UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DIVIANE MARIA DIAS RODRIGUES

REFLEXÃO DE UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR E CONTEXTUALIZADA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E SÓLIDOS DE PLATÃO

PONTA GROSSA
2019

DIVIANE MARIA DIAS RODRIGUES

REFLEXÃO DE UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR E CONTEXTUALIZADA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E SÓLIDOS DE PLATÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de espaços formais e não formais no Ensino de Ciências.

Orientador: Prof. Dr. André Maurício Brinatti
Coorientadora: Prof.ª Dra. Luciane Grossi

PONTA GROSSA
2019

Rodrigues, Diviane Maria Dias

R696 Reflexão de uma prática interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Geometria de Posição e sólidos de Platão / Diviane Maria Dias Rodrigues. Ponta Grossa, 2019.

184 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Área de Concentração: Espaços Formais e Não Formais no Ensino de Ciências), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. André Maurício Brinatti.
Coorientadora: Profa. Dra. Luciane Grossi.

1. Produto Educacional. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Prática docente. 4. Educação básica. 5. Métodos sociointeracionistas. I. Brinatti, André Maurício. II. Grossi, Luciane. III. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Espaços Formais e Não Formais no Ensino de Ciências. IV.T.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Maria Luzia Fernandes Bertholino dos Santos- CRB9/986

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - https://uepg.br

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

DIVIANE MARIA DIAS RODRIGUES

"REFLEXÃO DE UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR E CONTEXTUALIZADA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E SÓLIDOS DE PLATÃO"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Setor de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Dr. André Maurício Brinatti - (UEPG) – Presidente

Dr. Silvio Luiz Rutz da Silva - (UEPG)

Dra. Viviane Paula Martini - (IFPR)

Ponta Grossa 26 de Agosto de 2019.

Documento assinado eletronicamente por **Leila Ines Follmann Freire**, **Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática**, em 23/08/2019, às 16:31, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Silvio Luiz Rutz da Silva**, **Professor(a)**, em 26/08/2019, às 15:49, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Andre Mauricio Brinatti**, **Professor(a)**, em 24/09/2019, às 17:43, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Viviane Paula Martini**, **Usuário Externo**, em 02/11/2019,

às 14:03, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.uepg.br/autenticidade informando o código verificador **0054225** e o código CRC **9DEFCEB7**.

Dedico esta dissertação a minha mamãe Diona D’Arc de Paula Dias.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que sustentou meu psicológico até aqui.

Ao professor Dr. André Maurício Brinatti que sempre se propôs a me ajudar em todos os momentos do mestrado, pelas contribuições de seus conhecimentos e no fortalecimento do meu psicológico, foi um verdadeiro pai nesse período.

A professora Dra. Luciane Grossi pelas orientações ao longo da pesquisa.

Quero deixar aqui registrado um agradecimento especial a minha mamãe Diona D'Arc de Paula Dias, a minha irmã Diovana Dias Rodrigues e ao meu cunhado Carlos Alberto de Souza Junior que me apoiaram desde o início e supriram todas as minhas necessidades afetivas e financeiras, mesmo longe sempre me fortaleceram com palavras de apoio.

Ao meu esposo Rafael de Quadros da Rocha que soube compreender os meus momentos de estudo, sempre me apoiando afetivamente.

A família da dona Leane Bereza de Oliveira e do seu Luiz de Oliveira, Jorge de Oliveira, Fernando Carneiro da Silva, Joselba Liliane de Oliveira Carneiro da Silva que me acolheram como parte da família, que sempre presente me auxiliaram em tudo que precisei.

Aos meus amigos Alana Lung, Frederico Koch que fizeram parte da minha vida durante esse período de caminhada no mestrado, aos amigos que fiz ao longo do curso, em especial a Mariane dos Anjos e Tainá Bobato Stadler.

Aos colégios estaduais Agrícola Augusto Ribas e Professor João Ricardo Von Borell e suas respectivas direções e equipes pedagógicas que nos permitiram aplicar o Produto Educacional.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desta pesquisa.

“Compreender as coisas que nos rodeiam é a melhor preparação para compreender o que há mais além”
(Hipátia de Alexandria)

RODRIGUES, D. M. D. **Reflexão de uma prática interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Geometria de Posição e sólidos de Platão**. Orientadores: André Maurício Brinatti e Luciane Grossi. Ponta Grossa, 2019. 184f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2019.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objeto de estudo um olhar reflexivo sobre o ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares a partir da integração de materiais didáticos diversificados e o uso de tecnologias que instiguem o raciocínio lógico dos discentes do Ensino Médio. Tal proposição tem a intenção de criar condições favoráveis no âmbito educacional, pautada em métodos sociointeracionistas, fundamentadas na teoria de aprendizagem de Vygotsky, por meio da realização de atividades no formato de grupos focais, com o planejamento de atividades centradas nos discentes e relatório-avaliação. A pesquisa foi de cunho qualitativo, interpretativo e de intervenção que proporciona a observação dos processos de ensino e aprendizagem. Também, buscou-se subsidiar as ações docente referentes ao ensino de Matemática, com vistas a melhoria do entendimento daquilo que é ensinado em sala de aula. Nesta perspectiva, foi elaborado o Produto Educacional: Da Geometria de Posição aos sólidos de Platão que contempla uma unidade didática com planos de unidades, planos de aulas, roteiro do docente e materiais didáticos diversificados. Este foi aplicado em duas versões: cinco aulas na primeira aplicação e sete aulas na segunda e terceira aplicações. Quanto à prática docente, ao fim de cada aplicação havia a reflexão e possíveis melhoramentos. Das análises, observou-se que houve o processo de mediação: entre os discentes, durante as atividades e na plenária; entre discentes e docente, momentos de reparo de dúvidas apresentadas pelos discentes; e por meio da manipulação de materiais e discussões, cujas práticas levaram a observação da Matemática no cotidiano de maneira integrada. Estes processos fornecem indícios de intervenção nas ZDP dos discentes. Portanto, estes resultados indicam que o Produto Educacional desenvolvido a partir desse tema é visto com bons olhos porque os discentes, em contato com os materiais didáticos diversificados e com as estratégias por meio de grupos focais, demonstraram um bom interesse na participação de cada atividade proposta.

Palavras-chave: Produto Educacional, ensino e aprendizagem, prática docente, educação básica, métodos sociointeracionistas.

RODRIGUES, D. M. D. **Reflection upon an interdisciplinary and contextualized practice for the teaching of Position Geometry and Platonic solids.** Advisor (s): André Maurício Brinatti and Luciane Grossi. Ponta Grossa, 2019. 184f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematical Education) - Ponta Grossa State University. Ponta Grossa, 2019.

ABSTRACT

This research had as object of study a reflective look on the teaching of Position Geometry and Regular Poly Prohedrons from the integration of diversified teaching materials and the use of technologies that provoked logical reasoning in High School students. This proposition intends to create favorable conditions in the educational field, based on socio-interactionist methods, based on Vygotsky's learning theory, by performing activities in the focus group format, with student-centered activities planning and report-evaluation. The research was qualitative, interpretative and intervention that provides the observation of teaching and learning processes. Also, it sought to subsidize the teaching actions related to the teaching of mathematics, with a view to improving the understanding of what is taught in the classroom. With that perspective, the Educational Product was created: From the Position Geometry to Platonic Solids, which comprised a teaching unit including lesson plan, teacher's guide and diversified teaching resources. The teaching unit was applied in two versions: five lessons in the first application and seven lessons in the second and third applications. Regarding the teaching practice, at the end of each application, it was evaluated for possible improvements. The results of the analyses showed that a mediation process occurred: between the students, during the activities and in the whole class discussion; between students and the teacher, there were moments of clarification of doubts presented by the former ones; and through handling the materials and taking part in the discussion, whose practices led to the observation of mathematics in their everyday lives in an integrated way. These processes provided evidence of intervention in the students' PDZ. Therefore, the results indicated that the Educational Product developed from this theme was welcomed by the students, who could have contact with diversified teaching materials and the strategies through focus groups, demonstrating great interest in taking part in each of the activities proposed.

Keywords: Educational Product, teaching and learning, teaching practice, basic education, socio-interactionist methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Diagrama V da pesquisa 20

Figura 2.1 – Mapa conceitual: Teoria 27

Figura 3.1 – Ponto, reta e plano, representação geométrica 29

Figura 3.2 – Pertinência entre pontos e reta, representação geométrica 30

Figura 3.3 – A ideia de pontos e reta no cotidiano, foto associada 30

Figura 3.4 – Representação de retas, foto associada 31

Figura 3.5 – Reta determinada pelos pontos A e B, representação geométrica 31

Figura 3.6 – Semirreta, representação geométrica 31

Figura 3.7 – Segmento de reta AB, representação geométrica 32

Figura 3.8 – Segmento de reta, foto associada 32

Figura 3.9 – Retas paralelas coincidentes, representação geométrica 33

Figura 3.10 – Retas paralelas coplanares, representação geométrica 33

Figura 3.11 – Retas paralelas coplanares, fotos associadas 34

Figura 3.12 – Retas concorrentes, representação geométrica 34

Figura 3.13 – Retas perpendiculares, representação geométrica 34

Figura 3.14 – Retas reversas, representação geométrica 35

Figura 3.15 – Plano e espaço, foto associada 35

Figura 3.16 – Determinação (plano), representação geométrica 36

Figura 3.17 – Uma reta e um ponto fora dela (existência), representação geométrica 36

Figura 3.18 – Uma reta e um ponto fora dela (unicidade), representação geométrica 37

Figura 3.19 – Determinação de um plano - retas concorrentes (existência), representação geométrica 37

Figura 3.20 – Determinação de um plano - retas concorrentes (unicidade), representação geométrica 38

Figura 3.21 – Determinação de um plano - retas paralelas e distintas entre si, representação geométrica 38

Figura 3.22 – Semiplano de origem r, representação geométrica 38

Figura 3.23 – Uma reta e dois pontos distintos num plano, representação geométrica 39

Figura 3.24 – Reta contida no plano 39

Figura 3.25 – Reta concorrente ao plano 40

Figura 3.26 – Reta paralela ao plano 40

Figura 3.27 – Dois planos coincidentes, representação geométrica 41

Figura 3.28 – Dois planos paralelos distintos, representação geométrica 41

Figura 3.29 – Dois planos secantes, representação geométrica 41

Figura 3.30 – Retas paralelas coplanares, foto associada 42

Figura 3.31 – Existência de planos paralelos, representação geométrica 43

Figura 3.32 – Retas perpendiculares, foto associada 44

Figura 3.33 – Reta e plano perpendiculares, representação geométrica 44

Figura 3.34 – Planos perpendiculares, representação geométrica 45

Figura 3.35 – Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano, representação geométrica 45

Figura 3.36 – Projeção ortogonal de um segmento de reta (perpendicular) sobre um plano, representação geométrica 46

Figura 3.37 – Semi-espaço, representação geométrica 47

Figura 3.38 – Superfície poliédrica limitada convexa 48

Figura 3.39 – Poliedro convexo 48

Figura 3.40 – Poliedro convexo e poliedro não convexo, representação geométrica 49

Figura 3.41 – Poliedro convexo (a) e poliedro não convexo (b), fotos associadas 50

Figura 3.42 – Poliedro Euleriano não convexo 50

Figura 3.43 – Poliedros de Platão 51

Figura 3.44 – Tetraedros: (a) representação geométrica (b) foto associada 52
Figura 3.45 – Hexaedro, representação geométrica 53
Figura 3.46 – Hexaedro, foto associada: Fluorita 53
Figura 3.47 – Hexaedro, foto associada: Galena 54
Figura 3.48 – Octaedro, representação geométrica 54
Figura 3.49 – Octaedro, foto associada: Espinélio 54
Figura 3.50 – Tetraedro, representação geométrica 55
Figura 3.51 – Tetraedro, foto associada: Diamante 55
Figura 3.52 – Tetraedro, foto associada: Esfalerita 55
Figura 5.1 – Mapa conceitual: Pesquisa X Teoria 111
Figura A.1 – Octaedro *Poly Pro 1.11* 147
Figura A.2 – *Gif*: dodecaedro 151
Figura A.3 – Icosaedro, foto associada 152
Figura A.4 – Pastas com relatórios: material para registros 176
Figura A.5 – Sólidos platônicos de papelão que dão nome as equipes 176
Figura A.6 – Sólidos como alternativas 177
Figura A.7 – Tabuleiro de isopor 177
Figura A.8 – Planificações dos sólidos platônicos 177
Figura A.9 – Materiais confeccionados com pratos de isopor 178
Figura A.10 – Cubos de espuma 178
Figura A.11 – Poliedros de canudos 179
Figura A.12 – Tetraedro e octaedro de cubos em MDF 179

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Nomenclatura dos poliedros de Platão 51

Quadro 4.2 – Método geral: momentos e dinâmicas 60

Quadro 5.1 – Questões: primeira aplicação 70

Quadro 5.2 – Primeira aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica 73

Quadro 5.3 – Relação de convexidade 83

Quadro 5.4 – Questões: segunda e terceira aplicação 85

Quadro 5.5 – Segunda aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica 89

Quadro 5.6 – Terceira aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica 98

Quadro A.1 – Lista de vídeos para aplicação em sala de aula 180

Quadro A.2 – Lista de slides para aplicação em sala de aula 180

LISTA DE SIGLAS

IFPR	Instituto Federal do Paraná
PPGECEM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
DCE-PR	Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná
TICs	Tecnologias de Informações e Comunicações
NTICs	Novas Tecnologias de Informações e Comunicações
AVAs	Ambientes Virtuais de Aprendizagem
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16

2 ASPECTOS DA LITERATURA ACERCA DO FOCO DA PESQUISA 22
2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E POLIEDROS REGULARES SEGUNDO OS DOCUMENTOS OFICIAIS 22
2.2 GEOMETRIA DE POSIÇÃO E POLIEDROS REGULARES NO ENSINO MÉDIO 23
2.3 FUNDAMENTAÇÃO NO ENSINO E APRENDIZAGEM 24

3 GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL 28
3.1 CARACTERÍSTICAS, DEFINIÇÕES, POSTULADOS E TEOREMAS 28
3.1.1 Ponto e reta: características gerais 29
3.1.2 Posições relativas de duas retas 32
3.1.3 Plano e espaço: características 35
3.1.4 Posições relativas de uma reta e um plano 39
3.1.5 Posições relativas de dois planos 40
3.1.6 Condições de paralelismo 42
3.1.7 Condição de Perpendicularidade 43
3.1.8 Espaço 46
3.2 POLIEDROS 47
3.2.1 Superfície poliédrica limitada convexa 47
3.2.2 Poliedro Convexo 48
3.2.3 Congruência 49
3.2.4 Relação de Euler 49
3.2.5 Poliedro Euleriano 50
3.2.6 Poliedros de Platão 50
3.2.7 Poliedros Regulares 51
3.3 OS SÓLIDOS DE PLATÃO E SUAS APLICAÇÕES 52

4 MATERIAIS E MÉTODOS 57
4.1 DESCRIÇÃO GERAL DO UNIVERSO DE CADA APLICAÇÃO 57
4.1.1 Primeira Aplicação - Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas 58
4.1.2 Segunda Aplicação - Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay 58
4.1.3 Terceira Aplicação - Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay 59
4.2 MÉTODO GERAL DA APLICAÇÃO DO PRODUTO..... 59
4.3 PLANOS DE UNIDADES, PLANOS DE AULAS E ROTEIRO DA DOCENTE 62
4.3.1 Planos de unidade - versão com cinco aulas e versão com sete aulas 62
4.3.2 Planos de aulas 63
4.3.3 Roteiro da docente 64
4.4 COLETA E ANÁLISE DE DADOS 66
4.5 MATERIAIS DIDÁTICOS DIVERSIFICADOS: APARATOS DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL 66

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS 69

5.1 VERSÃO COM 5 AULAS - COLÉGIO AGRÍCOLA ESTADUAL AUGUSTO RIBAS 69
5.2 VERSÃO COM 7 AULAS - COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR JOÃO RICARDO VON BORELL DU VERNAY 84

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 106

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS 112

REFERÊNCIAS 114

APÊNDICE A - Produto educacional: Da Geometria de Posição aos sólidos de Platão 117

APÊNDICE B - Modelo: carta de apresentação, dados cadastrais e termo de autorização 181

1 INTRODUÇÃO

A explicação para o desenvolvimento da presente pesquisa tem raízes na trajetória acadêmica e profissional da docente até o momento. Nos anos de 2015 e 2016 trabalhou como docente substituta no Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Campus Telêmaco Borba, nas turmas de 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio integrado aos cursos técnicos de Informática, Automação e Mecânica, também no curso Tecnológico de Análise e Desenvolvimento de Sistemas e na Licenciatura em Física.

A docente observou, nesses anos, a percepção que os discentes têm da Geometria Espacial, mais especificamente nas turmas de 3º ano, onde eles tiveram mais contato com esse tema da Matemática, em sala de aula, nas questões de vestibulares e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). E as reclamações dos mesmos eram muitas, pois há um problema prático quanto a visualização de figuras tridimensionais, suas definições muitas vezes são confundidas com as bidimensionais.

A docente, então, sentiu a necessidade de tentar entender os questionamentos dos discentes e refletir sobre a melhor maneira de se ensinar, para que o aprender ocorra de forma satisfatória.

Compreendendo que não podia mais ficar indiferente, com este trabalho, a docente procura instigar os discentes na busca pela mobilização da cultura científica a partir de aplicações práticas de conhecimentos adquiridos anteriormente ou não, objetivando romper obstáculos epistemológicos que dificultam o entendimento dos mesmos, afastando o interesse no estudo da Geometria de Posição e Poliedros Regulares.

Uma das formas de auxiliar os discentes no processo de aprendizagem proposto aqui foi introduzindo alguns materiais didáticos diversificados denominados aparatos de Geometria de Posição e Espacial, que beneficiem a organização e o desenvolvimento das aulas de Matemática. E nesse sentido, está em acordo ao que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio trazem com a seguinte afirmação:

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (PCNEM, 2000, p. 44)

Há alguns anos que a escola vem sofrendo constantes mudanças no seu modo de transmitir conhecimento, embora, ainda não consiga competir com tamanho avanço tecnológico incorporado na sociedade atual e, principalmente, no meio social, o fato é de que há a necessidade da harmonização entre escola e sociedade. Imbernón (2011) destaca que essa

mudança acelerada das estruturas sociais, materiais, institucionais e formas de organização da convivência, refletem diretamente nas formas de pensar e agir das pessoas, da sociedade e dos processos de ensinar e aprender.

Utilizando como referências os documentos oficiais que tratam dos conteúdos específicos da Matemática, percebe-se ao longo de toda a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM, 2000), das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 2002) e das Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR, 2008), a necessidade de conduzir os assuntos de Geometria de Posição e Espacial, interligando-os com o cotidiano e com as disciplinas ministradas na educação básica, tais como, arte, física, astronomia e química.

Os PCN+, por exemplo, destacam:

> A abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos. (PCN+, 2002, p.119)

Utilizando os conceitos de Geometria de Posição e Poliedros Regulares, a docente priorizou a interdisciplinaridade por meio de imagens, vídeos, aplicações, dinâmicas e questões mais contextualizadas que mostram a importância dos estudos de sólidos platônicos e, como alguns estudiosos trataram esses assuntos.

A história do atomismo de Demócrito, o modelo do Sistema Solar de Kepler e os conceitos fundamentais da Cristalografia, são importantes bases para fundamentar o estudo da Geometria com as disciplinas citadas anteriormente e, também, em consonância aos documentos oficiais (PCNEM, 2000), (PCN+, 2002) e (DCE-PR, 2008).

Levando em consideração a tecnologia, Kenski (2012) explica que a sua definição provém da relação existente com técnicas e equipamentos; e por meio das novas tecnologias, conta-se com o conceito de inovação, sendo assim, surgem as Tecnologias da Inteligência, provenientes da necessidade do homem de se comunicar e se expressar. Desta forma, com o surgimento do processo de produção industrial, surgem as Tecnologias de Informações e Comunicações (TICs): jornais, revistas, rádio etc. Após isso, na era digital, surgem as Novas Tecnologias de Informações e Comunicações (NTICs): a internet, os computadores, os recursos multimídias, as plataformas de ensino e aprendizagem (Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs), as redes sociais etc.). Para Kenski (2012), o campo fundamental que distingue essas três denominações é a linguagem. As tecnologias da inteligência se expressam fundamentalmente na linguagem oral (imaterial), as TICs na escrita e as NTICs na digital

(ambos materiais) por se tratar de objetos, de instrumentos utilizados na atividade informação e comunicação. E segundo a referida autora: “a presença de uma determinada tecnologia pode induzir profundas mudanças na maneira de organizar o ensino”. (KENSKI, 2012, p. 44)

Assim, a reflexão de uma nova lógica de ensino surge devido a uma mudança social, que associa a tecnologia e a dinâmica do ensino a inúmeras possibilidades informativas e a diferentes modos de se ensinar e aprender Matemática, de um modo geral, de se fazer educação.

Diante do que foi exposto, anteriormente, a pesquisa teve a intenção de propiciar estudos qualitativos acerca da inquietação de se criar condições favoráveis no âmbito educacional, portanto teve como sustentação teórica a Educação Matemática por meio do relatório-avaliação segundo D’Ambrosio (1996), a realização de atividades no formato de grupos focais segundo Kitzinger (2000), as ideias de Santrock (2010) com o planejamento de atividades centrados nos discentes e, nas abordagens de ensino e aprendizagem considerando que o indivíduo participa ativamente na organização do seu conhecimento por meio de experimentos e experimentações diversificadas entre o meio social e individual, Vygotsky (1991).

Para isso, houve uma articulação de situações didáticas de ensino e aprendizagem por meio da problematização, onde os discentes se tornam investigadores na resolução de novos desafios matemáticos, com o objetivo de interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do cotidiano, promovendo assim, a integração de materiais didáticos diversificados como subsídios nas ações da docente referentes ao ensino de Matemática, buscando sempre, a melhoria do entendimento daquilo que é ensinado em sala de aula.

Foram realizadas atividades com os aparatos de Geometria de Posição e Espacial elaborados pela docente durante todo o processo: materiais representativos e poliedros diversos para a manipulação de tomada de medidas, slides e vídeo, o que, provavelmente, colaborou para o desenvolvimento da aprendizagem.

O foco da pesquisa consiste em verificar se a prática e os materiais propostos oferecem condições para promover o processo de aprendizagem por meio da concretização dos conceitos estudados, ou seja, a pesquisa gira em torno da promoção do ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares mediada por uma prática pedagógica interdisciplinar e materiais didáticos diversificados, em paralelo com as reações dos discentes frente ao desenvolvimento das aulas.

A investigação se deu com base na maneira como os discentes reagem frente a uma proposta pedagógica interdisciplinar amparados por materiais didáticos diversificados, em uma perspectiva de contextualização a partir de conceitos históricos que de forma objetiva, auxilie-os em sala de aula.

Com um viés na construção do conhecimento Santrock (2010, p. 424) enfatiza: “O aluno bem-sucedido pode relacionar uma nova informação com um conhecimento já existente de maneira significativa. ”

A docente teve como intenção, criar um ambiente propício que subsidiasse o ensino e aprendizagem com a utilização de instrumentos (materiais didáticos diversificados), dispondo para isso de uma organização diferenciada da sala de aula tradicional, desafiando os discentes a pensarem sobre a Matemática em específico a Geometria de Posição e Poliedros Regulares com um viés no cotidiano, sempre refletindo sobre a corroboração dos materiais didáticos diversificados para a aprendizagem dos discentes.

Guy Brousseau (1996), um dos fundadores da Didática da Matemática francesa, idealiza o estudo da aprendizagem Matemática, como uma revolução do ensino, no qual o docente atua apenas como um desafiador, instigando os discentes a construírem seus próprios entendimentos.

Neste sentido, o presente trabalho teve como objetivo geral:

• Analisar a promoção do ensino e aprendizagem da Geometria de Posição e Poliedros Regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediados por uma ação docente sociointeracionista interdisciplinar e contextualizada.

Os objetivos específicos foram:

• Propor um Produto Educacional;

• Estabelecer relações entre várias áreas do conhecimento com a Geometria de Posição e Poliedros Regulares;

• Levantar questões em forma de desafios referente à Geometria de Posição e Poliedros Regulares;

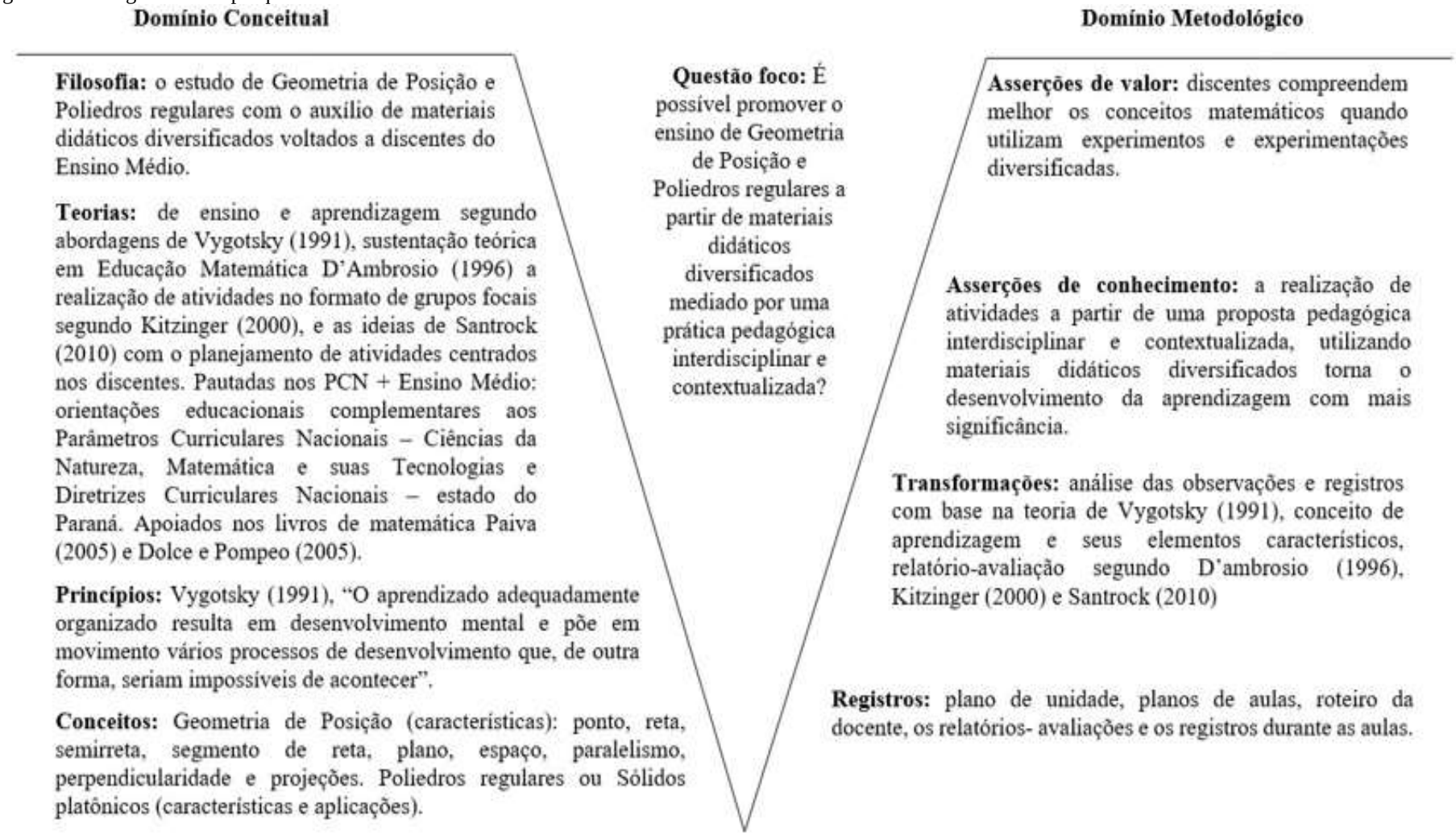
• Explicar questões Matemáticas referentes ao estudo de Geometria de Posição e Poliedros Regulares;

• Identificar o nível de interesse dos discentes frente ao desenvolvimento das aulas;

• Reconhecer possíveis erros de significação.

A fim de apresentar de forma sucinta as especificações dos domínios conceituais e metodológicos desta pesquisa é apresentado o diagrama V na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Diagrama V da pesquisa



Fonte: A autora

Além disso, aqui são apresentas descrições breves sobre cada capítulo desta dissertação[1]:

1 Introdução: capítulo onde foram apresentadas as linhas gerais do trabalho, como os domínios metodológicos e conceituais da presente pesquisa.

2 Aspectos da literatura acerca do foco da pesquisa: descreve os aspectos da literatura acerca do foco da pesquisa, destacando os documentos oficiais de Matemática e listando fontes, obras e referências pesquisadas que utilizem materiais diversificados ao ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares e, a teoria de Lev Vygotsky.

3 Geometria de Posição e Espacial: apresenta as bases segundo dois livros didáticos sobe o assunto, traçando um paralelo entre os conceitos e imagens representativas apresentadas nas aulas de Matemática durante a aplicação do Produto Educacional.

4 Materiais e métodos: descreve o público alvo de cada uma das aplicações, os elementos que compõem o plano de unidade, os planos de aulas, os roteiros da docente anteriores as aulas e, as observações das atividades.

5 Análise dos resultados: expõem as especificidades de cada aplicação do Produto Educacional em relação à análise dos dados, promovendo discussões pontuais.

6 Discussão dos resultados: promove uma abordagem ampla em uma discussão geral dos resultados da aplicação do Produto Educacional.

7 Considerações Finais e Trabalhos Futuros: resgata os aspectos da discussão sobre os elementos da teoria e propostas de utilização do Produto Educacional.

Apêndice A - Produto Educacional: Da Geometria de Posição aos sólidos de Platão, apresenta todos os materiais utilizados nessa pesquisa em formato de unidade didática.

[1] Dissertação: Reflexão de uma Prática Interdisciplinar e Contextualizada para o Ensino de Geometria de Posição e Sólidos de Platão.

2 ASPECTOS DA LITERATURA ACERCA DO FOCO DA PESQUISA

O presente capítulo tem como finalidade apontar aspectos da literatura acerca do foco da pesquisa, destacar os documentos oficiais de Matemática e listar fontes, obras e referências pesquisadas que utilizem materiais diversificados ao ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares e, a teoria de Lev Vygotsky, usada como instrumento para verificação do ensino e da efetividade do material e da abordagem por parte da docente, sendo assim, o objeto de estudo: a prática docente, o material e a abordagem de ensino e aprendizagem com as especificidades essenciais para a concepção, elaboração e o andamento da aplicação do Produto Educacional.

2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E POLIEDROS REGULARES SEGUNDO OS DOCUMENTOS OFICIAIS

A Geometria de Posição e Espacial compõem o currículo de Matemática e são mencionados nos documentos oficiais, ou seja, as propostas para o ensino de Matemática: Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM, 2000), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 2002) e das Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR, 2008).

Na educação básica, sempre que houver a possibilidade, a docente deve mostrar aos discentes onde está a aplicabilidade dos assuntos de Matemática no cotidiano pois, os conceitos primordiais, muitas vezes podem ser caracterizados em contato com vários ambientes e/ou objetos que se encontram a nossa volta.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações". (PCNEM, 2000, p. 40)

No Ensino Médio, deve-se garantir ao discente o aprofundamento dos conceitos da Geometria Plana e Espacial em um nível de abstração mais complexo que no Ensino Fundamental, sendo o conhecimento geométrico organizado com coesão lógica. (DCE-PR, 2008).

O Caderno de Expectativas de Aprendizagem (PARANÁ, 2012, p.93) define como conteúdo estruturante: Geometrias e conteúdos básicos: Geometria Plana, Geometria Espacial,

Geometria Analítica e Geometrias não-euclidianas. Nessa pesquisa são abordados diretamente apenas os dois primeiros temas do conteúdo básico. Como expectativas de aprendizagem dos dois conteúdos, são citados: a compreensão dos conceitos de ponto, reta e plano; a verificação das posições relativas entre pontos, retas e planos, no espaço; resolução de situações-problema envolvendo posições relativas entre pontos, retas e planos; cálculo de área, volume e capacidade de sólidos geométricos; e, resolução de situações-problemas envolvendo o cálculo de áreas de superfícies, volume e capacidade de sólidos geométricos.

O ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares nesta pesquisa é justificado pelos documentos oficiais, considerando que há uma necessidade de envolver os discentes ao ensino de Geometrias.

O foco das estratégias utilizadas na pesquisa está em buscar uma maneira cativante de levar os discentes a um bom desenvolvimento do conhecimento, priorizando o trabalho em grupo, partindo do social ao individual.

2.2 GEOMETRIA DE POSIÇÃO E POLIEDROS REGULARES NO ENSINO MÉDIO

Durante o desenvolvimento da presente pesquisa, foram feitos levantamentos na literatura a fim de identificar trabalhos semelhantes ao aqui proposto que trata do referido conteúdo estruturante Geometria de Posição e Poliedros no Ensino Médio, traçando-se assim um parâmetro acerca das pesquisas, até então, realizadas que utilizam materiais didáticos diversificados para relacionar assuntos do dia a dia ao ensino de Geometria de Posição e Espacial, com reflexões às práticas de ensino e aprendizagem focadas na teoria de Vygotsky. E, do que se tem conhecimento, não foram encontrados trabalhos de Matemática, mais especificamente Geometria de Posição e Espacial com a perspectiva de propor uma prática pedagógica interdisciplinar e contextualizada, com aspectos da teoria de Vygotsky.

Cunha (2014) destaca o processo do desenvolvimento do aprendizado e a construção do saber, baseando-se nas características do ensino, explorando o conceito de zona do desenvolvimento proximal proposta por Vygotsky, focando na sua influência à educação de modo geral, sem algum destaque para a Matemática.

Na dissertação de Gomes (2007) é apresentada uma revisão bibliográfica com propostas de atividades a partir das resoluções de problemas com questões do ENEM, objetivando subsidiar docentes nas atividades de Matemática relacionadas ao conteúdo de Geometria segundo os documentos oficiais.

Silva (2014) compara e discute definições encontradas nos livros didáticos de Matemática utilizados nas escolas brasileiras e, por fim propõe a utilização de *softwares* para o desenvolvimento de aulas de poliedros.

Singulani (2016) apresenta a análise da abordagem de um livro de Ensino Médio. Apresenta como sugestão o apoio de um vídeo ao ensino de Geometria Espacial, em seguida relata sua experiência em turmas do 2º ano do Ensino Médio, porém não deixa claro a fundamentação no ensino e aprendizagem dos discentes.

Nogueira (2014) fez um estudo comparando metodologias de aprendizagem ao ensino de Geometria Espacial, constatando assim a eficácia do ensino com materiais diversificados após a aplicação em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos (EJA), com foco na Educação Matemática.

Rogenski e Pedroso (2007) utilizaram o cinema como ponto de partida, relacionando-o às artes, à biologia, à arquitetura e a outros aspectos do mundo físico, para demonstrar aos discentes que a geometria está presente em diversas situações do cotidiano e que é possível associá-la aos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Com o levantamento da literatura, foi possível perceber que Gomes (2007), Silva (2014) propõem atividades diferenciadas sem suas devidas aplicações, já Singulani (2016) relata a experiência com vídeo, mas não deixa clara a teoria de aprendizagem utilizada, enquanto que Nogueira (2014), Rogenski e Pedroso (2007) citam em suas pesquisas os documentos oficiais e a Educação Matemática, porém não deixam claros os métodos utilizados em termos de teorias de ensino e aprendizagem.

2.3 FUNDAMENTAÇÃO NO ENSINO E APRENDIZAGEM

A presente pesquisa está fundamentada na teoria sociointeracionista de Lev Vygotsky e utiliza como instrumento o relatório-avaliação proposto por Ubiratan D'Ambrosio (1996), a partir de dados obtidos coletivamente, na modalidade de grupos focais segundo Kitzinger (2000), pois, com olhar crítico a este instrumento e aos demais documentos analisados (plano de unidade, planos de aulas, roteiro da docente e os registros durante as aulas), é possível avaliar o processo de ensino e aprendizagem, com o foco no planejamento de atividades centrados nos discentes como propõe Santrock (2010) a partir dos registros docentes e resultados dos discentes em cada aula.

Para Kitzinger (2000), o grupo focal é uma forma de entrevistas com grupos, baseada na comunicação e na interação. Seu principal objetivo é reunir informações detalhadas sobre um tópico específico a partir de um grupo de participantes selecionados.

No processo de interação com o meio, os discentes participam desde o início das atividades construindo seu aprendizado com a participação dos colegas de classe, necessitando às vezes do auxílio de uma pessoa mais experiente para chegar a uma conclusão sobre determinado assunto, ou seja, o sujeito é interativo porque constitui conhecimentos e se constitui a partir de relações interpessoais e intrapessoais, segundo a teoria de Vygotsky.

Para Lev Vygotsky (1987, 1988), o surgimento dos processos sociais advém dos processos mentais superiores (pensamento, linguagem, comportamento); o desenvolvimento cognitivo se dá a partir da transformação de relações sociais em funções mentais, ou seja, primeiro em nível social e depois em nível individual, primeiro entre pessoas (interpessoal) e após no interior do sujeito (intrapessoal).

O relatório-avaliação se estabelece como um dos instrumentos que avalia o resultado intrapessoal dos discentes quando realizado individualmente e, além disso, avalia também a efetividade das estratégias da docente. Nesse caso, o objetivo é verificar como a aula foi recebida pelo discente, qual o conteúdo que ficou. “Essa proposta parte da aceitação do fato que o professor está num processo permanente de aprimorar sua prática e nada melhor para isso do que ele próprio conhecer seu desempenho por meio de relatórios dos que estão participando dessa prática. ” (D’AMBROSIO, 1996 p. 72).

O docente deve ser um mediador do conhecimento, de modo a colaborar com os discentes, no sentido de subsidiar o conhecimento por meio dos aparatos de Geometria de Posição e Espacial, sempre refletindo a sua prática e a aprimorando quando julgar necessário, focando em como se desenvolve a relação dos discentes com o meio.

Vygotsky (1987, p. 101) afirma: “o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer”. Portanto, o importante é apresentar aos discentes, formas de pensamento e identificar as condições que eles têm de abstrair o conhecimento.

No sociointeracionismo, segundo Vygotsky o desenvolvimento intelectual do indivíduo está baseado nas relações com a cultura e suas interações com a sociedade. “O processo de ensino aprendizagem inclui sempre aquele que aprende, aquele que ensina e a relação entre essas pessoas. ” (OLIVEIRA, 1995, p.57).

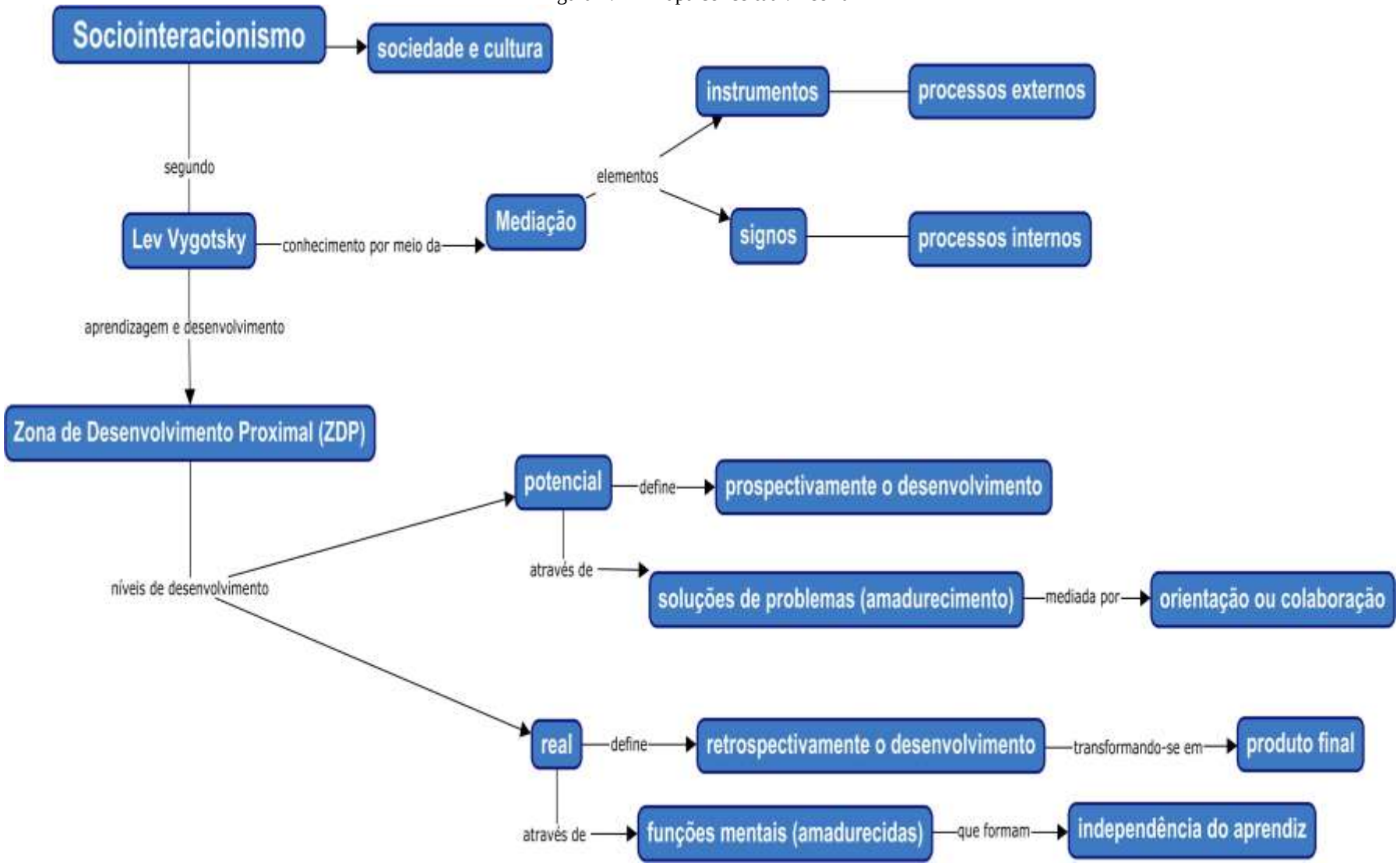
Na relação do homem com o mundo, conta-se com o auxílio do conhecimento por meio da mediação entre dois elementos mediadores: instrumentos que são processos externos que auxiliam nas ações sobre o meio e, signos, considerados instrumentos psicológicos, quando transformados em processos internos de mediação favorecendo o desenvolvimento dos sistemas simbólicos. “Para Vygotsky, a atividade simbólica tem uma função organizadora específica que invade o processo do uso de instrumento e produz formas fundamentalmente novas de comportamento”. (BESSA, 2008, p.69).

As relações entre desenvolvimento e aprendizagem podem ser compreendidas a partir do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), ligação entre o nível de desenvolvimento real e nível de desenvolvimento potencial. O nível potencial define prospectivamente o desenvolvimento por meio de soluções dos problemas, mediados por orientações e/ou colaborações. O nível real define retrospectivamente o desenvolvimento e o produto, ou seja, as funções mentais que ativam a independência do aprendiz.

A partir dos dois níveis de desenvolvimento, há indícios de que a ZDP está sendo desenvolvida, ativando o conhecimento cognitivo por meio das suas ações intermediadas, participação mútua de indivíduos, discentes e/ou docentes que cooperam para o desenvolvimento das funções mentais superiores, ou seja, a ZDP pode ser julgada como a indicação da efetivação da mediação proposta nas atividades para que o discente transforme o conhecimento potencial em conhecimento real por meio da interação social, segundo a teoria da mediação de Vygotsky.

As ideias-chaves do sociointeracionismo segundo Vygotsky que aparecem ao longo da presente pesquisa, de acordo com a concepção da docente proponente do trabalho, podem ser resumidas a partir do mapa conceitual apresentado na sequência na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Mapa conceitual: Teoria



Fonte: A autora

3 GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL

Neste capítulo serão apresentadas conceitos, definições e propriedades sobre Geometria de Posição e Espacial e algumas aplicações, traçando um paralelo entre os conceitos e imagens representativas apresentadas nas aulas de Matemática durante a aplicação do Produto Educacional.

3.1 CARACTERÍSTICAS, DEFINIÇÕES, POSTULADOS E TEOREMAS

Para elaboração do Produto Educacional e esta seção sobre Geometria de Posição e Espacial foram utilizadas as obras de Paiva (2005) e Dolce e Pompeo (2005), dois livros didáticos com os conteúdos específicos discutidos aqui.

Segundo as Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR, 2008), ao longo de todo o Ensino Médio deve-se garantir aos discentes o aprofundamento dos conceitos da Geometria de Posição e Espacial em um nível de abstração mais complexo que o Ensino Fundamental. Embora, se pense que este conteúdo seja de fácil assimilação pelos discentes pela facilidade em relacionar os sólidos com objetos do seu cotidiano, isso nem sempre ocorre. Muitas vezes esses conteúdos são trabalhados de forma tradicional, em que o discente precisa visualizar e abstrair um sólido tridimensional de uma figura no plano bidimensional, impressa no livro didático ou desenhada no quadro.

A Geometria está presente em todas as formas, imagens e objetos do cotidiano do discente, assim é possível visualizar elementos da geometria plana e espacial em todos os ambientes. Na própria sala de aula, é possível observar o formato de portas e janelas, treliças do telhado e piso. Por meio da visualização e manipulação de objetos da sala de aula, como caixa de giz, estojo do apagador, lata de lixo de forma cilíndrica, entre outros. Desta forma, o discente consegue relacionar as formas e objetos que o rodeia com os conceitos geométricos, tornando o aprendizado da geometria significativa em sua vida.

Na sequência deste capítulo, será caracterizada a Geometria de Posição, utilizando as principais representações de objetos matemáticos atribuídos a ela. Em seguida, será caracterizada a Geometria Espacial com foco nos Poliedros Regulares, com aplicações em Cristalografia.

Alguns dos assuntos apresentados nas aulas têm a representação geométrica seguidos de fotos associadas, a fim de estabelecer uma relação entre a Matemática e o cotidiano, sendo

estas apresentadas em toda a aplicação do Produto, nos slides das aulas, no momento: “Convergindo ideias”.

3.1.1 Ponto e reta: características gerais

Apresenta-se, nesta seção, as características de ponto e reta com imagens associadas as suas respectivas representações.

Inicialmente, faz-se necessário apresentar as notações utilizadas para designar os entes geométricos: ponto, reta e plano, que por vezes aparecerão nas imagens das figuras deste capítulo. Desta forma, a seguinte notação é adotada:

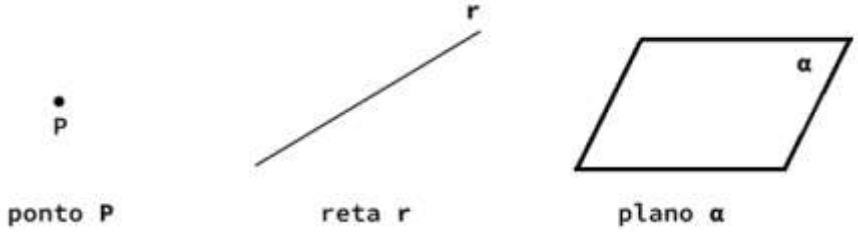
Ponto - é representado por letras maiúsculas latinas: A, B, C...

Reta - é representada por letras minúsculas latinas: a, b, c...

Plano - é representado por letras gregas minúsculas: α, β, γ...

Em Geometria, ponto, reta e plano são caracterizados como conceitos primitivos (noções primitivas) da Geometria, os quais não necessitam de definição formal. A compreensão desses conceitos ocorre a partir entendimento intuitivo da experiência e observação no próprio cotidiano, dentro ou fora do ambiente escolar. Nesse sentido na figura 3.1, são apresentados exemplos de pontos, retas e plano com as respectivas notações.

Figura 3.1 – Ponto, reta e plano, representação geométrica

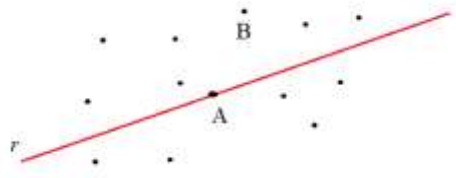


Fonte: A autora

A Geometria Espacial é desenvolvida sobre o conjunto de todos os pontos, que definem o espaço no qual vivemos, em 3 dimensões. O Plano e o espaço serão abordados em outras seções.

Uma reta é um conjunto de pontos alinhados, ou seja, infinitos pontos que pertencem a reta. A figura 3.2, apresenta vários pontos, sendo que o ponto A pertence a reta *r* e o ponto B não pertence a reta *r*.

Figura 3.2 – Pertinência entre pontos e reta, representação geométrica



Fonte: A autora

A representação matemática quanto a relação de pertinência, é denotada da seguinte forma: $A \in r$ (A pertence a reta *r*) e $B \notin r$ (B não pertence a reta *r*).

As propriedades de Geometria de Posição são aceitas sem demonstrações, por isso chamadas de postulados. Por meio da figura 3.2, observa-se que além do ponto B, existe infinitos pontos que não pertencem a reta, o que é confirmado pelo seguinte postulado.

Postulado da existência: existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

Com intuito de relacionar ponto e reta com o cotidiano do discente, as próximas figuras, apresentam duas fotos associadas a essa ideia. A figura 3.3 representa a ideia de que pontos alinhados formam uma reta.

Figura 3.3 – A ideia de pontos e reta no cotidiano, foto associada

Fonte: KAUER, Michael. Bolas De Pedra. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/stone-grade-ponte-gateway-idade-3237174/. Acesso em: 30 abr. 2018.

Pela foto da Figura 3.4, é possível visualizar as retas (faixas laterais e centrais) de uma estrada, e ao longe a linha do horizonte, que também pode ser a representação de uma reta.

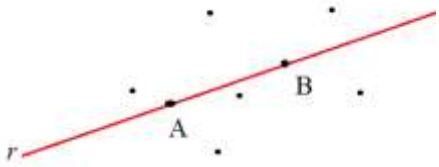
Figura 3.4 – Representação de retas, foto associada

Fonte: SKEEZE. Natureza/ Paisagens. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/deserto-estrada-reta-paisagem-1128835/. Acesso em: 30 abr. 2018.

A partir da visualização de representações de retas no cotidiano, volta-se a formalização dos conceitos geométricos.

Dados dois pontos distintos A e B, é possível traçar uma reta que passa por estes pontos, conforme apresentado na figura 3.5, e se diz que a reta *r* é determinada pelos pontos A e B.

Figura 3.5 – Reta determinada pelos pontos A e B, representação geométrica



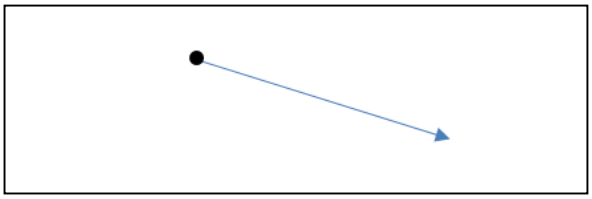
Fonte: A autora

Por meio da figura 3.5, é possível compreender o que diz o seguinte postulado:

Postulado da determinação (reta): dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

Importante que se defina semirretas, figura 3.6, as quais tem as seguintes características: limitada no início e ilimitada no fim.

Figura 3.6 – Semirreta, representação geométrica



Fonte: A autora

Apresenta-se, na figura 3.7, um segmento de reta. Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o segmento de extremidades A e B, tem como característica limitar a reta em dois pontos.

Figura 3.7 – Segmento de reta AB, representação geométrica

Fonte: A autora

Uma representação do segmento de reta, pode ser observado na Figura 3.8. Tem-se uma foto associada de um trilho ferroviário, onde as travessas representam a ideia de segmento de reta.

Figura 3.8 – Segmento de reta, foto associada

Fonte: TAMA66. Trem. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/ferrovi%C3%A1ria-parecia-faixa-trem-2439189/. Acesso em: 30 abr. 2018.

3.1.2 Posições relativas de duas retas

Nesta seção serão estudadas quais as posições que duas retas podem assumir no espaço. Dadas duas retas no espaço, as possíveis posições relativas observadas entre elas, são:

I – Retas coplanares – retas contidas no mesmo plano, e os seguintes casos podem ocorrer:

i – Retas Paralelas:

a) Paralelas coincidentes (ou iguais);

b) Paralelas distintas;

ii – Retas concorrentes:

a) Retas perpendiculares (caso particular de retas concorrentes).

II – Retas não coplanares — retas que não estão contidas num mesmo.

i – Retas reversas.

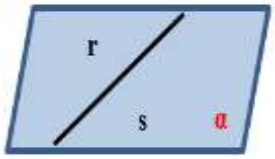
Na sequência serão apresentadas as características, e representações de cada posição que duas retas podem assumir no espaço, conforme citado acima.

I – Retas coplanares – Considere duas retas contidas no mesmo plano α.

i - Paralelas: duas retas são paralelas se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto em comum.

a) Paralelas coincidentes (ou iguais): pertencem ao mesmo plano e possuem todos os pontos em comum. Uma representação geométrica de duas retas paralelas coincidentes é apresentada na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Retas paralelas coincidentes, representação geométrica

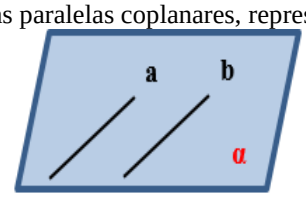


Fonte: A autora

Se as retas r e s são coincidentes (iguais), a notação matemática utilizada é $r = s$.

b) Paralelas distintas: pertencem ao mesmo plano, mas não têm ponto em comum. Apresenta-se, na Figura 3.10, uma representação geométrica de retas paralelas coplanares.

Figura 3.10 – Retas paralelas coplanares, representação geométrica



Fonte: A autora

Se as retas a e b são paralelas distintas, isto é, as retas a e b estão contidas no mesmo plano α mas não possuem pontos em comum ($a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$ e $a \cap b = \emptyset$), a notação matemática para retas paralelas é $a//b$.

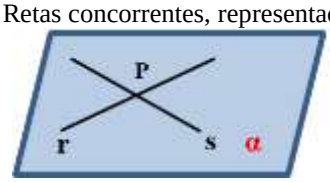
Na Figura 3.11, têm-se respectivamente duas fotos associadas a ideia de retas paralelas distintas como caracterização de retas que não possuem ponto em comum, destacando que em nenhum dos casos elas se encontram no infinito, nem nos trilhos de trem, nem nas faixas amarelas pintadas na estrada.

Figura 3.11 – Retas paralelas coplanares, fotos associadas

Fonte: idem fonte das Figuras 3.4 e 3.8

ii) Concorrentes: duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum. Uma representação geométrica de duas retas concorrentes é apresentada na Figura 3.12.

Figura 3.12 – Retas concorrentes, representação geométrica

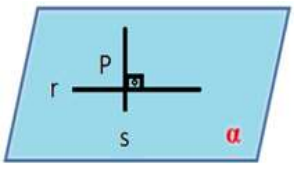


Fonte: A autora

As retas *r* e *s* são concorrentes, sendo ponto P a interseção estre elas, isto é $r \cap s = \{P\}$.

a) Retas perpendiculares: duas retas são concorrentes perpendiculares se, e somente se, elas têm um único ponto em comum formando um ângulo reto (90°). Uma representação geométrica de duas retas perpendiculares é apresentada na Figura 3.13.

Figura 3.13 – Retas perpendiculares, representação geométrica



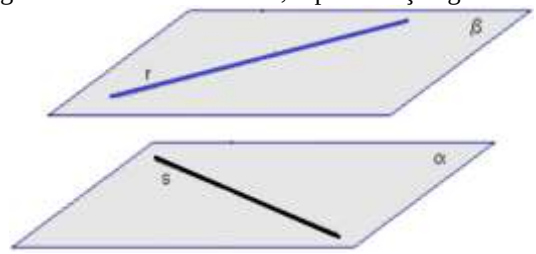
Fonte: A autora

Se as retas *r* e *s* são perpendiculares, usa-se a notação matemática $r \perp s$.

II – Retas não coplanares - retas que não se situam num mesmo plano.

i) Reversas: duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano que as contenha. Uma representação geométrica de duas retas reversas é apresentada na Figura 3.14.

Figura 3.14 – Retas reversas, representação geométrica



Fonte: A autora

Se as retas *r* e *s* são reversas, isto é, ($r \subset \beta$, $s \subset \alpha$) e não existe um plano que as contenha ao mesmo tempo. Observe que se as retas *r* e *s* fossem paralelas, mesmo em planos distintos, bastava passar um plano δ, perpendicular aos planos α e β, que poderia conte-las.

3.1.3 Plano e espaço: características

Embora a maioria dos objetos que nos rodeiam não sejam planos, eles podem ser estudados a partir de figuras planas.

Por exemplo:

✓ ao cortar uma laranja com uma faca, determinamos duas superfícies planas;

✓ a superfície da pedra de granito de uma pia é plana, porém foi obtida seccionando-se uma pedra bruta, irregular;

✓ um campo de futebol é construído por um corte na esfera terrestre.

Na aula de plano e espaço foi utilizada apenas uma imagem, que é apresentada na Figura 3.15, e a partir das características dela foram explorados os conceitos do assunto.

Figura 3.15 – Plano e espaço, foto associada

Fonte: AKYURT, Engin. Café expresso. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/caf%C3%A9 caneta-caderno-trabalho-livro-2306471/. Acesso em: 08 mai. 2018.

Na Figura 3.15, pode-se visualizar várias seções planas, entre elas as folhas do caderno e o tampo da mesa. Portanto, diz-se que, uma figura é plana quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Observando o pires sobre a mesa, constata-se que muitos de seus pontos tocam o tampo da mesa e muitos não tocam, isto é, os pontos do pires não pertencem a um mesmo plano; por isso, diz que o pires é uma figura reversa em relação ao tampo da mesa. Daí constata-se que, uma figura é reversa quando seus pontos não pertencem todos a um mesmo plano, assim como na definição de retas reversas, estudadas anteriormente.

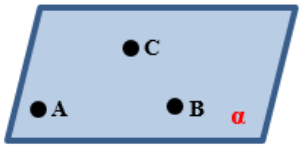
Retornado aos conceitos geométricos, tem-se os seguintes postulados:

Postulado da existência de plano: existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

Postulado da determinação de plano: três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

A Figura 3.16, apresenta uma representação geométrica de plano por meio de três pontos.

Figura 3.16 – Determinação (plano), representação geométrica



Fonte: A autora

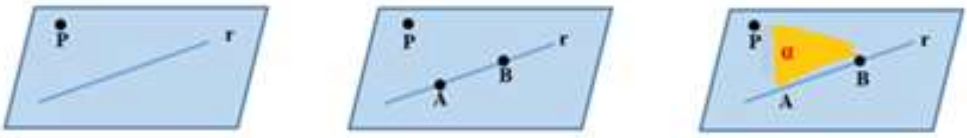
Dados três pontos não colineares, não alinhados, dizemos que o plano α é determinado por estes três pontos, ou seja $\alpha = (A, B, C)$.

Além dos postulados apresentados, determina-se um plano por três teoremas:

TEOREMA 1: Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence a reta, então eles determinam um único plano que os contém. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 4)

Uma representação geométrica (existência) de uma reta e um ponto fora dela é apresentada na Figura 3.17.

Figura 3.17 – Uma reta e um ponto fora dela (existência), representação geométrica



Fonte: A autora

Tomando em r dois pontos distintos, A e B.

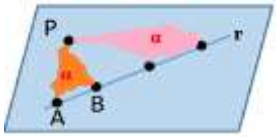
Os pontos A, B e P, não sendo colineares (A, B $\in r$ e P $\notin r$), determinam um plano α.

$\alpha = (A, B, P) \Rightarrow P \in \alpha$

$\alpha = (A, B, P);\ A \neq B;$ sendo que $A, B \in r \Rightarrow$ r $\subset$ α

Uma representação geométrica (unicidade) de uma reta e um ponto fora dela é apresentada na Figura 3.18.

Figura 3.18 – Uma reta e um ponto fora dela (unicidade), representação geométrica



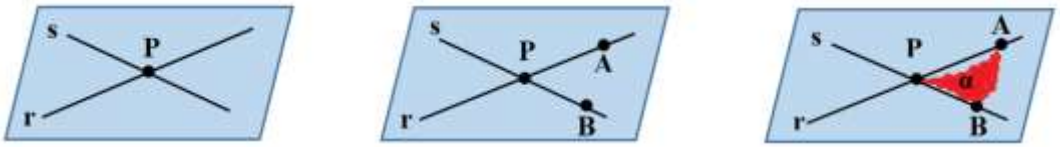
Fonte: A autora

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r, P);\ A, B \in r) \Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P);\ A, B \in r) \Rightarrow \alpha' = (A, B, P)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{r} \subset \alpha$$

TEOREMA 2: Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 5)

Uma representação geométrica (existência) de duas retas concorrentes é apresentada na Figura 3.19.

Figura 3.19 – Determinação de um plano - retas concorrentes (existência), representação geométrica



Fonte**:** A autora

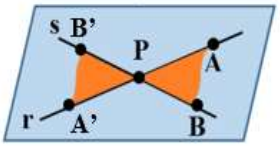
Tomamos um ponto A em r e um ponto B em s, ambos distintos de P.

Os pontos A, B e P, não sendo colineares ($A, P \notin r$ e $B \in r$), determinam um plano α.

$(\alpha = (A, B, P);\ A, P \in r;\ A \neq P) \Rightarrow$ r $\subset$ α $(\alpha = (A, B, P);\ A, P \in s;\ B \neq P) \Rightarrow$ $s \subset \alpha$

Uma representação geométrica (unicidade) de retas concorrentes é apresentada na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Determinação de um plano - retas concorrentes (unicidade), representação geométrica



Fonte: A autora

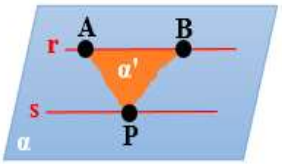
Se existissem $\alpha \; e \; \alpha'$, por $r \; e \; s$ concorrentes teríamos:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r,s);\ A,P \in r;\ B \in s) \Rightarrow \alpha = (A,B,P) \\ (\alpha' = (r,s);\ A,P \in r;\ B \in s) \Rightarrow \alpha' = (A',B',P)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

TEOREMA 3: Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 6)

Uma representação geométrica de duas retas paralelas e distintas entre si é apresentada na Figura 3.21.

Figura 3.21 – Determinação de um plano - retas paralelas e distintas entre si, representação geométrica



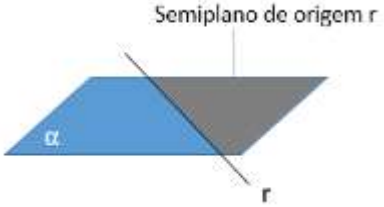
Fonte: A autora

Se existir α e α', por r e s paralelas e distintas, toma-se A e B distintos em r e P em s, então:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha = (r,s);\ A,B \in r;\ P \in s) \Rightarrow \alpha = (A,B,P) \\ (\alpha' = (r,s);\ A,B \in r;\ P \in s) \Rightarrow \alpha' = (A,B,P)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Toda reta r contida em um plano α divide-o em duas regiões. A reunião da reta r com qualquer uma dessas regiões é chamada semiplano de origem r. (PAIVA, 2005, p.374). Na Figura 3.22, uma representação geométrica de semiplano é apresentada.

Figura 3.22 – Semiplano de origem r, representação geométrica



Fonte: A autora

Observa-se na figura, que a reta r, divide o plano α em duas partes, à esquerda de r em (azul), o semiplano denotado por spl(r-), e a direita de r em cinza, o semiplano denotado por spl(r+).

Postulado da inclusão de uma reta à um plano: Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

A Figura 3.23, apresenta uma representação geométrica de uma reta e dois pontos distintos pertencentes ao plano α.

Figura 3.23 – Uma reta e dois pontos distintos num plano, representação geométrica

Fonte: A autora

Os pontos A e B são distintos e pertencentes ao plano α, como uma reta é determinada por dois pontos, então $(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$, ou seja, r está contida no plano.

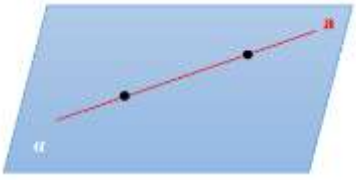
3.1.4 Posições relativas de uma reta e um plano

Nesta seção serão estudadas quais as posições relativas que uma reta pode assumir em relação a um plano.

Considerando uma reta a e um plano α, são possíveis as seguintes posições:

i) Reta contida no plano: a interseção entre a reta e o plano, que nesse caso é a própria reta. Uma representação geométrica dessa posição é apresentada na Figura 3.24.

Figura 3.24 – Reta contida no plano

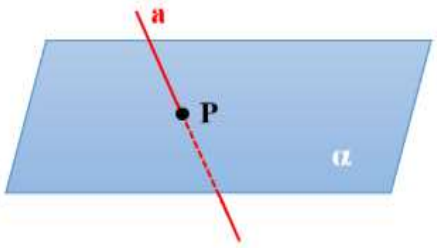


Fonte: A autora

A reta a está contida no plano α, se a interseção entre a reta e o plano é a própria reta, isto é, $a \subset \alpha$, então $a \cap \alpha = a$.

ii) A reta e o plano são concorrentes: neste caso a interseção entre a reta e o plano é um ponto. Na Figura 3.25, tem-se uma representação geométrica dessa posição.

Figura 3.25 – Reta concorrente ao plano



Fonte: A autora

A reta a fura o plano α, a interseção entre a reta e o plano é um ponto, a $\cap\, \alpha = \{P\}$

iii) A reta e o plano são paralelos: neste caso não existe interseção entre a reta e o plano. Uma representação geométrica é apresentada na Figura 3.26.

Figura 3.26 – Reta paralela ao plano

Fonte: A autora

A reta a é paralela ao plano α, não existe interseção entre a reta e o plano, a $\cap\, \alpha = \emptyset$.

3.1.5 Posições relativas de dois planos

Nesta seção serão estudadas quais as posições relativas entre dois planos no espaço. Considerando os planos α e β, são possíveis as seguintes posições:

i) Coincidentes (ou iguais): dois planos são coincidentes se, e somente se, eles têm todos os pontos em comum. Uma representação geométrica de dois planos coincidentes é apresentada na Figura 3. 27.

Figura 3.27 – Dois planos coincidentes, representação geométrica

Fonte: A autora

Os planos α e β, são coincidentes, então $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$.

ii) Paralelos distintos: dois planos são paralelos distintos se, e somente se, não têm ponto em comum. Na Figura 3.28, é apresentada uma representação geométrica de dois planos paralelos distintos.

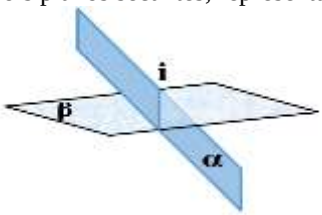
Figura 3.28 – Dois planos paralelos distintos, representação geométrica

Fonte: A autora

Os planos α e β, são paralelos, então a interseção é vazia, $\alpha \cap \beta = \phi$.

ii) Concorrentes: dois planos são concorrentes se, e somente se, têm uma única reta em comum. Uma representação geométrica de dois planos secantes é apresentada na Figura 3.29.

Figura 3.29 – Dois planos secantes, representação geométrica



Fonte: A autora

Os planos α e β, são concorrentes, então a interseção é uma reta, $\alpha \cap \beta =$ i.

Observação quanto as atividades: Uma vez que há várias atividades abordando este assunto, no decorrer do desenvolvimento das mesmas, são considerados os seguintes esclarecimentos implícitos:

i) um plano é formado por um conjunto infinito e ilimitado de retas.

ii) um plano possui 2 dimensões: largura e altura.

iii) uma figura é reversa quando seus pontos não pertencem todos a um mesmo plano.

iv) uma figura é plana quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

v) o espaço é o conjunto de todos os pontos e, também um conjunto infinito de planos.
vi) quando uma reta divide o espaço em duas partes, essas partes são chamadas de semi-espaços.
vii) dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
viii) por dois pontos distintos passam infinitos planos.
vix) um plano perpendicular a uma reta de outro plano é perpendicular a ele.
x) se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles, é perpendicular ao outro.

3.1.6 Condições de paralelismo

Retornado a alguns conceitos geométricos, tem-se os seguintes postulados:

Postulado das paralelas (postulado de Euclides): Por um ponto existe uma única reta paralela a uma reta dada.

A Figura 3.30 apresenta uma foto associada a representação geométrica de retas paralelas.

Figura 3.30 – Retas paralelas coplanares, foto associada

Fonte: SONGSIL, Nanthapongs. Viagem/ Férias. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/trem-ferrovia-viagens-2887610/. Acesso em: 10 mai. 2018.

Outro conceito geométrico, refere-se aos seguintes postulados:

Transitividade do paralelismo de retas: Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 19).

Considere três retas *a*, *b* e *c* no espaço, matematicamente tem-se que:

Se $a \parallel c$ e $b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$.

*Paralelismo entre retas e planos***:** Uma reta é paralela a um plano (ou o plano é paralelo à reta) se, e somente se, eles não têm ponto comum. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 19).

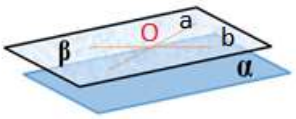
Uma representação geométrica do paralelismo entre retas e planos foi apresentada anteriormente na Figura 3.25. Considere a reta *a* e o plano α, se a reta e o plano são paralelos, matematicamente tem-se que: $a \,//\, \alpha \Leftrightarrow a \cap \alpha = \emptyset$.

*Paralelismo entre planos***:** Dois planos são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são iguais (coincidentes). (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 25).

A representação geométrica de paralelismo entre planos foi apresentada nas Figuras 3.26 e 3.27. Considere os planos α e β, se os planos são paralelos, tem-se dois casos: são paralelos coincidentes ou paralelos distintos. Então: $\alpha \,//\, \beta \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ou } \alpha \cap \beta = \emptyset)$.

Um teorema garante que, se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 26). Uma representação geométrica (existência) de planos paralelos é apresentada na Figura 3.31.

Figura 3.31 – Existência de planos paralelos, representação geométrica



Fonte: A autora

Considere duas retas a e b concorrentes no ponto O e contidas no plano β, existe um plano α, tal que: Se $a \subset \beta$ e $b \subset \beta$; $a \cap b = \{O\}$; então $a // \alpha, b // \alpha) \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$.

3.1.7 Condição de Perpendicularidade

Nesta seção serão apresentados os casos de perpendicularidade de retas, planos e aspectos de projeções.

Perpendicularidade entre retas: Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos retos entre si.

A representação geométrica de perpendicularidade entre retas foi apresentada anteriormente na Figura 3.13. Considere duas retas r e s pertencentes ao plano α, se elas são concorrentes no ponto P e formam um angulo reto entre si, elas são perpendiculares $r \perp s$.

A Figura 3.32 apresenta uma foto associada a representação geométrica de retas perpendiculares Figura 3.13.

Figura 3.32 – Retas perpendiculares, foto associada

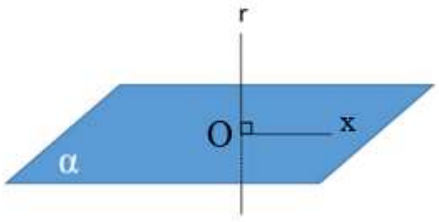
Fonte: GRUBBERT, Peter. Arquitetura/ Edifícios. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/treli%C3%A7a-in%C3%ADcio-constru%C3%A7%C3%A3o-1386121/. Acesso em: 10 mai. 2018.

Perpendicularidade entre reta e plano: Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.

Se uma reta α é perpendicular a um plano α (ou o plano α é perpendicular à reta α), o traço de α em α é chamado pé da perpendicular.

Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares. Uma representação geométrica de reta e plano perpendiculares é apresentada na Figura 3.33.

Figura 3.33 – Reta e plano perpendiculares, representação geométrica



Fonte: A autora

Consequência da definição: Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 35)

Condição suficiente de perpendicularismo: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 36).

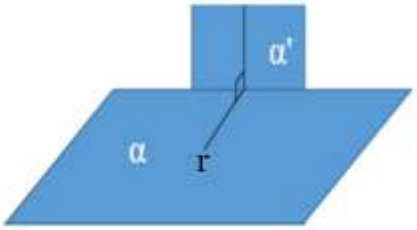
Se uma reta forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 39)

Importante ressaltar que: a condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é formar ângulo reto com duas retas concorrentes do plano. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 35)

Perpendicularidade entre planos: Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro lado. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 48)

Uma representação geométrica de planos perpendiculares é apresentada na Figura 3.34.

Figura 3.34 – Planos perpendiculares, representação geométrica



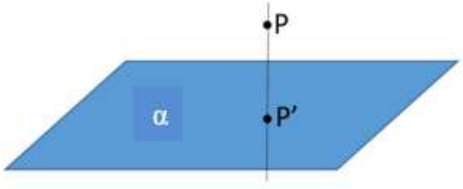
Fonte: A autora

Seja r uma reta pertencente ao plano α e seja o plano α' perpendicular à α, então matematicamente tem-se que: se $\alpha \perp \alpha'$ e $r \subset \alpha$, então $r \perp \alpha'$.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano: Chama-se projeção ortogonal de um ponto sobre um plano ao pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto. O plano é dito plano de projeção e a reta é a reta projetante do ponto. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 52)

Uma representação geométrica de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é apresentada na Figura 3.35.

Figura 3.35 – Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano, representação geométrica



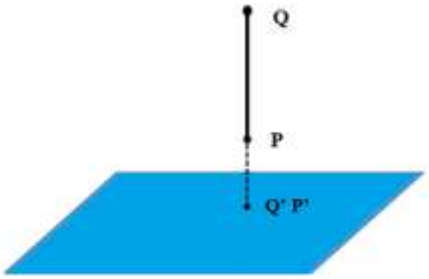
Fonte: A autora

Seja P um ponto no espaço e um plano α, então a projeção ortogonal do ponto P no plano α é representado pelo ponto P', tal que: $P' = \text{proj}_{\alpha} P$.

Projeção ortogonal de um segmento de reta (perpendicular) sobre um plano: Chama-se projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano α de um segmento $\overline{QP}$, contido

em uma reta perpendicular a α, ao ponto $\overline{Q'P'}$ onde Q' = $proj_{\alpha}$ Q e P'= $proj_{\alpha}$ P. Uma representação geométrica de projeção ortogonal de um segmento de reta(perpendicular) sobre um plano é apresentada na Figura 3.36.

Figura 3.36 – Projeção ortogonal de um segmento de reta (perpendicular) sobre um plano, representação geométrica



Fonte: A autora

Seja PQ um segmento de reta e um plano α, então a projeção ortogonal do segmento PQ no plano α é representado por Q'P'.

3.1.8 Espaço

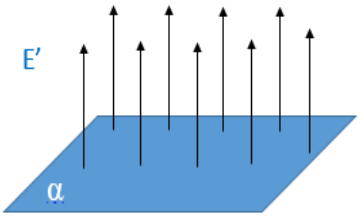
Usamos frequentemente a palavra espaço em afirmações que fazemos no nosso cotidiano. "Há muito espaço nessa sala".

Embora haja relação entre os significados da palavra espaço empregados no cotidiano e o significado geométrico dessa palavra, o conceito de espaço em geometria é mais abrangente. Poderíamos adotar como modelo do espaço geométrico o conjunto de todos os lugares: um lugar aqui na Terra, na Lua, onde for, faz parte do espaço. Portanto, espaço é o conjunto de todos os pontos.

Todo plano α divide o espaço em duas regiões. A reunião do plano α com qualquer uma dessas regiões é chamada de semi-espaço de origem α. (PAIVA, 2005, p. 374)

Na Figura 3.37, tem-se uma representação geométrica de semi-espaço.

Figura 3.37 – Semi-espaço, representação geométrica



Fonte: A autora

O conjunto E' formado pelos pontos de α pelos pontos "acima" de α é um semi-espaço de origem α.

3.2 POLIEDROS

Nesta seção serão apresentados os conceitos de Poliedros: superfícies poliédricas, convexidade, congruência, relação de Euler e aplicações. As definições e conceitos apresentados nas próximas subseções estão embasadas em Dolce e Pompeo (2005).

3.2.1 Superfície poliédrica limitada convexa

É a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;

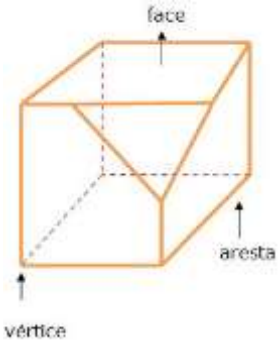
d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. As que não tem contorno são chamadas fechadas.

Elementos: uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

Na figura 3.38, é apresentado uma superfície poliédrica limitada convexa com seus elementos.

Figura 3.38 – Superfície poliédrica limitada convexa



Fonte: Poliedro. **Colegioweb.** Disponível em: https://www.colegioweb.com.br/dietros-triedros-poliedros-e-angulos-poliedricos/poliedros.html. Acesso em: 18 out. 2019.

Além dos ângulos dos polígonos.

Nota: uma superfície poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

3.2.2 Poliedro Convexo

Consideremos um número finito n (n≥4) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

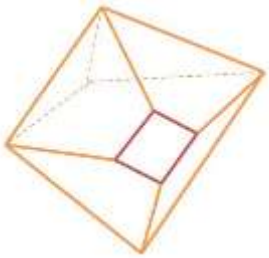
b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;

c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados no semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamada poliedro convexo.

Um poliedro convexo possui: faces, que são os polígonos convexos; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices, que são os vértices dos polígonos. Na figura 3.39, é apresentado poliedro convexo.

Figura 3.39 – Poliedro convexo



Fonte: Poliedro convexo. **Colegioweb.** Disponível em:https://www.colegioweb.com.br/dietros-triedros-poliedros-e-angulos-poliedricos/poliedros.html Acesso em: 18 out. 2019.

A reunião das faces é a superfície do poliedro.

3.2.3 Congruência

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

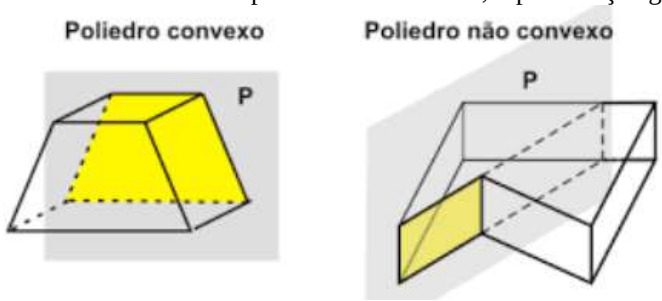
Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

3.2.4 Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação:
V – A + F = 2 em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Na Figura 3.40, uma representação geométrica de poliedro convexo e não convexo é apresentada.

Figura 3.40 – Poliedro convexo e poliedro não convexo, representação geométrica



Fonte: Poliedros. **Alfa connection.** Disponível em: https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/poliedros/poliedros/. Acesso em: 21 fev. 2019

Na Figura 3.41, são apresentadas duas fotos com ilustração de poliedro convexo e não convexo.

Figura 3.41 – Poliedro convexo (a) e poliedro não convexo (b), fotos associadas

Fonte: PIRO4D. Arquitetura/Edifícios. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/cubo-cubos-arquitetura-resumo-3501666/. Acesso em: 23 jun. 2018.

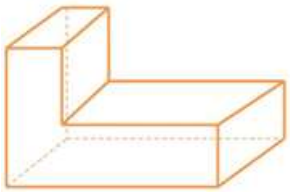
Fonte: SITTIWANTANA, Ekkapop. Arquitetura/Edifícios. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/escada-parede-branco-casa-interior-1743963/. Acesso em: 03 jul. 2018.

3.2.5 Poliedro Euleriano

Os poliedros que valem a relação de Euler, V – A + F = 2, são chamados poliedros Eulerianos. Todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.

Na figura 3,42, é apresentado um exemplo de um poliedro que atendem a relação de Euler, mas não é convexo.

Figura 3.42 – Poliedro Euleriano não convexo



Fonte: Poliedro não convexo. **Colegioweb.** Disponível em: https://www.colegioweb.com.br/dietros-triedros-poliedros-e-angulos-poliedricos/poliedros.html. Acesso em: 18 out. 2019.

3.2.6 Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;

c) vale a relação de Euler *(V – A + F = 2).*

No quadro 3.1, é apresentado a nomenclatura dos poliedros de Platão, sendo que M ´representa o número de arestas por vértices, N o número de arestas por faces, A arestas, V vértices e F faces, existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

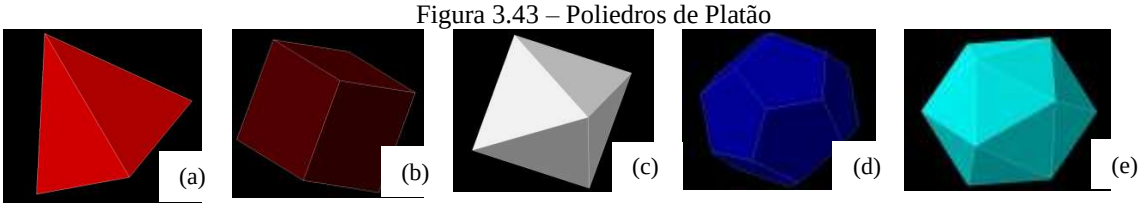
Quadro 3.1 – Nomenclatura dos poliedros de Platão

M	N	A	V	F	Nome	
3	3	6	4	4	Tetraedro	(a)
3	4	12	8	6	Hexaedro	(b)
4	3	12	6	8	Octaedro	(c)
3	5	30	20	12	Dodecaedro	(d)
5	3	30	12	20	Icosaedro	(e)

Fonte: Adaptação de (livro do Dolce e Pompeo), ele apresenta este quadro

Na figura 3.43, os cinco poliedros de Platão são apresentados.

Figura 3.43 – Poliedros de Platão



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

3.2.7 Poliedros Regulares

Um poliedro convexo é considerado regular quando as seguintes condições são atendidas.

a) todas as faces do poliedro são polígonos regulares e congruentes;

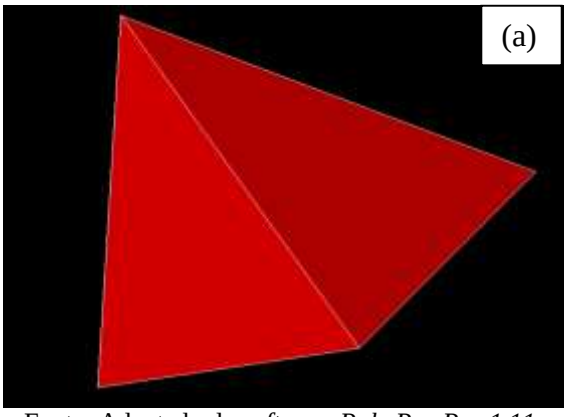
b) todos os ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Considerando as condições para um poliedro ser regular, tem-se que os Poliedros Regulares são poliedros de Platão e, portanto, existem cinco e somente cinco tipos: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Importante ressaltar que: todo Poliedro Regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é Poliedro Regular.

Na figura 3.44, é apresentado o Tetraedro (a) representação geométrica e (b) foto associada a ele.

Figura 3.44 – Tetraedros: (a) representação geométrica (b) foto associada



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

Fonte: RÜTSCHE, Manfred. Tetraedro Pirâmide. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/tetraedro-pir%C3%A2mide-ruhr-area-1168478/. Acesso em: 23 jun. 2018.

3.3 OS SÓLIDOS DE PLATÃO E SUAS APLICAÇÕES

Para elaborar este item e dar suporte teórico a algumas aplicações de Geometria de Posição e Espacial foram, em geral, utilizados os seguintes autores: Tilley (2014); Neves; Freitas e Pereira (2011), Ochmann (2002), e, por isso, estas referências devem ser consultadas.

- Conceitos fundamentais da Cristalografia

Segundo Neves; Freitas e Pereira (2011, p.18) "A cristalografia tem inter-relação indireta ou direta com as ciências básicas: Matemática, física, química e mineralogia".

A cristalografia originou-se de uma área da mineralogia que estudava as propriedades físicas, químicas e leis de formação das estruturas cristalinas. Hoje em dia é considerada uma ciência independente, além dos cristais, ainda abrange as substâncias orgânicas e inorgânicas, naturais ou sintéticas, sendo ela considerada a ciência descritiva do estado cristalino.

"A ligação entre cristalografia e Matemática está fundamentada principalmente nos estudos relacionados aos sólidos de Platão, utilizando-se assim a Geometria Espacial para subsidiar estudos relacionados com os princípios básicos da simetria dos cristais. " (NEVES; FREITAS; PEREIRA, 2011, p. 20)

Um retículo cristalino é um conceito matemático constituído de um conjunto de pontos distribuídos de forma homogênea, isto é, onde a vizinhança de cada ponto é a mesma e, assim formando um padrão infinito de pontos. Um vértice representa um nó do retículo, um local de amarração das estruturas cristalinas. Uma face representa um plano reticular (onde os átomos de uma determinada substância estão arranjados). Arestas são alinhamentos resultantes da interseção de duas faces de um cristal, segundo o qual os átomos estão dispostos.

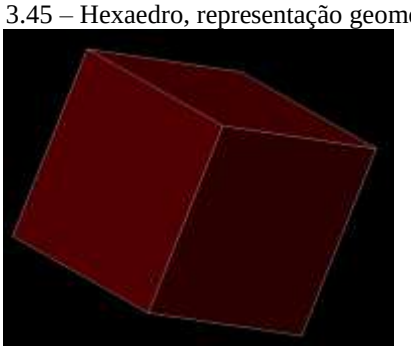
Os hábitos são as formas externas que os materiais cristalinos, por exemplo, os minerais apresentam. A cela unitária é um conjunto de pontos, ou seja, nós do retículo cristalino que pode conter ou não átomos, que repetido em todas as direções forma o retículo cristalino e, ainda, pode-se dizer que é a menor porção do cristal que preserva as características e representa a estrutura cristalina do mesmo.

As diferentes estruturas dão informações sobre as condições físicas e químicas do meio onde se formaram (pressão, temperatura e acidez) as substâncias. O crescimento cristalino pode acontecer e formar, por exemplo, um octaedro regular, hábito externo, a partir de hexaedros regulares, celas unitárias, se por alguma razão físico-química, durante o empilhamento das unidades fundamentais forem suprimidos ao longo dos vértices de um cubo.

Para se relacionar matematicamente o número de faces, arestas e vértices de um cristal, utiliza-se a relação de Euler, mencionada no item 3.2.4.

Para ilustrar a relação de Euler e os hábitos dos cristais, apresentam-se, na Figura 3.45, um hexaedro e, nas Figuras 3.46 e 3.47, hábitos de cristais.

Figura 3.45 – Hexaedro, representação geométrica



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

Figura 3.46 – Hexaedro, foto associada: Fluorita

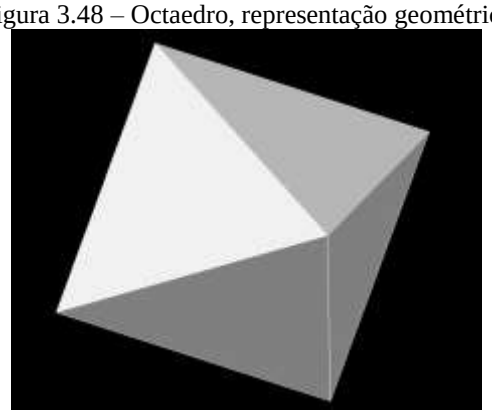
Fonte: BURKE, Carla. Cristal/Pedra. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/cristal-pedra-gem-geologia-mineral-3189006/. Acesso em: 05 jul. 2019.

Figura 3.47 – Hexaedro, foto associada: Galena

Fonte: NEVES, P. C. P; FREITAS D. V. de; PEREIRA, V. P. **Cristais de Galena** (Amaral Ferrador/ RS, Brasil) – CMPN

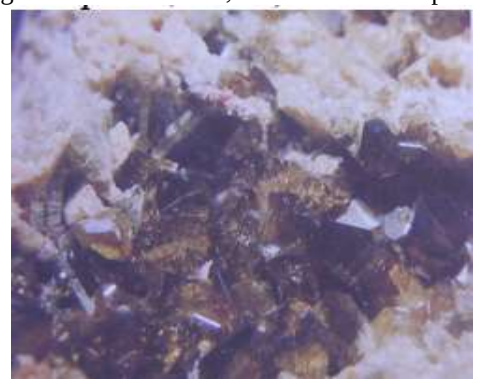
Apresentam-se, nas Figuras 3.48 e 3.49, um octaedro e hábito de um cristal octaédrico, respectivamente.

Figura 3.48 – Octaedro, representação geométrica



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

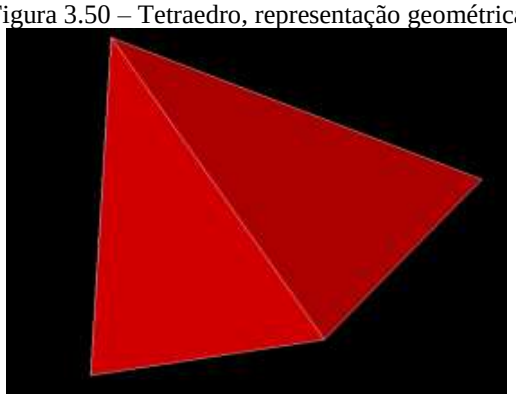
Figura 3.49 – Octaedro, foto associada: Espinélio



Fonte: NEVES, P. C. P; FREITAS D. V. de; PEREIRA, V. P. (vulcão Vesúvio, Nápoles, Itália) – CMULBRA.

Apresenta-se, na Figura 3.50, um tetraedro e, nas Figuras 3.51 e 3.52, hábitos de uns cristais tetraédricos.

Figura 3.50 – Tetraedro, representação geométrica



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

Figura 3.51 – Tetraedro, foto associada: Diamante

Fonte: NEVES, P. C. P; FREITAS D. V. de; PEREIRA, V. P.- bort (Patos de Minas/ MG, Brasil) – CMPN.

Figura 3.52 – Tetraedro, foto associada: Esfalerita

Fonte: TÓTH, György Károly. Natureza/Paisagens. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/mineral-natureza-cristal-esfalerita-643082/. Acesso em: 05 jul. 2018.

- Outras aplicações: O atomismo de Demócrito e o modelo de Kepler

Para esses dois temas, foram utilizadas partes do texto do blog Ciência de Garagem, da Disponível no link: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html. Referência nesta dissertação: (BLOG CIÊNCIA DE GARAGEM. Os

sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito. Disponível em: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html. Acesso em: 02 jun. 2019).

Foram explorados, portanto, os conceitos que o docente deverá ter bem definido antes da aplicação do Produto Educacional, assim como a caracterização dos conceitos contextualizados a partir de imagens, vídeos e dos demais materiais propostos.

Vale ressaltar que esse capítulo foi produzido em paralelo com as apresentações criadas no formato *power point* para as aulas que foram aplicadas no decorrer da pesquisa, com a intenção de explorar as definições de maneira mais aprofundada.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesse capítulo, apresentam-se alguns aspectos conceituais e estruturais da aplicação do Produto Educacional, em forma de projeto em contraturno. São descritos o público alvo de cada uma das aplicações, a explicação dos elementos que compõem o plano de unidade, os planos de aulas, os roteiros da docente anteriores as aulas e as observações das atividades. Esta descrição se faz necessária a fim de nortear a análise e discussão dos resultados apresentados no Capítulo 5 dessa dissertação.

4.1 DESCRIÇÃO GERAL DO UNIVERSO DE CADA APLICAÇÃO

Nesta seção, descrevem-se os colégios onde se aplicou o Produto Educacional, a quantidade de dias e aulas que foram disponibilizados e o perfil geral dos discentes participantes.

A escolha dos colégios, bem como das turmas que participaram da pesquisa se deu aleatoriamente. Como a docente pesquisadora na época estava sem turmas, ou seja, não estava trabalhando na rede, foram convidados os colégios da região de Uvaranas, bairro onde está localizado a Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Os dois colégios convidados a participar da pesquisa prontamente aceitaram o convite e, de acordo com a disponibilidade de horários e salas de aula, foram elaborados os planos de aula para cada um dos mesmos.

No momento de entrada aos colégios e de conversas com a equipe pedagógica dos mesmos, foi enfatizado que deveriam ser turmas do ensino médio, sem focar nas séries, visto que a ideia da pesquisa atenderia a todas as séries, uma vez que a proposta retoma algumas noções básicas de Geometria, ensinadas no ensino fundamental. Além disso, reforçou-se que o projeto traz, de forma contextualizada e interdisciplinar, as aplicações à Geometria de Posição e Poliedros Regulares.

A direção e docentes do primeiro colégio decidiram fazer o convite ao segundo ano do Ensino Médio integrado ao curso técnico, visto que esses discentes no momento tinham a disponibilidade de horários para a participação, como foi estipulado no mínimo 20 discentes, a própria coordenação fez o convite aos discentes e aqueles que tiveram interesse se inscreveram, totalizando 22.

A direção e coordenação dos cursos técnicos do segundo colégio estendeu o convite a todos os discentes do Ensino Médio integrado aos cursos de Alimentos e Química. Como

incentivo a participação do projeto ficou acordado que a participação dos mesmos contaria como horas complementares. A lista de discentes que aceitaram o convite no segundo colégio extrapolou a quantidade mínima de 20 discentes, por esse motivo, as coordenações sugeriram dividir as turmas de acordo com a disponibilidade de salas e horários do colégio.

Desta forma, no segundo colégio, a segunda aplicação do projeto, contou com 30 discentes dos cursos técnicos de Alimentos e Química, do 1º ao 4º ano; a terceira aplicação contou com 20 discentes dos cursos técnicos de Química, dos 1º anos.

É preciso reforçar aqui que as turmas que participaram da aplicação do Produto Educacional não eram conhecidas da docente, portanto no início não foi possível identificar o nível de aprendizagem que os mesmos estavam para participar das aulas. As turmas eram heterogêneas, com faixas etárias e níveis de ensino diferentes, com exceção da primeira e segunda aplicação em que todos os discentes da turma estavam no mesmo nível de ensino, porém em salas diferentes.

4.1.1 Primeira Aplicação - Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas

A primeira aplicação, ocorreu no Colégio Agrícola Estadual Augusto Ribas, situado em Ponta Grossa PR no bairro de Uvaranas. Primeiramente, acordou-se com a direção do colégio, da equipe pedagógica e das docentes de Matemática os dias e horários que a escola dispunha para aplicação do mesmo. Então, efetivou-se o convite aos discentes do 2º ano do Ensino Médio Profissional que quisessem participar, visto que os mesmos tinham a disponibilidade de horários. O colégio disponibilizou 3 dias para o desenvolvimento, com no mínimo duas aulas por dia, uma vez por semana, devido as atividades extraclasse que os discentes teriam após o projeto, assim sendo cinco aulas no total. Em princípio 22 discentes aceitaram participar, porém nem todos compareceram nos três dias, finalizando o mesmo com 18 discentes, na faixa etária de 15 a 18 anos.

4.1.2 Segunda Aplicação - Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay

A segunda aplicação, ocorreu no Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay, situado em Ponta Grossa PR no bairro de Uvaranas. Primeiramente, acordou-se com a direção do colégio, da equipe pedagógica e coordenadoras dos cursos técnicos de Alimentos e Química os dias e horário para aplicação do mesmo. Então efetivou-se o convite aos discentes dos cursos técnicos de Alimentos e Química, do 1º ao 4º ano. O colégio

disponibilizou 3 dias consecutivos para o desenvolvimento, sendo duas aulas no primeiro e segundo dia e três aulas no terceiro dia, sendo 7 aulas no total. Em princípio, cerca de 30 discentes aceitaram participar, porém nem todos compareceram nos três dias, finalizando o mesmo com 11 discentes, na faixa etária de 15 a 17 anos.

4.1.3 Terceira Aplicação - Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay

A terceira aplicação, ocorreu no Colégio Estadual Professor João Ricardo Von Borell Du Vernay, situado em Ponta Grossa PR no bairro de Uvaranas. Primeiramente, acordou-se com a direção do colégio, da equipe pedagógica e coordenadoras dos cursos técnicos de Química os dias e horários que a escola dispunha para aplicação do mesmo. Então efetivou-se o convite aos discentes dos cursos técnicos de Química, dos 1º anos. O colégio disponibilizou 2 dias consecutivos para o desenvolvimento, sendo três aulas no primeiro dia e quatro aulas no segundo dia. A princípio cerca de 20 discentes aceitaram participar, porém nem todos compareceram nos dois dias, finalizando o mesmo com 13 discentes, na faixa etária de 15 a 16 anos. Com a disponibilização de oito aulas, preparou-se cada uma com seu respectivo plano. Porém foram aplicadas apenas sete das oito aulas preparadas, devido a interação dos discentes durante as aulas e a alguns contratempos em relação a atividades externas dos discentes no colégio. As aulas apresentadas nessa terceira aplicação são idênticas as aulas da segunda aplicação

4.2 MÉTODO GERAL DA APLICAÇÃO DO PRODUTO

Esta seção é composta da descrição do método geral e comum as três aplicações do Produto Educacional e, tem base no plano de unidade que contempla todos os aspectos do mesmo em termos de conteúdos e metodologias, os planos de aulas enumerados de acordo com a quantidade de aulas propostas a cada aplicação e o roteiro da docente anterior a elas, estes com a descrição das particularidades de cada uma das aplicações. Esses documentos completos podem ser encontrados no Apêndice A Capítulo 2 As Duas versões do Produto Educacional.

O Quadro 4.2 traz os momentos de cada aula e suas respectivas dinâmicas.

Quadro 4.2 – Método geral: momentos e dinâmicas

Momentos	**Dinâmicas**		
Introdução	"Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia"**:** Dinâmica de grupo mediada com vídeos ou imagens para ilustrar as questões norteadoras da aula, e consiste em apresentar aos discentes algumas imagens ou vídeos que se relacionem com os assuntos de cada aula de forma contextualizada.		
Desenvolvimento	"Mão na massa": Dinâmica de grupo mediada pela manipulação ou construção de aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Nessa dinâmica ora os discentes manipulam os materiais fornecidos pela docente, ora constroem seus próprios materiais representativos relacionados com os assuntos de cada aula.	"Retomando as questões": Dinâmica de grupo mediada pela retomada das questões iniciais após a manipulação e/ ou construção de materiais. É uma dinâmica onde os discentes devem corrigir juntamente com a docente as questões iniciais, em forma de plenária.	"Convergindo ideias": Nesse momento, a docente apresenta em slides a teoria do que os discentes investigaram por meio das questões e manipulações de materiais, sempre traçando parâmetros entre eles.
Síntese integradora	"Investigando as características": Dinâmica em grupo, onde os discentes devem, em formato de plenária, discutir as características observadas com os demais colegas da turma, seguindo alguns pontos destacados pela docente.		
Avaliação	"Relatando a atividade": a partir do relatório-avaliação, dinâmica individual descritiva ou em grupo, em que cada discente ou grupo descreve tudo o que foi capaz de perceber e aprender com a aula, principalmente em relação às atividades respondidas em formato de plenária. Nesse momento, eles podem deixar sugestões sobre a aula e a atuação da docente.		

Fonte: A autora

A aula inicial foi elaborada como diagnóstico a partir das percepções e conhecimentos prévios dos discentes relacionados aos conceitos básicos de Geometria de Posição.

Segundo a fundamentação teórica apresentada nos Capítulos 2 e 3, todas as aulas dessa unidade foram elaboradas com a intenção de caracterizar os conceitos amplos de Geometria de Posição e Poliedros Regulares, de maneira a apresentar aos discentes algumas aplicações, sem focar na memorização de fórmulas ou cálculos extensos, utilizando para isso, materiais representativos, ora construídos pela docente e manipulados pelos discentes, ora construídos e manipulados pelos discentes.

Vale ressaltar que a cada uma das aplicações, primeiramente, elaborou-se o plano de unidade com os respectivos planos de aulas. No entanto, para garantir a análise e reflexão da aplicação, os documentos elaborados contém descrições sobre: a prática da docente em aula, isto é, os encaminhamentos de acordo com as abordagens de Vygotsky, possíveis respostas dos discentes as questões elaboradas, roteiros da docente, e a confecção e uso dos aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

As análises aqui descritas foram qualitativas de caráter interpretativo e de intervenção, que proporcionam ao leitor a observação dos processos de ensino e aprendizagem, num olhar reflexivo, a partir das ações discentes e docente da própria pesquisadora.

De forma geral, em todas as aplicações são relatados os detalhes de cada um dos momentos das aulas que são explicitados, no item 4.3.1 Plano de unidade.

Nos relatos da introdução, primeira dinâmica de cada aula, indicadas no Capítulo 5 Análise e discussão dos resultados, especificadas em cada aplicação, dispõe-se de um quadro com as respostas acordadas por cada grupo, na primeira coluna da esquerda para a direita, encontra-se o tema de cada questão, sendo esta exposta na íntegra no roteiro da docente, na primeira linha do quadro há o nome dos cinco grupos, esse quadro reflete todas as respostas dos discentes de acordo com cada questão, as alternativas em negrito estão em destaque para a visualização dos acertos de cada grupo.

No item desenvolvimento das aulas, são descritas as reações e discussões em relação aos materiais diversificados, ora esses manipulados, ora construídos pelos discentes. Também há a discussão das respostas acordadas por eles, sendo esta feita no formato de plenária, retomando o assunto, enfatizando a alternativa correta de cada questão, com o olhar voltado as justificativas das respostas. Ainda neste item, descreve-se a explicação teórica do assunto feita pela docente, traçando um paralelo com as demais dinâmicas da aula.

Para a análise das respostas apresentadas pelos discentes no desenvolvimento das atividades da dinâmica, “Investigando as características”, se considerou a análise entre as prováveis respostas formuladas pela docente e as apresentadas pelos discentes. Na avaliação, descreve-se as dúvidas dos discentes inerentes a aula, se houve a necessidade de retomada do conteúdo no encontro posterior e, as ações da docente frente a isso.

No relatório-avaliação proposto por D’Ambrosio, são evidenciados 4 aspectos: 1 Identificação do tema e dos participantes do processo, docente e discente. Em cada aplicação desse produto, contou-se com um período curto de convívio entre docente e discentes. Cada grupo tinha uma pasta com relatórios de todas as aulas para serem preenchidos ao término de cada uma das mesmas, ao menos um por aula por grupo e/ou individual, apenas na capa da pasta havia a identificação dos participantes, sendo esta pasta parte do material de registro, além dos demais já citados anteriormente. 2 Síntese da aula. Nesse caso, as sínteses aconteciam por descrições pontuais e/ou representações por meio de desenhos quando possível. 3 Manifesto sobre temas que o discente julga relacionados com a aula. Este item foi dispensado, visto que no decorrer da aplicação houve muitas discussões sobre o tema da aula, logo isso ficou explícito, porém não descrito no relatório, apenas discutido oralmente em formato de plenária. Este item foi substituído por descrições de dúvidas dos discentes. 4 Expectativas e sugestões a docente. Esse item constava no relatório-avaliação como um dos itens analisados pelos discentes.

4.3 PLANOS DE UNIDADES, PLANOS DE AULAS E ROTEIRO DA DOCENTE

Nesta seção, descreve-se os itens constantes nos planos de unidade, planos de aulas e nos roteiros da docente, em cada uma das três aplicações.

4.3.1 Planos de unidade - versão com cinco aulas e versão com sete aulas

Os planos de unidade aqui citados são caracterizados como documentos de registros que contém todas as informações pertinentes aos assuntos tratados nas aplicações do referido Produto Educacional.

Esta pesquisa foi constituída de três aplicações, para a primeira aplicação utilizou-se um plano de unidade particular e distinto, para a segunda e terceira aplicação utilizou-se o mesmo plano de unidade, uma vez que tem público e carga horária diferenciada, porém, com os itens comuns que são descritos na sequência.

Primeiramente, descreve-se como item I. Identificação, constituído pelo nome do colégio participante, o curso, nesse caso, o Ensino Médio, a disciplina trabalhada, Matemática, a identificação do docente responsável pelo mesmo, o ano letivo e a carga horária necessária para o andamento do projeto. Nesse item, a única modificação entre os dois planos de unidades foi a carga horária, na primeira aplicação, como citado anteriormente, foram disponibilizadas cinco aulas de 50 minutos e na segunda e terceira aplicações sete aulas de 50 minutos. A segunda e terceira aplicações tiveram o mesmo plano de unidade devido ao fato de ter a mesma carga horária.

Seguindo o roteiro de elaboração do plano de unidade descreve-se como item II. Competências e Habilidades, baseados nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM, 2000), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 2002) e das Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR, 2008), relatado nos conteúdos e habilidades propostos para a unidade temática de Geometria Espacial.

No item III. Objetivos, espaço onde são apresentados objetivos gerais que norteiam o trabalho docente durante a execução do projeto e que são relacionados ao que se espera do discente após a aplicação do Produto Educacional.

O item IV. Conteúdo Programático onde se descreve todos os conceitos que contemplam o projeto, divididos entre os assuntos de Geometria de Posição e Geometria Espacial, conteúdos esses especificados por aula como subitem do Conteúdo programático distribuído por aula, com as particularidades de cada aplicação.

No item V. Metodologia explicita como devem ser ministradas as aulas do projeto, isto é, priorizando discussões e favorecendo o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial como linguagem nas diversas situações. Nesse item são expostas as dinâmicas das aulas, estas compostas por vários momentos, descritos no Quadro 4.2.

O item VI. Avaliação relata como deve ser avaliado o nível de aprendizagem dos discentes, sendo este um dos momentos descritos no Quadro 4.2, denominado como "Relatando a atividade", e consiste num relatório descritivo baseado no relatório-avaliação proposto por (D'Ambrósio, 1996, p. 72), no qual os discentes devem refletir a prática em sala de aula, relatando o que aprenderam, fazendo sugestões a docente e até mesmo relatando quais pontos não foram apreendidos. É realizado individualmente e/ou grupo pensados a partir da ideia dos grupos focais segundo Kitzinger (2000) em cada uma das aulas como fechamento dos respectivos assuntos. A docente recolheu-os e os analisou, fazendo as considerações pertinentes e entregues na aula seguinte.

No item VII. Recursos Didáticos, foi apresentado todos os recursos utilizados nas aulas de maneira geral.

O item VIII. Bibliografia foi descrita as referências básicas e complementares para a descrição do plano de unidade, sendo eles, livros consultados para divisão de conteúdo, realização de atividades e avaliações.

4.3.2 Planos de aulas

Nesta subseção são apresentados os tópicos de cada plano de aula:

- Identificação: semelhante ao plano de unidade, constando o nome do colégio, do curso, da disciplina, do docente, série/ ano letivo e a carga horária por aula.
- Assunto: especificando o que é trabalhado em cada aula.
- Competências e habilidades: utiliza-se os itens mencionados anteriormente no plano de ensino, porém mais específico de acordo com cada aula.
- Objetivos: o que os discentes precisam atingir no desenvolvimento da aula.
- Momentos da aula: este apresenta a introdução/incentivação, desenvolvimento e síntese integradora, subdivididos em itens, descritos no Quadro 4.2.
- Recursos físicos: descrição de todos os materiais utilizados para o bom desenvolvimento da aula.

▪ Bibliografia: semelhante ao plano de unidade, descreve as referências básicas e complementares para a descrição dos planos de aulas, sendo eles, livros consultados para realização de atividades e avaliações.

4.3.3 Roteiro da docente

O roteiro da docente utilizado nessa pesquisa é uma explanação da maneira como a docente organiza as aulas voltadas para a sua prática em sala e nas previsões de respostas dos discentes antes da aplicação de cada uma delas.

Em cada aula, os discentes são divididos em grupos, sendo o total de cinco, representadas por cada um dos sólidos platônicos, ou seja, os grupos são nomeadas como: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Esses grupos são formados na primeira aula do projeto e seguem até a última aula com a mesma formação. Na mesa de cada grupo tem um conjunto de materiais composto pelos cinco sólidos platônicos fixados a um palito de churrasco, esses utilizados em todas as aulas do projeto como representação das letras de **a** até **e**, alternativas das questões referentes a dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", sendo elas assim representadas (**a**-tetraedro, **b**-hexaedro, **c**-octaedro, **d**-dodecaedro, **e**-icosaedro); um sólido de papelão que representava cada grupo e, uma pasta que contém os relatórios avaliativos que todos devem preencher no momento: "Relatando a atividade", sendo esta uma parte do material de registro. Todos os materiais poderão ser encontrados como fotos no Apêndice A seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

Este roteiro contém o número e assunto correspondente ao plano de cada aula. Em seguida, são descritos os momentos da aula em relação a ação da docente. Segue abaixo as explicações de cada tópico, abrangentes e gerais a todas as aulas, mas que estão especificados no Apêndice A Capítulo 2 As Duas versões do Produto Educacional.

▪ **Introdução:** a docente tem como função projetar as imagens e/ou vídeos e direcionar a atenção dos discentes a alguns pontos específicos, ler as questões contidas nos slides, observar, cronometrar as discussões e coletar as respostas finais de cada uma das equipes por meio de uma foto. Esse momento é promovido por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na análise de imagens e/ou vídeos com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões são de múltipla escolha, cada equipe deve discuti-la e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles apresentam sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes devem erguer o sólido com a letra que representa a alternativa escolhida pela equipe. A docente registra as respostas de cada equipe por meio de uma foto, enfatizando que as mesmas serão discutidas em um outro momento.

- **Desenvolvimento:** é por meio de 3 momentos: “Mão na massa”, “Retomando as questões” e “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: cabe a docente, distribuir os materiais, enfatizar que em cada um deles há representações dos itens discutidos na dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia” e que eles podem ficar à vontade para manuseá-los e confrontá-los com as questões estudadas antes, também deve instiga-los a pensar no máximo de características observadas com a manipulação dos materiais em relação ao assunto da aula.

Os discentes recebem e/ou produzem materiais representativos que consistirão na caracterização dos assuntos estudados em aula, esses especificados no Apêndice A seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Cada equipe discute entre eles, as características relacionadas ao assunto da aula observando o material e relembrando as questões estudadas na dinâmica anterior.

✓ “Retomando as questões”: A docente media essa discussão, os instigando a falar sobre o que os levou a optar por esta ou aquela alternativa e destaca, então, a resposta correta por meio da retomada das questões nos slides, se por ventura houver alguma dúvida ela deve sanar e, para isso, pode utilizar também os materiais da dinâmica “Mão na massa”.

As questões da introdução são discutidas entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ “Convergindo ideias”: nesse momento a docente pontua alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões, materiais, discussões e teoria por meio de slides, para isso, pode fazer utilização das imagens e/ou vídeos, das questões anteriormente discutidas e dos materiais da dinâmica “Mão na massa”.

Síntese integradora: a docente pede que os discentes discutam com as suas equipes os tópicos mais específicos descrevendo as características de cada assunto estudado na aula. Nesse momento, ela tem como função intermediar a discussão e, se preciso for corrigir distorções acerca do assunto, utilizando, para isso, as imagens e os aparatos de Geometria de Posição e Espacial anteriormente utilizados na aula.

Cada equipe utiliza os aparatos de Geometria de Posição e Espacial para caracterizar, em formato de plenária, os assuntos estudados em sala. Enquanto a docente fica responsável em anotar no slide as contribuições dos mesmos para fechamento das características. Em cada

uma das questões utilizadas nas aulas, foram elaboradas as prováveis respostas dos discentes, anteriores as aulas, pensando nas contribuições para a execução das mesmas.

Avaliação: realizada a partir dos relatórios-avaliações individuais impressos em folha sulfite, entregues aos discentes, esses formulados pela docente, visando uma caracterização mais autônoma de cada, eles preencheram utilizando os materiais representativos da aula, a docente fez as análises de cada um dos mesmos após a aula, seguindo o roteiro geral abaixo:

1) Descrição de alguns itens estudados.
2) Representação por meio de desenhos de alguns itens estudados.
3) Relato de dúvidas em relação aos conceitos estudados.
4) Sugestões à docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula.

4.4 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados da participação discente foi realizada com o foco nas atividades centrados nos discentes, de acordo com Santrock (2010) e os indícios da teoria de Vygotsky (1991)a partir de relatórios obtidos individualmente e/ou coletivamente, na modalidade de grupos focais segundo Kitzinger (2000), isto é, a partir de atividades realizadas utilizando-se de uma coleta/registro na formação de um portfólio que continham os relatos descritivos qualitativos e quantitativos, análises individuais e/ou coletivas das respostas, por equipe, os relatórios-avaliações segundo D'Ambrosio (1996).

A análise dos dados pela docente pesquisadora se deu a partir da reflexão dos planos de unidade, planos de aulas, roteiro da docente, relato das observações/percepções da docente/pesquisadora, fotografias e, análise das atividades dos discentes.

4.5 MATERIAIS DIDÁTICOS DIVERSIFICADOS: APARATOS DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL

Para o desenvolvimento do projeto foram produzidos pela docente e/ou pelos discentes alguns materiais que mediaram o conhecimento em sala de aula, esses tidos como instrumentos para desenvolvimento da aprendizagem. Nesta seção, será descrito quais foram esses materiais e suas respectivas representações. No Apêndice A, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, está descrito os materiais utilizados na construção de cada um dos mesmos com imagens ilustrativas em formato de fotos.

Na aplicação do produto, cada equipe recebeu:

✓ Poliedros que simbolizam cada equipe: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Construído pela docente, de papelão e encapados com papel dobradura e cujos detalhes estão Apêndice A seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Utilizados em todas as aulas para representação das equipes.

✓ Poliedros que simbolizam alternativas: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Construídos pela docente, de papel cartão e fixados a um palito de churrasco e cujos detalhes estão Apêndice A. Utilizados em todas as aulas para as respostas em equipe na votação de alternativas das questões da primeira dinâmica.

Geometria de Posição foi o primeiro assunto a ser discutido com os discentes. Para isso, a docente produziu as aulas todas em *power point* pensando em todos os momentos da aula mencionados anteriormente. O primeiro momento, denominado: "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", composto por fotos e/ou vídeos que caracterizaram os assuntos a partir da observação das características de ponto, reta, plano, semirreta, segmentos de retas, espaço, perpendicularidade, paralelismo e projeções ortogonais. O segundo momento, denominado de "Mão na massa", contava com o auxílio dos instrumentos – aparatos de Geometria de Posição e Espacial construídos pela docente. Nessa fase da aula, os discentes manipularam um tabuleiro com representações de pontos, retas, segmentos de retas, paralelismo e planos, assim sendo possível que as características do material elaborado fossem relacionadas com o assunto que estava sendo explorado. Como a cada aula de Geometria de Posição era explorado um assunto a mais, além do tabuleiro foram utilizados materiais de isopor que representava as posições de planos, palitos de churrasco, representando segmentos de retas e cubos em MDF que representavam a caracterização dos cristais cúbicos. Cada equipe recebia os materiais e os analisava em conjunto.

Em Geometria Espacial, foram estudados apenas os sólidos platônicos também conhecidos como Poliedros Regulares, o primeiro contato com o assunto se deu na mesma dinâmica, no primeiro momento, Geometria de Posição e Espacial no dia a dia, com imagens e/ou vídeos, isso em todas as aulas que contemplavam esse assunto. Na primeira aula de Geometria Espacial, os discentes utilizaram os conceitos estudados em Geometria de Posição, auxiliados pelos materiais manipulados anteriormente na dinâmica "Mão na massa" e investigaram os sólidos que receberam na primeira aula do projeto, ou seja, cada equipe utilizou o seu sólido para analisar as suas características. Nas aulas seguintes, na dinâmica "Mão na massa", os discentes manipularam cubos de espuma com cortes para compreenderem a ideia de convexidade, construíram um tetraedro e um octaedro de canudinhos, um de cada por equipe e

manipularam o dodecaedro e icosaedro feitos de papelão que cada equipe recebeu. E, por fim, em formato de desafio utilizaram os cubinhos de MDF para construírem um tetraedro e um octaedro.

As aulas aconteceram após a elaboração do plano de unidade, dos planos de aulas, dos materiais diversificados e dos roteiros da docente. A cada aula, a docente, com base nos relatórios dos discentes, do envolvimento em sala de aula e do nível de aprendizagem da turma, reformulava as aulas seguintes, pensando sempre na melhor maneira de atingir os objetivos propostos tanto no plano de unidade, como nos planos de aulas.

Todas as aplicações expostas nesse capítulo tiveram como base o roteiro da docente, aquele que descreve todas as suas ações e pode ser encontrado no Apêndice A Capítulo 2, subseção 2. 1. 1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas e 2. 2. 1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

Ao final de cada aplicação, a docente refletia nas ações em relação ao ensino, reorganizando as práticas que não foram bem-sucedidas, para que assim fosse possível prever práticas que colaborassem com a aprendizagem dos discentes.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as atividades no formato de grupos focais segundo Kitzinger (2000), com o planejamento de atividades centrados nos discentes, de acordo com Santrock (2010) e os indícios da teoria de Vygotsky (1991).

Aqui serão apresentadas as questões de cada aula, as ações da docente frente as discussões dos discentes sobre os assuntos, além dos apontamentos relevantes durante a aplicação do Produto Educacional, aspectos que possibilitaram a verificação de resultados em cada uma das aplicações. As respostas apresentadas aqui, foram obtidas por meio das anotações docente dos momentos em que os discentes discutiam as questões e pelos relatórios-avaliações segundo D'Ambrosio (1996).

Serão expostas as especificidades de cada uma das três aplicações, com discussões pontuais no que diz respeito a análise dos dados com base na avaliação descrita anteriormente no capítulo 4 para que ao final seja possível realizar uma abordagem ampla em uma discussão geral das aplicações.

Em relação aos discentes, à medida que se trabalhava os assuntos, percebia-se o nível de aprofundamento que poderia se atingir nas aulas seguintes.

A cada aula a docente avaliava a sua prática e, consequentemente, os resultados em termos de participação e objetivos alcançados por parte dos discentes, assim sendo, foi possível sempre adequar as aulas seguintes ao grau de maturidade que os mesmos alcançavam nas aulas anteriores, para avançar com os assuntos. Todas as questões com as suas respectivas imagens e/ou *links* podem ser encontradas no Apêndice A Capítulo 2.

Relata-se em cada uma das versões, como foi o desenvolvimento de cada encontro com o assunto de cada aula, destacando as respostas acordadas pelos discentes e as observações da docente durante o processo.

5.1 VERSÃO COM 5 AULAS - COLÉGIO AGRÍCOLA ESTADUAL AUGUSTO RIBAS

A descrição geral do universo da primeira aplicação encontra-se no item 4.2.1. No Quadro 5.1 são apresentadas todas as questões utilizadas, referenciadas pela aula em que foi trabalhada, bem como as suas respectivas respostas corretas destacadas em negrito. E na sequência, apresentam-se os resultados, comentários e análises desta primeira aplicação.

Quadro 5.1 – Questões: primeira aplicação

(Continua)

A= Aulas	Q= Questões
A 1	Q1. Na imagem, observamos um guarda-corpo, ou simplesmente guarda, de pedras onde há esferas alinhadas. Embora, ponto não seja conceituado, para uma melhor compreensão consideremos uma representação de ponto pela esfera do guarda-corpo, assim se olhássemos para este guarda-corpo de muito longe, veríamos uma representação de sequência de pontos. Podemos deduzir que os pontos: a) alinhados continuamente, apenas delimitado no início representam uma reta. b) alinhados continuamente infinitamente representam um segmento de reta. c) alinhados continuamente infinitamente formam uma semirreta. **d) alinhados continuamente infinitamente formam uma reta.** e) alinhados continuamente, mas delimitados no início e fim representam uma reta.
	Q2. Na imagem, observamos um trilho de trem, composto por perfis de aço laminado, dispostos de forma paralela entre si, sobre dormentes (travessas) as quais são peças de madeira. Os trilhos ou carris são fixados sobre os dormentes através de elementos de fixação, compostos por grampos ou tirafundos, que os delimitam. Essa imagem nos fornece uma representação de um segmento de reta, sendo ele: **a) limitado por dois pontos da reta.** b) ilimitado. c) uma infinidade de pontos alinhados e ilimitados. d) limitado, porém infinito. e) limitado no início e ilimitado no fim.
	Q3. Nessa imagem, a caneta sobre o caderno pode ser considerada como uma representação de um segmento de reta, que é formada por pontos contínuos, lembrando que é limitada em dois pontos, por isso chamada de segmento de reta. Essa caneta, ou segmento de reta está sobreposta a um caderno, que está ainda sobreposto a uma mesa, ou uma superfície plana, isso significa que essa mesa como um todo representa um plano, logo podemos considerar que um plano é formado por: a) um conjunto de infinitas curvas. b) um conjunto de finitos pontos. c) um conjunto de finitas retas. **d) um conjunto infinito e ilimitado de retas.** e) um conjunto finito e limitado de retas.
	Q4. Observe os detalhes da pintura na fachada dessa construção, é possível identificar traços de perpendicularidade nas pinturas em marrom, sabendo disso, podemos concluir que há perpendicularidade entre retas quando: a) não possuem pontos em comum. b) possuem vários pontos em comum. c) estão lado a lado. **d) formam ângulos retos entre si, 90°.** e) formam ângulos de 180° entre si.

Quadro 5.1 – Questões: primeira aplicação

(Continuação)

A= Aulas	Q= Questões
A2	Q1. O vídeo cita que algumas evidências sugerem que Pitágoras conhecia apenas o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, com estudos mais aprofundados no Teeteto (um diálogo platônico sobre a natureza do conhecimento) concluiu que existem apenas 5 poliedros regulares, ou seja, além dos três citados acima, existem mais 2 poliedros regulares, conhecidos como: a) heptaedro e octaedro **b) octaedro e icosaedro** c) heptaedro e icosaedro d) hexaedro e icosaedro e) hexaedro e octaedro
A3	Q1. Na imagem, observamos uma construção com empilhamentos em formatos cúbicos, não podemos afirmar com precisão que suas faces formam quadrados, porém considerando a representação de um cubo, podemos analisar algumas características. O cubo é formado por um número limitado de semirretas, que são conhecidas como arestas, assim como os demais sólidos de Platão. Sabendo disso, um cubo possui um número **n** de arestas, sendo **n** igual a: a) 6 b) 8 c) 10 **d) 12** e) 14
	Q2**.** Na imagem, observamos a construção de uma escada. Se considerarmos parte da escada em apenas dois degraus, teremos a representação de um poliedro, porém ele não será um poliedro de Platão, pois uma das características que o diferencia dos mesmos, é que: **a) o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.** b) ele possui arestas e faces, mas não possui vértices. c) ele é regular, pois suas faces são retângulos. d) vale a relação de Euler (V – A + F = 2). e) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.
A4	Q1. Observando a imagem contemplamos um monumento no formato de pirâmide triangular, ou tetraedro. Um tetraedro é um poliedro com uma base em formato de triângulo e, como característica marcante, temos que: a) são formados apenas por vértices e arestas. b) são formados apenas por vértices e faces. **c) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em um único vértice ao mesmo tempo.** d) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em vários vértices ao mesmo tempo. e) suas faces não são triângulos regulares.

Quadro 5.1 – Questões: primeira aplicação

(Conclusão)

A= Aulas	Q= Questões
A4	Q2. Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Esse poliedro possui: a) 6 arestas b) 8 arestas c) 10 arestas **d) 12 arestas** e) 14 arestas
A5	Q1. Na imagem, observamos o hábito de uma Fluorita, que pode ser representada por um empacotamento tridimensional de cubos CaF8 com cálcio centrado. Cada cubo compartilha arestas e faces com seus vizinhos, criando um arranjo similar a um tabuleiro de xadrez quando visto de uma das faces do hábito. Se cada cubo tem suas arestas com medida igual **a**, deduzimos que o volume de cada cubo é igual a: **a) V= a.a.a** b) V= a+a+a c) V= a^2 d) V= 3a e) V= $3a^2$
	Q2. Um poliedro é constituído por vinte ângulos triédricos. Esse poliedro possui: a) 6 arestas b) 15 arestas **c) 30 arestas** d) 12 arestas e) 14 arestas
	Q3. A figura apresentada na foto é uma representação de um icosaedro, que possui 20 faces e 12 vértices, usando a relação de Euler (V – A + F = 2), concluímos que ele possui o número de arestas iguais a: a) 12 b) 24 **c) 30** d) 36 e) 32

Fonte: A autora

- Primeira aplicação - momentos das aulas

✓ “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”: conforme Apêndice A subseção 2. 1. 1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas. Abriram-se as discussões das imagens e/ ou vídeos seguidos de suas respectivas questões. Os discentes eram direcionados ao que deveriam se atentar para respondê-las.

Em princípio na primeira aula, os discentes pareciam um pouco apreensivos em responder as questões, por medo de errar, porém, a docente os deixou à vontade para discutir as questões com suas respectivas equipes.

Como planejado, a docente lhes dava um tempo para discussão, depois os discentes votavam na resposta acordada pela equipe. Então, era registrada a alternativa que cada equipe escolheu por meio de uma foto que contemplava todas as respectivas respostas ao mesmo tempo e, sem muitos comentários acerca das mesmas, a docente enfatizava que mais à frente discutiriam acerca das alternativas corretas e incorretas.

No Quadro 5.2 está a descrição de todas as respostas registradas nas aulas desta primeira aplicação, em negrito está destacada a resposta correta a cada uma das questões citadas anteriormente no Quadro 5.1.

Quadro 5.2 – Primeira aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica

	Aulas	**Questões**	**Equipes**					**% acertos antes da abordagem mediadora**
			Tetraedro	**hexaedro**	**octaedro**	**dodecaedro**	**icosaedro**	
Primeira Aplicação	**A1**	**Q1**	E	**D**	**D**	E	E	**40**
		Q2	**A**	**A**	**A**	D	**A**	**80**
		Q3	**D**	**D**	E	C	B	**40**
		Q4	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A2	**Q1**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**100**
	A3	**Q1**	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
		Q2	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**100**
	A4	**Q1**	D	D	D	**C**	D	**20**
		Q2	**D**	**D**	**D**	B	**D**	**80**
	A5	**Q1**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**100**
		Q2	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**100**
		Q3	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**100**

Fonte: A autora

No primeiro encontro, a proposta era a realização de duas aulas, porém a primeira aula de Geometria de Posição excedeu o tempo de 50 minutos, pois os discentes se envolveram ao longo das discussões com suas equipes, ou seja, a segunda aula não foi aplicada por completo nesse primeiro encontro.

A cada questão projetada, as equipes discutiam as respostas entre eles. A docente não interferia nas discussões, apenas os ouvia.

Uma observação interessante: no momento das discussões, se a docente ficava muito próxima as equipes, eles baixavam o tom de voz, ou até mesmo paravam de falar. Uma ação que deveria ser repensado para as próximas aulas. Como os próprios discentes escolheram suas equipes, foi possível perceber que o entrosamento entre eles facilitou as discussões.

Na aula 1, a equipe hexaedro apresentou um desempenho melhor em relação às demais, eles acertaram todas as questões. Porém, as discussões mais intensas nessa aula partiram da equipe icosaedro, que não chegavam a um acordo quanto a resposta de cada questão e, muitas vezes, consideravam a resposta do colega que tinha um argumento melhor, na concepção deles, para chegar a uma resposta.

Percebe-se aí um indício de que o nível de desenvolvimento potencial estava sendo determinado a partir da colaboração entre os colegas da equipe, mesmo que ainda em alguns casos houvesse uma divergência nas respostas.

Como na primeira aula, a docente observou que quanto mais perto ela chegava dos discentes menos eles falavam, a partir da aula 2, ela optou por ficar mais afastada enquanto eles discutiam, foi mais difícil de captar as falas dos discentes, mas assim eles se sentiam mais à vontade para exporem suas ideias.

Na aula 3, os discentes eram direcionados ao que deveriam se deter para responder as questões. A primeira figura era a foto de um edifício em formato cúbico e a outra fazia menção a convexidade de poliedros. Foi enfatizado pela docente que aquelas imagens eram representações e não se pode ter exatidão quanto a medida de suas dimensões. Na Figura 2 deve-se pensar que a escada foi limitada apenas a dois degraus, apresentando assim um poliedro não convexo.

Na aula 4, apresentou-se a imagem do sólido platônico tetraedro e a animação do octaedro no *software Poly Pro 1.11*. Comparando o desempenho das equipes, pode-se perceber que as mesmas tinham um desempenho semelhante de acordo com os resultados e que as características do octaedro foram bem identificadas pelos discentes. Quanto à questão do tetraedro, é perceptível que a ideia de encontro de várias arestas em um único vértice os confundiu por falta de entendimento das palavras arestas e vértices. O que dá indícios de que os signos, ou seja, significados das palavras não ficaram claros para os discentes.

Na aula 5, apresentou-se aos discentes o vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, uma imagem de uma fluorita e um gif do dodecaedro produzido com o *software Poly Pro 1.11*, respectivamente, com as questões contextualizadas aos assuntos de Geometria Espacial. É

possível perceber que o desempenho das cinco equipes foi igual, ou seja, todas acertaram as alternativas das três questões.

✓ “Mão na massa”: a docente distribuiu os materiais representativos e passou nas equipes para ouvir as discussões.

Na aula 1, os materiais foram: tabuleiros de isopor com palitinhos de dente, alfinetes, bolinhas de isopor. Uma das equipes observou o fato de que as bolinhas de isopor conectadas representavam segmentos de retas. Em duas outras equipes, os discentes discutiam a semelhança do palitinho sobre um plano, que estava ainda sobre outro plano como a figura da dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, fazendo referência a Figura 3, intitulada como Plano e espaço, aquela que possuía uma caneta sobreposta a um caderno sobreposto a uma mesa. Eles também lembraram que dois pontos distintos determinam uma reta.

Na aula 2, os discentes utilizaram a planificação dos sólidos constantes na pasta e o montaram, cada sólido de acordo com o nome da equipe. Eles juntamente com seus colegas deveriam se engajar para montá-lo. Foi possível perceber que as equipes receberam aquela tarefa como um desafio e se ajudaram ao máximo na construção.

Houve momentos em que eles tiveram uma maior dificuldade na montagem como, por exemplo, na hora de colar os cantos dos sólidos, foi perceptível a cooperação entre eles, em todas as equipes. Algumas levaram mais tempo para a finalização da tarefa, outros menos, mas ao final da aula todos conseguiram completar a montagem.

Na aula 3, foram utilizados 2 cubos de espumas com cortes como materiais representativos. A docente enfatizou aos discentes que, deveriam lembrar das características dos sólidos platônicos e pensar no porquê de o cubo ser considerado um desses sólidos, quanto aos cortes quais características diferenciava um cubo espuma inteiro do outro cubo cortado e, ainda, qual a veracidade da relação de Euler nesses dois materiais.

Quando a docente passou nas equipes para ouvir as discussões, uma das equipes observou o fato de que um cubo tinha apenas um corte, e que quando retirado esse corte do cubo, ele lembrou a ideia da escada, uma vez que uma das faces dividia o cubo em duas partes. Uma outra equipe discutiu o fato de que um dos cubos, sem a retirada do corte, era convexo, porém, com a retirada do corte ele deixou de ser convexo.

No momento que eles manipularam o cubo de espuma que continha mais cortes, eles foram provocados pela inquietação da relação de Euler, se era ou não convexo, percebeu-se que as discussões foram mais intensas, pois algumas das equipes retiraram todas as partes afixadas

ao cubo de uma vez e não conseguiam quantificar as faces, arestas e vértices, outras equipes foram retirando cada parte de uma vez para quantificá-las e acabaram se perdendo na contagem.

A docente sugeriu que eles fizessem a retirada de cada uma das partes do cubo e, em cada retirada, eles observassem a quantidade de faces, arestas e vértices desse cubo, logo, essa atividade foi realizada a partir da mediação docente, apenas como auxílio aos discentes, sendo assim há indícios de que foi alterada a ZDP dos mesmos pela mediação.

Na aula 4, os discentes construíram dois poliedros de canudinhos. O primeiro deles foi o tetraedro, construído com varetas para balão transparentes e linhas de pesca. A docente mostrava um deles construído e eles deveriam observar e fazer um semelhante juntamente com sua equipe.

A partir daqui a aula seguiu durante o terceiro encontro, visto que o tempo não foi o suficiente para o que estava proposto, isso porque as construções do tetraedro demoraram mais tempo que o esperado.

No terceiro encontro, a proposta era terminar a aplicação da aula 4 e mais uma aula, visto que ao segundo encontro foi perceptível que não haveria tempo hábil para mais duas aulas e, sendo assim, a docente optou por reduzir de duas para mais uma aula apenas, para que não ficasse duas aulas com pouco rendimento. Sendo assim, a aula 5 foi a última aula de aplicação nesse colégio, isso foi feito com alteração também no plano de aula.

No encontro anterior, os discentes tinham construído o tetraedro e nesse encontro eles realizaram mais uma construção, a do octaedro. A docente pediu para que cada equipe abrisse seu portfólio, no plástico entre as aulas 3 e 4 encontravam os materiais que utilizariam para a construção do octaedro, as varetas para balão cortadas ao tamanho que os discentes necessitariam e, as linhas de pescas adaptadas ao tamanho que eles necessitariam para a construção.

A docente mostrou o slide com uma figura ilustrativa de como realizar a construção do octaedro. Enquanto os discentes tentavam montar o octaedro, a docente passou nas equipes mostrando um octaedro montado por ela com as mesmas dimensões, em princípio os discentes não se deram conta de que se montassem os triângulos primeiramente, seria mais fácil a construção, então em três das cinco equipes: octaedro, dodecaedro e icosaedro, eles passaram os canudinhos na linha sem um planejamento e, sem notar que tinha uma figura ilustrativa no slide de como ele deveria ser montado.

Na equipe hexaedro e tetraedro houve um planejamento anterior a montagem. A hexaedro em suas discussões, enfatizaram que o octaedro é formado por faces triangulares, então, primeiramente eles deveriam formar as mesmas e depois encaixá-las, enquanto que na

equipe tetraedro, eles primeiramente olharam para o slide com a figura que ilustrava a montagem e, então, analisaram qual tamanho de linha de pesca usariam primeiro. A primeira equipe a construí-lo foi a tetraedro.

Na aula 5, os discentes receberam cubinhos em MDF para que fizessem a montagem de um octaedro e, mostrassem a relação da cela unitária com o mesmo. A docente mostrou um octaedro montado de dimensões maiores, porém com as celas unitárias de mesmas dimensões. Após isso, cada equipe recebeu duas peças de MDF coladas, de modo que se fizessem a sobreposição das mesmas formariam um tetraedro. Como a montagem do tetraedro foi um pouco mais complexa, pelo fato de que a docente não levou sequer um modelo montado para eles, então foi lançado como desafio a montagem, um por equipe.

No momento de montagem do octaedro, as equipes o fizeram mais rapidamente pois, eles visualizaram uma peça ampliada que a docente havia levado para explicar alguns conceitos no momento “Convergindo ideias”. Cada equipe visualizou o sólido sobre a mesa da docente e discutiram as ideias de vértices, faces e arestas. A equipe icosaedro, por exemplo, explanou a ideia de que cada cubinho poderia ser a representação de um vértice e, portanto, as “pontas” ou “bicos” do octaedro deveriam totalizar 6 cubinhos.

A equipe tetraedro evidenciou o fato de que para a montagem eles deveriam iniciar com 1 cubinho e depois ir aumentando como se construíssem uma pirâmide de base quadrada e depois, uma outra pirâmide por cima, porém a pirâmide de cima deveria ser menor que a de baixo e então era só sobrepor as duas pirâmides, de maneira que a maior ficasse na parte de baixo e a menor na parte de cima sendo possível a montagem do octaedro com a participação de todos os colegas da equipe.

Nessa aula, há um possível indício da ideia de mediação segundo a teoria de Vygotsky, pelo fato de que os discentes necessitaram de instrumentos de trabalho (cubos em MDF) para conseguir ampliar os conceitos de volume, fazendo uso da ideia de signos (instrumentos da atividade psicológica) através dos instrumentos, mediando a relação do homem com o mundo.

Para o desafio de montagem do tetraedro, a docente deu aos discentes o tempo de 5 minutos, uma vez que esse desafio não poderia tomar muito tempo da aula, visto que ainda havia outros momentos a serem realizados. Após os 5 minutos, nenhuma equipe conseguiu concluí-lo com sucesso.

Segundo os discentes eles não conseguiam imaginar um tetraedro construído de cubinhos, já para a montagem do octaedro eles pensavam na pirâmide e ficava mais fácil de tentar montá-lo, para o tetraedro eles não associavam a outro sólido, só sabiam que ele deveria conter 4 faces e 4 vértices. A docente decidiu, então, que mostraria como deveria ser montado

o tetraedro apenas nos últimos minutos de aula, para que eles pensassem mais sobre a montagem no decorrer dos outros momentos.

Ao final da aula 5, a docente perguntou aos discentes se alguma das equipes conseguiu concluir o desafio de montar o tetraedro de MDF, e a resposta foi negativa, ou seja, o desafio não foi concluído com sucesso. Então ela o montou e lhes mostrou como ficaria.

Os discentes comentaram que era muito difícil de concluí-lo, visto que a docente não lhes mostrou nenhum exemplo concreto de como ele ficaria depois de pronto, apenas explicou-lhes que os pontos de vértices não formariam planos. Os discentes ainda ressaltaram que não conseguiram imaginar um tetraedro feito de cubos MDF, pois, suas faces e arestas não seriam planas como dos materiais de papelão, visto que foram construídos de empilhamentos de cubos.
✓ "Retomando as questões": nesse momento a docente se colocou à frente e abriu as questões para discuti-las uma a uma. Todas as questões, assim como suas respectivas respostas podem ser encontradas no Apêndice A subseção 2. 1. 1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

Nas discussões da aula 1, os que erraram a Q1 confundiram a ideia de reta por não saber o que significava: delimitados. Pensando nas ideias de Vygotsky, temos nesse caso indícios de que o significado da palavra como meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais não foi compreendido, não havendo uma inter-relação entre a imagem e seu signo.

Na Q2, eles apresentaram como justificativa pelo erro o fato de que confundiram o significado de infinito com finito e, por isso, erraram. É possível perceber mais uma vez que há indícios de que não houve uma inter-relação entre a imagem e seu signo, segundo a ideia de Vygotsky.

A docente explicou a diferença entre as duas expressões, para isso utilizou a imagem que possui uma linha do horizonte, explicou que quando se tira uma foto da linha do horizonte por exemplo, não se pode captar o infinito que há nela, na foto tem se a impressão de que ela é finita, pois a foto capta apenas uma parte do que realmente é a linha do horizonte. Aparece aqui um problema de abstração de significado pois, a linha do horizonte (instrumento) não foi ligada ao significado de infinito pelos discentes.

Na Q3, a docente utilizou os materiais representativos e explicou que, assim como uma reta é composta por infinitos pontos, um plano é composto por infinitas retas, sendo ilimitado porque se faz uma referência a um plano qualquer.

Na Q4, a equipe icosaedro argumentou que, nas discussões, eles lembraram do conceito de ângulo reto, que formam ângulos de 90º e, por isso, são perpendiculares, evidenciando que esse conceito está na ZDP da equipe, pois em algum momento eles haviam estudado isso.

Na aula 2, Q1, de forma dialogada, os discentes comentaram que estavam atentos ao vídeo e que como desde a primeira aula estavam em contato com os sólidos platônicos, ficou fácil responder essa. Pode-se ser evidenciado aqui a intervenção na ZDP dos discentes, visto que eles já tiveram contato com os sólidos e, que em conversa com os demais colegas da equipe, ou seja, por meio da mediação entre eles, chegaram ao resultado esperado na resposta, sendo este manifestado por meio do nível de desenvolvimento real que se estabelece como resultado de ciclos de desenvolvimento completados.

Nas discussões da aula 3 Q1, os discentes argumentaram que utilizaram o sólido que usavam para votação para verificar a quantidade de arestas que possui um cubo e assim chegaram a resposta correta, ou seja, utilizaram os materiais (sólidos platônicos de papelão) como instrumentos e, esta atitude pode indicar que houve uma modificação na ZDP, como resposta a mediação docente.

Na Q2, segundo as equipes, votou-se por eliminação de alternativas, chegando assim à conclusão de que a única correta que apresentava a característica que diferenciava dos sólidos de Platão era A: 100% das equipes acertaram a resposta. Pois, utilizando os materiais representativos, citados anteriormente, ficou perceptível que as demais alternativas estavam incorretas. Aqui, os discentes usaram uma estratégia para resolver a questão e ela foi reelaborada, de certa forma, porque a docente fez a mediação anterior e houve indícios de aumento da ZDP.

Na aula 4, a docente lembrou a todos os discentes que essas questões haviam sido respondidas na aula anterior, mas sem uma devida discussão, portanto, aquele era o momento de retomá-las, sanando qualquer tipo de dúvida que houvesse.

Na aula 4, Q1, a equipe hexaedro comentou que, confundiram faces e arestas e, talvez, por isso tenham errado, a equipe tetraedro, octaedro e icosaedro, destacou que não pensaram nas arestas laterais como um todo, pensaram que duas faces laterais sempre se encontram em mais de um vértice e, por isso, erraram a questão. A docente indagou que nessa questão, eles deveriam olhar para todas as faces laterais ao mesmo tempo, segundo a alternativa D todas se encontram em vários vértices, pensando num todo, logo chegariam à conclusão de que todas as faces laterais não se encontram em vários vértices ao mesmo tempo. Aqui há um indício de aprendizagem, visto que, os discentes reconhecem o erro e porque erraram.

Nas discussões da Q2, a docente ouviu que o erro ao julgar essa questão foi cometido por confundirem arestas e faces, novamente, nota-se uma falta de compreensão do signo pois, o significado das palavras não estava claro aos discentes. A equipe que errou optou pela alternativa B - 8 arestas.

Na aula 5, Q1, os discentes argumentaram que para cálculo de volume precisam considerar as 3 dimensões de um sólido e, assim chegaram à conclusão que o volume de um cubo ou hexaedro é determinado através do produto da área da base pela altura e, como as arestas do mesmo têm a mesma medida, a alternativa que mais se encaixava ao volume de um cubo ou hexaedro era a que mostrava o produto das arestas e colocava como unidade de medida o cm^3, visto que as arestas dadas eram em cm.

Há nesse caso, o fato de que eles se ajudaram dentro das equipes para concluir a resposta dessa questão, assim sendo houve a mediação entre os discentes, aproximando o nível de desenvolvimento real deles.

Na Q2 e Q3 dessa aula 5, os argumentos foram os mesmos em todas as equipes, segundo os discentes, eles apenas quantificaram o que era necessário utilizando os materiais representativos que faziam uso na dinâmica de introdução, aqueles de papel cartão fixados a um palito de churrasco. Sendo assim, conclui-se que os materiais ajudaram na internalização dos conceitos.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento, os discentes prestaram atenção nas contribuições teóricas da docente que utilizou os materiais representativos e as imagens da dinâmica "Mão na massa" para reforçar as ideias dos assuntos estudados até o momento. Assim sendo, a docente se torna a mediadora a sanar as questões erradas ou equivocadas dadas pelos discentes, colaborando com a ZDP de cada um deles.

Como nessa primeira aplicação, as aulas de Geometria de Posição tiveram que ser reduzidas, ao invés de três aulas, restou apenas uma, a docente quando explicava os principais conceitos utilizou as imagens contidas na segunda aplicação, aulas 1, 2 e 3 que não constavam nesta aula da primeira aplicação, para caracterizar ponto, reta e plano, explanando os assuntos com características baseadas nas imagens.

Na aula 5, a docente utilizou a história: "Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito", além dos materiais representativos, e enfatizou sobre a relação das imagens de cristais com os sólidos platônicos, inseridas na dinâmica introdutória para reforçar as ideias dos assuntos estudados até o momento.

✓ "Investigando as características": nesse momento as equipes discutiram as suas percepções sobre as caracterizações dos materiais representativos. Em seguida, abriu-se a plenária para a contribuição de cada equipe. A docente anotou as ideias que os discentes lhes passavam preenchendo nos slides com aquilo que eles lhes falavam. As considerações em negrito destacam o que os discentes citavam nesse momento.

Quanto a esta dinâmica, na aula 1, foi possível perceber que a caracterização do espaço demorou mais a ser definida.

Na caracterização do plano, por exemplo, uma equipe argumentou que ele é também um conjunto de pontos, mas é mais abrangente caracterizar como conjunto de infinitas retas, pois elas são formadas por pontos. Nessa equipe, foi evidenciado que a mediação por meio de instrumentos ativou nesses discentes a significação das características, o que implica dizer que por meio dos instrumentos, atuou-se na ZDP dos mesmos, de modo a amadurecer funções ainda não consolidadas.

Cada uma das equipes contribuía com o que foi discutido entre eles. Por fim, eles organizaram as ideias e chegaram a uma consideração final e, assim, se apresentou a relação de características:

- Plano: **conjunto de infinitas retas.**
- Espaço: **conjunto formado por todos os pontos, formado por 3 dimensões, pode ser representado, infinitos planos.**

Posições relativas de duas retas:

a) Paralelas coplanares: **não tem ponto em comum.**
b) Paralelas coincidentes: **todos os pontos em comum.**
c) Concorrentes: **se cruzam, não importa o ângulo, compartilham um ponto.**
d) Perpendiculares: **formam um ângulo de 90 graus, se cruzam.**
e) Reversas: **não estão no mesmo plano.**

Na aula 2, no momento das discussões nas equipes, a tetraedro destacava que as arestas do sólido era a representação de um segmento de reta. Foi analisado as características dos sólidos em relação ao paralelismo de arestas e faces, isso relembrando os conceitos estudados anteriormente em Geometria de Posição.

Cada uma das equipes ficou encarregada de analisar a característica do sólido que os representava, enquanto uma equipe contava o que observou em relação ao seu sólido, as demais prestavam atenção e até auxiliavam argumentando quando necessário. Há nesse caso indícios da mediação de um ou mais elementos das equipes na plenária e intervenção na ZDP.

A equipe que analisou o octaedro não conseguiu identificar que haviam faces paralelas nesse sólido, a equipe icosaedro no momento em que eles contavam as características observadas, os interrogaram sobre duas faces que poderiam ser consideradas paralelas e, então os próprios discentes olharam o sólido mais uma vez e concordaram que realmente podia dizer que há paralelismo de faces no octaedro.

Nessas ações, por parte dos discentes, são evidenciados os conceitos de mediação, pois os instrumentos (aparatos de Geometria de Posição e Espacial) serviram de subsídios para a prova de algumas características e, ainda houve evidências de intervenção na ZDP de cada um, quando as equipes se ajudavam ao caracterizar os sólidos lembrando de conceitos estudados anteriormente. Assim, se apresentou as características:

- Tetraedro: **não possui faces e arestas paralelas.**
- Hexaedro: **faces e arestas paralelas.**
- Octaedro: **tem arestas paralelas e faces paralelas.**
- Dodecaedro: **tem faces paralelas.**
- Icosaedro: **faces e arestas paralelas.**

Foi analisado nesse momento se os conceitos estudados em Geometria de Posição ficaram claros aos discentes, assim, a docente verificou que não havia erros de significação em relação a esses assuntos.

Na aula 3, foi possível perceber que a quantificação do sólido cortado foi o que eles mais demoraram a definir, talvez porque retiraram todas as partes de uma só vez, quando os membros de cada equipe se uniram para pensar juntos na maneira de quantificar os componentes dos sólidos, então, o trabalho ficou mais envolvente e com mais sucesso nas contagens, visto que não apenas um discente quantificava as partes do sólido, mas todos conferiam se chegariam ao mesmo resultado.

Quando aberta a plenária, a definição de convexo e não convexo foi bem objetiva e convergiu entre todas as equipes, na quantificação dos elementos do cubo cortado houve alguns equívocos, visto que algumas equipes se perderam na contagem, nesse momento, a docente recontou com todos para a conferência.

O Quadro 5.2 apresenta as características dos 3 cubos, sendo o sólido 1 o cubo inteiro, o 2 e 3 os dois cubos de espuma com cortes. Assim, se apresentou a relação de características:

1) Por que um sólido é dito convexo e o outro é não convexo?

Porque o não convexo possui uma aresta que divide o poliedro em duas partes e o convexo não.

2) A cada corte retirado do poliedro convexo de espuma preencha o quadro:

Quadro 5.3 – Relação de convexidade

Sólido	Face(s)	Aresta(s)	Vértice(s)	V-A+F =
1	**7**	**15**	**10**	**2**
2	**8**	**18**	**12**	**2**
3	**9**	**21**	**14**	**2**

Fonte: A autora

Na aula 4, foi possível perceber que não havia dúvidas quanto as características de cada um dos sólidos, sendo assim, os discentes falaram a docente como descrevê-los. Cada uma das equipes contribuía com o que foi discutido entre eles. Por fim, eles organizaram as ideias e chegaram a uma consideração final e, assim, se apresentou a relação de características:

- Faces: **Tetraedro = 4 e octaedro = 8**
- Arestas: **Tetraedro = 6 e octaedro = 12**
- Vértices: **Tetraedro = 4 e octaedro = 6**

Na aula 5, as equipes explanavam o que encontraram como respostas as características dos materiais representativos (cubos em MDF), considerando seus volumes.

A docente enfatizou que aqueles sólidos eram representações feitas com cubos, porém para o cálculo de volume real devemos considerar algumas partes dos sólidos que não estão evidenciadas, pois faltam pedacinhos, ou seja, partes de cubos para preenchê-los, após isso, registrou no slide a sugestão deles. Assim, se apresentou a relação de características:

- Cubo: **uma unidade cúbica de volume**
- Tetraedro: **20 unidades cúbicas de volume**
- Octaedro: **25 unidades cúbicas de volume**

✓ "Relatando a atividade": descrito no capítulo 4 realizou-se no momento de avaliação dos discentes, a partir dos relatórios-avaliações individuais ou em grupo, a partir da ideia de grupo focal segundo Kitzinger (2000), estes formulados pela docente, impressos em folha sulfite, constantes no portfólio e entregues a cada uma das equipes. Os discentes preencheram utilizando as características qualitativas e quantitativas dos materiais representativos da aula. A docente fez as análises de cada um dos mesmos após a aula, destacando algumas dúvidas inerentes aos assuntos estudados. Destaca-se aqui algumas particularidades dessa segunda aplicação após as análises dos relatórios-avaliações.

Na aula 1, foi evidenciado dúvidas em relação ao conceito de semirreta e segmento de reta. Para que os discentes não seguissem com essa dúvida, a docente optou por explicar mais objetivamente as duas ideias, mostrando sua semelhança e diferença no início do segundo encontro. Lembrando que cada encontro representa cada dia de aula, nessa aplicação foram realizados 3 encontros com duas aulas cada.

O primeiro encontro como previsto anteriormente, contaria com duas aulas, porém na aula 1 foi preciso um tempo maior, além dos 50 minutos, devido ao envolvimento dos discentes nas discussões sobre os assuntos da aula. Como havia alguns minutos antes do término do tempo disposto pelo colégio, a docente iniciou a Aula 2, mas realocou os momentos da aula, pois a

dinâmica introdutória precisaria de um pouco mais de tempo para seu desenvolvimento, assim, essa aula iniciou-se com a dinâmica “Mão na massa”. Devido a essa mudança, o plano de aula teve que ser refeito e pode ser visualizado no Apêndice A seção 2. 1 Primeira Aplicação - versão com cinco aulas - Plano de Unidade com respectivos planos de aulas.

No segundo encontro, a proposta era terminar a aplicação da aula 2 e mais duas aulas, a 3 e 4. Como a aula 2 havia sido iniciada com algumas alterações, mudou-se a ordem dos momentos. Antes do início da aula 2, a docente retomou as ideias de semirreta e segmento de reta citados por eles como dúvidas da aula anterior, foi bem objetiva nas duas ideias, mostrando suas semelhanças e diferenças, a partir de materiais representativos utilizados na aula anterior.

Nas aulas 2, 3, 4 e 5 não houve registros de dúvidas inerentes aos assuntos trabalhados em aula.

5.2 VERSÃO COM 7 AULAS - COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR JOÃO RICARDO VON BORELL DU VERNAY

As descrições gerais do universo da segunda e terceira aplicações encontram-se no item 4.2.2 e 4.2.3. No Quadro 5.4 são apresentadas todas as questões utilizadas, referenciadas pela aula em que foi trabalhada, bem como as suas respectivas respostas corretas destacadas em negrito. E na sequência, apresentam-se os resultados, comentários e análises da segunda e terceiras aplicações

Quadro 5.4 – Questões: segunda e terceira aplicação

(Continua)

A= Aulas	Q= Questões
A 1	Q1. Na imagem, observamos um guarda-corpo, ou simplesmente guarda, de pedras onde há esferas alinhadas. Embora, ponto não seja conceituado, para uma melhor compreensão consideremos uma representação de ponto pela esfera do guarda-corpo, assim se olhássemos para este guarda-corpo de muito longe, veríamos uma representação de sequência de pontos. Podemos deduzir que os pontos: b) alinhados continuamente infinitamente representam um segmento de reta. c) alinhados continuamente infinitamente formam uma semirreta. **d) alinhados continuamente infinitamente formam uma reta.** e) alinhados continuamente, mas delimitados no início e fim representam uma reta.
	Q2. Na imagem, observamos um trilho de trem, composto por perfis de aço laminado, dispostos de forma paralela entre si, sobre dormentes (travessas) as quais são peças de madeira. Os trilhos ou carris são fixados sobre os dormentes através de elementos de fixação, compostos por grampos ou tirafundos, que os delimitam. Essa imagem nos fornece uma representação de um segmento de reta, sendo ele: **a) limitado por dois pontos na reta.** b) ilimitado. c) uma infinidade de pontos alinhados ilimitados. d) limitado, porém infinito. e) limitado no início e ilimitado no fim.
A 2	Q1. Nessa imagem, a caneta sobre o caderno pode ser considerada como uma representação de um segmento de reta, que é formada por pontos contínuos, lembrando que é limitada em dois pontos, por isso chamada de segmento de reta. Essa caneta, ou segmento de reta está sobreposta a um caderno, que está ainda sobreposto a uma mesa, ou uma superfície plana, isso significa que essa mesa como um todo representa um plano, logo podemos considerar que um plano é formado por: a) um conjunto de infinitas curvas. b) um conjunto de finitos pontos. c) um conjunto de finitas retas. **d) um conjunto infinito e ilimitado de retas.** e) um conjunto finito e limitado de retas.

Quadro 5.4 – Questões: segunda e terceira aplicação

(Continuação)

A= Aulas	Q= Questões
A 2	Q2. Na foto "plano e espaço", observamos a representação de uma xícara com um considerável volume de café, logo o café preenche um certo espaço da xícara. Podemos perceber então que o espaço considera o volume de um objeto em questão. O espaço pode ser representado como uma infinidade de planos, assim como o plano, por uma infinidade de retas, isso significa que o espaço considera o volume, sendo esse representado por: a) três dimensões: altura, largura e volume. b) uma única dimensão. c) duas dimensões quaisquer. **d) três dimensões: altura, largura e comprimento**. e) duas dimensões: altura e largura.
A 3	Q1. Observe o trilho por onde o trem irá passar, podemos observar nele a representação de duas retas paralelas, pois como característica: a) as retas estão contidas num plano. **b) as retas não possuem ponto em comum entre elas.** c) as retas possuem infinitos pontos em comum entre elas. d) as retas são perpendiculares. e) as retas são reversas
	Q2. Observe os detalhes da pintura na fachada dessa construção, é possível identificar traços de perpendicularidade nas pinturas em marrom, sabendo disso, podemos concluir que há perpendicularidade entre retas quando: a) não possuem pontos em comum. b) possuem vários pontos em comum. c) estão lado a lado. **d) formam ângulos retos entre si, 90°.** e) formam ângulos de 180° entre si.

Quadro 5.4 – Questões: segunda e terceira aplicação

(Continuação)

A= Aulas	Q= Questões
A4	Q1. Na imagem, observamos uma construção com empilhamentos em formatos cúbicos, não podemos afirmar com precisão que suas faces formam quadrados, porém considerando a representação de um cubo, podemos analisar algumas características. O cubo é formado por um número limitado de semirretas, que são conhecidas como arestas, assim como os demais sólidos de Platão. Sabendo disso, um cubo possui um número **n** de arestas, sendo **n** igual a: a) 6 b) 8 c) 10 **d) 12** e) 14
	Q2**.** Na imagem, observamos a construção de uma escada. Se considerarmos parte da escada em apenas dois degraus, teremos a representação de um poliedro, porém ele não será um poliedro de Platão, pois uma das características que o diferencia dos mesmos, é que: **a) o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.** b) ele possui arestas e faces, mas não possui vértices. c) ele é regular, pois suas faces são retângulos. d) vale a relação de Euler (V – A + F = 2). e) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.
A5	Q1. O vídeo cita que algumas evidências sugerem que Pitágoras conhecia apenas o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, com estudos mais aprofundados no Teeteto (um diálogo platônico sobre a natureza do conhecimento) concluiu que existem apenas 5 poliedros regulares, eles são regulares, pois uma característica marcante em todos eles é que: a) possuem o mesmo número de arestas. **b) suas faces são polígonos regulares e congruentes.** c) seus vértices tem sempre o mesmo número de arestas. d) todos eles não são convexos. e) para nenhum deles vale a relação de Euler.
A6	Q1. Observando a imagem contemplamos um monumento no formato de pirâmide triangular, ou tetraedro. Um tetraedro é um poliedro com uma base em formato de triângulo e, como característica marcante, temos que: a) são formados apenas por vértices e arestas. b) são formados apenas por vértices e faces. **c) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em um único vértice ao mesmo tempo.** d) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em vários vértices ao mesmo tempo. e) suas faces não são triângulos regulares.

Quadro 5.4 – Questões: segunda e terceira aplicação

(Conclusão)

A= Aulas	Q= Questões
A6	Q2. Um octaedro convexo possui todas as 8 faces triangulares regulares, sabendo disso, encontre uma maneira de estimar a quantidade de arestas desse poliedro, chegando então a conclusão de que esse octaedro possui: a) 6 arestas b) 8 arestas c) 10 arestas **d) 12 arestas** e) 14 arestas
A7	Q1. Na imagem, observamos o hábito de uma Fluorita, que pode ser representada por um empacotamento tridimensional de cubos CaF8 com cálcio centrado. Cada cubo compartilha arestas e faces com seus vizinhos, criando um arranjo similar a um tabuleiro de xadrez quando visto de uma das faces do hábito. Se cada cubo tem suas arestas com medida igual a, deduzimos que o volume de cada cubo é igual a: **a) V= a.a.a** b) V= a+a+a c) V= a^2 d) V= 3a e) V= $3a^2$

Fonte: A autora

- Segunda aplicação - momentos das aulas

✓ “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”: conforme Apêndice A subseção 2. 2. 1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

Alguns dos discentes que participaram dessa aula relataram que esse ano não estavam tendo aulas de Matemática, devido ao fato da grade de disciplinas ser diferente do Ensino Médio regular, por se tratar de um curso técnico. A docente explicou que eles não precisavam ficar preocupados com os erros, mas que expusessem suas opiniões e discutissem as questões com seus colegas de equipe baseado no que lembravam de ter estudado sobre os assuntos e, também, que caso parecesse algo muito novo, haveria um momento em que ela explicaria a parte teórica da aula.

No Quadro 5.5 está a descrição de todas as respostas registradas nas aulas desta segunda aplicação, em negrito está destacada a resposta correta a cada uma das questões citadas anteriormente no Quadro 5.4.

Quadro 5.5 – Segunda aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica

	Aulas	**Questões**	**Equipes**					**% acertos antes da abordagem mediadora**
			Tetraedro	**hexaedro**	**Octaedro**	**dodecaedro**	**icosaedro**	
Segunda Aplicação	**A1**	**Q1**	E	**D**	**D**	**D**	E	**60**
		Q2	A	D	**B**	D	D	**20**
		Q3	C	C	C	**A**	D	**20**
	A2	**Q1**	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
		Q2	**E**	**E**	**E**	B	B	**60**
		Q3	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A3	**Q1**	D	C	C	C	**B**	**20**
		Q2	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A4	**Q1**	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
		Q2	C	D	D	D	D	**0**
	A5	**Q1**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**100**
	A6	**Q1**	**C**	D	D	**C**	**C**	**40**
		Q2	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A7	**Q1**	**A**	D	D	D	**A**	**40**

Fonte: A autora

No momento de discussão, na aula 1, uma das equipes observou que, eles precisavam prestar muita atenção a foto associada porque nela continha a resposta de cada questão. Foi possível perceber que em relação às questões de reta e segmento de reta, as equipes hexaedro e dodecaedro tiveram um melhor desempenho, no entanto, nenhuma delas obteve 100 % de acerto.

Na aula 2, a equipe tetraedro, hexaedro e octaedro destacaram-se pelo seu rendimento, conseguindo acertar as três questões que fazia alusão as características de plano e espaço.

Na aula 3, a equipe icosaedro foi a que obteve o maior desempenho nas respostas às questões relativas as características de reta.

Na aula 4, os discentes deveriam tentar estabelecer uma relação de semelhança e diferença entre as duas imagens apresentadas, para assim respondê-la corretamente. A docente enfatizou que eles deveriam pensar basicamente nas semelhanças e diferenças entre as duas imagens apresentadas. Todas as equipes tiveram o mesmo rendimento, acertaram a questão que caracterizava o cubo, porém, erraram a questão que citava as características de convexidade. Há indícios de que a ZDP dos discentes não era abrangente a ponto de fazer ligação entre as imagens e os conceitos.

Na aula 5, os discentes deveriam prestar bastante a atenção ao vídeo inicial para responder uma única questão que basicamente foi formulada para percepção do nível de atenção dos mesmos. Essa discussão foi rápida pois, em cada equipe pelo menos um dos membros esteve atento aos detalhes do vídeo, assim sendo, todas as equipes optaram pela alternativa correta.

Na aula 6, abriram-se as discussões baseados na imagem de um monumento tetraédrico e em um gif do octaedro criado pelo *software Poly Pro 1.11*e suas respectivas questões. As equipes tetraedro, dodecaedro e icosaedro obtiveram melhor desempenho nas respostas as questões.

Na aula 7, a docente mostrou o vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, enquanto ele era transmitido aos discentes, ela contou como Kepler imaginou que seria essa estrutura.

Na aula 7 ainda, para a contextualização das ideias dos cristais, a docente mostrou a imagem de uma fluorita e, então, fez uma conexão entre o assunto de cristais e a Geometria Espacial. As equipes tetraedro e icosaedro foram as únicas que acertaram as respostas da questão que referenciava o volume de um cubo qualquer. Observa-se aqui que talvez a ZDP de alguns dos discentes não tivesse abrangência ao conceito de volume, pois, mesmo com a imagem fazendo menção as 3 dimensões, ainda surgiram erros conceituais.

✓ “Mão na massa”: abaixo será descrito algumas especificidades de cada aula.

Na aula 1, os materiais foram: tabuleiro de isopor com palitinhos de dente, alfinetes e bolinhas de isopor. A equipe hexaedro observou o fato de que as bolinhas de isopor conectadas representavam retas. Indício de que a ZDP não era abrangente ao ponto de diferenciar retas e segmentos de retas. Porém, um discente da mesma equipe argumentou que se considerassem um todo seria uma reta, porque ali estava representada apenas parte da mesma, nesse caso, como

ali não representa um todo tem outro nome, mas ele não lembrava qual era. Há indícios de que a ZDP desse discente era abrangente em relação ao conceito de segmento de reta, mas não ao ponto de colocar significado ao signo que é a palavra segmento de reta.

Nas equipes tetraedro, octaedro, dodecaedro, os discentes evidenciaram o fato de que os palitinhos de dente poderiam também representar retas. Sendo aqui, apresentado nos dois casos acima citados indícios de zona de desenvolvimento real. Na equipe hexaedro e icosaedro, os discentes discutiram a diferença de reta e semirreta, argumentando que a semirreta é uma reta limitada dos dois lados (conceito errôneo), esse é o conceito de segmento de reta. Aqui ficou evidente que os discentes não haviam internalizados esses conceitos, indícios de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar significado aos signos que são as palavras semirretas e segmentos de retas.

Na aula 2, além dos materiais da aula 1, os discentes também contavam com os cubos em MDF. Na equipe tetraedro, os discentes observaram o fato de que o cubo em MDF tem 3 dimensões, mas que se olhassem para a face dele ela está em duas dimensões, pois só a face é um quadrado. Isso apresenta indícios de que a equipe tem uma ZDP abrangente, capaz de identificar a diferença de uma figura bidimensional e uma tridimensional.

Na aula 3, os materiais foram: palitos de churrasco, cubinhos em MDF, materiais de pratos de isopor. A equipe hexaedro observou o fato de que os materiais construídos de isopor lembravam a ideia de perpendicularidade entre retas se observados em um determinado ângulo, apresentando assim, indícios de que a ZDP dessa equipe era mais abrangente em relação as demais equipes.

Na aula 4, os materiais foram: dois cubos de espuma com cortes. As equipes observaram os cubos e retiraram os pedacinhos de cada um deles, um dos discentes observou que um dos cubos lembrava a relação da imagem da escada que dividia um poliedro. Nesse caso houve indício de que a ZDP desse discente era abrangente, pois, foi capaz de relacionar o material, a imagem.

A equipe tetraedro e octaedro discutiram juntas as ideias, quantificando as faces e arestas do cubo que representava um poliedro não convexo, quando retiravam partes dos cortes. A docente, nesse momento, interviu lembrando-os que agora o cubo tinha algumas partes internas, mas que eles poderiam pensar nisso, para em outro momento chegar a uma conclusão. Os discentes perceberam então, que esqueceram de contar com as partes internas do cubo cortado. Esta atitude pode indicar que houve uma modificação na ZDP, como resposta a mediação docente.

Na aula 5, os materiais foram: sólidos platônicos feitos de papelão e revestidos com papel dobradura. A equipe do tetraedro observou o fato de que havia nesse sólido segmentos de retas que terminavam sempre em um vértice. Isso indica que a ZDP dos discentes era abrangente no sentido de perceber uma característica do conceito de vértice, antes da conceituação de vértices, eles foram capazes de lembrar o conceito de segmento de reta que já havia sido estudado anteriormente.

Na aula 6, os materiais foram: varetas de balão de plástico e linhas de pesca para a construção de um tetraedro e um octaedro por grupo.

Na aula 7, os materiais foram: cubinhos em MDF. A docente os orientou a construírem um tetraedro e um octaedro de cubinhos, porém, o tetraedro foi um desafio que eles nesse momento não conseguiram cumprir.

✓ "Retomando as questões": de acordo com o Quadro 5.5 será descrito algumas especificidades de cada aula.

Na aula 1, Q1, resposta correta, alternativa D: 60% das equipes acertaram a resposta, porém 40% erraram a resposta, optando pela alternativa E. Nas discussões, as equipes que erraram, argumentaram que chegaram a essa conclusão, pois pensavam que toda reta sempre tem início e fim, por isso o erro. Há um indício de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar um novo significado ao signo que é a palavra semirreta.

Na Q2 aula 1, resposta correta, alternativa B: 20% dos discentes acertaram a resposta, ou seja, apenas uma equipe, porém, 60% erraram a resposta, optando pela alternativa D e 20% optou pela alternativa A.

Na aula 1, Q2 resposta correta, alternativa A: houve 20% de acerto, 60% ficaram com a opção C e, os outros 20% optaram pela alternativa D. Na plenária, os discentes justificaram que observaram apenas a imagem com o trilho de trem, não se atentaram para o enunciado da questão que fazia alusão as travessas do trilho. Indício de que a falta de atenção dos discentes a leitura da questão os impossibilitou de aumentar a abrangência da ZDP de cada um deles. A docente reforçou, então, que quando se trata de segmento de reta, eles devem lembrar que é uma parte da reta, ou seja, limitado por isso a letra A é a alternativa correta.

Na aula 2, Q1, resposta correta, alternativa D: 100% das equipes acertaram a resposta. Nas discussões, os discentes falaram que foram pela lógica, uma vez que uma reta é formada por infinitos pontos, então, um plano é formado por retas, logo a resposta mais completa seria essa. Evidenciando, assim que a ZDP dos discentes era abrangente em relação ao assunto.

Na Q2, aula 2, resposta correta, alternativa D: 100% das equipes acertaram a questão. Nas discussões, alguns discentes, da equipe tetraedro comentaram que estavam em dúvida entre essa opção correta e a alternativa A, que tratava das três dimensões do espaço, sendo: altura, largura e volume, porém, depois da dinâmica "Mão na massa" tiveram a certeza que haviam acertado, uma vez que para o cálculo de volume de um cubo é necessário utilizar a altura, a largura e o comprimento, e o cubo tem 3 dimensões, então, o volume não é considerado uma dimensão. Neste caso, há evidências de que a abrangência da ZDP da equipe, em relação às respostas das questões iniciais, não era bem desenvolvida, porém foi possível de ser aperfeiçoado com a manipulação de materiais.

Nesse momento fica evidente que o contato com os materiais representativos foi um fator importante para desenvolver a internalização do conhecimento, por meio da mediação de instrumentos e, também atribuir significado as características e palavras adequadas.

Na aula 3, Q1, resposta correta, alternativa B: 20% das equipes acertaram a resposta, porém 60% optaram pela alternativa C e 20% pela alternativa D. Nas discussões, as equipes tetraedro e dodecaedro argumentaram que confundiram a ideia de reta paralela e perpendicular. Há indícios de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar significado aos signos as palavras paralela e perpendicular. As equipes hexaedro e octaedro argumentaram que faltou atenção na interpretação do enunciado da questão.

Na Q2, aula 3, resposta correta, alternativa D: 100% das equipes acertaram a questão. Nas discussões, os discentes argumentaram que na questão 1 foi possível relembrar o conceito de retas perpendiculares e, aí ficou fácil responder à questão 2. Nesse caso, há indícios de ZDP abrangente dos discentes.

Na aula 4, Q1, resposta correta, alternativa D: 100% das equipes responderam corretamente a essa questão que, caracterizaria o cubo, mais especificamente as arestas dele, quantificando-as. Como justificativa, os discentes comentaram que com a imagem da construção arquitetônica e com os materiais representativos em formato cúbico, a resposta para esta questão ficou muito fácil, era só questão de saber contar e saber a definição de aresta. Nota-se que, neste momento, há atribuição de signos, reestruturando o processo psicológico e, assim aumentando a abrangência da ZDP dos discentes.

A Q2, caracterizava um poliedro não convexo, os discentes deveriam observar a semelhança e diferença entre os sólidos de Platão estudados anteriormente e esse poliedro, que na imagem é associada a parte de uma escada. Nas discussões, eles apontaram a dificuldade em entender o significado da palavra regular e, consideraram esse poliedro como regular, então valeria a relação de Euler.

Há aqui indícios de que os signos não estavam claros, dificultando o entendimento dos discentes. Para eles a regularidade estava associada a pelo menos uma das faces do poliedro ser um retângulo e não haviam compreendido que quando se fala em regularidade todas as faces do poliedro devem ser congruentes, ou seja, com mesma medida, logo a imagem mostrava um poliedro constituído por faces quadradas e retangulares, assim sendo um poliedro não regular.

Então, para eles o significado de regular não abrangia o significado que a docente queria discutir, ou seja, há um indício de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar um novo significado ao signo que é a palavra regular. Nesse momento, a docente precisou instigá-los a lembrar de outros conceitos estudados em aulas anteriores e associar essas características com a dinâmica "Mão na massa".

Alguns discentes argumentaram que se essa questão tivesse sido feita depois deles usarem os cubos de espuma, eles com certeza não errariam, pois só após eles manipularem os materiais é que ficou clara a diferença entre poliedro convexo e não convexo. Nesse caso, há indícios de que a mediação ocorreu por meio da interação com instrumentos e signos.

Na aula 5, Q1, resposta correta, alternativa B: 100% das equipes acertaram a resposta. Nas discussões, os discentes argumentaram que essa questão partia apenas do reconhecimento das principais características dos poliedros regulares e, de acordo com o vídeo assistido, eles conseguiam identificar àquela encontrada em todos os cinco poliedros regulares, também conhecidos como sólidos platônicos. Logo, segundo os discentes, essa questão ficou fácil de ser analisada, pois prestaram atenção a história e imagens apresentadas no vídeo. Há um indício de que a ZDP deles era abrangente a ponto de colocar um significado aos signos que são os poliedros regulares.

Na aula 6, Q1, resposta correta, alternativa C: 60 % das equipes acertou a resposta, 40% errou, optando pela alternativa D. Os discentes das equipes hexaedro e octaedro argumentaram que ao analisar a questão confundiram a ideia pelo fato de mal interpretarem a questão, pensaram em cada uma das faces ao analisar o encontro das mesmas nos vértices e não no tetraedro como um todo.

Na Q2, aula 6, alternativa D: 100% dos discentes acertou a questão, eles utilizaram o sólido platônico feito de papelão, os mesmos que levantavam para responder as questões, para chegar a essa conclusão. Utilizaram como instrumento, portanto, o material representativo para concluir a resposta, ou seja, só perceberam o significado quando os utilizaram.

Na aula 7, Q1, resposta correta, alternativa A: 40% dos discentes acertou essa questão, os outros 60% optaram pela alternativa D. Essa questão caracterizava o cubo, referindo-se ao

seu volume, os discentes deveriam lembrar como era o cálculo dele, quais dimensões considerar. Na discussão, as equipes octaedro, hexaedro e dodecaedro argumentaram que mesmo sabendo que precisavam utilizar 3 dimensões no cálculo de volume do cubo, se confundiram na hora da multiplicação dos monômios, ou seja, ao invés de lembrar que seria uma multiplicação das 3 dimensões, eles somaram as 3 resultando em 3a cm^3. O que evidencia que os discentes não contemplam em sua ZDP operações como essas.

✓ "Convergindo ideias": descrito no capítulo 4 e na aplicação anterior mencionado como foi realizado no que se refere a elementos comuns das três aplicações. Aqui são apresentados outros aspectos que na aplicação anterior não foram contemplados por ser uma versão reduzida.

Nas aulas 6 e 7 respectivamente, para sanar as questões erradas, os discentes prestaram atenção as contribuições teóricas da docente que utilizou os materiais representativos (poliedros de varetas de balão e poliedros de papelão), (cubos em MDF, octaedro feitos com cubos em MDF, esferas de isopor representando átomos idênticos) para reforçar as ideias dos assuntos estudados até o momento, sempre os relacionando com as imagens, *gif* e vídeo inseridos na dinâmica introdutória.

✓ "Investigando as características": descrito no capítulo 4 e na aplicação anterior mencionado como foi realizado no que se refere a elementos comuns das três aplicações. Aqui são apresentados outros aspectos que na aplicação anterior não foram contemplados por ser uma versão reduzida.

Na aula 1, no momento das discussões foi possível perceber que ainda houve divergência na diferenciação entre semirreta e segmento de reta. A docente interviu nesse momento, utilizando as imagens da dinâmica introdutória para reforçar a ideia tanto de semirreta, quanto de segmento de reta.

Os discentes chegaram a consideração final e, assim, se apresentou a relação de características:

a) Reta: **não tem começo nem fim, é infinita**
b) Semirreta: **tem início, mas não tem fim**
c) Segmento de reta: **é delimitado por dois pontos em uma reta**

Posições relativas de duas retas:

a) Paralelas coplanares: **não tem ponto em comum**
b) Paralelas coincidentes: **todos os pontos em comum**
c) Concorrentes: **se cruzam, não importa o ângulo, compartilham um ponto.**
d) Perpendiculares: **formam um ângulo de 90 graus.**
e) Reversas: **não estão no mesmo plano.**

Na aula 2, foi possível perceber que a caracterização do espaço foi o assunto que eles mais demoraram a definir.

Por fim, se apresentou a relação de características:

- Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:

a) paralelos b) iguais **c) secantes** d) coplanares

- Quantos planos podem passar por dois pontos distintos?

a) nenhum b) 1 c) 2 **d) infinitos**

Na aula 3, foi possível perceber que a diferença entre paralelismo e perpendicularidade era o que mais os discentes destacaram como algo simples de definir. Por fim, se apresentou a relação de características:

- Paralelismo entre:

a) Retas: **não há ponto em comum entre elas (coplanares) ou todos os pontos são comuns (coincidentes);**

b) Reta e plano: **não há ponto em comum entre a reta e o plano.**

c) Plano e plano: **eles não possuem ponto em comum (distintos) ou possuem todos os pontos em comum (coincidentes).**

- Perpendicularidade entre:

a) Retas: **quando tem um ponto em comum que formam ângulos retos entre si;**

b) Reta e plano: **a reta é perpendicular a todas as retas do plano.**

c) Planos: **há uma reta contida em um plano 1, sendo esta perpendicular a um plano 2.**

Na aula 4, foi possível perceber que muitos discentes conseguiram estabelecer uma relação de semelhança entre os cubos de espuma e as imagens apenas nesse momento, quando oralmente descreviam o que visualizaram.

Por fim, se apresentou a relação de características:

1) Por que um sólido é dito convexo e o outro é não convexo?

Porque um possui uma aresta que divide o poliedro em duas partes, no caso o não convexo, já o convexo não divide o poliedro.

2) A cada corte retirado do poliedro convexo de espuma preencha o quadro:

Idem Quadro 5.3 – Relação de convexidade

Na aula 5, se apresentou a relação de características:

- Tetraedro: **não possui faces e nem arestas paralelas**
- Hexaedro: **possui faces e arestas paralelas**
- Octaedro: **possui arestas e faces paralelas**

- Dodecaedro: **possui apenas faces paralelas**
- Icosaedro: **possui faces e arestas paralelas**

Na aula 6, sobre os sólidos construídos (tetraedro e octaedro), se apresentou a relação de características:

- Quantidade de arestas em cada vértice:

Tetraedro: **3**

Octaedro: **4**

- Ângulos:

Tetraedro: **4 ângulos triédricos**

Octaedro: **6 ângulos tetraédricos**

Na aula 7, no momento das discussões foi possível perceber que os discentes utilizaram os materiais representativos (cubos em MDF), para discutir nos grupos, os volumes dos sólidos considerando cada cubinho uma unidade cúbica de volume e, assim, se apresentou a relação de características:

• Cubo: **1 unidade cúbica**

• Tetraedro: **utilizou-se 20 unidades cúbicas**

• Octaedro: **utilizou-se 25 unidades cúbicas**

✓ "Relatando a atividade": descrito no capítulo 4 e na aplicação anterior mencionado como foi realizado no que se refere a elementos comuns das três aplicações. Destaca-se aqui algumas particularidades dessa segunda aplicação após as análises dos relatórios-avaliações.

Na aula 1, houve uma única dúvida inerente ao assunto de retas, sendo mais específico a reta perpendicular. Para que os discentes não seguissem com essa dúvida, a docente optou por explicar mais objetivamente essa ideia, no início do segundo encontro, antes do início da terceira aula.

Na aula 2, um discente relatou que precisava de uma melhor explicação sobre o assunto de espaço. Para que o discente não continuasse com essa dúvida, a docente optou por explicar mais objetivamente no início do segundo encontro.

Na aula 3, o relatório-avaliação foi realizado em equipe pois fechava o assunto de Geometria de Posição e, neste não houve nenhum relato de dúvida.

Nas aulas 4, 5, 6 e 7 não foram registradas dúvidas inerentes aos assuntos.

- Terceira aplicação - momentos das aulas

✓ "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia": conforme Apêndice A subseção 2. 2. 1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

No Quadro 5.6 está a descrição de todas as respostas registradas nas aulas desta terceira aplicação, em negrito está destacada a resposta correta a cada uma das questões citadas anteriormente no Quadro 5.5.

Quadro 5.6 – Terceira aplicação: Respostas das equipes por aula na primeira dinâmica
Fonte: A autora

	Aulas	Questões	Equipes					% acertos antes da abordagem mediadora
			tetraedro	Hexaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro	
	A1	Q1	**D**	**D**	B	**D**	**D**	**80**
		Q2	E	**B**	D	D	D	**20**
		Q3	D	D	B	D	D	**0**
	A2	Q1	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
		Q2	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**100**
		Q3	**D**	**D**	**D**	**D**	A	**80**
	A3	Q1	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**100**
		Q2	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A4	Q1	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
		Q2	D	D	D	D	D	**0**
	A5	Q1	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**	**100**
	A6	Q1	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**100**
		Q2	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**	**100**
	A7	Q1	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**100**

Na aula 1, a equipe hexaedro obteve um maior desempenho nas questões referentes as características de reta e segmento de reta, pois acertou duas de três das mesmas e nenhuma das equipes acertou todas as questões.

Na aula 2, pode-se observar que das cinco equipes, quatro delas obteve 100% de sucesso nas suas respostas referentes as características de plano e espaço, pois apenas uma das equipes errou uma questão.

Na aula 4, as duas questões descreviam características de convexidade, a primeira era mais direta, pois referia-se as arestas de um cubo, no entanto, a segunda diferenciava um poliedro convexo de um não convexo, conceitos que os próprios discentes relataram ainda não terem conhecimento, o que dificultou o julgamento da questão correta.

Na aula 6, as duas questões tratavam de caracterizar o tetraedro e o octaedro e todas as equipes obtiveram 100% de aproveitamento em relação as suas respostas.

✓ “Mão na massa”: os materiais utilizados nessa aplicação foram os mesmos utilizados na aplicação 2, por esse motivo não serão citados novamente. Abaixo será descrito algumas especificidades de cada aula.

Quanto a esta dinâmica, na aula 1, uma das equipes observou o fato de os alfinetes alinhados constituírem uma reta, ou segmento de reta, no caso, pois, está num plano limitado. Outra equipe, discutiu a semelhança das bolinhas de isopor conectadas com a Figura 1 da dinâmica introdutória, observaram que, em ambos os casos, percebia que eram representações de pontos e que eles alinhados infinitamente constituíam uma reta. Uma outra equipe, retirou a linha com as bolinhas de isopor conectadas e indagou que se esticasse a linha, ela constituía uma reta, de outra forma, parecia uma curva. Há indícios de que a mediação ocorre por meio da interação com instrumentos e signos.

Na aula 2, a equipe tetraedro observou o fato de um pedaço de papel cartão estar sobre o tabuleiro, sendo que aquele papel representa um plano pois tem duas dimensões e, que diferente do papel cartão o cubo em MDF tem um volume, por isso é considerado 3 dimensões. Neste caso, há evidências de que a abrangência da ZDP da equipe tetraedro, foi possível de ser aperfeiçoado com a manipulação de materiais e discussão com os colegas de equipe pois, eles tiveram um avanço significativo quanto a caracterização dos conceitos de plano e espaço.

Na aula 4, a equipe octaedro observou o fato de que a cada parte removida do cubo de espuma, aumentou-se o número de faces.

Na aula 5, a equipe hexaedro conseguiu verificar que cada um dos sólidos regulares possuía faces com mesmas medidas.

Na aula 7, os discentes deveriam construir um tetraedro e um octaedro de cubinhos, porém o tetraedro não foi construído por nenhuma das equipes.

✓ “Retomando as questões”: abaixo será descrito algumas especificidades dessa aplicação.

Na aula 1, a Q1 caracterizaria uma reta e, a alternativa B citava a característica de um segmento de reta e não de uma reta. Nas discussões, a equipe octaedro argumentou que eles chegaram a essa conclusão, pois pensavam que a palavra infinitamente significava ter início e fim e que definia um segmento de reta. Então, para os discentes o significado de infinitamente não abrangia o significado que a docente queria discutir, ou seja, há um indício de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar um novo significado ao signo que é a palavra infinitamente.

A Q2, apresentava a caracterização de um segmento de reta e teria como resposta limitado por dois pontos na reta, as opções incorretas que eles escolheram julgavam um segmento de reta ilimitado e, outra opção, limitado, porém infinito, sendo esta segunda opção apenas um teste de atenção para perceber se eles entenderam os conceitos de limitado e infinito.

Na plenária, os discentes da equipe octaedro justificaram que estavam olhando a imagem e só conseguiram pensar na linha do trem e não nas travessas, mesmo o enunciado deixando claro que era para observarem as travessas.

Então, há um indício de que a ZDP dos discentes não era abrangente a ponto de fazer ligação entre a imagem e os conceitos. A equipe tetraedro e icosaedro, argumentaram que nessa dinâmica ainda não conheciam a diferença de segmento de reta e reta, porém depois da dinâmica "Mão na massa" ficou claro a diferença entre elas.

Observa-se aqui que talvez a ZDP dos discentes não tivesse esta abrangência pois, mesmo com os instrumentos (materiais representativos), ainda surgiram erros conceituais, por isso, a docente reforçou, então, que quando se trata de segmento de reta, eles devem lembrar que é uma parte da reta, ou seja, limitado por dois pontos, no entanto a reta é ilimitada.

Nas discussões da aula 2, na Q2 apresentava a análise da caracterização do volume de um espaço, e teria como resposta três dimensões: altura, largura e comprimento. Porém, a equipe icosaedro, que errou, optou por definir o espaço com três dimensões: altura, largura e volume.

Então, para os discentes, o significado de volume não abrangia o significado que a docente queria discutir, ou seja, há um indício de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar novo significado ao signo que é a palavra volume. Nas discussões, alguns discentes da equipe argumentaram que pensavam no volume como uma dimensão também, assim como a altura, por exemplo, e não que o volume fosse composto por três dimensões. Também justificaram que com a manipulação dos materiais isso ficou bem claro e, ainda, falaram que se essa dinâmica aparecesse após a "Mão na massa", eles com certeza acertariam a resposta.

Neste caso, há evidências de que a ZDP da equipe tetraedro, em relação às respostas das questões iniciais, não era bem abrangente. No entanto, só foi possível de ser aperfeiçoado com a manipulação de materiais e discussão com os colegas de equipe pois, eles tiveram um avanço significativo quanto a caracterização dos conceitos de plano e espaço. Há indícios de que por meio dos instrumentos, atuou-se na ZDP dos mesmos, de modo a amadurecer funções ainda não consolidadas.

Na aula 3, a Q1 caracterizava duas retas paralelas e teria como opção correta - as retas não possuem ponto em comum entre elas.

Nas discussões, os discentes falaram que a imagem deixava bem clara a característica marcante de duas retas paralelas. Há indícios de que a ZDP deles era abrangente a ponto de colocar um novo significado ao signo que são as palavras retas paralelas.

A Q2 caracterizava duas retas perpendiculares. Nas discussões, alguns discentes comentaram que quando o assunto trata de perpendicularidade é só lembrar do ângulo de 90°. Há indícios de que a ZDP deles era abrangente a ponto de colocar significado ao signo que é a palavra perpendicularidade.

Na aula 4, a Q1 caracterizava as arestas de um cubo, mais especificamente quantificando-as. Para isso, os discentes deveriam observar a imagem apresentada e fazer uma correlação entre ela e um cubo. Segundo os discentes, essa questão era fácil, visto que só precisaram lembrar a definição de arestas e chegaram à quantidade dela em um cubo qualquer.

A Q2 caracterizava um poliedro não convexo e teria como definição correta: o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.

A justificativa dos discentes, foi pautada no fato de que a figura apresentada lembra um cubo e, por isso, parece valer a relação de Euler ($V - A + F = 2$), pois a relação é válida para um poliedro convexo, o caso do cubo ou hexaedro. Há um indício de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar um novo significado a outra figura que não o cubo.

Na aula 5, Q1, os discentes argumentaram que quando manipulados os sólidos, na dinâmica "Mão na massa", perceberam que a característica que todos possuíam era a mesma, suas faces são polígonos regulares e congruentes, isso reforçou a ideia de que eles acertaram a questão.

Na aula 6, Q1 e Q2 caracterizavam um tetraedro e um octaedro respectivamente. Todas as equipes acertaram essas questões. Os discentes argumentaram que utilizaram o sólido platônico feito de papelão, o mesmo que levantavam para responder as questões, para chegar a essa conclusão.

Nas duas questões foi possível perceber que eles conseguiram aproximar o nível de desenvolvimento potencial ao real e, que fizeram uma boa utilização dos instrumentos que possuíam (materiais diversificados) para chegarem a uma conclusão.

Na aula 7, todas as equipes acertaram a questão que caracterizava o cubo. Os discentes deveriam lembrar como é realizado o cálculo de volume desse sólido e, quais dimensões considerar.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento, para sanar as questões respondidas incorretamente, os discentes prestaram atenção às contribuições teóricas da docente, conforme Apêndice A subseção 2. 2. 1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

✓ "Investigando as características": conforme Apêndice A subseção 2. 2. 1 Roteiro do docente: versão com sete aulas. Cada uma das equipes contribuía com o que foi discutido entre eles. Ao final, os discentes organizaram suas ideias, chegando a uma consideração final.

Na aula 1, assim, se apresentou a relação de características:

a) Reta: **linha formada por pontos ilimitados, é infinita.**

Ideias similares: **é quando elas são ilimitadas; não tem começo nem fim; é um segmento de pontos infinitos que não tem começo nem fim**

b) Semirreta: **linha limitada num ponto, porém infinito no outro.**

Ideias similares: **é um começo que não tem fim; é delimitado por apenas um ponto; o ponto inicial é limitado, já a continuação é infinita; é quando tem um começo, mas não tem um fim.**

c) Segmento de reta: **linha demarcada em ambos os lados; é delimitado por dois pontos na reta.**

Ideias similares: **tem começo e tem fim; é quando tem um começo e fim delimitado.**

Posições relativas de duas retas:

a) Paralelas coplanares: **retas que não têm nenhum ponto em comum.**

b) Paralelas coincidentes: **possuem todos os pontos em comum.**

c) Concorrentes: **possuem um ponto em comum.**

d) Perpendiculares: **formam um ângulo de 90 graus quando se cruzam.**

e) Reversas: **retas que estão em planos diferentes.**

Na aula 2, assim, se apresentou a relação de características:

• Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:

a) paralelos b) iguais **c) secantes** d) coplanares

Não são paralelos, nem iguais, nem coplanares pois, possuem uma reta em comum, o que não serve para nenhum desses casos, já que paralelos coincidentes ou iguais possuem todos as retas em comuns ou paralelos distintos não possuem retas em comum.

• Quantos planos podem passar por dois pontos distintos?

a) nenhum b) 1 c) 2 **d) infinitos**

Pois não se sabe a distância desses pontos.

Na aula 3, há indícios de que a ZDP deles não era abrangente a ponto de colocar um significado aos assuntos estudados. Nesse momento, a docente autorizou, então, que aqueles que quisessem desenhassem as características. Há um indício de que a ZDP dos discentes não era abrangente a ponto de fazer ligação entre a imagem e os conceitos. Quando aberta a plenária, a docente ouviu as considerações que os discentes fizeram a respeito das características de paralelismo e perpendicularidade e, os discentes que optaram por representar em forma de

desenho mostravam aos demais como o fizeram. O que evidencia que os discentes não contemplam em sua ZDP operações de conceitualização sem a sua devida representação.

A estratégia da docente nesse momento foi de mediar as discussões, quando alguns dos discentes tentavam fazer uma consideração errônea, ela questionava aos demais sobre a veracidade do que foi dito, até que eles chegavam a um acerto em comum quanto a caracterização. Assim, se apresentou a relação de características:

- Paralelismo entre:

a) Retas: **alguns lembraram-se apenas das coplanares. Chegaram à conclusão que o paralelismo entre retas existe quando não possui nenhum ponto em comum entre elas (coplanares) ou possui todos os pontos em comum (coincidentes);**

b) Reta e plano: **erroneamente alguns disseram que quando há um ponto em comum entre reta e plano, há o paralelismo. Por fim, chegaram à conclusão de que quando não há ponto em comum entre eles, existe o paralelismo.**

c) Plano e plano: **alguns se lembraram apenas de dois planos distintos, outros erroneamente disseram que possuem dois pontos, até chegarem à conclusão de que eles não têm ponto comum (distintos) ou são iguais (coincidentes).**

- Perpendicularidade entre:

a) Retas: **quando formam ângulos retos entre si;**

b) Reta e plano: **alguns erroneamente disseram que não formam ângulos retos, mas por fim definiram que eles têm um ponto comum e ainda a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.**

c) Planos: **alguns erroneamente disseram que não importa o ângulo, após as discussões definiram que, existe uma reta contida em um deles e perpendicular ao outro.**

Na aula 4, foi possível perceber que os discentes discutiam entre eles sobre a quantidade de peças cortadas dos cubos e, tentavam ver nos dois cubos alguma relação semelhante. Inclusive erroneamente, alguns disseram que para ambos os cubos valia a relação de Euler quando retirada as peças menores dentro deles.

Por fim, assim, se apresentou a relação de características:

1) Por que um sólido é dito convexo e o outro é não convexo?

Porque no convexo é notável que o número de faces aumenta quando removemos as partes cortadas do cubo, porém, continua valendo a relação de Euler, enquanto o não convexo possui uma aresta que divide o poliedro em duas partes e não vale a relação de Euler.

2) A cada corte retirado do poliedro convexo de espuma preencha o quadro:

Idem Quadro 5.3 - Relação de convexidade

Na aula 5, foi possível perceber que as equipes estavam entrosadas e relembrando alguns conceitos de Geometria de Posição, mais especificamente o paralelismo. Nesse momento, cada equipe investigou as características de um sólido platônico. Assim, se apresentou a relação de características:

- Octaedro: **possui algumas faces e arestas paralelas**
- Dodecaedro: **possui algumas faces paralelas**
- Icosaedro: **não há paralelismo de arestas, nem de faces**
- Hexaedro: **há arestas e faces paralelas**
- Tetraedro: **não há faces nem arestas paralelas**

Na aula 6, cada uma das equipes contribuiu com o que foi discutido entre eles sobre os sólidos construídos (tetraedro e octaedro). Por fim, assim, se apresentou a relação de características:

- Tetraedro: **3**
- Octaedro: **4**

Ângulos:

- Tetraedro: **4 ângulos triédricos**
- Octaedro: **6 ângulos tetraédricos**

Na aula 7, foi possível perceber que os discentes utilizaram os materiais representativos (cubos em MDF), para discutir nas equipes, os volumes dos sólidos citados abaixo, considerando cada cubinho uma unidade cúbica de volume. Por fim, assim, se apresentou a relação de características:

- Tetraedro: utilizou-se 20 unidades cúbicas
- Octaedro: utilizou-se 25 unidades cúbicas

✓ “Relatando a atividade”: descrito no capítulo 4 e na aplicação anterior mencionado como foi realizado no que se refere a elementos comuns das três aplicações. Destaca-se aqui algumas particularidades dessa segunda aplicação após as análises dos relatórios-avaliações.

Após a aula 1, a docente fez as análises de cada um dos relatórios-avaliações destacando que não havia registro de dúvidas e, nem de sugestões.

Após a aula 2, diante da análise, a docente destacou um questionamento sobre o fato do plano ser considerado um conjunto de linhas, se, seguindo esse raciocínio, o espaço também

poderia ser considerado um conjunto de linhas. Para que os discentes não seguissem com essa dúvida, a docente optou por explicar mais objetivamente no início do segundo encontro.

Nas aulas 3, 4, 5, 6 e 7 não foram registradas dúvidas inerentes aos assuntos estudados.

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesse capítulo, apresenta-se a discussão dos resultados da aplicação do Produto Educacional conforme o descrito no capítulo 5.

Nas aplicações do Produto Educacional são apresentadas diversas situações em que os indivíduos que participam das ações têm papéis importantes para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

O ambiente e os materiais diversificados tornam-se ferramentas que colaboram com o desenvolvimento do método de ensino utilizado, apresentando sempre elementos da teoria de Vygotsky. Assim sendo, descrever todas as etapas, relacionando ações à teoria é de suma importância. Nesse sentido, aqui são destacados indicativos de alguns conceitos de sociointeracionismo às ações ao longo das aplicações.

No decorrer da aplicação do Produto Educacional, a cada encontro, observou-se alguns indicativos da autonomia dos discentes, ao utilizarem os materiais para justificarem suas percepções sobre os assuntos abordados.

Durante as observações das aulas feitas pela docente, percebeu-se que no primeiro encontro das três aplicações, o olhar dos discentes era mais apreensivo, com pouca participação dos mesmos nas aulas, mas que no decorrer do processo foi aumentando gradativamente.

Acredita-se que, no início, os discentes estavam com medo das avaliações sobre os assuntos em aula, mas perceberam que os fatores mais importantes não eram seus erros e sim o desenvolvimento das aulas e para o processo ocorrer de forma mais dinâmica, contava-se com uma participação efetiva de cada um deles, expondo sempre suas opiniões.

Para a promoção do ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares contou-se com a aprendizagem mediada por uma prática pedagógica interdisciplinar e contextualizada com a utilização de materiais didáticos diversificados.

Considerando que na Teoria de Vygotsky (1991) há dois tipos de elementos da mediação - os instrumentos e os signos - que representam os sistemas simbólicos e psicológicos do indivíduo.

Pode-se encontrar elementos da mediação na dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, pois segundo a ideia do autor referenciado nesta pesquisa, o papel da mediação é aproximar o homem e o mundo, no caso dessa dinâmica, os instrumentos são: fotografias e vídeos que relacionam as ideias de Geometria de Posição e Poliedros Regulares, sistemas simbólicos, ao homem e o mundo. Utilizando os instrumentos, os discentes conseguem então ativar os signos, que funcionam como instrumentos da atividade psicológica,

quando por meio da interação social eles devem optar por uma das alternativas de cada questão embutida em uma imagem e/ou vídeo.

Nas dinâmicas, ao longo das aulas, podem ser encontrados implicitamente as relações entre docente-discente e explicitamente entre os próprios discentes que destacam o envolvimento de todos no desenvolvimento das aulas. Por exemplo na dinâmica "Convergindo ideias" há uma relação docente-discente, quando a docente expõe aos discentes suas contribuições sobre os assuntos abordados, anteriormente, na dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", há a relação discente-discente no momento em que eles conversam entre si em suas equipes para chegar a uma conclusão sobre a alternativa correta.

No primeiro momento, na dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", a atitude da docente era apenas de verificação das discussões, sem interferências, no momento "Retomando as questões", havia sempre a discussão entre a turma, esse era o momento em que os discentes podiam expor suas opiniões a respeito dos assuntos abordados. Os membros das equipes se ajudavam, havendo assim uma mediação entre discentes que tinham um mesmo objetivo.

Observando o exposto no capítulo 5, na primeira aplicação, primeira aula, todas as equipes se empenharam em responder as questões, mas uma se saiu melhor em relação as outras, pois conseguiram chegar a uma conclusão coerente em relação as respostas das questões. Há indícios de que membros da equipe tinham uma ZDP maior do que a proposição da atividade, pois não tiveram dificuldades.

Em contrapartida, notou-se que as discussões mais intensas nessa primeira aula partiram de uma outra equipe, porém, apesar do forte debate, eles não chegaram a um acordo quanto a resposta de cada questão e, muitas vezes, consideravam a resposta do colega que argumentava melhor sobre a alternativa correta, mas muitas das vezes esses argumentos eram errôneos, então, eles chegavam a uma resposta incorreta.

No momento "Convergindo ideias", a docente reforçava as ideias que ainda não estavam claras, além de fundamentar as proposições dos assuntos de cada aula, nesse caso sempre havia a mediação docente na tentativa de minimizar erros referentes a conceitualização ou até mesmo sanar dúvidas referente as questões.

A docente explicava o porquê de cada alternativa correta e, também, as incorretas nas questões da dinâmica introdutória. Houve casos em que as questões eram muito bem debatidas pelos discentes, porém às vezes por falta de significados em alguns termos em relação a Matemática os discentes acabavam errando as respostas das questões, mesmo nesses casos a

docente ouvia os debates, mas sem opinar. Ela só contribuía com a aprendizagem em termos de teoria, no momento previsto e anteriormente citado: “Convergindo ideias”.

Da primeira aplicação para as demais, a docente percebeu que alguns discentes ficavam retraídos quando ela chegava perto para ouvir as discussões dos grupos, portanto nas demais aplicações ela optou por não ficar indo nas equipes, mas observar ao longe as discussões.

Alguns assuntos eram muito bem debatidos nas equipes, porém em alguns casos, algumas características estavam sendo desprezada por eles. Evidencia-se, que os signos não estavam esclarecidos, talvez porque no momento da resposta das questões eles contassem apenas com os conhecimentos adquiridos ao longo da vivência escolar, a interpretação das imagens era muito importante na análise das questões.

As imagens e vídeos eram utilizadas como auxílio para as respostas, ou seja, instrumentos que poderiam desenvolver uma significância na aprendizagem dos mesmos. Algumas vezes, a docente observou que as imagens e vídeos não eram suficientes para modificar a ZDP dos membros das equipes.

Na primeira aplicação, aula 2 os discentes utilizaram a planificação dos sólidos para montagem do mesmo, pelo fato da pesquisa ser realizada em um tempo mais curto nessa primeira aplicação. A docente viu a necessidade de iniciar com o material diversificado para esclarecer algumas dúvidas da aula anterior. Nas demais aplicações essa prática foi modificada, devido ao tempo de cada aula, nas aplicações 2 e 3 os discentes manipulavam os sólidos platônicos de papelão, ao invés de montá-los.

Na primeira aplicação aula 4, no desafio de montagem do tetraedro, a docente deu a eles um tempo para a montagem, conforme exposto no capítulo 5, porém, nenhuma equipe conseguiu concluí-lo com sucesso. Segundo os discentes eles não conseguiam imaginar um tetraedro construído de cubinhos, para o octaedro eles pensavam na pirâmide e ficava mais fácil de tentar montá-lo, no tetraedro eles não associavam a outro sólido, só lembravam que ele deveria conter 4 faces e 4 vértices.

A partir da segunda aplicação, os discentes montaram o tetraedro com a mediação da docente que, decidiu orientá-los, sem mostrar o exemplo de como ficaria, mas enfatizando algumas características que deveriam ser consideradas sobre o tetraedro. Portanto, essa prática da primeira aplicação para as demais foi modificada e pôde ser percebido alguns indícios de que houve uma melhora na conclusão das atividades.

Nas dinâmicas Geometria de Posição e Espacial no dia a dia, “Mão na massa”; “Retomando as questões”; “Convergindo ideias”; “Investigando as características” e “Relatando a atividade” é possível perceber aspectos de que os discentes resolvem as questões

por meio de uma conexão estabelecida internamente entre estímulo e o signo auxiliar correspondente.

No momento “Mão na massa”, constatou-se uma pré-disposição em aprender por parte dos discentes e, uma redução na distância entre a teoria e a prática. Isso foi observado a partir das reações de cada equipe, quando não somente respondiam questões, mas os membros das equipes manipulavam algum tipo de material para aumentar sua ZDP. Em relação ao ensino, observou-se que por meio do método aplicado, a mediação ocorre por meio da interação com instrumentos e signos.

No desenvolvimento deste projeto, podem ser encontrados elementos interpessoais e intrapessoais, segundo a teoria de Vygotsky (1991), quando os discentes discutem as questões com seus colegas ao longo de todas as atividades, internalizando os conteúdos e os expondo ao longo da aula e ao final na avaliação individual e/ou em equipe, sendo este em formato de um relatório-avaliação baseado na proposta de Ubiratan D’Ambrosio (1996, p. 72) e, de acordo com a ideia de grupo focal segundo Kitzinger (2000), pois baseia-se na interação entre as pessoas, que propicia aos participantes manifestar suas percepções e pontos de vista.

Destaca-se aqui que o relatório proposto na pesquisa possui suas especificidades, visto que as turmas onde ocorreram as aplicações não são titulares da docente, portanto, ela não conhece a realidade das turmas tampouco foi feito uma pesquisa sociocultural nas mesmas.

Quando destacado aqui que o relatório-avaliação foi baseado na proposta de D’Ambrosio, significa que alguns pontos foram evidenciados após o estudo da ideia proposta por ele, mas o relatório em si não é uma cópia do seu modelo.

No relatório-avaliação desta pesquisa, os discentes relatam e ilustram ao final de cada aula o que aprenderam, além de descreverem suas dúvidas e deixarem sugestões a docente, de modo a levá-la a reflexão da sua prática, para possíveis ajustes as próximas aulas, prevendo assim, a melhoria da aprendizagem dos discentes. Além disso, todas as aulas descritas nessas aplicações foram planejadas com enfoque nos discentes. De acordo com Santrock (2010, p. 425): “Os professores têm o principal papel interativo tanto em relação ao estudante quanto ao ambiente de aprendizagem. ”

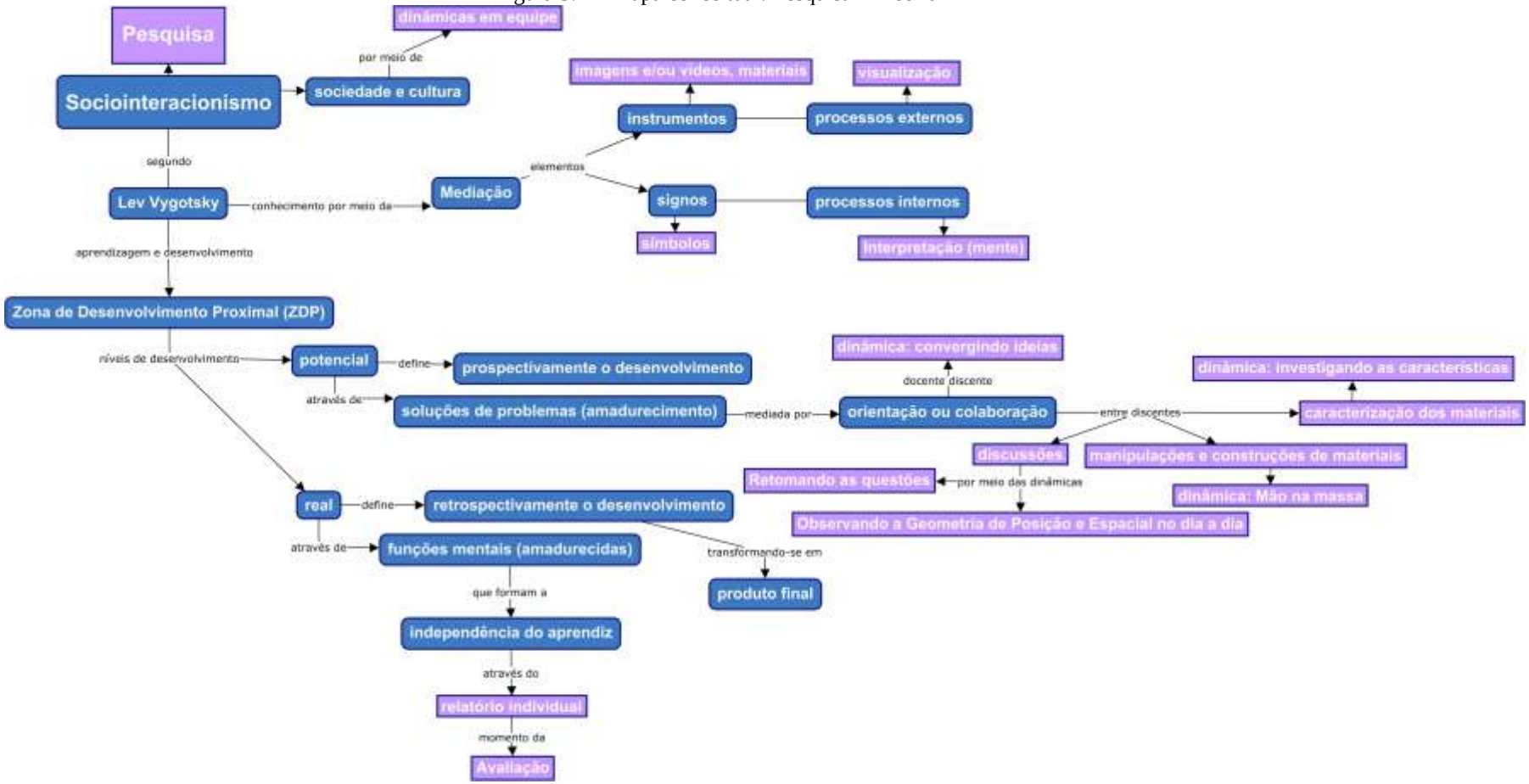
Nas dinâmicas, podem ser encontrados implicitamente as relações entre docente-discente e explicitamente entre os próprios discentes que destacam o envolvimento de todos no desenvolvimento das aulas.

Nas dinâmicas “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”; “Mão na massa”; “Retomando as questões”; “Convergindo ideias”; “Investigando as características” e “Relatando a atividade” é possível perceber aspectos de Zona de Desenvolvimento Proximal

(ZDP) quando os discentes partem daquilo que conhecem para formalizar características dos assuntos relacionados em aula.

A partir do mapa conceitual, Figura 5.1, é possível elencar no projeto cada momento em que esses conceitos podem ser compreendidos implicitamente ou explicitamente.

Figura 5.1 – Mapa conceitual: Pesquisa X Teoria



Fonte: A autora

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho centrou-se em buscar respostas à seguinte indagação: É possível promover o ensino de Geometria de Posição e Poliedros Regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediado por uma prática pedagógica interdisciplinar e contextualizada?

Frente a esse problema, delineou-se como objetivo central: Analisar a promoção do ensino e aprendizagem da Geometria de Posição e Poliedros Regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediados por uma ação docente sociointeracionista interdisciplinar e contextualizada.

A partir do objetivo central da pesquisa, delineou-se os objetivos específicos para a realização da mesma, com vistas aos discentes: propor um Produto Educacional, este encontrado no Apêndice A desta dissertação; estabelecer relações entre várias áreas do conhecimento com a Geometria de Posição e Poliedros Regulares; levantar questões em forma de desafios referente à Geometria de Posição e Poliedros Regulares; explicar questões Matemáticas referentes ao estudo de Geometria de Posição e Poliedros Regulares; identificar o nível de interesse dos discentes frente ao desenvolvimento das aulas; reconhecer possíveis erros de significação.

Quanto à prática docente, a fim de tornar as atividades bem-sucedidas, os planejamentos foram realizados com foco nos discentes, centrando as estratégias de desenvolvimento de aprendizagem com orientação por parte da docente, para se alcançar os objetivos de cada aula. Para construir representações úteis do conhecimento e para adquirir as estratégias de pensamento e de aprendizagem necessárias para o sucesso da aprendizagem, ao fim de cada aplicação havia a reflexão de como foram as aulas e possíveis melhoramentos de cada uma, caso houvesse necessidade, visando um melhor desempenho dos discentes.

Após a aplicação do Produto Educacional e decorrente análise, observou-se que a sequência de aulas realizadas viabilizou um bom estudo de Geometria de Posição e Poliedros Regulares, sendo que as dinâmicas utilizadas propiciaram uma melhor interação entre os discentes. Então, houve mediação de um ou mais integrantes das equipes nas discussões das questões, na plenária e indícios de intervenção na ZDP dos discentes das equipes.

Na relação entre os discentes e docentes, a mediação ocorria ao longo do processo de ensino e aprendizagem. Houve momentos em que a docente se tornou a mediadora ao sanar dúvidas apresentadas pelos discentes, e, portanto, colaborando com prováveis intervenções na ZDP de cada um.

Quanto aos assuntos abordados em cada aula, houve mediação que se deu por meio do desenvolvimento das aulas, com a manipulação de materiais e discussões entre as equipes, cujas práticas levaram os mesmos a observar a Matemática no cotidiano de maneira integrada com aplicações e, desta forma, indicando provável aumento da abrangência da ZDP dos discentes, pois, muitas vezes eram compreendidos os significados dos assuntos via mediação de instrumentos, ou seja, na prática, e não apenas por meio da teoria. No processo de transformação, a ZDP foi um elemento importante e essencial para mostrar que o desenvolvimento da aprendizagem estava ocorrendo de maneira eficaz.

Ao longo do desenvolvimento do projeto, em relação aos discentes, à medida que se trabalhava os assuntos, percebia-se o nível de aprofundamento que poderia se atingir nas aulas seguintes.

A cada aula a docente avaliava a sua prática e, consequentemente os resultados em termos de participação e objetivos alcançados por parte dos discentes, assim sendo, foi possível sempre adequar as aulas seguintes ao grau de maturidade que os mesmos alcançavam nas aulas anteriores, para avançar com os assuntos.

Foi utilizado dois mediadores importantes ao longo de toda a pesquisa: a ação docente e o material bem planejado. Além disso, a organização da sala de aula, foi um fator importante e, que contribuiu com o processo de ensino e aprendizagem, propiciando aos discentes conversar sobre os assuntos, olhando um para o outro, visto que a disposição das carteiras era sempre de forma grupal.

Para a validação do processo de ensino fez se a utilização do Produto Educacional, do planejamento e da ação docente e, a partir da investigação desses elementos, observou-se os sinais do processo de aprendizagem.

Os resultados analisados indicam que o Produto Educacional desenvolvido a partir desse tema é visto com bons olhos, uma vez que proporcionou avanços no processo de ensino e aprendizagem pois, os discentes em contato com os materiais didáticos diversificados e com estratégias por meio de grupos focais, demonstraram um bom interesse na participação de cada atividade proposta.

Por fim, espera-se que o Produto Educacional desta pesquisa, nesta versão e em suas futuras revisões, seja amplamente utilizado, servindo de material de apoio a docentes e pesquisadores.

REFERÊNCIAS

BESSA, V. da H. **Teorias da aprendizagem.** Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2008.

BLOG CAAR. **Colégio Agrícola Augusto Ribas.** Disponível em: http://colegioagricolaaugustoribas.blogspot.com/ . Acesso em: 24 set. 2018.

BLOG CIÊNCIA DE GARAGEM. **Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito.** Disponível em: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html. Acesso em: 02 jun. 2019.

BORTOLOSSI, H. J. **Os sólidos platônicos** – Matemática: Geometria. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.htm. Acesso em: 29 jul. 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 12 jun. 2017.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 22 jan. 2019.

BROUSSEAU, G. **Os diferentes papéis do professor.** In: PARRA, C. (org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CUNHA, N. C. **O Desenvolvimento do Aprendizado é a Construção do Saber.** Disponível em: http://www.fucamp.edu.br/editora/index.php/cadernos/article/viewFile/379/326. Acesso em: 11 fev. 2019.

D´AMBROSIO, U. **EtnoMatemática:** Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** Da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, U. **EtnoMatemática:** uma proposta pedagógica para a civilização em mudança. In: Primeiro Congresso Brasileiro de EtnoMatemática, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2000, São Paulo. Palestra de encerramento. Disponível em: http://www2.fe.usp.br/~etnomat/site-antigo/anais/UbiPalesEncerramento.html. Acesso em: 24 jan. 2019.

DEMO. **MathType**. Disponível em: http://www.wiris.com/editor/demo/pt_br/. Acesso em: 09 mai. 2018.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **FUNDAMENTOS de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

FERNANDES, E. **David Ausubel e a aprendizagem significativa.** Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/262/david-ausubel-e-a-aprendizagem-significativa. Acesso em: 09 nov. 2017.

FERRARI, M. **Lev Vygotsky, o teórico do ensino como processo social**. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/382/lev-vygotsky-o-teorico-do-ensino-como-processo-social. Acesso em: 14 out. 2018.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 2.ed. Curitiba: Nova Fronteira, 1999.

GOMES, M. G. **Geometria nas questões do ENEM sob a ótica da resolução de problemas:** um auxílio ao trabalho docente. Disponível em: http://acervo.ufvjm.edu.br/jspui/handle/1/1690. Acesso em: 04 jan. 2019.

IMBERNÓN, F. **Formação de docente e profissional:** formar-se para a mudança e a incerteza. 9.ed. São Paulo: Cortez, 2011.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8ª ed. Campinas: Papirus, 2012.

KITZINGER, J. **Focus groups with users and providers of health care.** In: POPE, C.; MAYS, N. (Org.). Qualitative research in health care. 2. ed. London: BMJ Books, 2000.

MOREIRA, M. A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/. Acesso em: 07 nov. 2017.

NEVES, P. C. P; FREITAS D. V. de; PEREIRA, V. P. **Fundamentos da Cristalografia**. 2. ed. Canoas: Ed. Ulbra, 2011.

NOGUEIRA, F. **Uma Experiência no Ensino de Geometria Espacial no Terceiro Ano do Ensino Médio.** Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2270893. Acesso em: 04 jan. 2019.

OCHMANN, H. **O Instinto Geométrico:** O Processo Astrológico a partir de Kepler. Porto Alegre: Sulina, 2002.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky Aprendizado e desenvolvimento:** um processo Sócio-histórico. São Paulo: Ed. Scipione, 1995.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria.** Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf. Acesso em: 19 set. 2017.

PAIVA, M. **Matemática**, volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PARANÁ. **Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação.** Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica. Curitiba, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas de aprendizagem.** (Departamento de Educação Básica). Curitiba: SEED-PR, 2012. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf. Acesso em: 04 jan. 2019.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO S. M. D. **O ensino da geometria na educação básica:** realidade e possibilidades. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 04 jan. 2019.

SANTROCK, J. W. **Psicologia educacional.** 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SILVA, H. do N. **Poliedros Regulares do Ensino Médio.** Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/8042. Acesso em: 04 jan. 2019.

SINGULANI, S. de A. **A linguagem audiovisual na aprendizagem da geometria espacial:** o vídeo "Donald no País da Matemágica" como estudo de caso. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3256. Acesso em: 04 jan. 2019.

TEZANI, T. C. R. A educação escolar no contexto das tecnologias da informação e da comunicação: desafios e possibilidades para a prática pedagógica curricular. **Revista FAAC**, Bauru, v. 1, n.1, p. 35-45, abr/ set. 2011.

TRAD, L. A. B. **Grupos focais:** conceitos, procedimentos e reflexões baseadas em experiências com o uso da técnica em pesquisas de saúde. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/S0103-73312009000300013. Acesso em: 29 jul. 2019.

VYGOTSKY, L. **A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem.** 1° ed. brasileira. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente.** 2° ed. brasileira. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

HIPÁTIA. **Citações e frases famosas.** Disponível em: https://citacoes.in/autores/hipatia/. Acesso em: 21 out. 2019

APÊNDICE A - Produto Educacional: Da Geometria de Posição aos sólidos de Platão

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DA GEOMETRIA DE POSIÇÃO AOS SÓLIDOS DE PLATÃO

Diviane Maria Dias Rodrigues

André Maurício Brinatti

Luciane Grossi

2019

SUMÁRIO – APÊNDICE A

1 APRESENTAÇÃO 120

2 AS DUAS VERSÕES DO PRODUTO EDUCACIONAL 122

2.1 PRIMEIRA APLICAÇÃO - VERSÃO COM CINCO AULAS - PLANO DE UNIDADE COM RESPECTIVOS PLANOS DE AULAS 122

2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas 133

2.2 SEGUNDA E TERCEIRA APLICAÇÃO - VERSÃO COM SETE AULAS - PLANO DE UNIDADE COM RESPECTIVOS PLANOS DE AULAS 154

2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas 167

2.3 MATERIAIS DIDÁTICOS DIVERSIFICADOS: APARATOS DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL 175

1 APRESENTAÇÃO

O presente Produto Educacional: Da Geometria de Posição aos Sólidos de Platão[2] objetiva auxiliar docentes de Matemática que desejam desenvolver em sala de aula, atividades relacionadas aos estudos de Geometria de Posição (características): ponto, reta, semirreta, segmento de reta, plano, espaço, paralelismo, perpendicularidade e projeções. Poliedros Regulares ou sólidos platônicos (características e aplicações) para tentar atender à necessidade dos discentes ao se estudar os assuntos abordados aqui e, refletir sobre a melhor maneira de ensinar, para que o aprender ocorra de forma satisfatória.

O material aqui apresentado contempla uma unidade didática contendo três aplicações, distribuídas em cinco aulas na primeira aplicação e sete aulas na segunda e terceira aplicação, divididos em: planos de unidades, planos de aulas, materiais didáticos diversificados e a base teórica utilizada no projeto.

Utilizando como referências para esse projeto, os documentos oficiais que tratam acerca dos conteúdos específicos da Matemática, percebe-se ao longo de toda a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM), das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e das Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE-PR), a necessidade de conduzir os assuntos de Geometria de Posição e Espacial, interligando-os com o cotidiano e, ainda, fazendo relação entre as disciplinas ministradas na educação básica, tais como, arte, física e química.

Este projeto tem como proposta a realização de atividades em formato de dinâmica, com materiais diversificados, tais como: materiais representativos e poliedros diversos para a manipulação de tomada de medidas, textos de apoio eletrônico, slides, vídeos e simulações, o que fará com que a experiência social desenvolva uma melhora na aprendizagem.

O docente que utilizar esse produto, deverá criar um ambiente propício que subsidie o ensino, dispondo para isso de uma organização diferenciada de sala de aula tradicional, desafiando os discentes a pensarem sobre a Matemática em específico a Geometria de Posição e Poliedros Regulares com um viés no cotidiano. O docente poderá introduzir alguns materiais

[2] Produto Educacional desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), portanto partes do texto podem estar reproduzidas como reescritas na dissertação: subseções 2.1.1 e 2.2.1, na qual se fez a análise da aplicação deste Produto no Ensino Médio.

didáticos diversificados, inclusive tecnológicos, que beneficiem a organização e o desenvolvimento das aulas de Matemática.

A reflexão de uma nova lógica de ensino surge devido a uma mudança social, que associa a tecnologia e a dinâmica do ensino a inúmeras possibilidades informativas e a diferentes modos de se ensinar e aprender Matemática. Utilizando as abordagens de ensino segundo Vygotsky, voltadas à reflexão da prática pedagógica, focando os aspectos da Educação Matemática, segundo as propostas de Ubiratan D'Ambrosio, foram confeccionados materiais com o intuito de auxiliar docentes em suas práticas de ensino em sala de aula.

2 AS DUAS VERSÕES DO PRODUTO EDUCACIONAL

Aqui são expostos os planos de unidades que contemplam todos os aspectos das aplicações em termos de conteúdo e metodologias, com seus respectivos temas, seguidos dos planos de aulas, que especificam os conteúdos, os objetivos de cada aula, o roteiro que prevê respostas dos discentes frente as questões, além das fotos dos materiais didáticos que foram construídos para que todos os docentes da educação básica que queiram fazer uso desse produto educacional de Geometria Espacial e Poliedros, tenham em mãos tudo o que foi utilizado.

Há duas versões do plano de unidade: uma dispondo de cinco aulas e a outra dispondo de sete aulas. Em ambas são apresentadas também os respectivos planos de aulas, assim sendo, o primeiro plano de unidade terá cinco planos de aulas e, o segundo sete planos de aulas.

2.1 PRIMEIRA APLICAÇÃO - VERSÃO COM CINCO AULAS - PLANO DE UNIDADE COM RESPECTIVOS PLANOS DE AULAS

PLANO DE UNIDADE

I. IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO:

DISCIPLINA:

DOCENTE:

ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 5 aulas – 50 minutos cada

II. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções;
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

III. OBJETIVOS

- Utilizar a Matemática investigativa empregando materiais didáticos representativos diversificados como objetos de aprendizagem;

- Estabelecer conexões existentes entre alguns tópicos de Geometria de Posição e Espacial com alguns conhecimentos aplicados em outras áreas.

IV. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Geometria de Posição: características
- Ponto, reta, semirreta, segmento de reta;
- Plano e espaço;
- Paralelismo, perpendicularidade e projeções.

Geometria Espacial: características e aplicações

- Poliedros Regulares.

Conteúdo programático distribuído por aula

Aula 1 - Ponto, reta, plano e espaço: características, paralelismo, perpendicularidade;

Aula 2 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características;

Aula 3 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade;

Aula 4 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro;

Aula 5 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações.

V. METODOLOGIA

A unidade de ensino da disciplina de Geometria de Posição e Poliedros Regulares será ministrada no formato de um projeto em sala de aula que, priorizará o ensino de forma dinâmica, favorecendo discussões e o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial como linguagem nas diversas situações com a utilização de materiais didáticos diversificados.

As dinâmicas serão compostas por vários momentos:

- “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”: Dinâmica de grupo mediada por vídeos ou imagens para ilustrar as questões norteadoras da aula, que ocorre sempre no início da aula como fator motivacional e/ou problematizador e, consiste em apresentar aos discentes algumas imagens ou vídeos que se relacionem com os assuntos de cada aula de forma contextualizada.
- “Mão na massa”: Dinâmica de grupo mediada pela manipulação ou construção de aparatos de Geometria de Posição e Espacial, ocorre sempre no desenvolvimento da aula, juntamente com os outros dois momentos seguintes: “Retomando as questões” e “Convergindo ideias”. Esse é o momento em que os discentes em algumas aulas manipulam os materiais fornecidos pelo docente, outras constroem seus próprios materiais representativos que se relacionem com os assuntos.

- "Retomando as questões": Dinâmica de grupo mediada pela retomada das questões iniciais após a manipulação e/ ou construção de materiais. É uma dinâmica onde os discentes devem corrigir juntamente com o docente as questões iniciais, em forma de plenária.
- "Convergindo ideias": Nesse momento, o docente apresenta em slides a teoria do que os discentes investigaram por meio das questões e manipulações de materiais.
- "Investigando as características": Dinâmica em grupo que ocorre sempre na síntese integradora da aula, onde os discentes devem, em formato de plenária, discutir as características observadas com os demais colegas da turma, seguindo alguns pontos destacados pelo docente.
- "Relatando a atividade": Dinâmica individual descritiva ou em grupo, ocorre sempre no momento de avaliação da aula, em que cada discente ou equipe descreve tudo o que foi capaz de perceber e aprender com a aula, principalmente em relação às atividades respondidas em formato de plenária. Nesse momento, eles podem deixar sugestões sobre a aula e a atuação do docente.

VI. AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Será por meio da dinâmica "Relatando a atividade", já descrita anteriormente.

VII. RECURSOS DIDÁTICOS

Serão utilizados para tal, TV, *pendrive*, notebook, caixinha de som, materiais representativos que são apresentados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (poliedros construídos com papel cartão, canudinhos, e varetas de balão, palitos de churrasco, bolinhas de isopor, alfinetes, linhas de pesca, cubos em MDF).

VIII. BIBLIOGRAFIAS

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

PLANO DE AULA - 1

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Ponto, reta, plano e espaço: características, paralelismo, perpendicularidade

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

OBJETIVOS:

- Citar as características de ponto, reta e plano: características, paralelismo e perpendicularidade;
- Descrever conhecimentos adquiridos de ponto, reta e plano por meio da visualização de imagens e manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1-Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria de Posição: ponto, reta, plano e espaço: características, paralelismo e perpendicularidade, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

2-Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na manipulação dos materiais (bolinhas de isopor, palitos de churrasco, alfinetes, linhas de pesca) e na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

3-Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de pontos, retas e planos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

RECURSOS FÍSICOS: quadro e giz, TV, *pendrive*, Materiais didáticos diversificados de pontos e retas, que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Geometria de posição e poliedros.** Disponível em: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm. Acesso 15 abr. 2018.

PLANO DE AULA - 2

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;

- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as características de sólidos platônicos relacionando-os com a Geometria de Posição;
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1-Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", vídeo contextualizando e ilustrando a aula: Geometria Espacial e os sólidos platônicos, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

2-Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na montagem pelos discentes dos materiais (sólidos platônicos: tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro) um por equipe, os discentes o receberão planificados e deverão montá-los com a direção do docente, na discussão das questões analisadas com o uso do vídeo, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

3-Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de poliedros (Materiais didáticos diversificados) de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

RECURSOS FÍSICOS: quadro e giz, TV, *pendrive,* materiais didáticos diversificados, que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

NOVAES. **Guia do professor**. Disponível em: http://blogdoprofessornovaes.blogspot.com.br/. Acesso em: 19 nov. 2017.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

PLANO DE AULA - 3

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de poliedros convexos, não convexos e relação de Euler;
- Descrever conhecimentos de poliedros adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1-Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, contextualizando e ilustrando a Geometria

Espacial – poliedros convexos, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

2-Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na manipulação dos materiais (cubos de espuma), cada equipe receberá dois cubos de espuma com alguns cortes que serão investigados no decorrer da aula, para investigação da relação de Euler e de poliedros não convexos; na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

3-Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de poliedros convexos e não convexos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

RECURSOS FÍSICOS: quadro e giz, TV, *pendrive,* materiais didáticos diversificados, que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

PLANO DE AULA - 4

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de sólidos platônicos: tetraedro e octaedro;
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1-Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria Espacial – Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro através de imagens e vídeos do *software Poly Pro 1.11*, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

2-Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na utilização dos materiais (bolinhas de isopor, canudinhos, linhas de pesca) para construção de dois sólidos platônicos: tetraedro e octaedro, cada equipe de discentes construirá um de cada, com canudinhos de modo que ele e seja proporcional a ficar inscrito no cubo de isopor; na discussão das questões analisadas com o uso de imagens e vídeo, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

3-Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de sólidos platônicos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

RECURSOS FÍSICOS: quadro e giz, TV, *pendrive*, materiais didáticos diversificados, que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

STOODI. **Poliedros**. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/materias/matematica/poliedros/. Acesso 25 jan. 2018.

PLANO DE AULA - 5

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de sólidos platônicos: tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro: aplicações
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1-Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria Espacial – Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro por meio de imagens e vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

2-Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na montagem de um octaedro e tetraedro com cubos de MDF, na discussão das questões analisadas com o uso de imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto utilizando também a história: Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

3-Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de sólidos platônicos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

RECURSOS FÍSICOS: quadro e giz, TV, *pendrive,* materiais didáticos diversificados, que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial.

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

STOODI. **Poliedros**. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/materias/matematica/poliedros/. Acesso 25 jan. 2018.

CIÊNCIA DE GARAGEM. **Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito.** Disponível em: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html. Acesso em: 19 jul. 2018.

GINNOBILI; S. ***Estructura del universo según Kepler*.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HdyNxpAFPHM. Acesso: 04 set. 2018.

2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas

As palavras em negrito representam respostas esperadas dos discentes para cada uma das questões, dadas pela própria docente pesquisadora, anterior a aula.

- AULA 1 – Ponto, reta, plano e espaço: características, paralelismo e perpendicularidade

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente terá como função projetar, ler as questões contidas nos slides, direcionar a atenção dos discentes a alguns pontos específicos das mesmas, cronometrar a discussão das questões e, coletar a resposta final da questão por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica “Observando a

Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltiplas escolhas e cada equipe deverá discuti-la e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar as respostas de cada equipe. As mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Na sequência estão as imagens com as questões que eles responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente pesquisadora, para um melhor encaminhamento recomenda-se que o leitor utilize o Capítulo 3 desta dissertação para compreender melhor as definições.

Nota: os títulos das figuras são os mesmos referentes ao capítulo 3 desta dissertação.

Figura 3.3 – A ideia de pontos e reta no cotidiano, foto associada

Fonte: KAUER, Michael. Bolas De Pedra. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/stone-grade-ponte-gateway-idade-3237174/. Acesso em: 30 abr. 2018.

Questão 1. Na imagem, observamos um guarda-corpo, ou simplesmente guarda, de pedras onde há esferas alinhadas. Embora, ponto não seja conceituado, para uma melhor compreensão consideremos uma representação de ponto pela esfera do guarda-corpo, assim se olhássemos para este guarda-corpo de muito longe, veríamos uma representação de sequência de pontos. Podemos deduzir que os pontos:

a) alinhados continuamente, apenas delimitado no início representam uma reta.

b) alinhados continuamente infinitamente representam um segmento de reta.

c) alinhados continuamente infinitamente formam uma semirreta.

d) alinhados continuamente infinitamente formam uma reta.

e) alinhados continuamente, mas delimitados no início e fim representam uma reta.

Nessa questão 1, o docente deverá enfatizar o fato de que a imagem é uma representação de pontos e também deverá lembra-los que o ponto é um conceito primitivo sem definição. Portanto, nessa imagem consideramos que na parte superior do guarda-corpo em que se visualizam as esferas, essas sejam representações de pontos. Apesar da imagem mostrar um guarda-corpo limitado, deve-se supor que ele possa ser infinito. Sendo assim, os discentes deveriam responder como alternativa correta a letra **d** e também discutir entre os membros da equipe porque as outras alternativas estão incorretas, ou seja, na letra **a** eles deveriam observar o fato de que se for delimitado no início não se forma uma reta e sim uma semirreta. A letra **b** cita as características de uma reta, porém nomeando-a como um segmento de reta. A letra **c** também caracteriza uma reta, porém a nomeia como semirreta, que já foi caracterizada anteriormente, e a letra **e** indica um segmento de reta, porém o nomeia como reta, sendo assim eles chegariam à conclusão de que a letra **d** é a única alternativa correta.

Figura 3.8 – Segmento de reta, foto associada

Fonte: TAMA66. Trem. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/ferrovi%C3%A1ria-parecia-faixa-trem-2439189/. Acesso em: 30 abr. 2018.

Questão 2. Na imagem, observamos um trilho de trem, composto por perfis de aço laminado, dispostos de forma paralela entre si, sobre dormentes (travessas) as quais são peças de madeira. Os trilhos ou carris são fixados sobre os dormentes através de elementos de fixação, compostos por grampos ou tira fundos, que os delimitam. Essa imagem nos fornece uma representação de um segmento de reta, sendo ele:

a) limitado por dois pontos da reta.

b) ilimitado.

c) uma infinidade de pontos alinhados e ilimitados.

d) limitado, porém infinito.
e) limitado no início e ilimitado no fim.

Nessa questão, o docente deverá ressaltar que eles deverão olhar com atenção para as travessas de madeira que é fixada nos trilhos por grampos ou tira fundos, representando os extremos do segmento de reta. Sendo assim, se os discentes responderam a questão 1 e discutiram cada item corretamente, essa questão 2, mesmo sem as considerações do docente, ela poderia seria respondida com mais precisão, visto que as características de um segmento de reta já foi discutido entre eles, nesse caso, tendo como alternativa correta a letra **a**, pois se pensarem nas questões dos pontos alinhados, chegarão a ideia de que as letras **b** e **c** se aproximam mais da característica de uma reta, a letra **d** não caracteriza nenhum dos elementos estudados na Geometria de Posição, já a letra **e** caracteriza uma semirreta.

Figura 3.15 – Plano e espaço, foto associada

Fonte: AKYURT, Engin. Café expresso. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/caf%C3%A9 caneta-caderno-trabalho-livro-2306471/. Acesso em: 08 mai. 2018.

Questão 3. Nessa imagem, a caneta sobre o caderno pode ser considerada como uma representação de um segmento de reta, que é formada por pontos contínuos, lembrando que é limitada em dois pontos, por isso chamada de segmento de reta. Essa caneta, ou segmento de reta está sobreposta a um caderno, que está ainda sobreposto a uma mesa, ou uma superfície plana, isso significa que essa mesa como um todo representa um plano, logo podemos considerar que um plano é formado por:

a) um conjunto de infinitas curvas.

b) um conjunto de finitos pontos.

c) um conjunto de finitas retas.

d) um conjunto infinito e ilimitado de retas.

e) um conjunto finito e limitado de retas.

Na questão 3, o docente deverá enfatizar que na imagem é possível visualizar uma mesa, que pode ser a representação de uma parte de um plano. Portanto, os discentes deveriam discutir entre os membros da equipe cada um dos itens, chegando a conclusão de que a letra **d** é a que melhor caracteriza um plano, pois analisando cada uma das alternativas, observariam que a letra **a** não caracteriza um plano, na letra **b** o erro está na palavra finitos, pois infinitos pontos também podem caracterizar um plano, visto que infinitos pontos descrevem uma reta, e planos são formados por infinitas retas, o que já responde ao fato da letra **c** também estar incorreta, a letra **e** está incorreta, pois aqui estamos caracterizando um plano, portanto ele é ilimitado.

Figura 3.32 – Retas perpendiculares, foto associada

Fonte: GRUBBERT, Peter. Arquitetura/ Edifícios. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/treli%C3%A7a-in%C3%ADcio-constru%C3%A7%C3%A3o-1386121/. Acesso em: 10 mai. 2018.

Questão 4. Observe os detalhes da pintura na fachada dessa construção, é possível identificar traços de perpendicularidade nas pinturas em marrom, sabendo disso, podemos concluir que há perpendicularidade entre retas quando:

a) não possuem pontos em comum.

b) possuem vários pontos em comum.

c) estão lado a lado.

d) formam ângulos retos entre si, 90°.

e) formam ângulos de 180° entre si.

Nessa questão, o docente deverá pedir que os discentes olhem as figuras geométricas que se formam nas paredes com as faixas em marrom, e observar quais ângulos são formados na interseção entre as faixas, as quais são representações de retas. Nesse caso, os discentes irão descrever a principal característica de duas retas perpendiculares entre si, sendo assim, discutindo item por item chegarão a conclusão de que a letra **a** caracteriza duas retas paralelas não coincidentes, a letra **b** não caracteriza duas retas perpendiculares pois possuem vários pontos em comum, a letra **c** pode também caracterizar duas retas paralelas, porém para isso deveria ser mais específica, ou seja não caracteriza duas retas perpendiculares, já a letra **d** se encaixa perfeitamente na identificação de duas retas perpendiculares, sendo assim a letra **e** já é eliminada por consequência.

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: “Mão na massa”; “Retomando as questões” e; “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: caberá ao docente, distribuir os materiais, enfatizar que em cada um deles há representações dos itens já discutidos na dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, que eles poderão ficar à vontade para manuseá-los e confrontá-los com as questões já estudadas, pedir para que eles pensem no máximo de características observadas com a manipulação dos materiais em relação a pontos, retas, planos e espaços. Para isso serão dispostos 5 minutos.

Os discentes receberão os materiais didáticos diversificados para a caracterização de pontos, retas, planos e espaços, especificados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas ao assunto de ponto, reta, plano e espaço observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ “Retomando as questões”: o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada das questões nos slides, se por ventura houver alguma dúvida ele ficará incumbido de sanar, nesse momento as questões da introdução serão discutidas entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ “Convergindo ideias”: nesse momento a docente pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, imagens das questões anteriormente discutidas e dos materiais da dinâmica “Mão na massa”.

Síntese integradora: esse momento foi chamado de “Investigando as características”, onde o docente pedirá que os discentes discutam com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por 2 minutos. Após isso, cada equipe contribuirá para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará no quadro negro as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

1) De acordo com as imagens e os materiais que cada equipe recebeu, discuta a descrição de cada item a seguir. Após abriremos a plenária para toda a turma:

- Plano: **conjunto infinito de retas.**

Sinônimos: várias retas justapostas, retas unidas, infinitos pontos e retas.

- Espaço: **conjunto de planos.**

Sinônimos: alinhamento de planos, justaposição de planos, união de planos.

2)Posições relativas de duas retas:

a) Paralelas coplanares: **duas retas são paralelas se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto em comum.**

b) Paralelas coincidentes (ou iguais): **pertencem ao mesmo plano e possuem todos os pontos em comum.**

c) Concorrentes: **duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.**

d) Perpendiculares: **duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos retos entre si.**

e) Reversas: **duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano que as contenha.**

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) Descreva cada item a seguir:

a) Reta: **pontos alinhados continuamente infinitamente**

b) Semirreta: **pontos alinhados continuamente, apenas delimitado no início**

c) Segmento de reta: **uma reta limitada por dois pontos.**

2) Desenhe a representação de uma reta, de um plano e do espaço.

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 2 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente terá como função projetar o vídeo, ler a questão contida no slide sobre o mesmo e, coletar a resposta final da questão por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de um vídeo: Geometria Espacial e os sólidos platônicos produzido pela própria docente pesquisadora, com a utilização da ferramenta de animação online *powtoon*, a história especificada neste Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Na dinâmica, ele contará com uma questão objetiva contextualizando o vídeo, sendo esta de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la e optar por aquela que mais se adeque ao que eles aprenderam com o vídeo.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar a resposta de cada equipe, a mesma será discutida em um segundo momento.

Primeiramente será reproduzido a animação: Geometria Espacial e os sólidos platônicos - História contada no vídeo (UFF, 2009)

Questão 1. O vídeo cita que algumas evidências sugerem que Pitágoras conhecia apenas o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, com estudos mais aprofundados no Teeteto (um diálogo platônico sobre a natureza do conhecimento) concluiu que existem apenas 5 poliedros regulares, ou seja, além dos três citados acima, existem mais 2 poliedros regulares, conhecidos como:

a) heptaedro e octaedro

b) octaedro e icosaedro

c) heptaedro e icosaedro

d) hexaedro e icosaedro

e) hexaedro e octaedro

A resposta para essa questão dependerá exclusivamente da atenção que eles tiveram a interpretação da mesma e a visualização do vídeo. Deverão associar a palavra hexaedro ao cubo, sendo assim, logo irão optar pela letra **b**, octaedro e icosaedro, únicos sólidos platônicos que não foram citados no enunciado da questão.

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: “Mão na massa”; “Retomando as questões” e; “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: caberá ao docente, pedir para que os discentes abram a pasta da equipe e peguem a planificação de papel cartão do seu sólido, um por equipe e, o montem apenas olhando um outro do tamanho maior que esse e, depois pedir para que eles pensem no máximo de características observadas com a manipulação dos materiais em relação a faces, vértices e arestas. Para isso serão dispostos 5 minutos, cada equipe montará o seu, pois cada uma representará um sólido, isto é, cada um montará a planificação correspondente à sua equipe. Planificações especificadas neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Após a montagem, cada equipe discutirá entre eles, as características observadas no sólido, relacionando aos estudos de Geometria de Posição estudados anteriormente.

✓ “Retomando as questões”: o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada da questão no slide, se por ventura houver alguma dúvida ela ficará incumbida de sanar, nesse momento a questão da introdução será discutida entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre a questão, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ “Convergindo ideias”: nesse momento a docente pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, vídeo, imagens das questões discutidas na aula anterior e dos materiais da dinâmica “Mão na massa”.

Síntese integradora: nesse momento, o docente pedirá que os discentes discutam com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por 2 minutos. Após isso, cada equipe contribuirá oralmente para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará no quadro negro as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

Em Geometria de Posição, observamos várias características encontradas nos sólidos platônicos. De acordo com o sólido que cada equipe recebeu, discuta a descrição dos mesmos em relação as faces e arestas dos poliedros. Após abriremos a plenária para toda a turma:

- tetraedro – **não possui faces, nem arestas paralelas;**
- cubo – **possui faces e arestas paralelas**
- octaedro – **possui algumas arestas e algumas faces paralelas**
- dodecaedro – **possui duas faces paralelas**

- icosaedro – **não possui arestas, nem faces paralelas**

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1)Descreva as características do sólido em relação as faces e arestas dos poliedros

a) Paralelos (as) ou reversos (as) ou perpendiculares;

Cada equipe analisará o seu sólido e apontará pelo menos uma das características.

2) Se possível, faça uma representação das características do sólido em relação as faces dos poliedros, suas arestas e vértices.

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 3 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente terá como função projetar, ler as questões contidas nos slides, direcionar a atenção dos discentes a alguns pontos específicos das mesmas, cronometrar a discussão das questões e, coletar a resposta final da questão por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la em 2 minutos cada uma e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar as respostas de cada equipe. As mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Abaixo estão as imagens com as questões que eles responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente pesquisadora:

Figura 3.41 – Poliedro convexo (a), foto associada

Fonte: PIRO4D. Arquitetura/Edifícios. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/cubo-cubos-arquitetura-resumo-3501666/. Acesso em: 23 jun. 2018.

Questão 1. Na imagem, observamos uma construção com empilhamentos em formatos cúbicos, não podemos afirmar com precisão que suas faces formam quadrados, porém considerando a representação de um cubo, podemos analisar algumas características. O cubo é formado por um número limitado de semirretas, que são conhecidas como arestas, assim como os demais sólidos de Platão. Sabendo disso, um cubo possui um número **n** de arestas, sendo **n** igual a:

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

Nessa questão 1, o docente deverá enfatizar o fato de que a imagem apresenta representações de cubos e, fazê-los relembrar o conceito de arestas, para isso usará os conceitos de segmentos de retas já estudados em aulas anteriores. Sendo assim, os discentes deveriam responder como alternativa correta a letra **d**.

Figura 3.41 – Poliedro não convexo (b), foto associada

Fonte: SITTIWANTANA, Ekkapop. Arquitetura/Edifícios. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/escada-parede-branco-casa-interior-1743963/. Acesso em: 03 jul. 2018

Questão 2. Na imagem, observamos a construção de uma escada. Se considerarmos parte da escada em apenas dois degraus, teremos a representação de um poliedro, porém ele não será um poliedro de Platão, pois uma das características que o diferencia dos mesmos, é que:

a) o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.

b) ele possui arestas e faces, mas não possui vértices.

c) ele é regular, pois suas faces são retângulos.

d) vale a relação de Euler (V – A + F = 2).

e) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.

Nessa questão, o docente deverá ressaltar que a escada, limitada em dois degraus, fornece a representação de um sólido. Assim, ao lembrarem das características já estudadas nos sólidos platônicos, perceberão que é a única alternativa que o diferencia de todos os sólidos de Platão. Partindo desse pressuposto, os discentes responderão que a alternativa correta é a letra **a** que o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes, pois as outras alternativas já foram discutidas na aula dois quando falamos de poliedros.

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: “Mão na massa”; “Retomando as questões” e; “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: caberá ao docente, distribuir os materiais, enfatizar que em cada um deles há representações de poliedros convexos e não convexos respectivamente, que ao destacarem

as partes semi cortadas das espumas poderão descobrir algumas das características dos mesmos, caberá aos discentes decidirem qual deles representa um poliedro convexo mesmo depois de cortado e qual deixa de ser poliedro convexo quando cortado, pela maneira do corte. Para isso serão dispostos 5 minutos.

Os discentes receberão os materiais didáticos diversificados para a caracterização de convexidade. Materiais esses especificados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas ao assunto observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ "Retomando as questões": o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada das questões nos slides, se por ventura houver alguma dúvida ele ficará incumbido de sanar, nesse momento as questões da introdução serão discutidas entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento a docente pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, imagens das questões anteriormente discutidas e dos materiais da dinâmica "Mão na massa".

Síntese integradora: esse momento foi denominado de "Investigando as características", onde o docente pedirá que os discentes discutam com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por 2 minutos. Após isso, cada equipe contribuirá para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará nos slides as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

1) Por que um sólido é dito convexo e o outro é não convexo?

Porque o sólido convexo não divide o poliedro em duas ou mais partes, ou seja, o plano de cada face deixa todas as outras faces no mesmo lado do plano, já no sólido não convexo o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.

2) A cada corte retirado do poliedro convexo de espuma preencha o quadro:

Quadro 5.3 – Relação de convexidade

Sólido	Face(s)	Aresta(s)	Vértice(s)	V-A+F =
1	**7**	**15**	**10**	**2**
2	**8**	**18**	**12**	**2**
3	**9**	**21**	**14**	**2**

Fonte: A autora

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) De acordo com os dois sólidos de espuma cortados, descreva sobre as semelhanças e diferenças entre eles, em relação as faces

2) Se possível, faça uma representação do sólido não convexo de espuma.

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 4 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente terá como função projetar a imagem do tetraedro e a animação de um octaedro planificado, ler as questões contidas nos slides sobre o assunto e, coletar as respostas finais das questões por meio de uma foto com as alternativas que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, que consiste na apresentação da imagem de um monumento tetraédrico e uma animação de um octaedro planificado sendo montado, produzido com o *software Poly Pro 1. 11*, ambos contêm uma questão objetiva os contextualizando, sendo estas de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la e optar por aquela que mais se adeque ao que eles compreenderam.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar a resposta de cada equipe, as mesmas serão discutidas em um segundo momento. Abaixo está a apresentação das mesmas.

Figura 3.44 – Tetraedro representação geométrica, foto associada

Fonte: RÜTSCHE, Manfred. Tetraedro Pirâmide. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/tetraedro-pir%C3%A2mide-ruhr-area-1168478/. Acesso em: 23 jun. 2018.

Questão 1. Observando a imagem contemplamos um monumento no formato de pirâmide triangular, ou tetraedro. Um tetraedro é um poliedro com uma base em formato de triângulo e, como característica marcante, temos que:

a) são formados apenas por vértices e arestas.

b) são formados apenas por vértices e faces.

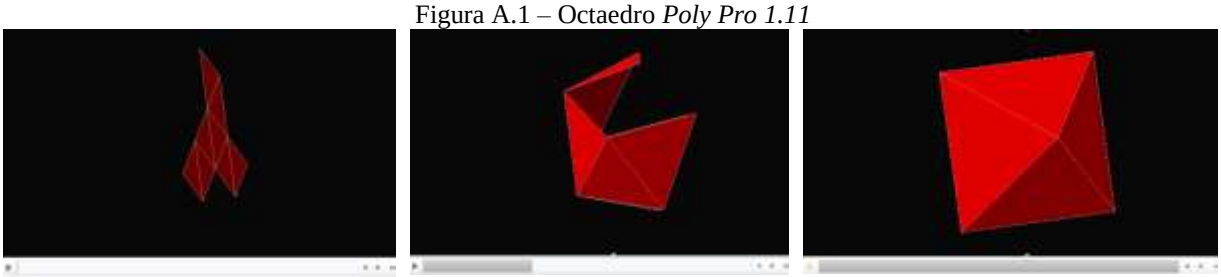
c) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em um único vértice ao mesmo tempo.

d) suas faces laterais são triangulares e encontram-se em vários vértices ao mesmo tempo.

e) suas faces não são triângulos regulares.

Essa questão requer atenção dos discentes para interpretá-la. Sendo necessário que se lembrem de definições que já foram apresentadas anteriormente: ideia de vértices, faces e arestas, regularidade. Sendo assim, os discentes deverão optar pela alternativa **c -** suas faces laterais são triangulares e encontram-se em um único vértice ao mesmo tempo.

Figura A.1 – Octaedro *Poly Pro 1.11*



Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11*.

Questão 2. Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Esse poliedro possui:

a) 6 arestas

b) 8 arestas

c) 10 arestas

d) 12 arestas

e) 14 arestas

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: “Mão na massa”; “Retomando as questões” e; “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: caberá ao docente, pedir para que os discentes abram a pasta da equipe e peguem os canudinhos e pedaços de linha de pesca que está em um dos plásticos seguindo a ordem das aulas. Ele mostra as equipes de discentes um tetraedro montado e pede que o façam semelhante, após pedem que os discentes também façam o octaedro, para isso mostra a imagem de como deverão ser as etapas para a montagem do mesmo. As fotografias dos dois sólidos estão especificadas neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Após a montagem, cada equipe receberá um cubo com medidas que podem circunscrever ambos os sólidos, um por vez, a partir daí o docente deverá pedir para que os discentes tentem discutir e estimar o volume dos mesmos, para isso utilizarão cubinhos de MDF.

✓ Retomando a questão: o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada das questões no slide, se por ventura houver alguma dúvida ele ficará incumbido de sanar, nesse momento a questão da introdução será discutida entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ “Convergindo ideias”: nesse momento a docente pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, *software Poly Pro 1,11*, imagens das questões anteriormente discutidas e dos materiais da dinâmica “Mão na massa”.

Síntese integradora**:** nesse momento, o docente pedirá que os discentes discutam com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por 2 minutos. Após isso, cada equipe contribuirá oralmente para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará no próprio slide as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

De acordo com os sólidos construídos: tetraedro e octaedro, abriremos a plenária para toda a turma, discutindo as características dos itens abaixo:

- Faces: **triângulos regulares**, tetraedro= **4**, octaedro= **8**
- Arestas: tetraedro= **6**, octaedro= **12**
- Vértices: tetraedro= **4**, octaedro= **6**

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) De acordo com os materiais didáticos diversificados, (cubos em MDF), discuta com seu grupo, os volumes, considerando cada cubinho menor uma unidade de volume:

• Cubo: **uma unidade cúbica de volume**

• Tetraedro: **o tetraedro tem volume igual a 34 unidades cúbicas**

• Octaedro: **o octaedro tem volume igual a 25 unidades cúbicas**

2) Se possível, faça uma representação das características do sólido em relação aos vértices dos poliedros.

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 5 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente irá iniciar a aula projetando o vídeo: *Estructura del universo según Kepler* e, um dodecaedro *(gif)* no *software Poly Pro 1.11*, fará comentários a respeito do modelo e do poliedro apresentado com a utilização do *software*, projetará algumas imagens de cristais e ainda terá como função projetar, ler as questões contidas nos slides, cronometrar a discussão das questões e, coletar a resposta final de cada uma delas por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltiplas escolhas e cada equipe deverá discuti-la em 2 minutos cada uma e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar as respostas de cada equipe. As mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Abaixo estão as imagens com as questões que eles responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente pesquisadora:

Figura 3.46 – Hexaedro, foto associada: Fluorita

Fonte: BURKE, Carla. Cristal/Pedra. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/cristal-pedra-gem-geologia-mineral-3189006/. Acesso em: 05 jul. 2019.

Questão 1. Na imagem, observamos o hábito de uma Fluorita, que pode ser representada por um empacotamento tridimensional de cubos CaF8 com cálcio centrado. Cada cubo compartilha arestas e faces com seus vizinhos, criando um arranjo similar a um tabuleiro de xadrez quando visto de uma das faces do hábito. Se cada cubo tem suas arestas com medida igual a, deduzimos que o volume de cada cubo é igual a:

a) V= a.a.a

b) V= a+a+a

c) $V= a^2$

d) V= 3a

e) $V= 3a^2$

Nessa questão, o docente deverá ressaltar que eles deverão lembrar primeiramente do formato cúbico e o que o diferencia por exemplo de um quadrado, induzindo-os a pensar nas dimensões de cada um, para que eles se lembrem de que o cubo assim como todos os outros sólidos platônicos possuem 3 dimensões e, assim chegar a resposta **a,** em que o volume do prisma é representado como o produto da área da base pela sua altura.

Figura A.2 – *Gif*: dodecaedro

Fonte: Adaptado de *software Poly Pro Pro 1.11.*

Questão 2. Um poliedro é constituído por vinte ângulos triédricos. Esse poliedro possui:

a) 6 arestas

b) 15 arestas

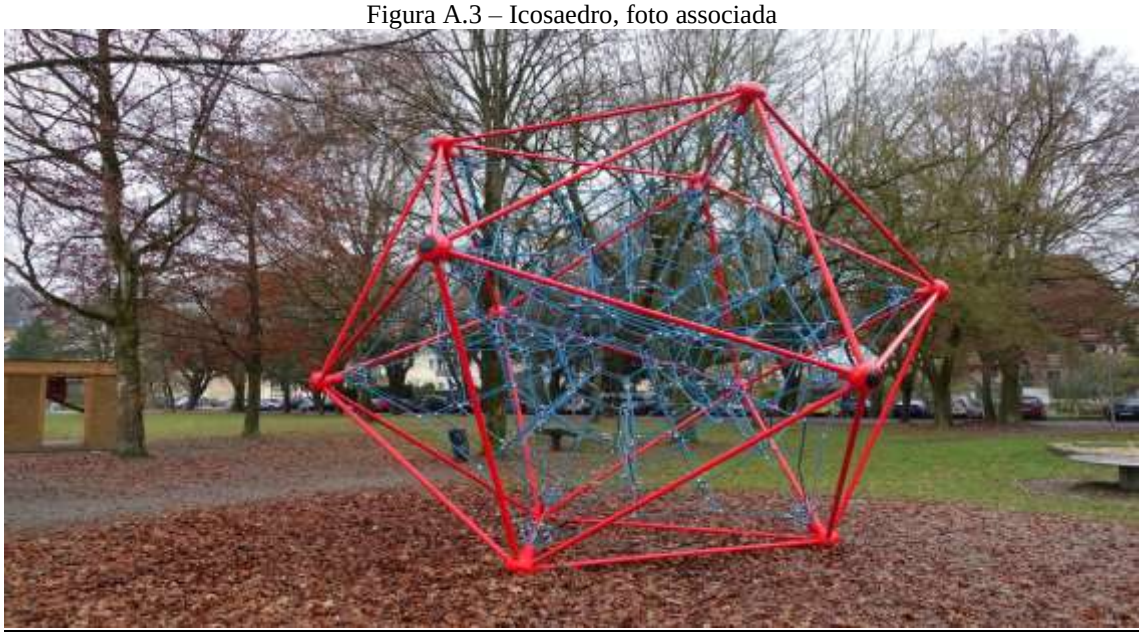
c) 30 arestas

d) 12 arestas

e) 14 arestas

Antes da projeção da animação (*gif) do Poly Pro 1.11* o docente deverá chamar a atenção dos discentes para os detalhes da figura e, pedir que eles lembrem das definições já estudadas dos poliedros. Após a leitura da questão, os discentes deverão relacionar a palavra triédrico com o número 3 e ainda lembrar que a cada duas faces compartilham uma mesma quantidade de arestas, ou seja, se separadas face a face somadas a quantidade de arestas, totalizariam 60, porém como duas faces compartilham uma mesma quantidade de arestas, consequentemente o valor 60 deve ser dividido por 2, assim totalizando 30 arestas. Outra maneira que eles poderão resolver essa questão, por meio da representação do sólido em questão, quantificando suas arestas. Logo terão como resposta a alternativa **c.**

Figura A.3 – Icosaedro, foto associada



Fonte: SCHEIBER, Klaus. Geometria do espaço. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/icosaedro-geometria-do-espa%C3%A7o-1926293/. Acesso em: 05 jul. 2018.

Questão 3. A figura apresentada na foto é uma representação de um icosaedro, que possui 20 faces e 12 vértices, usando a relação de Euler (V – A + F = 2), concluímos que ele possui o número de arestas iguais a:

a) 12

b) 24

c) 30

d) 36

e) 32

Assim como a questão anterior, os discentes deverão lembrar das definições já estudadas dos poliedros e fazer a conexão das letras V, A e F aos elementos do poliedro. Após a leitura da questão, o docente deverá deixar os discentes fazerem seus cálculos mentais ou descritivos para obterem como resposta a alternativa **c.**

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: “Mão na massa”; “Retomando as questões” e; “Convergindo ideias” descritos abaixo.

✓ “Mão na massa”: caberá ao docente, distribuir os materiais (cubinhos de MDF), enfatizar que com aqueles materiais eles deverão construir um tetraedro, um octaedro e um cubo, apenas será apresentada as dimensões do cubo e, será dito que o tetraedro e o octaedro deverão ter um tamanho que possa ser inscrito no cubo, um por vez. Materiais esses especificados neste

Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas ao assunto observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ "Retomando as questões": o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada das questões nos slides, se por ventura houver alguma dúvida ele ficará incumbido de sanar, nesse momento as questões da introdução serão discutidas entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento o docente contará a história: Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito e, pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, do *(gif) software Poly Pro 1,11*, do vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, imagens das questões anteriormente discutidas e dos materiais da dinâmica "Mão na massa".

Síntese integradora: esse momento foi denominado de "Investigando as características", onde o docente pedirá que os discentes discutam com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por 2 minutos. Após isso, cada equipe contribuirá para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará nos slides as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

De acordo com os materiais didáticos diversificados, (cubos em MDF), discuta com seu grupo, os volumes, considerando cada cubinho menor uma unidade de volume:

• Cubo: **uma unidade cúbica de volume**

• Tetraedro*:* **o tetraedro tem volume igual a 34 unidades cúbicas**

• Octaedro*:* **o octaedro tem volume igual a 25 unidades cúbicas**

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) Considerando os cubos em MDF como uma unidade, relacione o volume do octaedro ao volume do cubo.

2) Se possível, faça uma representação de um dos sólidos de MDF construído (tetraedro ou octaedro).

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

2.2 SEGUNDA E TERCEIRA APLICAÇÃO - VERSÃO COM SETE AULAS - PLANO DE UNIDADE COM RESPECTIVOS PLANOS DE AULAS

PLANO DE UNIDADE

I. IDENTIFICAÇÃO

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

II. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

III. OBJETIVOS

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

IV. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Semelhante ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

Conteúdo programático distribuído por aula

Aula 1 - Ponto e reta: características;

Aula 2 - Plano e espaço: características;

Aula 3 - Paralelismo, perpendicularidade e projeções ortogonais: características;

Aula 4 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade;

Aula 5 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características;

Aula 6 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro;

Aula 7 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações.

V. METODOLOGIA

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

VI. AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

VII. RECURSOS DIDÁTICOS

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

VIII. BIBLIOGRAFIA

Idêntico ao Plano de Unidade com respectivos planos de aulas - versão com cinco aulas.

PLANO DE AULA - 1

IDENTIFICAÇÃO:

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria de Posição – ponto e reta: características

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas embalagens e construções;
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

OBJETIVOS:

- Citar as características de ponto e reta;
- Descrever ponto e reta, por meio da visualização de imagens e manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria de Posição: ponto e reta, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na manipulação dos materiais didáticos diversificados (aparatos de Geometria de Posição e Espacial), na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de pontos e retas de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, slides, quadro, giz, materiais didáticos diversificados de pontos e retas que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. (bolinhas de isopor, palitos de churrasco, alfinetes, linhas de pesca).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Geometria de posição e poliedros.** Disponível em: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm. Acesso 15 abr. 2018.

PLANO DE AULA - 2

IDENTIFICAÇÃO:

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria de Posição – plano e espaço: características

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

OBJETIVOS:

- Citar as características de plano e espaço;
- Descrever conhecimentos adquiridos de plano e espaço através da visualização de imagens e manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria de Posição: plano e espaço, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na manipulação dos Materiais didáticos diversificados (aparatos de Geometria de Posição e Espacial), na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de plano e espaço de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive*, quadro, giz, materiais didáticos diversificados de plano e espaço que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (bolinhas de isopor, palitos de dente, papéis cartões, entre outros).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Geometria de posição e poliedros.** Disponível em: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm. Acesso 15 abr. 2018.

PLANO DE AULA - 3

IDENTIFICAÇÃO:

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria de Posição – paralelismo, perpendicularidade e projeções ortogonais: características

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de paralelismo, perpendicularidade e projeções;
- Descrever conhecimentos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, contextualizando e ilustrando a Geometria de Posição: paralelismo, perpendicularidade e projeções, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: “Mão na massa”, “Retomando as questões” e “Convergindo ideias”, que consistirá na manipulação dos Materiais didáticos diversificados (aparatos de Geometria de Posição e Espacial), na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento “Investigando as características”, por meio das soluções de questões de pontos e retas de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório em equipe, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive*, quadro, giz, materiais didáticos diversificados que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (bolinhas e formas de isopor, palitos de churrasco, papéis cartões).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Geometria de posição e poliedros.** Disponível em: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-1.htm. Acesso 15 abr. 2018.

PLANO DE AULA - 4

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade.

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de poliedros convexos, não convexos e relação de Euler;
- Descrever conhecimentos de poliedros adquiridos através da manipulação de materiais;

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria Espacial – poliedros convexos e não convexos, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na manipulação dos Materiais didáticos diversificados. Cada equipe receberá dois cubos de espuma com alguns cortes que serão investigados no decorrer da aula, para investigação da relação de Euler e de poliedros não convexos; na discussão das questões analisadas com o uso das imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de poliedros convexos e não convexos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual – das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive*, quadro, giz, materiais didáticos diversificados que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (poliedros de espuma).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

PLANO DE AULA - 5

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;

- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as características de sólidos platônicos relacionando-os com a Geometria de Posição;
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", vídeo contextualizando e ilustrando a aula: Geometria Espacial e os sólidos platônicos, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá no manuseio pelos discentes dos materiais didáticos diversificados, (sólidos platônicos: tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro) um por equipe, os discentes o receberão montados pelo docente de papel, na discussão das questões analisadas com o uso do vídeo, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de poliedros (materiais didáticos diversificados) de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual – das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive,* quadro, giz, materiais didáticos diversificados que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (poliedros construídos com papelão).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

NOVAES. **Guia do professor**. Disponível em: http://blogdoprofessornovaes.blogspot.com.br/. Acesso em: 19 nov. 2017.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

PLANO DE AULA - 6

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de sólidos platônicos: tetraedro e octaedro;
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", contextualizando e ilustrando a Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro através de imagens e um *gif* do octaedro, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias", que consistirá na montagem de um tetraedro e octaedro de canudinhos, materiais didáticos diversificados; na discussão das questões analisadas com o uso de imagem e *gif*, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto, especificado no Produto Educacional, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de sólidos platônicos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive*, quadro, giz, materiais didáticos diversificados que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (canudinhos de plástico e linhas de pesca).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

STOODI. **Poliedros**. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/materias/matematica/poliedros/. Acesso 25 jan. 2018.

PLANO DE AULA - 7

IDENTIFICAÇÃO

ESCOLA/ COLÉGIO:

CURSO: Ensino Médio

DISCIPLINA: Matemática

DOCENTE:

SÉRIE/ ANO LETIVO:

CARGA HORÁRIA: 1 aula/ 50 minutos

ASSUNTO: Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações

COMPETÊNCIAS E HABILIDADES:

- Identificar características de figuras planas ou espaciais;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

OBJETIVOS:

- Citar as propriedades de sólidos platônicos: tetraedro, hexaedro e octaedro: aplicações
- Descrever conhecimentos de poliedros platônicos adquiridos através da manipulação de materiais.

MOMENTOS DA AULA:

1- Introdução/ Incentivação: a aula será iniciada com a dinâmica de grupo “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, contextualizando e ilustrando a Geometria Espacial – sólidos platônicos ou Poliedros Regulares tetraedro, octaedro, por meio de imagens e vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

2- Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos denominados: “Mão na massa”, “Retomando as questões” e “Convergindo ideias”, que consistirá na montagem de um octaedro, tetraedro de cubos de madeira, materiais didáticos diversificados; na discussão das questões

analisadas com o uso de imagens, no formato de plenária e no embasamento teórico do assunto utilizando também a história: Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

3- Síntese Integradora: será o momento "Investigando as características", por meio das soluções de questões de sólidos platônicos de forma dialogada, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

AVALIAÇÃO: será em formato de – Relatório Individual, das conclusões feitas na resolução das questões, a partir dos relatórios-avaliações, especificado neste Apêndice, subseção 2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas.

RECURSOS FÍSICOS: TV, *pendrive*, quadro, giz, materiais didáticos diversificados que constam neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial, (cubos de madeira).

BIBLIOGRAFIAS:

BÁSICAS

BRASIL. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, 2005.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2005.

COMPLEMENTARES

BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio.** São Paulo: Scipione, 2001.

BONJORNO, J. R. **Matemática Completa.** São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. R**. Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

SILVA, P. V. C.; BORTOLOSSI H. J. **Os Sólidos Platônicos** – Matemática: geometria. Disponível em: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html. Acesso em: 22 mar. 2018.

STOODI. **Poliedros**. Disponível em: https://www.stoodi.com.br/materias/matematica/poliedros/. Acesso 25 jan. 2018.

CIÊNCIA DE GARAGEM. **Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito.** Disponível em: https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html. Acesso em: 19 jul. 2018.

2.2.1 Roteiro do docente: versão com sete aulas

- AULA 1 – Ponto e reta: características

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente terá como função projetar, ler as questões contidas nos slides, direcionar a atenção dos discentes a alguns pontos específicos das mesmas, cronometrar a discussão das questões e, coletar a resposta final da questão por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la em 3 minutos cada uma e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar as respostas de cada equipe. As mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Abaixo estão as imagens com as questões que eles responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente pesquisadora:

Questão 1. É idêntica a Questão 1 e Figura 3.3 - A ideia de pontos e reta no cotidiano, foto associada, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas, Aula 1.

Questão 2. É idêntica a Questão 2 e Figura 3.8 - Segmento de reta, foto associada, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas, Aula 1.

Desenvolvimento: é idêntico ao da Aula 1 da versão com cinco aulas, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1.

Síntese integradora: é semelhante ao da Aula 1 da versão com cinco aulas, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1, porém alguns ajustes foram realizados em virtude do tempo disponibilizado pelo colégio, sendo assim, na versão com cinco aulas foram condensadas as três primeiras aulas da versão com sete aulas.

De acordo com as imagens e os materiais que cada equipe recebeu, discuta a descrição de cada item a seguir. Após abriremos a plenária para toda a turma:

a) reta: **conjunto de pontos compreendidos como linhas infinitas que não fazem curvas.**

b) semirreta: **reta limitada no início e ilimitada no fim**

c) segmento de reta: **reta limitada por dois pontos**

Posições relativas de duas retas:

a) paralelas coplanares: **duas retas são paralelas coplanares se, e somente se, não têm ponto em comum.**

b) paralelas coincidentes: **duas retas são paralelas coincidentes se, e somente se, possuem todos os pontos em comum.**

c) concorrentes: **duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.**

d) perpendiculares: **duas retas são perpendiculares se, e somente se, elas têm um único ponto em comum que formam um ângulo reto (90°).**

e) reversas: **duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano que as contenha.**

Avaliação: é semelhante ao da Aula 1, versão com cinco aulas, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1.

1) Diferencie reta, semirreta e segmento de reta:

Pontos alinhados continuamente infinitamente, pontos alinhados continuamente, apenas delimitado no início, uma reta limitada por dois pontos.

2) Se possível, faça uma representação das posições relativas de duas retas:

a) paralelas coplanares:

b) paralelas coincidentes:

c) concorrentes:

d) perpendiculares:

e) reversas:

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 2 - Plano e espaço: características

MOMENTOS DA AULA

Introdução: será por meio da dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”, que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la e optar por aquela que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão as placas com o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar as respostas de cada equipe, as mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Abaixo está a imagem que ilustrará as questões que os discentes responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente pesquisadora:

Figura 3.15 - Plano e espaço, foto associada

Fonte: AKYURT, Engin. Café expresso. **Pixabay**. Disponível em: https://pixabay.com/pt/caf%C3%A9 caneta-caderno-trabalho-livro-2306471/. Acesso em: 08 mai. 2018.

Questão 1. É idêntica a Questão 3 e Figura 3.15 apresentada anteriormente, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas, Aula 1.

Questão 2. Na foto "plano e espaço", observamos a representação de uma xícara com um considerável volume de café, logo o café preenche um certo espaço da xícara. Podemos perceber então que o espaço considera o volume de um objeto em questão. O espaço pode ser representado como uma infinidade de planos, assim como o plano, por uma infinidade de retas, isso significa que o espaço considera o volume, sendo esse representado por:

a) três dimensões: altura, largura e volume.

b) uma única dimensão.

c) duas dimensões quaisquer.

d) três dimensões: altura, largura e comprimento.

e) duas dimensões: altura e largura.

Na questão 2, os discentes deveriam discutir a dimensão do espaço, lembrando por exemplo que o volume não é considerado uma dimensão, mas sim o produto das três dimensões, logo a única alternativa correta é a **d.**

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: "Mão na massa"; "Retomando as questões" e; "Convergindo ideias" descritos abaixo.

✓ "Mão na massa": os discentes receberão do docente os materiais que consistirão na caracterização de pontos e retas, especificados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Com os materiais em mãos, cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas ao assunto de ponto e reta, observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ "Retomando as questões": as questões da introdução serão discutidas nesse momento entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe. O docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta, se por ventura houver alguma dúvida ela ficará incumbida de sanar.

✓ "Convergindo ideias": é idêntico ao da Aula 1 da versão com cinco aulas, especificado neste Apêndice, subseção 2.1.1.

Síntese integradora: dinâmica – "Investigando as características". Nesse momento, serão discutidas as duas questões objetivas descritas na sequência. Quando aberta a plenária, o docente ouvirá as considerações dos docentes em relação as questões, anotadas abaixo:

- Quando dois planos possuem apenas uma reta em comum, quer dizer que os planos são:

a) paralelos b) iguais **c) secantes** d) coplanares

- Quantos planos podem passar por dois pontos distintos?

a) nenhum b) 1 c) 2 **d) infinitos**

Avaliação: a docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, a partir dos relatórios-avaliações, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) Diferencie Plano e espaço:

Plano possui duas dimensões, já o espaço possui três dimensões.

2) Se possível, faça uma representação de plano:

- Secante a outro plano;
- Que passa por dois pontos distintos;

- Perpendicular à reta de outro plano;

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões à docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

- AULA 3 - Paralelismo, perpendicularidade e projeções ortogonais: características

MOMENTOS DA AULA

Introdução: será por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens com questões objetivas contextualizando o assunto. Todas as questões serão de múltipla escolha e cada equipe deverá discuti-la e optar por aquela que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e a docente irá coletar as respostas de cada equipe, as mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Abaixo estão as imagens com as questões que eles responderão e as prováveis respostas fornecidas pela docente:

Figura 3.30 – Retas paralelas coplanares, foto associada

Fonte: SONGSIL, Nanthapongs. Viagem/ Férias. **Pixabay.** Disponível em: https://pixabay.com/pt/trem-ferrovia-viagens-2887610/. Acesso em: 10 mai. 2018.

Questão 1. Observe o trilho por onde o trem irá passar, podemos observar nele a representação de duas retas paralelas, pois como característica:

a) as retas estão contidas num plano.

b) as retas não possuem ponto em comum entre elas.

c) as retas possuem infinitos pontos em comum entre elas.

d) as retas são perpendiculares.

Nessa questão, os discentes devem estar atentos a imagem para chegar à conclusão de que a representação dela caracteriza a alternativa **b** as retas não possuem ponto em comum entre elas.

Questão 2. É idêntica a Questão 4 e Figura 3.32 - Retas perpendiculares, foto associada, apresentada anteriormente, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas, Aula 1.

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: "Mão na massa", "Retomando as questões" e "Convergindo ideias" descritos abaixo.

✓ "Mão na massa": os discentes receberão da docente os materiais que consistirão na caracterização de pontos e retas. Materiais especificados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Com os materiais em mãos, cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas aos assuntos de ponto e reta, paralelismo e perpendicularidade, observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ "Retomando as questões": as questões da introdução serão discutidas nesse momento entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe. A docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta, se por ventura houver alguma dúvida ela ficará incumbida de sanar.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento a docente pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões, materiais, discussões e teoria por meio de slides e, ainda fará a leitura do texto: Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito.

Síntese integradora: esse momento os discentes discutirão com as suas equipes os pontos mais específicos descritos abaixo, por alguns minutos. Após isso, cada equipe contribuirá para caracterizá-los, enquanto isso a docente anotará no quadro negro as contribuições dos mesmos.

De acordo com as imagens e os materiais que cada equipe recebeu, discuta a descrição de cada item a seguir. Após abriremos a plenária para toda a turma:

- Paralelismo entre;

a) Retas: **não há ponto em comum (paralelas distintas) ou todos os seus pontos em comum (paralelas coincidentes)**

b) Reta e plano: **a reta será paralela ao plano se não tem nenhum ponto em comum ao plano.**

c) Plano e plano: **não há ponto em comum (paralelos distintos) ou todos os seus pontos em comum (paralelos coincidentes)**

- Perpendicularidade entre;

a) Retas: **são perpendiculares se e somente se, são concorrentes e formam ângulos retos entre si.**

b) Reta e plano: **uma reta é perpendicular ao plano se e somente se, todas as retas do plano que concorrem com a reta são perpendiculares.**

c) Planos: **dois planos são perpendiculares se, e somente se, existe uma reta contida em um deles e perpendicular ao outro.**

Avaliação: a docente pedirá para que cada equipe faça uso de um relatório, dessa vez, um por equipe, este anexado a pasta, a partir dos relatórios-avaliações, nesse momento cada grupo deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) Desenhe, se possível as projeções ortogonais dos dois objetos confeccionados em isopor, do palito em madeira, e do cubo em MDF, considere a frente deles de acordo com a figura mostrada pela docente:

Frente	Topo	Perfil

2) Caso tenham alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

3) Sugestões à docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

O roteiro da docente das aulas listadas abaixo são as mesmas da primeira aplicação, portanto seus roteiros foram descritos na subseção 2.1.1 Roteiro da docente: versão com cinco aulas

- Aula 4 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade

É idêntica à Aula 3, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

- Aula 5 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características

É idêntica à Aula 2, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

- Aula 6 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro

É idêntica à Aula 4, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas.

- Aula 7 - Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações

MOMENTOS DA AULA

Introdução: o docente irá iniciar a aula projetando o vídeo: *Estructura del universo según Kepler* e, fará comentários a respeito do vídeo e projetará algumas imagens de cristais e ainda terá como função projetar, ler a questão contida no slide, cronometrar a discussão e, coletar a resposta final por meio de uma foto com apenas a alternativa que cada equipe escolheu. Esse momento se dará por meio da dinâmica "Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia", que consiste na apresentação de imagens e/ou vídeos, com questões objetivas contextualizando o assunto. A questão será de múltipla escolha, cada equipe deverá discuti-la em 2 minutos e optar pela alternativa que mais se adeque ao conceito que eles possuem sobre o assunto.

No primeiro momento, os discentes levantarão o sólido que representa cada letra e o docente irá coletar a resposta de cada equipe. As mesmas serão discutidas em um segundo momento.

Questão 2 – É idêntica a Questão 1 e Figura 3.46 - Hexaedro, foto associada: Fluorita, apresentada anteriormente, localizados neste Apêndice, subseção 2.1.1 Roteiro do docente: versão com cinco aulas, Aula 5.

Desenvolvimento: será por meio de 3 momentos: "Mão na massa"; "Retomando as questões" e; "Convergindo ideias" descritos abaixo.

✓ "Mão na massa": caberá ao docente, distribuir os materiais (cubinhos de MDF), enfatizar que com aqueles materiais eles deverão construir um tetraedro, um octaedro e um cubo, apenas será apresentada as dimensões do cubo e, será dito que o tetraedro e o octaedro deverão ter um tamanho que possa ser inscrito no cubo, um por vez. Materiais esses especificados neste Apêndice, seção 2.3 Materiais didáticos diversificados: aparatos de Geometria de Posição e Espacial. Cada equipe discutirá entre eles, as características relacionadas ao assunto observando o material e relembrando as questões estudadas anteriormente.

✓ "Retomando as questões": o docente apenas mediará essa discussão e, destacará a alternativa correta por meio da retomada das questões nos slides, se por ventura houver alguma dúvida ele

ficará incumbido de sanar, nesse momento as questões da introdução serão discutidas entre todos da turma em formato de plenária dialogada, para que haja uma ligação de ideias entre as questões, materiais e as discussões de cada equipe.

✓ "Convergindo ideias": nesse momento o docente contará a história: Os sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito e, pontuará alguns itens teóricos relevantes para a convergência de ideias entre questões e teoria por meio de slides, do vídeo: *Estructura del universo según Kepler*, imagens das questões discutidas nas aulas anteriores e, dos materiais da dinâmica "Mão na massa".

Síntese integradora: esse momento foi denominado de "Investigando as características", onde o docente pedirá que os discentes discutam por 2 minutos com as suas equipes os pontos mais específicos descritos em seguida. Após isso, cada equipe contribuirá para caracterizá-los, enquanto isso o docente anotará nos slides as contribuições dos mesmos. Só reforçando que as respostas colocadas em cada um dos itens abaixo são prováveis respostas dos discentes, anterior a aula.

De acordo com os materiais didáticos diversificados, (cubos em MDF), discuta com seu grupo, os volumes, considerando cada cubinho menor uma unidade de volume:

• Cubo: **uma unidade cúbica de volume**

• Tetraedro*:* **o tetraedro tem volume igual a 34 unidades cúbicas**

• Octaedro*:* **o octaedro tem volume igual a 25 unidades cúbicas**

Avaliação: será realizada a partir dos relatórios-avaliações. O docente pedirá para que cada discente faça uso de um relatório individual anexado a pasta de cada equipe, nesse momento cada discente deverá preenchê-lo de acordo com os pontos nele listados.

1) Considerando os cubos em MDF como uma unidade, relacione o volume do octaedro ao volume do cubo.

2) Se possível, faça uma representação de um dos sólidos de MDF construído (tetraedro ou octaedro).

3) Caso tenha alguma dúvida em relação aos conceitos estudados, registre-as aqui:

4) Sugestões ao docente quanto ao conteúdo e a maneira de conduzir a aula:

2.3 MATERIAIS DIDÁTICOS DIVERSIFICADOS: APARATOS DE GEOMETRIA DE POSIÇÃO E ESPACIAL

Nesta seção são apresentados todos os materiais elaborados para aplicação deste Produto Educacional.

Na Figura A.4, são apresentadas as pastas, com os materiais de registros: todo o material incluindo os relatórios-avaliações individual e/ou em grupo e por aula, uma por equipe, portanto cinco pastas. A pasta foi caracterizada de acordo com os nomes das equipes, portanto, cinco pastas com o nome dos sólidos e sua respectiva planificação na capa.

Figura A.4 – Pastas com relatórios: material para registros

Fonte: A autora

Além disso, foram atribuídos os respectivos sólidos platônicos para reforçar a denominação de cada equipe. Estes sólidos foram feitos de papelão revestidos com papel seda com as cores correspondentes aos sólidos e as equipes e são apresentados na Figura A.5.

Figura A.5 – Sólidos platônicos de papelão que dão nome as equipes

Fonte: A autora

Na Figura A.6 há os cinco sólidos de Platão feitos de papel cartão, esses os discentes utilizaram para escolher a alternativa correta na dinâmica “Observando a Geometria de Posição e Espacial no dia a dia”. Para a confecção dos sólidos platônicos, além do papel cartão, foram utilizados palitos de churrasco afixados nos sólidos com bolinhas de isopor.

Figura A.6 – Sólidos como alternativas

Fonte: A autora

Os materiais das Figuras A.4 a A.6 acompanharam os discentes do início até o final da aplicação da unidade, isto é, foram utilizados em todas as aulas.

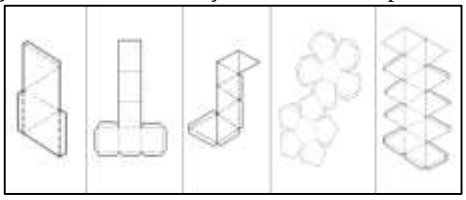
Na Figura A.7, são apresentados os materiais utilizados na aula 1 de todas as aplicações. São tabuleiros confeccionados com uma placa de isopor encapada com as mesmas cores dos sólidos que representa cada equipe. E fixadas a eles estão palitinhos de dente, um pedaço de papel cartão, alfinetes e bolinhas de isopor.

Figura A.7 – Tabuleiro de isopor

Fonte: A autora

Materiais utilizados na aula 2 da primeira aplicação, Figura A.8, feitos com papel cartão. Os grupos receberam as planificações de acordo com o nome do seu grupo e depois montaram e analisaram as características de cada um dos mesmos em formato de plenária.

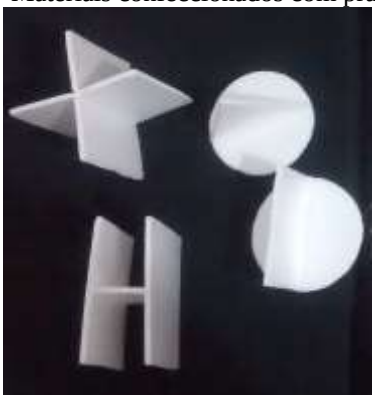
Figura A.8 – Planificações dos sólidos platônicos



Fonte: A autora

Materiais utilizados na aula 3 da segunda e terceira aplicação Figura A.9, feitos com pratos de isopor cortados. Os grupos receberam três materiais destes, analisaram as características de cada um dos mesmos em formato de plenária e, fizeram desenhos das perspectivas deles, como já apresentado.

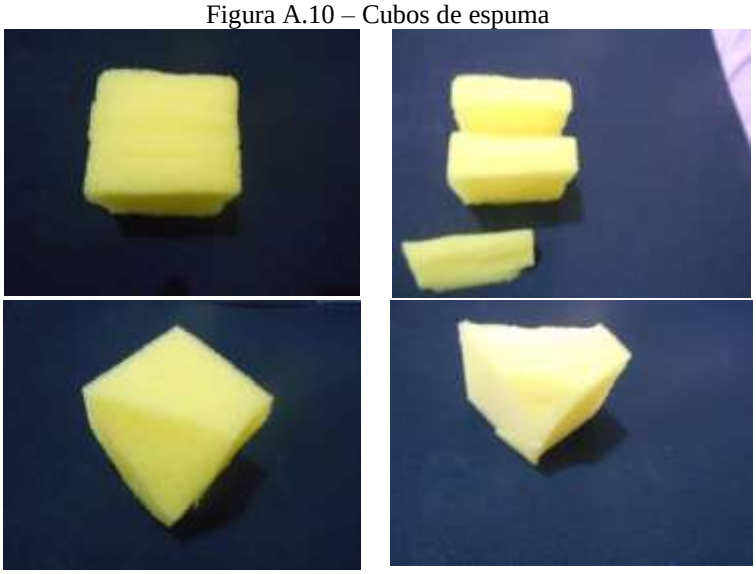
Figura A. 9 – Materiais confeccionados com pratos de isopor



Fonte: A autora

Os cubos de espumas Figura A.10 foram confeccionados com cortes diferenciados e cada equipe recebeu 2, para a caracterização de poliedros convexos e não convexos, eles foram utilizados na primeira aplicação aula 3, e na segunda e terceira aplicação na aula 4.

Figura A.10 – Cubos de espuma



Fonte: A autora

O tetraedro e octaedro Figura A.11 da primeira imagem, a superior, foram confeccionados com varetas de balão e linha de pesca. Na segunda imagem, a inferior, foram confeccionados com canudinhos de refrigerante e bolinhas de isopor, estas para caracterizarem

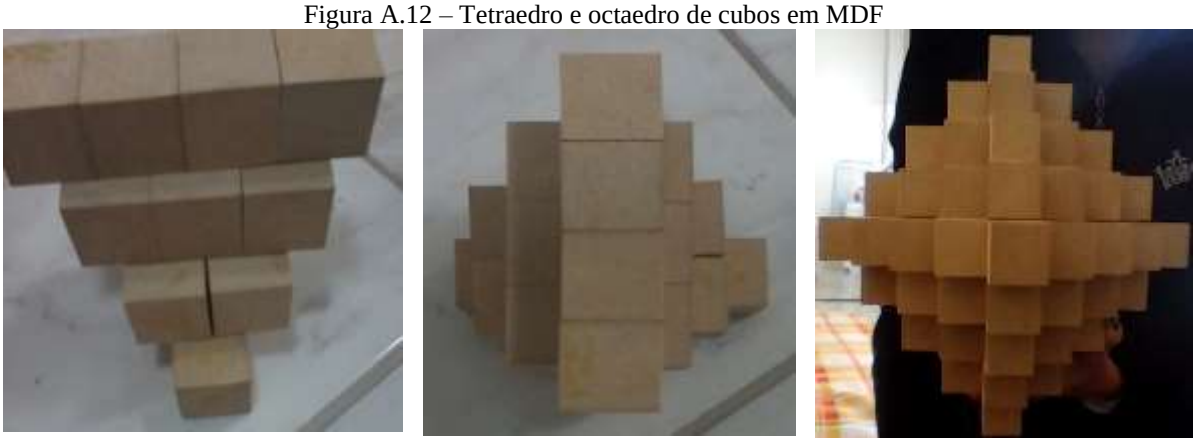
os vértices dos poliedros. Cada equipe recebeu as varetas cortadas de acordo com o tamanho do sólido, 6 para a construção do tetraedro e 12 para a construção do octaedro, juntamente com as linhas de pesca. Na segunda imagem estão os materiais adicionais que a docente fez para utilizar nas aulas com a intenção de melhor caracterizar os sólidos. Os materiais foram utilizados na primeira aplicação aula 4, e na segunda e terceira aplicação na aula 6.

Figura A.11 – Poliedros de canudos

Fonte: A autora

O tetraedro e octaedro Figura A.12 foram montados com cubos em MDF e cola de madeira. Os materiais foram utilizados na primeira aplicação aula 5, e na segunda e terceira aplicação na aula 7.

Figura A.12 – Tetraedro e octaedro de cubos em MDF



Fonte: A autora

Para finalizar esta subseção, são apresentados os títulos dos vídeos e slides utilizados para a aplicação das aulas, visando contribuir para a dinâmica em sala de aula. Por se tratar de

materiais dessa natureza, são indicados os arquivos e/ ou sites onde poderão ser encontrados, conforme os Quadro A.1 e Quadro A.2, respectivamente.

Quadro A.1 - Lista de vídeos para aplicação em sala de aula

Arquivo	**Seção**	**Aula**	**Disponível**
Geometria Espacial e os sólidos platônicos[a]	2.1 versão com cinco aulas e 2.2 versão com sete aulas	2, primeira aplicação e 5, segunda e terceira aplicação	Entrar em contato com a autora: divi.mdr@gmail.com Vídeo produzido a partir do texto disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.htm
Estructura del universo según Kepler	2.1 versão com cinco aulas e 2.2 versão com sete aulas	5 primeira aplicação e 7, segunda e terceira aplicação	https://www.youtube.com/watch?v=HdyNxpAFPHM

a – GINNOBILI, S. ***Estructura del universo según Kepler.*** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HdyNxpAFPHM. Acesso em: 24 abr. 2019.
Fonte: A autora

Quadro A.2 - Lista de slides para aplicação em sala de aula

Arquivo	**Seção**	**Aula**	**Disponível**
Ponto, reta, plano e espaço: características, paralelismo e perpendicularidade	2.1 Primeira Aplicação - versão com cinco aulas e 2.2 Segunda e terceira Aplicação - versão com sete aulas	1- primeira aplicação	Entrar em contato com a autora: divi.mdr@gmail.com
Ponto e reta: características		1 - segunda e terceira aplicação	
Plano e espaço: características		2 - segunda e terceira aplicação	
Paralelismo, perpendicularidade e projeções ortogonais: características		3 - segunda e terceira aplicação	
Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: características		2 - primeira aplicação e 5 - segunda e terceira aplicação	
Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: cubo, convexidade e não convexidade		3 - primeira aplicação e 4 - segunda e terceira aplicação	
Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: tetraedro e octaedro		4 primeira aplicação e 6, segunda e terceira aplicação	
Sólidos platônicos ou Poliedros Regulares: aplicações		5 primeira aplicação e 7, segunda e terceira aplicação	

Fonte: A autora

APÊNDICE B - Modelo: carta de apresentação, dados cadastrais e termo de autorização

Neste apêndice são apresentados os modelos dos seguintes documentos: carta de apresentação, dados cadastrais e termo de autorização para possibilitar a aplicação deste Produto Educacional.

- **Carta de apresentação (Entregue aos dois diretores dos colégios)**

Prezado _____

Diretor do Colégio _____

Endereço: _____Ponta Grossa - Paraná | Brasil

Eu, Prof. Dr. André Maurício Brinatti, venho, por meio desta me apresentar como docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e orientador da Prof. Diviane Maria Dias Rodrigues, discente do referido Programa de Pós-Graduação.

Também venho esclarecer que para que a Prof. Diviane logre êxito em seu mestrado é necessário que ela aplique o material educacional que ela desenvolve no momento junto ao PPGECEM-UEPG, denominado de Produto Educacional, com a finalidade de testar o mesmo. Sendo que o teste, conforme acordado anteriormente, será aplicado na escola sob sua direção em contraturno, cujo espaço nos foi gentilmente cedido. Assim, este conjunto de ações, que compõem as atividades que a Prof. Diviane fará em contraturno no espaço cedido pela direção durante o segundo semestre de 2018, será de grande valor para todos.

E o nome provisório do projeto desenvolvido pela Prof. Diviane é: .....

Autor: Diviane Maria Dias Rodrigues

Produto Educacional: Da geometria de posição aos sólidos de Platão.

Certamente, em qualquer divulgação dos resultados dos trabalhos que sejam relativos às atividades realizadas pela Prof. Diviane Maria Dias Rodrigues atribuiremos os devidos agradecimentos à escola pelo espaço aberto gentilmente cedido.

Além disso, tomaremos os devidos cuidados em relação à divulgação dos resultados e, certamente, cada pai ou responsável deverá ter ciência e conhecimento dos documentos:

- Dados cadastrais para participação na aplicação do Produto Educacional do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Sem mais para o momento,

Agradecemos.

_____

Prof. Dr. André Maurício Brinatti

_____

Prof. Diviane Maria Dias Rodrigues

Ponta Grossa, ___de _____ de 2018.

- **Dados cadastrais**

Dados cadastrais para participação na aplicação do Produto Educacional do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Docente (mestranda) responsável: Diviane Maria Dias Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. André Maurício Brinatti

Aluno (a):

_____.

Nome do responsável:

_____.

Endereço: _____.

Telefone de contato: _____e-mail: _____.

Série: _____ turma: ____ Idade: ____.

Em qual instituição cursou o ensino fundamental? Pública ( ) Privada ( )

Qual o motivo para participar da atividade?

_____

_____

_____

_____.

- **Termo de autorização**

Eu, _____, nacionalidade _____, estado civil _____, portador(a) da Cédula de identidade RG nº._____, e CPF/MF nº _____, residente à Av/Rua _____ , nº. _____, município de _____/Paraná, responsável pela menor,

_____, nacionalidade _____,

AUTORIZO o uso de dados, de resultados e de imagens, da menor acima qualificada em todo e qualquer material de divulgação tais como, dissertação, resumos e artigos de divulgação científica, em eventos, congressos e outras formas de apresentação. Tais dados, resultados e imagens serão utilizados para comprovação da aplicação do Produto Educacional, vinculado a dissertação de Diviane Maria Dias Rodrigues discente do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa, sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral. Porém, ressalta-se que em qualquer dessas situações de divulgação será preservado a identificação do menor acima citado. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso de dados, de resultados e de imagens acima mencionados em todo território nacional e no exterior. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à imagem do menor acima qualificado ou a qualquer outro, e assino a presente autorização. _____, _____ de _____ de _____.

_____

(Assinatura)

Nome do aluno:

_____.

Por seu Responsável Legal:

_____.

Telefone p/ contato: _____.