

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS**

LUCAS MOREIRA BRANCO

**EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS E SUAS APLICAÇÕES NO EFEITO
AHARONOV-BOHM**

**PONTA GROSSA
2025**

LUCAS MOREIRA BRANCO

**EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS E SUAS APLICAÇÕES NO EFEITO
AHARONOV-BOHM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências/ Física.

Orientador: Fabiano Manoel de Andrade.

**PONTA GROSSA
2025**

B816 Branco, Lucas Moreira
 Extensões auto-adjuntas e suas aplicações no efeito Aharonov-Bohm / Lucas
 Moreira Branco. Ponta Grossa, 2025.
 61 f.

 Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),
 Universidade Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

 1. Efeito Aharonov-Bohm. 2. Potencial vetor. 3. Extensões auto-adjuntas. 4.
 Espalhamento. I. Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de
 Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

LUCAS MOREIRA BRANCO

EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS E SUAS APLICAÇÕES NO EFEITO
AHARONOV-BOHM

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física Teórica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:



Documento assinado digitalmente

FABIANO MANOEL DE ANDRADE

Data: 30/04/2025 11:45:10-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador- _____

Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG –

Titular/Presidente



Documento assinado digitalmente

EDILBERTO OLIVEIRA SILVA

Data: 30/04/2025 15:02:27-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Edilberto Oliveira Silva – UFMA – Titular



Documento assinado digitalmente

MARCIANO PEREIRA

Data: 30/04/2025 15:49:10-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Marciano Pereira – UEPG – Titular

Ponta Grossa, 30 de abril de 2025.

*À querida tia Célia,
companheira dos primeiros passos desta jornada,
hoje acolhida nos braços do Pai Celestial.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força e motivação para realizar este trabalho.

Ao Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade, pela orientação ao longo de todos os anos em que trabalhamos juntos, sempre compartilhando seu conhecimento, discutindo ideias, guiando a pesquisa e oferecendo sua amizade.

Ao grupo Física Quântica e Informação Quântica (FQIQ), pelas discussões, sugestões e colaborações ao longo do percurso. Em especial, ao MSc. Paulo Eduardo Lopes, que me acompanhou durante toda a escrita deste trabalho.

Aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Lucas Stori de Lara e Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia.

Aos membros da banca de defesa, Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva e Prof. Dr. Marciano Pereira.

Aos demais professores que contribuíram para a minha formação acadêmica, especialmente os do Departamento de Física e do Programa de Pós-graduação em Ciências/Física, pelos valiosos ensinamentos durante a graduação e o mestrado.

À minha mãe, Valdete Maria Moreira, e à minha avó, Eloína de Jesus Rodrigues Branco, por sempre me incentivarem e acreditarem em mim.

A todos os meus entes queridos, em especial à minha tia, Lucélia Aparecida Branco Pires da Rosa, que me fez companhia durante boa parte do desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos e colegas, pelos momentos compartilhados, conversas e apoio. Em especial, ao Dr. Enrique Chipicoski Gabrick, MSc. Guilherme Almeida das Neves e MSc. Alessandro de Melo.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela estrutura.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

“Se enxerguei mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”
(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma revisão das abordagens teóricas relacionadas ao comportamento quântico de partículas submetidas ao efeito Aharonov–Bohm, ressaltando o papel dos potenciais eletromagnéticos na determinação das propriedades físicas do sistema. São abordadas tanto formulações tradicionais quanto alguns métodos mais recentes, baseados em extensões auto-adjuntas de operadores, que possibilitam um tratamento rigoroso de Hamiltonianos singulares. Entre esses métodos, destaca-se o teorema de Bulla–Gesztesy, que fornece uma estrutura matemática sólida para a definição do domínio dos operadores envolvidos. Além disso, incorpora-se o momento magnético anômalo na modelagem do sistema, representando uma correção em relação às abordagens convencionais. A análise é também estendida a estruturas quânticas confinadas em espaços cônicos, onde a geometria do espaço pode influenciar o espectro do Hamiltoniano. A revisão evidencia que a escolha do parâmetro de extensão λ_m é relevante para a caracterização dos estados ligados e para a descrição da dinâmica quântica do modelo estudado.

Palavras-Chave: Efeito Aharonov-Bohm; Potencial vetor; Extensões auto-adjuntas; Espalhamento.

ABSTRACT

This work presents a review of theoretical approaches related to the quantum behavior of particles subjected to the Aharonov–Bohm effect, highlighting the role of electromagnetic potentials in determining the physical properties of the system. Both traditional formulations and some more recent methods are addressed, particularly those based on self-adjoint extensions of operators, which enable a rigorous treatment of singular Hamiltonians. Among these methods, the Bulla–Gesztesy theorem stands out, providing a solid mathematical framework for defining the domain of the involved operators. Furthermore, the anomalous magnetic moment is incorporated into the system modeling, representing a correction in relation to conventional approaches. The analysis is also extended to quantum structures confined in conical spaces, where the geometry of the space may influence the Hamiltonian spectrum. The review indicates that the choice of the extension parameter λ_m is relevant for the characterization of bound states and for the description of the quantum dynamics of the studied model.

Keywords: Aharonov–Bohm; Vector potential; Self-adjoint extensions; Scattering.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Padrão de interferência observado no experimento do efeito Aharonov-Bohm. No centro, observa-se um deslocamento das franjas de interferência. Conforme previsto por Aharonov e Bohm, o campo magnético está confinado dentro da região cilíndrica central, sem atuar diretamente sobre os elétrons. No entanto, o potencial vetor associado a esse campo influencia a fase da função de onda dos elétrons, provocando o deslocamento das franjas.	14
Figura 2	Esquema ilustrativo do experimento do efeito Aharonov-Bohm. Os elétrons emitidos pelo canhão passam pela dupla fenda e seguem dois caminhos (ψ_1 e ψ_2) ao redor de um solenoide onde o campo magnético $\mathbf{B}$ está confinado. Apesar de o campo ser nulo fora do solenoide, temos a presença do potencial vetor $\mathbf{A}$ e uma alteração na fase das funções de onda, observada pelo deslocamento das franjas de interferência observadas na tela.	15
Figura 3	Efeito de Aharonov-Bohm em outra perspectiva. O feixe de elétrons é dividido e passa ao redor de um solenóide, onde o campo magnético $\mathbf{B}$ está confinado ao seu interior, enquanto o potencial vetor $\mathbf{A}$ influencia a interferência do feixe ao se recombinar.	16
Figura 4	Representação do espectro de energia E_n como função da razão ϕ/ϕ_0 . Observa-se uma oscilação periódica das auto-energias do sistema em função do fluxo magnético ϕ , mesmo em uma região onde o campo magnético é nulo, evidenciando a influência do potencial vetor no efeito AB.	18

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EFEITO AB SEM SPIN	14
2.1	EFEITO AB COM SPIN	18
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
3.1	POTENCIAIS SINGULARES	21
3.1.1	A função delta de Dirac	22
3.2	QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS	23
3.2.1	Espaço de Hilbert	24
3.2.1.1	<i>Definição formal</i>	25
3.2.1.2	<i>Exemplos</i>	25
3.3	EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS	26
3.3.1	Índices de deficiência de von Neumann	26
3.4	MÉTODO BULLA-GESZTESY	27
3.5	MÉTODO KAY-STUDER	29
3.6	PARTÍCULAS SPIN $1/2$	29
3.7	A EQUAÇÃO DE PAULI	30
3.8	RELATIVIDADE RESTRITA	31
3.9	EQUAÇÃO DE DIRAC	33
3.10	A MATRIZ S NA TEORIA DE ESPALHAMENTO	34
4	SOLUÇÃO DO SISTEMA AB COM O USO DAS EXTENSÕES	36
4.1	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC	36
4.2	REDUÇÃO DIMENSIONAL DA EQUAÇÃO DE DIRAC	37
4.2.1	Redução para o problema bidimensional	38
4.3	LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO	38
4.4	DECOMPOSIÇÃO DA FUNÇÃO DE ONDA	40
4.5	EXTENSÃO AUTO-ADJUNTA PELO MÉTODO DE BULLA-GESZTESY	41
4.5.1	Hamiltoniano e condição de contorno	41
4.5.2	Energias de estado ligado	42
4.5.3	Diferença de fase e matriz S'	44
4.5.4	Discussão dos resultados	45
4.6	ESPALHAMENTO EM ESPAÇO CÔNICO	45
5	CONCLUSÕES	49
	REFERÊNCIAS	50

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES γ^μ E REDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	54
APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COMUTADORES E ELIMINAÇÃO DE Ψ_b	55
APÊNDICE C – CÁLCULO DOS COEFICIENTES $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$	57
APÊNDICE D – CÁLCULOS RELACIONADOS AO ESPALHAMENTO EM ESPAÇO CÔNICO	59

1 INTRODUÇÃO

A construção de modelos teóricos capazes de explicar e prever fenômenos físicos é fundamental para o avanço científico e para o desenvolvimento de novas tecnologias. Desde a determinação das trajetórias de objetos clássicos até a compreensão de fenômenos quânticos, como o emaranhamento e o tunelamento, a evolução da física teórica tem impulsionado inovações que impactam tanto a pesquisa básica quanto a aplicação prática; exemplos disso são o desenvolvimento de microscópios eletrônicos (Davisson; Germer, 1927) e a análise de ruídos em dispositivos miniaturizados (Dutta; Horn, 1981). Esses avanços demonstram como a formulação abstrata de leis naturais pode influenciar diretamente a criação de ferramentas experimentais e dispositivos tecnológicos sofisticados.

No contexto da mecânica quântica, a formulação rigorosa dos operadores que descrevem as grandezas físicas é essencial para garantir previsões consistentes. Diferentemente da mecânica clássica, onde as variáveis físicas são bem definidas, a mecânica quântica requer que essas quantidades sejam representadas por operadores lineares sobre espaços de Hilbert, cuja estrutura matemática demanda precisão e cuidado. Em particular, sistemas que envolvem potenciais singulares apresentam desafios significativos, pois a definição do Hamiltoniano — o operador responsável por reger a dinâmica do sistema — exige um tratamento minucioso para assegurar o seu caráter auto-adjunto e, portanto, a existência de um espectro físico bem definido (Reed; Simon, 1975).

A escolha inadequada das condições de contorno pode comprometer a interpretação física dos resultados, uma vez que operadores simétricos que não são essencialmente auto-adjuntos podem admitir uma família de extensões auto-adjuntas, cada uma correspondendo a diferentes conjuntos de condições de contorno admissíveis. Essa liberdade matemática implica na existência de diferentes versões do mesmo sistema físico, com espectros e estados próprios distintos. Assim, a seleção de uma extensão específica, motivada por argumentos físicos ou simétricos, determina qual fenômeno será descrito de forma precisa. Essa situação é particularmente ilustrada em trabalhos como o de Bonneau, Faraut e Valent (2001), que evidenciam o papel central das extensões auto-adjuntas na modelagem de sistemas com potenciais singulares.

Um exemplo emblemático da influência dos potenciais singulares na mecânica quântica é o efeito Aharonov–Bohm (AB). Este fenômeno, inicialmente descrito por Ehrenberg e Siday (1949) e posteriormente analisado teoricamente por Aharonov e Bohm (1959), demonstra que partículas carregadas podem ser afetadas por um potencial eletromagnético mesmo em regiões onde o campo magnético é nulo, evidenciando o papel fundamental do potencial na descrição da dinâmica quântica. No entanto, a formulação matemática do problema AB requer cuidados especiais, pois o vetor potencial exibe uma singularidade na origem. Portanto, a definição apropriada do Hamiltoniano exige a imposição de condições de contorno rigorosas para garantir uma descrição física consistente.

Entre as abordagens empregadas para tratar problemas com potenciais singulares, as exten-

sões auto-adjuntas de operadores diferenciais se destacam. Conforme o teorema de von Neumann (Neumann, 1931), operadores simétricos podem admitir múltiplas extensões auto-adjuntas, cada uma associada a um conjunto particular de condições de contorno. No caso do efeito AB, essa técnica possibilita a análise detalhada de diferentes regimes físicos, permitindo a existência de estados ligados e alterações na matriz de espalhamento (Gitman; Tyutin, 1990). Estudos, como os de Gerbert (1989), demonstraram que a imposição de condições de contorno por meio de extensões auto-adjuntas é crucial para definir o espectro do sistema e determinar as diferenças de fase observadas no espalhamento.

Uma contribuição fundamental para esse campo foi feita por Bulla e Gesztesy (1985), que calcularam os chamados índices de deficiência — quantidades que, no âmbito do teorema de von Neumann, indicam o número de soluções associadas ao operador simétrico — e desenvolveram condições de contorno auto-adjuntas para Hamiltonianos singulares com interações pontuais. Esse formalismo possibilita a análise sistemática de extensões auto-adjuntas, fornecendo uma estrutura matemática sólida para tratar sistemas com potenciais singulares, incluindo o problema AB. Ao longo deste trabalho, também será apresentado o método de Kay–Studer (Kay; Studer, 1991), que oferece uma alternativa baseada em considerações físicas para a escolha das condições de contorno.

Além disso, a formulação do problema AB pode ser estendida para geometrias não triviais, como espaços cônicos, em que o déficit angular altera a estrutura espectral do sistema (Andrade; Silva; Pereira, 2013). A análise da interação entre a geometria do espaço e as condições de contorno reforça a importância das extensões auto-adjuntas na formulação de problemas físicos envolvendo operadores singulares. Estudos mais recentes, como os de Costa (2016) e Salem (2017), ampliaram essa abordagem incorporando efeitos adicionais, como o momento magnético anômalo.

Dessa forma, esta dissertação tem como objetivo revisar e discutir as aplicações das extensões auto-adjuntas no contexto do efeito AB, com ênfase em partículas de spin $1/2$ e nos métodos baseados no teorema de Bulla–Gesztesy (Bulla; Gesztesy, 1985). Ao longo deste trabalho, serão discutidos os principais resultados obtidos por diversos autores, em particular, o trabalho de Andrade, Silva e Pereira (2013), as contribuições de Costa (2016), que incorpora o efeito do momento magnético anômalo, e de Salem (2017), que estendeu essa análise para sistemas com geometria cônica. A revisão evidencia que a escolha do parâmetro de extensão, λ_m , é essencial para definir o domínio do Hamiltoniano e para caracterizar adequadamente os estados ligados e as propriedades de espalhamento em sistemas quânticos de baixa dimensão.

Para tal, esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, introduz-se o efeito AB em sua formulação mais simples, sem considerar o spin da partícula, destacando sua relevância física e as implicações do potencial vetor em regiões onde o campo magnético é nulo. O Capítulo 3 é dedicado à revisão de fundamentos da mecânica quântica relevantes para a discussão, com foco na definição de operadores auto-adjuntos, nos índices de deficiência de von Neumann e no teorema de Bulla–Gesztesy, que fornece um tratamento rigoroso para

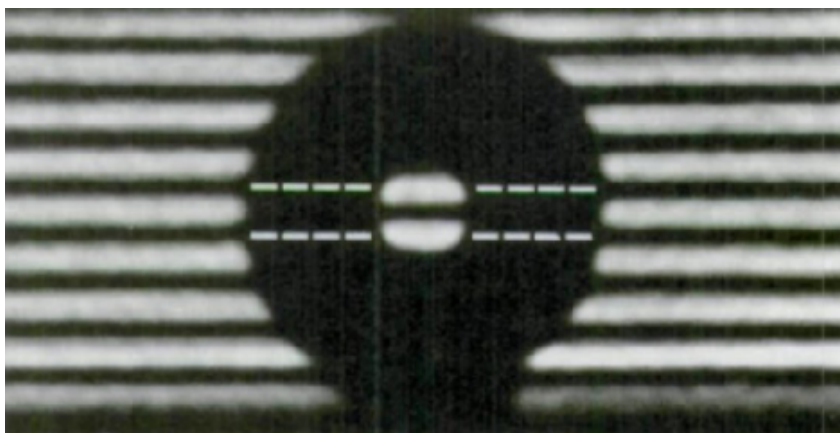
Hamiltonianos com potenciais singulares. O Capítulo 4 aprofunda-se no efeito AB com spin, incorporando o momento magnético anômalo e analisando a estrutura espectral modificada por meio das extensões auto-adjuntas. Por fim, são apresentadas as considerações finais e a conclusão do trabalho.

2 EFEITO AB SEM SPIN

O efeito AB é um fenômeno quântico que desafia a interpretação clássica da física e foi inicialmente previsto por Ehrenberger e Siday (1949), a ideia passou inicialmente despercebida até a publicação do artigo de Aharonov e Bohm (1959) anos depois com uma reformulação e generalização do conceito. Esse fenômeno foi posteriormente confirmado experimentalmente por Chambers (1960) e, de forma mais robusta, por Tonomura et al. (1986). O efeito AB se trata de quando partículas carregadas, como elétrons, interagem com um campo magnético, mesmo em regiões em que o campo magnético é nulo.

Os experimentos do efeito AB foram concebidos para minimizar interferências externas e garantir condições ideais de medição. Por exemplo, no experimento de Tonomura et al. (1986), um solenóide supercondutor foi utilizado para confinar o campo magnético e evitar fuga, permitindo que os elétrons passassem por uma região livre de campo magnético, mas ainda assim fossem afetados. Nessas configurações, as medições foram realizadas em condições de alto vácuo e temperaturas criogênicas, o que assegura a estabilidade da supercondutividade e reduz os ruídos térmicos. Assim, embora os experimentos sejam realizados em condições de laboratório reais, eles se aproximam de condições ideais para a verificação dos fenômenos previstos teoricamente. Tais experimentos evidenciam que a interferência dos elétrons sofre um deslocamento, influenciado por um fator de fase proporcional à intensidade do fluxo magnético (conforme pode ser observado na Figura 1).

Figura 1 – Padrão de interferência observado no experimento do efeito Aharonov-Bohm. No centro, observa-se um deslocamento das franjas de interferência. Conforme previsto por Aharonov e Bohm, o campo magnético está confinado dentro da região cilíndrica central, sem atuar diretamente sobre os elétrons. No entanto, o potencial vetor associado a esse campo influencia a fase da função de onda dos elétrons, provocando o deslocamento das franjas.



Fonte: BATELAAN, H.; TONOMURA, A. The aharonov-bohm effects: Variations on a subtle theme. *Physics Today*, v. 62, 09 2009.

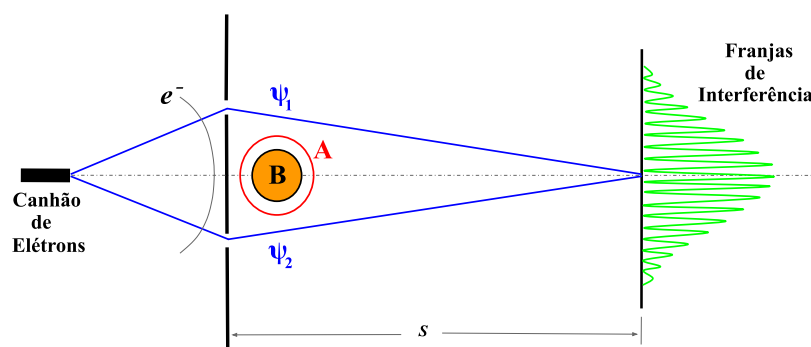
Esse deslocamento na interferência é uma manifestação direta da fase adquirida pelo estado

quântico da partícula em função do potencial vetorial, mesmo na ausência de campo magnético local. Tal comportamento evidencia a natureza não local da mecânica quântica e reforça a ideia de que os potenciais eletromagnéticos não são meros auxiliares matemáticos, mas sim entidades físicas com efeitos observáveis. O efeito AB, portanto, não apenas desafia as intuições clássicas, mas também destaca a importância do formalismo quântico completo, no qual a fase do funcional de onda desempenha papel central na descrição da realidade física. A compreensão e o estudo desse fenômeno têm implicações profundas em áreas como interferometria eletrônica e em modelos teóricos que envolvem espaços com estruturas geométricas não triviais (Berry, 1984).

No presente trabalho, primeiramente iremos analisar o sistema “AB puro”¹, onde temos a presença de um solenóide infinitamente longo com um campo magnético em seu interior. Nossa análise será por meio da solução da equação de Schrödinger, para esse caso específico, mostrando que o potencial vetor causa o fenômeno de interferência na região do espaço onde o campo magnético é nulo. Os detalhes sobre o efeito AB e a influência do potencial vetor podem ser encontrados em (Aharonov; Bohm, 1959).

O experimento, configura um cenário com um arranjo de dupla fenda onde uma bobina solenoidal é posicionada entre essas fendas como ilustrado esquematicamente na Figura 2. Quando uma corrente elétrica passa através da bobina, ela gera um campo magnético em seu interior, seguindo os princípios estabelecidos pela Lei de Ampère.

Figura 2 – Esquema ilustrativo do experimento do efeito Aharonov-Bohm. Os elétrons emitidos pelo canhão passam pela dupla fenda e seguem dois caminhos (ψ_1 e ψ_2) ao redor de um solenoide onde o campo magnético $\mathbf{B}$ está confinado. Apesar de o campo ser nulo fora do solenoide, temos a presença do potencial vetor $\mathbf{A}$ e uma alteração na fase das funções de onda, observada pelo deslocamento das franjas de interferência observadas na tela.



Fonte: Adaptado de (Kasunic, 2018).

O campo magnético está confinado ao interior de um solenóide idealizado como infinitamente longo, a fim de eliminar contribuições externas indesejadas. À medida que se varia a intensidade

¹ O sistema AB puro é o mais simples, onde não estamos considerando o spin da partícula.

do fluxo magnético, observa-se um deslocamento proporcional nas franjas de interferência registradas no anteparo.

Para explicar esse fenômeno, o primeiro passo é definir o potencial vetor associado ao campo magnético confinado a um solenoide infinito de raio a , com o campo magnético $\mathbf{B}$ apontando na direção z (conforme está ilustrado na Figura 3). O campo magnético no interior do solenoide é dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.1)$$

com o potencial vetor $\mathbf{A}$ sendo dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{Br}{2} \hat{\phi}, \quad (2.2)$$

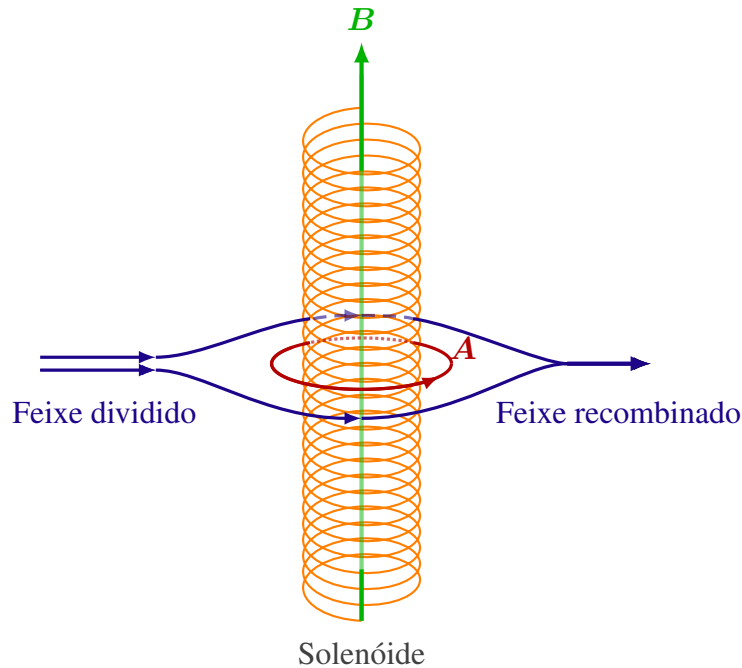
onde $\hat{\phi}$ é a direção angular e r é o raio. Para dentro do solenoide, podemos definir $r \in [0, a]$.

Apesar do campo magnético ser nulo fora do solenoide, o potencial vetor é diferente de zero e dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (2.3)$$

para $r > a$, de tal forma que o potencial vetor é contínuo em $r = a$. Essa continuidade garante uma transição suave entre as regiões interna e externa ao tubo de fluxo, sendo essencial para a consistência do modelo.²

Figura 3 – Efeito de Aharonov-Bohm em outra perspectiva. O feixe de elétrons é dividido e passa ao redor de um solenoide, onde o campo magnético $\mathbf{B}$ está confinado ao seu interior, enquanto o potencial vetor $\mathbf{A}$ influencia a interferência do feixe ao se recombinar.



Fonte: Adaptado de (Griffths, 1995).

² A escolha do potencial vetor $\mathbf{A}$ não é única devido à invariância de gauge: diferentes potenciais que diferem por um gradiente $\nabla\Lambda$ resultam no mesmo campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. No entanto, a diferença de fase entre as trajetórias quânticas é sensível à forma funcional de $\mathbf{A}$, o que torna sua escolha fisicamente relevante no contexto do efeito AB.

O Hamiltoniano do sistema é dado por

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 + \left(\frac{q\phi}{2\pi r} \right)^2 + 2i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \right). \quad (2.5)$$

Vale ressaltar que, para o caso sem spin, o Hamiltoniano acima é bem definido e não apresenta uma singularidade tão severa na origem que exija condições especiais. No entanto, como veremos nas seções posteriores, a inclusão do spin do elétron introduz termos singulares no Hamiltoniano, exigindo um tratamento mais rigoroso baseado em extensões auto-adjuntas.

Para analisar o elétron que está fora, descrevemos o sistema com a equação de Schrödinger:

$$H\psi = E\psi. \quad (2.6)$$

Por meio de simplificações, assumimos que a função de onda é definida em $r = b > a$, onde o elétron estará preso a uma trajetória circular (ou seja, com o raio tendo um valor fixo b fora do solenóide), assim teremos apenas a dependência angular.³ Após algumas deduções, obteremos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{d\psi^2}{d\varphi^2} + 2i\hbar\beta \frac{d\psi}{d\varphi} - \varepsilon\psi = 0, \quad (2.7)$$

onde $\varepsilon = 2mEb^2/\hbar^2$.

Podemos resolver a Eq. (2.7) utilizando uma solução na forma

$$\psi = Ae^{i\lambda\varphi}, \quad (2.8)$$

onde A é uma constante. Substituindo a (2.8) na (2.7), obtemos uma relação entre o parâmetro λ e a energia do sistema. Devido a unicidade da solução, a exponencial precisa ter periodicidade de 2π . Assim, aplicando essa condição temos

$$e^{i\lambda 2\pi} = 1. \quad (2.9)$$

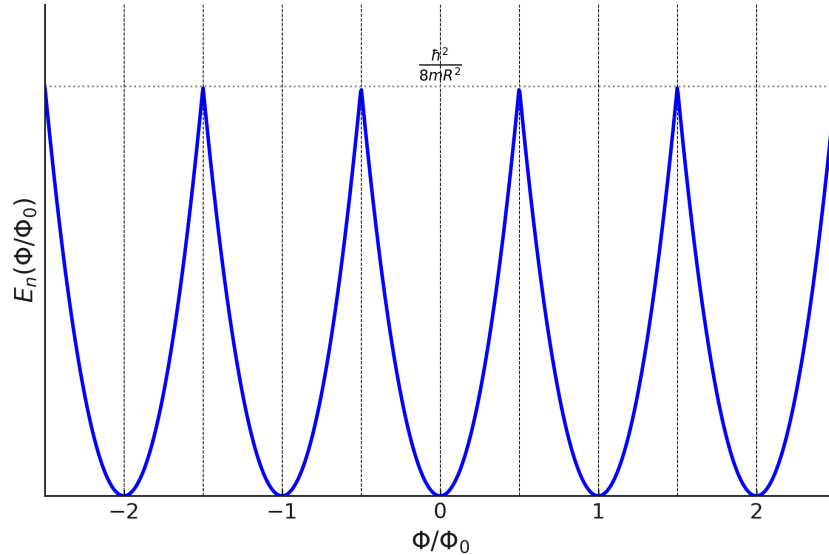
Então, podemos encontrar uma expressão para as auto-energias do sistema, a qual é dada por

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2. \quad (2.10)$$

Com $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\phi_0 = h/e$, que pode ser definido como “quantum de fluxo”. Desta forma, ao variar o fluxo magnético ϕ , conseguimos ver a variação das auto-energias do elétron em função do campo numa região onde o campo é nulo (conforme a Figura 4).

³ Os detalhes da aproximação analítica podem ser encontrados em trabalhos, como por exemplo (NAZAROV; BLANTER, 2009).

Figura 4 – Representação do espectro de energia E_n como função da razão ϕ/ϕ_0 . Observa-se uma oscilação periódica das auto-energias do sistema em função do fluxo magnético ϕ , mesmo em uma região onde o campo magnético é nulo, evidenciando a influência do potencial vetor no efeito AB.



Fonte: O Autor.

Foi verificado que as auto-energias dependem do fluxo de campo magnético. Essa é uma das formas de demonstrar a influência que o potencial vetor, aparentemente, causa nas partículas carregadas. Na próxima seção, veremos diferentes abordagens presentes na literatura para descrever o efeito AB em sistemas envolvendo partículas com spin.

2.1 EFEITO AB COM SPIN

A formulação e a análise teórica do efeito AB têm evoluído significativamente desde sua descoberta, com diversas abordagens para o tratamento de potenciais singulares e para a definição de condições de contorno rigorosas nos sistemas quânticos.

No trabalho de Hagen (1990), foi analisado o efeito AB com spin onde, no problema descrito, temos o solenóide como um anel bidimensional, dividindo o espaço em duas regiões (interna e externa ao anel). Esse procedimento constitui uma forma de regularização, na qual o campo magnético é modelado pela expressão

$$e\mathbf{H} = -\alpha \frac{1}{R} \delta(r - R), \quad (2.11)$$

onde α representa o fluxo magnético e R o raio do anel e δ é a delta de Dirac. O vetor potencial correspondente é dado por

$$e\mathbf{A} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r} \mathbf{u}_\theta, & \text{para } r > R, \\ 0, & \text{para } r < R. \end{cases} \quad (2.12)$$

Hagen ressaltou que, embora as singularidades na região interna do solenóide possam ser negligenciadas em certas aproximações, a presença do spin induz comportamentos singulares nas funções de onda externas, afetando as amplitudes de espalhamento.

Posteriormente, Bordag e Voropaev (1993) investigaram o efeito AB levando em conta a contribuição do momento magnético anômalo — uma correção quântica ao valor previsto do momento magnético de partículas com spin, como o elétron, originada por efeitos da eletrodinâmica quântica (QED). Para isso, introduziram um termo fenomenológico na equação de movimento, representando a interação do spin com o campo magnético confinado. Essa interação é modelada por meio de uma função delta de Dirac localizada na origem⁴, o que acarreta divergências no limite de raio nulo. A fim de contornar essas divergências, os autores aplicaram diferentes procedimentos de regularização, seguidos por uma renormalização do Hamiltoniano. Essa abordagem permitiu associar o parâmetro de extensão auto-adjunta à anomalia do momento magnético, oferecendo uma formulação matemática e fisicamente consistente do sistema.

No mesmo ano, Hagen (1993) estendeu sua análise para o problema Aharonov-Bohm-Coulomb (ABC), incorporando um potencial Coulombiano ao sistema para partículas de spin $1/2$. O Hamiltoniano considerado é

$$H = H_0 + \frac{\xi}{r}, \quad (2.13)$$

em que H_0 é o Hamiltoniano singular e ξ representa a constante de acoplamento do potencial Coulombiano.

No trabalho de Park e Oh (1994), o efeito Aharonov-Bohm foi analisado de forma sistemática por meio do formalismo de extensões auto-adjuntas, com o objetivo de tratar o Hamiltoniano singular. Esse formalismo consiste em ampliar o domínio do operador Hamiltoniano — que originalmente não é auto-adjunto devido à presença de uma singularidade — de forma a garantir propriedades fundamentais da mecânica quântica, como a realidade do espectro de energia. Os autores determinaram explicitamente as condições de contorno compatíveis com essa extensão, e mostraram que o espectro do sistema depende diretamente do parâmetro associado à escolha da condição. Notavelmente, ao se tomar certos limites desse parâmetro, os resultados coincidem com aqueles obtidos por Hagen em estudos anteriores. O trabalho de Park e Oh, portanto, reforça a aplicabilidade das extensões auto-adjuntas em Hamiltonianos singulares, estabelecendo uma ponte coerente entre diferentes abordagens teóricas para o efeito AB.

Em um trabalho posterior, Andrade, Silva e Pereira (2013) conduziram uma análise detalhada do efeito AB para partículas de spin em espaços cônicos. Utilizando extensões auto-adjuntas, os autores derivaram soluções analíticas cuja forma depende explicitamente de constantes físicas e geométricas do sistema, revelando que a topologia do espaço — em particular, o déficit angular característico dos espaços cônicos — exerce um impacto significativo no espectro de energia. Seus resultados evidenciam que a presença de uma geometria não trivial modifica as condições de contorno e, conseqüentemente, os níveis de energia do sistema.

⁴ No próximo capítulo, discutiremos em maiores detalhes a utilização da função delta de Dirac.

No mesmo período, Ferkous e Bounames (2013) solucionaram a equação de Pauli bidimensional para partículas de spin $1/2$ sob o potencial de Hulthén na presença do campo AB. Utilizando uma aproximação eficaz para o termo centrífugo,

$$\frac{1}{r^2} \approx \eta^2 \frac{e^{-\eta r}}{(1 - e^{-\eta r})^2}, \quad (2.14)$$

os autores obtiveram soluções analíticas (regulares e singulares) cuja natureza é controlada pelo parâmetro de blindagem η . Eles demonstraram que o campo Aharonov–Bohm rompe a degenerescência dos níveis de energia, modificando a faixa do parâmetro de fluxo α para a qual soluções singulares são permitidas. No limite $\eta \rightarrow 0$, o espectro se aproxima do caso do problema ABC, validando a abordagem adotada.

Posteriormente, Costa (2016) incorporou o efeito do momento magnético anômalo na formulação do problema por meio de extensões auto-adjuntas. Essa abordagem proporciona uma descrição completa do espectro energético e das condições de contorno, permitindo a inclusão de efeitos que não são capturados pelos métodos convencionais.

Finalmente, Salem (2017) estendeu as investigações para o estudo do espalhamento em espaços cônicos, fornecendo perspectivas sobre como a geometria não trivial afeta a matriz de espalhamento e os estados ligados. Esses estudos, em conjunto, ilustram a evolução teórica no tratamento dos potenciais singulares no efeito AB, ressaltando a importância do parâmetro de extensão λ_m na definição do domínio dos Hamiltonianos e na determinação das propriedades quânticas dos sistemas revisados.

O próximo capítulo será dedicado à exposição dos fundamentos matemáticos necessários, conforme estabelecido na literatura, para o tratamento do efeito Aharonov-Bohm em partículas com spin.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, investigam-se com maior profundidade os fundamentos matemáticos que sustentam o uso de extensões auto-adjuntas no contexto da mecânica quântica, com atenção à sua aplicação no efeito AB. Tais conceitos fornecerão a base teórica necessária para a compreensão e análise crítica das diferentes abordagens metodológicas presentes na literatura, discutidas nas seções subsequentes.

3.1 POTENCIAIS SINGULARES

O Hamiltoniano do sistema magnético de Aharonov-Bohm com spin $1/2$ e raio infinitesimal é obtido a partir da formulação canônica para uma partícula carregada em um campo magnético,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{A} = \frac{\phi}{r} \hat{\theta}$ representa o vetor potencial associado ao fluxo magnético confinado na origem e $\mathbf{p}$ o momento magnético. Para partículas com spin, um termo adicional surge devido ao acoplamento do momento magnético ao campo magnético, dado por

$$H_{\text{spin}} = -s\phi \frac{\delta(r)}{r}, \quad (3.2)$$

refletindo a singularidade do campo em $r = 0$. Assim, o Hamiltoniano final incorpora esse termo de interação, resultando em

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - s\phi \frac{\delta(r)}{r} \right], \quad (3.3)$$

onde a função delta representa a localização do fluxo no eixo z .

Esse Hamiltoniano apresenta uma singularidade na origem, decorrente da interação entre o spin e o campo magnético pontual. Em problemas envolvendo potenciais singulares, o Hamiltoniano não é, em geral, auto-adjunto. Isto significa que a condição de integrabilidade das funções de onda, por si só, não é suficiente para garantir um conjunto de autovetores ortonormais.

Como potenciais singulares não são funções analíticas, ou seja, não possuem diferenciabilidade infinita, a aplicação da teoria de perturbações pode ser inadequada nesses casos. De fato, se introduzirmos uma perturbação em um Hamiltoniano singular e permitirmos que o parâmetro associado a essa perturbação tenda a zero, o espectro do Hamiltoniano original pode não ser recuperado – um fenômeno denominado efeito de Klauder (Klauder, 1973).

Existem três abordagens principais para tratar Hamiltonianos singulares:

1. Regularização das singularidades;
2. Renormalização;
3. Extensão auto-adjunta.

Os procedimentos de regularização são simples e intuitivos, mas produzem energias de estado ligado infinitas (Gopalakrishnan; Loinaz, 2006) e diferentes regularizações podem produzir resultados diferentes (Hagen, 1993). A renormalização do potencial correspondente, pode resolver o problema das energias de estado ligado infinitas. A terceira alternativa, e a mais rigorosa matematicamente, é a extensão auto-adjunta de operadores. Para baixas energias, a renormalização e extensão auto-adjunta levam aos mesmo resultados (Gopalakrishnan; Loinaz, 2006).

3.1.1 A função delta de Dirac

A função delta de Dirac, denotada por $\delta(x)$, é uma ferramenta matemática utilizada para representar singularidades em equações diferenciais. Ela é empregada para descrever distribuições infinitamente concentradas, como partículas pontuais ou campos localizados, por exemplo, em uma linha (tubo) de fluxo de raio nulo.

A delta de Dirac é definida de forma a satisfazer:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{para } x \neq 0, \quad (3.4)$$

e a propriedade integral, que caracteriza sua natureza de distribuição, sendo essa integral interpretada no sentido de Lebesgue (Arfken, 1985),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad (3.5)$$

para qualquer função contínua e bem comportada $f(x)$. Note-se que, para que a propriedade integral seja satisfeita, $\delta(x)$ deve assumir um valor infinito em $x = 0$, o que evidencia que a delta de Dirac não é uma função no sentido tradicional, mas uma distribuição no contexto da teoria de distribuições.

Uma maneira útil de representar a delta de Dirac é por meio de sequências de funções que convergem, no sentido das distribuições, para $\delta(x)$ conforme um parâmetro tende ao infinito. Um exemplo comum é a sequência:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad (3.6)$$

a qual, no limite $n \rightarrow \infty$, converge para a delta de Dirac no sentido de distribuições, ou seja, quando integrada em conjunto com funções teste. Fora do ponto $x = 0$, $\delta_n(x) \rightarrow 0$, mas o valor pontual da função não define a distribuição $\delta(x)$, e sim sua ação sobre funções teste por meio da integração.

Além disso, em muitos problemas físicos com simetria radial, é conveniente expressar a função delta de Dirac em coordenadas polares. A versão bidimensional, denotada por $\delta^2(\mathbf{r})$, pode ser escrita como

$$\delta^2(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}. \quad (3.7)$$

Essa formulação é especialmente útil na análise de sistemas com simetria circular, como potenciais centrais ou no estudo do efeito AB, onde a influência do potencial vetor desempenha um papel crucial.

Por fim, ao tratar sistemas quânticos cujo Hamiltoniano envolve a função delta de Dirac bidimensional, recorre-se ao formalismo de extensões auto-adjuntas. Esse método permite lidar de forma rigorosa com as singularidades introduzidas pela delta de Dirac, garantindo que os operadores envolvidos sejam auto-adjuntos e que a descrição matemática do sistema permaneça consistente com os princípios da mecânica quântica.

3.2 QUANTIZAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

Com o intuito de fundamentar o estudo das extensões auto-adjuntas de operadores, consideramos inicialmente os desafios associados à quantização idealizada de sistemas físicos. Por “idealizada”, entende-se a quantização realizada sem uma análise criteriosa dos operadores que representam observáveis físicos. Tal abordagem pode conduzir a inconsistências matemáticas e físicas.

A quantização canônica consiste em promover as variáveis dinâmicas da teoria clássica a operadores em um espaço de Hilbert, estabelecendo uma correspondência entre os parênteses de Poisson e os comutadores quânticos (Sakurai, 1993). A validade de uma dada prescrição de quantização é aferida empiricamente: considera-se satisfatória se as previsões teóricas extraídas do formalismo quantizado forem compatíveis com os resultados experimentais (Landau; Lifshitz, 1977).

Nesse contexto, a constante de Planck, $h \approx 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, estabelece uma escala característica dos fenômenos quânticos. Assim, para que uma prescrição de quantização seja considerada correta, é imprescindível que, no limite de grandes ações (ou $h \rightarrow 0$), os resultados se aproximem dos preditos pela teoria clássica, com o princípio da correspondência, conforme formulado por Bohr (1913) e discutido em (Shankar, 1994).

Conforme os postulados fundamentais da mecânica quântica (Dorobantu, 2006), o estado físico de um sistema é representado por um vetor Ψ em um espaço de Hilbert — cuja definição formal será discutida adiante. Um princípio central dessa formulação é a superposição: se Ψ_1 e Ψ_2 são estados válidos, então qualquer combinação linear $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, também representa um estado físico admissível. Mais geralmente, um estado pode ser expresso como

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots, \quad (3.8)$$

com $\Psi_n \in \mathcal{H}$ e coeficientes complexos $c_n \in \mathbb{C}$, refletindo a estrutura linear do espaço de Hilbert.

Outro postulado fundamental estabelece que, para cada grandeza física mensurável (observável) a , corresponde um operador auto-adjunto A . Exemplos de observáveis incluem posição, momento, energia e momento angular. Operadores auto-adjuntos possuem autovalores reais,

os quais se associam aos valores efetivamente medidos dos observáveis. Ressalta-se que cada operador tem seu domínio definido em um espaço de Hilbert.

Seja A um operador, seu adjunto $A^\dagger$ é definido de modo que

$$(\Psi_1, A^\dagger \Psi_2) = (A \Psi_1, \Psi_2) \quad (3.9)$$

para todo Ψ_1 e Ψ_2 pertencentes ao espaço de Hilbert, em que $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno. Para que um operador seja considerado auto-adjunto, é necessário não somente que a igualdade acima seja satisfeita, mas também que o domínio de A coincida com o domínio de $A^\dagger$. Essa condição é crucial para evitar inconsistências, especialmente quando se lida com operadores não limitados.

De acordo com a prescrição canônica de quantização, há uma correspondência entre os parênteses de Poisson, da mecânica clássica, e os comutadores, na mecânica quântica. Para duas grandezas f e g , os parênteses de Poisson são dados por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right), \quad (3.10)$$

e a correspondência com os comutadores quânticos é expressa por

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (3.11)$$

onde $\hat{f}$ e $\hat{g}$ são os operadores correspondentes a f e g . Dessa correspondência, obtém-se a relação fundamental de comutação entre posição e momento:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (3.12)$$

A interpretação dos estados Ψ é de natureza probabilística, e a evolução temporal desses estados é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$H\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t). \quad (3.13)$$

Em alguns sistemas, a aplicação dos princípios da Mecânica Quântica pode levar a aparentes paradoxos, especialmente quando se lida com operadores não limitados. Tais situações evidenciam a necessidade de recorrer à teoria das extensões auto-adjuntas de operadores para garantir uma formulação matematicamente consistente dos observáveis (Bonneau; Faraut; Valent, 2001).

3.2.1 Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial dotado de um produto interno que satisfaz certas propriedades axiomáticas e que é completo com respeito à norma induzida por esse produto (Jordan, 1969). Essa estrutura generaliza os conceitos da geometria euclidiana para espaços de dimensão infinita, proporcionando uma base robusta para o estudo de funções e operadores lineares.

3.2.1.1 Definição formal

Seja V um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbb{R}$ ou complexos $\mathbb{C}$. Um espaço de Hilbert é definido como o par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um **produto interno** que associa a cada par de vetores $x, y \in V$ um número $\langle x, y \rangle$ pertencente ao corpo subjacente, obedecendo às seguintes propriedades:

1. **Linearidade:** Para $x, y, z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \quad (3.14)$$

Essa propriedade mostra que o produto interno é linear na primeira entrada, garantindo que operações algébricas no espaço vetorial sejam compatíveis com a estrutura do produto interno.

2. **Simetria conjugada:** Para $x, y \in V$,

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad (3.15)$$

significa que o produto interno de dois vetores x e y não muda se trocarmos a ordem dos vetores, desde que também tomemos o conjugado complexo do resultado.

3. **Positividade:** Para todo $x \in V$,

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0. \quad (3.16)$$

Essa propriedade assegura que o produto interno mede a "intensidade" de um vetor de forma coerente, definindo uma noção de tamanho para os elementos do espaço.

O produto interno induz uma **norma** em V , definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Um espaço de Hilbert é, por definição, **completo** em relação a essa norma, isto é, toda sequência de Cauchy em V converge para um elemento de V .

3.2.1.2 Exemplos

Um exemplo fundamental de espaço de Hilbert é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico, definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.17)$$

o qual satisfaz todas as propriedades requeridas e é completo em relação à norma associada. Outro exemplo relevante, especialmente na mecânica quântica, é o espaço de funções quadrado-integráveis $L^2(\mathbb{R})$, onde o produto interno entre duas funções f e g é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (3.18)$$

e a norma associada é dada por

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

3.3 EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS

A formulação tradicional da Mecânica Quântica, tal como apresentada em diversos livros-texto clássicos — por exemplo, *Modern Quantum Mechanics*, de Sakurai e Napolitano (1993) —, frequentemente adota pressupostos ideais sobre os operadores que descrevem os observáveis físicos. No entanto, essa abordagem pode ocultar sutilezas importantes: a escolha arbitrária de condições de contorno nem sempre assegura que os operadores envolvidos sejam auto-adjuntos, o que pode comprometer a consistência matemática do sistema. Em particular, tais omissões podem conduzir a paradoxos físicos ou a interpretações ambíguas dos resultados teóricos.

Na Mecânica Quântica, a distinção entre operadores simétricos (ou hermitianos) e operadores auto-adjuntos é fundamental para a correta descrição dos observáveis físicos. Embora todo operador auto-adjunto seja simétrico, nem todo operador simétrico é auto-adjunto. A diferença crucial reside nos domínios desses operadores.

Um operador A é dito *simétrico* se, para todos os ϕ e ψ em seu domínio $D(A)$, vale:

$$\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle. \quad (3.20)$$

No entanto, para que A seja auto-adjunto, é necessário que $A = A^\dagger$ e que seus domínios coincidam, ou seja, $D(A) = D(A^\dagger)$. Isso significa que o operador não apenas satisfaz a relação de simetria acima, mas também que seu domínio é idêntico ao do seu adjunto.

Essa distinção é particularmente importante no caso de operadores não limitados — que surgem frequentemente na formulação de observáveis como o momento ou a energia — pois, nesses casos, a simetria não garante o caráter auto-adjunto. O domínio do adjunto pode ser estritamente maior que o domínio do operador original, o que impede que o operador represente de forma adequada uma observável física. Portanto, a condição $A = A^\dagger$ não implica, por si só, que $D(A) = D(A^\dagger)$.

Uma extensão auto-adjunta de um operador linear simétrico A , definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, é uma forma de ampliar seu domínio de modo que o operador resultante se torne auto-adjunto. Trata-se de um novo operador que coincide com A onde este está definido, possui o mesmo adjunto formal e estende seu domínio de forma a satisfazer todas as condições de para se tornar auto-adjunto.¹

3.3.1 Índices de deficiência de von Neumann

Os chamados "índices de deficiência", introduzidos no teorema de von Neumann (Neumann, 1929), constituem uma ferramenta central na teoria dos operadores em espaços de Hilbert. Eles permitem caracterizar a possibilidade de se estender um operador simétrico — isto é, um operador cujo domínio é denso mas que pode não ser auto-adjunto — de forma a garantir a autodjunticidade, condição necessária para a interpretação física de observáveis na mecânica quântica.

¹ Para mais detalhes, consultar (BONNEAU; FARAUT; VALENT, 2001).

Seja A um operador linear simétrico definido em um domínio $D(A) \subset \mathcal{H}$, com $\mathcal{H}$ sendo um espaço de Hilbert. A fim de determinar se A admite extensões auto-adjuntas, consideram-se as equações:

$$(A - iI)\psi = 0, \quad (A + iI)\psi = 0. \quad (3.21)$$

As soluções $\psi \in \mathcal{H}$ dessas equações são autovetores associados aos autovalores complexos $\pm i$, — isto é, pertencentes ao espaço de Hilbert — define os chamados índices de deficiência:

$$n_+ = \dim \ker(A - iI), \quad (3.22)$$

$$n_- = \dim \ker(A + iI). \quad (3.23)$$

Esses índices, n_+ e n_- , indicam quantas direções “faltam” para que o operador se torne auto-adjunto, sendo diretamente associados à quantidade de graus de liberdade na escolha de condições de contorno auto-adjuntas. A análise dos índices permite a seguinte classificação:

- Se $n_+ = n_- = 0$, então A é essencialmente auto-adjunto, ou seja, possui uma única extensão auto-adjunta.
- Se $n_+ = n_- > 0$, então A admite uma família (geralmente uniparamétrica) de extensões auto-adjuntas.
- Se $n_+ \neq n_-$, o operador A não admite nenhuma extensão auto-adjunta.

Dessa forma, os índices de deficiência desempenham um papel fundamental na teoria das extensões auto-adjuntas, sendo amplamente utilizados na análise matemática de operadores diferenciais singulares e problemas quânticos que envolvem condições de contorno não triviais.

3.4 MÉTODO BULLA-GESZTESY

O tratamento rigoroso de Hamiltonianos singulares com interações pontuais foi sistematizado por Bulla e Gesztesy (1985), cujo formalismo estabeleceu as condições de contorno necessárias para que tais operadores sejam auto-adjuntos. Essa abordagem destaca-se por permitir a inclusão de um número infinito de interações pontuais, possibilitando a obtenção de soluções analíticas bem definidas (Albeverio et al., 2004). A formulação proposta fornece uma estrutura matemática robusta para lidar com operadores que não são essencialmente auto-adjuntos, especialmente em sistemas com potenciais que apresentam comportamentos divergentes na origem.

No Capítulo 4, veremos uma aplicação do teorema de Bulla-Gesztesy (BG) ao sistema de AB, onde a presença de uma singularidade no potencial vetor requer um tratamento cuidadoso das condições de contorno. Segundo esse teorema, todas as extensões auto-adjuntas de um Hamiltoniano h da forma

$$h_\zeta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell-1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\alpha}{r^{-a}} + W, \quad (3.24)$$

possuem domínio

$$\mathcal{D}(h_\zeta) = \left\{ g(r) \in L^2((0, \infty)) \mid g, g' \in AC_{\text{loc}}((0, \infty)); \right. \\ \left. -g'' + \frac{\ell(\ell-1)}{r^2}g + \frac{\gamma}{r}g + \frac{\alpha}{r^{-a}}g \in L^2((0, \infty)) \right\}, \quad (3.25)$$

onde $AC_{\text{loc}}((0, \infty))$ indica funções absolutamente contínuas localmente², e devem satisfazer a condição de contorno

$$\zeta g_{0,\ell} = g_{1,\ell}, \quad (3.26)$$

com

$$-\infty < \zeta \leq \infty, \quad \frac{1}{2} \leq \ell < \frac{3}{2}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 2. \quad (3.27)$$

O termo $g_{0,\ell}$ é definido como

$$g_{0,\ell} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g(r)}{G_\ell^{(0)}(r)}, \quad (3.28)$$

e $g_{1,\ell}$ como

$$g_{1,\ell} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{g(r) - g_{0,\ell} G_\ell^B(r)}{F_\ell^{(0)}(r)} \right]. \quad (3.29)$$

As funções $F_\ell^{(0)}(r)$ e $G_\ell^{(0)}(r)$ são dadas por

$$F_\ell^{(0)}(r) = r^\ell, \quad (3.30)$$

e

$$G_\ell^{(0)}(r) = \begin{cases} -r^{1/2} \ln(r), & \text{se } \ell = \frac{1}{2}, \\ \frac{r^{1-\ell}}{(2\ell-1)}, & \text{se } \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Aqui, $G_\ell^{(0)}(r)$ representa a expansão assintótica de $G_\ell(r)$ quando $r \rightarrow 0^+$ até a ordem r^t , com $t \leq 2\ell - 1$.

Não é possível garantir que um operador seja auto-adjunto para uma escolha arbitrária de condições de fronteira, especialmente em sistemas com potenciais singulares ou domínios com descontinuidades. Nesses casos, diferentes escolhas de condições de contorno podem levar a diferentes extensões auto-adjuntas, cada uma associada a um conjunto distinto de soluções físicas. Essa ambiguidade motiva a busca por critérios físicos adicionais que permitam selecionar, entre todas as extensões possíveis, aquela que melhor representa o sistema em questão.

Na próxima seção, veremos uma abordagem alternativa que permite fixar essas condições com base em argumentos físicos, por meio da correspondência entre o sistema idealizado e uma versão regularizada do problema.

² Funções absolutamente contínuas são aquelas que podem ser recuperadas integralmente a partir de sua derivada integrável, apresentando continuidade e diferenciabilidade quase em todo ponto de seu domínio.

3.5 MÉTODO KAY-STUDER

No estudo das extensões auto-adjuntas aplicadas a sistemas quânticos com potenciais singulares, um avanço significativo foi proposto por Kay e Studer (1991), que analisaram as condições de contorno adequadas para garantir uma formulação matematicamente consistente em geometrias não triviais, como os espaços cônicos — dos quais o espaço plano surge como um caso particular. Entre os problemas discutidos, destacam-se os sistemas do tipo AB em duas dimensões, que envolvem a presença de um campo magnético confinado e a necessidade de tratar singularidades no potencial.

Para um sistema AB bidimensional (um anel de raio r_0 , com uma região interna e outra externa), o método de Kay-Studer é aplicado da seguinte forma:

1. O Hamiltoniano singular correspondente ao sistema AB é substituído por um Hamiltoniano regularizado, ou seja, onde são desconsideradas as singularidades.
2. As equações definidoras do espaço de deficiência são resolvidas para o operador regularizado.
3. As soluções obtidas a partir das equações do espaço de deficiência são utilizadas para completar o conjunto de soluções do sistema, especialmente na região próxima ao ponto singular (o centro do anel).
4. A condição de contorno imposta às funções de onda consiste em igualar as derivadas logarítmicas das soluções gerais às derivadas das soluções associadas à energia zero, garantindo assim o caráter auto-adjunto do operador na origem.

A condição final é expressa matematicamente como:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \frac{r_0}{f_0} \left(\frac{df_0}{dr} \right) \bigg|_{r=r_0} = \lim_{r_0 \rightarrow 0^+} \frac{r_0}{f_\rho} \left(\frac{df_\rho}{dr} \right) \bigg|_{r=r_0}. \quad (3.31)$$

Aqui, f_ρ representa as soluções completas da equação diferencial (obtidas conforme o procedimento descrito), e f_0 as soluções para o caso de energia zero. Tais condições asseguram que o operador Hamiltoniano seja auto-adjunto, garantindo a consistência da descrição quântica.

A aplicação do método Kay-Studer em problemas como o efeito AB destaca a importância das extensões auto-adjuntas em contextos quânticos com singularidades. No entanto, para prosseguir com este trabalho, é necessário primeiramente discutir alguns dos princípios físicos fundamentais que sustentam essas análises, o que será abordado nas próximas seções.

3.6 PARTÍCULAS SPIN 1/2

A crescente complexidade dos fenômenos atômicos observados no início do século XX demandou modelos teóricos mais refinados. Em 1925, Wolfgang Pauli publicou dois artigos

fundamentais sobre os espectros de múltiplos em átomos alcalinos e alcalino-terrosos, nos quais propôs a introdução de um quarto número quântico para a caracterização completa do elétron (Pauli, 1925). Inicialmente, esses números foram denominados: o número quântico principal n , que representa a energia do elétron; o número quântico azimutal k (atualmente denotado por l), que representa a quantização da órbita eletrônica; o número quântico magnético m_1 (atualmente denotado por m), que representa a quantização do plano da órbita; e um quarto número quântico magnético m_2 , que Pauli associou a uma propriedade quântica intrínseca, descrevendo-a como “uma duplicidade não-descritível classicamente” (Pauli, 1927).

A hipótese de que o quarto número quântico de Pauli estaria associado a uma “rotação intrínseca do elétron”, atualmente denominada spin, foi proposta por Goudsmit e Uhlenbeck (1925). Baseando-se no experimento de Stern–Gerlach (Gerlach; Stern 1922), esses autores sugeriram que o spin do elétron poderia assumir dois valores discretos: $\pm\hbar/2$, conhecidos como spin up (para cima) e spin down (para baixo).

Uma versão modificada da equação de Schrödinger, incorporando o spin do elétron de forma ad hoc, foi apresentada por Pauli e Charles Darwin em 1927, em publicações independentes.^{3,4} Essa inclusão revelou-se fundamental para o avanço da mecânica quântica, possibilitando uma compreensão mais aprofundada dos estados eletrônicos e das propriedades magnéticas das partículas subatômicas.

3.7 A EQUAÇÃO DE PAULI

Com o objetivo de descrever o movimento do elétron em um campo eletromagnético, Pauli (1927), postulou que o elétron deveria obedecer à equação de Schrödinger então conhecida:

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.32)$$

O Hamiltoniano correspondente é expresso na forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \left[\hat{\sigma} \cdot \left(\hat{p} - e\hat{A} \right) \right]^2 + e\phi, \quad (3.33)$$

onde $\hat{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, $\hat{p}$ é o operador momento, e é a carga do elétron, $\hat{A}$ é o vetor potencial e ϕ é o potencial escalar.

As matrizes de Pauli são três matrizes 2×2 hermitianas que representam os operadores de spin em mecânica quântica, dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

³ DARWIN, C. G. The electron as a vector wave. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 116, n. 773, p. 227–253, 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0134>>. Acesso em: 20 set. 2024.

⁴ PAULI, W. Über gasentartung und paramagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 41, n. 2, p. 81–102, 1927.

Considerando que as matrizes de Pauli atuam sobre a função de onda, sendo representada por um vetor coluna (o chamado *spinor de Pauli*), dado por:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

No spinor de Pauli, $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ denota a amplitude de probabilidade de se observar o valor $+\frac{\hbar}{2}$ (spin up), enquanto $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ representa a amplitude de probabilidade de se observar $-\frac{\hbar}{2}$ (spin down). Como cada componente é uma função em $\mathbb{R}^3$, o problema está formulado em um espaço de Hilbert infinito-dimensional, especificamente em $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ (Sakurai, 1993), refletindo a natureza contínua do espaço físico em que o elétron se propaga.

A normalização do spinor exige que a soma das probabilidades associadas a cada componente seja igual a 1, isto é:

$$\int |\psi_1(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r + \int |\psi_2(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 1. \quad (3.36)$$

Essa condição garante que a função de onda esteja devidamente normalizada, refletindo a probabilidade total de encontrar o elétron em qualquer estado do espaço.

Além disso, a representação matricial da função de onda permite considerar as interações entre as diferentes componentes do spinor. As matrizes de Pauli, que aparecem na formulação do Hamiltoniano, introduzem os efeitos das interações magnéticas no sistema, influenciando a dinâmica dos spins do elétron. Tais interações são fundamentais para a compreensão de fenômenos como o efeito Zeeman e a ressonância magnética.

A equação de Pauli pode ser interpretada como o limite não-relativístico da equação de Dirac para férmions com spin.

3.8 RELATIVIDADE RESTRITA

Antes de analisarmos o efeito AB no próximo capítulo, sob uma perspectiva que parte da relatividade restrita, faz-se necessário retomar os princípios fundamentais. Essa teoria, formulada por Albert Einstein em 1905, surgiu como uma resposta à incompatibilidade entre as transformações da mecânica clássica e as equações do eletromagnetismo de Maxwell. A relatividade restrita reformula a noção de espaço e tempo, introduzindo as transformações de Lorentz como substitutas das transformações de Galileu, assegurando que as leis da física — em particular, as leis do eletromagnetismo — sejam invariantes em todos os referenciais inerciais. Essa base conceitual é essencial para compreendermos como o eletromagnetismo e seus potenciais se comportam em regimes relativísticos, aspecto central para a formulação completa do efeito AB.

De acordo com as transformações de Galileu, as coordenadas de um evento (x, y, z, t) em um referencial inercial O e (x', y', z', t') em outro referencial inercial, em movimento com velocidade relativa constante, são dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & y' &= y, \\ z' &= z, & t' &= t. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Embora as leis de Newton sejam invariantes sob transformações de Galileu, as leis de Maxwell, que descrevem o eletromagnetismo, não o são⁵. Para resolver essa discrepância, as transformações de Lorentz foram introduzidas (Einstein, 1905), garantindo a invariância das equações de Maxwell em diferentes referenciais inerciais:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & y' &= y, \\ z' &= z, & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A Relatividade restrita resolve a incompatibilidade entre a mecânica clássica e o eletromagnetismo ao estender o princípio da relatividade para incluir as transformações de Lorentz. Essa teoria, formulada por Albert Einstein em 1905, baseia-se em dois postulados fundamentais:

1. **Princípio da relatividade:** As leis da física são as mesmas para todos os observadores em movimento retilíneo uniforme, não havendo um referencial inercial privilegiado.
2. **Constância da velocidade da luz:** A velocidade da luz no vácuo, c , é constante para todos os observadores inerciais, independentemente da velocidade da fonte ou do observador.

Enquanto o primeiro postulado já era conhecido na mecânica clássica, o segundo representou uma inovação crucial trazida por Einstein.

Uma das consequências mais notáveis da relatividade restrita é que o conceito de simultaneidade não é absoluto; dois eventos simultâneos em um referencial podem não ser simultâneos em outro.

Na mecânica clássica, o intervalo entre dois eventos é dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.39)$$

No entanto, esse intervalo não é invariante sob transformações de Lorentz (Schutz, 2009). Para obter um intervalo invariante, introduz-se o *intervalo de Minkowski*:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.40)$$

Outra forma equivalente de expressar esse intervalo é:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.41)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico de Minkowski, cujas componentes são

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

⁵ Referências adicionais sobre esse desenvolvimento podem ser encontradas em (Rindler, 2006; Misner; Thorne; Wheeler, 1973).

A assinatura da métrica de Minkowski pode ser expressa como $(+ - - -)$ ou $(- + + +)$, dependendo da convenção adotada.

Utilizando a notação de Einstein, onde índices repetidos implicam somatório, a expressão do intervalo pode ser escrita de forma compacta como:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.43)$$

com os índices α, β variando de 0 a 3, enquanto letras latinas são frequentemente utilizadas para denotar somatórios apenas sobre as dimensões espaciais (de 1 a 3).

Além da modificação na noção de espaço-tempo, a energia de uma partícula também sofre alterações no contexto relativístico. Para uma partícula de massa m , como o elétron, a relação entre a energia total E e a energia cinética não relativística ε é dada por:

$$E = mc^2 + \varepsilon. \quad (3.44)$$

Essa expressão evidencia a famosa relação $E = mc^2$, que demonstra a equivalência entre massa e energia, sendo aplicável inclusive a partículas em repouso. Tal contribuição é incorporada de forma natural na formulação da equação de Dirac, discutida a seguir.

3.9 EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Schrödinger, embora bem-sucedida na descrição de uma ampla gama de fenômenos quânticos em baixas velocidades, é formulada no contexto da mecânica não relativística. Como tal, ela não incorpora os postulados da relatividade restrita, discutidos na seção anterior. Em particular, ela trata o tempo e o espaço de forma assimétrica — uma característica incompatível com o espaço-tempo de Minkowski, onde todas as coordenadas devem ser tratadas de maneira equivalente (Bjorken; Drell, 1964).

Essa assimetria é evidente na estrutura da equação:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t), \quad (3.45)$$

na qual as derivadas espaciais aparecem em segunda ordem, enquanto a derivada temporal é de primeira ordem. Isso indica que o tempo funciona apenas como um parâmetro externo de evolução, em contraste com os princípios da relatividade, que requerem uma formulação covariante sob transformações de Lorentz.

Essa limitação motivou a busca por uma equação de onda compatível com a relatividade restrita, levando inicialmente à formulação da equação de Klein–Gordon:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x, t) = 0, \quad (3.46)$$

a qual é relativisticamente invariante, mas apresenta dificuldades interpretativas quando aplicada a partículas com spin $1/2$, como o elétron.

Em 1928, Paul Dirac propôs uma nova equação que satisfazia simultaneamente os princípios da mecânica quântica e da relatividade, além de incorporar naturalmente o spin (Dirac, 1928):

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x,t) = 0. \quad (3.47)$$

Nesta equação, $\psi(x,t)$ é um *spinor de Dirac*, um vetor de quatro componentes que representa estados quânticos com spin $1/2$. As matrizes γ^μ são matrizes 4×4 que satisfazem as relações de anticomutação da álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I_4, \quad (3.48)$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski e I_4 é a matriz identidade 4×4 .

A equação de Dirac, além de descrever corretamente o comportamento de partículas relativísticas com spin, também prevê naturalmente a existência de antipartículas — uma previsão notável que seria confirmada experimentalmente com a descoberta do pósitron por Carl Anderson em 1932.⁶

3.10 A MATRIZ S NA TEORIA DE ESPALHAMENTO

Na teoria quântica de espalhamento, busca-se descrever a evolução de um sistema físico quando uma partícula livre incide sobre uma região onde há uma interação — como um potencial ou campo — e, em seguida, emerge para uma região onde novamente se comporta como livre. Nesse contexto, considera-se que o sistema é preparado em um estado assintoticamente livre no passado remoto ($t \rightarrow -\infty$) e que, após a interação com o potencial, evolui para outro estado assintoticamente livre no futuro distante ($t \rightarrow +\infty$).

A transição entre esses dois estados é descrita pelo operador de espalhamento S , que encapsula todas as informações da interação. Em particular, ele relaciona diretamente os estados iniciais (antes da interação) aos estados finais (após a interação), ambos pertencentes ao espaço de Hilbert dos estados livres. A amplitude de transição entre um estado de entrada ϕ e um estado de saída ψ é então dada pelo produto interno:

$$S_{\psi\phi} = (\psi, \phi). \quad (3.49)$$

Essa amplitude mede a probabilidade de que a partícula preparada no estado ϕ seja detectada no estado ψ após o processo de espalhamento. O conjunto completo dessas amplitudes define a chamada matriz S , que é unitária (preserva a norma dos estados) e desempenha papel central na formulação da teoria de espalhamento. Sua análise permite extrair informações sobre o comportamento da partícula após a interação, como se ela foi desviada, refletida ou transmitida, além de possibilitar o estudo de estruturas espectrais como estados ligados e ressonâncias.

O conjunto de todas essas amplitudes define a chamada matriz S , que é unitária e contém todas as informações sobre o processo de espalhamento (Weinberg, 1995). Além disso, os polos

⁶ ANDERSON, C. D. The positive electron. *Physical Review*, v. 43, n. 6, p. 491–494, 1933.

da matriz S no plano complexo da energia estão associados à presença de estados ligados ou ressonâncias, conforme discutido em (Taylor, 1972).

No caso de sistemas com simetria cilíndrica, como no problema do efeito AB, é natural decompor a função de onda em modos com momento angular definido. Para cada valor de m , a matriz S pode ser parametrizada como:

$$S_m = e^{2i\delta_m}, \quad (3.50)$$

em que δ_m representa a fase de espalhamento associada ao modo m (Andrade; Silva; Pereira, 2013). Essa fase reflete a alteração sofrida pela função de onda devido à presença do potencial, em comparação com o caso livre.

No capítulo seguinte, essa estrutura será utilizada para determinar a matriz de espalhamento de partículas de spin $1/2$ no contexto do efeito AB, incorporando contribuições do momento magnético anômalo. A análise será feita com base nas extensões auto-adjuntas do Hamiltoniano, cuja escolha influencia diretamente o valor das fases δ_m , e portanto a forma funcional da matriz S . Tal abordagem permite descrever de forma precisa os efeitos da interação singular na origem, bem como os estados ligados emergentes.

4 SOLUÇÃO DO SISTEMA AB COM O USO DAS EXTENSÕES

Neste capítulo, analisaremos essa abordagem de extensões auto-adjuntas na origem para investigar o problema de uma partícula imersa em um potencial central. Inicialmente, derivaremos a equação de Dirac, conforme discutido no Capítulo 3, e, em seguida, tomaremos o limite não-relativístico, de modo a obter uma equação do tipo Schrödinger–Pauli. Tal procedimento é especialmente útil para sistemas nos quais o spin da partícula desempenha um papel relevante, como no caso da interação com campos magnéticos confinados.

Essa estratégia possibilita a aplicação do formalismo de extensões auto-adjuntas, conforme apresentado por Andrade, Silva e Pereira (2013) e Costa (2016), permitindo extrair informações cruciais sobre o comportamento do sistema. Em particular, ela fornece uma estrutura matemática consistente para tratar as ambiguidades na definição do domínio do Hamiltoniano associadas a potenciais singulares, possibilitando a caracterização de estados ligados, bem como modificações na matriz de espalhamento decorrentes da presença do momento magnético anômalo.

4.1 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Partindo da equação de Dirac para uma partícula livre,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \quad (4.1)$$

utilizamos unidades naturais ($\hbar = c = 1$), o que simplifica as constantes físicas e facilita a manipulação das expressões. Aqui, Ψ é o spinor de Dirac (com quatro componentes), que representa o estado quântico relativístico da partícula de spin 1/2, e os índices repetidos implicam a soma sobre $\mu = 0, 1, 2, 3$, correspondendo às componentes espaço-temporais.

Para modelar a interação da partícula com um campo eletromagnético, introduzimos o chamado acoplamento mínimo, que consiste na substituição das derivadas parciais por derivadas covariantes:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (4.2)$$

onde e é a carga elétrica da partícula e A_μ é o potencial eletromagnético de quatro componentes. Essa substituição garante que a equação de Dirac mantenha a invariância gauge sob transformações locais do campo eletromagnético.

Com essa modificação, a equação (4.1) passa a descrever a dinâmica da partícula carregada em presença do campo eletromagnético, resultando em

$$\left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ieA_\mu \right) - m \right] \Psi = 0. \quad (4.3)$$

Esta é a equação de Dirac que descreve o efeito AB em um contexto relativístico.

Além do acoplamento mínimo, é possível incorporar correções mais sutis relacionadas ao momento magnético anômalo da partícula, que representam desvios do momento magnético esperado para um elétron livre devido a efeitos de interação radiativa e renormalização. Costa

(2016) introduz essa correção por meio de um termo adicional de acoplamento spin-campo, dado por

$$-a \frac{\mu_B}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

onde a é o parâmetro anômalo (geralmente muito pequeno, mas relevante para precisão teórica), μ_B é o magneton de Bohr, $\sigma^{\mu\nu}$ é o tensor definido por

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (4.5)$$

e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de campo eletromagnético, que contém as componentes dos campos elétrico e magnético.

Dessa forma, a equação de Dirac modificada que descreve a partícula carregada com momento magnético anômalo no campo eletromagnético torna-se

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m - a \frac{\mu_B}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \Psi = 0. \quad (4.6)$$

Essa formulação é essencial para a análise mais precisa dos efeitos do spin e da interação magnética no contexto do efeito Aharonov–Bohm, especialmente quando se deseja incorporar correções além do acoplamento mínimo padrão.

Para avançar na resolução prática da equação, é necessário escolher uma representação explícita das matrizes γ^μ e decompor o spinor de quatro componentes em componentes mais manejáveis. A redução do sistema de quatro equações para um sistema equivalente, porém com duas equações efetivas, é detalhada no Apêndice A, onde são apresentadas as manipulações algébricas e as considerações físicas envolvidas.

Esse tratamento estabelece as bases para a análise da dinâmica relativística da partícula no contexto do efeito AB. Contudo, neste trabalho, o foco principal está no limite não-relativístico, que será tratado nas próximas seções.

4.2 REDUÇÃO DIMENSIONAL DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Considerando a forma geral

$$\left[i\gamma^0 (\partial_t + ie\phi) + i\boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\nabla} + ie\mathbf{A}) - m - a \frac{\mu_B}{2} \sigma^{ij} F_{ij} \right] \Psi = 0, \quad (4.7)$$

e observando que, para o sistema em análise, não há campo elétrico (ou seja, $\phi = A_0 = 0$) e o campo magnético está orientado na direção z , o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ adquire a forma padrão, com $E_i = 0$ e apenas $B_3 \neq 0$.

Multiplicando a Eq. (4.7) por $-\gamma^0$ e reorganizando os termos, obtemos a forma estacionária:

$$\left\{ \gamma^0 \gamma^i (-i\partial_i + eA_i) + \gamma^0 m - a \frac{\mu_B}{2} i\gamma^0 [\gamma^1, \gamma^2] B_3 \right\} \Psi = E\Psi, \quad (4.8)$$

na qual identificamos $i\partial_0$ com o operador energia E para estados estacionários e definimos o momento cinético $\Pi_i = -i\partial_i + eA_i$.

Devido à simetria planar do problema (campo magnético apenas na direção z), procuramos soluções que satisfaçam $\Pi_3\Psi = 0$, permitindo a redução do sistema para duas dimensões.

4.2.1 Redução para o problema bidimensional

Após manipulações matriciais detalhadas no Apêndice B, a equação de Dirac original, composta por quatro equações acopladas, pode ser reduzida a dois sistemas de duas equações diferenciais. Essa redução é possível graças à simetria do problema e à separação entre os graus de liberdade longitudinais e transversais, típica em contextos com geometrias efetivamente bidimensionais.

Para isso, introduz-se o parâmetro s , associado ao dobro do spin da partícula, e define-se a notação:

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_1, & s = 1, \\ \Psi_4, & s = -1, \end{cases} \quad \Psi_b = \begin{cases} \Psi_2, & s = 1, \\ \Psi_3, & s = -1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Com essa identificação, obtém-se um sistema efetivamente bidimensional para as componentes relevantes do spinor, que pode ser expresso de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_B B_3 + m - E & \Pi_1 - is\Pi_2 \\ \Pi_1 + is\Pi_2 & -sa\mu_B B_3 - m - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = 0. \quad (4.10)$$

Esse sistema descreve de forma efetiva a dinâmica da partícula carregada com spin em duas dimensões, incluindo os efeitos do campo magnético externo, do momento magnético anômalo (por meio do parâmetro a) e da estrutura do operador momento cinético $\Pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. Essa forma reduzida será a base para o tratamento no limite não-relativístico, discutido a seguir.

4.3 LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO

Para obter a equação no limite não-relativístico, partimos da suposição de que a energia total da partícula pode ser escrita como

$$E = m + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll m, \quad (4.11)$$

onde ε representa a energia cinética não-relativística. Isso implica que a diferença entre a massa de repouso e a energia total é

$$m - E = -\varepsilon. \quad (4.12)$$

Além disso, consideramos que os termos $sa\mu_B B_3$, associados ao acoplamento entre spin e campo magnético, são pequenos frente à massa m , o que nos permite a seguinte aproximação:

$$-sa\mu_B B_3 - m - E \approx -2m. \quad (4.13)$$

Com isso, o sistema de equações reduzido da Seção anterior, dado por (4.10), assume a forma:

$$\begin{pmatrix} -sa\mu_B B_3 - \varepsilon & \Pi_1 - is\Pi_2 \\ \Pi_1 + is\Pi_2 & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = 0. \quad (4.14)$$

Esse sistema descreve a dinâmica efetiva de uma partícula carregada e com spin em regime não-relativístico. Em forma escalar, o sistema equivale a:

$$\begin{cases} (-sa\mu_B B_3 - \varepsilon)\Psi_a + (\Pi_1 - is\Pi_2)\Psi_b = 0, \\ (\Pi_1 + is\Pi_2)\Psi_a - 2m\Psi_b = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Eliminando a componente Ψ_b , que é subdominante no limite não-relativístico, obtemos:

$$\left[-sa\mu_B B_3 - \varepsilon + \frac{1}{2m}(\Pi_1 - is\Pi_2)(\Pi_1 + is\Pi_2) \right] \Psi_a = 0. \quad (4.16)$$

A multiplicação matricial do operador momento cinético leva ao resultado

$$(\Pi_1 - is\Pi_2)(\Pi_1 + is\Pi_2) = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + is[\Pi_1, \Pi_2], \quad (4.17)$$

com o comutador dado por

$$[\Pi_1, \Pi_2] = ieB_3, \quad (4.18)$$

onde B_3 é o componente do campo magnético perpendicular ao plano. Substituindo esses resultados, a equação para Ψ_a torna-se:

$$\left[-sa\mu_B B_3 - \varepsilon + \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_3) \right] \Psi_a = 0. \quad (4.19)$$

Considerando a definição do magneton de Bohr,

$$\mu_B = \frac{e}{2m}, \quad (4.20)$$

e modelando o campo magnético do sistema de Aharonov-Bohm como concentrado em uma linha, temos:

$$eB_3 = \frac{e\Phi_0}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} - \phi \frac{\delta(r)}{r}, \quad \text{com } \phi := \frac{e\Phi_0}{2\pi}. \quad (4.21)$$

Com essas substituições, a equação final assume a forma de uma equação de Schrödinger-Pauli com potencial singular:

$$\frac{1}{2m} \left[(-i\nabla - e\mathbf{A})^2 + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right] \Psi_a = \varepsilon \Psi_a, \quad (4.22)$$

na qual η é a constante que governa o acoplamento entre o spin e o fluxo magnético:

$$\eta = (1 + a)s\phi + \frac{g}{2}s\phi, \quad (4.23)$$

sendo g o fator giromagnético, responsável por possíveis correções anômalas no momento magnético.

A equação (4.22) descreve a dinâmica de uma partícula com spin 1/2 sujeita a um potencial do tipo Aharonov-Bohm, no regime não-relativístico. Embora deduzida para a componente Ψ_a , sabe-se que a equação correspondente para Ψ_b é obtida simplesmente pela substituição $s \rightarrow -s$. Assim, a análise de Ψ_a é suficiente para capturar toda a física do sistema.¹

¹ Os detalhes da redução, manipulação das matrizes γ^μ , eliminação de Ψ_b e os cálculos dos comutadores estão disponíveis nos Apêndices A e B.

4.4 DECOMPOSIÇÃO DA FUNÇÃO DE ONDA

Nesta seção, a função de onda Ψ_a é decomposta em autofunções da componente angular, associadas à componente z do momento angular. Primeiramente, expandimos o operador Hamiltoniano na forma

$$\begin{aligned} 2m\varepsilon \Psi_a &= \left[(-i\nabla - e\mathbf{A})^2 + \eta \frac{\delta(r)}{r} \right] \Psi_a \\ &= -\nabla^2 \Psi_a - \frac{e}{i} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi_a - \frac{e}{i} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Psi_a + (e\mathbf{A})^2 \Psi_a + \eta \frac{\delta(r)}{r} \Psi_a, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde definimos $k^2 = 2m\varepsilon$ e usamos o gauge de Coulomb², impomos a condição

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.25)$$

que, no contexto do efeito AB, é satisfeita quando o potencial assume a forma

$$e\mathbf{A} = -\frac{\phi}{r} \hat{\phi}, \quad (4.26)$$

a Eq. (4.24) pode ser reescrita como

$$-\nabla^2 \Psi_a + \frac{2\phi}{i r} \hat{\phi} \cdot \nabla \Psi_a + \eta \frac{\delta(r)}{r} \Psi_a = k^2 \Psi_a. \quad (4.27)$$

Em coordenadas polares (r, φ) , a função de onda Ψ_a pode ser expandida em autofunções do momento angular:

$$\Psi_a(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\varphi}. \quad (4.28)$$

Como as funções $e^{im\varphi}$ formam um conjunto linearmente independente, cada componente $f_m(r)$ deve satisfazer uma equação radial.

Após substituir Ψ_a da Eq. (4.28) em (4.27) e separar as variáveis (os detalhes completos da dedução estão disponíveis no Apêndice D), chega-se à seguinte equação radial:

$$-\frac{d^2 f_m}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_m}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} f_m(r) + \eta \frac{\delta(r)}{r} f_m(r) = k^2 f_m(r). \quad (4.29)$$

Assim, a equação pode ser reescrita de forma compacta como

$$h f_m(r) = k^2 f_m(r), \quad (4.30)$$

onde o Hamiltoniano radial h é dado por

$$h = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2} + \eta \frac{\delta(r)}{r}. \quad (4.31)$$

Note que o operador h possui uma singularidade na origem, em virtude do termo $\delta(r)/r$. Para tratar essa singularidade, definimos o operador h_0 , que é obtido excluindo a contribuição delta:

$$h_0 = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + \phi)^2}{r^2}. \quad (4.32)$$

O Hamiltoniano h é, então, interpretado como uma das possíveis extensões auto-adjuntas de h_0 , cuja escolha é determinada pelo parâmetro de extensão λ_m .

² Para mais detalhes sobre o gauge de Coulomb, consulte obras clássicas em mecânica quântica como (SAKURAI, 1993).

4.5 EXTENSÃO AUTO-ADJUNTA PELO MÉTODO DE BULLA-GESZTESY

O teorema de Bulla-Gesztesy é aplicado para determinar condições de contorno que garantam a auto-adjunticidade do operador h , bem como para estabelecer a relação entre o parâmetro de extensão λ_m e as energias de estado ligado do sistema.

4.5.1 Hamiltoniano e condição de contorno

Considerando a transformação unitarizadora

$$Uf(r) = r^{1/2}f(r), \quad (4.33)$$

podemos reescrever o operador h_0 como

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 &= Uh_0U^{-1} \\ &= -\frac{d^2}{dr^2} + \left[(m + \phi)^2 - \frac{1}{4} \right] \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

o que permite uma identificação direta com a forma geral dos operadores analisados por Bulla e Gesztesy:

$$h_\zeta = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell - 1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\alpha}{r^{-a}} + W. \quad (4.35)$$

Comparando as expressões, obtemos

$$\ell(\ell - 1) = (m + \phi)^2 - \frac{1}{4}. \quad (4.36)$$

A solução dessa equação quadrática fornece duas possibilidades:

$$\ell = \frac{1}{2} \pm |m + \phi|.$$

Escolhemos a solução

$$\ell = \frac{1}{2} + |m + \phi|, \quad (4.37)$$

pois é a que conduz à imposição correta da condição de contorno física na origem, conforme discutido em Park e Oh (1994).

A aplicação do teorema de Bulla-Gesztesy requer que o operador considerado não seja essencialmente auto-adjunto. Segundo os critérios de análise espectral (Reed; Simon, 1975), isso ocorre quando

$$\ell(\ell - 1) < \frac{3}{4}. \quad (4.38)$$

Substituindo a escolha (4.37), temos a condição

$$(m + \phi)^2 < 1, \quad (4.39)$$

ou seja, a não essencial auto-adjunticidade está presente para $|m + \phi| < 1$. Nessa faixa, o domínio do operador pode ser estendido por meio de condições adicionais de contorno, sendo nesse caso viável a aplicação do formalismo de extensões auto-adjuntas.

A condição de contorno introduzida por Bulla e Gesztesy assume a forma

$$f^{(0)} = \lambda_m f^{(1)}, \quad (4.40)$$

em que os coeficientes $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$ caracterizam, respectivamente, os comportamentos dominante e subdominante da função de onda na vizinhança da origem. São definidos por:

$$f^{(0)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{|m+\phi|} \chi(r), \quad (4.41)$$

$$f^{(1)} := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{|m+\phi|}} [\chi(r) - f^{(0)}], \quad (4.42)$$

sendo $\chi(r) := \frac{g(r)}{r^{1/2}}$ a função obtida após a transformação unitarizadora. O parâmetro real λ_m especifica a extensão auto-adjunta escolhida dentro da família admissível. Essa condição de contorno relaciona o comportamento regular e singular da função de onda na origem, parametrizando, assim, as diferentes possibilidades físicas para o sistema, associando-as a distintos regimes de curto alcance e determinando propriedades espectrais específicas, como a existência de estados ligados.

4.5.2 Energias de estado ligado

Para determinar as energias de estado ligado, partimos da equação diferencial radial associada ao Hamiltoniano h_0 :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m+\phi)^2}{r^2} - k^2 \right] f_m(r) = 0, \quad (4.43)$$

ou, equivalentemente, ao redefinirmos a variável kr , obtemos:

$$\left[\frac{d^2}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} + 1 - \frac{(m+\phi)^2}{(kr)^2} \right] f_m(r) = 0. \quad (4.44)$$

A Eq. (4.44) é a equação diferencial de Bessel. Trata-se de uma equação bem estudada na literatura matemática e física, e uma de suas formas mais usuais de solução geral é dada por

$$f_m(r) = a_m J_v(kr) + b_m Y_v(kr), \quad (4.45)$$

onde $J_v(z)$ e $Y_v(z)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, com $v = |m + \phi|$. A constante a_m controla a contribuição regular da solução, enquanto b_m está associada ao termo singular no centro.

Para aplicar a condição de contorno (4.40), utilizam-se as expansões assintóticas para $z \rightarrow 0$, apresentadas em (Abramowitz; Stegun, 1964):

$$J_v(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}, \quad (4.46)$$

$$Y_v(z) \approx -\frac{1}{\pi} \Gamma(v) \left(\frac{2}{z}\right)^v, \quad (v \neq 0). \quad (4.47)$$

Essas expressões revelam o comportamento das soluções próximas da origem, permitindo identificar qual combinação linear é fisicamente aceitável de acordo com a condição de contorno escolhida.

Dessa forma, definindo o coeficiente associado ao termo dominante na origem por

$$f^{(0)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^v f_m(r), \quad (4.48)$$

obtem-se, após alguma manipulação algébrica (os detalhes completos encontram-se no Apêndice C),

$$f^{(0)} = \frac{b_m}{\text{sen}(\pi v)} \left(\frac{2}{k} \right)^v \frac{1}{\Gamma(1-v)}. \quad (4.49)$$

Analogamente, a constante associada ao termo subdominante, $f^{(1)}$, é dada por:

$$f^{(1)} = a_m \left(\frac{k}{2} \right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)} + \frac{b_m}{\text{sen}(\pi v)} \left(\frac{k}{2} \right)^v \frac{\cos(\pi v)}{\Gamma(v+1)}. \quad (4.50)$$

Esses dois coeficientes caracterizam, respectivamente, a parte divergente e a parte regular da solução na vizinhança da origem. A condição de contorno de Bulla–Gesztesy estabelece uma relação entre esses dois termos:

$$f^{(0)} = \lambda_m f^{(1)}, \quad (4.51)$$

onde o parâmetro real λ_m determina o tipo de domínio do operador Hamiltoniano auto-adjunto.

Aplicando a condição acima e resolvendo em termos dos coeficientes, obtém-se a relação

$$b_m = -\mu_m^{(\lambda_m)} a_m, \quad (4.52)$$

com

$$\mu_m^{(\lambda_m)} = \lambda_m \frac{k^{2v} \Gamma(1-v) \text{sen}(\pi v)}{4^v \Gamma(v+1) + \lambda_m k^{2v} \Gamma(1-v) \cos(\pi v)}. \quad (4.53)$$

Esse parâmetro $\mu_m^{(\lambda_m)}$ encapsula a dependência explícita da solução em relação à escolha do domínio auto-adjunto via λ_m , influenciando diretamente o comportamento espectral.

Portanto, a solução geral da equação diferencial de Bessel pode ser reescrita de forma condensada como:

$$f_m(r) = a_m [J_v(kr) - \mu_m^{(\lambda_m)} Y_v(kr)]. \quad (4.54)$$

Essa expressão fornece a função de onda radial do sistema de AB em termos do parâmetro de extensão λ_m . Note que, quando $\lambda_m = 0$, a contribuição da solução singular $Y_v(kr)$ desaparece, recuperando-se o caso padrão do efeito AB sem spin, no qual a condição de contorno é do tipo de Dirichlet.³

³ Mais detalhes sobre o cálculo dos coeficientes $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$, bem como a dedução da relação (4.53), podem ser encontrados no Apêndice C.

4.5.3 Diferença de fase e matriz S

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$, as funções de Bessel que compõem as soluções radiais da equação diferencial podem ser aproximadas pelas expressões oscilatórias dadas por Abramowitz e Stegun (1964):

$$J_v(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.55)$$

$$Y_v(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.56)$$

Essas expressões representam o comportamento assintótico típico de ondas que se propagam para o infinito, e são fundamentais para a análise do espalhamento quântico.

Dessa forma, a solução radial $f_m(r)$ descrita na equação (4.54) pode ser expressa, para grandes distâncias, em termos de uma função oscilatória com um deslocamento de fase $\delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)$, que codifica os efeitos da interação e das condições de contorno escolhidas:

$$f_m(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)\right). \quad (4.57)$$

Essa diferença de fase é o principal indicador das alterações causadas pela presença do potencial vetor e das condições de extensão auto-adjunta no sistema. Ela pode ser decomposta em duas contribuições principais:

$$\delta_m^{\lambda_m}(k, \phi) = \Delta_m^{AB}(\phi) + \theta_{\lambda_m}, \quad (4.58)$$

onde $\Delta_m^{AB}(\phi)$ corresponde ao deslocamento de fase característico do efeito Aharonov–Bohm, dado por

$$\Delta_m^{AB}(\phi) := \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \phi|), \quad (4.59)$$

enquanto θ_{λ_m} está associada à contribuição oriunda das condições de contorno definidas pelo parâmetro de extensão λ_m ,

$$\theta_{\lambda_m} := \arctan [\mu_m^{(\lambda_m)}]. \quad (4.60)$$

A matriz de espalhamento S encapsula toda a informação sobre como o sistema altera as ondas incidentes e é diretamente relacionada a essa diferença de fase:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\delta_m^{\lambda_m}(k, \phi)} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} e^{2i\theta_{\lambda_m}}. \quad (4.61)$$

Essa expressão mostra claramente que o espalhamento observado é resultado tanto do efeito AB puro quanto da influência das condições de contorno associadas à extensão auto-adjunta.

Além disso, a análise dos polos da matriz S permite identificar os estados ligados do sistema. Tais estados correspondem a energias para as quais a matriz apresenta singularidades, indicando que a partícula está confinada em uma região do espaço. Fazendo a substituição $k \rightarrow i\kappa$, que

corresponde a uma análise no domínio dos números complexos, chega-se à expressão para a energia do estado ligado:

$$\varepsilon_B = \frac{2}{m} \left[-\frac{1}{\lambda_m} \frac{\Gamma(1 + |m + \phi|)}{\Gamma(1 - |m + \phi|)} \right]^{1/|m + \phi|}, \quad \text{para } \lambda_m < 0. \quad (4.62)$$

Essa expressão concorda com os resultados encontrados na literatura (Park; Oh, 1994).

4.5.4 Discussão dos resultados

Observa-se que os estados ligados são afetados somente para $|m + \phi| < 1$, isto é, para modos onde a contribuição da singularidade é relevante. Além disso, a dependência das energias de estado ligado com o parâmetro de extensão λ_m evidencia que cada escolha de λ_m (seja real ou infinito) descreve uma situação física distinta, garantindo o caráter auto-adjunto do Hamiltoniano. Quando $\lambda_m = 0$, a solução retoma o caso do problema original de Aharonov-Bohm sem a contribuição da parte singular.

A amplitude de espalhamento pode ser expressa em termos da matriz S pela relação

$$f_\phi(k, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [S_{\phi, m}^{\lambda_m} - 1] e^{im\varphi}. \quad (4.63)$$

Casos particulares da matriz $S_{\phi, m}^{\lambda_m}$ incluem:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = \begin{cases} e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)}, & \text{se } \lambda_m = 0, \\ e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} e^{2i\pi|m + \phi|}, & \text{se } \lambda_m = \pm\infty. \end{cases} \quad (4.64)$$

Esses resultados demonstram como a escolha do parâmetro de extensão λ_m influencia tanto as energias de estado ligado quanto a fase de espalhamento, evidenciando a importância da abordagem por extensões auto-adjuntas na resolução do problema.

4.6 ESPALHAMENTO EM ESPAÇO CÔNICO

No trabalho de Salem (2017), foi estudado o problema do espalhamento em espaços cônicos, ele formulou a equação radial em termos de funções de Bessel, da mesma forma que Andrade, Silva e Pereira (2013) e Costa (2016). De forma análoga, a solução da equação diferencial resultante pode ser expressa como

$$f_m(r) = c_m J_v(kr) + d_m Y_v(kr), \quad (4.65)$$

onde $J_v(kr)$ e $Y_v(kr)$ são as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, com $v = |m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha$, sendo α o parâmetro cônico do sistema, e c_m e d_m constantes determinadas pelas condições de contorno.

Seguindo um procedimento análogo ao adotado para a determinação dos estados ligados (vide Seção 4.6 e Apêndice D), é possível estabelecer uma relação entre as constantes c_m e d_m e

o parâmetro de extensão λ_m . Para não sobrecarregar o corpo do texto, os passos algébricos são apresentados no Apêndice D. Resumidamente, obtém-se:

$$\frac{c_m}{d_m} = \frac{B k^{-v} - \lambda_m^s C k^v}{\lambda_m^s v k^v}, \quad (4.66)$$

em que os coeficientes são dados por

$$B = -\frac{2^v \Gamma(v)}{\pi}, \quad (4.67)$$

$$C = -\frac{\cos(\pi v) \Gamma(-v)}{\pi 2^v}, \quad (4.68)$$

O parâmetro λ_m^s representa a constante de acoplamento associada à extensão auto-adjunta do modo m , com s denotando o índice relacionado ao spin da partícula.

Vale lembrar que, no contexto de espaços cônicos, a presença de uma singularidade na origem afeta significativamente o comportamento das soluções. Em particular, a função de Bessel de segunda espécie, $Y_v(kr)$, que normalmente diverge em $r = 0$, não pode ser descartada a priori.⁴ Ela se torna fisicamente relevante sempre que $v < 1$, ou seja, para

$$\left| m + \phi + \frac{1 - \alpha}{2} \right| < \alpha.$$

Nesse regime, a solução irregular contribui de forma não trivial, implicando $d_m \neq 0$, e a condição de contorno apropriada para garantir o caráter auto-adjunto do Hamiltoniano deve ser imposta. Seguindo o teorema de Bulla–Gesztesy, essa condição pode ser expressa como:

$$d_m = -\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) c_m, \quad (4.69)$$

onde o coeficiente $\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$ é determinado, após os cálculos (ver Apêndice D), por

$$\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) = \frac{\lambda_m^s k^{2v} \Gamma(1 - v) \sin(\pi v)}{4^v \Gamma(1 + v) + \lambda_m^s k^{2v} \Gamma(1 - v) \cos(\pi v)}. \quad (4.70)$$

A solução geral, portanto, pode ser reescrita na forma

$$f_m(r) = c_m [J_v(kr) - \mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) Y_v(kr)]. \quad (4.71)$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$, utilizam-se as expansões (4.55) e (4.56) para aproximar a solução radial da equação de Schrödinger. Nesse regime, a função radial $f_m(r)$ assume a forma oscilatória característica de uma onda livre, porém modulada por um fator de fase que incorpora as condições de contorno e os efeitos do potencial, expressa por

⁴ Para uma discussão detalhada sobre o papel das funções de Bessel em problemas com simetria radial e sobre sua classificação quanto à regularidade, ver, por exemplo, (Arfken; Weber; Harris, 2013, Cap.9) e (Albeverio et al., 2004).

$$f_m(r) \approx c_m \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \left[\cos \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \sin \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (4.72)$$

em que c_m é uma constante de normalização e $\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$ é um parâmetro que codifica a influência das condições de contorno específicas através do parâmetro de extensão λ_m^s .

Para relacionar essa expressão com a descrição usual em termos de uma diferença de fase de espalhamento, introduz-se a fase $\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$ definida pela igualdade

$$\begin{aligned} \cos \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \right) = \\ \cos \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \\ \times \sin \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Esta definição é conveniente, pois permite interpretar a presença do termo proporcional a $\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$ como um deslocamento da fase da onda espalhada em relação à fase livre.

A partir dessa relação, deduz-se que a diferença de fase pode ser expressa como a soma de duas contribuições:

$$\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) = \Delta_m^{AB}(\phi) + \theta_{\lambda_m^s}, \quad (4.74)$$

onde a primeira, $\Delta_m^{AB}(\phi)$, corresponde ao deslocamento de fase característico do efeito Aharonov–Bohm puro, dado por

$$\Delta_m^{AB}(\phi) = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \phi|), \quad (4.75)$$

enquanto $\theta_{\lambda_m^s}$ é um termo adicional, dependente do parâmetro de extensão λ_m^s , que incorpora os efeitos das condições de contorno impostas, definido por

$$\theta_{\lambda_m^s} = \arctan \left(\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \right). \quad (4.76)$$

Com a diferença de fase explicitada, a matriz de espalhamento unitariza o processo, sendo calculada por

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} \left[\frac{1 + i\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)}{1 - i\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)} \right]. \quad (4.77)$$

É importante destacar que, para o caso particular em que $\lambda_m^s = 0$, correspondente às condições de contorno de Dirichlet, o operador de espalhamento se reduz ao resultado clássico do efeito Aharonov–Bohm sem spin, ou seja, $S_{\phi, m}^0 = e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)}$.

Por outro lado, para valores extremos do parâmetro, como $\lambda_m^s \rightarrow \infty$, observa-se que a matriz de espalhamento incorpora um deslocamento de fase adicional, refletindo a influência direta das condições de contorno escolhidas no processo de espalhamento quântico.

Esses resultados evidenciam como a modelagem matemática detalhada, através do parâmetro de extensão λ_m^s , permite captar nuances do espalhamento além do efeito Aharonov–Bohm tradicional, especialmente em sistemas onde o spin e as condições de contorno exercem papel fundamental.⁵

Adicionalmente, a amplitude de espalhamento é expressa pela soma dos modos parciais:

$$f_\phi^\alpha(k, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (S_{\phi,m}^{\lambda_m} - 1) e^{im\varphi}, \quad (4.78)$$

onde para o caso do espaço plano teremos $\alpha = 1$.

Os resultados aqui apresentados ilustram o impacto das condições de contorno e do parâmetro de extensão sobre o espalhamento em espaços cônicos. Em particular, a abordagem permite identificar como a inclusão do momento magnético anômalo e a mudança na geometria influenciam o deslocamento de fase e, conseqüentemente, a matriz de espalhamento, contribuindo para uma descrição mais completa dos sistemas quânticos sob estudo.

A introdução do momento magnético anômalo, conforme analisada por Costa (2016), bem como a generalização do sistema para espaços cônicos, desenvolvida por Salem (2017), promovem correções relevantes na descrição do sistema. Tais modificações afetam de forma expressiva o deslocamento de fase, a caracterização dos estados ligados e a estrutura da matriz de espalhamento.

⁵ Para mais detalhes sobre os cálculos algébricos e a dedução das relações (4.66) a (4.76), consulte o Apêndice D.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisadas e comparadas diversas abordagens teóricas relativas ao efeito Aharonov-Bohm em sistemas quânticos, com ênfase no tratamento de Hamiltonianos singulares por meio de extensões auto-adjuntas. Observou-se que a inclusão do spin da partícula introduz termos singularmente localizados no Hamiltoniano, exigindo um tratamento matemático mais cuidadoso para assegurar o caráter auto-adjunto do operador.

A análise desenvolvida neste trabalho percorre desde métodos tradicionais de tratamento do efeito AB até abordagens mais recentes que incorporam o momento magnético anômalo. Observou-se que o parâmetro de extensão λ_m , desempenha um papel central na definição do domínio do operador Hamiltoniano, sendo determinante para a caracterização dos estados ligados e das propriedades da matriz de espalhamento.

Adicionalmente, os estudos sobre o espalhamento em espaços com geometria não trivial, como o espaço cônico, demonstraram que a geometria do espaço pode introduzir deslocamentos de fase adicionais, modificando as propriedades de espalhamento das partículas. Tais resultados evidenciam que, embora os métodos clássicos possam recuperar o sistema original do efeito AB, apenas as abordagens baseadas em extensões auto-adjuntas conseguem tratar de forma completa as singularidades presentes nesses sistemas.

Como perspectivas futuras, sugere-se a aplicação das técnicas aqui revisadas a sistemas com potenciais dependentes do tempo e a investigações em sistemas de partículas interagentes, bem como em materiais com geometria complexa. Esses caminhos podem contribuir para o aprofundamento do entendimento dos fenômenos quânticos e para o desenvolvimento de novas aplicações teóricas e experimentais em física.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1964. 1045 p.
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, v. 115, n. 3, p. 485–491, 1959.
- ALBEVERIO, S. et al. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2004. (AMS Chelsea Publishing). ISBN 978-0-8218-3611-8. Disponível em: <<https://bookstore.ams.org/chel-350-h/>>. Acesso em: 20 out. 2023.
- ANDERSON, C. D. The positive electron. *Physical Review*, v. 43, n. 6, p. 491–494, 1933.
- ANDRADE, F.; SILVA, E.; PEREIRA, M. On the spin- 1/2 aharonov–bohm problem in conical space: Bound states, scattering and helicity nonconservation. *Annals of Physics*, v. 339, p. 510–530, 2013. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491613002157>>. Acesso em: 20 set. 2024.
- ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. 3rd. ed. San Diego: Academic Press, Inc., 1985. 1182 p. First edition published in 1967.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. 7th. ed. Amsterdam: Academic Press, 2013.
- BATELAAN, H.; TONOMURA, A. The aharonov-bohm effects: Variations on a subtle theme. *Physics Today*, v. 62, 09 2009.
- BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984.
- BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1964.
- BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, v. 91, n. 2313, p. 682–683, 1913. Artigo seminal sobre o Princípio da Correspondência.
- BONNEAU, G.; FARAUT, J.; VALENT, G. Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 69, n. 3, p. 322–331, mar. 2001. ISSN 1943-2909. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1119/1.1328351>>. Acesso em: 07 set. 2023.
- BORDAG, M.; VOROPAIEV, S. Charged particle with magnetic moment in the aharonov-bohm potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 26, n. 8, p. 2195–2208, 1993. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/9304017>>. Acesso em 14 fev. 2025.
- BULLA, W.; GESZTESY, F. Deficiency indices and singular boundary conditions in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 26, p. 2520–2528, out. 1985.
- CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, v. 5, n. 1, p. 3–5, 1960.

COSTA, R. F. *Extensão autoajunta do Hamiltoniano do sistema de Aharonov-Bohm com momento magnético anômalo*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016. 74 f. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/854>>. Acesso em: 10 jan. 2024.

DAVISSON, C.; GERMER, L. H. The scattering of electrons by a single crystal of nickel. *Nature*, v. 119, p. 558–560, 1927.

DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1928.0023>>. Acesso em: 19 abr. 2024.

DOROBANTU, V. *The Postulates of Quantum Mechanics*. 2006. Disponível em <<https://arxiv.org/abs/physics/0602145>>. Acesso em 21 maio 2024.

DUTTA, P.; HORN, P. M. Low-frequency fluctuations in solids: 1/f noise. *Rev. Mod. Phys.*, v. 53, p. 497–516, 1981.

EHRENBERG W. AND SIDAY, R. The refractive index in electron optics and the principles of dynamics. *Proceedings of the Physical Society*, v. 62, n. 1, p. 8, 1949.

EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, v. 17, p. 891–921, 1905. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19053221004>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

FERKOUS, N.; BOUNAMES, A. 2d pauli equation with hulthén potential in the presence of aharonov—bohm effect. *Communications in Theoretical Physics*, v. 59, n. 6, p. 679–683, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0253-6102/59/6/04>>. Acesso em: 10 jun 2024.

GERBERT, P. de S. Fermions in an aharonov-bohm field and cosmic strings. *Phys. Rev. D*, v. 40, p. 1346–1349, 1989.

GERLACH, W.; STERN, O. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 9, n. 1, p. 349–352, 1922.

GITMAN, D. M.; TYUTIN, I. V. Quantization of the electromagnetic field with a chern-simons term. *Phys. Rev. D*, v. 42, p. 3966–3972, 1990.

GOPALAKRISHNAN, S.; LOINAZ, W. A. Self-adjointness and the renormalization of singular potentials. In: . [S.l.: s.n.], 2006. Disponel em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124315800>>. Acesso em 21 maio 2024.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.

HAGEN, C. R. Aharonov-bohm scattering amplitude. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 41, p. 2015–2017, mar. 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.41.2015>>. Acesso em: 21 maio 2025.

HAGEN, C. R. Effects of nongauge potentials on the spin-1/2 aharonov-bohm problem. *Physical Review D (Particles and Fields)*, v. 48, n. 12, p. 5935–5945, dez. 1993. Disponível em: <<https://www.osti.gov/biblio/5805713>>. Acesso em: 21 maio 2025.

JORDAN, T. F. *Linear Operators for Quantum Mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1969. 144 p. ISBN 978-0-471-48777-0. Disponível em: <<https://archive.org/details/linearoperatorsf0000jord>>. Acesso em: 21 abr. 2024.

KASUNIC, K. J. Magnetic aharonov-bohm effects and the quantum phase shift: A heuristic interpretation. *American Journal of Physics*, 2018. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119079732>> . Acesso em: 20 maio 2023.

KAY, B. S.; STUDER, U. M. Boundary conditions for quantum mechanics on cones and fields around cosmic strings. *Communications in Mathematical Physics*, v. 139, n. 1, p. 103–139, jul. 1991. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1119/1.1328351>>. Acesso em: 18 jun. 2024.

KLAUDER, J. R. Field structure through model studies: Aspects of nonrenormalizable theories. In: *Recent Developments in Mathematical Physics*. [S.l.]: Springer, Vienna, 1973, (Acta Physica Austriaca, v. 11/1973). p. 341–387. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-7654-2_9>. Acesso em 21 jun. 2024.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Oxford: Pergamon Press, 1977. Parte da série “Course of Theoretical Physics”.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. ISBN 9780716703440.

NAZAROV, Y.; BLANTER, Y. *Quantum Transport: Introduction to Nanoscience*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 9781139478175. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=bjmXJOFmqZIC>>. Acesso em: 20 maio 2023.

NEUMANN, J. von. The general spectral theory of hermitian operators. *Mathematische Annalen*, v. 102, p. 49–131, 1929.

NEUMANN, J. von. Die eindeutigkeit der schrödingerschen operatoren. *Math. Ann.*, v. 104, p. 570–578, 1931.

PARK, D. K.; OH, J. G. Self-adjoint extension approach to the spin-1/2 aharonov-bohm-coulomb problem. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 50, p. 7715–7720, dez. 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.7715>>. Acesso em 31 mar. 2024.

PAULI, W. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Springer, v. 31, n. 1, p. 765–783, 1925.

PAULI, W. Über gasentartung und paramagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 41, n. 2, p. 81–102, 1927.

REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. New York: Academic Press, 1975. v. 2. 159–161 p.

RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. ISBN 9780198567318.

SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. 1. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 1993. Hardcover. ISBN 0201539292. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/0201539292>>. Acesso em: 27 abr. 2023.

SALEM, V. *Estudo de Espalhamento em Sistemas Aharonov-Bohm em Espaço Cônico*. 60–75 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017. 89 f. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/869>>. Acesso em: 30 set. 2024.

SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. 393 p. ISBN 978-0-521-88705-2. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/books/a-first-course-in-general-relativity/3805425203DD91A7436EF6E5F2082263>>. Acesso em: 20 abr. 2024.

SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2nd. ed. New York: Springer, 1994. Referência padrão em mecânica quântica.

TAYLOR, J. R. *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. New York: John Wiley & Sons, 1972.

TONOMURA, A. et al. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical Review Letters*, v. 56, n. 8, p. 792–795, 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.792>>. Acesso em 20 nov. 2024.

UHLENBECK, G. E.; GOUDSMIT, S. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezüglich des inneren verhaltens jedes einzelnen elektrons. *Naturwissenschaften*, Springer, v. 13, n. 47, p. 953–954, 1925.

WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. P. 609.

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DAS MATRIZES γ^μ E REDUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Neste apêndice, apresentamos a representação explícita utilizada para as matrizes de Dirac γ^μ , bem como os passos que conduzem à redução do sistema completo de quatro equações diferenciais, oriundo da equação de Dirac em (3+1) dimensões, para um sistema efetivo de duas equações diferenciais acopladas. Essa redução é fundamental para o tratamento bidimensional do problema abordado no Capítulo 4.

A representação escolhida para as matrizes γ^μ satisfaz a álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, com a assinatura da métrica dada por $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Essa representação é conveniente para sistemas com simetria planar, permitindo uma separação natural entre as componentes superiores e inferiores do spinor.

As matrizes de Pauli, que também surgem em diversas manipulações algébricas ao longo da análise, são definidas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Para facilitar a análise do sistema físico, introduzimos os chamados *spinores reduzidos*, definidos em função do parâmetro $s = \pm 1$, que representa a projeção do spin:

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_1, & s = +1, \\ \Psi_4, & s = -1, \end{cases} \quad \Psi_b = \begin{cases} \Psi_2, & s = +1, \\ \Psi_3, & s = -1. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Essa reescrita permite separar o sistema de quatro equações da equação de Dirac em dois blocos de duas equações acopladas, o que facilita a imposição de condições de contorno e a aplicação de métodos de solução analíticos.

Após a substituição das expressões correspondentes aos operadores cinéticos e magnéticos, e a reorganização dos termos conforme o acoplamento anômalo do momento magnético, o sistema reduzido obtido coincide com aquele apresentado na Eq. (4.10) do Capítulo 4.

APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COMUTADORES E ELIMINAÇÃO DE Ψ_b

Neste apêndice, apresentamos o procedimento para calcular os comutadores envolvidos no sistema quântico estudado, bem como o método para eliminar a componente Ψ_b do spinor. Essa eliminação é fundamental para derivar o limite não-relativístico do sistema, apresentado na seção correspondente do Capítulo 4.

O sistema inicial é descrito pelas equações (Eq. (4.15)):

$$\begin{cases} (-s \mu_B B_3 - \varepsilon) \Psi_a + (\Pi_1 - i s \Pi_2) \Psi_b = 0, \\ (\Pi_1 + i s \Pi_2) \Psi_a - 2m \Psi_b = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Aqui, Ψ_a e Ψ_b são componentes do spinor, μ_B é o magneton de Bohr, B_3 é o campo magnético na direção z , ε é a energia, $s = \pm 1$ representa o spin, e $\Pi_j = p_j - eA_j$ são os operadores momento canônico minimalmente acoplados ao vetor potencial magnético A_j .

Passo 1: Eliminação de Ψ_b .

Para simplificar o sistema e obter uma equação somente para Ψ_a , isolamos Ψ_b na segunda equação:

$$\Psi_b = \frac{1}{2m} (\Pi_1 + i s \Pi_2) \Psi_a. \quad (\text{B.2})$$

Passo 2: Substituição na primeira equação.

Substituindo a expressão acima na primeira equação, obtemos:

$$(-s \mu_B B_3 - \varepsilon) \Psi_a + (\Pi_1 - i s \Pi_2) \frac{1}{2m} (\Pi_1 + i s \Pi_2) \Psi_a = 0. \quad (\text{B.3})$$

Ou seja,

$$\left[-s \mu_B B_3 - \varepsilon + \frac{1}{2m} (\Pi_1 - i s \Pi_2) (\Pi_1 + i s \Pi_2) \right] \Psi_a = 0, \quad (\text{B.4})$$

uma equação que depende exclusivamente de Ψ_a .

Passo 3: Tratamento do produto dos operadores.

Expandindo o produto,

$$(\Pi_1 - i s \Pi_2)(\Pi_1 + i s \Pi_2) = \Pi_1^2 + i s \Pi_1 \Pi_2 - i s \Pi_2 \Pi_1 + s^2 \Pi_2^2. \quad (\text{B.5})$$

Como $s^2 = 1$, e lembrando que o comutador é definido por $[\Pi_1, \Pi_2] = \Pi_1 \Pi_2 - \Pi_2 \Pi_1$, temos:

$$(\Pi_1 - i s \Pi_2)(\Pi_1 + i s \Pi_2) = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + i s [\Pi_1, \Pi_2]. \quad (\text{B.6})$$

Passo 4: Avaliação do comutador.

Para partículas carregadas em presença de campo magnético, o comutador dos operadores momento acoplados satisfaz:

$$[\Pi_1, \Pi_2] = i e B_3, \quad (\text{B.7})$$

onde e é a carga da partícula (com sinal apropriado) e B_3 é a componente do campo magnético perpendicular ao plano.

Logo,

$$(\Pi_1 - is \Pi_2)(\Pi_1 + is \Pi_2) = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + is(ieB_3) = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_3. \quad (\text{B.8})$$

Passo 5: Equação final para Ψ_a .

Substituindo o resultado acima na equação para Ψ_a , obtemos:

$$\left[-s \mu_B B_3 - \varepsilon + \frac{1}{2m} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - seB_3) \right] \Psi_a = 0. \quad (\text{B.9})$$

Note que os termos proporcionais a B_3 aparecem em combinação que reforça o papel da interação spin-magnético, característica fundamental no limite não-relativístico, levando à identificação do momento magnético anômalo da partícula.

APÊNDICE C – CÁLCULO DOS COEFICIENTES $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$

Neste apêndice, apresentamos o cálculo dos coeficientes $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$, os quais caracterizam o comportamento assintótico da função de onda próximo à origem. Estes coeficientes são cruciais para a imposição da condição de contorno auto-adjunta segundo o formalismo de Bulla–Gesztiesy, garantindo a autovalorização do operador Hamiltoniano e a definição precisa do domínio físico do sistema.

A solução geral da equação diferencial radial, que descreve o comportamento da função de onda, é dada por uma combinação linear das funções de Bessel de primeira e segunda espécie:

$$f_m(r) = a_m J_v(kr) + b_m Y_v(kr), \quad (\text{C.1})$$

onde J_v e Y_v são respectivamente as funções de Bessel regulares e singulares na origem, e $v = |m + \phi|$ determina a ordem das funções, dependendo do momento angular m e do parâmetro magnético ϕ .

Para $r \rightarrow 0$, as funções de Bessel possuem os seguintes comportamentos assintóticos (conforme Abramowitz e Stegun, 1964):

$$J_v(kr) \approx \left(\frac{kr}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}, \quad (\text{C.2})$$

$$Y_v(kr) \approx -\frac{1}{\pi} \Gamma(v) \left(\frac{2}{kr}\right)^v. \quad (\text{C.3})$$

Note que J_v é regular na origem, enquanto Y_v diverge, caracterizando o comportamento singular.

Definimos então os coeficientes $f^{(0)}$ e $f^{(1)}$ como os termos dominantes da expansão em potências de r , que representam as componentes mais singular e regular da função $f_m(r)$, respectivamente:

$$f^{(0)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r^v f_m(r), \quad (\text{C.4})$$

$$f^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^v} [f_m(r) - f^{(0)}]. \quad (\text{C.5})$$

Essas definições permitem distinguir as partes da função de onda que se comportam como r^{-v} (singular) e r^v (regular) na vizinhança da origem.

Substituindo a expressão geral de $f_m(r)$ e aplicando as expansões assintóticas, obtemos:

$$f^{(0)} = \frac{b_m}{\text{sen}(\pi v)} \left(\frac{2}{k}\right)^v \frac{1}{\Gamma(1-v)}, \quad (\text{C.6})$$

$$f^{(1)} = a_m \left(\frac{k}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)} + \frac{b_m}{\text{sen}(\pi v)} \left(\frac{k}{2}\right)^v \frac{\cos(\pi v)}{\Gamma(v+1)}. \quad (\text{C.7})$$

A condição de contorno auto-adjunta, fundamental para a definição do domínio do operador Hamiltoniano, é imposta pelo formalismo de Bulla–Gesztiesy através da relação linear:

$$f^{(0)} = \lambda_m f^{(1)}, \quad (\text{C.8})$$

onde λ_m é o parâmetro de extensão que caracteriza diferentes autoadjunções do operador, funcionando como um parâmetro físico que pode representar interações pontuais ou condições especiais na origem.

Essa condição estabelece uma relação entre os coeficientes a_m e b_m , que pode ser rearranjada para isolar:

$$b_m = -\mu_m^{(\lambda_m)} a_m, \quad (\text{C.9})$$

com o fator $\mu_m^{(\lambda_m)}$ definido por:

$$\mu_m^{(\lambda_m)} = \lambda_m \frac{k^{2v} \Gamma(1-v) \operatorname{sen}(\pi v)}{4^v \Gamma(v+1) + \lambda_m k^{2v} \Gamma(1-v) \cos(\pi v)}. \quad (\text{C.10})$$

Por fim, a função de onda $f_m(r)$, respeitando a condição de contorno, pode ser convenientemente escrita como:

$$f_m(r) = a_m [J_v(kr) - \mu_m^{(\lambda_m)} Y_v(kr)]. \quad (\text{C.11})$$

Este resultado evidencia como a escolha do parâmetro λ_m influencia a composição das soluções regulares e singulares, afetando diretamente propriedades físicas como o espectro de energia e a matriz de espalhamento do sistema.

APÊNDICE D – CÁLCULOS RELACIONADOS AO ESPALHAMENTO EM ESPAÇO CÔNICO

Neste apêndice, apresentamos cálculos necessários para estabelecer a relação entre as constantes presentes na solução geral da equação radial do problema de espalhamento em um espaço com geometria cônica, bem como a determinação da matriz de espalhamento.

A solução geral da equação radial pode ser expressa em termos das funções de Bessel da primeira e segunda espécie:

$$f_m(r) = c_m J_v(kr) + d_m Y_v(kr), \quad (\text{D.1})$$

onde o índice v é dado por

$$v = \frac{|m + \phi + (1 - \alpha)/2|}{\alpha}, \quad (\text{D.2})$$

com m sendo o número quântico azimutal, ϕ o parâmetro relacionado ao fluxo magnético (ou outro potencial), e α a abertura do cone (relacionada à geometria do espaço).

O objetivo é determinar a relação entre os coeficientes c_m e d_m , em função do parâmetro de extensão λ_m^s , que codifica as condições de contorno físicas do problema. Essa relação é fundamental para a construção da solução que satisfaz as condições físicas de regularidade e normalização.

Para isso, introduzimos as constantes auxiliares:

$$A = \frac{1}{2^v \Gamma(1 + v)}, \quad (\text{D.3})$$

$$B = -\frac{2^v \Gamma(v)}{\pi}, \quad (\text{D.4})$$

$$C = -\frac{\cos(\pi v) \Gamma(-v)}{\pi 2^v}, \quad (\text{D.5})$$

$$D = -\frac{k^2}{4(1 - v)}, \quad (\text{D.6})$$

que aparecem na expansão das funções de Bessel para pequenos argumentos, utilizada para analisar o comportamento da função de onda próximo à origem.

Para $v < 1$ (ou equivalentemente $|m + \phi + (1 - \alpha)/2|/\alpha < 1$), a relação entre os coeficientes é dada por:

$$\frac{c_m}{d_m} = \frac{B k^{-v} - \lambda_m^s C k^v}{\lambda_m^s v k^v}. \quad (\text{D.7})$$

O parâmetro λ_m^s é interpretado como um parâmetro de extensão auto-adjunta, que permite incorporar condições de contorno não triviais na origem, e é definido pela condição de Bulla–Gesztesy, que estabelece que a derivada logarítmica da função de onda em um ponto de referência r_0 é dada por:

$$\frac{f'_m(r_0)}{f_m(r_0)} = \lambda_m^s. \quad (\text{D.8})$$

Substituindo a forma geral da função de onda e sua derivada,

$$f_m(r_0) = c_m J_v(kr_0) + d_m Y_v(kr_0), \quad (\text{D.9})$$

$$f'_m(r_0) = c_m J'_v(kr_0) + d_m Y'_v(kr_0), \quad (\text{D.10})$$

obtém-se a relação:

$$\lambda_m^s (c_m J_v(kr_0) + d_m Y_v(kr_0)) = c_m J'_v(kr_0) + d_m Y'_v(kr_0). \quad (\text{D.11})$$

Isolando d_m em função de c_m e λ_m^s , temos:

$$d_m = -\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) c_m, \quad (\text{D.12})$$

onde

$$\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) = \frac{\lambda_m^s J_v(kr_0) - J'_v(kr_0)}{\lambda_m^s Y_v(kr_0) - Y'_v(kr_0)}. \quad (\text{D.13})$$

Para simplificar esta expressão, utilizamos as identidades das derivadas das funções de Bessel:

$$J'_v(x) = \frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x), \quad Y'_v(x) = \frac{v}{x} Y_v(x) - Y_{v+1}(x). \quad (\text{D.14})$$

Com essas identidades, a função $\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$ pode ser reescrita na forma compacta:

$$\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) = \frac{\lambda_m^s k^{2v} \Gamma(1-v) \operatorname{sen}(\pi v)}{4^v \Gamma(1+v) + \lambda_m^s k^{2v} \Gamma(1-v) \cos(\pi v)}. \quad (\text{D.15})$$

A partir desta relação, determinamos a diferença de fase de espalhamento $\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$, que é um dos principais quantificadores do efeito do potencial e da geometria sobre a onda incidente. Para isso, consideramos as expansões assintóticas das funções de Bessel para $kr \rightarrow \infty$:

$$J_v(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \cos \left(kr - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{D.16})$$

$$Y_v(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \operatorname{sen} \left(kr - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{D.17})$$

Substituindo essas expressões na solução geral,

$$f_m(r) = c_m \left[J_v(kr) + \frac{d_m}{c_m} Y_v(kr) \right], \quad (\text{D.18})$$

e utilizando $d_m = -\mu_m^{(\lambda_m^s)} c_m$, obtemos:

$$f_m(r) \approx c_m \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} \left[\cos \left(kr - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \operatorname{sen} \left(kr - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (\text{D.19})$$

Usando a identidade trigonométrica para o cosseno da soma de dois ângulos,

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B, \quad (\text{D.20})$$

podemos reescrever a função de onda assintótica na forma:

$$f_m(r) \approx c_m \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \cos \left(k r - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \right), \quad (\text{D.21})$$

onde a diferença de fase é dada por:

$$\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) = \arctan \left(\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi) \right). \quad (\text{D.22})$$

Finalmente, a matriz de espalhamento é expressa em termos dessa diferença de fase:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)}. \quad (\text{D.23})$$

Substituindo a expressão para $\delta_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)$, obtém-se a forma completa da matriz de espalhamento:

$$S_{\phi, m}^{\lambda_m} = e^{2i\Delta_m^{AB}(\phi)} \left[\frac{1 + i\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)}{1 - i\mu_m^{(\lambda_m^s)}(k, \phi)} \right], \quad (\text{D.24})$$

onde

$$\Delta_m^{AB}(\phi) = \frac{\pi}{2} (|m| - |m + \phi|) \quad (\text{D.25})$$

é o deslocamento de fase associado ao efeito Aharonov-Bohm.