultado *independente* da validade de tal conjectura, pois indicam a caracterização da medida natural de F em termos das órbitas periódicas instáveis. A aproximação de ordem p da Eq. (2.50) para o particionamento $\mathcal{B}_{ij}$ de Ω é dada por:

$$\mu_p(\mathcal{B}_{ij}) = \sum_{x \in \mathcal{F}_p(\mathcal{B}_{ij}, F)} \frac{1}{L_p(x)}, \quad (4.19)$$

sendo $L_p(x)$ a magnitude do produto dos autovalores instáveis da matriz Jacobiana calculada em $F^p(x)$. Os valores de $\mu_p(\mathcal{B}_{ij})$ e $\mu_p(\bar{\mathcal{B}}_{ij})$ estão indicados em escala de cores nas Figuras 4.7(b) e 4.8(b), respectivamente, para os mesmos parâmetros da Figura 4.7(a) com $p = 18$. Percebe-se a semelhança entre as medidas μ_p e $\tilde{\mu}$. Na Figura 4.8 fica claro que a medida natural aproximada pela Eq. (4.19) revela nuances existentes na medida determinada por (4.17).

Entretanto, a Figura 4.8(b) apresenta algumas estruturas não observadas na Figura 4.8(a). Observa-se, por comparação com o resultado exibido na Figura 4.5(d), que tais estruturas coincidem com o posicionamento das órbitas periódicas pertencentes a $\mathcal{H}_p$ (órbitas associadas ao subespaço de sincronização no caso $\delta = 0$). A diferença entre os resultados das Figuras 4.8(a) e 4.8(b) é devida, essencialmente, a erros introduzidos no cálculo de μ_p com período p finito. Tais erros podem ser quantificados pela introdução da seguinte quantidade

$$\Delta\mu_p = \frac{1}{B} \sqrt{\sum_{i,j=0}^{B-1} (\tilde{\mu}(\mathcal{B}_{ij}) - \mu_p(\mathcal{B}_{ij}))^2}. \quad (4.20)$$

A Eq. (4.20) foi introduzida na Ref. [58] para verificar a aplicabilidade da Eq. (2.50) em sistemas não-hiperbólicos *via* tangências homoclínicas. O decaimento típico de $\Delta\mu_p$ com p é um indicativo de que, no limite $p \rightarrow \infty$, a Eq. (2.50) fornece a medida natural de um subconjunto $\mathcal{A} \subset \Omega$ em termos dos infinitos pontos periódicos instáveis contidos em $\mathcal{A}$. Demonstra-se que para sistemas hiperbólicos uniformemente expansores o decaimento de $\Delta\mu_p$ é exponencial e regido pela entropia topológica de F . Em casos mais gerais, o comportamento decrescente ainda é observado mas a determinação da forma funcional e taxa do decaimento ainda é um problema em aberto [58].

Os resultados apresentados nessa seção consideraram apenas os parâmetros típicos $a =$

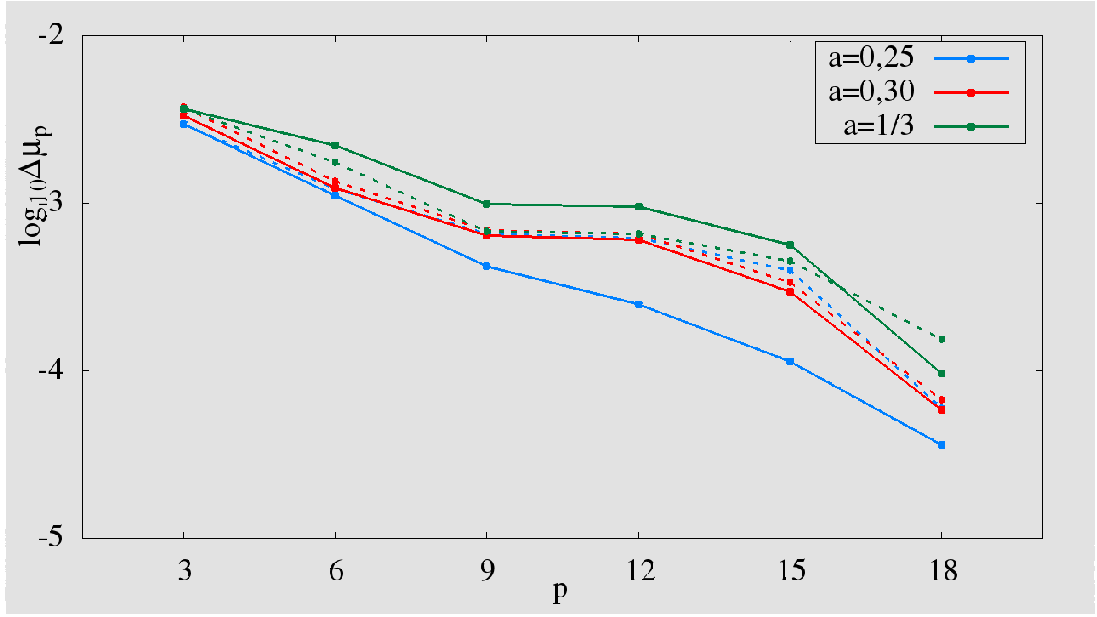


Figura 4.9: A dependência do erro $\Delta\mu_p$ com p na determinação da medida natural em termos dos pontos p -fixos para $\varepsilon = \varepsilon(-0,01,a)$ (linhas cheias) e $\varepsilon = \varepsilon(-0,05,a)$ (linhas tracejadas) e o parâmetro a indicado pelas cores na legenda. Fonte: o autor.

0,25, $\lambda_{\perp} = -0,01$ e $\delta = 1,22 \times 10^{-16}$. Tal conjunto de parâmetros foi escolhido por caracterizar bem o fenômeno de variabilidade da dimensão instável transversal intensa. Testes com outros níveis de ruído δ (satisfazendo $\delta < 10^{-4}$) e outros valores de a e $\lambda_{\perp}$ (observando a existência de VDI pelos resultados da seção 4.1.1) apresentaram resultados semelhantes. Por fim, para ilustrar a robustez e eficiência dos resultados, na Figura 4.9 a dependência de $\Delta\mu_p$, dado pela Eq. (4.20), com p está indicado para diversos parâmetros. Em todos os casos, percebe-se o decaimento do erro na determinação da medida natural com o aumento no período, indicando que no limite $p \rightarrow \infty$ as medidas obtidas numericamente, *via* Eq. (4.17), e em termos das órbitas periódicas instáveis, *via* Eq. (4.19), coincidem em sistemas não-hiperbólicos que apresentam variabilidade da dimensão instável.

5 Conclusões

A variabilidade da dimensão instável é uma forma de não-hiperbolicidade que resulta em severas restrições ao sombreamento de soluções perturbadas. Ao visitar uma região do espaço de fase com dimensão instável distinta, todas as possíveis trajetórias reais sombreantes divergem exponencialmente da solução perturbada. Uma vez que a variabilidade da dimensão instável é um fenômeno dinâmico robusto e frequente em sistemas dinâmicos de alta dimensionalidade, a quebra do sombreamento apresenta um desafio à aplicabilidade dessa classe de sistemas não-hiperbólicos na construção de modelos matemáticos, bem como à sua análise computacional. A partir do estudo detalhado de alguns modelos Físicos foi conjecturado na literatura [21] que, a despeito da quebra do sombreamento, as soluções numéricas, invariavelmente perturbadas, seriam capazes de reproduzir a caracterização estatística de sistemas não-hiperbólicos com variabilidade da dimensão instável. Ainda na literatura [18], uma classe de sistemas dinâmicos foi construída fornecendo uma resposta negativa a essa conjectura. Tais sistemas possuem, conforme definido na presente tese (Definição 1), variabilidade da dimensão instável transversal e são não robustos a perturbações, *i. e.*, suas soluções apresentam desvios várias ordens de grandeza maiores que o nível de perturbação introduzido.

Definição. [Repetição da Definição 1] Seja $F : \Omega \mapsto \Omega \subset \mathbb{R}^d$ um mapa caótico d -dimensional. Seja $\mathcal{S} \subset \Omega$ um subespaço invariante, $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$, com dimensão $d_{\mathcal{S}} < d$. Seja, ainda, a dinâmica em $\mathcal{S}$ caótica e descrita pelo mapa $d_{\mathcal{S}}$ -dimensional $f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, de tal modo que

$$x \mapsto F(y) \equiv (y, z) \mapsto (f(y), g_a(y, z)),$$

com $y \in \mathcal{S}$, $z \in \Gamma \equiv \Omega \setminus \mathcal{S}$ e $x = \begin{bmatrix} y & z \end{bmatrix}^T$. O mapa f define a dinâmica longitudinal e g_a a dinâmica transversal a $\mathcal{S}$, parametrizada por $a \in \mathbb{R}$. A matriz Jacobiana de F é bloco-

diagonal,

$$DF(x) \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix},$$

com $d_{\mathcal{S}}$ autovalores longitudinais e $d_{\Gamma} = d - d_{\mathcal{S}}$ transversais. O sistema F apresenta variabilidade da dimensão instável transversal para um dado a quando existem em $\mathcal{S}$ pelo menos dois pontos periódicos, y_1 e y_2 , com períodos p_1 e p_2 , respectivamente, cujo número de autovalores de $DF^{p_i}(y_i)$ associados a autodireções instáveis em Γ é distinto.

A característica principal dos sistemas que se enquadram na Definição 1 é que a variabilidade da dimensão instável é, na ausência de perturbações, um efeito transiente quando o subespaço $\mathcal{S}$ é transversalmente estável. Isto porque em $\mathcal{S}$ a dinâmica se decompõe na forma de um produto assimétrico, sendo regida apenas pelo componente hiperbólico. Assim, o estudo de sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal foi desmembrado em duas etapas na presente tese: (i) a caracterização da variabilidade da dimensão instável transversal a $\mathcal{S}$ na ausência de perturbações e (ii) a caracterização topológica e métrica do estado assintótico do sistema dinâmico quando a invariância de $\mathcal{S}$ é destruída pela introdução de perturbações.

Assim, um modelo matemático que apresenta variabilidade da dimensão instável transversal foi proposto e estudado. Esse modelo é composto de mapas caóticos linear e difusamente acoplados. Requer-se apenas que tais mapas não sejam uniformemente expansores e que a sincronização completa de caos seja um estado invariante e transversalmente estável do sistema. Nos sistemas caóticos, a dinâmica assintótica é regida pela variedade instável do atrator caótico que, de maneira geral, possui uma geometria fractal. O subespaço de sincronização é, portanto, um caso bastante simplificado de estado assintótico. Em contrapartida, a dinâmica nesse subespaço é determinada pela dinâmica local escolhida. Pode-se, convenientemente, escolher um mapa cujas propriedades dinâmicas são bem estabelecidas. Assim, a dinâmica transversal pode ser facilmente ou, pelo menos, sistematicamente, estudada.

Nesses sistemas, a variabilidade da dimensão instável pode então ser caracterizada a partir da medida natural associada às (vizinhanças das) órbitas periódicas instáveis contidas no subespaço que define a sincronização. As perturbações estocásticas (ou ruídos) foram subs-

tituídas por uma perturbação nos parâmetros dos mapas acoplados: o sistema caracteriza, então, mapas *quase*-idênticos acoplados. Devido à natureza caótica da dinâmica local, tal perturbação nos parâmetros tem efeito semelhante à adição de ruído, com a grande vantagem de ainda definir um sistema *determinístico*. A invariância do subespaço que caracteriza a sincronização completa de caos é quebrada e, portanto, as trajetórias do sistema tornam-se permanentemente sensíveis à variabilidade da dimensão instável.

Como um exemplo concreto, um sistema composto de dois mapas do bangalô linearmente acoplados foi estudado em detalhes. A linearidade (por partes) do mapa do bangalô permite um tratamento rigoroso para a caracterização da variabilidade da dimensão instável transversal ao subespaço de sincronização $\mathcal{S}$. A medida de contraste, que quantifica a intensidade da variabilidade da dimensão instável em função da medida associada aos pontos p -periódicos do mapa em $\mathcal{S}$, foi calculada analiticamente para p arbitrário.

Um método sistemático para o cálculo das órbitas periódicas desse modelo foi desenvolvido valendo-se da linearidade por partes das equações. Considerando as possibilidades das transições entre todos os intervalos de linearidade do sistema, a determinação das órbitas periódicas foi computacionalmente otimizada. Tal método, além de fornecer analiticamente, ou *semi*-analiticamente, o conjunto de todos os pontos p -periódicos, permitiu a separação das órbitas periódicas em duas classes: o conjunto das associadas à sincronização, $\mathcal{H}_p$, e o conjunto das associadas à dessincronização, $\mathcal{G}_p$.

O efeito da intensidade da não-hiperbolicidade transversal na convergência ao subespaço $\mathcal{S}$ foi ilustrado através da evolução numérica de trajetórias para diferentes parâmetros do sistema. O comportamento errático e transiente da distância das trajetórias ao subespaço $\mathcal{S}$ nos casos em que há variabilidade da dimensão instável foi associado à existência de órbitas periódicas instáveis *fora* de $\mathcal{S}$ (o conjunto $\mathcal{G}_p$).

De posse do método analítico para a determinação das órbitas periódicas instáveis, o mecanismo de magnificação da perturbação em sistemas com variabilidade da dimensão instável transversal foi elucidado a partir da análise topológica do espaço de fase. Os conjuntos $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$ foram determinados para o sistema perturbado. Demonstrou-se que as órbitas periódicas

pertencentes a $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$ tornam-se arbitrariamente próximas nesses casos. Assim, o repulsor associado a $\mathcal{G}_p$ funde-se ao atrator associado a $\mathcal{H}_p$, tornando as vizinhanças das órbitas pertencentes a $\mathcal{G}_p$ permanentemente acessíveis por trajetórias típicas do sistema. A perturbação que causa a quebra da invariância de $\mathcal{S}$ é também a que torna as vizinhanças dos pontos em $\mathcal{G}_p$ acessíveis, explicando a aparente magnificação do ruído.

Os argumentos topológicos foram fundamentados e quantificados pela análise métrica do sistema perturbado. O estado assintótico desse sistema foi caracterizado pelo cálculo numérico da medida natural invariante em um particionamento do espaço de fase. Esta medida foi comparada com a obtida a partir da relação entre a medida natural e as órbitas periódicas instáveis, formalmente demonstrada apenas para sistemas hiperbólicos. Uma boa concordância entre os dois resultados foi observada. Ademais, verificou-se a redução na dispersão entre essas duas medidas com o incremento do período das órbitas consideradas, para diversos conjuntos típicos de parâmetros do sistema.

A dedução da medida natural em termos das órbitas periódicas instáveis requer, como descrito na Seção 2.3.1, o particionamento do espaço de fases em pequenas células de Markov. Para mapas caóticos lineares por partes, os intervalos de linearidade da k -ésima iterada do sistema se aproximam de um particionamento de Markov com o incremento de k . Assim, espera-se que a medida natural de um sistema linear por partes seja sempre bem representada pela medida obtida em termos das órbitas periódicas instáveis. Fixando-se k , cada partição do espaço de fase é localmente hiperbólica; regiões com dimensão instável diferentes são representadas por (ou pela união de) partições distintas.

Portanto, a concordância entre as medidas obtidas numericamente e em termos das órbitas periódicas em um sistema não-hiperbólico *via* variabilidade da dimensão instável, originalmente reportada nessa tese, apresenta uma resposta positiva à conjectura de Lai e colaboradores: embora não-sombreáveis, as soluções numéricas de sistemas com variabilidade da dimensão instável são capazes de reproduzir a estatística do sistema como, por exemplo, a medida natural invariante.

5.1 Trabalhos Futuros

Uma extensão direta dos resultados aqui apresentadas é a análise de sistemas de alta dimensionalidade, como os compostos por diversos mapas caóticos linearmente acoplados. O estudo do efeito de perturbações no subespaço de sincronização de tais sistemas pode ser feito a partir da análise do conjunto $\mathcal{H}_p$, *i. e.*, do conjunto de pontos p -periódicos associados à sincronização na ausência de perturbações. Alguns métodos numéricos para a determinação de órbitas periódicas instáveis em sistemas caóticos, como o de Biham e Wenzel [44], associam a cada ponto periódico do sistema um símbolo, dado pelas propriedades de estabilização do ponto. Limitando a aplicação do método apenas a símbolos idênticos em todos os componentes do vetor de estado (em todas as dimensões da rede), apenas órbitas pertencentes a $\mathcal{H}_p$ são detectadas. A localização dos elementos de $\mathcal{H}_p$ no espaço de fases, bem como a medida natural associada a cada um dos pontos p -fixos podem caracterizar, portanto, o estado estacionário de sistemas não-hiperbólicos com variabilidade da dimensão instável transversal mais genéricos (*eg.* mapa de Henón) e de alta dimensionalidade.

Outra possibilidade que se abre ao verificar a validade da análise estatística dos sistemas aqui estudados é a caracterização da dinâmica a partir do *formalismo termodinâmico de sistemas dinâmicos* [61], desenvolvido essencialmente para sistemas hiperbólicos [62]. Essencialmente, associa-se a um particionamento do espaço de fase pesos estatísticos dados pelas medidas natural e de Lebesgue das partições. Os expoentes característicos do sistema, como os expoentes de Lyapunov e as entropias, e o espectro de dimensões podem ser então determinados a partir da função de partição associada. A caracterização “termodinâmica” dos conjuntos $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{G}_p$ em sistemas não-hiperbólicos com variabilidade da dimensão instável transversal perturbados pode se demonstrar valiosa na compreensão dos efeitos da não-hiperbolicidade em sistemas dinâmicos mais genéricos.

Bibliografia

- [1] GASPARD, P. *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 475 p. (Cambridge Nonlinear Science Series, v. 9).
- [2] JOSÉ, J. V.; SALETAN, E. J. *Classical Dynamics, a contemporary approach*. New York: Cambridge University Press, 1998. 670 p.
- [3] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- [4] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Canada: Cambridge University Press, 1993. 385 p.
- [5] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983. 459 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 42).
- [6] POINCARÉ, H. *New Methods of Celestial Mechanics*. New York: American Institute of Physics, 1993. (History of Modern Physics and Astronomy, v. 13).
- [7] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5th. ed. [S.l.]: Brooks Cole, 2003. 672 p.
- [8] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- [9] LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, v. 82, p. 985–992, 1975.
- [10] LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130–141, 1962.
- [11] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1996. 603 p.
- [12] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. [S.l.]: Perseus Books, 2000. 512 p.
- [13] GULICK, D. *Encounter with chaos*. New York: McGraw-Hill Inc., 1992. 308 p.
- [14] FIEDLER, B. (Ed.). *Handbook of Dynamical Systems*. [S.l.]: North Holland, 2002. 1098 p.
- [15] GREBOGI, C. et al. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 65, n. 13, p. 1527–1530, Sep 1990.
- [16] SAUER, T.; YORKE, J. A. Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems. *Nonlinearity*, v. 4, n. 3, p. 961, 1991. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0951-7715/4/i=3/a=018>>.

- [17] SAUER, T.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 79, p. 59–62, Jul 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.59>>.
- [18] SAUER, T. D. Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 65, n. 3, p. 036220, Feb 2002.
- [19] DAWSON, S. et al. Obstructions to shadowing when a lyapunov exponent fluctuates about zero. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 73, n. 14, p. 1927–1930, Oct 1994.
- [20] LAI, Y.-C.; GREBOGI, C. Modeling of coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 82, n. 24, p. 4803–4806, Jun 1999.
- [21] LAI, Y.-C.; GREBOGI, C.; KURTHS, J. Modeling of deterministic chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 59, n. 3, p. 2907–2910, Mar 1999.
- [22] OTT, E. et al. The transition to chaotic attractors with riddled basins. *Physica D*, v. 76, p. 384–410, 1994.
- [23] CAMARGO, S.; VIANA, R. L.; ANTENEDDO, C. Intermingled basins in coupled lorenz systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 85, p. 036207, Mar 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.036207>>.
- [24] JR., J. S. et al. Blowout bifurcation and spatial mode excitation in the bubbling transition to turbulence. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 390, n. 2, p. 365–373, 2011. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843711000837X>>.
- [25] CAZELLES, B. Blowout bifurcation with non-normal parameters in population dynamics. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 64, p. 032901, Aug 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.032901>>.
- [26] PEREIRA, R. F. et al. Periodic-orbit analysis and scaling laws of intermingled basins of attraction in an ecological dynamical system. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 78, n. 5, p. 056214, Nov 2008.
- [27] LAI, Y.-C. et al. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 77, n. 1, p. 55–58, Jul 1996.
- [28] ALEXANDER, J. C. et al. Riddled basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 2, n. 4, p. 795–813, 1992.
- [29] SAUER, T. D. Chaotic itinerancy based on attractors of one-dimensional maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 13, n. 3, p. 947(6), 2003.
- [30] GOLDSTEIN, H.; JR., C. P. P.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. 3rd. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2001. 680 p.
- [31] CVITANOVIĆ, P. et al. *Chaos: Classical and Quantum*. Copenhagen: Niels Bohr Institute, 2010. <http://ChaosBook.org>.

- [32] DORFMAN, J. R. *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. New York: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Lecture Notes in Physics, 14).
- [33] HUNT, B. R. et al. (Ed.). *The theory of chaotic attractors*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004.
- [34] ATHREYA, K. B.; LAHIRI, S. N. *Measure Theory and Probability Theory*. New York: Springer, 2006. 618 p. (Springer Texts in Statistics).
- [35] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 57, n. 3, p. 617–656, Jul 1985.
- [36] LAI, Y.-C.; GREBOGI, C. Obstruction to deterministic modeling of chaotic systems with an invariant subspace. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 10, n. 3, p. 683–693, 2000.
- [37] PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 432 p.
- [38] HASSELBLATT, B.; KATOK, A. *A first course in Dynamics*. New York: Cambridge University Press, 2003. 424 p.
- [39] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors. *Physical Review A*, American Physical Society, v. 37, n. 5, p. 1711–1724, Mar 1988.
- [40] MILLER, J.; YORKE, J. Finding all periodic orbits of maps using newton methods: sizes of basins. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 135, n. 34, p. 195–211, 2000. ISSN 0167-2789.
- [41] SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. General approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 57, n. 3, p. 2739–2746, Mar 1998.
- [42] DAVIDCHACK, R. L.; LAI, Y.-C. Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 60, n. 5, p. 6172–6175, Nov 1999.
- [43] DAVIDCHACK, R. L. et al. Towards complete detection of unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physics Letters A*, v. 287, n. 12, p. 99–104, 2001. ISSN 0375-9601.
- [44] BIHAM, O.; WENZEL, W. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 63, n. 8, p. 819–822, Aug 1989.
- [45] SCHMELCHER, P.; DIAKONOS, F. K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 78, n. 25, p. 4733–4736, Jun 1997.
- [46] KOSTELICH, E. J. et al. Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 109, n. 12, p. 81–90, 1997. ISSN 0167-2789. Proceedings of the Workshop on Physics and Dynamics between Chaos, Order, and Noise.

- [47] LAI, Y.-C. Unstable dimension variability and complexity in chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 59, p. R3807–R3810, Apr 1999. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.59.R3807>>.
- [48] STEEB, W.-H.; WYK, M. A. V.; STOOP, R. Chaotic maps, control parameter, and liapunov exponent. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer Netherlands, v. 37, n. 10, p. 2653–2655, 1998. ISSN 0020-7748. 10.1023/A:1026676705866.
- [49] STOOP, R.; STEEB, W.-H. Chaotic family with smooth lyapunov dependence. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 55, n. 6, p. 7763–7766, Jun 1997.
- [50] PEREIRA, R. F. et al. Parametric evolution of unstable dimension variability in coupled piecewise-linear chaotic maps. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 83, n. 3, p. 037201, Mar 2011.
- [51] PEREIRA, R. F.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R. Synchronization time in a hyperbolic dynamical system with long-range interactions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 389, n. 22, p. 5279–5286, 2010. ISSN 0378-4371.
- [52] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006. 357 p.
- [53] NAGAI, Y.; LAI, Y.-C. Characterization of blowout bifurcation by unstable periodic orbits. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 55, n. 2, p. R1251–R1254, Feb 1997.
- [54] NAGAI, Y.; LAI, Y.-C. Periodic-orbit theory of the blowout bifurcation. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 56, n. 4, p. 4031–4041, Oct 1997.
- [55] PEREIRA, R. F. et al. Periodic orbit analysis at the onset of the unstable dimension variability and at the blowout bifurcation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP, v. 17, n. 2, p. 023131, 2007.
- [56] KAPITANIAK, T.; MAISTRENKO, Y. Riddling bifurcations in coupled piecewise linear maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 126, n. 12, p. 18–26, 1999. ISSN 0167-2789.
- [57] VIANA, R. et al. Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 206, n. 12, p. 94–108, 2005. ISSN 0167-2789.
- [58] LAI, Y.-C.; NAGAI, Y.; GREBOGI, C. Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in chaotic attractors. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 79, n. 4, p. 649–652, Jul 1997.
- [59] LAI, Y.-C. Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in nonhyperbolic chaotic systems. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 56, n. 6, p. 6531–6539, Dec 1997.
- [60] LAI, Y.-C. et al. Shadowability of statistical averages in chaotic systems. *Physical Review Letters*, American Physical Society, v. 89, p. 184101, Oct 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.184101>>.

- [61] RUELLE, D. *Thermodynamic Formalism: The Mathematical Structure of Equilibrium Statistical Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. 194 p. (Cambridge Mathematical Library).
- [62] BECK, C.; SCHLOGL, F. *Thermodynamics of chaotic systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 286 p.
- [63] VERGÉS, M. et al. Riddling and chaotic synchronization of coupled piecewise-linear Lorenz maps. *Physica A*, v. 388, n. 12, p. 2515–2525, 2009. ISSN 0378-4371.
- [64] SZMOSKI, R. M. et al. Locking-time and information capacity in cml with statistical periodicity. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 285, n. 1, p. 012043, 2011.
- [65] SZMOSKI, R. M.; PEREIRA, R. F.; PINTO, S. E. de S. Effective dynamics for chaos synchronization in networks with time-varying topology. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 18, n. 0, p. 1491–1498, 2013. ISSN 1007-5704.
- [66] LOPES, S. R. et al. Anomalous transport induced by nonhyperbolicity. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 86, n. 1, p. 016216, Jul 2012.

APÊNDICE A – Produção bibliográfica de Mar/2009 a Dez/2012

Nesse Apêndice estão listadas as publicações em revistas internacionais especializadas e indexadas no SCI (*Science Citation Index*) realizadas pelo autor no período de doutoramento, de Março de 2009 a Dezembro de 2012. O modelo apresentado no capítulo 3 foi também estudado, sob diferentes aspectos, na Ref. [63] (Seção A.1). A sincronização de caos em sistemas hiperbólicos foi caracterizada em termos das órbitas periódicas instáveis na Ref. [51] (Seção A.2). Os primeiros resultados indicados no capítulo 4, seção 4.1.1, foram publicados na Ref. [50] (Seção A.3). Os demais trabalhos tratam de redes de mapas acoplados com periodicidade estatística [64] (Seção A.4), sincronização de caos em sistemas não-autônomos [65] (Seção A.6) e caracterização da dinâmica não-hiperbólica *via* tangências [66] (Seção A.5) em abordagens distintas e descorrelacionadas aos resultados presentes nessa tese.

A.1 Physica A, 388:2515–2525 (2009)

Título: *Riddling and chaotic synchronization of coupled piecewise-linear Lorenz maps*

Autores: M. C. Vergès, **R. F. Pereira**, S. R. Lopes, R. L. Viana e T. Kapitaniak

Resumo (traduzido do inglês):

Investigamos a evolução paramétrica das bacias crivadas relativas à sincronização de caos em dois mapas de Lorenz lineares por partes acoplados. Crivamento significa que a bacia de atração da sincronização é crivada por buracos pertencentes à outra bacia em uma escala arbitrariamente fina, causando sérias consequências à preditibilidade do estado final desse sistema acoplado. Encontramos um vasto intervalo de parâmetros para o qual dois mapas de Lorenz lineares por partes acoplados exibem bacias crivadas (globalmente ou localmente), o que indica a existência de bacias crivadas em equações de Lorenz acopladas, como sugerido por experimentos numéricos anteriores. O uso de mapas lineares por partes torna possível a prova rigorosa dos requisitos matemáticos para a existência de bacias crivadas.

Data da publicação: 15 de Junho de 2009

DOI: 10.1016/j.physa.2009.02.015

A.2 Physica A, 389:5279–5286 (2010)

Título: *Synchronization time in hyperbolic dynamical system with long-range interactions*

Autores: R. F. Pereira, S. E. de S. Pinto e S. R. Lopes

Resumo (traduzido do inglês):

Mostramos que o limiar para a sincronização completa em uma rede de mapas caóticos não-suaves acoplados é determinada pela estabilidade linear das direções transversais ao subespaço de sincronização. Examinamos cuidadosamente o tempo de sincronização e mostramos que observações inadequadas da evolução do sistema levam a resultados errados. Apresentamos experimentos numéricos cuidadosos e uma explicação matemática rigorosa confirmando esse fato, permitindo uma generalização para redes de mapas acoplados hiperbólicas.

Data da publicação: 15 de Novembro de 2010

DOI: 10.1016/j.physa.2010.06.051

A.3 Physical Review E, 83:037201(4) (2011)

Título: *Parametric evolution of unstable dimension variability in coupled piecewise-linear chaotic maps*

Autores: R. F. Pereira, R. L. Viana, S. R. Lopes, M. C. Vergès e S. E. de S. Pinto

Resumo (traduzido do inglês):

Na presença de variabilidade da dimensão instável as soluções numéricas de sistemas caóticos são válidas apenas para períodos curtos de observação. Por essa razão, resultados analíticos para sistemas que exibem esse fenômeno são necessários. Visando avançar no sentido da obtenção de tais resultados, estudamos a evolução paramétrica da variabilidade da dimensão instável em dois mapas do bangalô acoplados. Cada um desses mapas possui intervalos de linearidade que definem partições de Markov, recuperadas pelo sistema acoplado no caso de sincronização. Utilizando tais partições encontramos resultados exatos para o início da variabilidade da dimensão instável e para a medida de contraste, que quantifica a intensidade do fenômeno em termos da estabilidade das órbitas periódicas imersas no subespaço de sincronização.

Data da publicação: 24 de Março de 2011

DOI: 10.1103/PhysRevE.83.037201

A.4 Journal of Physics: Conference Series, 285:012043(8) (2011)

Título: *Locking-time and Information Capacity in CML with Statistical Periodicity*

Autores: R. M. Szmowski, **R. F. Pereira**, F. A. S. Ferrari e S. E. de S. Pinto

Resumo (traduzido do inglês):

Nesse trabalho focamos o fenômeno da periodicidade estatística em uma rede de mapas acoplados. O estudo foi baseado nos padrões binários assintóticos. A multiplicidade dos padrões fornece a capacidade de informação da rede, enquanto a taxa de entropia permite o cálculo do tempo de travamento (“locking-time”). Nossos resultados sugerem que a rede apresenta tempo de travamento pequeno e alta capacidade de informação quando o acoplamento é fraco. Essa é a condição para o sistema reproduzir uma classe de comportamentos observados em redes neuronais.

Data da publicação: 06 de Abril de 2011

DOI: 10.1088/1742-6596/285/1/012043

A.5 Physical Review E, 86:016216(5) (2012)

Título: *Anomalous transport induced by nonhyperbolicity*

Autores: S. R. Lopes, J. D. Szezech Jr., **R. F. Pereira**, A. A. Bertolazzo e R. L. Viana

Resumo (traduzido do inglês):

Nesse artigo estudamos como propriedades determinísticas apresentadas por um sistema podem ser utilizadas para realizar transporte em um sistema fracamente dissipativo com um potencial quase-simétrico. Mostramos que a presença de regiões não-hiperbólicas ao redor das áreas de aceleração do espaço de fase influenciam fortemente a aceleração de partículas dando origem ao transporte direcionado no sistema. Tal efeito pode ser observado para um grande intervalo do parâmetro do potencial assimétrico fraco possibilitando a obtenção de trabalho útil a partir de flutuações de não-equilíbrio em sistemas reais mesmo na presença de um potencial quase-simétrico.

Data da publicação: 20 de Julho 2012.

DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016216

A.6 Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18:1491–1498 (2013)

Título: *Effective dynamics for chaos synchronization in networks with time-varying topology*

Autores: R. M. Szmowski, **R. F. Pereira** e S. E. de S. Pinto

Resumo (traduzido do inglês):

Uma rede de mapas acoplados cuja topologia varia a cada instante de tempo é estudada. Mostramos que a dinâmica transversal da variedade de sincronização pode ser analisada pela introdução de quantidades dinâmicas efetivas. Essas quantidades são definidas como médias ponderadas sobre todas as topologias possíveis. Demonstramos que um conjunto de observações a tempos pequenos pode ser utilizada para prever o comportamento assintótico da rede. Finalmente, mostramos que é possível obter uma rede com topologia constante para a qual o comportamento dinâmico é assintoticamente idêntico ao da rede com topologia variando no tempo.

Data da publicação: (publicação *on-line*) 23 de Outubro de 2012

DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.10.005