

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO – FÍSICA**

RAYLAN ARI PRESTES MARTINS

**ASSINATURAS POLARIMÉTRICAS DE EXOPLANETAS: MODELAGEM
TRIDIMENSIONAL DE ATMOSFERAS E SUPERFÍCIES HETEROGÊNEAS**

**PONTA GROSSA
2026**

RAYLAN ARI PRESTES MARTINS

**ASSINATURAS POLARIMÉTRICAS DE EXOPLANETAS: MODELAGEM
TRIDIMENSIONAL DE ATMOSFERAS E SUPERFÍCIES HETEROGÊNEAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de Concentração em Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências/Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Emilio

**PONTA GROSSA
2026**

M386 Martins, Raylan Ari Prestes
Assinaturas polarimétricas de exoplanetas: modelagem tridimensional de atmosferas e superfícies heterogêneas / Raylan Ari Prestes Martins. Ponta Grossa, 2026.
130 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física),
Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Emilio.

1. Polarimetria. 2. Exoplanetas. 3. Transferência radiativa. 4. Espalhamento.
5. Instrumento SPARC4. I. Emilio, Marcelo. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530

TERMO DE APROVAÇÃO

RAYLAN ARI PRESTES MARTINS

ASSINATURAS POLARIMÉTRICAS DE EXOPLANETAS: MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DE ATMOSFERAS E SUPERFÍCIES HETEROGÊNEAS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração: Física Teórica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Orientador -

Documento assinado digitalmente
 **MARCELO EMILIO**
Data: 30/06/2026 16:38:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Marcelo Emilio – UEPG – Presidente

Documento assinado digitalmente
 **CLAUDIA VILEGA RODRIGUES**
Data: 27/06/2026 12:06:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Cláudia Vilega Rodrigues – INPE – Titular

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO JANOT PACHECO**
Data: 06/07/2026 05:06:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Eduardo Janot Pacheco – IAG - USP – Titular

Ponta Grossa, 23 de junho de 2026

*À Bruna, minha constante mais valiosa. Por iluminar os meus dias e noites enquanto eu
tentava entender a luz de outros mundos.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Núbia, por ser a base e a maior incentivadora dos meus objetivos desde sempre. Todo o seu sacrifício e apoio incondicional formaram o alicerce fundamental para a minha formação e para a conclusão de mais esta etapa.

Agradeço à minha noiva, Bruna, pelo amor e incentivo. Obrigado por ser meu suporte constante, por compreender as minhas ausências durante esta jornada e por sempre acreditar em mim.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Emilio pela orientação e por ser o meu maior exemplo na ciência. Agradeço especialmente pela paciência e pelo respeito com os quais recebeu até mesmo as piores das minhas ideias.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo deste trajeto, durante minha formação e convivência no AstroUEPG. Obrigado pela companhia e pelas diversas discussões proveitosas.

Agradeço à Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), ao Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física e a todos os professores e pesquisadores que contribuíram para o meu desenvolvimento como pesquisador.

Agradeço ao Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA) pelo tempo concedido para observações no Observatório do Pico dos Dias. Agradeço em especial aos agentes noturnos pelo auxílio técnico e ao Laerte Andrade pela contribuição ao meu aprendizado na astronomia observacional.

Agradeço, finalmente, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo fomento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

DECLARAÇÃO SOBRE O USO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Declaro que ferramentas de inteligência artificial generativa (Gemini 3.1 Pro) foram utilizadas exclusivamente como apoio à revisão linguística deste trabalho, incluindo correções de ortografia, gramática, pontuação, fluidez e clareza redacional. O uso dessas ferramentas não envolveu a geração de resultados científicos, análise de dados, interpretação dos resultados, elaboração de conclusões ou substituição da autoria humana. Todo o conteúdo final foi revisado criticamente pelo autor, que assume integral responsabilidade pela precisão, originalidade e integridade acadêmica da dissertação.

“Por instantes, imagino como seria maravilhoso arrancar do corpo lenços vermelhos, azuis, brancos, verdes. Encher a noite com fogos de artifício. Erguer o rosto para o céu e deixar que pelos meus lábios saísse o arco-íris. Um arco-íris que cobrisse a Terra de um extremo a outro.”

– Murilo Rubião

RESUMO

A polarimetria constitui uma via observacional poderosa para a caracterização físico-química de atmosferas e superfícies planetárias. Apesar de seu sucesso no Sistema Solar, a aplicação em exoplanetas permanece um desafio técnico, exigindo o avanço conjunto de instrumentação de alta precisão e de modelos teóricos tridimensionais. Esta dissertação apresenta uma abordagem dupla para a polarimetria exoplanetária, combinando o desenvolvimento de uma infraestrutura computacional de simulação com a execução de uma campanha observacional em solo. Na frente teórica, desenvolvemos um *pipeline* numérico que acopla a transferência radiativa vetorial local à integração geométrica global do disco planetário. Utilizando técnicas de geração procedural espacial, o modelo supera a aproximação clássica de esferas homogêneas, permitindo simular assinaturas polarimétricas complexas oriundas de oceanos líquidos, distribuições topográficas e de nuvens, modulação rotacional, achatamento planetário e eventos de ocultação estelar. Na frente observacional, analisamos dados fotopolarimétricos do exoplaneta de período ultracurto K2-131b, obtidos no visível com o instrumento SPARC4 do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Embora a forte variância atmosférica tenha impedido uma detecção empírica direta, os limites de ruído alcançados, quando confrontados com simulações de *Forward Modeling*, restringem a natureza do alvo. Nossos resultados descartam a presença de invólucros voláteis densos e limitam os cenários físicos do planeta a superfícies hiper-refletoras ou nuvens minerais, cujas amplitudes reflexivas operam na escala de poucas partes por milhão. Concluimos que a infraestrutura desenvolvida amplia substancialmente as ferramentas para a modelagem de sinais polarimétricos em exoplanetas rochosos, estabelecendo um alicerce metodológico para futuras campanhas na iminente era dos Telescópios Extremamente Grandes (ELTs).

Palavras-chave: Polarimetria. Exoplanetas. Transferência Radiativa. Espalhamento. Instrumento SPARC4.

ABSTRACT

Polarimetry constitutes a powerful observational pathway for the physicochemical characterization of planetary atmospheres and surfaces. Despite its success in the Solar System, its application to exoplanets remains a technical challenge, requiring the joint advancement of high-precision instrumentation and three-dimensional theoretical models. This dissertation presents a dual approach to exoplanetary polarimetry, combining the development of a computational simulation framework with the execution of an observational campaign. On the theoretical front, we developed a numerical pipeline that couples local vector radiative transfer with the global geometric integration of the planetary disk. Employing spatial procedural generation techniques, the model overcomes the classical approximation of homogeneous spheres, allowing the simulation of complex polarimetric signatures arising from liquid oceans, topographic and cloud distributions, rotational modulation, planetary oblateness, and stellar occultation events. On the observational front, we analyzed photopolarimetric data of the ultra-short period exoplanet K2-131b, obtained in the optical with the SPARC4 instrument at the Pico dos Dias Observatory (OPD/LNA). Although strong atmospheric variance precluded a direct empirical detection, the noise limits achieved, when confronted with Forward Modeling simulations, constrain the nature of the target. Our results rule out the presence of dense volatile envelopes and restrict the planet's physical scenarios to hyper-reflective surfaces or mineral clouds, whose reflective amplitudes operate on the scale of a few parts per million. We conclude that the developed infrastructure substantially expands the tools for modeling polarimetric signals in rocky exoplanets, establishing a methodological foundation for future campaigns in the impending era of Extremely Large Telescopes (ELTs).

Keywords: Polarimetry. Exoplanets. Radiative Transfer. Scattering. SPARC4 Instrument.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 – Representação esquemática dos estados de polarização de uma onda eletromagnética que se propaga ao longo do eixo z . Em vermelho vemos a trajetória da ponta do vetor campo elétrico instantâneo. **(a)** e **(b)** Polarização Linear (Vertical e Horizontal): as componentes ortogonais oscilam em fase ($\delta = n\pi$), confinando o campo a um plano. **(c)** e **(d)** Polarização Circular (Mão Direita e Esquerda): resultantes de componentes com amplitudes iguais e defasagem de $\delta = \pm\pi/2$. O vetor elétrico mantém magnitude constante, descrevendo uma hélice ao longo da propagação e confinada a um envelope cilíndrico. **(e)** Polarização Elíptica: caso mais geral em que as amplitudes diferem e/ou a defasagem é arbitrária. Em todos os painéis, o plano translúcido na extremidade direita ilustra a projeção transversal da oscilação (a figura de polarização) conforme percebida por um observador olhando em direção à fonte, com setas azuis indicando o sentido de rotação temporal do vetor. 28
- Figura 2.2 – Geometria do espalhamento Rayleigh. A radiação incidente induz um momento de dipolo na partícula, cujas oscilações emitem radiação em todas as direções, exceto ao longo do eixo de oscilação. Para um observador no plano de espalhamento, a componente perpendicular (pontos, oscilando para fora da página) é sempre vista em sua amplitude máxima. Já a componente paralela (setas), à medida que o ângulo de espalhamento Θ tende a 90° , tem sua amplitude projetada reduzida pelo fator $\cos \Theta$, uma vez que o observador passa a visualizar o dipolo “de topo”, direção na qual não há emissão de energia. 33
- Figura 2.3 – Comparação das propriedades angulares de espalhamento para uma partícula esférica ($m = 1,33$) iluminada por $\lambda = 550$ nm. (Esquerda) Distribuição polar da intensidade espalhada normalizada. A curva preta tracejada representa o limite de Rayleigh (dipolo), caracterizado pela simetria frente-trás. As curvas coloridas ilustram o regime de Mie, evidenciando o surgimento de um forte lóbulo de espalhamento frontal à medida que o parâmetro de tamanho x aumenta. (Direita) Grau de polarização linear em função do ângulo de espalhamento. Enquanto o regime Rayleigh apresenta uma curva em forma de sino com polarização máxima ($P = 1$) em $\Theta = 90^\circ$, as partículas maiores no regime Mie exibem oscilações complexas e regiões de polarização negativa (inversão da componente dominante), decorrentes da interferência entre multipolos elétricos e magnéticos. 39

- Figura 2.4 – Sensibilidade das propriedades ópticas à forma da distribuição de tamanhos, considerando $r_{eff} = 1 \mu m$ e $v_{eff} = 0,25$. Esquerda: Quatro distribuições distintas (Gamma Padrão, Log-Normal, Bimodal e Lei de Potência). Centro: Função de Fase $P_{11}(\Theta)$. Note a similaridade entre as curvas, indicando dependência primária nos parâmetros efetivos. Direita: Grau de polarização linear. A polarimetria revela divergências significativas, especialmente para a Lei de Potência (verde). Os cálculos foram feitos para o índice de refração da água $m = 1,33$ e comprimento de onda $\lambda = 0,55 \mu m$ 41
- Figura 2.5 – Definição da geometria de espalhamento em uma atmosfera plano-paralela. O ângulo zenital de incidência é θ' e o ângulo de observação é θ para os feixes refletido I_r e transmitido I_t . A profundidade óptica τ é medida a partir do topo da atmosfera. Representamos também a convenção de sinal para u de acordo com Hulst (1981). 43
- Figura 2.6 – Representação esquemática do método *Adding-Doubling* para luz incidente no topo ($S_{inc}(\mu, \phi)$). Uma camada de profundidade óptica b' encontra-se superposta a uma camada de profundidade b'' , ambas isoladas no espaço (sem superfície refletiva na base). As setas indicam o fluxo de radiação difusa (ascendente ou descendente), em que as cores azul e vermelha representam a radiação transmitida e refletida, respectivamente. Os termos $S^{(i)}$ referem-se à radiação que atravessou a interface entre as duas camadas i vezes. 48
- Figura 2.7 – Comparação qualitativa dos perfis de reflexão em superfícies esféricas. À esquerda, uma superfície Lambertiana ideal, caracterizada por um espalhamento perfeitamente difuso, com parâmetro de rugosidade $R = 1$. À direita, três superfícies governadas pelas equações de Fresnel com diferentes graus de rugosidade macroscópica (aumentando da esquerda para a direita $R = 0,1$, $R = 0,25$ e $R = 0,5$). A rugosidade alarga o cone de reflexão especular, distribuindo o *glint* central por uma área maior da superfície. Imagem gerada utilizando o renderizador Cycles (Blender Online Community, 2025), adotando a distribuição de micro-facetas GGX como análoga visual ao modelo de Cox-Munk. A tonalidade em escala de cinza foi ajustada para representar o albedo típico em luz visível destes cenários astrofísicos: um albedo difuso elevado para a cobertura continental/desértica na esfera Lambertiana, e um fundo escuro absorvente característico do corpo d'água para as esferas de Fresnel. 56

- Figura 2.8 – Representação geométrica dos parâmetros orbitais e vetoriais do sistema. A estrela, em amarelo, situa-se na origem e o planeta, em azul, é representado em uma fase orbital arbitrária. Os ângulos fundamentais são classificados cromaticamente: em **vermelho**, os parâmetros de espalhamento (ângulo de fase α e ângulo de espalhamento Θ); em **azul**, os parâmetros orbitais (inclinação i , fase orbital Ψ , longitude do nó ascendente Ω , argumento do pericentro ω e anomalia verdadeira ν). A elipse define o plano orbital, enquanto o paralelogramo cinza centrado na estrela representa o plano do céu (perpendicular à linha de visada). A linha tracejada que atravessa a estrela indica a linha dos nós, definida pela intersecção entre os dois planos; visualmente, a porção tracejada da órbita localiza-se atrás do plano do céu, enquanto a parte contínua projeta-se à frente. A direção de referência para a polarização linear $+\hat{Q}'$ é paralela à normal do plano orbital, enquanto o estado ortogonal $-\hat{Q}'$ encontra-se contido neste plano. Por fim, as direções de referência do observador, $+\hat{Q}$ e $-\hat{Q}$, encontram-se no plano do céu, indicando as direções celestes Norte e Leste, respectivamente. 57
- Figura 2.9 – Esquema da geometria de reflexão no ponto O sobre o exoplaneta, com latitude δ e longitude ϑ . As quantidades r , θ , θ_0 e α representam o raio planetário, o ângulo zenital de observação, o ângulo zenital de incidência e o ângulo de fase planetário, respectivamente. O elemento de área cinza escuro (associado ao diferencial dO) representa a área no planeta subtendida pelo elemento de latitude $\Delta\delta$ e pelo elemento de longitude $\Delta\vartheta$ 60
- Figura 2.10 – Esquema da discretização do disco planetário visível através de uma malha de latitudes e longitudes (δ, ϑ) , abordagem natural para a modelagem numérica de exoplanetas heterogêneos. À esquerda, o planeta em fase gibosa ($\alpha = 60^\circ$); à direita, em fase crescente ($\alpha = 120^\circ$). A região sombreada escurecida representa o hemisfério noturno, delimitado pelo terminador. O elemento de área destacado em laranja ilustra um "pixel" isolado da malha (ΔO_{ij}), centrado nas coordenadas locais (δ_i, ϑ_j) , que permanece fixo na grade rotacional do planeta independentemente do avanço da fase. 61

- Figura 3.1 – Representação espacial da discretização geométrica do modelo do `Pryngles`. Em (a), a variação da porção iluminada do planeta em função da anomalia verdadeira (ν). Em (b), a visualização tridimensional da malha de *spangles* de um sistema planetário complexo, em que o algoritmo determina dinamicamente o estado de cada refletor local (iluminado em laranja, escuro em azul ou ocluído pela sombra de anéis e luas em verde) com base em sua exposição geométrica. 68
- Figura 3.2 – Mapas de disco resolvido para um modelo de planeta com superfície difusa homogênea (continentes) sob uma fase de $\alpha = 106^\circ$. Da esquerda para a direita: a máscara de configuração espacial definindo as propriedades locais da malha; a intensidade refletida normalizada ($\overline{F}_I$), evidenciando um decaimento suave do ponto subestelar em direção ao terminador; e o Grau de Polarização Linear (P_L) local originado pelo espalhamento atmosférico, predominante próximo ao terminador. O parâmetro t/T indicado nos painéis representa a fração temporal do período orbital. 69
- Figura 3.3 – Mapas de disco resolvido para um modelo de planeta com superfície oceânica homogênea com $v_{\text{vento}} = 7 \text{ m/s}$ sob uma fase de $\alpha = 106^\circ$. Da esquerda para a direita: a máscara de configuração espacial em azul indicando o corpo d'água; a intensidade refletida normalizada ($\overline{F}_I$), evidenciando o intenso pico direcional correspondente ao *glint* oceânico; e o Grau de Polarização Linear (P_L), revelando a forte polarização confinada à mesma região do *glint* devido à incidência próxima ao ângulo de Brewster. O parâmetro t/T indicado nos painéis representa a fração temporal do período orbital. 70
- Figura 3.4 – Validação geométrica do trânsito primário. À esquerda, a representação espacial do disco estelar e a silhueta geométrica projetada do exoplaneta no plano do céu do observador. À direita, no painel superior, a comparação entre a curva de luz gerada pela integração numérica discreta (`Pryngles`) e a solução analítica (`batman`). No painel inferior, os resíduos da subtração entre os modelos, evidenciando uma concordância da ordem de 10^{-2} ppm . A linha vertical vermelha indica o instante exato de tempo correspondente à projeção espacial exibida no quadro à esquerda. 75

- Figura 3.5 – Trânsito primário com eventos de *spot-crossing*. À esquerda, o disco estelar modelado com três manchas, e o disco planetário exatamente no centro do trânsito. À direita (topo), a curva de luz integrada pelo `Pryngles` (linha ciano) revela anomalias positivas de fluxo (*bumps*) nos instantes em que a silhueta do planeta cruza as manchas frias, divergindo do perfil contínuo de uma estrela sem manchas previsto pelo modelo `batman` (linha tracejada laranja). O painel inferior isola o resíduo gerado por essas estruturas, que atinge milhares de partes por milhão (ppm). 75
- Figura 3.6 – Evolução da complexidade morfológica do Ruído Perlin bidimensional em função do número de oitavas. O painel superior esquerdo exibe o campo escalar fundamental (uma única oitava), caracterizado por baixas frequências espaciais e transições suaves. Os painéis subsequentes ilustram o acúmulo de frequências mais altas e amplitudes menores (*Fractional Brownian Motion* com persistência de 0,5), gerando as estruturas em pequena escala necessárias para simular o aspecto de fractalidade de nuvens e massas continentais. Figura gerada com a função `pnoise2` da biblioteca `noise`. 77
- Figura 3.7 – Mapas de disco resolvido ($\alpha = 45^\circ$) para um exoplaneta rochoso gerado proceduralmente via Ruído Perlin 3D. Da esquerda para a direita: mapa de configuração da superfície, exibindo os domínios climáticos resultantes do cruzamento das frações de cobertura (continentes em verde, oceanos em azul e nuvens em branco); a intensidade refletida normalizada ($\overline{F_I}$); e o grau de polarização linear (P_L). O planeta foi modelado considerando coberturas continentais e de nuvens de 50% e 30%, respectivamente. 78
- Figura 3.8 – Mapas de disco resolvido ($\alpha = 45^\circ$) para um gigante gasoso gerado proceduralmente. A aplicação de um fator de escala anisotrópico no ruído induz a formação de bandas zonais paralelas ao equador (regiões em laranja no mapa de configuração). Da esquerda para a direita: mapa de configuração da superfície; intensidade refletida ($\overline{F_I}$); e grau de polarização linear (P_L). A função de suavização garante a mistura gradual dos vetores de Stokes nas fronteiras, simulando o cisalhamento atmosférico. 79

- Figura 3.9 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas simuladas para análogos terrestres homogêneos sob uma atmosfera limpa (dominada por espalhamento de Rayleigh). Os painéis exibem, em função do ângulo de fase α , o fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), os parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) normalizados pelo fluxo estelar incidente, e o grau de polarização linear (P_L). As simulações foram executadas no comprimento de onda efetivo da banda r do SDSS ($\lambda = 616,5$ nm). O comportamento da radiação espalhada é comparado para três condições de superfície: perfeitamente absorvedora (Lambertiana com $A_s = 0,0$, linha sólida), continente com reflexão difusa (Lambertiana com $A_s = 0,2$, linha tracejada) e oceano com reflexão especular e rugosidade induzida por vento (Fresnel com $v = 7$ m/s, linha traço-ponto). 81
- Figura 3.10 – Mapas espaciais de intensidade normalizada ($\overline{F}_I$) e parâmetros de polarização ($\overline{F}_Q$, $\overline{F}_U$ e P_L) evidenciando a quebra de simetria no disco resolvido. O modelo considera uma obliquidade de 30° e variações na taxa de achatamento ($f = 0,0,1,0,2$ e $0,3$). 83
- Figura 3.11 – Curvas de fase polarimétricas para o análogo atmosférico oblato sob uma obliquidade de 30° , em função do ângulo de fase α . As curvas demonstram a evolução do fluxo integrado para diferentes fatores de achatamento f 84
- Figura 3.12 – Mapas de intensidade e curvas de fase fotométricas e polarimétricas para o análogo atmosférico oblato sob diferentes valores de obliquidade, em função do ângulo de fase α . O parâmetro de achatamento foi fixado em $f = 0,2$. Os mapas de intensidade são utilizados apenas como ilustrativos da orientação do planeta. 85
- Figura 3.13 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento oceânico por diferentes frações de cobertura de nuvens (f_{nuv}). O painel superior ilustra a distribuição espacial das nuvens geradas via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α . 87
- Figura 3.14 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento oceânico por diferentes frações de cobertura continental (f_{cont}). O painel superior ilustra a distribuição espacial de continentes gerados via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α 89

- Figura 3.15 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento por diferentes frações de cobertura de nuvens (f_{nuv}) sobre um planeta com cobertura continental fixa ($f_{cont} = 50\%$). O painel superior ilustra a distribuição espacial de continentes e nuvens gerados via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α . 90
- Figura 3.16 – Curvas de fase fotométricas ($\overline{F}_I$) e polarimétricas ($\overline{F}_Q, \overline{F}_U, P_L$) para um planeta terrestre procedural sob diferentes taxas de rotação sideral (P_{rot}). Um deslocamento vertical (*offset*) foi aplicado às curvas para facilitar a distinção visual entre os modelos dinâmicos e o cenário de referência. 91
- Figura 3.17 – Periodogramas de Lomb-Scargle aplicados ao fluxo fotométrico ($\overline{F}_I$) e ao parâmetro polarimétrico ($\overline{F}_U$) para as simulações com $P_{rot} = 10, 25, 50$ e 100 dias. A linha vertical tracejada vermelha indica o período sideral injetado (P_{rot}), enquanto as linhas pontilhadas verdes demarcam as bandas laterais correspondentes aos períodos sinódicos prógrado e retrógrado. A linha horizontal traço-ponto representa o limiar de probabilidade de falso alarme (FAP) de 5%. 92
- Figura 3.18 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um exoplaneta gigante gasoso de Classe I (nuvens de amônia) em função da cobertura atmosférica. Os gráficos exibem a intensidade refletida normalizada, o grau de polarização linear e os parâmetros de Stokes fracionais em função da fração de cobertura de bandas latitudinais (f_{band}). Os mapas planetários acima dos painéis ilustram a distribuição espacial das zonas (claras) e cinturões (escuros) para cada incremento na variável f_{band} 95
- Figura 3.19 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um exoplaneta gigante gasoso de Classe II (nuvens de água) em função da cobertura atmosférica. Semelhante à Figura 3.18, os gráficos acompanham a evolução da intensidade e dos parâmetros de polarização conforme a transição morfológica de um planeta coberto unicamente por zonas ($f_{band} = 0\%$) passa para um planeta dominado por bandas de subsidência ($f_{band} = 100\%$). . 96
- Figura 3.20 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um modelo de Júpiter estruturado a partir de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000). Semelhante à Figura 3.18, os gráficos acompanham a evolução da intensidade e dos parâmetros de polarização conforme a transição morfológica de um planeta coberto unicamente por zonas ($f_{band} = 0\%$) passa para um planeta dominado por bandas de subsidência ($f_{band} = 100\%$). 98

- Figura 3.21 – Mapas espacialmente resolvidos do modelo detalhado de Júpiter, simulados para as bandas fotométricas SDSS- g , r , i e z num ângulo de fase baixo ($\alpha = 10^\circ$). A malha de visualização está dividida em três colunas: à esquerda, a configuração morfológica do disco (zonas claras e cinturões escuros); ao centro, a intensidade refletida normalizada ($\overline{F}_I$); e à direita, o grau de polarização linear (P_L). A malha ilustra a dependência do contraste polarimétrico latitudinal em função do comprimento de onda. Na banda g , o espalhamento Rayleigh sobrejacente aos cinturões domina a polarização do disco; nas bandas mais longas (i e z), a quebra na eficiência de Rayleigh diminui o contraste entre as zonas e os cinturões. 99
- Figura 3.22 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b. À esquerda, são apresentados o mapa de configuração da estrela sob a perspectiva do observador e as curvas de fluxo normalizado e de resíduo. À direita, ilustram-se as curvas para os parâmetros de Stokes $q = Q/I$ e $u = U/I$, além do grau de polarização linear P_L , todos normalizados em relação à intensidade estelar. A linha vertical em vermelho ilustra a posição do planeta nas curvas. As legendas e o resíduo referem-se à comparação entre o modelo de referência esférico e sem manchas e o modelo alvo avaliado, que, neste caso de validação, são idênticos. 101
- Figura 3.23 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, em que o modelo de referência é mantido com $\Omega = 90^\circ$ e o modelo alvo é rotacionado para $\Omega = 180^\circ$ 102
- Figura 3.24 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, porém com a inclinação orbital modificada para $i = 86^\circ$. O modelo de referência é isento de manchas, enquanto o modelo alvo apresenta uma região ativa nas coordenadas estelares $(-10^\circ, -10^\circ)$ 103
- Figura 3.25 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o cruzamento sobre uma mancha localizada próxima ao limbo, nas coordenadas estelares $(-25^\circ, -45^\circ)$ 103
- Figura 3.26 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, ilustrando um cenário sem *spot-crossing* direto, onde a mancha encontra-se nas coordenadas estelares $(50^\circ, 30^\circ)$ 104
- Figura 3.27 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, ilustrando o impacto morfológico do achatamento planetário. O modelo de referência assume um exoplaneta esférico, enquanto o modelo alvo adota um planeta oblato com achatamento $f = 0,3$ e obliquidade $\psi = 0^\circ$. Ambos os corpos foram modelados de forma a conservar a exata mesma área de bloqueio projetada. O círculo tracejado na visão do observador representa o planeta esférico. 105

- Figura 3.28 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblato ($f = 0,3$) com a obliquidade projetada modificada para $\psi = 90^\circ$ (alinhamento polar transversal). 106
- Figura 3.29 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblato ($f = 0,3$) com a obliquidade projetada modificada para $\psi = 45^\circ$. O painel sobrepõe múltiplas simulações para evidenciar a dependência espectral dos sinais fotométricos e polarimétricos em função de diferentes comprimentos de onda, de $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ a $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ 106
- Figura 3.30 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblato ($f = 0,3$) em $\psi = 45^\circ$. Neste cenário, o painel mantém o comprimento de onda fixo ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$) e ilustra a resposta da morfologia e amplitude dos sinais em função da temperatura efetiva (T_{eff}) da estrela, de $T_{\text{eff}} = 4500 \text{ K}$ a $T_{\text{eff}} = 6500 \text{ K}$ 107
- Figura 4.1 – Campo de visão calibrado para as observações do sistema K2-131 nos quatro canais do polarímetro SPARC4. O alvo principal (K2-131) encontra-se em destaque, juntamente com as três estrelas de referência (Comp 1, 2 e 3) selecionadas para a etapa de fotometria diferencial. A natureza polarimétrica de duplo feixe do instrumento é evidenciada pela duplicação de cada fonte luminosa no detector, correspondendo às projeções simultâneas e ortogonais dos feixes ordinário (F_o) e extraordinário (F_e). 111
- Figura 4.2 – Série temporal fotométrica do sistema K2-131 obtida no canal 2 (banda r) do instrumento SPARC4. O gráfico apresenta o fluxo relativo normalizado em função do tempo contínuo (BJD), destacando em cores distintas as diferentes noites que compõem a campanha observacional. A linha tracejada indica o nível de referência basal unitário, e o valor do desvio padrão global (σ) reflete a dispersão dos dados previamente à etapa de descorrelação instrumental (*detrending*). 113
- Figura 4.3 – Série temporal polarimétrica do sistema K2-131 correspondente ao canal 2 (banda r). Os painéis ilustram, de cima para baixo, a evolução temporal dos parâmetros de Stokes normalizados (q e u) e o grau de polarização linear total (P_L). Os dados apresentados já contemplam as correções vetoriais referentes à polarização instrumental (IP) e à polarização interestelar (ISP). As anotações inseridas em cada painel indicam os respectivos desvios padrão (σ) medidos ao longo de toda a campanha. 114

Figura 4.4 – Correlação entre o fluxo fotométrico relativo bruto e a massa de ar para o sistema K2-131 (Canal 2, noite de 02/06/2025). A forte dependência com a extinção atmosférica ao longo das observações é evidenciada pela linha tracejada em vermelho, que representa o ajuste linear aos dados. O valor de r indica o coeficiente de correlação de Pearson.	114
Figura 4.5 – Periodogramas de Lomb-Scargle para o Canal 2 (banda r). De cima para baixo apresentam-se os espectros de potência da curva de luz, dos parâmetros de Stokes q e u , e a função janela espectral. A linha azul pontilhada indica o período orbital do planeta K2-131b e a linha vermelha tracejada o limiar de 1% de probabilidade de falso alarme (FAP). . .	116
Figura 4.6 – Curva de fase fotométrica (Canal 2) em fase com o período orbital de 0,37 dias. As linhas tracejadas em roxo delimitam os tempos previstos de ingresso e egresso do trânsito. Os pontos em cinza representam as medições individuais, enquanto os círculos pretos indicam a binagem mediana. A linha horizontal laranja representa a profundidade do trânsito (~ 400 ppm) reportada por Dai et al. (2017).	117
Figura 4.7 – Curvas de fase polarimétricas para os parâmetros de Stokes q e u , e o grau de polarização linear corrigido (P_{corr}). A aplicação da correção do viés de Rice assegura que os limites superiores de polarização sejam consistentes com o nível de ruído instrumental.	118
Figura 4.8 – Curvas de fase fotométricas simuladas para o sistema K2-131b sob três cenários físicos distintos. À esquerda, o fluxo relativo evidenciando o evento de trânsito primário em fase 0,0 e o eclipse secundário em fase 0,4 – 0,5. À direita, uma ampliação focada no eclipse secundário (fase $\approx 0,5$), ilustrando a transição do fluxo refletido na fase planetária cheia para a ocultação total pela estrela. As simulações assumem normalização conjunta (estrela+planeta) e desconsideram a emissão térmica no hemisfério diurno.	119
Figura 4.9 – Curvas de fase polarimétricas teóricas resultantes do <i>Forward Modeling</i> do exoplaneta K2-131b. Os painéis detalham, de cima para baixo, os parâmetros de Stokes normalizados (q e u) e o grau de polarização linear (P_L) em função da fase orbital. As diferentes curvas representam os três cenários avaliados: oceano de magma em uma atmosfera tênue, atmosfera espessa de Rayleigh ($p \approx 50$ bar) e nuvens de condensados minerais ($\tau \geq 10$).	120

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	O FORMALISMO DA LUZ POLARIZADA	25
2.1.1	Regimes de Polarização Particulares	27
2.2	ESPALHAMENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS	29
2.2.1	Mecânica do Espalhamento Único	30
2.2.2	Espalhamento Rayleigh	31
2.2.3	Espalhamento Mie	35
2.3	TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM ATMOSFERAS PLANETÁRIAS	41
2.3.1	Forma Geral da Equação de Transporte Radiativo	43
2.3.2	Matrizes de Espalhamento Múltiplo	45
2.3.3	O Método <i>Adding-Doubling</i>	47
2.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE	52
2.4.1	Superfície Lambertiana	53
2.4.2	Superfície Oceânica e o Modelo de Cox-Munk	53
2.5	GEOMETRIA ORBITAL	56
2.5.1	Integração do Sinal Planetário	59
2.5.2	Efeitos Geométricos Adicionais	61
3	METODOLOGIA COMPUTACIONAL E VALIDAÇÃO FÍSICA	64
3.1	TRANSFERÊNCIA RADIATIVA GLOBAL: O CÓDIGO <code>PyMieDAP</code>	64
3.1.1	Construção da Atmosfera Planetária e Integração Numérica	64
3.1.2	Adaptação das Condições de Contorno: Superfície Oceânica	65
3.2	INTEGRAÇÃO GLOBAL E DINÂMICA: O CÓDIGO <code>Pryngles</code>	66
3.2.1	O <i>Pipeline</i> de Acoplamento Polarimétrico	66
3.2.2	Mapas de Polarização	68
3.2.3	Implementação do Achatamento Planetário	70
3.2.4	Cinemática e Rotação Planetária	72
3.2.5	Trânsito, Polarização de Limbo e Manchas Estelares	73
3.3	MODELAGEM DE HETEROGENEIDADES VIA TEXTURAS PROCEDURAIS	76
3.3.1	Planetas Rochosos: Fronteiras Discretas e Fração de Cobertura	77
3.3.2	Gigantes Gasosos: Bandas Longitudinais e Transições Suaves	78
3.4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E CASOS DE ESTUDO	80
3.4.1	Análogos Terrestres Homogêneos: Superfícies sob uma Atmosfera Limpa	80

3.4.2	Quebra de Simetria por Achatamento e Obliquidade	82
3.4.3	Variação de Cobertura Superficial e Atmosférica	85
3.4.4	Modulação Rotacional	89
3.4.5	Dinâmica Atmosférica em Gigantes Gasosos	93
3.4.6	Assinaturas Polarimétricas no Trânsito: Manchas e Achatamento	100
4	OBSERVAÇÕES E ANÁLISE DO SISTEMA K2-131	108
4.1	INSTRUMENTAÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS	108
4.2	O SISTEMA K2-131	109
4.3	TRATAMENTO DE DADOS	110
4.4	MODELAGEM DIRETA DO SISTEMA K2-131	115
5	DISCUSSÕES FINAIS E CONCLUSÕES	121
5.1	O LEGADO COMPUTACIONAL	121
5.2	O SISTEMA K2-131 E OS LIMITES DA INSTRUMENTAÇÃO ATUAL	122
5.3	PERSPECTIVAS FUTURAS	122
	REFERÊNCIAS	130

1 INTRODUÇÃO

Desde a descoberta dos primeiros planetas extrassolares (ou exoplanetas) nas décadas de 1980 e 1990 (Campbell; Walker; Yang, 1988; Wolszczan; Frail, 1992; Mayor; Queloz, 1995), a Exoplanetologia vem se consolidando como uma das áreas da astronomia de crescimento mais acelerado. Em seus anos iniciais, o estudo desses objetos teve como foco principal o desenvolvimento de métodos de detecção, o que resultou diretamente na descoberta de milhares de novos mundos. No entanto, a partir do início do século XXI, um grande esforço tem sido empregado na construção de técnicas de caracterização cada vez mais sofisticadas e eficientes, capazes de fornecer informações que transcendem a simples existência do planeta.

Os métodos de caracterização atualmente predominantes, como a fotometria de banda larga e a espectroscopia, permitem a determinação de diversas propriedades físicas e químicas em exoplanetas, tais como parâmetros geométricos, a presença de atmosfera e nuvens, e a composição geral do envelope gasoso. No entanto, essas técnicas apresentam limitações importantes, incluindo a dependência de configurações orbitais específicas, a dificuldade de explorar camadas mais profundas da atmosfera e, crucialmente, a degenerescência inerente aos modelos atmosféricos, o que dificulta a inferência precisa da composição química em atmosferas complexas (Stam; Hovenier; Waters, 2004).

Nesse contexto, a polarimetria apresenta-se como uma ferramenta poderosa, frequentemente descrita como “ortogonal” à fotometria e à espectroscopia. Por ser sensível às propriedades vetoriais da luz, a polarimetria fornece informações que são complementares às obtidas por métodos baseados apenas na intensidade do fluxo. Essa sensibilidade única às características físicas do meio onde a luz se originou ou foi espalhada permite determinar propriedades de nuvens e atmosferas planetárias que seriam inacessíveis de outra forma, como o tamanho, formato e composição química das partículas espalhadoras. Mais ainda, a polarimetria possibilita a caracterização da estrutura geral e da estratificação da atmosfera de um exoplaneta sem a necessidade de que este seja espacialmente resolvido (Tinbergen, 1996).

Apesar de seu vasto potencial científico, a polarimetria permanece uma técnica historicamente subexplorada na astronomia óptica, não por falta de casos científicos relevantes, mas devido a impedimentos técnicos significativos quando comparada a métodos clássicos. A implementação de modos polarimétricos exige um design instrumental cuidadoso, visto que a técnica é suscetível a erros sistemáticos e polarizações espúrias introduzidas pela própria ótica do telescópio. Além disso, a polarimetria é uma técnica que demanda uma alta razão sinal-ruído, exigindo telescópios de grande abertura e instrumentos de alta eficiência para mitigar a perda de fluxo inerente ao uso de polarizadores e filtros.

A aplicação da polarimetria na astronomia remonta ao início do século XIX, com as observações do “Grande Cometa” de 1819. Tais medidas permitiram a François Arago concluir que parte da luz proveniente do cometa era luz refletida (Arago, 1820), fundamentando-se na

descoberta prévia de Étienne-Louis Malus de que a reflexão da luz induz polarização (Malus, 1809). Um século depois, em 1929, Bernard Lyot analisou detalhadamente a luz refletida pela Lua e por planetas do Sistema Solar (Lyot, 1929). Suas medições levaram à descoberta do regime de polarização negativa: um estado no qual a intensidade da componente elétrica paralela ao plano de espalhamento supera a perpendicular, fenômeno hoje reconhecido como ubíquo em corpos sem atmosfera (como asteroides e luas) em baixos ângulos de fase, como descrito em Shkuratov et al. (1994).

As décadas seguintes testemunharam o acelerado desenvolvimento da polarimetria em diversas áreas da astronomia, abrangendo desde a detecção de polarização na galáxia M31 por Yngve Öhman em 1942, até a descoberta de campos magnéticos intensos em estrelas do tipo A por H. W. Babcock em 1947. Outro marco fundamental foi a identificação de intensa polarização devido à radiação síncrotron na Nebulosa do Caranguejo por V. A. Dombrovskij em 1954 (Gehrels et al., 1974).

Paralelamente às descobertas em objetos estelares e galácticos, a teoria necessária para a interpretação do espalhamento em atmosferas planetárias foi desenvolvida consideravelmente durante o século XX. O trabalho seminal de Subrahmanyan Chandrasekhar sobre a transferência radiativa vetorial (Chandrasekhar, 1960) forneceu a base matemática rigorosa para descrever como a luz interage com meios espalhadores. Nas décadas seguintes, esse formalismo foi aplicado com sucesso ao Sistema Solar por autores como Hansen e Hovenier. Um dos maiores triunfos dessa era foi a determinação precisa das propriedades microfísicas (tamanho, formato e índice de refração) das nuvens de ácido sulfúrico de Vênus, realizada exclusivamente através de curvas de fase polarimétricas, muito antes de sondas *in situ* confirmarem tais características (Hansen; Hovenier, 1974).

Com a descoberta dos primeiros exoplanetas, tornou-se natural questionar se as técnicas de caracterização polarimétrica, tão bem-sucedidas em Vênus, poderiam ser aplicadas a esses novos mundos. No entanto, diferentemente dos planetas do Sistema Solar, exoplanetas não são resolvidos espacialmente; o sinal observável é o fluxo integrado de todo o disco planetário. Nesse regime, a simetria esférica do planeta tende a cancelar grande parte dos vetores de polarização, resultando em sinais extremamente tênues. Trabalhos teóricos pioneiros, como os de Seager, Whitney e Sassellov (Seager; Whitney; Sassellov, 2000), adaptaram o formalismo de transferência radiativa para este cenário, prevendo que planetas gigantes próximos de suas estrelas (Júpiteres Quentes) poderiam apresentar graus de polarização na ordem de partes por milhão (ppm), dependendo do tamanho das partículas nas nuvens e da geometria orbital.

Motivados por essas previsões, diversos esforços observacionais foram iniciados para detectar a luz polarizada refletida por exoplanetas. Um marco notável foi o trabalho pioneiro de Berdyugina et al. (2008), que reportou a detecção de polarização em três bandas simultâneas para o exoplaneta HD189733b, sugerindo a presença de um céu azul profundo dominado por espalhamento Rayleigh e partículas de condensado submicrométricas. Embora, durante anos, a confirmação dessas medidas tenha permanecido desafiadora e sujeita a debates na literatura,

sobretudo devido aos severos limites instrumentais e erros sistemáticos, como evidenciado pela não-deteção independente de Wiktorowicz (2009), esse cenário foi recentemente elucidado. A assinatura polarimétrica do HD189733b foi confirmada de forma conclusiva por Wiktorowicz et al. (2025) através de observações conjuntas dos telescópios Gemini Norte e Lick, revelando também a presença de nuvens de silicatos em sua atmosfera. Este caso representa, até o presente momento, a única detecção empírica inequívoca de luz polarizada refletida em um exoplaneta espacialmente não-resolvido, embora aplicações observacionais semelhantes já tenham sido realizadas com sucesso no contexto de anãs marrons (Millar-Blanchaer et al., 2020).

Enquanto os gigantes gasosos dominaram as primeiras tentativas de detecção devido aos seus grandes raios e albedos, os exoplanetas rochosos representam grande parte do interesse atual em relação à caracterização polarimétrica e especialmente à busca por exoplanetas habitáveis. Para esses corpos, especialmente aqueles com atmosferas tênues ou inexistentes, a polarização da luz refletida vai além do espalhamento atmosférico e depende consideravelmente da interação direta da luz com a superfície planetária. Diferentes composições superficiais, como oceanos de magma, crostas de silicato ou oceanos de água líquida, possuem assinaturas polarimétricas distintas, governadas pelo índice de refração e pela estrutura física do material (Zugger et al., 2010). Dessa forma, a polarimetria oferece uma das poucas vias observacionais para distinguir, por exemplo, entre um mundo oceânico e um planeta desértico, um cenário em que a fotometria isolada frequentemente falha devido à degenerescência dos albedos, como descrito em detalhe em Wang, Fujii e He (2022).

Durante o século XXI, o foco da área se expandiu para a modelagem de cenários mais complexos. Trabalhos como os de Stam, Hovenier e Waters (2004) e Mahapatra et al. (2023) têm refinado modelos numéricos para incluir efeitos de não-homogeneidade, como a presença de oceanos, continentes e coberturas de nuvens parciais em exoplanetas rochosos e gasosos. Essas simulações indicam que a quebra da simetria do disco, causada por essas características, pode aumentar significativamente o sinal polarimétrico, especialmente em fases específicas, e revelar propriedades da superfície e da dinâmica atmosférica que seriam invisíveis à fotometria tradicional.

Apesar desses avanços teóricos, a transição entre modelos unidimensionais idealizados e simulações globais tridimensionais dinâmicas esbarra em uma limitação técnica crítica: a escassez de ferramentas computacionais de código aberto que sejam simultaneamente rigorosas no tratamento da transferência radiativa vetorial e versáteis na parametrização espacial do sistema. É neste contexto de refinamento numérico e de exploração observacional que este trabalho se insere.

Dessa forma, a presente dissertação foi estruturada sob duas frentes de pesquisa distintas, porém complementares, por meio da aplicação da polarimetria óptica à exoplanetologia:

- a) **frente teórico-computacional:** tem como objetivo desenvolver e estruturar um *pipeline* numérico flexível, através da integração e expansão dos códigos `PyMieDAP` (Rossi; Berzosa-Molina; Stam, 2018) e `Pryngles` (Zuluaga; Sucerquia; Alvarado-

Montes, 2022), capaz de modelar o fluxo polarizado integrado de exoplanetas espacialmente heterogêneos. Esta ferramenta visa suprir a lacuna computacional na simulação de corpos com oceanos líquidos, atmosferas estratificadas e dinâmicas rotacionais, preparando o terreno interpretativo para observações de alta precisão da próxima geração de telescópios;

- b) **frente observacional:** tem como objetivo testar a robustez e os limites empíricos atuais da técnica polarimétrica no Brasil através da busca por luz refletida em mundos extremos. Para tal, apresenta a campanha de observação do exoplaneta rochoso de período ultracurto (USP) K2-131b, conduzida com o instrumento SPARC4 no Observatório do Pico dos Dias, visando restringir a sensibilidade instrumental para a detecção de luz refletida deste sistema em que a presença de uma atmosfera espessa é improvável, cenário no qual os efeitos superficiais e o espalhamento único molecular potencialmente se destacam.

Por fim, esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

- a) **capítulo 2:** apresenta a fundamentação teórica necessária, abordando o formalismo de Stokes, a física do espalhamento de luz (teorias de Mie e Rayleigh) e os princípios da transferência radiativa em atmosferas planetárias;
- b) **capítulo 3:** detalha a metodologia computacional, descrevendo a arquitetura e a expansão dos códigos PyMieDAP e Pryngles. Este capítulo inclui a implementação de modelos de superfícies heterogêneas e efeitos geométricos e apresenta experimentos numéricos que demonstram a sensibilidade da polarimetria a diferentes cenários planetários;
- c) **capítulo 4:** descreve a campanha observacional do alvo K2-131b realizada com o instrumento SPARC4, incluindo os processos de redução de dados, análise estatística e a determinação dos limites instrumentais de detecção.
- d) **capítulo 5:** apresenta as conclusões finais do trabalho e delineia as perspectivas futuras tanto para a modelagem numérica quanto para a observação polarimétrica de exoplanetas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A interpretação física de observações polarimétricas, assim como o desenvolvimento de modelos numéricos capazes de prever sinais de espalhamento em exoplanetas, exige uma análise detalhada da natureza vetorial da luz e sua interação com a matéria. Enquanto a fotometria convencional trata do transporte de energia como uma grandeza escalar, a polarimetria requer o tratamento do transporte do estado de polarização, o que pode ser feito diretamente através das equações de Maxwell e da transferência radiativa vetorial.

Neste capítulo, estabelecemos o alicerce físico-matemático necessário para a construção dos modelos computacionais e análises observacionais desenvolvidas nesta dissertação. A presente discussão foi estruturada de forma a acompanhar o aumento de complexidade do tratamento físico, partindo da definição fundamental de ondas eletromagnéticas até a interpretação do sinal integrado de um corpo planetário.

Inicialmente, na Seção 2.1, definimos o formalismo da luz polarizada, introduzindo os Parâmetros de Stokes como ferramentas essenciais para quantificar a polarização. Em seguida, na Seção 2.2, abordamos as características microfísicas relacionadas ao espalhamento e a formulação das matrizes de espalhamento, detalhando a interação da luz com partículas que vão desde o regime de Rayleigh (molecular) até a teoria de Mie (aerossóis).

Na Seção 2.3, passamos ao tratamento macroscópico ao discutir a propagação da luz através de atmosferas espessas, em que o fenômeno de múltiplo espalhamento se torna evidente, assim como os mecanismos de polarização em superfícies. Adicionalmente, na Seção 2.4, discutimos as adaptações necessárias para tratar de superfícies com diferentes propriedades de reflexão. E por fim, na Seção 2.5, aplicamos a teoria ao cenário planetário ao definir as características geométricas da observação e a integração do sinal sobre todo o disco planetário.

2.1 O FORMALISMO DA LUZ POLARIZADA

A radiação eletromagnética pode ser descrita classicamente a partir da oscilação do campo elétrico (e magnético) no plano transversal à direção de propagação. Para uma onda plana monocromática ideal com frequência angular ω , que se propaga na direção z , o vetor campo elétrico $\vec{E}$ reside no plano xy e pode ser decomposto em duas componentes ortogonais, cujos valores instantâneos oscilam no tempo. Seguindo a formulação clássica de Chandrasekhar (1960), podemos representar essas componentes como:

$$E_x = E_{x,0} \sin(\omega t - \phi_x) \quad \text{e} \quad E_y = E_{y,0} \sin(\omega t - \phi_y), \quad (2.1)$$

em que $E_{x,0}$ e $E_{y,0}$ são as amplitudes de cada componente, e ϕ_x e ϕ_y suas fases. Ao discutir a polarização de uma onda eletromagnética, nos referimos diretamente à relação entre as amplitudes e fases das componentes do campo elétrico. Considerando apenas a diferença de fase

relativa δ , podemos reescrever a Equação 2.1 da seguinte maneira:

$$E_x = E_{x,0} \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad E_y = E_{y,0} \sin(\omega t - \delta). \quad (2.2)$$

Para determinar experimentalmente o estado de polarização, é comum introduzir no caminho óptico um elemento retardador de fase (como uma lâmina de onda) seguido de um analisador. Matematicamente, introduzimos uma fase adicional arbitrária ϵ na componente y :

$$E_x = E_{x,0} \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad E_y = E_{y,0} \sin(\omega t - \delta - \epsilon). \quad (2.3)$$

Ao projetarmos essas oscilações sobre o eixo de transmissão de um polarizador orientado a um ângulo ψ em relação ao eixo x , o campo elétrico resultante é dado por:

$$\begin{aligned} E(t; \psi, \epsilon) &= E_{x,0} \sin(\omega t) \cos \psi + E_{y,0} \sin(\omega t - \delta - \epsilon) \sin \psi \\ &= [E_{x,0} \cos \psi + E_{y,0} \cos(\delta + \epsilon) \sin \psi] \sin \omega t \\ &\quad - [E_{y,0} \sin(\delta + \epsilon) \sin \psi] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A intensidade momentânea detectada após a passagem por esse sistema óptico é proporcional ao quadrado da amplitude resultante:

$$\begin{aligned} I(\psi; \epsilon) \propto E^2(\psi; \epsilon) &= [E_{x,0}]^2 \cos^2 \psi + [E_{y,0}]^2 \sin^2 \psi \\ &\quad + 2E_{x,0}E_{y,0}[\cos \delta \cos \epsilon - \sin \delta \sin \epsilon] \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Na prática, no entanto, não é possível determinar as amplitudes e fases momentâneas de uma onda real, pois a radiação astrofísica é composta pela superposição de múltiplos emissores incoerentes. O observável físico é a média temporal da intensidade. Aplicando a média temporal $\langle \dots \rangle$ à Equação 2.5, obtemos:

$$\begin{aligned} I(\psi; \epsilon) \propto \langle E_{x,0}^2 \rangle \cos^2 \psi &+ \langle E_{y,0}^2 \rangle \sin^2 \psi \\ &+ \{2\langle E_{x,0}E_{y,0} \cos \delta \rangle \cos \epsilon - 2\langle E_{x,0}E_{y,0} \sin \delta \rangle \sin \epsilon\} \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta equação pode ser simplificada definindo-se um conjunto de quatro quantidades, conhecidas como Parâmetros de Stokes, também comumente combinadas através do Vetor de Stokes:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_{x,0}^2 \rangle + \langle E_{y,0}^2 \rangle \\ \langle E_{x,0}^2 \rangle - \langle E_{y,0}^2 \rangle \\ 2\langle E_{x,0} E_{y,0} \cos \delta \rangle \\ 2\langle E_{x,0} E_{y,0} \sin \delta \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Substituindo essas definições na Equação 2.6 e utilizando identidades trigonométricas de arco duplo ($2 \sin \psi \cos \psi = \sin 2\psi$, etc.), obtemos a expressão fundamental para a intensidade da radiação quase-monocromática arbitrariamente polarizada:

$$I(\psi; \epsilon) = \frac{1}{2}[I + Q \cos 2\psi + (U \cos \epsilon - V \sin \epsilon) \sin 2\psi]. \quad (2.8)$$

Desta forma, o estado polarimétrico é completamente determinado pela relação entre intensidades em diferentes configurações de ψ (orientação do polarizador) e ϵ (retardador).

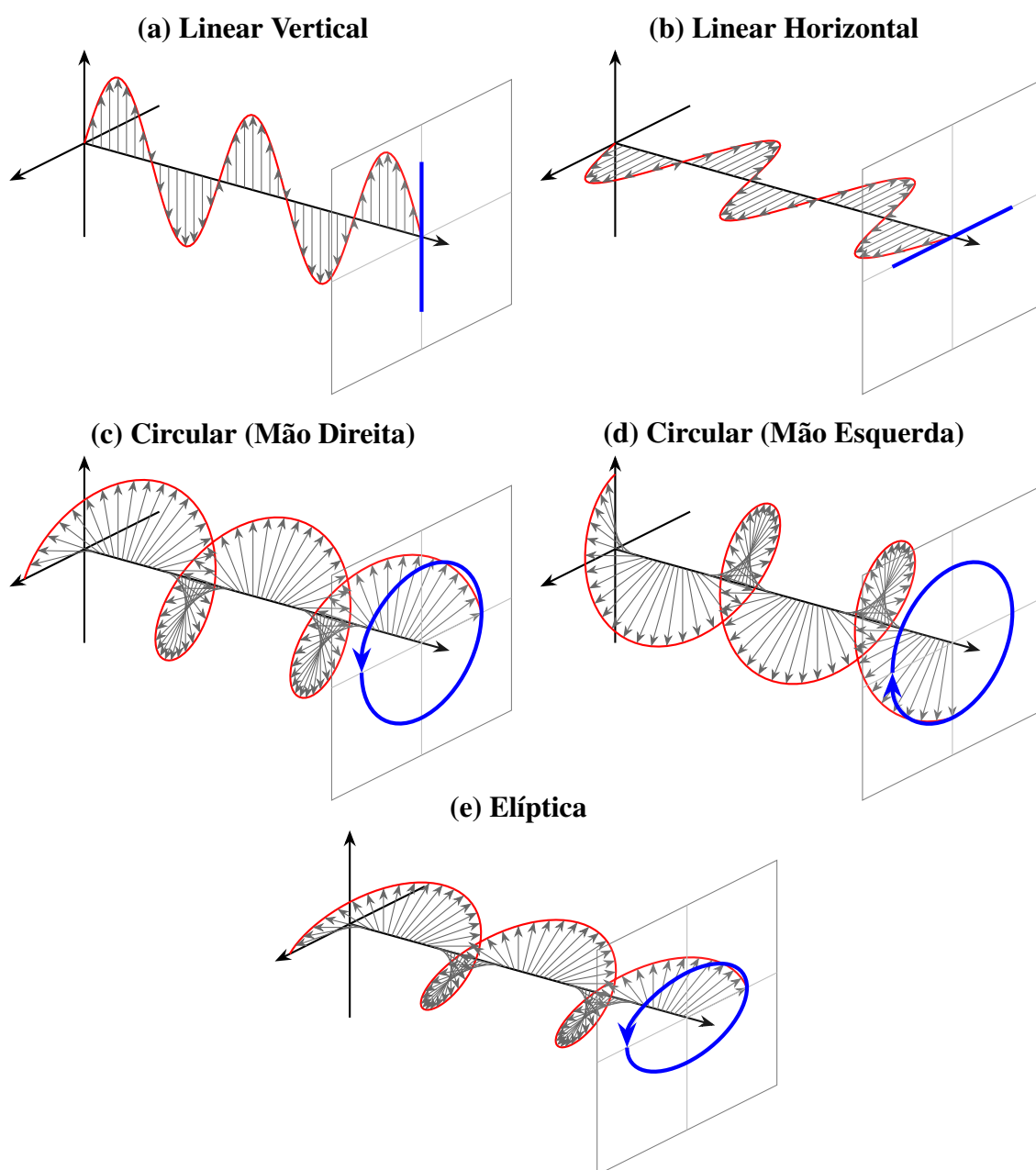
2.1.1 Regimes de Polarização Particulares

A grande vantagem do formalismo de Stokes reside na sua capacidade de descrever fenomenologicamente qualquer estado de polarização através de quantidades mensuráveis. Analisando as definições na Equação 2.7, percebe-se que os valores relativos de Q , U e V dependem intrinsecamente da diferença de fase média δ e das amplitudes das componentes ortogonais.

Podemos, portanto, classificar a luz em três regimes geométricos distintos, dependendo de como a ponta do vetor elétrico descreve sua trajetória no plano transversal ao longo do tempo, como é possível ver também na Figura 2.1:

- a) **polarização linear:** ocorre quando a diferença de fase entre as componentes ortogonais é um múltiplo inteiro de π . Nestas condições, o termo seno na definição de V (Equação 2.7) se anula, resultando em $V = 0$. A elipse de polarização degenera em um segmento de reta (painéis **(a)** e **(b)** da Figura 2.1). O vetor campo elétrico oscila em um plano fixo, cuja orientação (ângulo de azimuth ψ) é determinada pela razão entre Q e U ;
- b) **polarização circular:** representa o caso em que as amplitudes das componentes ortogonais são iguais ($\langle E_{x,0}^2 \rangle = \langle E_{y,0}^2 \rangle$, logo $Q = 0$) e a diferença de fase é um múltiplo ímpar de $\pi/2$ ($\delta = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$). Consequentemente, o termo cosseno em U se anula ($U = 0$) e o módulo de V torna-se máximo ($|V| = I$). Fisicamente, o vetor elétrico mantém magnitude constante, mas sua direção rotaciona uniformemente com a frequência da onda. O sinal de V determina a quiralidade (ou helicidade): por convenção na óptica clássica, $V > 0$ indica polarização circular à direita (sentido horário para um observador olhando para a fonte), enquanto $V < 0$ indica circular à esquerda (painéis **(c)** e **(d)** da Figura 2.1);
- c) **polarização elíptica:** é o caso mais geral, em que $V \neq 0$ e as amplitudes ou fases não satisfazem as condições de simetria da polarização circular. O vetor elétrico descreve

Figura 2.1 – Representação esquemática dos estados de polarização de uma onda eletromagnética que se propaga ao longo do eixo z . Em vermelho vemos a trajetória da ponta do vetor campo elétrico instantâneo. **(a)** e **(b)** Polarização Linear (Vertical e Horizontal): as componentes ortogonais oscilam em fase ($\delta = n\pi$), confinando o campo a um plano. **(c)** e **(d)** Polarização Circular (Mão Direita e Esquerda): resultantes de componentes com amplitudes iguais e defasagem de $\delta = \pm\pi/2$. O vetor elétrico mantém magnitude constante, descrevendo uma hélice ao longo da propagação e confinada a um envelope cilíndrico. **(e)** Polarização Elíptica: caso mais geral em que as amplitudes diferem e/ou a defasagem é arbitrária. Em todos os painéis, o plano translúcido na extremidade direita ilustra a projeção transversal da oscilação (a figura de polarização) conforme percebida por um observador olhando em direção à fonte, com setas azuis indicando o sentido de rotação temporal do vetor.



Fonte: O autor.

uma elipse completa a cada ciclo (painel **(e)** da Figura 2.1). A forma e a orientação dessa elipse são comumente parametrizadas por dois ângulos auxiliares: o ângulo de

elipticidade χ (que define o “achatamento” da elipse, variando de -45° a $+45^\circ$) e o ângulo de azimute ψ (que define a inclinação do eixo maior da elipse no plano, $0^\circ \leq \psi < 180^\circ$).

As relações entre os parâmetros de Stokes e a geometria da elipse de polarização são dadas por (Chandrasekhar, 1960):

$$\begin{aligned} Q &= I \cos(2\chi) \cos(2\psi), \\ U &= I \cos(2\chi) \sin(2\psi), \\ V &= I \sin(2\chi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

É importante ressaltar que, enquanto a intensidade total I e o grau de polarização total P são invariantes rotacionais, os parâmetros Q e U dependem estritamente do sistema de coordenadas adotado. A orientação do eixo de referência para $+Q$ (geralmente o Norte Celeste em astronomia ou o eixo vertical do detector em laboratório) deve ser definida para cada observação, uma vez que uma rotação no plano do céu altera a distribuição de sinal entre Q e U .

Frequentemente, os valores absolutos dos fluxos não são o foco principal da análise polarimétrica, sendo mais relevante a fração de luz polarizada. Para isso, é comum o tratamento dos Parâmetros de Stokes Normalizados, definidos como $q = Q/I$, $u = U/I$ e $v = V/I$. A partir destas quantidades adimensionais, define-se o Grau de Polarização Total (P):

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} = \sqrt{q^2 + u^2 + v^2} \leq 1. \quad (2.10)$$

Para o caso específico de polarização linear (em que $V \approx 0$), o grau de polarização linear é dado por $P_L = \sqrt{q^2 + u^2}$. A orientação da elipse, ou Ângulo de Polarização (ψ), é derivada da razão entre U e Q :

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{U}{Q}\right), \quad (2.11)$$

em que o quadrante do ângulo 2ψ deve ser determinado pelos sinais individuais de U e Q , garantindo assim o intervalo físico $0^\circ \leq \psi < 180^\circ$.

2.2 ESPALHAMENTO DE LUZ POR PARTÍCULAS

A formulação adotada neste trabalho para descrever a interação da radiação com a atmosfera fundamenta-se na distinção entre as propriedades ópticas de uma única partícula (espalhamento simples) e os efeitos coletivos de um meio contendo múltiplas partículas (espalhamento múltiplo). Esta abordagem pressupõe a validade da condição de *espalhamento independente*, na qual as partículas estão separadas por distâncias suficientemente grandes (tipicamente maiores que três vezes o seu raio) para que não existam relações de fase sistemáticas

entre as ondas espalhadas por partículas vizinhas (Hulst, 1981; Hansen; Travis, 1974).

Consequentemente, em atmosferas planetárias em que esta condição é geralmente satisfeita, as energias espalhadas podem ser somadas incoerentemente. Isso permite que o problema macroscópico de transferência radiativa (tratado posteriormente via método de *Adding-Doubling*) seja construído diretamente a partir da superposição das matrizes de espalhamento das partículas individuais.

2.2.1 Mecânica do Espalhamento Único

Consideramos um volume elementar dv contendo partículas espalhadoras independentes, sobre o qual incidem feixes paralelos de radiação. Como definido anteriormente, a intensidade e o estado completo de polarização da radiação incidente são descritos pelo vetor de Stokes $\mathbf{S}_0 = [I_0, Q_0, U_0, V_0]^T$. A radiação espalhada pelo volume de partículas, observada a uma distância R , é descrita por (Hovenier; Mee; Domke, 2014):

$$\mathbf{S} = \frac{k_{esp}}{4\pi R^2} \mathbf{P}(\Theta) \mathbf{S}_0 dv. \quad (2.12)$$

A quantidade k_{esp} representa o coeficiente de espalhamento (com dimensão de comprimento recíproco, L^{-1}). Este coeficiente corresponde à seção de choque de espalhamento por unidade de volume, ou seja, o somatório das seções de choque individuais ($\sigma_{esp,i}$) de todas as partículas contidas no volume dv , normalizado por este volume:

$$k_{esp} = \frac{1}{dv} \sum_i \sigma_{esp,i}. \quad (2.13)$$

A matriz de fase $\mathbf{P}(\Theta)$ é uma matrix 4×4 que contém a informação angular da redistribuição da luz. No entanto, os parâmetros de Stokes são quantidades vetoriais que dependem do plano de referência escolhido. Para a definição de $\mathbf{P}$, o sistema de referência natural é o plano de espalhamento, definido pelo vetor de propagação da radiação incidente e pelo vetor de propagação da radiação espalhada em direção ao observador.

O ângulo entre estas duas direções é denominado ângulo de espalhamento, denotado por Θ . A matriz de fase é normalizada de tal forma que a integral da função de fase (o elemento P_{11}) sobre todos os elementos de ângulo sólido resulte em 4π :

$$\int_{4\pi} P_{11}(\Theta) d\Omega = 4\pi. \quad (2.14)$$

A função de fase representa a probabilidade de espalhamento de um feixe incidente não polarizado em uma direção específica. Para uma coleção de partículas orientadas aleatoriamente no espaço (uma aproximação válida para a maioria dos aerossóis atmosféricos e gotículas de nuvens), a matriz de fase apresenta uma simetria característica, reduzindo o número de elementos independentes para seis (ou quatro, no caso de esferas perfeitas). Seguindo a notação de Hansen e Travis (1974), a matriz assume a forma de blocos diagonais:

$$\mathbf{P}(\Theta) = \begin{pmatrix} P_{11}(\Theta) & P_{12}(\Theta) & 0 & 0 \\ P_{12}(\Theta) & P_{22}(\Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33}(\Theta) & P_{34}(\Theta) \\ 0 & 0 & -P_{34}(\Theta) & P_{44}(\Theta) \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Além de k_{esp} e $\mathbf{P}(\Theta)$, é importante definir o fator de eficiência do espalhamento Q_{esp} , descrito pela razão entre a seção de choque de espalhamento σ_{esp} e a seção de choque geométrica G (a área da sombra projetada pela partícula):

$$Q_{esp} = \frac{\sigma_{esp}}{G}. \quad (2.16)$$

Adicionalmente, para a solução de problemas de espalhamento múltiplo, precisamos considerar o albedo de espalhamento único $\tilde{\omega}$. Este parâmetro adimensional representa a probabilidade de que um fóton, ao interagir com uma partícula, seja espalhado em vez de absorvido. Como a energia é removida do feixe incidente (extinta) tanto por espalhamento quanto por absorção, definimos os coeficientes de extinção através de:

$$\begin{aligned} k_{ext} &= k_{esp} + k_{abs}, \\ \sigma_{ext} &= \sigma_{esp} + \sigma_{abs}, \\ Q_{ext} &= Q_{esp} + Q_{abs}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Desta maneira, o albedo de espalhamento único $\tilde{\omega}$ é dado por:

$$\tilde{\omega} = \frac{k_{esp}}{k_{ext}} = \frac{\sigma_{esp}}{\sigma_{ext}} = \frac{Q_{esp}}{Q_{ext}}. \quad (2.18)$$

De maneira geral, grande parte do esforço da modelagem teórica e numérica (Capítulo 3) resume-se à obtenção dos parâmetros k_{esp} (ou σ_{esp}), $\tilde{\omega}$ e dos elementos da matriz $\mathbf{F}(\Theta)$ para as partículas constituintes da atmosfera planetária.

2.2.2 Espalhamento Rayleigh

O regime de espalhamento Rayleigh descreve a interação da radiação com partículas cujas dimensões são significativamente menores que o comprimento de onda da luz ($r \ll \lambda$). Mais rigorosamente, este comportamento domina quando o parâmetro de tamanho adimensional, definido por $x = 2\pi r/\lambda$, satisfaz a condição $x \ll 1$. A denominação homenageia Lord Rayleigh (John William Strutt), que deduziu este formalismo no final do século XIX para explicar a coloração azul e as propriedades de polarização do céu terrestre (Strutt, 1871).

Esta condição de pequenez geométrica permite uma simplificação fundamental na eletrodinâmica do problema: a partícula pode ser considerada imersa em um campo externo espacialmente uniforme. A resposta física do meio a essa excitação é a criação de um momento de dipolo oscilante $\mathbf{p}$, que responde linearmente ao campo elétrico instantâneo $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{p} = \alpha_p \mathbf{E}, \quad (2.19)$$

em que a constante de proporcionalidade α_p é denominada *polarizabilidade* da partícula. Para uma partícula com polarizabilidade isotrópica, o momento de dipolo induzido é orientado na direção de oscilação do campo elétrico aplicado e, a uma distância $R \gg \lambda$, o campo elétrico da onda espalhada é (Hansen; Travis, 1974):

$$E_{esp} = \frac{4\pi^2 p \sin \beta}{\lambda^2 R} e^{-2\pi i R/\lambda}, \quad (2.20)$$

em que β é o ângulo entre a direção do momento de dipolo $\mathbf{p}$ e a direção de propagação da onda espalhada. Note que a amplitude do campo espalhado é proporcional a λ^{-2} , o que implicará que a intensidade será proporcional a λ^{-4} .

Para obter a intensidade total espalhada, devemos considerar a geometria da observação (diagrama esquemático na Figura 2.2). Assumimos que a luz incidente não é polarizada (luz natural), a qual pode ser decomposta estatisticamente em duas componentes incoerentes de igual intensidade ($I_0/2$): uma com o campo elétrico perpendicular ao plano de espalhamento ($E_{i,\perp}$) e outra paralela ($E_{i,\parallel}$).

- a) componente perpendicular ($\perp$): o dipolo induzido oscila perpendicularmente ao plano de espalhamento. Para um observador situado neste plano, o ângulo entre o dipolo e a direção de espalhamento é sempre $\beta = 90^\circ$, resultando em $\sin^2 \beta = 1$. Consequentemente:

$$E_{esp,\perp} \propto E_{i,\perp}; \quad (2.21)$$

- b) componente paralela ($\parallel$): o dipolo oscila no próprio plano de espalhamento. Neste caso, o ângulo entre o eixo do dipolo e a direção de espalhamento é $\beta = 90^\circ - \Theta$. Consequentemente, a radiação emitida é atenuada por um fator geométrico $\sin^2(90^\circ - \Theta) = \cos^2 \Theta$. Assim, temos a relação:

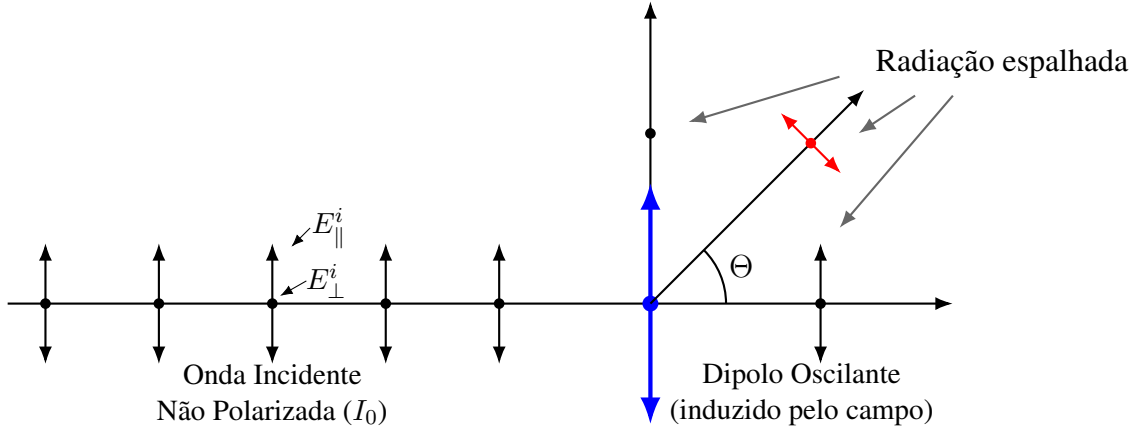
$$E_{esp,\parallel} \propto E_{i,\parallel} \cos \Theta. \quad (2.22)$$

A intensidade da radiação, sendo proporcional ao quadrado do campo elétrico, é obtida somando-se as contribuições das duas componentes. Ao realizarmos a média temporal para a luz natural e substituirmos as constantes físicas, obtemos a clássica expressão para a intensidade espalhada:

$$I_{esp}(\Theta) = \frac{8\pi^4 |\alpha_p|^2}{\lambda^4 R^2} I_0 (1 + \cos^2 \Theta). \quad (2.23)$$

Esta dependência angular, combinada com a preservação da simetria do sistema, permite-nos construir explicitamente a Matriz de Fase de Rayleigh. Para a base de Stokes (I, Q, U, V), a matriz assume a seguinte forma analítica, conforme derivado por Chandrasekhar (1960) e

Figura 2.2 – Geometria do espalhamento Rayleigh. A radiação incidente induz um momento de dipolo na partícula, cujas oscilações emitem radiação em todas as direções, exceto ao longo do eixo de oscilação. Para um observador no plano de espalhamento, a componente perpendicular (pontos, oscilando para fora da página) é sempre vista em sua amplitude máxima. Já a componente paralela (setas), à medida que o ângulo de espalhamento Θ tende a 90° , tem sua amplitude projetada reduzida pelo fator $\cos \Theta$, uma vez que o observador passa a visualizar o dipolo “de topo”, direção na qual não há emissão de energia.



Fonte: O autor.

adaptado para a notação moderna por Hansen e Travis (1974):

$$\mathbf{P}_{\text{Rayleigh}}(\Theta) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \Theta & -\sin^2 \Theta & 0 & 0 \\ -\sin^2 \Theta & 1 + \cos^2 \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

O fator de normalização $3/4$ garante que a integração da função de fase (o elemento F_{11}) sobre todo o ângulo sólido satisfaça a condição de normalização (Equação 2.14).

A análise dos elementos desta matriz revela diretamente as propriedades polarimétricas do espalhamento molecular. Considerando um feixe incidente não polarizado, $\mathbf{S}_0 = [1, 0, 0, 0]^T$, o vetor de Stokes espalhado será proporcional à primeira coluna da matriz, de acordo com a Equação 2.12. O grau de polarização linear da luz espalhada é então obtido pela razão entre o segundo e o primeiro elemento ($-P_{12}/P_{11}$):

$$P_L(\Theta) = \frac{-P_{12}(\Theta)}{P_{11}(\Theta)} = \frac{1 - \cos^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta} = \frac{\sin^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta}. \quad (2.25)$$

Esta relação demonstra que o grau de polarização atinge 100% ($P = 1$) quando o ângulo de espalhamento é $\Theta = 90^\circ$, caindo para zero nas direções frontal e traseira. Esta assinatura de “sino” na curva de fase de polarização (cf. Figura 2.3) é a principal característica buscada na detecção de atmosferas exoplanetárias dominadas por espalhamento molecular, diferenciando-as de atmosferas com nuvens ou neblinas espessas.

É importante ressaltar que as equações 2.24 e 2.25 descrevem o comportamento idea-

lizado de partículas esféricas ou isotropicamente polarizáveis. No entanto, moléculas poliatômicas reais (como N_2 , H_2 ou CO_2) apresentam anisotropia em sua polarizabilidade intrínseca.

O efeito da anisotropia impede que a polarização atinja 100% em 90° , introduzindo um termo de correção no denominador da equação de polarização. De acordo com a formulação de Hansen e Travis (1974), considerando o fator de despolarização δ , o grau de polarização se torna:

$$P_L(\Theta) = \frac{\sin^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta + \frac{2\delta}{1-\delta}}. \quad (2.26)$$

A partir da Equação 2.23, podemos obter o coeficiente de espalhamento k_{esp} e seção de choque média por partícula $\bar{\sigma}_{esp}$:

$$\bar{\sigma}_{esp} = \frac{k_{esp}}{N} = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n_g^2 - 1)^2}{\lambda^4 N^2} \frac{6 + 3\delta}{6 - 7\delta}, \quad (2.27)$$

na qual utilizamos o fator de despolarização e a relação entre polarizabilidade e índice de refração experimental n_g :

$$\alpha_p = \frac{n_g^2 - 1}{4\pi N}, \quad (2.28)$$

Consequentemente, o coeficiente de espalhamento se torna:

$$k_{esp} = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n_g^2 - 1)^2}{\lambda^4 N} \frac{6 + 3\delta}{6 - 7\delta}, \quad (2.29)$$

Adicionalmente, o fator de eficiência de espalhamento no limite de Rayleigh para pequenas esferas ($x \ll 1$) foi derivado por Hulst (1981):

$$Q_{esp} = \frac{8}{3} x^4 \left| \frac{n_c^2 - 1}{n_c^2 + 2} \right|^2 \quad \text{e} \quad Q_{abs} = -4x \text{Im} \left\{ \frac{n_c^2 - 1}{n_c^2 + 2} \right\}, \quad (2.30)$$

em que n_c é o índice de refração complexo da partícula.

Finalmente, em aplicações de modelagem atmosférica, é conveniente expressar a profundidade óptica devido ao espalhamento Rayleigh ($\tau_{Rayleigh}$) diretamente em função da pressão atmosférica P , eliminando a dependência explícita da altura geométrica. A profundidade óptica da atmosfera gasosa a uma altura h é definida por:

$$\tau_{Rayleigh}(h) = \int_h^\infty dh' \kappa_{esp} \rho, \quad (2.31)$$

em que κ_{esp} é o coeficiente de espalhamento por unidade de massa (em $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$) e ρ a densidade de massa do gás (em kg m^{-3}). Assumindo equilíbrio hidrostático, a pressão em função da altura é:

$$P(h) = \int_h^\infty dh' g \rho, \quad (2.32)$$

em que g é a aceleração da gravidade. Se considerarmos o cenário típico em que a variação de κ_{esp} e g com a altura é desprezível em comparação à variação da densidade, podemos relacionar as duas integrais, obtendo:

$$P \approx \frac{g}{\kappa_{esp}} \tau_{Rayleigh}. \quad (2.33)$$

Considerando uma mistura gasosa em que v_i é a fração volumétrica do componente i , o coeficiente de espalhamento volumétrico total é dado pela soma das contribuições ponderadas:

$$\kappa_{esp} = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4 N} \sum_i v_i (n_{g,i}^2 - 1)^2 \frac{6 + 3\delta_i}{6 - 7\delta_i}. \quad (2.34)$$

Substituindo a Equação 2.34 na relação de pressão (Equação 2.33), e notando que a dependência explícita de N se cancela (visto que o termo $(n^2 - 1)^2/N$ é aproximadamente constante com a altura), chegamos à relação final entre pressão e profundidade óptica:

$$P = g\bar{\mu} \left[\frac{8\pi^3}{3\lambda^4 N^2} \sum_i v_i (n_{g,i}^2 - 1)^2 \frac{6 + 3\delta_i}{6 - 7\delta_i} \right]^{-1} \tau_{Rayleigh}. \quad (2.35)$$

A Equação 2.35 revela uma consequência observacional fundamental para a caracterização de exoplanetas: a pressão na qual a atmosfera se torna opaca ($\tau_{Rayleigh} \approx 1$) depende fortemente do comprimento de onda (λ^4). Isso significa que observações polarimétricas realizadas em diferentes bandas espectrais sondam camadas distintas da atmosfera. Enquanto a luz azul é espalhada eficientemente nas camadas superiores de menor pressão, a luz vermelha e infravermelha penetra mais profundamente antes de ser espalhada. Portanto, a polarimetria multibanda, funciona como uma técnica de “tomografia atmosférica”, permitindo restringir a estrutura vertical do gás e a altura da camada de espalhamento.

O perfil de polarização Rayleigh puro, com dependência espectral característica λ^{-4} e curva de fase em forma de sino, constitui a “linha de base” para uma atmosfera límpida. No entanto, atmosferas planetárias reais frequentemente contêm condensados sólidos ou líquidos (nuvens e neblinas) cujas dimensões são comparáveis ou maiores que o comprimento de onda. Nestes casos, a aproximação de dipolo induzido perde a validade, e a interação da luz passa a ser governada por efeitos de interferência complexos dentro da partícula, exigindo o tratamento mais geral da Teoria de Mie, discutida na seção a seguir.

2.2.3 Espalhamento Mie

O tratamento do espalhamento eletromagnético por partículas de tamanho arbitrário constitui um dos problemas fundamentais da eletrodinâmica clássica. Uma solução completa

para a interação de uma onda plana com uma esfera isotrópica e homogênea foi apresentada formalmente por Gustav Mie em 1908, em seu trabalho seminal sobre a coloração de soluções coloidais de ouro (Mie, 1908). No entanto, as bases teóricas para esta descrição já haviam sido estabelecidas independentemente por outros autores, com destaque para as contribuições de Ludvig Lorenz sobre o espalhamento em esferas rígidas por uma fonte puntiforme elástica (Lorenz, 1898) e, posteriormente, o tratamento de Peter Debye focado na pressão de radiação sobre uma partícula esférica (Debye, 1909). Em reconhecimento a esses desenvolvimentos paralelos, o formalismo é frequentemente denominado na literatura como Teoria de Lorenz-Mie-Debye, embora o termo simplificado *Teoria de Mie* permaneça como a designação mais comum.

Em contraste com o regime de espalhamento Rayleigh, no qual a partícula é tratada como um dipolo elétrico pontual, a Teoria de Mie requer a solução rigorosa das equações de Maxwell com condições de contorno esféricas. Este tratamento torna-se indispensável quando o parâmetro de tamanho da partícula, $x = 2\pi r/\lambda$, é comparável ou maior que a unidade ($x \gtrsim 1$). Nestas condições, o campo incidente excita não apenas o momento de dipolo, mas uma série de multipolos elétricos e magnéticos de ordem superior. A superposição dos campos irradiados por estes multipolos gera padrões de interferência complexos, resultando em uma forte anisotropia na distribuição angular da luz, caracterizada tipicamente por um intenso lóbulo de espalhamento na direção frontal (*forward scattering*).

Descrições detalhadas da solução original obtida por Mie podem ser encontradas em Stratton (2007) e Hulst (1981). No entanto, para os propósitos desta dissertação, limitamos nossa discussão aos principais resultados que governam a obtenção das quantidades necessárias, como a matriz de fase, o coeficiente de espalhamento e o albedo de espalhamento único.

Partindo para uma descrição geral do espalhamento de radiação por uma partícula de formato e tamanho arbitrários, as componentes ortogonais do campo elétrico espalhado a uma distância $R \gg \lambda$ podem ser representadas pela transformação linear das componentes do campo incidente. Adotando a base vetorial padrão da literatura (Hansen; Travis, 1974), temos:

$$\begin{pmatrix} E_{esp,\perp} \\ E_{esp,\parallel} \end{pmatrix} = \frac{e^{-ikR+ikz}}{ikR} \begin{pmatrix} S_1(\Theta, \phi) & S_4(\Theta, \phi) \\ S_3(\Theta, \phi) & S_2(\Theta, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i,\perp} \\ E_{i,\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

em que $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda. A matriz 2×2 é chamada de matriz de amplitude de espalhamento. Os elementos desta matriz S (não confundir com o vetor de Stokes S) são em geral funções complexas do ângulo de espalhamento Θ e de um ângulo azimutal ϕ medido sobre a direção de espalhamento.

Para o caso específico de esferas homogêneas e isotrópicas, a simetria do sistema impõe que não haja conversão entre os modos de polarização ortogonais (o campo perpendicular incidente não gera componente paralela espalhada, e vice-versa). Isso implica que os elementos fora da diagonal principal da matriz de amplitude são nulos:

$$S_3(\Theta) = S_4(\Theta) = 0. \quad (2.37)$$

Dessa forma, a interação fica inteiramente descrita pelas funções $S_1(\Theta)$ (que governa o espalhamento perpendicular) e $S_2(\Theta)$ (que governa o espalhamento paralelo). A conexão com o formalismo macroscópico de Stokes (definido na Seção 2.2) é realizada convertendo-se essas amplitudes complexas nas intensidades reais através de uma matriz transformação 4×4 :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) & -(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*) & 0 & 0 \\ -(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*) & (S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (S_1 S_2^* + S_2 S_1^*) & i(S_1 S_2^* - S_2 S_1^*) \\ 0 & 0 & -i(S_1 S_2^* - S_2 S_1^*) & (S_1 S_2^* + S_2 S_1^*) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

em que a matriz de fase $\mathbf{P}$, utilizada na Equação 2.12, é obtida normalizando-se a matriz de transformação de fluxo $\mathbf{F}$ pela seção de choque de espalhamento σ_{esp} . Esta normalização garante a condição de integral 4π para o primeiro elemento (função de fase):

$$\mathbf{P} = \frac{4\pi}{k^2 \sigma_{esp}} \mathbf{F}. \quad (2.39)$$

Consequentemente, o grau de polarização linear pode ser escrito como:

$$P_L(\Theta) = \frac{-P_{12}(\Theta)}{P_{11}(\Theta)} = \frac{(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)}{(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*)}, \quad (2.40)$$

assim como a intensidade:

$$I_{esp}(\Theta) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 R^2} I_0 (S_1 S_1^* + S_2 S_2^*). \quad (2.41)$$

A teoria de Mie fornece a solução exata para as amplitudes de espalhamento S_1 e S_2 na forma de duas séries infinitas convergentes:

$$\begin{aligned} S_1(\Theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \Theta) + b_n \tau_n(\cos \Theta)], \\ S_2(\Theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos \Theta) + a_n \tau_n(\cos \Theta)], \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que as funções angulares π_n e τ_n dependem exclusivamente da geometria do espalhamento e são derivadas dos polinômios de Legendre associados de primeira ordem P_n^1 :

$$\begin{aligned} \pi_n(\cos \Theta) &= \frac{1}{\sin \Theta} P_n^1(\cos \Theta), \\ \tau_n(\cos \Theta) &= \frac{d}{d\Theta} P_n^1(\cos \Theta). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Os coeficientes de expansão a_n e b_n , conhecidos como coeficientes de Mie, contêm toda a informação sobre as propriedades físicas da partícula. Eles são determinados pelas condições de contorno na superfície da esfera e dependem do parâmetro de tamanho x e do índice de refração relativo m . Estes coeficientes são expressos em termos das funções de Riccati-Bessel $\psi_n(z)$ e $\zeta_n(z)$, conforme a formulação de Hulst (1981):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\psi'_n(mx)\psi_n(x) - m\psi_n(mx)\psi'_n(x)}{\psi'_n(mx)\zeta_n(x) - m\psi_n(mx)\zeta'_n(x)}, \\ b_n &= \frac{m\psi'_n(mx)\psi_n(x) - \psi_n(mx)\psi'_n(x)}{m\psi'_n(mx)\zeta_n(x) - \psi_n(mx)\zeta'_n(x)}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

em que os apóstrofes (') indicam derivadas em relação ao argumento da função. As funções auxiliares são definidas como $\psi_n(z) = zj_n(z)$ e $\zeta_n(z) = zh_n^{(2)}(z)$, sendo j_n e $h_n^{(2)}$ as funções de Bessel esféricas e de Hankel de segunda espécie, respectivamente.

Outra propriedade fundamental da solução de Mie é permitir o cálculo analítico das eficiências de extinção e espalhamento diretamente a partir dos coeficientes a_n e b_n , eliminando a necessidade de integração numérica sobre o ângulo sólido:

$$\begin{aligned} Q_{ext} &= \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}\{a_n + b_n\}, \\ Q_{esp} &= \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

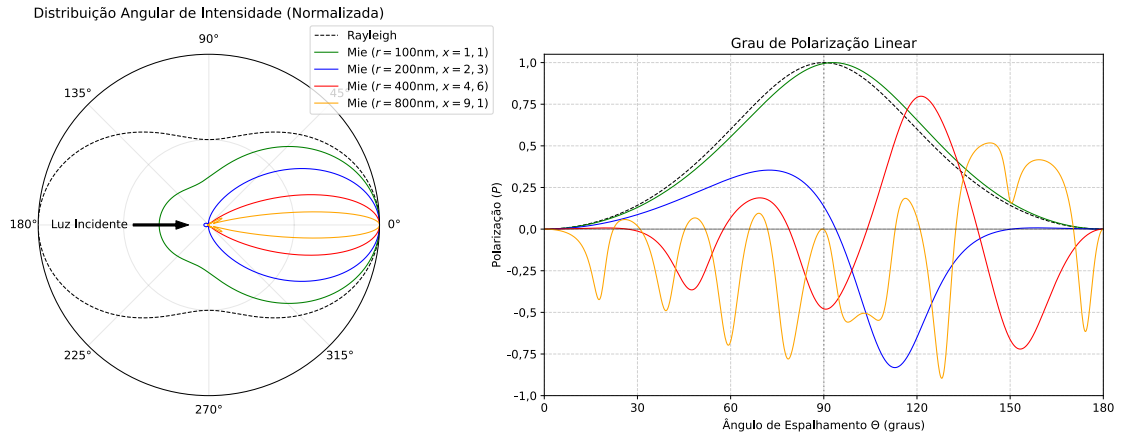
Consequentemente, o albedo de espalhamento único para a partícula de Mie é determinado substituindo-se as eficiências acima na definição apresentada na Equação 2.18.

Como mencionado no início da seção, as soluções da Equação 2.42 podem ser interpretadas fisicamente como uma expansão multipolar do campo espalhado. Especificamente, os coeficientes a_n representam as contribuições dos modos elétricos (em que a_1 corresponde ao dipolo, a_2 ao quadrupolo e a_3 ao octupolo elétrico), enquanto os coeficientes b_n estão associados aos multipolos magnéticos. Esta definição é crucial para a consistência física da teoria: no limite de partículas pequenas ($x \ll 1$), os termos de ordem superior tornam-se desprezíveis e apenas a contribuição do dipolo elétrico (a_1) permanece significativa, recuperando-se assim naturalmente a matriz de fase de Rayleigh.

A Figura 2.3 ilustra essa transição, comparando a distribuição angular de intensidade e a polarização linear entre o regime Rayleigh e o espalhamento Mie para partículas com raios entre 50 nm e 600 nm. As curvas foram calculadas utilizando a biblioteca *miepython* (Prah, 2026), evidenciando o aumento da anisotropia e a complexidade da polarização com o crescimento do parâmetro de tamanho.

No contexto do cálculo numérico eficiente da matriz de fase, opta-se frequentemente pela expansão dos elementos da matriz em funções esféricas generalizadas, em detrimento da avaliação direta das séries angulares elementares. Esta abordagem, fundamentada por Rooij

Figura 2.3 – Comparação das propriedades angulares de espalhamento para uma partícula esférica ($m = 1, 33$) iluminada por $\lambda = 550$ nm. (Esquerda) Distribuição polar da intensidade espalhada normalizada. A curva preta tracejada representa o limite de Rayleigh (dipolo), caracterizado pela simetria frente-trás. As curvas coloridas ilustram o regime de Mie, evidenciando o surgimento de um forte lóbulo de espalhamento frontal à medida que o parâmetro de tamanho x aumenta. (Direita) Grau de polarização linear em função do ângulo de espalhamento. Enquanto o regime Rayleigh apresenta uma curva em forma de sino com polarização máxima ($P = 1$) em $\Theta = 90^\circ$, as partículas maiores no regime Mie exibem oscilações complexas e regiões de polarização negativa (inversão da componente dominante), decorrentes da interferência entre multipolos elétricos e magnéticos.



Fonte: O autor.

e Stap (1984), é a metodologia implementada no código PyMieDAP (Rossi; Berzosa-Molina; Stam, 2018) utilizado neste trabalho. A expansão assume a forma geral:

$$[\mathbf{P}(\Theta)]_{m,n} = \sum_{l=\max(|m|,|n|)}^{\infty} C_{m,n}^l \Psi_{m,n}^l(\cos \Theta), \quad (2.46)$$

em que os índices assumem valores no conjunto $m, n \in \{+2, 0, -2\}$, associados à representação da luz polarizada na base circular. As funções $\Psi_{m,n}^l(\cos \Theta)$ são as funções esféricas generalizadas e $C_{m,n}^l$ os coeficientes da expansão, determinados algebricamente a partir dos coeficientes de Mie (a_n, b_n).

Finalmente, para representar realisticamente nuvens e aerossóis atmosféricos, é necessário estender a descrição de uma partícula isolada para uma população de partículas com diferentes dimensões (polidispersão). Assumindo a condição de espalhamento independente, as propriedades ópticas de um volume unitário são obtidas pela integração das contribuições individuais ponderadas pela distribuição de tamanhos $n(r)$. Desta forma, os elementos da matriz de transformação volumétrica são dados por:

$$\langle F_{ij}(\Theta) \rangle = \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr F_{ij}(\Theta, r) n(r), \quad (2.47)$$

em que $n(r)dr$ representa o número de partículas por unidade de volume com raios no intervalo $[r, r + dr]$ e $F_{ij}(\Theta, r)$ é o elemento correspondente da matriz $\mathbf{F}(\Theta)$ calculado para uma única

partícula de raio r . Os limites de integração r_{min} e r_{max} definem a abrangência da distribuição de tamanhos considerada. Os coeficientes volumétricos de espalhamento e extinção são obtidos de maneira análoga, integrando-se as seções de choque individuais:

$$\begin{aligned} k_{esp} &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sigma_{esp}(r) n(r) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \pi r^2 Q_{esp}(r) n(r), \\ k_{ext} &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sigma_{ext}(r) n(r) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \pi r^2 Q_{ext}(r) n(r). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para caracterizar geometricamente a polidispersão de forma independente do modelo matemático específico da distribuição, podemos definir os conceitos de *raio efetivo* (r_{eff}) e *variância efetiva* (v_{eff}), definidos ponderando-se pela área geométrica das partículas:

$$\begin{aligned} r_{eff} &= \frac{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr r^3 n(r)}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr r^2 n(r)} = \frac{1}{G} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr r \cdot \pi r^2 n(r), \\ v_{eff} &= \frac{1}{G r_{eff}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr (r - r_{eff})^2 \pi r^2 n(r), \end{aligned} \quad (2.49)$$

em que G é a seção de choque geométrica total das partículas por unidade de volume (área projetada total):

$$G = \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \pi r^2 n(r). \quad (2.50)$$

A relevância física de r_{eff} e v_{eff} reside no fato de que as propriedades de espalhamento dependem primariamente destes parâmetros, demonstrando baixa sensibilidade à forma funcional exata da distribuição $n(r)$. Neste trabalho, a distribuição adotada como referência é a Gamma Padrão, definida por:

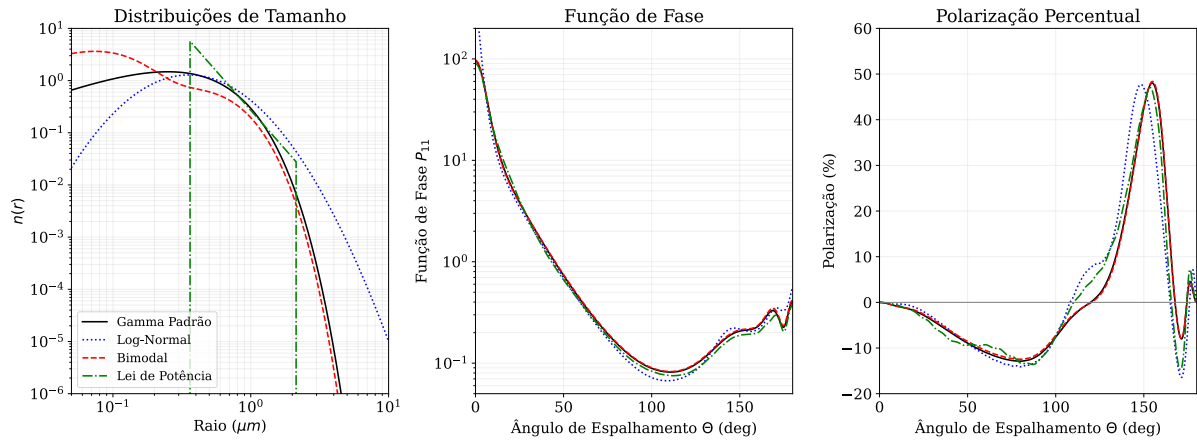
$$n(r) = \frac{1}{ab\Gamma[(1-2b)/b]} \left(\frac{r}{ab}\right)^{\frac{1-3b}{b}} e^{\frac{-r}{ab}}, \quad (2.51)$$

em que assumimos $a = r_{eff}$ e $b = v_{eff}$.

Para validar essa premissa, a Figura 2.4 apresenta uma comparação entre as propriedades ópticas geradas por quatro distribuições distintas (Gamma Padrão, Log-Normal, Bimodal e Lei de Potência), todas normalizadas para os mesmos valores efetivos ($r_{eff} = 1 \mu m$ e $v_{eff} = 0,25$), novamente através do pacote *miepython*. A análise do painel central revela que a função de fase P_{11} é virtualmente idêntica para todas as curvas, corroborando a hipótese de que a modelagem da intensidade independe da escolha específica de $n(r)$.

Em contrapartida, o grau de polarização linear (painel à direita) exibe uma sensibilidade significativamente maior à morfologia da distribuição. Destaca-se o comportamento da Lei de Potência (curva verde), que apresenta oscilações de alta frequência decorrentes dos efeitos de interferência nos raios de corte abrupto da distribuição ($r_1 = 0,3620 \mu m$ e $r_2 = 2,1380 \mu m$), fenômeno ausente nas distribuições suaves como a Gamma e a Log-Normal.

Figura 2.4 – Sensibilidade das propriedades ópticas à forma da distribuição de tamanhos, considerando $r_{eff} = 1 \mu m$ e $v_{eff} = 0,25$. Esquerda: Quatro distribuições distintas (Gamma Padrão, Log-Normal, Bimodal e Lei de Potência). Centro: Função de Fase $P_{11}(\Theta)$. Note a similaridade entre as curvas, indicando dependência primária nos parâmetros efetivos. Direita: Grau de polarização linear. A polarimetria revela divergências significativas, especialmente para a Lei de Potência (verde). Os cálculos foram feitos para o índice de refração da água $m = 1,33$ e comprimento de onda $\lambda = 0,55 \mu m$.



Fonte: Adaptado de Hansen e Travis (1974).

Em resumo, a análise apresentada nesta seção fornece o conjunto completo de parâmetros microfísicos necessários para descrever a interação da luz com a matéria: os coeficientes de extinção e espalhamento (k_{ext}, k_{esp}), o albedo de espalhamento único ($\tilde{\omega}$) e a matriz de fase $P(\Theta)$. Seja no regime molecular descrito por Rayleigh ou no regime de aerossóis tratado pela teoria de Mie, estas quantidades definem a probabilidade e a geometria de um evento de espalhamento isolado.

No entanto, uma atmosfera planetária real é um meio óptico espesso, composto por um número imenso de partículas, onde a radiação raramente interage apenas uma vez antes de emergir. Para simular o sinal observável de um exoplaneta, é necessário transitar da descrição do evento único para um tratamento estatístico e macroscópico do transporte de fótons através do meio. É neste contexto que introduzimos, na seção a seguir, o formalismo da transferência radiativa vetorial do espalhamento múltiplo, que integra as propriedades locais das partículas aqui derivadas para resolver o campo de radiação global da atmosfera.

2.3 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA EM ATMOSFERAS PLANETÁRIAS

Em atmosferas planetárias, especialmente naquelas com alta densidade de gases ou nuvens, o livre caminho médio dos fótons é muito menor do que a espessura geométrica da atmosfera. Nestas condições, os efeitos do espalhamento múltiplo tornam-se significativos, e a radiação emergente, como vista por um observador externo, é o resultado de uma complexa cadeia de interações sucessivas.

O espalhamento múltiplo também afeta profundamente a polarimetria. Estatística-

mente, este processo tende a aleatorizar a direção de propagação, o que consequentemente reduz a polarização máxima prevista pelas teorias de Rayleigh ou Mie isoladas. No entanto, as principais características angulares do espalhamento simples, bem como as propriedades microfísicas dos espalhadores, são preservadas (Rossi; Berzosa-Molina; Stam, 2018). Além disso, ocorre o surgimento de padrões adicionais relacionados à estrutura da atmosfera como um todo, permitindo não só a caracterização das partículas, mas também a determinação da estratificação específica da atmosfera e a posição dos aerossóis.

Para os propósitos desta discussão, adotamos a geometria de uma atmosfera plano-paralela, modelada como um meio estratificado composto por camadas horizontais infinitas e homogêneas. Esta aproximação é fisicamente justificada na maioria dos cenários planetários de interesse, nos quais a espessura efetiva da atmosfera é desprezível em comparação ao raio do planeta ($H \ll R_p$), tornando os efeitos de curvatura local irrelevantes para a coluna atmosférica observada (Hovenier; Mee; Domke, 2014).

Neste referencial, a coordenada vertical geométrica ou altitude h é substituída pela profundidade óptica vertical τ . Medida a partir do topo da atmosfera ($\tau = 0$) em direção à superfície, esta grandeza adimensional quantifica a opacidade acumulada do meio, sendo definida pela integração do coeficiente de extinção volumétrico k_{ext} (introduzido na Equação 2.17):

$$\tau(h) = \int_h^\infty dh' k_{ext}(h'). \quad (2.52)$$

A definição das condições de contorno para a profundidade óptica é determinada pela natureza geofísica do corpo planetário. Para planetas telúricos (rochosos), como a Terra ou o objeto deste estudo, K2-131b, modela-se o meio como uma atmosfera finita. Neste cenário, o domínio de integração estende-se do topo da atmosfera, onde a extinção é nula ($\tau = 0$), até a superfície sólida, onde a profundidade óptica atinge seu valor máximo finito, denotado por $\tau_{surf} = b$. No limite inferior ($\tau = b$), a radiação interage com o solo, sendo parcialmente absorvida e parcialmente refletida de acordo com o albedo da superfície.

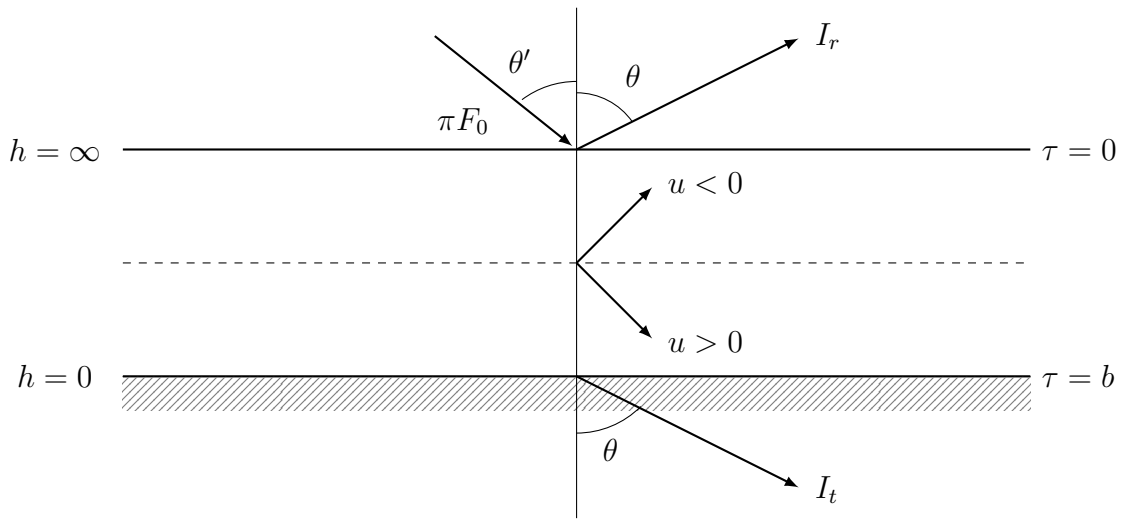
Em contrapartida, para gigantes gasosos (como Júpiter) ou atmosferas opticamente muito espessas, inexistente uma superfície sólida acessível à radiação. Nestes casos, adota-se a aproximação de uma atmosfera semi-infinita, na qual o limite inferior de integração é estendido arbitrariamente até uma profundidade onde o meio se torna opaco o suficiente para que possamos considerar matematicamente $b \rightarrow \infty$.

Previamente, as propriedades de espalhamento foram formuladas tomando como referência o ângulo de espalhamento Θ e o plano de espalhamento local. No entanto, no regime de espalhamento múltiplo em meios plano-paralelos, a radiação interage sucessivamente com diversas partículas, o que implica uma variação contínua das direções de propagação e exige o tratamento dos diferentes planos de espalhamento envolvidos.

A solução padrão consiste em definir um sistema de coordenadas local fixo, com a

origem no elemento de volume e o eixo z alinhado à normal vertical. A direção de propagação de um feixe é especificada pelo ângulo zenital θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), medido em relação ao eixo vertical, e pelo ângulo azimutal ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$), medido no plano horizontal em relação a um meridiano de referência. Adicionalmente, define-se o cosseno de direção $u = \cos \theta$ (ou, frequentemente, $\mu = |u|$), cuja magnitude e sinal indicam a inclinação e o sentido (ascendente ou descendente) do fluxo de radiação (ver Figura 2.5).

Figura 2.5 – Definição da geometria de espalhamento em uma atmosfera plano-paralela. O ângulo zenital de incidência é θ' e o ângulo de observação é θ para os feixes refletido I_r e transmitido I_t . A profundidade óptica τ é medida a partir do topo da atmosfera. Representamos também a convenção de sinal para u de acordo com Hulst (1981).



Fonte: Adaptado de Hansen e Travis (1974).

2.3.1 Forma Geral da Equação de Transporte Radiativo

Considerando um elemento de volume unitário no meio, a energia espalhada na direção (θ, ϕ) devido a um feixe incidente na direção (θ', ϕ') pode ser descrita (de maneira análoga à Equação 2.12) por:

$$\mathbf{S}(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{k_{esp}}{4\pi} \mathbf{P}(\theta, \phi; \theta', \phi') \mathbf{S}_{inc}(\theta', \phi') d\Omega', \quad (2.53)$$

em que $\mathbf{S}_{inc}(\theta', \phi') d\Omega'$ representa o vetor de fluxo incidente. Como, no caso geral, o volume é iluminado por radiação proveniente de todas as direções, a intensidade total espalhada é obtida pela integração sobre todo o ângulo sólido. Adotando a notação de cossenos de direção $u = \cos \theta$ e $u' = \cos \theta'$:

$$\mathbf{S}(u, \phi) = \frac{k_{esp}}{4\pi} \int_{-1}^{+1} du' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{P}(u, u', \phi - \phi') \mathbf{S}_{inc}(u', \phi'), \quad (2.54)$$

em que assumimos que o meio é macroscopicamente isotrópico, de modo que a matriz de fase dependa apenas da diferença azimutal $\phi - \phi'$.

Finalmente, normalizando a radiação espalhada pelo coeficiente de extinção total k_{ext} e utilizando a definição do albedo de espalhamento único $\tilde{\omega} = k_{esp}/k_{ext}$, introduzimos o vetor fonte $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J}(\tau, u, \phi) = \frac{\mathbf{S}(u, \phi)}{k_{ext}} = \frac{\tilde{\omega}(\tau)}{4\pi} \int_{-1}^{+1} du' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{P}(u, u', \phi - \phi') \mathbf{S}(u', \phi'). \quad (2.55)$$

Esta quantidade descreve a injeção local de fótons no feixe de radiação decorrente de eventos de espalhamento múltiplo.

Considerando agora a propagação entre duas profundidades ópticas distintas, τ' e τ (assumindo $\tau > \tau'$), a radiação que viaja da camada superior (τ') em direção à camada inferior (τ) sofre atenuação exponencial devido à extinção do meio. De acordo com a Lei de Beer-Lambert, o fator de transmissão é:

$$\exp \left\{ -\frac{(\tau - \tau')}{u} \right\}. \quad (2.56)$$

Simultaneamente, um elemento de volume infinitesimal localizado na profundidade τ' contribui para o feixe na direção de propagação com uma quantidade de energia dada pelo produto do vetor fonte pela profundidade óptica do caminho inclinado ($ds = d\tau'/u$):

$$\mathbf{J}(\tau', u, \phi) \frac{d\tau'}{u}. \quad (2.57)$$

Ao integrarmos as contribuições de todas as camadas elementares localizadas entre o topo da atmosfera ($\tau' = 0$) e a profundidade de interesse (τ), ponderadas pelo fator de atenuação, obtemos a intensidade total da radiação descendente ($u > 0$):

$$\mathbf{S}(\tau, u, \phi) = \int_0^\tau \mathbf{J}(\tau', u, \phi) \exp \left\{ -\frac{(\tau - \tau')}{u} \right\} \frac{d\tau'}{u}. \quad (2.58)$$

De maneira análoga, para a radiação ascendente ($u < 0$), a intensidade em τ é resultante da soma das fontes nas camadas inferiores, desde a profundidade de interesse até a base da atmosfera ($\tau' = b$):

$$\mathbf{S}(\tau, u, \phi) = \int_\tau^b \mathbf{J}(\tau', u, \phi) \exp \left\{ -\frac{(\tau' - \tau)}{-u} \right\} \frac{d\tau'}{-u}. \quad (2.59)$$

Nesta formulação (Equação 2.59), a notação $(-u)$ assegura que o divisor represente o valor absoluto do cosseno direcional para feixes ascendentes, uma vez que $u = \cos \theta$ é negativo para esses ângulos ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$). Isto garante que o caminho oblíquo percorrido pela radiação, $(\tau' - \tau)/(-u)$, seja uma quantidade positiva, resultando fisicamente na atenuação exponencial esperada. Estas equações representam a forma integral da lei de transferência. Finalmente, diferenciando a Equação 2.58 (ou a Equação 2.59) em relação à profundidade óptica τ , recuperamos a equação de transferência radiativa em sua forma íntegro-diferencial padrão:

$$u \frac{d\mathbf{S}(\tau, u, \phi)}{d\tau} = -\mathbf{S}(\tau, u, \phi) + \mathbf{J}(\tau, u, \phi). \quad (2.60)$$

Esta equação sintetiza o balanço energético local: a variação da intensidade ao longo de um caminho infinitesimal ($u d\mathbf{S}/d\tau$) é determinada pela competição entre a extinção do feixe incidente ($-\mathbf{S}$) e a injeção de novos fótons provenientes de espalhamentos múltiplos ($+\mathbf{J}$).

É importante notar que o vetor $\mathbf{S}(\tau, u, \phi)$ discutido nesta derivação representa apenas luz que tenha sido espalhada pelo menos uma vez, e ignora a radiação que penetra na camada τ sem ter sofrido espalhamento ou absorção (Hovenier; Mee; Domke, 2014).

2.3.2 Matrizes de Espalhamento Múltiplo

Do ponto de vista observacional, a grandeza de interesse fundamental é a radiação que emerge dos contornos da atmosfera. Considere uma camada plano-paralela de profundidade óptica b , isolada no espaço e iluminada exclusivamente pelo topo ($\tau = 0$).

Nesta configuração, definimos a radiação emergente no topo ($\tau = 0$, sentido ascendente) como luz refletida, e a radiação emergente na base ($\tau = b$, sentido descendente) como luz transmitida.

Em vez de resolver o campo de radiação interno ponto a ponto, é conveniente descrever a resposta global da camada através de operadores lineares. Desta forma, os vetores de Stokes emergentes, $\mathbf{S}_R$ (Refletido) e $\mathbf{S}_T$ (Transmitido), são obtidos diretamente a partir do fluxo incidente através das matrizes de reflexão ($\mathbf{R}$) e transmissão ($\mathbf{T}$). Estas são matrizes 4×4 que dependem exclusivamente das propriedades ópticas da camada (profundidade óptica, albedo de espalhamento único e matriz de fase) e da geometria de iluminação e observação. Desta maneira, o vetor de Stokes para uma direção de saída (μ, ϕ) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R(\mu, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{R}(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}_{inc}(\mu', \phi') \\ \mathbf{S}_T(\mu, \phi) &= e^{-b/\mu} \mathbf{S}_{inc}(\mu, \phi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{T}(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}_{inc}(\mu', \phi'), \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que o termo $e^{-b/\mu} \mathbf{S}_{inc}(\mu, \phi)$ representa a radiação diretamente transmitida (sem espalhamento) e $\mathbf{S}_{inc}(\mu', \phi')$ a distribuição de luz incidente no topo da atmosfera (Hovenier; Mee; Domke, 2014).

Em diversos cenários físicos, é comum tratar do fluxo de radiação total. O fluxo vetorial líquido através de uma superfície horizontal é definido pela seguinte integração:

$$\pi \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} u du \mathbf{S}(u, \phi) = 2\pi \int_{-1}^{+1} {}^0\mathbf{S}(u) u du, \quad (2.62)$$

em que ${}^0\mathbf{S}(u)$ corresponde ao termo de ordem zero (independente do azimuth) na expansão de Fourier do vetor de Stokes $\mathbf{S}(u, \phi)$.

Geralmente, é possível aproximar a luz estelar incidente como sendo monodirecional devido à grande distância entre o planeta e a estrela. O caso especial de um feixe paralelo que incide sobre o topo da camada plano-paralela na direção (μ_0, ϕ_0) é representado pelo vetor de Stokes:

$$\mathbf{S}_{inc}(\mu, \phi) = \delta(\mu - \mu_0)\delta(\phi - \phi_0)\pi\mathbf{F}_0, \quad (2.63)$$

em que δ é a delta de Dirac e $\pi\mathbf{F}_0$ é o fluxo incidente por unidade de área perpendicular ao feixe. Substituindo esta definição nas integrais da Equação 2.61, as expressões para os vetores emergentes simplificam-se para:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R(\mu, \phi) &= \mu_0\mathbf{R}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{S}_T(\mu, \phi) &= e^{-b/\mu}\delta(\mu - \mu_0)\delta(\phi - \phi_0)\pi\mathbf{F}_0 + \mu_0\mathbf{T}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Adicionalmente, é necessário considerar o cenário em que uma camada é iluminada a partir de sua base. Embora a atmosfera global seja iluminada predominantemente pela radiação estelar no topo, qualquer camada interna recebe também um fluxo ascendente, proveniente da reflexão em camadas inferiores ou na própria superfície planetária.

Representamos as propriedades ópticas para iluminação inferior utilizando a notação com asterisco (*):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R^*(\mu, \phi) &= \mu_0\mathbf{R}^*(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{S}_T^*(\mu, \phi) &= e^{-b/\mu}\delta(\mu - \mu_0)\delta(\phi - \phi_0)\pi\mathbf{F}_0 + \mu_0\mathbf{T}^*(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Por fim, podemos estender a descrição matricial de reflexão e transmissão para a radiação interna a uma profundidade óptica intermédia τ ($0 \leq \tau \leq b$). Definindo as matrizes de radiação difusa interna $\mathbf{U}$ (do inglês *Upward*) e $\mathbf{D}$ (do inglês *Downward*), e considerando $\mathbf{S}(\tau, -\mu, \phi)$ e $\mathbf{S}(\tau, \mu, \phi)$ como os vetores de Stokes para a radiação ascendente e descendente, respectivamente, obtemos para o caso de incidência monodirecional pelo topo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau, -\mu, \phi) &= \mu_0\mathbf{U}(\tau, \mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{S}(\tau, \mu, \phi) &= e^{-\tau/\mu}\delta(\mu - \mu_0)\delta(\phi - \phi_0)\pi\mathbf{F}_0 + \mu_0\mathbf{D}(\tau, \mu, \mu_0, \phi - \phi_0)\mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Analogamente à Equação 2.65, definem-se as matrizes $\mathbf{U}^*$ e $\mathbf{D}^*$ para o caso de iluminação pela base. O conjunto composto por $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^*$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}^*$ é denominado matrizes de espalhamento múltiplo. Estas grandezas sintetizam a resposta radiativa global do meio; a partir de suas definições, é possível obter uma descrição completa dos campos de radiação, tanto externos quanto internos, resultantes de um feixe incidente com estado de polarização

arbitrário.

2.3.3 O Método *Adding-Doubling*

Dentre os diversos métodos numéricos desenvolvidos para o tratamento do espalhamento múltiplo em atmosferas planetárias, o método de *Adding-Doubling* destaca-se pela sua precisão e eficiência computacional, tendo sido aplicado com sucesso em uma vasta gama de cenários físicos (ver compilação em Hovenier, Mee e Domke (2014, Capítulo 5)). Introduzido originalmente por Hulst (1963) e posteriormente estendido para incluir a descrição vetorial da luz polarizada por Hansen (1971a), o algoritmo fundamenta-se na discretização da atmosfera em subcamadas homogêneas. O princípio central do método reside na premissa de que, se as propriedades de reflexão e transmissão de duas camadas adjacentes são conhecidas, é possível determinar as propriedades da camada combinada calculando-se as múltiplas interações radiativas na interface entre elas. Nesta subseção, sintetizamos o formalismo do método adotando as diretrizes estabelecidas por Haan, Bosma e Hovenier (1987) e Hovenier, Mee e Domke (2014), com as devidas adaptações de notação para garantir a coerência com as definições apresentadas anteriormente.

Para o desenvolvimento do formalismo, consideramos duas camadas plano-paralelas superpostas e iluminadas exclusivamente pelo topo, conforme ilustrado na Figura 2.6. Denotamos a profundidade óptica das camadas superior e inferior por b' e b'' , respectivamente. Nesta configuração inicial, assume-se que não há superfície refletiva na base da camada inferior. O método parte da premissa de que as propriedades radiativas individuais de cada camada são previamente conhecidas, sendo representadas pelas matrizes de reflexão e transmissão ($\mathbf{R}'$, $\mathbf{T}'$ para a camada superior e $\mathbf{R}''$, $\mathbf{T}''$ para a inferior).

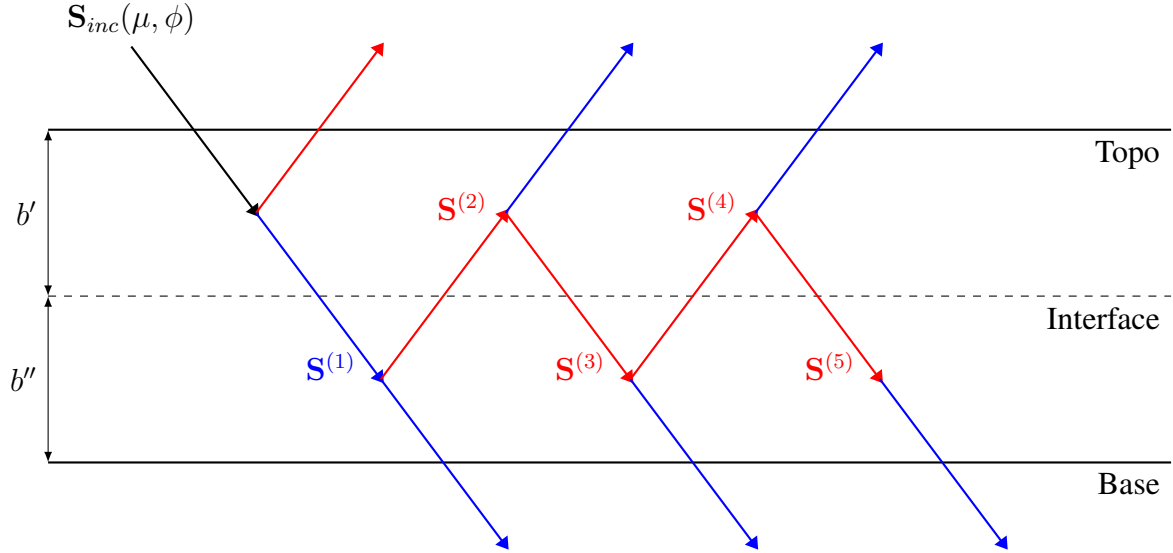
Como ilustrado na Figura 2.6, a radiação incidente no topo da atmosfera interage inicialmente com a camada superior. Parte dessa luz é refletida de volta para o espaço, enquanto o restante é transmitido, alcançando a interface entre as camadas. Denotamos por $\mathbf{S}^{(1)}$ a radiação descendente que cruza a interface pela primeira vez. De acordo com a Equação 2.61, este termo é composto pela luz direta atenuada e pela luz difusa transmitida:

$$\mathbf{S}^{(1)}(b', \mu, \phi) = e^{-b'/\mu} \mathbf{S}_{inc}(\mu, \phi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{T}'(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}_{inc}(\mu', \phi'). \quad (2.67)$$

Ao incidir na camada inferior, parte da radiação $\mathbf{S}^{(1)}$ é refletida para cima, cruzando a interface uma segunda vez. Este campo ascendente, $\mathbf{S}^{(2)}$, é determinado pelas propriedades de reflexão da camada inferior ($\mathbf{R}''$):

$$\mathbf{S}^{(2)}(b', \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{R}''(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}^{(1)}(b', \mu', \phi'). \quad (2.68)$$

Figura 2.6 – Representação esquemática do método *Adding-Doubling* para luz incidente no topo ($S_{inc}(\mu, \phi)$). Uma camada de profundidade óptica b' encontra-se superposta a uma camada de profundidade b'' , ambas isoladas no espaço (sem superfície refletiva na base). As setas indicam o fluxo de radiação difusa (ascendente ou descendente), em que as cores azul e vermelha representam a radiação transmitida e refletida, respectivamente. Os termos $S^{(i)}$ referem-se à radiação que atravessou a interface entre as duas camadas i vezes.



Fonte: Adaptado de Hovenier, Mee e Domke (2014).

Subsequentemente, este campo ascendente atinge a camada superior. A reflexão resultante gera um novo componente descendente, $S^{(3)}$, que cruza a interface pela terceira vez. Note-se que, neste passo, utilizamos a matriz de reflexão para iluminação pela base (R^*):

$$S^{(3)}(b', \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' R^*(\mu, \mu', \phi - \phi') S^{(2)}(b', \mu', \phi'). \quad (2.69)$$

Este processo de múltiplas reflexões internas continua indefinidamente, com a intensidade da radiação decaindo a cada interação devido à transmissão para fora do sistema e à absorção pelo meio. A soma desses termos forma uma série infinita. Para descrevê-la compactamente, definimos a matriz de interação Q_1 , que representa matematicamente o efeito de um ciclo completo de reflexão interna (reflexão na camada inferior seguida de reflexão na camada superior):

$$Q_1(\mu, \mu', \phi - \phi') = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu'' d\mu'' \int_0^{2\pi} d\phi'' R^*(\mu, \mu'', \phi - \phi'') R''(\mu'', \mu', \phi'' - \phi'). \quad (2.70)$$

Utilizando Q_1 , podemos reescrever a Equação 2.69:

$$\mathbf{S}^{(3)}(b', \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}_1(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}^{(1)}(b', \mu', \phi'). \quad (2.71)$$

De maneira análoga, obtemos a luz que cruza a interface pela quinta vez na direção descendente $\mathbf{S}^{(5)}$:

$$\mathbf{S}^{(5)}(b', \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}_1(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}^{(3)}(b', \mu', \phi'). \quad (2.72)$$

E combinando as Equações 2.71 e 2.72:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(5)}(b', \mu, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu'' d\mu'' \int_0^{2\pi} d\phi'' \mathbf{Q}_1(\mu, \mu'', \phi - \phi'') \times \\ &\times \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}_1(\mu'', \mu', \phi'' - \phi') \mathbf{S}^{(1)}(b', \mu', \phi') \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

A radiação descendente que cruza a interface pela quinta vez ($\mathbf{S}^{(5)}$) é resultante da radiação $\mathbf{S}^{(3)}$ que sofreu um ciclo adicional de reflexões. Matematicamente, isso equivale a aplicar o operador $\mathbf{Q}_1$ duas vezes sobre o campo inicial $\mathbf{S}^{(1)}$. Generalizando este raciocínio para qualquer ordem ímpar $(2p + 3)$, em que $p = 1, 2, \dots$ representa o número de ciclos adicionais, temos:

$$\mathbf{S}^{(2p+3)}(b', \mu, \phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}_{p+1}(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}^{(1)}(b', \mu', \phi'), \quad (2.74)$$

em que definimos recursivamente as matrizes de ordem superior $\mathbf{Q}_{p+1}$ como aplicações consecutivas do operador de interação original:

$$\mathbf{Q}_{p+1}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}_1(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{Q}_p(\mu', \mu_0, \phi' - \phi_0). \quad (2.75)$$

Através do operador de interação, podemos obter também uma expressão para a radiação descendente total na interface:

$$\begin{aligned} e^{-b'/\mu} \mathbf{S}_{inc}(\mu, \phi) &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{D}(b', \mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{S}_{inc}(\mu', \phi') \\ &= \mathbf{S}^{(1)}(b', \mu, \phi) + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{S}^{(2p+1)}(b', \mu, \phi). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Se considerarmos novamente uma fonte de luz monodirecional, como na Equação 2.63, obtemos para a matriz de radiação interna descendente (**D**) para as duas camadas combinadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(b', \mu, \mu_0, \phi - \phi_0) &= \mathbf{T}'(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) + \mathbf{Q}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)e^{-b'/\mu_0} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{Q}(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{T}'(\mu', \mu_0, \phi' - \phi_0), \end{aligned} \quad (2.77)$$

em que o termo **Q** representa a soma da série infinita dos operadores de interação:

$$\mathbf{Q}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{Q}_p(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0). \quad (2.78)$$

Uma demonstração formal da convergência desta série é apresentada por Mee (1986) para o caso de camadas homogêneas. No entanto, a convergência é fisicamente assegurada mesmo em meios heterogêneos (Haan; Bosma; Hovenier, 1987), visto que, a cada ciclo de interação, uma fração da radiação é inevitavelmente perdida para fora do sistema (via transmissão) ou extinta (via absorção), garantindo que a intensidade dos termos de ordem superior decaia progressivamente.

Uma vez determinada a radiação descendente na interface, é possível obter de maneira análoga expressões para as demais matrizes de espalhamento múltiplo. A radiação interna ascendente (**U**) resulta da reflexão pela camada inferior da luz que chega à interface (tanto a componente direta quanto a difusa):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(b', \mu, \mu_0, \phi - \phi_0) &= \mathbf{R}''(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)e^{-b'/\mu_0} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{R}''(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{D}(b', \mu', \mu_0, \phi' - \phi_0). \end{aligned} \quad (2.79)$$

A matriz de reflexão combinada do sistema (**R**) é composta pela reflexão da camada superior somada à radiação interna **U** que consegue atravessar a camada superior de volta para o espaço (via transmissão direta ou difusa):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) &= \mathbf{R}'(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) + e^{-b'/\mu} \mathbf{U}(b', \mu, \mu_0, \phi - \phi_0) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{T}^{*'}(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{U}(b', \mu', \mu_0, \phi' - \phi_0). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Finalmente, a matriz de transmissão combinada (**T**) é dada pela transmissão da camada inferior atuando sobre a luz que alcança a interface:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) &= \mathbf{T}''(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0)e^{-b'/\mu_0} + e^{-b''/\mu}\mathbf{D}(b', \mu, \mu_0, \phi - \phi_0) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu' d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{T}''(\mu, \mu', \phi - \phi') \mathbf{D}(b', \mu', \mu_0, \phi' - \phi_0). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Para a implementação computacional deste formalismo, é necessário converter as equações integrais (como a Equação 2.75) em operações algébricas. Isso é realizado através de duas aproximações padrão, de acordo com Haan, Bosma e Hovenier (1987):

- a) a expansão das matrizes de espalhamento em séries de Fourier para o ângulo azimutal, o que desacopla a dependência em $\phi - \phi_0$ e permite resolver o problema para cada modo de Fourier independentemente. A expressão usual para a expansão de Fourier de uma matriz $\mathbf{L}$ é:

$$\mathbf{L}(\mu, \mu', \phi - \phi') = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) [\mathbf{L}^{cm}(\mu, \mu') \cos m(\phi - \phi') + \mathbf{L}^{sm}(\mu, \mu') \sin m(\phi - \phi')], \quad (2.82)$$

em que $\delta_{m,0}$ é a delta de Kronecker, e $\mathbf{L}^{cm}$ e $\mathbf{L}^{sm}$ são as matrizes coeficientes da expansão;

- b) a discretização da integral em μ através de uma Quadratura Gaussiana, em que as integrais são substituídas por somatórios ponderados sobre um número finito de ângulos zenitais discretos (pontos de Gauss). Neste esquema discretizado, as quantidades integrais tornam-se operações entre matrizes $4n \times 4n$ compostas por submatrizes 4×4 , ou "supermatrizes". De maneira geral, uma supermatriz pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{L}_{4(i-1)+l, 4(j-1)+k}^m = \sqrt{2w_i\mu_i} \mathbf{L}_{lk}^m(\mu_i, \mu_j) \sqrt{2w_j\mu_j}, \quad (2.83)$$

em que $l, k = 1, 2, 3, 4$ e $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. w_i e μ_i são os pesos gaussianos e os pontos de quadratura no intervalo $\{0, 1\}$, respectivamente. Se introduzirmos duas outras supermatrizes $\mathbf{K}^m$ e $\mathbf{M}^m$, uma operação como da Equação 2.75 pode ser expressa por:

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{L}^m \mathbf{M}^m. \quad (2.84)$$

Assim, as propriedades de reflexão e transmissão da camada combinada ($\mathbf{R}_{comb}$ e $\mathbf{T}_{comb}$) podem ser obtidas a partir das propriedades das subcamadas individuais ($\mathbf{R}'$, $\mathbf{T}'$ e $\mathbf{R}''$, $\mathbf{T}''$) através do seguinte conjunto de equações algébricas, que constituem a base do algoritmo de *Adding*:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 &= \mathbf{R}^{*'} \mathbf{R}'' \\
\mathbf{Q}_{p+1} &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_p \\
\mathbf{Q} &= \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{Q}_p \\
\mathbf{D} &= \mathbf{T}' + \mathbf{Q} e^{-b'/\mu} + \mathbf{Q} \mathbf{T}' \\
\mathbf{U} &= \mathbf{R}'' e^{-b'/\mu} + \mathbf{R}'' \mathbf{D} \\
\mathbf{R}_{comb} &= \mathbf{R}' + e^{-b'/\mu} \mathbf{U} + \mathbf{T}^{*'} \mathbf{U} \\
\mathbf{T}_{comb} &= e^{-b''/\mu} \mathbf{D} + \mathbf{T}'' e^{-b'/\mu} + \mathbf{T}'' \mathbf{D}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

O método *Doubling* é um caso especial deste algoritmo em que as duas camadas são idênticas ($b' = b''$). O processo inicia-se com uma camada infinitesimal (em que prevalece o espalhamento simples) e, a cada iteração, a espessura óptica da atmosfera é duplicada ($b \rightarrow 2b \rightarrow 4b \dots$) até atingir a espessura total desejada. Se a atmosfera for heterogênea, utiliza-se o passo de *Adding* para somar camadas com propriedades ópticas distintas.

Em suma, o formalismo de *Adding-Doubling* aqui apresentado fornece a solução completa para o campo de radiação vetorial emergente de uma atmosfera plano-paralela arbitrária. As matrizes resultantes ($\mathbf{R}_{comb}$ e $\mathbf{T}_{comb}$) encerram toda a física do espalhamento múltiplo vertical. No entanto, a observação de um exoplaneta envolve a integração deste sinal local sobre a geometria esférica do disco planetário, vista sob diferentes ângulos de fase. A descrição desta geometria global e a definição das condições de contorno na superfície, fundamentais para a aplicação deste método a cenários astronômicos reais, serão abordadas nas seções seguintes.

2.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE

Conforme discutido nas seções anteriores, considera-se que a atmosfera planetária é iluminada externamente pelo topo. Se a superfície do planeta fosse um absorvedor perfeito (corpo negro), não haveria fluxo radiativo ascendente na base da atmosfera e, consequentemente, o conhecimento das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{U}$ seria suficiente para descrever o campo de radiação interno. No entanto, superfícies planetárias reais possuem refletividade não nula, abrangendo uma vasta gama de cenários como oceanos, desertos, vegetação e áreas cobertas por gelo. Em uma formulação geral, isso exigiria considerar a radiação incidente na base da atmosfera através dos termos de reflexão $\mathbf{D}^*$ e $\mathbf{U}^*$ (uma demonstração do esquema de computação para $\mathbf{D}^*$ e $\mathbf{U}^*$ pode ser encontrada em Hovenier, Mee e Domke (2014)). Alternativamente, neste trabalho adotamos a aproximação demonstrada por Takashima (1985), na qual a superfície é tratada como uma camada adicional semi-infinita sobre a qual as camadas atmosféricas são empilhadas. Esta abordagem permite resolver a interação superfície-atmosfera através de um único esquema de *Adding-Doubling*, restringindo a descrição do campo de radiação apenas às matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{U}$.

Matematicamente, a superfície atua como a fronteira inferior do domínio de transferên-

cia radiativa ($\tau = b$). No contexto do algoritmo descrito anteriormente, a interação com o solo é implementada atribuindo-se à matriz de reflexão da camada inferior ($\mathbf{R}''$ e $\mathbf{T}''$) as propriedades ópticas da superfície ($\mathbf{R}_S$ e $\mathbf{T}_S$).

A forma funcional de $\mathbf{R}_S$ e $\mathbf{T}_S$ depende da composição química, do estado físico (sólido ou líquido) e da rugosidade do terreno. A seguir, exploramos dois modelos que delimitam os cenários de interesse para exoplanetas rochosos: a reflexão difusa Lambertiana e a reflexão direcional de oceanos rugosos.

2.4.1 Superfície Lambertiana

O modelo de superfície Lambertiana descreve um refletor idealmente difuso, que redistribui a radiação incidente isotropicamente em todas as direções do hemisfério superior, independentemente do ângulo de incidência da luz. Uma característica fundamental deste modelo é que ele despolariza completamente a radiação refletida, independentemente do estado de polarização da luz incidente.

Consequentemente, a matriz de reflexão assume uma forma simplificada, em que apenas o elemento de intensidade (R_{11}) é não nulo e constante:

$$\mathbf{R}_{Lamb}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = A_s \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

em que A_s é o albedo da superfície (frequentemente associado ao albedo de Bond local). Ademais, em uma superfície lambertiana ideal não há transmissão direta, portanto, definimos $\mathbf{T}_S = 0$. Embora constitua uma idealização física, a superfície Lambertiana é amplamente utilizada na modelagem exoplanetária como uma referência (*baseline*) para representar superfícies rugosas despolarizantes, como solos de silicato, rególitos ou camadas espessas de gelo, permitindo isolar os efeitos polarimétricos gerados puramente pela atmosfera. Adicionalmente, este modelo é frequentemente empregado para definir a condição de contorno inferior em gigantes gasosos ($\tau = \infty$). Apesar da ausência de uma superfície sólida nestes corpos, as camadas atmosféricas profundas e opticamente espessas atuam como um meio de intenso espalhamento múltiplo, comportando-se efetivamente como um refletor difuso e despolarizante para a radiação incidente.

2.4.2 Superfície Oceânica e o Modelo de Cox-Munk

Em contraste com o comportamento difuso idealizado, uma superfície líquida (como um oceano global) atua como um refletor direcional. A interação da luz na interface entre dois meios dielétricos, neste caso a atmosfera (índice de refração $n_1 \approx 1$) e o oceano ($n_2 \approx 1,33$), é governada pelas equações de Fresnel. Se a superfície fosse perfeitamente plana e calma, a

reflexão seria puramente especular.

A razão entre as amplitudes dos campos elétricos refletido e incidente para as componentes perpendicular (r_s) e paralela (r_p) ao plano de incidência local é dada pelos coeficientes de amplitude de Fresnel:

$$r_s = \frac{\cos \theta_i - n_{rel} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n_{rel} \cos \theta_t}, \quad \text{e} \quad r_p = \frac{n_{rel} \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n_{rel} \cos \theta_i + \cos \theta_t}, \quad (2.87)$$

em que $n_{rel} = n_2/n_1$ é o índice de refração relativo, θ_i é o ângulo de incidência e θ_t o ângulo de transmissão (relacionados pela Lei de Snell). A partir destes coeficientes, a matriz de reflexão de Fresnel para o vetor de Stokes adquire a forma:

$$\mathbf{R}_{Fresnel}(\theta_i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_s^2 + r_p^2 & r_p^2 - r_s^2 & 0 & 0 \\ r_p^2 - r_s^2 & r_s^2 + r_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2r_s r_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r_s r_p \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Do ponto de vista polarimétrico, este mecanismo introduz uma forte polarização linear no feixe refletido, atingindo 100% (para luz incidente não polarizada) quando a luz incide no Ângulo de Brewster ($\theta_B = \arctg(n_{rel})$) (Trees; Stam, 2019), que para a interface ar-água ocorre em aproximadamente 53° .

No entanto, oceanos reais em exoplanetas habitáveis estão sujeitos à tensão de cisalhamento provocada por ventos superficiais, o que gera ondas e destrói a condição geométrica de espelho perfeito. Para incorporar essa física no processo de transferência radiativa, adotamos o modelo estatístico de rugosidade de Cox e Munk (Cox; Munk, 1954). Neste formalismo, a superfície do oceano é tratada como uma coleção de microfacetas independentes, cada uma atuando como um refletor de Fresnel em miniatura. A orientação das normais dessas facetas segue uma distribuição de probabilidade Gaussiana isotrópica dependente da inclinação da faceta (μ_n). A variância dessa distribuição (σ^2) cresce linearmente com a velocidade do vento (v_{vento} , em metros por segundo) acima da superfície:

$$\sigma^2 = 0,003 + 0,00512 v_{vento}. \quad (2.89)$$

Com isso, a matriz de reflexão bidirecional ou BRDF (do inglês *Bidirectional Reflectance Distribution Function*) $\mathbf{R}_{CM}$ para o oceano rugoso pode ser expressa ponderando-se a matriz de Fresnel pela probabilidade da faceta estar orientada na direção necessária para refletir a luz da estrela (μ_0) em direção ao observador (μ):

$$\mathbf{R}_{CM}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = \frac{\pi}{\mu_0} \frac{\text{PDF}(\mu_n, \sigma) S(\mu, \mu_0, \sigma)}{4\mu\mu_n} \mathbf{L}(-\xi_2) \mathbf{R}_{Fresnel}(\mu_i, n_1, n_2) \mathbf{L}(-\xi_1), \quad (2.90)$$

em que $\text{PDF}(\mu_n, \sigma)$ é a distribuição de probabilidade das normais das facetas de onda por uni-

dade de ângulo sólido, expressa analiticamente por:

$$\text{PDF}(\mu_n, \sigma) = \frac{1}{\pi\sigma^2\mu_n^3} \exp\left(-\frac{1-\mu_n^2}{\sigma^2\mu_n^2}\right). \quad (2.91)$$

Neste formalismo, μ , μ_n , μ_i e μ_0 são os cossenos dos ângulos em relação ao zênite local para a direção de propagação do feixe refletido, a normal da faceta de onda, o ângulo de reflexão de Fresnel e a direção de incidência, respectivamente. Adicionalmente, o modelo incorpora a função de sombreamento $S(\mu, \mu_0, \sigma)$ (Smith, 1967), que corrige a conservação de energia do sistema subtraindo a contribuição de ondas que ocultam umas às outras sob ângulos rasantes.

O cálculo desta matriz exige também a aplicação de matrizes de rotação de Stokes ($\mathbf{L}(-\xi_1)$ e $\mathbf{L}(-\xi_2)$, em que ξ é um ângulo de referência entre dois planos) antes e depois da matriz de reflexão $\mathbf{R}_{\text{Fresnel}}$ (Hovenier; Mee; Domke, 2014). Matrizes de rotação são expressas por:

$$\mathbf{L}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\xi & \sin 2\xi & 0 \\ 0 & -\sin 2\xi & \cos 2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

Estas rotações alinham o plano de referência do feixe incidente com o plano de espalhamento intrínseco da microfaceta, e posteriormente com o plano meridiano do feixe refletido.

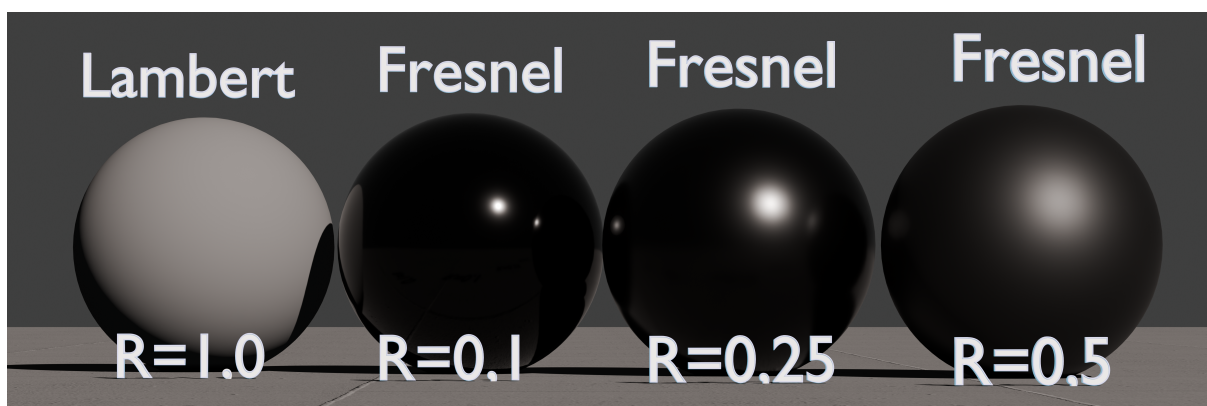
Além da reflexão estritamente direcional na interface ar-água, uma representação realista do oceano requer a contabilização da luz que penetra a superfície (espalhamento subsuperficial) e da reflexão difusa gerada pela espuma da quebra das ondas (*whitecaps*) (Koepke, 1986). O espalhamento múltiplo no corpo d'água puro é o responsável pela coloração azulada dos oceanos, enquanto a espuma atua como um refletor branco, cuja fração de cobertura aumenta exponencialmente com a velocidade do vento.

Enquanto simulações mais complexas acoplam fisicamente o corpo d'água à atmosfera através de camadas oceânicas adicionais no algoritmo de *Adding-Doubling* (Trees; Stam, 2019), neste trabalho adotamos uma parametrização analítica eficiente para mitigar o elevado custo computacional. O espalhamento subsuperficial e a espuma são modelados através de uma matriz de transmissão pré-calculada de maneira análoga à Equação 2.90 e um albedo superficial dependente da velocidade do vento e do comprimento de onda. Esta abordagem permite recuperar as propriedades de intensidade em banda larga (cor) características do planeta, mantendo isolado o rigor do sinal polarimétrico do *glint* superficial.

O efeito macroscópico final dessa modelagem é o alargamento do reflexo especular em um cone de espalhamento mais difuso e estendido espacialmente, conhecido como *glint* oceânico. A modelagem da polarização associada a este *glint*, capaz de preservar sua assinatura mesmo através de espalhamento Rayleigh atmosférico e coberturas parciais de nuvens, constitui

uma das ferramentas mais robustas para a detecção de água líquida e avaliação de habitabilidade em exoplanetas terrestres (Trees; Stam, 2019; Trees; Stam, 2022). Na Figura 2.7, apresentamos uma comparação visual do efeito do alargamento do reflexo especular em esferas com diferentes níveis de rugosidade superficial.

Figura 2.7 – Comparação qualitativa dos perfis de reflexão em superfícies esféricas. À esquerda, uma superfície Lambertiana ideal, caracterizada por um espalhamento perfeitamente difuso, com parâmetro de rugosidade $R = 1$. À direita, três superfícies governadas pelas equações de Fresnel com diferentes graus de rugosidade macroscópica (aumentando da esquerda para a direita $R = 0,1$, $R = 0,25$ e $R = 0,5$). A rugosidade alarga o cone de reflexão especular, distribuindo o *glint* central por uma área maior da superfície. Imagem gerada utilizando o renderizador Cycles (Blender Online Community, 2025), adotando a distribuição de microfacetas GGX como análoga visual ao modelo de Cox-Munk. A tonalidade em escala de cinza foi ajustada para representar o albedo típico em luz visível destes cenários astrofísicos: um albedo difuso elevado para a cobertura continental/desértica na esfera Lambertiana, e um fundo escuro absorvente característico do corpo d'água para as esferas de Fresnel.



Fonte: O autor.

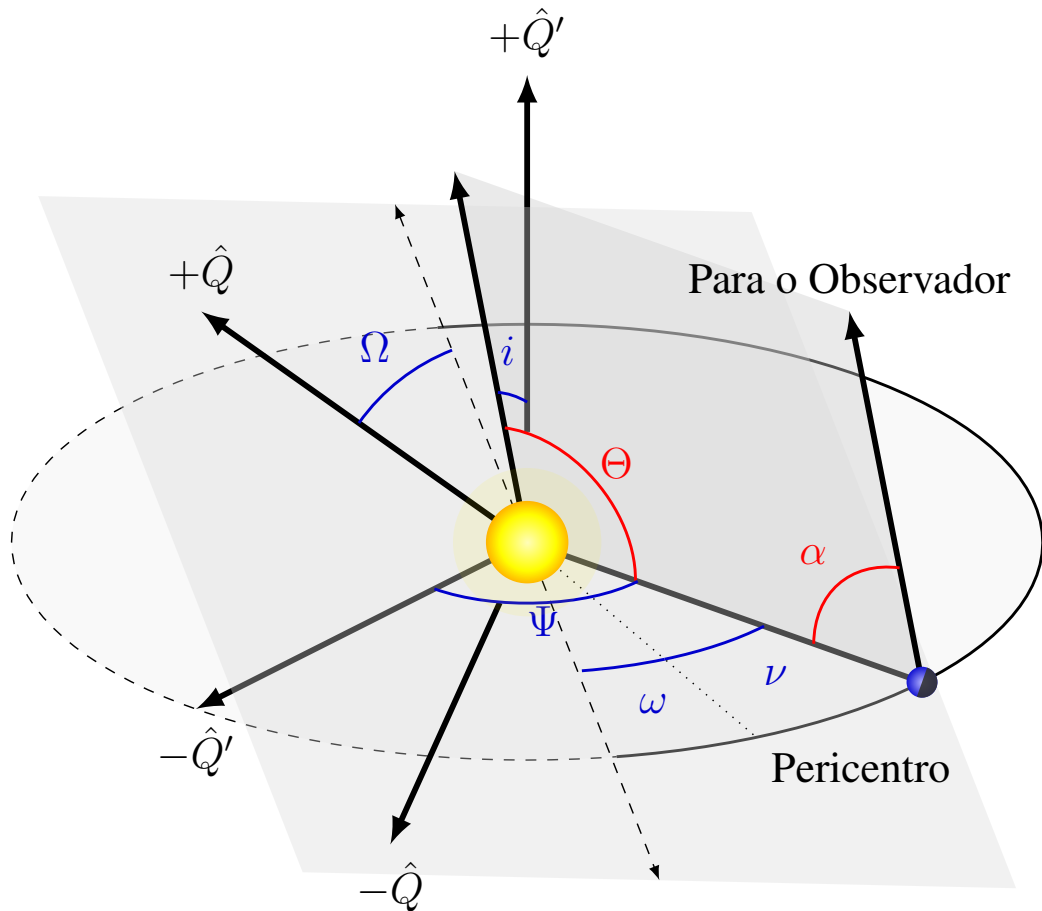
2.5 GEOMETRIA ORBITAL

Nas discussões precedentes, a descrição do campo de radiação restringiu-se ao cenário de uma atmosfera plano-paralela sob uma geometria de espalhamento local fixa. Contudo, no contexto observacional, exoplanetas encontram-se a distâncias interestelares, manifestando-se como fontes pontuais não resolvidas espacialmente. Consequentemente, o sinal polarimétrico mensurável pelo telescópio não corresponde à radiância de um único ponto, mas sim ao fluxo integrado proveniente de toda a região simultaneamente iluminada e visível do disco planetário. Para tratar do comportamento dinâmico de um planeta em órbita de uma estrela, é necessário redefinir o sistema de coordenadas utilizado nas equações de espalhamento local, para um sistema global.

A abordagem padrão consiste em adotar o plano de espalhamento planetário, definido como o plano que contém as posições da estrela, do planeta e do observador (cf. Figura 2.8). Neste referencial, a posição relativa do planeta em sua órbita em relação ao observador determina o ângulo de fase α . Para uma órbita Kepleriana geral, a posição do planeta no plano orbital

é governada pela sua anomalia verdadeira ν (coordenada angular entre o pericentro e a posição do planeta na órbita) e pelo argumento do periastro ω (coordenada angular do pericentro em relação à longitude do nó ascendente Ω). O ângulo de fase relaciona-se com a inclinação orbital i através da projeção geométrica do sistema, conforme o formalismo delineado em Kane e Gelino (2010)¹:

Figura 2.8 – Representação geométrica dos parâmetros orbitais e vetoriais do sistema. A estrela, em amarelo, situa-se na origem e o planeta, em azul, é representado em uma fase orbital arbitrária. Os ângulos fundamentais são classificados cromaticamente: em **vermelho**, os parâmetros de espalhamento (ângulo de fase α e ângulo de espalhamento Θ); em **azul**, os parâmetros orbitais (inclinação i , fase orbital Ψ , longitude do nó ascendente Ω , argumento do pericentro ω e anomalia verdadeira ν). A elipse define o plano orbital, enquanto o paralelogramo cinza centrado na estrela representa o plano do céu (perpendicular à linha de visada). A linha tracejada que atravessa a estrela indica a linha dos nós, definida pela intersecção entre os dois planos; visualmente, a porção tracejada da órbita localiza-se atrás do plano do céu, enquanto a parte contínua projeta-se à frente. A direção de referência para a polarização linear $+\hat{Q}'$ é paralela à normal do plano orbital, enquanto o estado ortogonal $-\hat{Q}'$ encontra-se contido neste plano. Por fim, as direções de referência do observador, $+\hat{Q}$ e $-\hat{Q}$, encontram-se no plano do céu, indicando as direções celestes Norte e Leste, respectivamente.



Fonte: Adaptado de Kolokolova e Hough (2015).

¹Nos textos de Kane e Gelino (2010) e na revisão de Perryman (2018), encontramos esta relação representada incorretamente sem o sinal negativo. Contudo, a formulação apresentada aqui é desenvolvida considerando explicitamente a convenção de fase cheia para $\alpha = 0^\circ$, o que torna necessário o sinal.

$$\cos \alpha = -\sin(\omega + \nu) \sin i. \quad (2.93)$$

Nesta convenção, o trânsito (conjunção inferior, em que o observador visualiza apenas o lado noturno, $\alpha = 180^\circ$) ocorre quando $\omega + \nu = 90^\circ$, assumindo $i = 90^\circ$. Por sua vez, a conjunção superior (fase totalmente iluminada, $\alpha = 0^\circ$) corresponde a $\omega + \nu = 270^\circ$. Para o caso particular de uma órbita perfeitamente circular ($e = 0$), a anomalia verdadeira avança linearmente com o tempo e a quantidade $(\omega + \nu)$ reduz-se a um deslocamento de fase constante em relação ao momento da conjunção inferior (trânsito), tal que $\omega + \nu = \Psi + 90^\circ$, em que $\Psi = 2\pi(t - t_0)/P_{orb}$ é denominada de fase orbital temporal, e $t - t_0$ corresponde ao tempo desde a conjunção inferior (Kolokolova; Hough, 2015). No entanto, a formulação baseada em ν é adotada por sua validade universal, garantindo o tratamento correto da variação de velocidade angular em órbitas elípticas ($e > 0$). A anomalia verdadeira relaciona-se com a separação orbital instantânea r_{orb} entre a estrela e o planeta, o semieixo maior da órbita a e a excentricidade e através da equação da trajetória:

$$r_{orb} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (2.94)$$

e, consequentemente, a relação entre o semieixo maior e o período orbital P_{orb} é dada pela 3ª Lei de Kepler:

$$P_{orb}^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_\star + M_p)} a^3, \quad (2.95)$$

em que G , $M_\star$ e M_p correspondem à constante gravitacional universal, à massa da estrela e à massa do planeta, respectivamente (Perryman, 2018).

Na Figura 2.8, estabelecemos duas bases vetoriais distintas e fundamentais para a descrição do estado de polarização, necessárias para conectar a simulação física à observação astronômica.

O primeiro referencial, denotado pelas quantidades linhadas (Q', U') , é intrínseco à geometria do sistema planetário. Nesta convenção, a direção de referência para a polarização linear positiva $(+\hat{Q}')$ é definida paralelamente à projeção da normal do plano orbital no plano do céu. Este é o sistema natural para a modelagem numérica, pois preserva a simetria da órbita e independe da orientação momentânea do sistema em relação às coordenadas celestes terrestres.

O segundo referencial, denotado pelas quantidades não-linhadas (Q, U) , representa o sistema do observador no plano do céu. Aqui, a direção de referência $+\hat{Q}$ é convencionalmente alinhada com o Norte Celeste (ou com o eixo vertical do instrumento). A relação entre estes dois sistemas é determinada pela orientação espacial da órbita no céu, parametrizada pela longitude do nó ascendente Ω .

Visto que os parâmetros de Stokes I e V são invariantes sob rotação do sistema de coordenadas (representando a intensidade total e a polarização circular, respectivamente), a

transformação afeta apenas as componentes de polarização linear. A conversão do referencial orbital para o referencial do observador é realizada através da aplicação da matriz de rotação de Stokes $\mathbf{L}(\Omega)$ (de maneira semelhante a Equação 2.92):

$$\begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\Omega & -\sin 2\Omega \\ \sin 2\Omega & \cos 2\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

A distinção entre esses dois sistemas de referência é o que permite traduzir as observações (obtidas no referencial Q, U), para a análise numérica do sistema (feita naturalmente sobre Q', U') (Kolokolova; Hough, 2015).

2.5.1 Integração do Sinal Planetário

Com o sistema de coordenadas global e os vetores de referência definidos, o vetor de fluxo $\mathbf{F}(\alpha)$ mensurável pelo observador é obtido através da integração da radiância refletida sobre a área projetada do disco planetário.

Primeiramente, descrevemos a radiação local emergente de um ponto na superfície. A radiância refletida $\mathbf{S}$, definida no referencial do meridiano local, relaciona-se com o fluxo estelar incidente $\mathbf{F}_0$ através da matriz de reflexão local $\mathbf{R}$ (Equação 2.64). No entanto, para somar as contribuições de diferentes pontos da superfície, é necessário rotacionar os parâmetros de Stokes locais para o plano de espalhamento planetário (o referencial global). Esta transformação é realizada pela matriz de rotação $\mathbf{L}(\beta)$, em que β é o ângulo entre o meridiano local e o plano de espalhamento. Assim, a radiância local rotacionada é dada por:

$$\mathbf{S}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) = \mu_0 \mathbf{L}(\beta) \mathbf{R}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) \mathbf{F}_0. \quad (2.97)$$

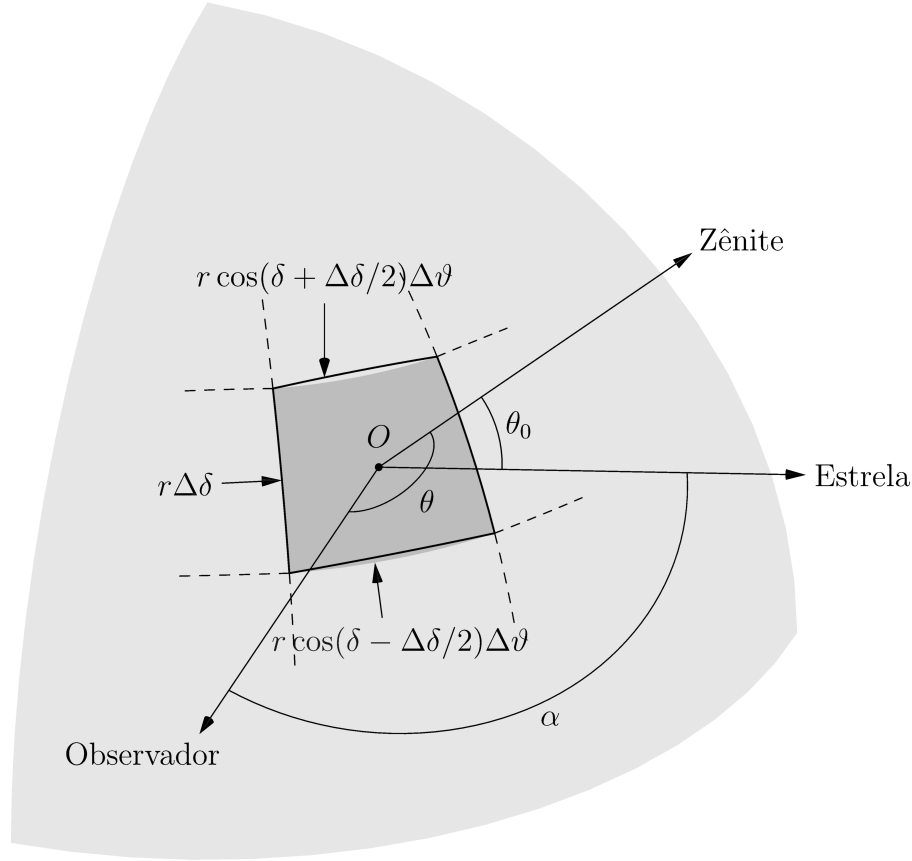
Desta maneira, o fluxo total refletido pelo planeta, que atinge um observador localizado a uma distância d , resulta da integração desta radiância sobre toda a área iluminada e visível do disco:

$$\pi \mathbf{F}(\alpha) = \frac{1}{d^2} \int_{\mathbb{D}} \mu \mathbf{S}(\mu, \mu_0, \phi - \phi_0) dO, \quad (2.98)$$

em que $\mu dO/d^2$ é o elemento de ângulo sólido subtendido pelo disco planetário. O domínio de integração (indicado pela fase visível do planeta $\mathbb{D}$) e a variação dos ângulos locais são determinados considerando a geometria de reflexão ilustrada na Figura 2.9, em que consideramos um ponto O na superfície do planeta com latitude δ e longitude ϑ .

A normalização padrão para $\pi \mathbf{F}(\alpha)$ parte da definição de que em $\alpha = 0^\circ$ (conjunção superior, iluminação total), o primeiro elemento do fluxo normalizado (indicado por $\bar{\mathbf{F}}$) corresponde ao albedo geométrico do planeta (A_g). Por sua vez, o albedo geométrico é definido como a razão entre o fluxo espalhado na fase 0° e o fluxo refletido por uma esfera Lambertiana perfeitamente refletiva.

Figura 2.9 – Esquema da geometria de reflexão no ponto O sobre o exoplaneta, com latitude δ e longitude ϑ . As quantidades r , θ , θ_0 e α representam o raio planetário, o ângulo zenital de observação, o ângulo zenital de incidência e o ângulo de fase planetário, respectivamente. O elemento de área cinza escuro (associado ao diferencial dO) representa a área no planeta subtendida pelo elemento de latitude $\Delta\delta$ e pelo elemento de longitude $\Delta\vartheta$.



Fonte: Adaptado de Trees e Stam (2022)

$$\bar{\mathbf{F}}(\alpha) = \frac{\pi \mathbf{F}(\alpha)}{\pi F_0} \frac{d^2}{r^2}, \quad (2.99)$$

em que r é o raio do planeta.

O procedimento adotado na avaliação da Equação 2.98 consiste em dividir a superfície do planeta em elementos de área ΔO_{ij} , centrados nos pontos O_{ij} com coordenadas (δ_i, ϑ_j) e dimensões angulares $\Delta\delta$ e $\Delta\vartheta$ (como ilustrado na Figura 2.9), de modo que:

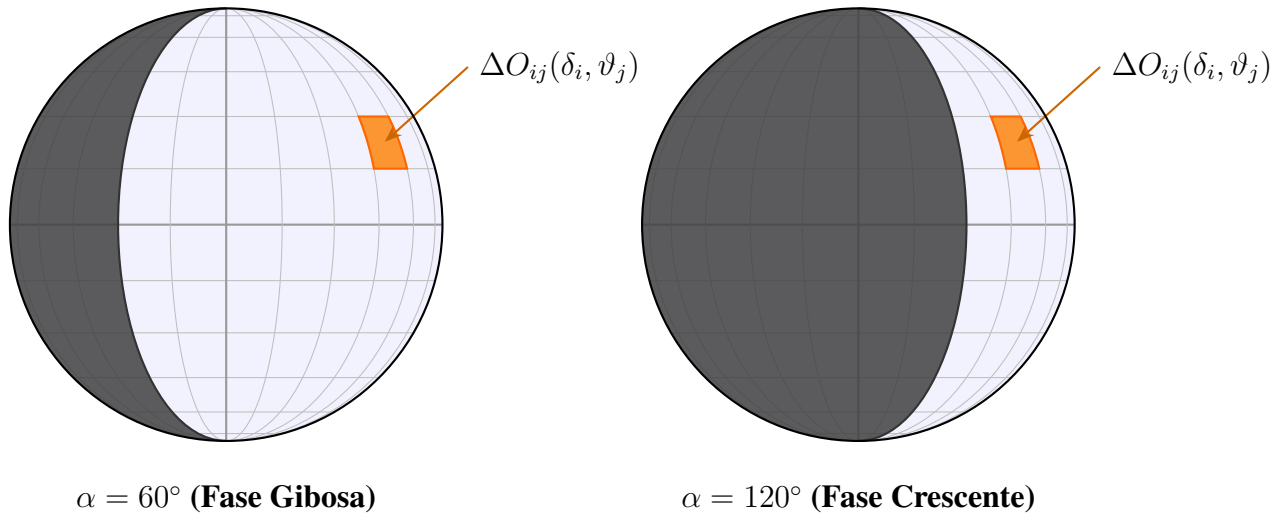
$$\Delta O_{ij} = \int_{\vartheta_j - \Delta\vartheta/2}^{\vartheta_j + \Delta\vartheta/2} \int_{\delta_i - \Delta\delta/2}^{\delta_i + \Delta\delta/2} r^2 \cos \delta d\delta d\vartheta = 2r^2 \Delta\vartheta \cos \delta_i \sin(\Delta\delta/2). \quad (2.100)$$

Combinando as equações 2.97 e 2.99 e substituindo a integração em 2.98 por um somatório em i, j , obtemos:

$$\bar{\mathbf{F}}(\alpha) \approx \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \mu_{0ij} \mathbf{L}(\beta_{ij}) \mathbf{R}_{ij}(\mu_{ij}, \mu_{0ij}, \phi_{ij} - \phi_{0ij}) \frac{\mu_{ij} \Delta O_{ij}}{\pi r^2}, \quad (2.101)$$

em que N e M correspondem ao número de divisões em latitude e longitude na malha, respectivamente. A Figura 2.10 ilustra a definição dos intervalos considerados no cálculo do fluxo em função da fase. A delimitação das posições válidas de integração é determinada pela posição do terminador, a linha geométrica que separa os hemisférios diurno e noturno do planeta. Desta forma, o algoritmo garante que apenas as regiões da grade que estão simultaneamente iluminadas pela estrela e visíveis para o observador contribuam para o sinal integrado (Trees; Stam, 2022).

Figura 2.10 – Esquema da discretização do disco planetário visível através de uma malha de latitudes e longitudes (δ, ϑ) , abordagem natural para a modelagem numérica de exoplanetas heterogêneos. À esquerda, o planeta em fase gibosa ($\alpha = 60^\circ$); à direita, em fase crescente ($\alpha = 120^\circ$). A região sombreada escurecida representa o hemisfério noturno, delimitado pelo terminador. O elemento de área destacado em laranja ilustra um "pixel" isolado da malha (ΔO_{ij}), centrado nas coordenadas locais (δ_i, ϑ_j) , que permanece fixo na grade rotacional do planeta independentemente do avanço da fase.



Fonte: O autor.

2.5.2 Efeitos Geométricos Adicionais

As formulações de integração do disco planetário descritas até o momento assumem que o planeta é uma esfera perfeita e que o sinal observável provém estritamente da luz estelar refletida. Contudo, a modelagem de exoplanetas reais frequentemente exige a incorporação de efeitos geométricos adicionais que quebram essa simetria idealizada, com destaque para o achatamento planetário e a polarização de ocultação durante o trânsito.

O achatamento (ou elipticidade) é um fenômeno esperado para planetas gasosos e anãs marrons que possuem altas taxas de rotação. Dinamicamente, a força centrífuga deforma o

corpo, resultando em um raio equatorial (R_{eq}) significativamente maior que o raio polar (R_{pol}). O grau de achatamento f é definido geometricamente como $f = (R_{eq} - R_{pol})/R_{eq}$. Do ponto de vista polarimétrico, a deformação oblata quebra a simetria esférica do disco iluminado. Mesmo para uma atmosfera perfeitamente homogênea, essa assimetria impede o cancelamento hemisférico exato da luz espalhada, gerando uma polarização líquida inerente ao formato do planeta. Na integração numérica (Equação 2.101), a introdução do achatamento exige a redefinição do vetor normal à superfície local e altera o cálculo do elemento de área ΔO_{ij} , tornando a contribuição dependente da orientação do eixo de rotação em relação ao observador. Chakrabarty, Sengupta e Marley (2022) apresentam uma discussão detalhada sobre a assinatura polarimétrica de planetas oblatos auto-luminosos, que serve como base teórica para a nossa implementação puramente geométrica.

Outro cenário geométrico ocorre nas vizinhanças da conjunção inferior ($\alpha \approx 180^\circ$). Durante o trânsito planetário, a presença do exoplaneta introduz uma assinatura polarimétrica que não provém do espalhamento na atmosfera do planeta, mas sim da própria estrela hospedeira. A radiação emitida por uma estrela esférica apresenta uma polarização líquida praticamente nula quando integrada sobre todo o disco (Carciofi; Magalhães, 2005), e esse aspecto representa uma das maiores vantagens da polarimetria para o estudo de exoplanetas porque permite considerar a polarização estelar como nula em todos os desenvolvimentos que apresentamos neste capítulo. No entanto, ao resolvermos o disco estelar, observa-se uma variação da polarização do centro para o limbo, originada por processos de opacidade de espalhamento (como o espalhamento Rayleigh em estrelas frias, ou espalhamento Thomson em estrelas quentes) na atmosfera estelar. Essa polarização de limbo possui um padrão centrossimétrico que pode, no entanto, ser drasticamente afetado por heterogeneidades superficiais, como manchas estelares.

Quando o planeta transita em frente à estrela, ele atua como um disco opaco que oculta porções específicas desse padrão, quebrando a simetria geométrica sobre o disco projetado. Esse bloqueio assimétrico impede o cancelamento perfeito dos vetores de polarização estelares, resultando em uma polarização linear líquida observável que varia conforme a ocultação progride. Em nossas simulações, esse efeito é implementado através da adoção de um perfil radial de polarização estelar, de maneira semelhante a metodologia aplicada por Carciofi e Magalhães (2005), permitindo prever a assinatura polarimétrica temporal do sistema estrela-planeta durante o evento de trânsito. Adicionalmente, como discretizamos a superfície estelar de maneira análoga ao procedimento demonstrado na Equação 2.100, é possível simular a presença de manchas estelares através de máscaras circulares sobre a superfície, de maneira semelhante ao desenvolvimento de Silva (2003), e assim prever o impacto do cruzamento de um planeta sobre uma mancha na assinatura polarimétrica do sistema.

Por fim, um efeito cinemático fundamental que introduz uma modulação temporal no sinal polarimétrico, e que foi incorporado em nossas simulações, é a rotação planetária. Em termos observacionais, uma estimativa empírica da taxa de rotação de um exoplaneta pode ser

obtida através do alargamento ou desvio Doppler observado na espectroscopia de alta resolução, como demonstrado para o gigante gasoso β Pictoris b (Snellen et al., 2014). No contexto da polarimetria de fontes não resolvidas espacialmente, a rotação torna-se uma variável observacional crítica quando o planeta apresenta heterogeneidades em sua superfície ou atmosfera, tais como continentes, oceanos ou coberturas parciais de nuvens, e consequentemente, uma alternativa promissora em relação a espectroscopia. À medida que o corpo rotaciona em torno de seu próprio eixo, diferentes características geográficas entram e saem do hemisfério iluminado e visível. Essa variação contínua da refletividade local sobre a área do disco altera dinamicamente o balanço do espalhamento, impedindo o cancelamento hemisférico dos vetores e gerando uma modulação periódica nos parâmetros de Stokes integrados. Computacionalmente, a simulação da rotação é realizada através da aplicação de matrizes de transformação geométrica dependentes do tempo, que giram a malha de latitudes e longitudes (ilustrada na Figura 2.10) em relação aos referenciais fixos da estrela e do observador. Esse formalismo viabiliza o mapeamento longitudinal de exoplanetas através da análise conjunta de suas curvas fotométricas e polarimétricas.

3 METODOLOGIA COMPUTACIONAL E VALIDAÇÃO FÍSICA

A transição do formalismo teórico para a modelagem de cenários astrofísicos realistas exige uma arquitetura computacional capaz de conciliar o rigor físico estabelecido no capítulo anterior com a flexibilidade necessária para simular os aspectos dinâmicos e a variabilidade inerente a planetas heterogêneos, especialmente quando consideramos que a Equação 2.101 não possui solução analítica na maioria dos casos de interesse. Este capítulo detalha a metodologia desenvolvida para a simulação de assinaturas polarimétricas em exoplanetas, fundamentada na construção de um *pipeline* numérico integrado.

Inicialmente, a Seção 3.1 foca na física local através da utilização do código `PyMieDAP` para a resolução da transferência radiativa em atmosferas plano-paralelas e a incorporação de condições de contorno de superfície com espalhamento direcional, como delineado na Seção 2.4. Na Seção 3.2, descrevemos uma expansão significativa do código `Pyngles` para o tratamento do sistema estrela-planeta, incluindo a modelagem de efeitos de heterogeneidade espacial e dinâmica orbital. Na Seção 3.3, introduzimos técnicas de geração procedural, especificamente o Ruído Perlin, utilizadas neste trabalho com o objetivo de parametrizar as condições geográficas e climáticas de exoplanetas para a análise polarimétrica. A validação do *framework* computacional é feita através de experimentos numéricos e casos de estudo apresentados na Seção 3.4.

3.1 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA GLOBAL: O CÓDIGO `PyMieDAP`

Desenvolvido por Rossi, Berzosa-Molina e Stam (2018), o código `PyMieDAP` é uma ferramenta modular projetada para o cálculo do fluxo polarizado refletido por atmosferas planetárias. Sua arquitetura consiste em uma interface de alto nível em Python, que atua como um *wrapper* para as rotinas numéricas de transferência radiativa implementadas em Fortran, de acordo com a formulação descrita na Seção 2.3. Essa separação estrutural alia a flexibilidade na definição dos parâmetros atmosféricos à alta eficiência computacional exigida pela resolução do método de *Adding-Doubling*, viabilizando a obtenção das matrizes de reflexão e transmissão de forma otimizada.

3.1.1 Construção da Atmosfera Planetária e Integração Numérica

Um modelo atmosférico pode ser construído no `PyMieDAP` através do empilhamento de camadas plano-paralelas horizontais e homogêneas. O usuário tem a flexibilidade de parametrizar cada camada fornecendo diretamente a sua profundidade óptica ou sua pressão. No segundo caso, a profundidade óptica de espalhamento molecular $\tau^m(\lambda)$ para uma dada camada, delimitada pelas pressões em sua base (p_{base}) e em seu topo (p_{topo}), é calculada internamente assumindo equilíbrio hidrostático, de acordo com a relação (Rossi; Berzosa-Molina; Stam, 2018):

$$\tau^m(\lambda) = \sigma^m(\lambda) N_A \frac{p_{base} - p_{topo}}{\bar{\mu}g}, \quad (3.1)$$

em que $\sigma^m(\lambda)$ é a seção de choque de extinção molecular, N_A é a constante de Avogadro, $\bar{\mu}$ é a massa molecular média do gás e g corresponde à aceleração da gravidade local. Cabe ressaltar que os parâmetros planetários e atmosféricos (m , g e a composição do gás) são definidos livremente pelo usuário, conferindo ao modelo a versatilidade necessária para simular desde exoplanetas rochosos até gigantes gasosos. Adicionalmente, a rotina calcula a matriz de fase do espalhamento molecular de Rayleigh internamente, exigindo como parâmetros de entrada o fator de despolarização da mistura gasosa e o índice de refração do gás dependente do comprimento de onda.

Além da componente gasosa (sujeita ao espalhamento molecular de Rayleigh), a arquitetura do código permite a inserção de partículas esféricas em suspensão (aerossóis e condensados de nuvens) em qualquer estrato da atmosfera. Estas partículas são parametrizadas através do seu raio efetivo (r_{eff}), da sua variância efetiva (v_{eff}), do índice de refração complexo n , da profundidade óptica de aerossóis na camada e do modelo de distribuição de tamanhos. Neste trabalho, adotamos primariamente a distribuição Gamma Padrão. A partir destas propriedades microfísicas, o PyMieDAP calcula diretamente as matrizes de espalhamento único locais utilizando o formalismo da Teoria de Mie, conforme fundamentado na Seção 2.2.

Após a definição da atmosfera estratificada, a profundidade óptica, o albedo de espalhamento único e a matriz de espalhamento único de cada camada são repassados para o algoritmo de *Adding-Doubling*. O resultado deste processamento numérico é exportado na forma de coeficientes de Fourier da matriz de reflexão planetária, os quais são armazenadas em arquivos de dados (extensão `.dat`) (Rossi; Berzosa-Molina; Stam, 2018).

3.1.2 Adaptação das Condições de Contorno: Superfície Oceânica

Em sua formulação original, o PyMieDAP restringe a condição de contorno inferior da atmosfera a um modelo de reflexão Lambertiana, caracterizado por um espalhamento perfeitamente difuso e despolarizante. Contudo, para simular cenários astrofísicos realistas que contemplem oceanos líquidos, a descrição direcional e polarizada da luz refletida torna-se imprescindível.

Do ponto de vista computacional, para traduzir os fenômenos físicos introduzidos na Seção 2.4, expandimos a descrição da matriz de reflexão da superfície (BRDF polarimétrica) para avaliar a direcionalidade da reflexão oceânica. No código, a BRDF total sobre a malha de quadratura Gaussiana é modelada internamente como a combinação linear de três processos radiativos distintos descritos na Seção 2.4: a aplicação do modelo estatístico de Cox-Munk; a injeção de uma fração de cobertura de espuma com reflexão lambertiana e alto albedo superficial; e a aplicação das matrizes de transmissão pré-calculadas para simular o espalhamento subsuperficial.

Uma vez construída a BRDF total sobre os pontos de Gauss, o algoritmo executa a sua expansão em uma série de Fourier em relação à diferença azimutal. Devido à isotropia azimutal, as componentes da espuma e do espalhamento subsuperficial contribuem exclusivamente para o termo de ordem zero ($m = 0$). Em contrapartida, o espalhamento altamente direcional do *glint* exige a computação de algumas centenas de modos de Fourier (tipicamente $m \sim 250$) para garantir a convergência óptica no esquema de *Adding-Doubling*.

Para viabilizar este acoplamento numérico sem instabilidades, a rotina aplica um filtro de suavização de Lanczos (σ -*smoothing*) aos coeficientes da série. Esta etapa de filtragem matemática é fundamental para mitigar o fenômeno de Gibbs, suprimindo as oscilações numéricas espúrias que o truncamento da série de Fourier introduziria na matriz de reflexão final do planeta oceânico.

3.2 INTEGRAÇÃO GLOBAL E DINÂMICA: O CÓDIGO `Pryngles`

Embora o `PyMieDAP` possua rotinas nativas capazes de integrar o fluxo refletido e gerar mapas de polarização para planetas com coberturas de nuvens heterogêneas, a gama de fenômenos astrofísicos exploráveis por esta ferramenta é limitada por sua representação estática e bidimensional do disco planetário. Para modelar adequadamente efeitos tridimensionais complexos, como o achatamento, a cinemática rotacional de superfícies e a oclusão geométrica durante trânsitos, faz-se necessária a transição para uma arquitetura de integração global e dinâmica. É neste contexto que introduzimos a expansão do código `Pryngles`.

O `Pryngles`, desenvolvido por Zuluaga, Sucerquia e Alvarado-Montes (2022) em Python, foi idealizado com o objetivo de investigar a reflexão difusa em sistemas exoplanetários contendo anéis. A sua formulação nativa é capaz de reproduzir cenários de trânsito de maneira geometricamente consistente com pacotes computacionais extensivamente validados na literatura (como o `batman` (Kreidberg, 2015) e o `pyPplusS` (Rein; Ofir, 2019)), além de simular a assinatura fotométrica de reflexão por corpos difusos em função da fase orbital.

3.2.1 O *Pipeline* de Acoplamento Polarimétrico

O aspecto fundamental que viabiliza a integração numérica do espalhamento vetorial, a partir das matrizes de reflexão pré-computadas pelo `PyMieDAP`, é a discretização geométrica do corpo planetário. No `Pryngles`, a superfície (ou o topo da atmosfera) é mapeada através de uma malha tridimensional composta por elementos de área finitos, planos e circulares, nativamente denominados *spangles* (termo derivado da analogia com lantejoulas refletivas).

Cada *spangle* atua como um refletor local independente. Eles possuem coordenadas espaciais e vetores normais rigorosamente especificados em relação a múltiplos referenciais de transformação (estrela, planeta e observador), além de encapsularem todas as propriedades ópticas e polarimétricas ditadas pela região da malha em que se encontram. Adicionalmente, para evitar distorções de área e o acúmulo de pontos nas regiões polares, a distribuição destes

spangles sobre as superfícies esféricas do modelo (planeta e estrela) é realizada através de uma amostragem em espiral de Fibonacci (Zuluaga; Sucerquia; Alvarado-Montes, 2022). Esta técnica garante a partição da área superficial com um nível de uniformidade consideravelmente maior em comparação com métodos de distribuição aleatória ou malhas de longitude-latitude (González, 2010).

A lógica de acoplamento das matrizes de reflexão a cada *spangle*, implementada por Veenstra et al. (2025), ocorre através de um módulo de extensão de alto desempenho em C. É fundamental ressaltar que essa integração fundamenta-se na Aproximação de Pixel Independente (IPA - *Independent Pixel Approximation*). Sob esta premissa, assume-se que a curvatura planetária é localmente nula na escala geométrica de cada *spangle*, tratando cada elemento de área como uma atmosfera plano-paralela isolada. Durante o processamento, o módulo em C lê os arquivos (.dat) com os coeficientes de Fourier e executa uma rotina de interpolação bidimensional baseada em *splines* para obter os coeficientes que caem entre os ângulos pré-calculados. Essa interpolação atua estritamente sobre a grade de cossenos dos ângulos zenitais locais de incidência estelar (μ_0) e emissão para o observador (μ). A dependência azimutal ($\Delta\phi$), por sua vez, é avaliada analiticamente através da soma da série de Fourier para os coeficientes extraídos.

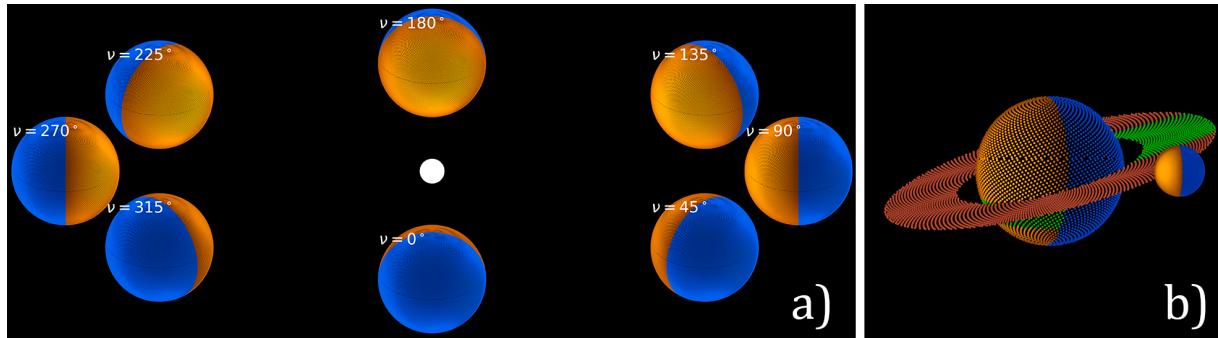
Com os coeficientes interpolados em mãos, o algoritmo reconstrói a matriz de reflexão de cada *spangle*, a partir da avaliação da série de Fourier. Como a formulação polarimétrica exige um sistema de coordenadas coerente, a extensão em C encarrega-se de aplicar uma matriz de transformação geométrica aos parâmetros Q e U do vetor de Stokes local. Esse passo rotaciona e alinha o plano de espalhamento de cada refletor individual ao plano de referência global do observador.

Entretanto, a integração numérica do fluxo polarizado de todo o disco planetário não engloba a totalidade da malha de forma cega. O algoritmo aplica filtros geométricos de visibilidade e iluminação, garantindo que apenas os *spangles* posicionados no lado diurno do sistema ($\mu_0 > 0$) e voltados para a linha de visada ($\mu > 0$) contribuam para o sinal final, zerando a contribuição de elementos não iluminados ou oclusos. Esses filtros definem diretamente os intervalos da soma na Equação 2.101.

Na Figura 3.1 ilustramos as possíveis condições de iluminação consideradas. A Figura 3.1(a) demonstra diferentes geometrias de iluminação e observação em função da anomalia verdadeira (ν), em que é possível distinguir a porção iluminada (em laranja) e não iluminada (em azul) do planeta. Complementarmente, a Figura 3.1b ilustra a versatilidade da malha tridimensional em um instante específico, destacando as transições entre regiões iluminadas, não iluminadas e áreas sob a sombra projetada de outros corpos do sistema (como anéis ou satélites) em verde. A cada passo de integração, o *pipeline* computacional reavalia dinamicamente quais elementos da malha atendem aos critérios visuais, materializando com precisão as curvas de fase fotométricas e polarimétricas. Em ambas as figuras, a renderização discreta dos corpos torna visível a distribuição uniforme dos próprios *spangles* gerados pela amostragem de

Fibonacci.

Figura 3.1 – Representação espacial da discretização geométrica do modelo do `Pryngles`. Em (a), a variação da porção iluminada do planeta em função da anomalia verdadeira (ν). Em (b), a visualização tridimensional da malha de *spangles* de um sistema planetário complexo, em que o algoritmo determina dinamicamente o estado de cada refletor local (iluminado em laranja, escuro em azul ou ocluído pela sombra de anéis e luas em verde) com base em sua exposição geométrica.



Fonte: O autor.

3.2.2 Mapas de Polarização

Embora nosso objetivo principal seja a validação do sinal integrado para exoplanetas não resolvidos, um passo intermediário importante é a construção de mapas de configuração espacial e polarimétricos para o disco planetário resolvido. Estes mapas desempenham duas funções distintas: no caso da modelagem do sinal integrado, a visualização do disco atua como uma ferramenta de validação direta do algoritmo de *Adding-Doubling* para cada *spangle* e, fundamentalmente, como validação das transformações geométricas locais descritas adiante. Ademais, a geração de mapas pode ser utilizada diretamente na modelagem de observações de corpos do Sistema Solar, para os quais a resolução espacial do disco é viável.

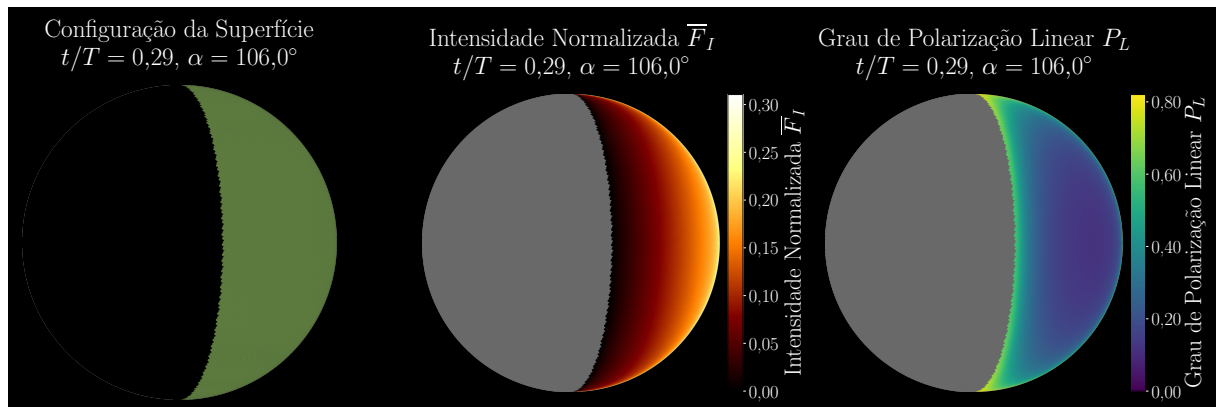
Para manter o custo computacional relativamente baixo e a aplicação restrita ao ambiente Python, a renderização dos mapas é feita através da projeção da malha esférica tridimensional sobre o plano do céu do observador. Cada *spangle* é desenhado como uma elipse sob a perspectiva do observador. A excentricidade e a orientação desta elipse são governadas diretamente pelo vetor normal local $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ da faceta no referencial do observador. O semieixo maior da elipse permanece paralelo ao plano do céu, enquanto o semieixo menor é contraído pelo fator n_z (equivalente geométrico ao cosseno do ângulo de observação μ) e a inclinação do semieixo maior é dada por $\text{atan2}(n_x, -n_y)$ (a projeção da normal no plano do céu). Esse procedimento provém diretamente da lógica de integração para cada elemento de área (Equação 2.101, em que utilizamos o fator $\mu_{ij}\Delta O_{ij}$), e representa um aprimoramento visual significativo em relação aos métodos de visualização nativos do `Pryngles` (como os diagramas de iluminação da Figura 3.1), porque permite preservar a informação sobre a normal na superfície esférica mesmo em um diagrama bidimensional, além de eliminar discontinuidades inerentes ao método de *spangles* se uma resolução suficientemente alta for utilizada.

Através desta técnica de renderização, podemos mapear espacialmente os parâmetros de Stokes calculados sobre cada *spangle*. A partir deste ponto, todas as grandezas absolutas de intensidade e fluxo polarizado apresentadas nos mapas e nas curvas de fase referem-se à normalização do disco estabelecida na Equação 2.99. Assim, denotaremos os observáveis integrados e normalizados por $\overline{F}_I$, $\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$. O grau de polarização linear (P_L), por ser uma razão, independe dessa normalização.

As Figuras 3.2 e 3.3 ilustram este procedimento para dois cenários físicos distintos, gerados a partir de um planeta com propriedades físicas e atmosféricas análogas às da Terra (como raio, pressão, distância até a estrela, etc), porém com uma atmosfera completamente isenta de aerossóis e nuvens (espalhamento Rayleigh puro). Todos os mapas são renderizados utilizando 50000 *spangles* no total. Além disso, a região em cinza representa a fração do planeta com *spangles* inativos ou não iluminados.

A Figura 3.2 apresenta os mapas de configuração superficial, de intensidade da luz refletida normalizada e do grau de polarização linear para um planeta homogêneo com superfície lambertiana (representada em verde como identificador de cobertura continental). O planeta é observado em um ângulo de fase $\alpha = 106^\circ$. Neste regime, a intensidade refletida distribui-se de maneira suave e contínua ao longo de todo o hemisfério iluminado, maximizando-se sob o ponto subestelar, enquanto a polarização é vista com maior intensidade próxima à linha do terminador.

Figura 3.2 – Mapas de disco resolvido para um modelo de planeta com superfície difusa homogênea (continentes) sob uma fase de $\alpha = 106^\circ$. Da esquerda para a direita: a máscara de configuração espacial definindo as propriedades locais da malha; a intensidade refletida normalizada ($\overline{F}_I$), evidenciando um decaimento suave do ponto subestelar em direção ao terminador; e o Grau de Polarização Linear (P_L) local originado pelo espalhamento atmosférico, predominante próximo ao terminador. O parâmetro t/T indicado nos painéis representa a fração temporal do período orbital.

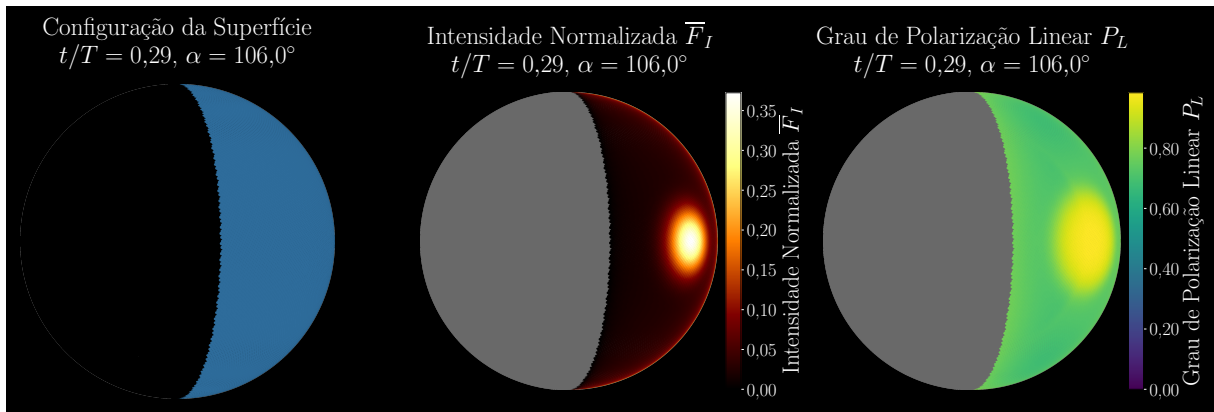


Fonte: O autor.

Em contrapartida, a Figura 3.3 apresenta os mapas correspondentes a uma superfície oceânica homogênea (representada em azul no mapa de configuração) sob o mesmo ângulo de fase de $\alpha = 106^\circ$. O mapa de intensidade revela de maneira clara o forte reflexo especular direcional, conhecido como *glint* oceânico, parametrizado por uma velocidade de vento $v_{\text{vento}} =$

7 m/s (de maneira análoga à Trees e Stam (2019)). Devido à correspondência desta geometria de observação com o ângulo de Brewster para a interface ar-água ($i \approx 53^\circ$, logo $\alpha \approx 106^\circ$), o grau de polarização linear (P_L) atinge sua eficiência máxima local. Consequentemente, a região de polarização máxima do disco coincide espacialmente com a localização do *glint*, evidenciando a assinatura polarimétrica fracionária característica de superfícies líquidas. É importante ressaltar que, fora da condição geométrica do ângulo de Brewster, o padrão do grau de polarização linear pode se tornar consideravelmente mais complexo, de modo que o seu pico não coincidirá necessariamente com o *glint* oceânico.

Figura 3.3 – Mapas de disco resolvido para um modelo de planeta com superfície oceânica homogênea com $v_{\text{vento}} = 7$ m/s sob uma fase de $\alpha = 106^\circ$. Da esquerda para a direita: a máscara de configuração espacial em azul indicando o corpo d’água; a intensidade refletida normalizada ($\bar{F}_I$), evidenciando o intenso pico direcional correspondente ao *glint* oceânico; e o Grau de Polarização Linear (P_L), revelando a forte polarização confinada à mesma região do *glint* devido à incidência próxima ao ângulo de Brewster. O parâmetro t/T indicado nos painéis representa a fração temporal do período orbital.



Fonte: O autor.

3.2.3 Implementação do Achatamento Planetário

Conforme discutido na Seção 2.5.2, a introdução do achatamento planetário exige algumas adaptações ao cálculo da malha planetária. Computacionalmente, a transição da malha esférica nativa do `Pryngles` para uma configuração oblata é feita através de quatro passos sequenciais no escopo da simulação:

1. **Escala da Malha Esférica:** Para moldar o elipsoide, as coordenadas cartesianas locais (x, y, z) da malha esférica original são multiplicadas por uma matriz de escala afim. Utiliza-se o raio equatorial ($R_{p,\text{equ}}$) como fator de escala para os eixos x e y , e o raio polar ($R_{p,\text{polar}}$) para o eixo z .
2. **Recálculo das Normais:** Para preservar o cálculo dos ângulos de incidência, espalhamento e das rotações no plano de Stokes, é necessário recalculá-las o vetor normal de cada

spangle. A direção normal é obtida a partir do gradiente da superfície paramétrica do elipsoide, resultando no vetor unitário $\hat{n}$:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{|\vec{n}|} \left(\frac{x}{R_{p,\text{equ}}^2}, \frac{y}{R_{p,\text{equ}}^2}, \frac{z}{R_{p,\text{polar}}^2} \right). \quad (3.2)$$

3. **Correção da Área Local do *Spangle*:** O estiramento geométrico da malha quebra a uniformidade da área intrínseca das facetas geradas pelo método de Fibonacci. Para corrigir o peso de integração de cada elemento (ΔO_{ij}), o algoritmo aplica um fator de correção diferencial dependente da latitude normalizada do *spangle*, definida como $z_{\text{norm}} = z/R_{p,\text{polar}}$. A área base da faceta é multiplicada por:

$$f_{\text{area}} = \sqrt{(1 - z_{\text{norm}}^2) \left(\frac{R_{p,\text{polar}}}{R_{p,\text{equ}}} \right)^2 + z_{\text{norm}}^2}. \quad (3.3)$$

4. **Área Projetada Dinâmica:** A área da silhueta total do planeta visível no plano do céu (A_p), um fator de normalização crítico para a avaliação de grandezas absolutas como o albedo geométrico, deixa de ser um disco de área constante (πR_p^2). A nova área projetada passa a depender dinamicamente do vetor unitário da linha de visada do observador no referencial equatorial, definido como $\hat{u}_{\text{obs}} = (u_x, u_y, u_z)$:

$$A_p = \pi R_{p,\text{equ}} \sqrt{R_{p,\text{polar}}^2 (u_x^2 + u_y^2) + R_{p,\text{equ}}^2 u_z^2}. \quad (3.4)$$

Com a introdução do achatamento e a consequente variação da área da silhueta, a normalização do fluxo refletido deve ser adaptada. Na integração numérica do disco oblato governada pela Equação 2.101, o termo constante πR_p^2 no denominador é substituído analiticamente pela área projetada dinâmica A_p (Equação 3.4). Esta substituição garante a conservação da definição geométrica do albedo local, independentemente da orientação do eixo de rotação em relação ao observador.

A definição dos raios $R_{p,\text{equ}}$ e $R_{p,\text{polar}}$ é feita sob a condição de conservação de volume com base no raio R_p de um planeta esférico. Partindo da igualdade:

$$\frac{4}{3} \pi R_p^3 = \frac{4}{3} \pi R_{p,\text{equ}}^2 R_{p,\text{polar}}, \quad (3.5)$$

e considerando $R_{p,\text{polar}} = R_{p,\text{equ}}(1 - f)$, em que f é o fator de achatamento, obtemos:

$$R_{p,\text{equ}} = R_p(1 - f)^{-1/3}, \quad (3.6)$$

$$R_{p,\text{polar}} = R_{p,\text{equ}}(1 - f) = R_p(1 - f)^{2/3}. \quad (3.7)$$

Até o momento, exploramos apenas casos ilustrativos em que o observador está alinhado ao equador do planeta. No entanto, ao introduzirmos o achatamento, pequenos desvios na inclinação orbital ou a presença de obliquidade podem gerar assinaturas polarimétricas específicas que não são observáveis em planetas esféricos. Os efeitos detalhados dessas variações geométricas são discutidos na Seção 3.4.

3.2.4 Cinemática e Rotação Planetária

A implementação da cinemática rotacional planetária é estruturada em nossa expansão do `Pryngles` através da aplicação de uma transformação linear dependente do tempo t sobre a configuração inicial da malha. O processo é dividido em três etapas:

1. **Cálculo da Fase Rotacional:** O ângulo de rotação instantâneo $\theta(t)$ é definido com base no período de rotação do planeta P_{rot} e na sua fase inicial q_0 :

$$\theta(t) = \left(\frac{2\pi t}{P_{\text{rot}}} + q_0 \right), \quad (3.8)$$

em que o sinal positivo define a rotação no sentido anti-horário como visto do polo norte.

2. **Matriz de Rotação 3D:** Como o referencial local da malha (o referencial equatorial) é definido de modo que o eixo polar coincida sempre com o eixo z , a transformação é puramente azimutal. Definimos a matriz de rotação $R_z(\theta)$:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

3. **Atualização Vetorial Dinâmica:** A cada avanço na posição orbital, a malha é atualizada multiplicando-se as coordenadas cartesianas iniciais ($\vec{r}_{\text{equ},0}$) pela matriz R_z . A mesma transformação é aplicada aos vetores normais do elipsoide ($\hat{n}_{\text{equ},0}$), garantindo que as normais continuem perpendiculares à superfície após o deslocamento.

Fisicamente, a rotação é relacionada ao achatamento de acordo com a relação de Darwin-Radau (Chakrabarty; Sengupta; Marley, 2022):

$$f = \frac{\Omega^2 R_{p,\text{equ}}}{g} \left[\frac{5}{2} \left(1 - \frac{3K}{2} \right)^2 + \frac{2}{5} \right]^{-1}, \quad (3.10)$$

em que Ω é a taxa de rotação, g é a gravidade superficial e $K = I/(M_p R_{p,\text{equ}}^2)$ é um fator determinado pelo momento de inércia I e a massa do planeta M_p . Em primeira ordem, I não depende do achatamento e pode ser calculado sob a condição de esfericidade (Barnes; Fortney, 2003). Adicionalmente, a mesma transformação rotacional pode ser aplicada à malha da estrela para simular a dinâmica da fotosfera.

3.2.5 Trânsito, Polarização de Limbo e Manchas Estelares

A simulação de um trânsito planetário no código modificado baseia-se na projeção e sobreposição das malhas da estrela e do exoplaneta no plano do céu do observador, de maneira semelhante à adotada no código `batman` (Kreidberg, 2015).

Em nosso modelo, a estrela é simulada por uma malha de milhares de *spangles* (especificamente no trânsito, uma malha da ordem de 10^5 *spangles* faz-se necessária para suprimir artefatos visuais e numéricos causados pela discretização espacial), aos quais associamos uma intensidade radiativa própria. Essa intensidade é modulada por um perfil radial de escurecimento de limbo de acordo com modelos de transferência radiativa pré-calculados de Kostogryz et al. (2016).

No cálculo do fluxo resultante durante o trânsito, a contribuição dos *spangles* estelares ocultados pelo disco do planeta é desconsiderada no esquema de integração. Ou seja, o fluxo estelar observado é obtido exclusivamente por meio do somatório das intensidades dos *spangles* radiativos não ocultados.

Neste ponto, introduzimos uma otimização fundamental na descrição do disco planetário. Uma vez que os detalhes da superfície do exoplaneta são inobserváveis durante o trânsito primário (pois o hemisfério visível encontra-se não iluminado), substituímos a malha discreta de *spangles* do planeta por uma fronteira elíptica analítica e contínua. Essa abordagem não apenas reduz drasticamente o custo computacional, como também elimina o ruído numérico associado ao serrilhado das bordas discretas. Assim, mantemos a consistência geométrica com a modelagem do achatamento descrita anteriormente.

A representação da fotosfera por meio de *spangles* facilita a introdução de manchas estelares através de máscaras circulares parametrizadas por posição (latitude e longitude), raio (em frações do raio estelar) e contraste, de maneira análoga à metodologia descrita por Silva (2003). Adicionalmente, o modelo possibilita a subdivisão estrutural da mancha, definindo regiões distintas de umbra e penumbra mediante a aplicação de fatores de atenuação específicos para cada área. Por fim, o efeito de escorço geométrico (*foreshortening*) é considerado: à medida que a mancha se aproxima do limbo estelar devido à rotação, sua seção transversal circular sofre uma distorção aparente, sendo projetada no plano do céu do observador como uma elipse.

Na Figura 3.4, apresentamos uma comparação entre um trânsito calculado utilizando a formulação analítica do `batman` e a nossa integração numérica no `Pryngles`, junto à visualização da sobreposição do disco do planeta sobre o disco da estrela, como visto pelo observador em um instante representativo do evento de trânsito. É importante notar que, no painel de resíduos, a utilização da máscara elíptica contínua descrita acima resulta em uma diferença máxima de apenas $\approx 0,05$ ppm (ou $\approx 5 \cdot 10^{-6}\%$). Este valor, caracterizado majoritariamente pelo ruído limite proveniente da discretização espacial da estrela, representa uma melhoria substancial em relação aos modelos de trânsito puramente discretos. Destaca-se, em especial, a comparação

com a implementação original do `Pryngles` (Zuluaga; Sucerquia; Alvarado-Montes, 2022), que, ao computar a ocultação a partir da soma das áreas dos *spangles* planetários discretos, obteve um ruído residual da ordem de $\approx 10^{-3}\%$ quando comparado ao `batman`.

Para validar a implementação geométrica das manchas estelares e atestar a sensibilidade da simulação a eventos de cruzamento (*spot-crossing*), elaboramos um cenário de teste qualitativo contendo manchas genéricas de grande escala. Como demonstrado na Figura 3.5, a passagem do exoplaneta sobre regiões de menor temperatura efetiva (umbra e penumbra) resulta em uma redução temporária da fração de fluxo brilhante que é bloqueada pelo disco planetário. Esse efeito produz os característicos aumentos anômalos de fluxo (*bumps*) no fundo da curva de luz, rompendo a simetria do trânsito. Esses desvios são mapeados e isolados no painel de resíduos em relação ao modelo analítico.

Além da modulação fotométrica, adaptamos a formulação semi-analítica de Kostogryz, Yakobchuk e Berdyugina (2015) para extrair o sinal polarimétrico durante o trânsito. Até o momento, consideramos a luz da estrela hospedeira como sendo completamente não polarizada quando integrada sobre o disco. Essa simplificação é utilizada na construção do `PyMieDAP` e do `Pryngles`, e é corroborada observacionalmente para estrelas FGK de baixa atividade (Cotton et al., 2017). Durante o trânsito, entretanto, essa premissa deixa de ser válida.

A radiação estelar torna-se linearmente polarizada em regiões próximas ao limbo, predominantemente devido ao espalhamento de fótons por elétrons livres (espalhamento Thomson) e por átomos ou moléculas (espalhamento Rayleigh). O vetor campo elétrico da radiação polarizada orienta-se tangencialmente à borda do disco. Para uma estrela esfericamente simétrica, a integração desse campo de polarização sobre todo o disco visível resulta em um sinal líquido nulo, devido ao cancelamento vetorial das componentes ortogonais. Contudo, a sobreposição do disco planetário ou a presença de manchas quebra essa simetria, produzindo um grau de polarização linear observável.

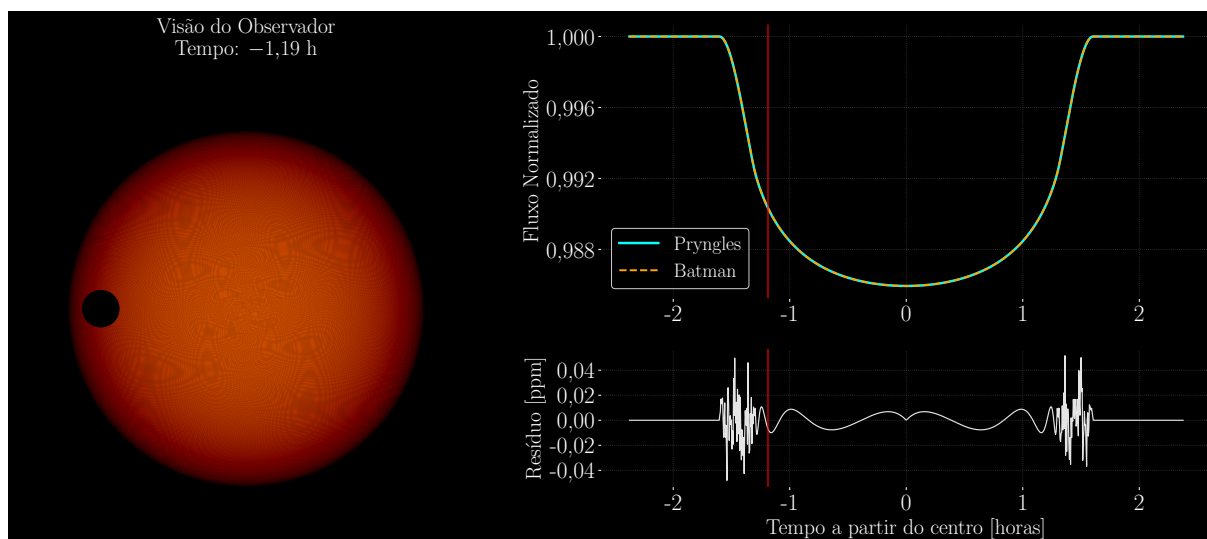
Em nossa implementação, atribuímos a cada *spangle* estelar um grau de polarização local $P(\mu)$ através da interpolação sobre a grade de modelos pré-calculados de Kostogryz et al. (2016) para diferentes valores da temperatura efetiva T_{eff} , gravidade superficial $\log g$ e comprimento de onda λ .

Para a modelagem polarimétrica das manchas estelares, adotamos a premissa de que as regiões de umbra e penumbra seguem o mesmo perfil radial da fotosfera. A assinatura polarimétrica gerada pelas heterogeneidades surge, portanto, do contraste puramente termodinâmico e geométrico, sem a introdução de efeitos magnetopolarimétricos de banda estreita (como o efeito Zeeman). A partir do grau de polarização local estelar dependente da geometria do limbo, reconstruímos os parâmetros de Stokes lineares para cada *spangle* j da fotosfera de acordo com:

$$Q_j = I_j(\mu)P_j(\mu) \cos(2\phi_j), \quad (3.11)$$

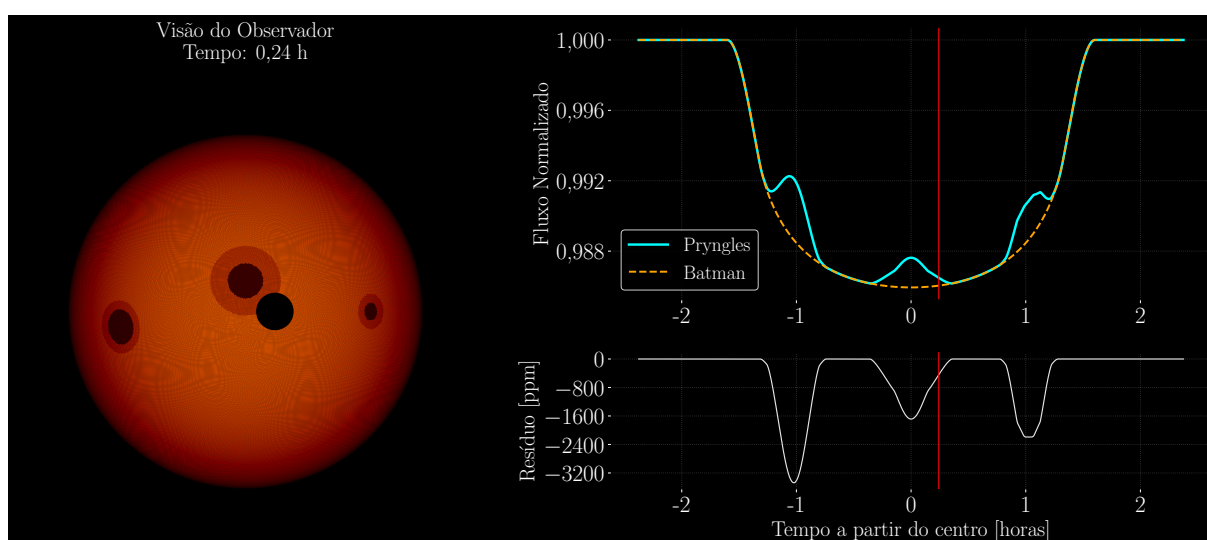
$$U_j = I_j(\mu)P_j(\mu) \sin(2\phi_j), \quad (3.12)$$

Figura 3.4 – Validação geométrica do trânsito primário. À esquerda, a representação espacial do disco estelar e a silhueta geométrica projetada do exoplaneta no plano do céu do observador. À direita, no painel superior, a comparação entre a curva de luz gerada pela integração numérica discreta (Pryngles) e a solução analítica (batman). No painel inferior, os resíduos da subtração entre os modelos, evidenciando uma concordância da ordem de 10^{-2} ppm. A linha vertical vermelha indica o instante exato de tempo correspondente à projeção espacial exibida no quadro à esquerda.



Fonte: O autor.

Figura 3.5 – Trânsito primário com eventos de *spot-crossing*. À esquerda, o disco estelar modelado com três manchas, e o disco planetário exatamente no centro do trânsito. À direita (topo), a curva de luz integrada pelo Pryngles (linha ciano) revela anomalias positivas de fluxo (*bumps*) nos instantes em que a silhueta do planeta cruza as manchas frias, divergindo do perfil contínuo de uma estrela sem manchas previsto pelo modelo batman (linha tracejada laranja). O painel inferior isola o resíduo gerado por essas estruturas, que atinge milhares de partes por milhão (ppm).



Fonte: O autor.

em que a intensidade $I_j(\mu)$ engloba as correções do escurecimento de limbo e é escalonada linearmente para baixo pelos fatores de contraste das regiões de umbra e penumbra, caso o *spangle* incida sobre uma mancha. Essa supressão local da radiância resulta na redução proporcional das componentes de Stokes Q_j e U_j , impedindo o cancelamento vetorial simétrico do disco e originando o sinal líquido observável de *spot-crossing*. O ângulo azimutal ϕ_j denota a posição do *spangle* no referencial projetado do observador.

Por fim, o vetor de Stokes total do sistema a cada instante de tempo é obtido através da soma algébrica das componentes I , Q e U (assumindo a contribuição circular $V \approx 0$) de todos os *spangles* radiativos que não são ocultados pela silhueta do planeta. A partir desta implementação, é possível simular o sinal polarimétrico durante um trânsito planetário para uma estrela heterogênea, evitando a necessidade de solucionar as equações de transferência radiativa para a atmosfera estelar local, uma abordagem que elevaria consideravelmente o custo computacional.

3.3 MODELAGEM DE HETEROGENEIDADES VIA TEXTURAS PROCEDURAIS

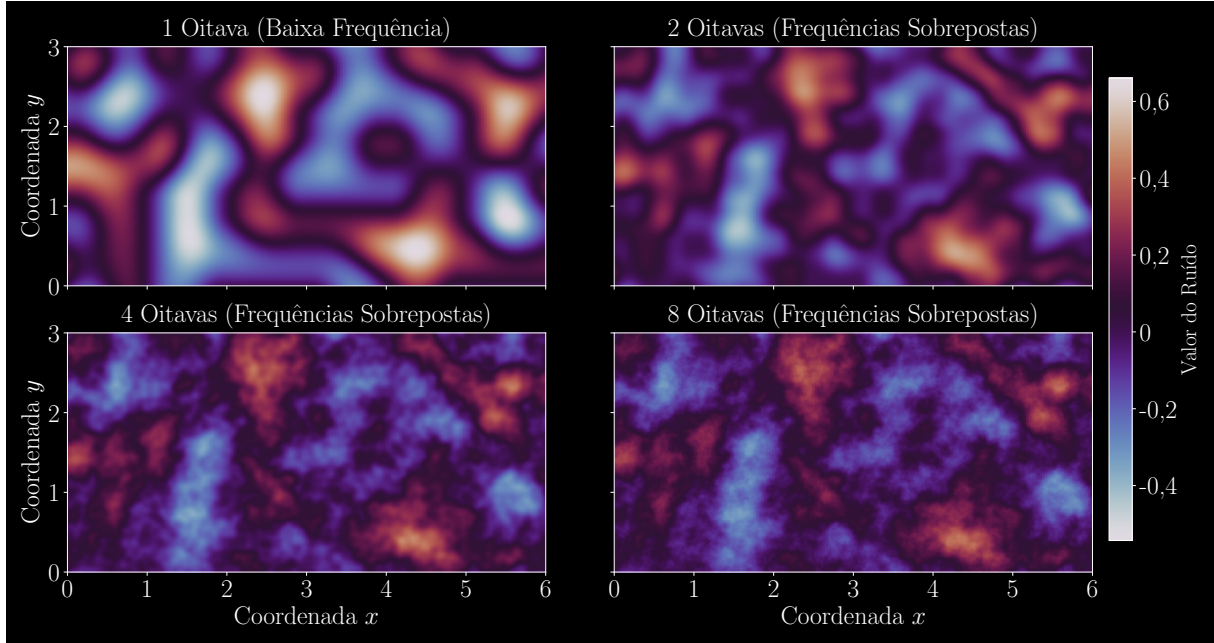
Para simular características heterogêneas em exoplanetas, como cobertura de nuvens, o PyMieDAP utiliza a amostragem de uma distribuição Gaussiana bidimensional sobre uma malha de pixels. Como nosso objetivo é parametrizar a variabilidade atmosférica e superficial em uma malha tridimensional esférica (os *spangles* do Prynghles), a projeção direta de texturas bidimensionais introduziria distorções geométricas, particularmente nas regiões polares.

Neste trabalho, implementamos o ruído de Perlin tridimensional “melhorado” sobre a malha planetária (Perlin, 2002) através da biblioteca Python/C `noise`. O ruído Perlin é um algoritmo que gera padrões pseudo-aleatórios contínuos através da avaliação do produto escalar entre vetores gradientes pré-definidos sobre os vértices de uma grade cúbica unitária e os vetores que conectam estes vértices ao ponto avaliado no espaço. O padrão final é obtido através da interpolação dos produtos escalares por uma função polinomial quíntica ($6t^5 - 15t^4 + 10t^3$).

A complexidade topológica das estruturas geográficas, como a rugosidade de litorais ou a turbulência de nuvens, é controlada pela sobreposição iterativa de múltiplas camadas de ruído (oitavas). Este processo é análogo ao Movimento Browniano Fracionário (fBm), no qual a frequência espacial dobra e a amplitude decai a cada iteração. A Figura 3.6 mostra um exemplo simplificado em 2D de como a sobreposição de diversas oitavas aumenta o nível de detalhe pontual do ruído Perlin.

A aplicação deste campo escalar à integração da transferência radiativa foi dividida em dois regimes morfológicos distintos, visando representar superfícies rochosas e atmosferas espessas em planetas gigantes gasosos.

Figura 3.6 – Evolução da complexidade morfológica do Ruído Perlin bidimensional em função do número de oitavas. O painel superior esquerdo exibe o campo escalar fundamental (uma única oitava), caracterizado por baixas frequências espaciais e transições suaves. Os painéis subsequentes ilustram o acúmulo de frequências mais altas e amplitudes menores (*Fractional Brownian Motion* com persistência de 0,5), gerando as estruturas em pequena escala necessárias para simular o aspecto de fractalidade de nuvens e massas continentais. Figura gerada com a função `pnoise2` da biblioteca `noise`.



Fonte: O autor.

3.3.1 Planetas Rochosos: Fronteiras Discretas e Fração de Cobertura

Para exoplanetas do tipo rochoso, o modelo define a distribuição de massa continental e a cobertura de nuvens a partir da interseção de dois campos de ruído independentes (topográfico e meteorológico).

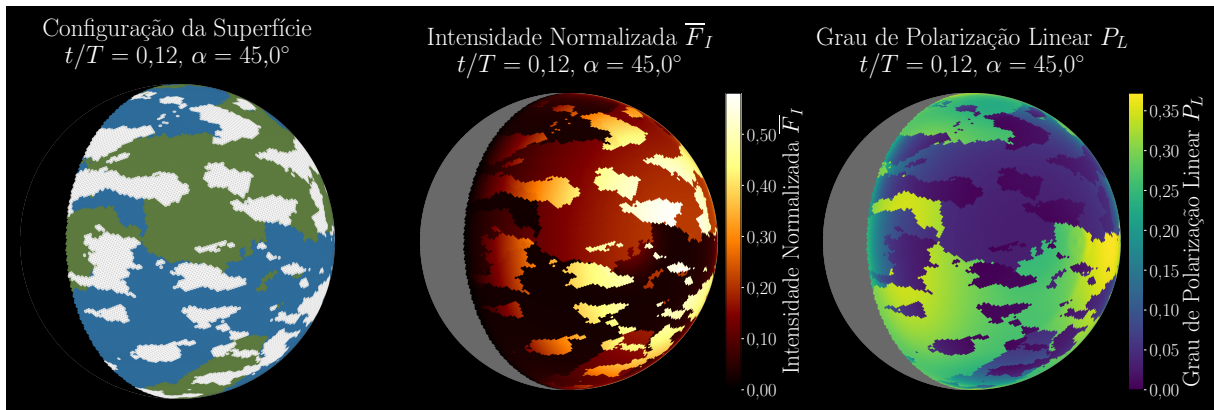
A conversão do ruído escalar contínuo em máscaras espaciais booleanas é governada por um parâmetro físico de fração de cobertura ($f_c \in [0, 1]$). O algoritmo extrai o limite de corte L_c a partir da avaliação do percentil estatístico sobre o conjunto N de todos os valores gerados na malha planetária:

$$L_c = \text{Percentil}(N, 100 \times (1 - f_c)). \quad (3.13)$$

Elementos da malha cujos valores superam L_c são mapeados logicamente como presença de estrutura (continente ou nuvem), enquanto valores inferiores indicam sua ausência (oceano ou céu limpo). O cruzamento simultâneo destas duas condições lógicas classifica cada *spangle* iluminado em um de quatro microclimas mutuamente excludentes: oceano limpo, oceano nublado, continente limpo ou continente nublado. Durante o passo de integração vetorial, o algoritmo extrai os parâmetros de Stokes locais diretamente das matrizes de espalhamento múltiplo pré-computadas correspondentes a cada cenário. A Figura 3.7 ilustra esta distribuição

espacial, demonstrando a ausência de singularidades geométricas nos polos.

Figura 3.7 – Mapas de disco resolvido ($\alpha = 45^\circ$) para um exoplaneta rochoso gerado proceduralmente via Ruído Perlin 3D. Da esquerda para a direita: mapa de configuração da superfície, exibindo os domínios climáticos resultantes do cruzamento das frações de cobertura (continentes em verde, oceanos em azul e nuvens em branco); a intensidade refletida normalizada ($\bar{F}_I$); e o grau de polarização linear (P_L). O planeta foi modelado considerando coberturas continentais e de nuvens de 50% e 30%, respectivamente.



Fonte: O autor.

Em nosso modelo, um fator de escalonamento espacial opcional pode ser aplicado às coordenadas cartesianas x e y durante a amostragem do ruído meteorológico, de maneira análoga à deformação da matriz de covariância proposta na implementação original do PyMieDAP (Rossi; Stam, 2017). Este parâmetro atua como um *proxy* fenomenológico para a circulação atmosférica zonal impulsionada pelo efeito Coriolis, induzindo o estiramento morfológico das massas de nuvens em padrões paralelos aos ventos zonais.

3.3.2 Gigantes Gasosos: Bandas Longitudinais e Transições Suaves

A dinâmica atmosférica em planetas gigantes gasosos é dominada por ventos zonais que estruturam regiões de diferentes temperaturas, composições e densidades de aerossóis em bandas paralelas ao equador (Fletcher et al., 2020).

Para reproduzir esta morfologia específica no modelo, o escalonamento espacial de frequência do ruído procedural de Perlin é feito de forma anisotrópica. A coordenada z recebe um peso de escala significativamente maior do que o plano equatorial (x, y) , o que alonga e achata os padrões na direção longitudinal, formando estrias zonais. Este processo gera um campo escalar tridimensional normalizado, $\xi(\mathbf{r}) \in [0, 1]$, que dita a distribuição estrutural da atmosfera.

Ao contrário de superfícies rochosas, as zonas de cisalhamento entre estas bandas não constituem fronteiras espaciais abruptas. Para emular a mistura de fluidos de forma contínua, aplicamos uma função de interpolação cúbica de Hermite (*smoothstep*) na vizinhança da transição. Definindo c como o limiar de corte que controla a proporção das bandas e Δ como a

meia-largura da zona de transição, calculamos o parâmetro de interpolação local $t(\mathbf{r})$ restringindo o campo normalizado ao intervalo $[0, 1]$:

$$t(\mathbf{r}) = \min \left\{ 1, \max \left[0, \frac{\xi(\mathbf{r}) - (c - \Delta)}{2\Delta} \right] \right\}. \quad (3.14)$$

O peso local contínuo $w(\mathbf{r})$ é então mapeado ao longo desta zona de cisalhamento por:

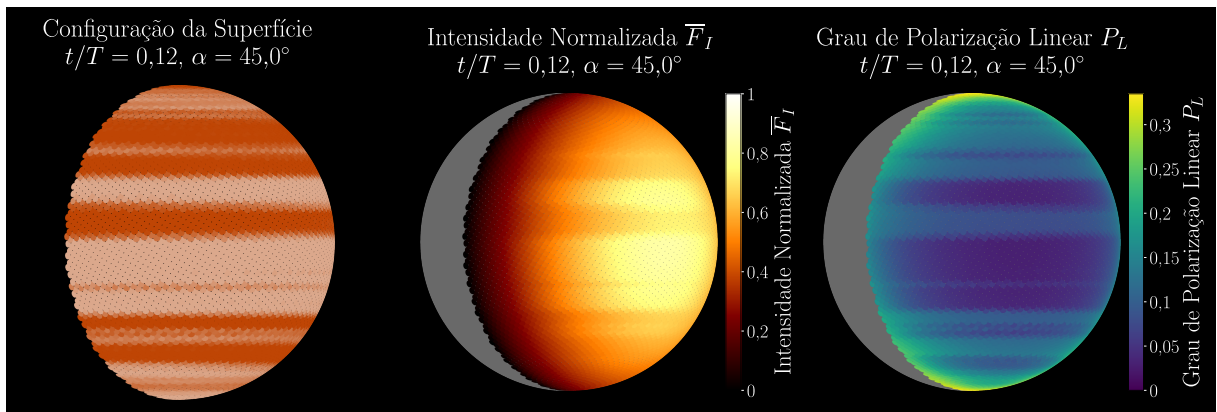
$$w(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r})^2 (3 - 2t(\mathbf{r})). \quad (3.15)$$

Com base neste peso, o vetor de Stokes final $\mathbf{S}_j$ refletido por qualquer j -ésimo *span-
gle* na posição $\mathbf{r}_j$ do disco planetário é obtido pela combinação linear entre as propriedades radiativas pré-computadas da atmosfera de base subjacente ($\mathbf{S}_{\text{base}}$) e das estruturas estriadas sobrepostas ($\mathbf{S}_{\text{banda}}$):

$$\mathbf{S}_j = (1 - w(\mathbf{r}_j))\mathbf{S}_{\text{base}} + w(\mathbf{r}_j)\mathbf{S}_{\text{banda}}. \quad (3.16)$$

Esta formulação paramétrica garante uma transição natural da intensidade e do estado de polarização, refletindo o cisalhamento físico dos ventos zonais sem introduzir descontinuidades numéricas no cálculo da transferência radiativa. O resultado visual e polarimétrico desta abordagem é apresentado na Figura 3.8.

Figura 3.8 – Mapas de disco resolvido ($\alpha = 45^\circ$) para um gigante gasoso gerado proceduralmente. A aplicação de um fator de escala anisotrópico no ruído induz a formação de bandas zonais paralelas ao equador (regiões em **laranja** no mapa de configuração). Da esquerda para a direita: mapa de configuração da superfície; intensidade refletida ($\bar{F}_I$); e grau de polarização linear (P_L). A função de suavização garante a mistura gradual dos vetores de Stokes nas fronteiras, simulando o cisalhamento atmosférico.



Fonte: O autor.

Parâmetros detalhados para a atmosfera base e bandas são discutidos na seção a seguir.

3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E CASOS DE ESTUDO

Para validar a implementação e demonstrar as capacidades do módulo expandido, exploramos nesta seção uma série de experimentos representativos. Estes casos de estudo têm como objetivo explorar a integridade física da transferência radiativa na malha tridimensional e ilustrar a aplicabilidade da ferramenta em contextos astrofísicos reais.

3.4.1 Análogos Terrestres Homogêneos: Superfícies sob uma Atmosfera Limpa

Como ponto de partida, consideramos os seguintes cenários físicos: exoplanetas rochosos homogêneos envoltos por uma atmosfera limpa (isenta de aerossóis ou nuvens), onde a opacidade é dominada puramente pelo espalhamento de Rayleigh molecular. Nesta simulação, avaliamos o comportamento polarimétrico fixado em $\lambda = 616,5 \text{ nm}$, que corresponde ao comprimento de onda efetivo da banda r do sistema fotométrico SDSS (Doi et al., 2010) e ao canal 2 do polarímetro SPARC4 (Rodrigues et al., 2012b).

Modelamos uma atmosfera com propriedades macroscópicas análogas às da Terra através da discretização do gás em 7 camadas representativas. As pressões características na base de cada camada estendem-se da troposfera até a mesopausa terrestre, estratificadas de acordo com a Atmosfera Padrão Internacional (International Civil Aviation Organization, 1993).

Sob esta coluna atmosférica, avaliamos três condições de contorno distintas para a refletividade da superfície:

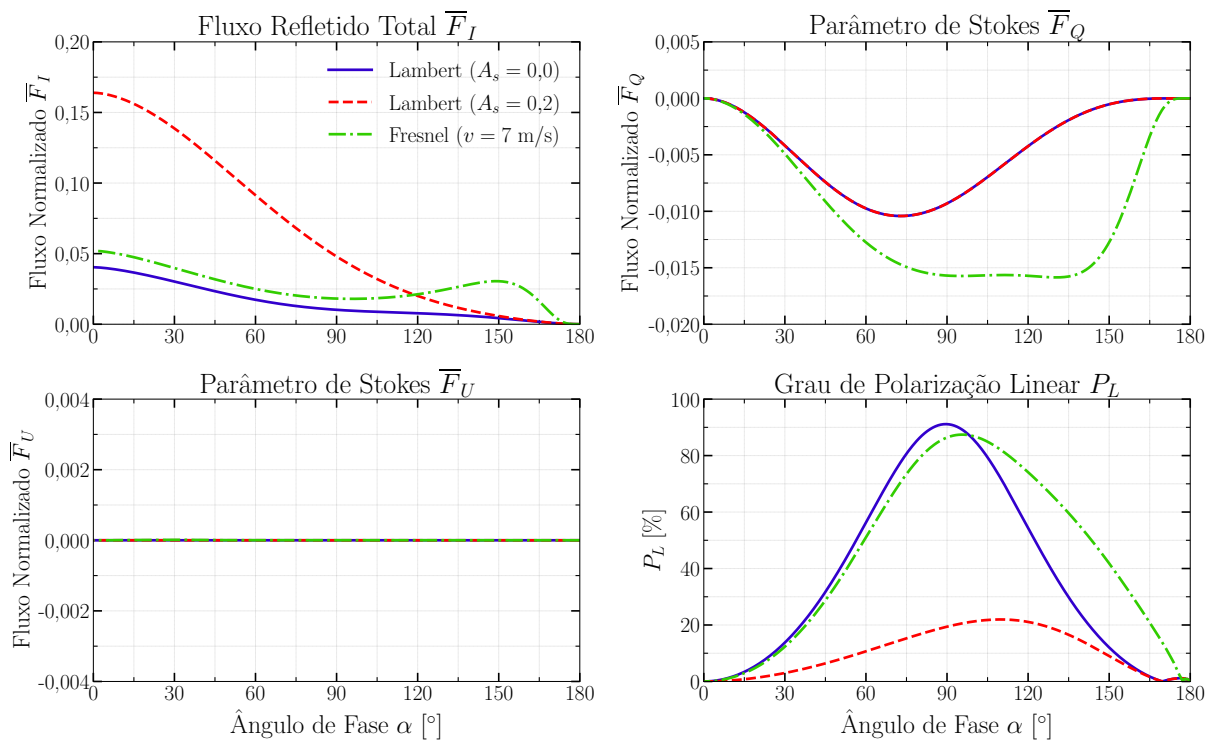
- a) um modelo de referência puramente gasoso (superfície Lambertiana completamente absorvedora, com albedo $A_s = 0$);
- b) um análogo continental governado por reflexão difusa, com albedo equivalente ao observado na região do deserto do Saara (superfície Lambertiana, $A_s = 0,20$) (Tilstra et al., 2017);
- c) um análogo oceânico ditado pela reflexão especular, com albedo de fundo semelhante ao do Oceano Atlântico (superfície de Fresnel, $A_s = 0,018$) (Tilstra et al., 2017). Para este modelo, adotamos um vento superficial de 7 m/s para ditar a rugosidade das ondas e a fração intrínseca de espuma despolarizadora, valor que corresponde a um cenário de brisa moderada, conforme adotado por Trees e Stam (2022).

Tais configurações baseiam-se nas representações espaciais globais previamente ilustradas nas Figuras 3.2 e 3.3.

A Figura 3.9 mostra o fluxo refletido normalizado ($\overline{F}_I$), os parâmetros de Stokes normalizados ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e o grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α para os modelos descritos. As grandezas absolutas de intensidade e fluxo polarizado discutidas aqui e nos experimentos subsequentes referem-se à normalização apresentada na Equação 2.99, na qual o fluxo medido é normalizado pelo fluxo estelar incidente acoplado ao fator de diluição

geométrica. Nesta escala, o valor de intensidade na fase $\alpha = 0^\circ$ corresponde estritamente ao albedo geométrico do planeta (A_g).

Figura 3.9 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas simuladas para análogos terrestres homogêneos sob uma atmosfera limpa (dominada por espalhamento de Rayleigh). Os painéis exibem, em função do ângulo de fase α , o fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), os parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) normalizados pelo fluxo estelar incidente, e o grau de polarização linear (P_L). As simulações foram executadas no comprimento de onda efetivo da banda r do SDSS ($\lambda = 616,5$ nm). O comportamento da radiação espalhada é comparado para três condições de superfície: perfeitamente absorvedora (Lambertiana com $A_s = 0,0$, linha sólida), continente com reflexão difusa (Lambertiana com $A_s = 0,2$, linha tracejada) e oceano com reflexão especular e rugosidade induzida por vento (Fresnel com $v = 7$ m/s, linha traço-ponto).



Fonte: O autor.

Destacamos nesta modelagem o surgimento do *glint* oceânico ao redor de $\alpha = 150^\circ$ no fluxo total, assim como o deslocamento dos picos de polarização (tanto no parâmetro $\overline{F}_Q$ quanto no grau de polarização linear P_L) para ângulos de fase maiores ($\alpha > 90^\circ$) na presença de uma superfície refletora Fresnel. O comportamento aproximadamente bimodal em $\overline{F}_Q$ para a superfície oceânica provém da sobreposição de dois fenômenos físicos distintos. O primeiro pico reflete o fluxo polarizado gerado pelo espalhamento Rayleigh na atmosfera, centrado em $\alpha = 90^\circ$. O segundo pico, ao redor de $\alpha = 140^\circ - 150^\circ$, corresponde ao fluxo polarizado absoluto do *glint* oceânico. É crucial notar que este máximo absoluto de $\overline{F}_Q$ não ocorre no ângulo de Brewster ($\alpha \approx 106^\circ$, onde o grau de polarização P_L é máximo), mas sim em fases mais avançadas. Isso se deve ao aumento da refletividade de Fresnel para ângulos de incidência rasantes, o que amplifica a intensidade do sinal polarizado total capturado pelo observador. Adicionalmente, o parâmetro $\overline{F}_U$ é constante e nulo. Esta é uma característica proveniente da

ausência de qualquer tipo de assimetria no modelo, tanto nos corpos quanto na órbita.

Entre os modelos com superfície Lambertiana, um albedo superficial diferente de zero faz com que o fluxo refletido seja maior, o que consequentemente desloca e atenua o pico de polarização, mesmo que o fluxo polarizado ($\overline{F}_Q$) seja exatamente igual para os dois modelos. Estes aspectos em conjunto demonstram que a reparametrização e a construção da malha tridimensional no código preservam integralmente o comportamento físico previsto na literatura por métodos unidimensionais e bidimensionais (Zugger et al., 2010; Trees; Stam, 2019; Groot et al., 2020).

3.4.2 Quebra de Simetria por Achatamento e Obliquidade

Como mencionado na Seção 2.5.2, a introdução do achatamento planetário impacta diretamente no cálculo dos vetores normais à superfície e na área projetada do disco, alterando os padrões de polarização integrados.

A Figura 3.10 apresenta os mapas de intensidade e dos parâmetros de polarização ($\overline{F}_Q$, $\overline{F}_U$ e P_L) para um modelo de planeta rochoso com superfície lambertiana homogênea ($A_s = 0$) e atmosfera limpa dominada por espalhamento de Rayleigh. Para evidenciar os efeitos cinemáticos, o parâmetro de achatamento foi variado assumindo os valores $f = 0, 0, 1, 0, 2$ e $0, 3$, sob a condição de conservação de volume descrita pelas Equações 3.6 e 3.7. O sistema foi rotacionado para exibir uma obliquidade de 30° em relação ao plano orbital.

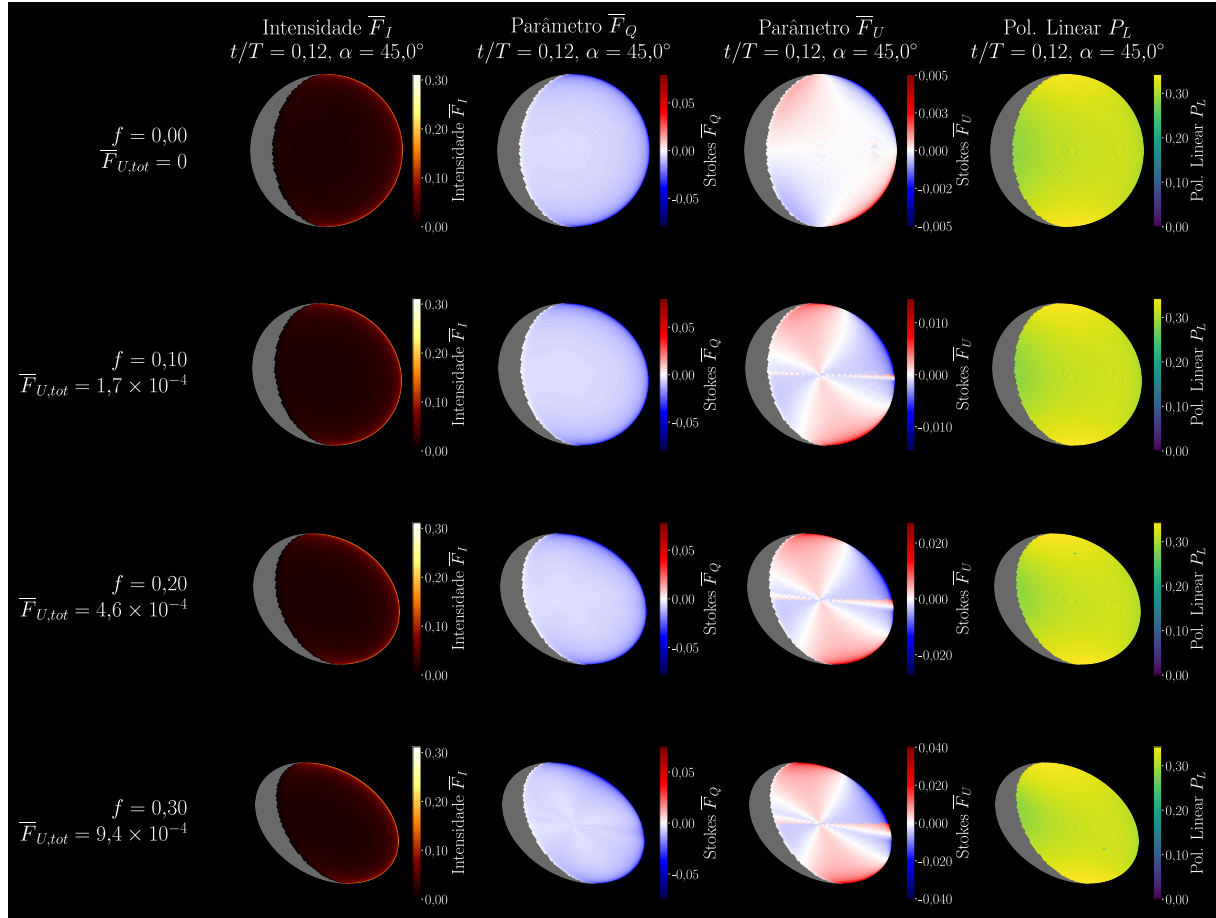
A combinação simultânea de achatamento e obliquidade introduz uma assimetria no sistema projetado no plano do céu. Em um planeta esférico, ou oblato com obliquidade nula (visto pelo equador), existe simetria de reflexão entre os hemisférios norte e sul em relação ao plano de espalhamento. Essa simetria garante que as contribuições espaciais de U se cancelem durante a integração do disco, resultando em sinal líquido nulo.

Ao inclinar o eixo do elipsoide (obliquidade não-nula), a projeção geométrica do terminador e a distribuição dos ângulos de espalhamento locais tornam-se assimétricas. Como resultado direto dessa quebra de simetria geométrica, o padrão espacial de U deixa de ser antissimétrico, impedindo o seu cancelamento. Dessa forma, um sinal líquido e variável de U pode ser observado no fluxo integrado, consistindo em uma assinatura polarimétrica específica do achatamento.

A Figura 3.11 ilustra o impacto quantitativo dessa configuração nas curvas de fase polarimétricas. O aumento em f amplifica a magnitude da quebra de simetria geométrica, resultando na manifestação de sinal líquido em $\overline{F}_U$ (atingindo máximo absoluto de $\overline{F}_U \approx 1,25 \times 10^{-3}$ para $f = 0, 3$). O parâmetro $\overline{F}_Q$ preserva seu perfil morfológico, sofrendo apenas uma discreta perda de magnitude associada à variação da área visível dos limbos.

Apesar da injeção desse novo componente de fluxo polarizado ($\overline{F}_U$), o grau de polarização linear total (P_L) sofre atenuação relativa de cerca de 10% no regime de maior achatamento. Essa diminuição é governada pela diluição fotométrica: sob a condição de conservação de volume, o achatamento expande o raio equatorial, ampliando drasticamente a seção transver-

Figura 3.10 – Mapas espaciais de intensidade normalizada ($\overline{F}_I$) e parâmetros de polarização ($\overline{F}_Q$, $\overline{F}_U$ e P_L) evidenciando a quebra de simetria no disco resolvido. O modelo considera uma obliquidade de 30° e variações na taxa de achatamento ($f = 0, 0,1, 0,2$ e $0,3$).



Fonte: O autor.

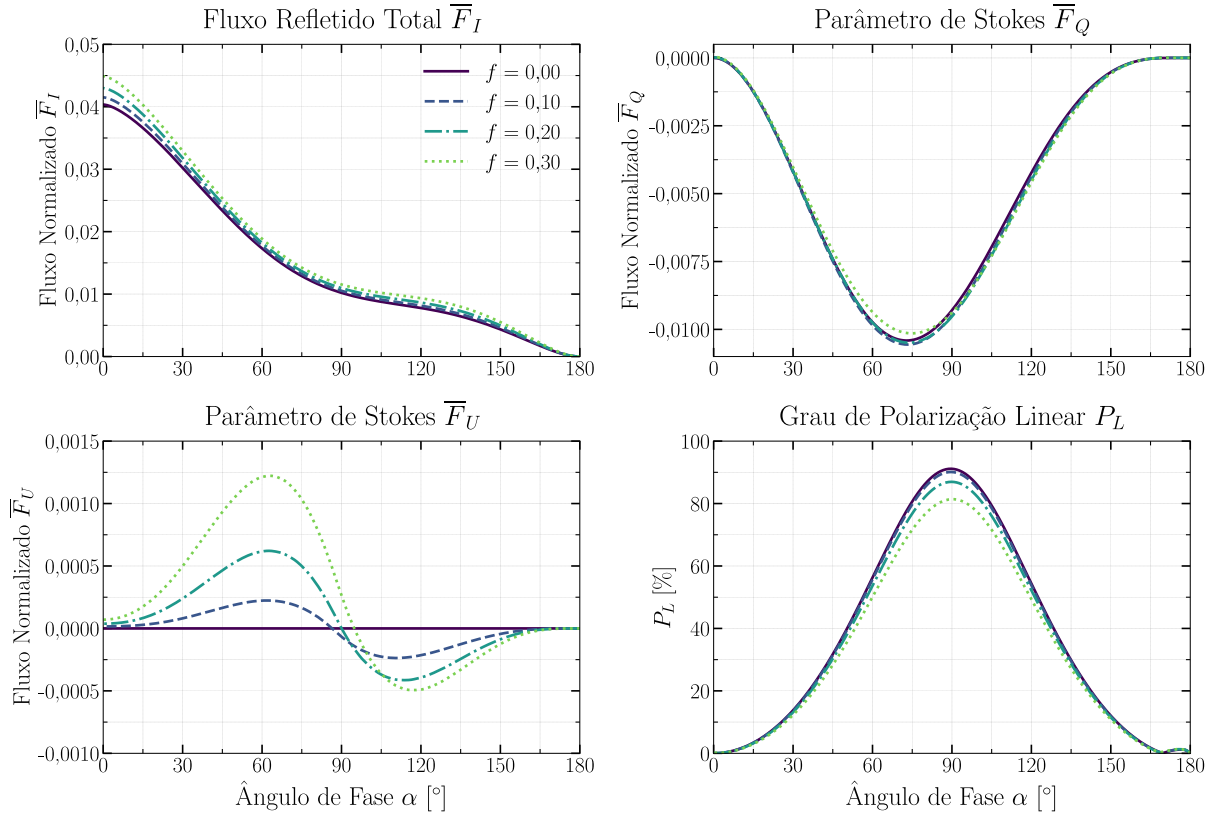
sal projetada do planeta. Consequentemente, a intensidade total de luz não polarizada refletida ($\overline{F}_I$, o denominador de P_L) sofre incremento maior que o ganho vetorial no fluxo polarizado, resultando em grau de polarização linear observável menor.

Este comportamento contrasta diretamente com simulações analíticas pregressas, como as apresentadas por Sengupta e Maiti (2006), nas quais o grau de polarização linear aumenta em função do achatamento. Tal divergência ocorre porque formulações anteriores, além de se limitarem ao regime de espalhamento simples, frequentemente não impõem a conservação de volume, negligenciando a expansão equatorial que dilui o sinal em cenários físicos realistas.

A Figura 3.12 ilustra como diferentes obliquidades ($\gamma = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$) afetam a integração dos parâmetros de Stokes para o mesmo modelo atmosférico. Os painéis superiores detalham os mapas espaciais da intensidade refletida ($\overline{F}_I$) fixados em uma fase de $\alpha = 45^\circ$. Nestes mapas, é possível observar como a inclinação do eixo de rotação altera a silhueta geométrica projetada no plano do céu.

O comportamento do parâmetro $\overline{F}_U$ atua como o principal observável vetorial da orientação espacial do exoplaneta. Como previsto analiticamente, em $\gamma = 0^\circ$ e $\gamma = 90^\circ$ (equador

Figura 3.11 – Curvas de fase polarimétricas para o análogo atmosférico oblato sob uma obliquidade de 30° , em função do ângulo de fase α . As curvas demonstram a evolução do fluxo integrado para diferentes fatores de achatamento f .



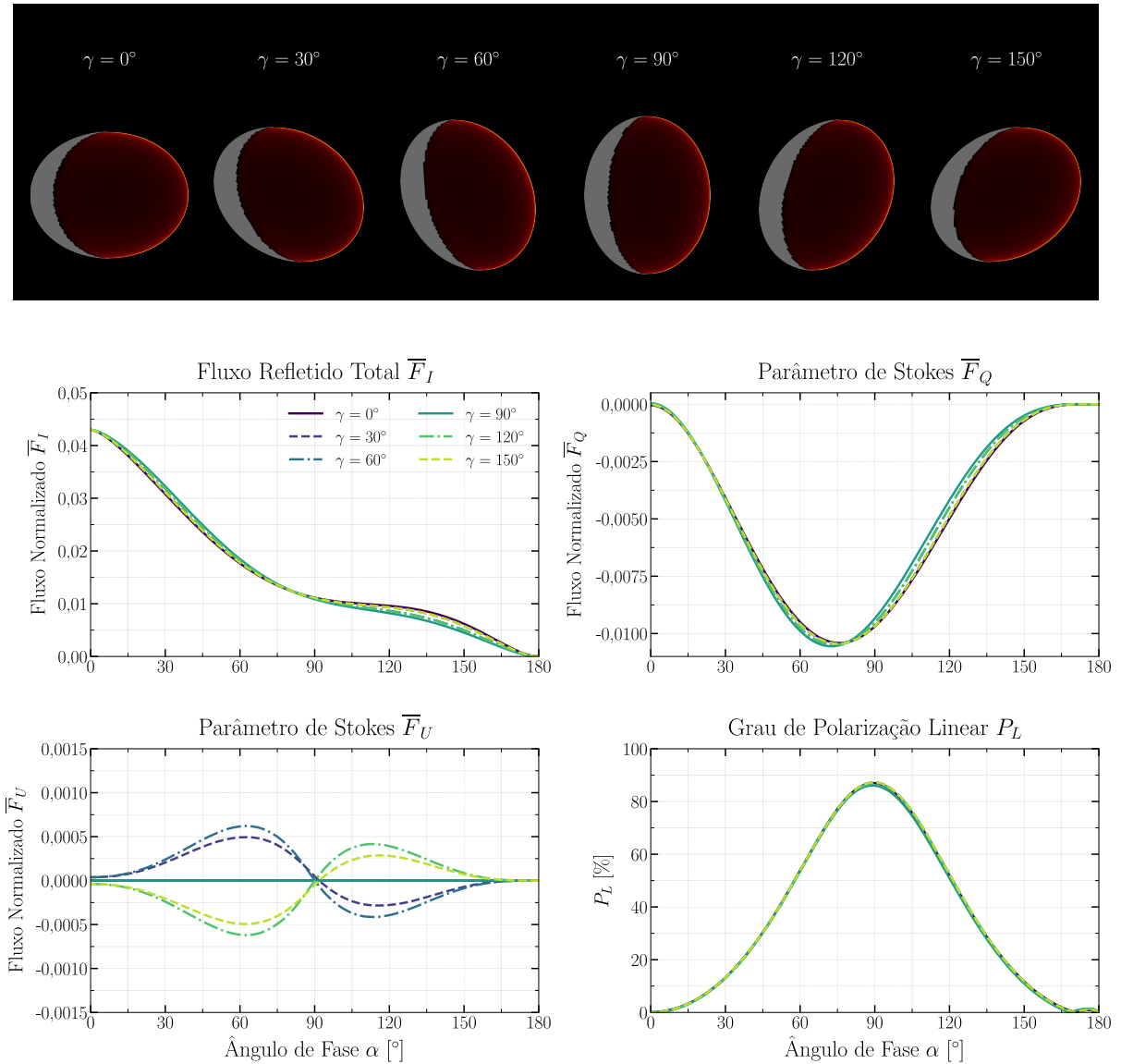
Fonte: O autor.

paralelo ou perpendicular ao plano orbital), a simetria de reflexão em relação ao plano de espalhamento é mantida, resultando em $\overline{F}_U = 0$ em todas as fases. Para obliquidades intermediárias, contudo, a assimetria geométrica impõe uma polarização efetiva não-nula.

As curvas de fase de $\overline{F}_U$ exibem inversão exata de polaridade (sinais opostos com magnitudes idênticas) para obliquidades antissimétricas em relação ao plano perpendicular à órbita, como observado nos pares $\gamma = 30^\circ$ e 150° , bem como para $\gamma = 60^\circ$ e 120° . Fisicamente, a inversão da direção do eixo oblato rotaciona a distribuição assimétrica de áreas espalhadoras para o quadrante oposto do céu, invertendo o plano de vibração dominante da luz linearmente polarizada capturada pelo telescópio.

Em contraste com a sensibilidade de $\overline{F}_U$, a intensidade total refletida ($\overline{F}_I$) e o parâmetro de Stokes $\overline{F}_Q$ exibem respostas de segunda ordem à obliquidade. A morfologia e a magnitude de $\overline{F}_Q$ e do grau de polarização linear (P_L) sofrem apenas modulações marginais. Essas variações decorrem exclusivamente da mudança na área efetiva da seção transversal apresentada ao observador e da respectiva redistribuição das trajetórias de espalhamento próximo ao terminador.

Figura 3.12 – Mapas de intensidade e curvas de fase fotométricas e polarimétricas para o análogo atmosférico oblato sob diferentes valores de obliquidade, em função do ângulo de fase α . O parâmetro de achatamento foi fixado em $f = 0,2$. Os mapas de intensidade são utilizados apenas como ilustrativos da orientação do planeta.



Fonte: O autor.

3.4.3 Variação de Cobertura Superficial e Atmosférica

A existência de aerossóis na atmosfera de um planeta, especialmente em concentrações altas o suficiente para possibilitar o surgimento de nuvens, introduz assinaturas características nas curvas de fase polarimétricas. O comportamento assimétrico do espalhamento no regime de Mie (painel esquerdo da Figura 2.3) e o formato específico da função de fase dependente do tamanho e formato da partícula (painel central da Figura 2.4) são as principais fontes destas assinaturas.

Como pode ser observado no mapa central ($\bar{F}_I$) da Figura 3.7, as nuvens tendem a aumentar consideravelmente o fluxo refletido, diluindo o grau de polarização linear em compa-

ração aos cenários de oceanos e continentes homogêneos. No entanto, a morfologia das assinaturas polarimétricas de nuvens, provenientes do espalhamento único, é preservada mesmo no espalhamento múltiplo, como demonstrado por Hansen (1971b). Adicionalmente, nuvens são capazes de mascarar assinaturas superficiais, como o *glint* oceânico, devido à sua opacidade.

Para avaliar quantitativamente a assinatura polarimétrica e o impacto do mascaramento, estruturamos um experimento numérico focado na competição radiativa entre a reflexão de uma superfície oceânica e o espalhamento difuso de uma camada de nuvens. As propriedades macroscópicas e microfísicas da camada baseiam-se nos experimentos de Groot et al. (2020) para um planeta terrestre. Assumimos gotículas esféricas de água líquida ($m = 1,33 + i10^{-8}$ no comprimento de onda avaliado $\lambda = 616,5 \text{ nm}$), seguindo uma distribuição Gamma com raio efetivo $r_{\text{eff}} = 10 \mu\text{m}$ e variância $v_{\text{eff}} = 0,1$.

Do ponto de vista macroscópico, definimos uma profundidade óptica de aerossóis de $\tau_a = 10$, restrita à baixa troposfera (entre 800 e 700 mbar). Através do Ruído Perlin 3D (Seção 3.3), variamos a fração global de cobertura de nuvens ($f_{\text{nuv}} \in \{0\%; 20\%; 40\%; 60\%; 80\%; 100\%\}$) sob uma superfície oceânica idêntica à modelada na Seção 3.4.1.

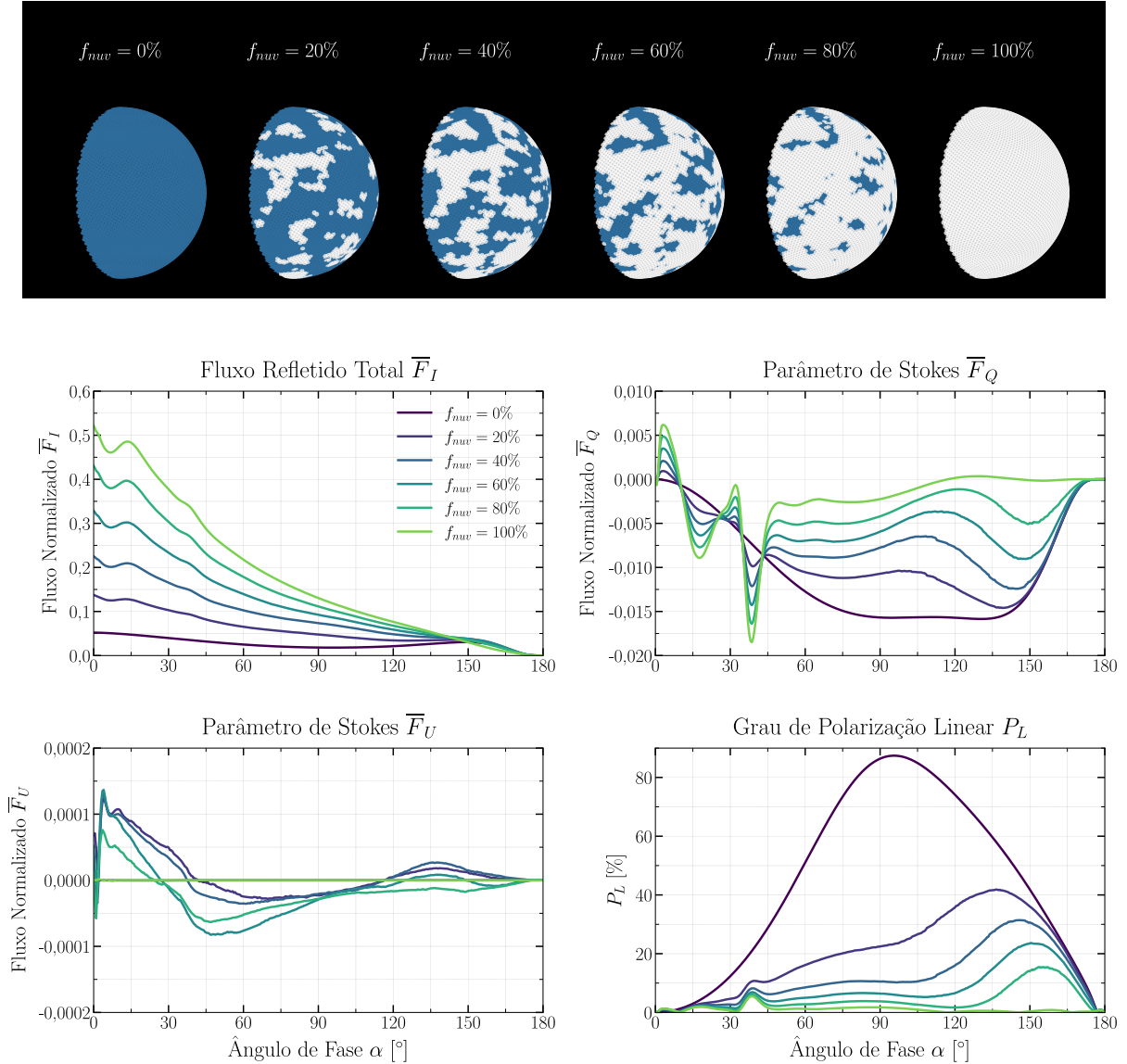
Na Figura 3.13, apresentamos os resultados da modelagem, assim como mapas que ilustram cada fração de cobertura de nuvens. Como previsto através dos mapas da Figura 3.7, a intensidade do fluxo refletido total ($\bar{F}_I$) aumenta com a fração de cobertura, o que dilui o grau de polarização linear (P_L), tanto o proveniente do espalhamento Rayleigh ($\alpha \approx 90^\circ$) quanto o originado pelo *glint* oceânico ($\alpha \approx 140^\circ - 160^\circ$).

Para coberturas parciais ($f_{\text{nuv}} < 100\%$), a luz altamente polarizada do reflexo especular transparece através das aberturas na malha de nuvens. A assinatura polarimétrica do *glint* torna-se completamente imperceptível apenas no limite de cobertura completa de nuvens ($f_{\text{nuv}} = 100\%$). O comportamento geral de supressão da polarização e o aumento da variabilidade do sinal devido à presença de nuvens esparsas correspondem às simulações bidimensionais de Trees e Stam (2019).

Apesar da diluição de P_L , as três principais assinaturas específicas do espalhamento único Mie são preservadas e especialmente evidentes nas curvas de $\bar{F}_Q$:

- a) **glória:** efeito predominante na direção de retroespalhamento ($\alpha \approx 0^\circ$). De acordo com Hansen e Travis (1974), este pico de intensidade é estritamente dependente da forma esférica do espalhador e possui duas origens principais: raios rasantes que induzem ondas superficiais na gotícula, e raios não centrais que emergem nessa direção após sofrerem reflexões internas (Nussenzveig, 1992; Nussenzveig, 2002);
- b) **arcos supernumerários:** feições de interferência, visíveis como oscilações na região de $\alpha \approx 25^\circ - 35^\circ$. Elas ocorrem devido a raios incidindo sob dois ângulos diferentes que emergem da gotícula no mesmo ângulo de espalhamento após uma reflexão interna. A superposição óptica desses raios gera os padrões de interferência construtiva e destrutiva (Hansen; Travis, 1974);

Figura 3.13 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento oceânico por diferentes frações de cobertura de nuvens (f_{nuv}). O painel superior ilustra a distribuição espacial das nuvens geradas via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α .



Fonte: O autor.

- c) **arco-íris primário:** Manifesta-se como um vale negativo em $\alpha \approx 40^\circ$. Origina-se da concentração de energia radiativa no ângulo de desvio mínimo sofrido por raios que passaram por exatamente uma reflexão interna dentro da gotícula de água (Hansen; Travis, 1974; Nussenzweig, 1977). Essa concentração impõe uma polarização paralela ao plano de espalhamento ($\overline{F}_Q < 0$), constituindo uma bioassinatura estrutural direta da presença de condensados esféricos de água líquida na atmosfera. O arco-íris secundário também é visível entre $\alpha \approx 50^\circ$ e 60° , manifestando-se como um pico tênue.

A variação pontual observada no parâmetro $\overline{F}_U$ provém da quebra de simetria geo-

métrica introduzida pela distribuição procedural das nuvens, não representando uma assinatura microfísica específica da superfície ou dos aerossóis. Este aspecto é evidenciado pelo comportamento nulo de $\overline{F}_U$ nos cenários homogêneos ($f_{nuv} = 0\%$ e $f_{nuv} = 100\%$), em que o cancelamento vetorial no disco é completo. As coberturas intermediárias geradas pelo Ruído Perlin introduzem variações da ordem de 10^{-4} que, embora tênues, atuam como um indicador macroscópico da distribuição não homogênea de nuvens sobre o disco planetário visível.

Para isolar o efeito do mascaramento superficial na assinatura polarimétrica, livre das assinaturas introduzidas pelo espalhamento único de aerossóis, estruturamos um experimento análogo focado na variação da fração de cobertura continental (f_{cont}). Enquanto a variação de cobertura de nuvens sobre oceanos tem sido explorada na literatura recente (Trees; Stam, 2019), o impacto sistemático da topologia continental procedural permanece pouco restrito.

Utilizamos a mesma configuração orbital e atmosférica para as componentes de céu limpo, variando a cobertura continental de cada modelo ($f_{cont} \in \{0\%; 20\%; 40\%; 60\%; 80\%; 100\%\}$). Os resultados podem ser vistos na Figura 3.14, assim como os mapas de configuração específicos a cada fração de cobertura.

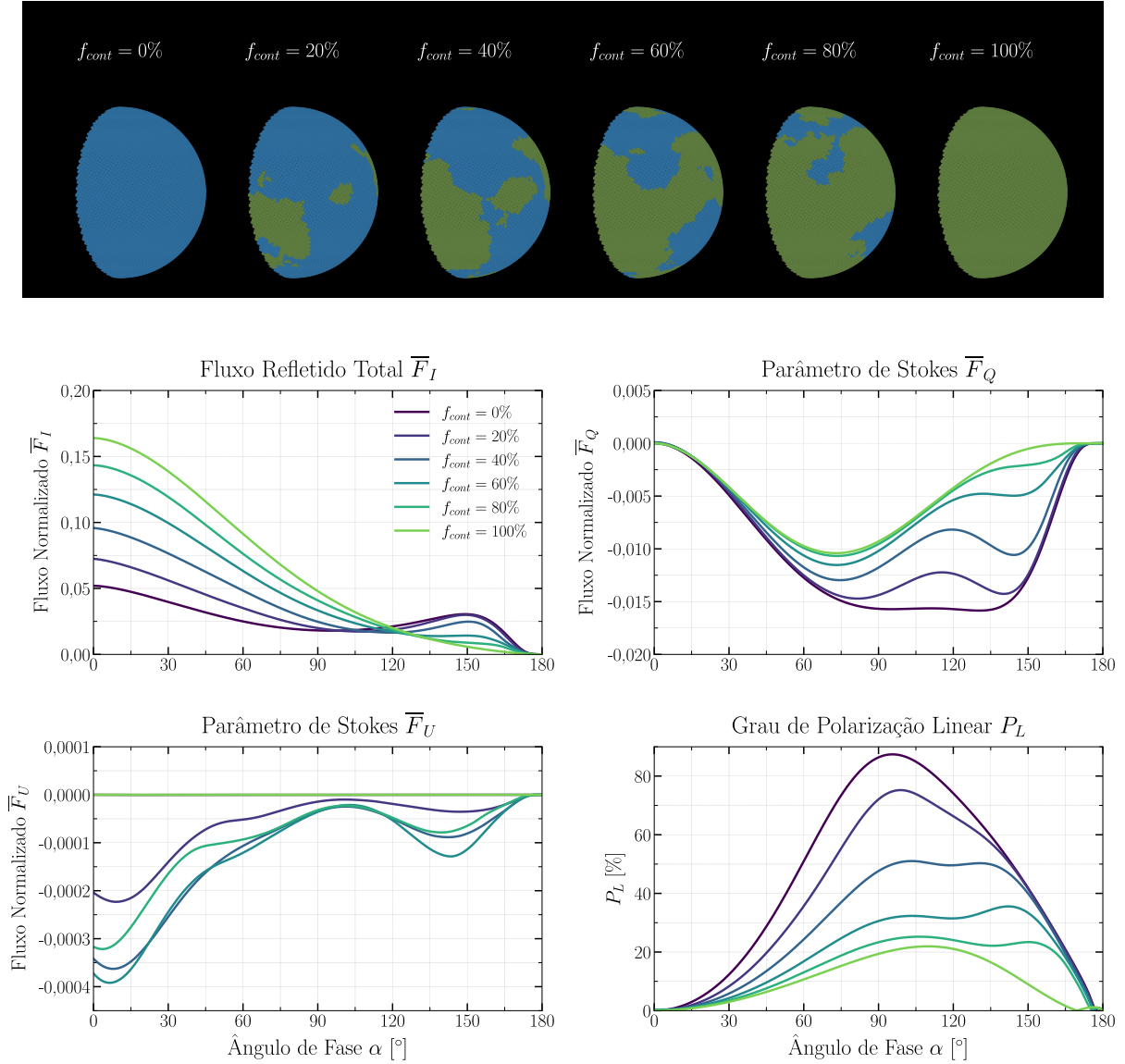
Fisicamente, a expansão das massas de terra atua como um agente de supressão da polarização. Ao contrário das nuvens, que mascaram a superfície enquanto introduzem assinaturas de fase específicas (como o arco-íris primário), o solo continental contribui predominantemente com um fluxo refletido difuso e não polarizado. Consequentemente, à medida que f_{cont} aumenta, observamos uma atenuação progressiva na amplitude do *glint* oceânico ($\alpha \approx 140^\circ - 160^\circ$) e uma diluição do pico de polarização linear máxima (P_L) associado ao espalhamento Rayleigh atmosférico.

O limite de $f_{cont} = 100\%$ (planeta desértico) resulta na extinção total do reflexo especular. Além disso, de maneira análoga à cobertura parcial de nuvens, as frações intermediárias de continentes quebram a simetria refletiva do disco visível, induzindo o surgimento de sinais não nulos no parâmetro $\overline{F}_U$. A comparação entre o mascaramento continental e o mascaramento por nuvens (discutido anteriormente) demonstra a capacidade da polarimetria em distinguir a natureza geofísica da cobertura exoplanetária.

Por fim, avaliamos o mascaramento através de uma configuração planetária mista (*Earth-like*), combinando uma cobertura continental fixa ($f_{cont} = 50\%$) com o aumento gradativo da cobertura de nuvens ($f_{nuv} \in \{0\%; 20\%; 40\%; 60\%; 80\%; 100\%\}$). Os resultados podem ser vistos na Figura 3.15.

Neste cenário misto, a polarimetria revela a superposição dos fenômenos de supressão e assinatura de fase. Em $\overline{F}_Q$, observa-se que o *glint* oceânico é extinto mais rapidamente para $f_{nuv} = 80\%$ e $f_{nuv} = 100\%$, pois os oceanos já se encontram parcialmente obscurecidos pela fração continental mesmo antes da adição de nuvens. Por outro lado, a intensidade do pico relativo ao arco-íris primário em $\alpha \approx 40^\circ$ ultrapassa o fundo de polarização Rayleigh e o *glint* para $f_{nuv} = 60\%$. Novamente, o sinal em $\overline{F}_U$ é não nulo para coberturas intermediárias e possui amplitude semelhante à observada na Figura 3.14.

Figura 3.14 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento oceânico por diferentes frações de cobertura continental (f_{cont}). O painel superior ilustra a distribuição espacial de continentes gerados via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\overline{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\overline{F}_Q$ e $\overline{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α .

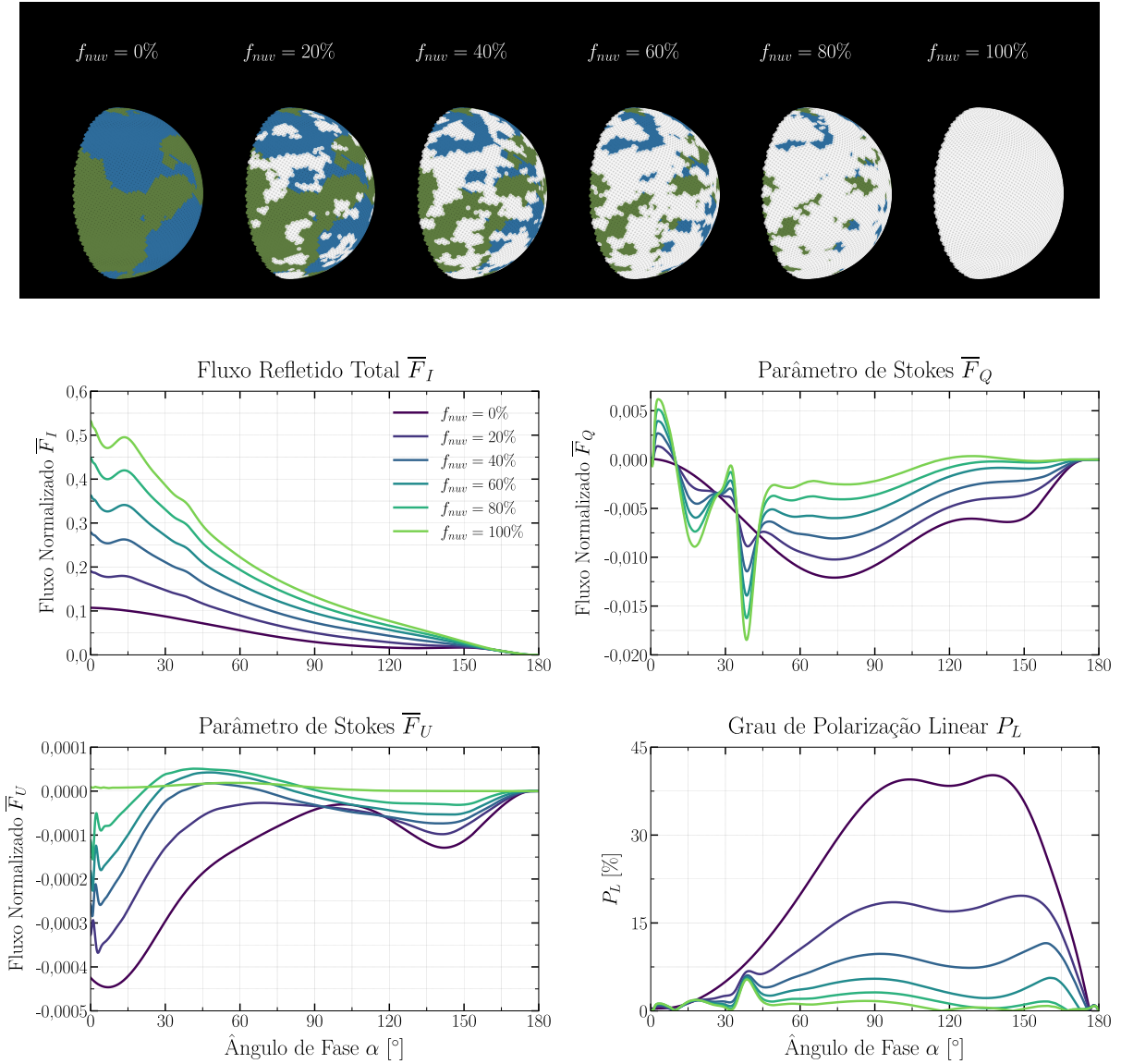


Fonte: O autor.

3.4.4 Modulação Rotacional

A sensibilidade da polarimetria a quebras de simetria geométrica viabiliza o mapeamento longitudinal de exoplanetas. Trabalhos teóricos, como as simulações desenvolvidas por Karalidi et al. (2012), demonstraram que a rotação de superfícies terrestres heterogêneas introduz assinaturas temporais periódicas nas curvas de fase. Contudo, tais modelagens frequentemente baseavam-se na técnica de soma ponderada, na qual o fluxo final é calculado a partir da média global de modelos homogêneos. Como demonstrado por Trees e Stam (2019), essa aproximação apresenta limitações, pois negligencia a localização espacial das estruturas

Figura 3.15 – Curvas de fase fotométricas e polarimétricas demonstrando o efeito do mascaramento por diferentes frações de cobertura de nuvens (f_{nuv}) sobre um planeta com cobertura continental fixa ($f_{cont} = 50\%$). O painel superior ilustra a distribuição espacial de continentes e nuvens gerados via Ruído Perlin 3D para $\alpha = 60^\circ$. Os painéis inferiores apresentam a evolução do fluxo refletido total ($\bar{F}_I$), dos parâmetros de Stokes ($\bar{F}_Q$ e $\bar{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase α .



Fonte: O autor.

geográficas no disco aparente.

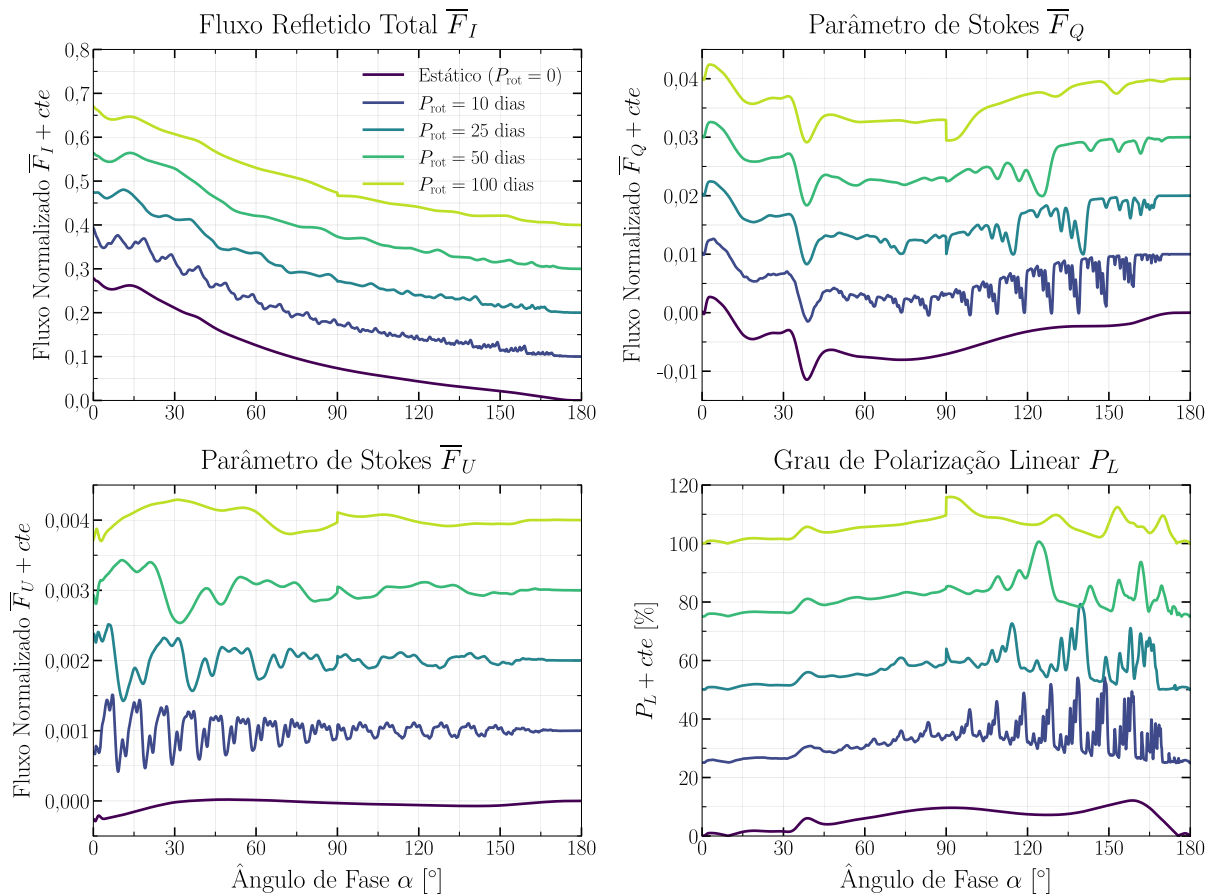
Estudos recentes superam essa limitação ao aplicar modelos tridimensionais geograficamente resolvidos. Gordon et al. (2025), por exemplo, avaliam o efeito da variação diurna utilizando mapas topográficos da Terra e de Marte, demonstrando como o fluxo refletido e o estado de polarização respondem diretamente ao trânsito de características superficiais pelo terminador e pelo disco iluminado.

No contexto da exoplanetologia, a topologia de superfície e a distribuição meteorológica são características desconhecidas *a priori*. Nesta seção, validamos a nossa implementação

geométrica tridimensional como uma ferramenta preditiva para mundos com configurações espaciais procedurais, simulando continentes e nuvens que co-rotacionam com a malha planetária.

Com esse objetivo, estruturamos a simulação de um planeta com propriedades atmosféricas e microfísicas análogas às utilizadas na seção anterior. Definimos uma cobertura continental procedural de 50% e uma cobertura de nuvens de 40%. Para avaliar a sensibilidade dos parâmetros de Stokes à cinemática rotacional, simulamos o sistema sob períodos de rotação prógrada de $P_{rot} = 10, 25, 50$ e 100 dias, além de um cenário de referência com malha estática ($P_{rot} = 0$). A evolução do fluxo total refletido ($\bar{F}_I$), dos parâmetros de Stokes lineares ($\bar{F}_Q, \bar{F}_U$) e do grau de polarização linear (P_L) em função do ângulo de fase (α) é apresentada na Figura 3.16.

Figura 3.16 – Curvas de fase fotométricas ($\bar{F}_I$) e polarimétricas ($\bar{F}_Q, \bar{F}_U, P_L$) para um planeta terrestre procedural sob diferentes taxas de rotação sideral (P_{rot}). Um deslocamento vertical (*offset*) foi aplicado às curvas para facilitar a distinção visual entre os modelos dinâmicos e o cenário de referência.

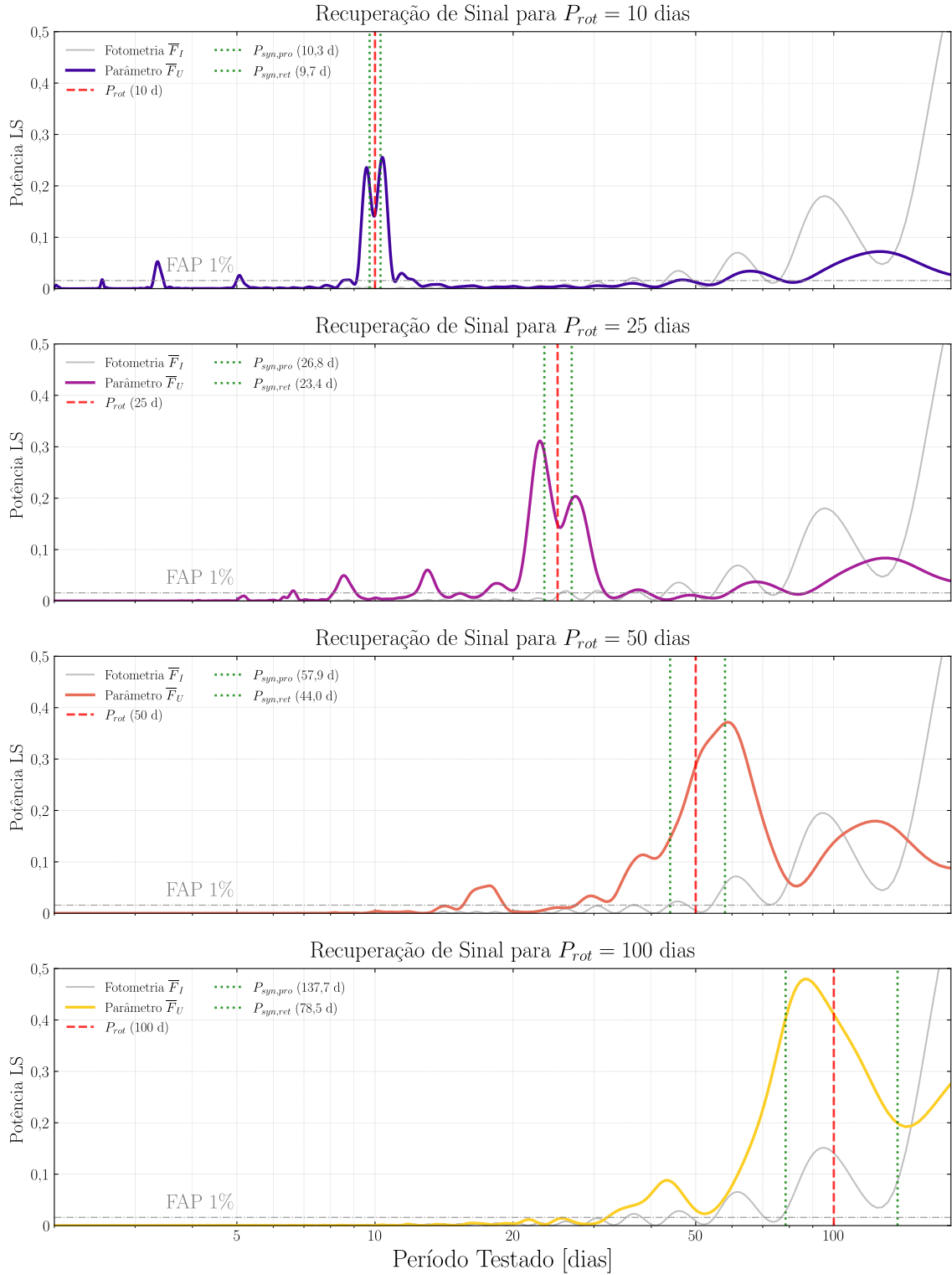


Fonte: O autor.

Em seguida, avaliamos a recuperabilidade do período de rotação injetado em cada modelo através da aplicação do periodograma de Lomb-Scargle (VanderPlas, 2018) sobre o fluxo total refletido ($\bar{F}_I$) e sobre o parâmetro de Stokes sensível à quebra de simetria geométrica ($\bar{F}_U$). A Figura 3.17 apresenta a potência espectral resultante para cada cenário.

A análise revela uma vantagem da polarimetria em relação à fotometria na extração

Figura 3.17 – Periodogramas de Lomb-Scargle aplicados ao fluxo fotométrico ($\overline{F}_I$) e ao parâmetro polarimétrico ($\overline{F}_U$) para as simulações com $P_{rot} = 10, 25, 50$ e 100 dias. A linha vertical tracejada vermelha indica o período sideral injetado (P_{rot}), enquanto as linhas pontilhadas verdes demarcam as bandas laterais correspondentes aos períodos sinódicos prógrado e retrógrado. A linha horizontal traço-ponto representa o limiar de probabilidade de falso alarme (FAP) de 5%.



do sinal rotacional. O fluxo total ($\overline{F}_I$) é dominado pela variação de base (*baseline*) da curva de fase orbital, o que dilui o sinal das heterogeneidades longitudinais. Em contrapartida, por ser nulo para objetos com simetria refletiva, o parâmetro $\overline{F}_U$ anula as contribuições globais do disco iluminado, isolando a variação induzida pelo movimento dos continentes e nuvens na face visível do planeta. Consequentemente, o sinal isolado gera picos de potência espectral que superam significativamente o limiar de 5% de Probabilidade de Falso Alarme (FAP), atestando a alta confiabilidade estatística da detecção.

Adicionalmente, o periodograma polarimétrico revela o desdobramento do sinal em dois picos ao redor do período sideral injetado, evidenciando o efeito de Modulação de Amplitude com Portadora Suprimida (*Suppressed-Carrier AM*) (Tretter, 2008). Isso ocorre porque a transição das características geográficas (frequência f_{rot}) é modulada pela variação orbital da área iluminada do planeta (f_{orb}). Consequentemente, o pico central em f_{rot} é suprimido e a potência espectral é dividida em duas bandas laterais em $f_{rot} \pm f_{orb}$. Fisicamente, essas bandas correspondem aos períodos sinódicos prógrado e retrógrado. Como atesta a Figura 3.17, o período sideral (P_{rot}) localiza-se no centro de simetria entre os dois picos detectados. A precisão na recuperação dos períodos maiores ($P_{rot} = 50$ e $P_{rot} = 100$ dias) é menor devido à extensão do intervalo de simulação (meia órbita, $\approx 182,6$ dias), que abrange cerca de 3, 6 e 1, 8 ciclos de rotação, respectivamente, limitando a resolução em frequência do algoritmo Lomb-Scargle.

Por fim, cabe destacar uma característica inerente ao periodograma de Lomb-Scargle: sua formulação estatística otimiza o ajuste por mínimos quadrados de um modelo senoidal à observação (VanderPlas, 2018). Uma vez que as variações polarimétricas resultantes da passagem de continentes e nuvens exibem morfologias que se desviam de sinais senoidais, a eficácia do algoritmo em recuperar as bandas laterais sinódicas atesta a robustez do sinal físico injetado. A detecção sob a premissa de um modelo senoidal sugere que a adoção de técnicas espectrais mais flexíveis, como periodogramas baseados em séries de Fourier de múltiplos termos ou em *templates* físicos customizados (VanderPlas, 2018), possui o potencial de aprimorar a sensibilidade na extração das taxas de rotação de exoplanetas heterogêneos através da polarimetria.

3.4.5 Dinâmica Atmosférica em Gigantes Gasosos

Nesta seção, utilizamos o modelo de gigante gasoso descrito na Seção 3.3 para investigar quantitativamente o comportamento do sinal polarimétrico em função da variação na fração de cobertura por bandas latitudinais.

Na escolha dos parâmetros representativos, adotamos o esquema de classificação de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000), que categoriza exoplanetas gigantes gasosos em termos de suas temperaturas de equilíbrio e dos condensados predominantes em suas camadas superiores. Com base nesta classificação, exploramos as assinaturas polarimétricas de modelos pertencentes à Classe I e à Classe II. O modelo de Classe I representa análogos a Júpiter, nos quais temperaturas em torno de 150 K permitem a condensação de amônia (NH_3) em altas altitudes. O modelo de Classe II, por sua vez, descreve gigantes gasosos temperados ($T \approx 250$ K), nos

quais a amônia permanece no estado gasoso e a água (H₂O) se torna o condensado principal.

As camadas atmosféricas foram estruturadas no PyMieDAP seguindo o perfil de pressão adotado por Stam, Hovenier e Waters (2004), com a base da atmosfera estipulada em 5,623 bar, acrescida de camadas intermediárias dedicadas à inserção de aerossóis. Especificamente, para a Classe I, partículas de gelo de amônia ($m = 1,42 - i 3,96 \times 10^{-5}$ para $\lambda = 667,73$ nm (Martonchik; Orton; Appleby, 1984)) são alocadas entre 0,7 e 0,3 bar; para a Classe II, gotículas de água são inseridas entre 0,4 e 0,05 bar.

A parametrização das bandas latitudinais é realizada por meio da modulação da pressão e da profundidade óptica da camada de aerossóis. Essa abordagem fundamenta-se na correlação estrutural observada na atmosfera de Júpiter entre suas *zonas* e seus *cinturões* (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001; Ingersoll et al., 2004; Zuchowski; Yamazaki; Read, 2009), feições que, no presente modelo, são designadas como *base* e *banda*, respectivamente. De acordo com Ingersoll et al. (2004), o principal motivador para a variação de profundidade óptica entre zonas e cinturões é a existência de correntes ascendentes (*upwelling*) e descendentes (*downwelling*) associadas à circulação meridional.

Nas zonas (representadas pela *base* no modelo), o fluxo ascendente de ar sofre expansão e resfriamento adiabático, promovendo a condensação de compostos como a amônia, no caso da Classe I. Esse processo eleva o topo da camada de nuvens para menores níveis de pressão e resulta em uma profundidade óptica elevada ($\tau \approx 30$ (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001)).

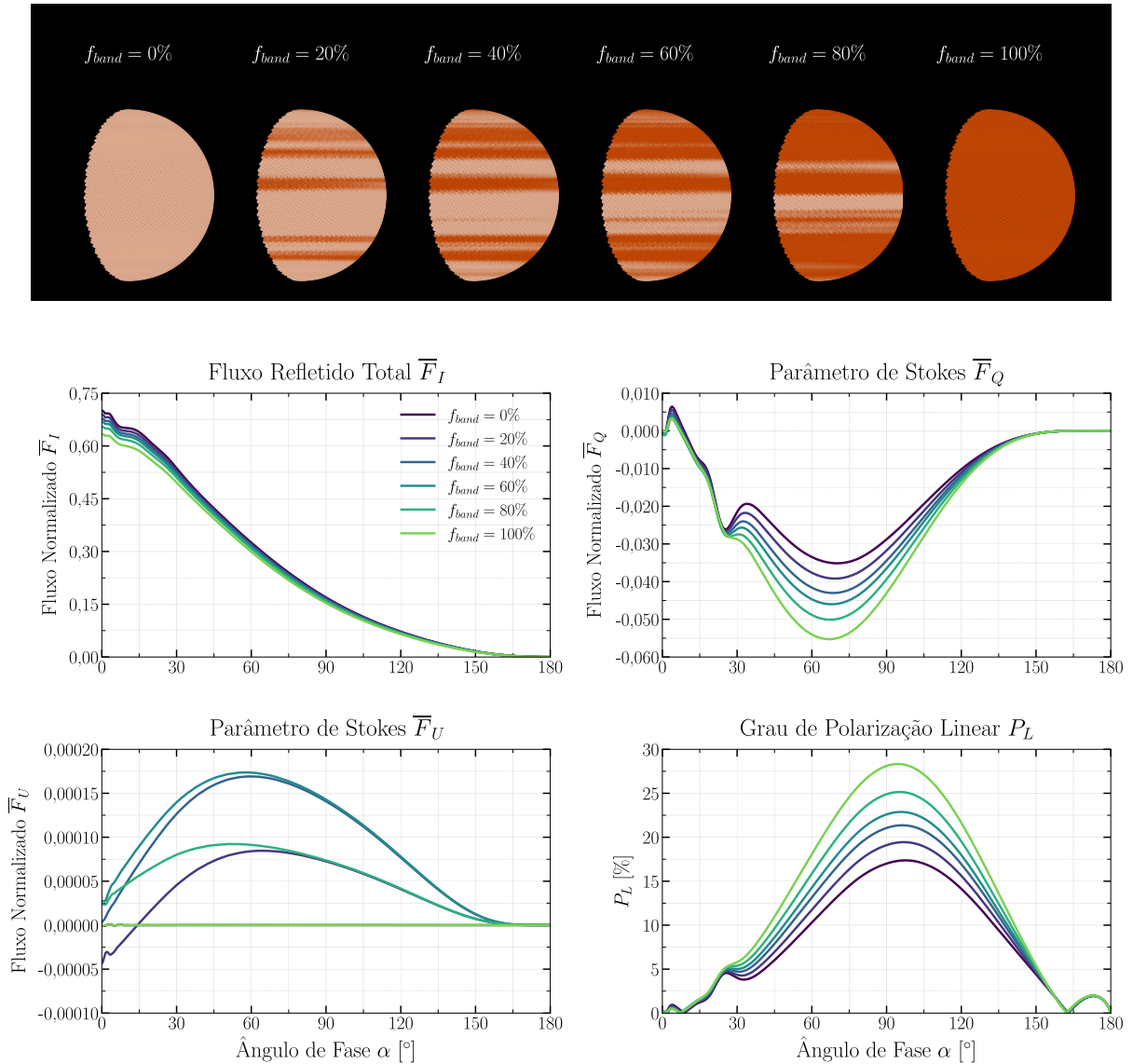
Em contrapartida, os cinturões (parametrizados como *bandas*) são governados pela subsidência do ar, o qual se aquece mecanicamente ao afundar. Esse aquecimento inibe a condensação e evapora as nuvens superiores, reduzindo drasticamente a espessura óptica da região ($\tau \approx 5$ (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001)) e rebaixando o topo da camada refletora para pressões maiores. Como consequência direta dessa depressão topográfica, uma coluna maior do envelope gasoso sobrejacente, composto majoritariamente por H₂ e He, fica exposta à radiação incidente.

As Figuras 3.18 e 3.19 apresentam os resultados radiativos e polarimétricos da simulação para as classes I e II, respectivamente. Em ambos os casos, a evolução do sinal é contrastada com os mapas de configuração espacial do disco visível para seis níveis distintos de cobertura latitudinal de bandas ($f_{band} \in \{0\%; 20\%; 40\%; 60\%; 80\%; 100\%\}$).

Em relação ao fluxo total refletido ($\overline{F}_I$), ambos os modelos exibem um comportamento morfológico semelhante, com albedos geométricos variando entre 0,6 e 0,75, atingindo seu máximo na fase cheia ($\alpha = 0^\circ$). Como esperado, a intensidade total diminui progressivamente com o aumento da fração de bandas (f_{band}), uma vez que a redução da profundidade óptica nestas regiões de subsidência permite que os fótons penetrem mais profundamente na atmosfera, sofrendo maior absorção antes de serem retroespalhados.

As divergências mais evidentes entre as classes manifestam-se no grau de polarização linear (P_L) e no parâmetro $\overline{F}_Q$. No modelo de Classe I, o topo da camada de nuvens de amônia

Figura 3.18 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um exoplaneta gigante gasoso de Classe I (nuvens de amônia) em função da cobertura atmosférica. Os gráficos exibem a intensidade refletida normalizada, o grau de polarização linear e os parâmetros de Stokes fracionais em função da fração de cobertura de bandas latitudinais (f_{band}). Os mapas planetários acima dos painéis ilustram a distribuição espacial das zonas (claras) e cinturões (escuros) para cada incremento na variável f_{band} .

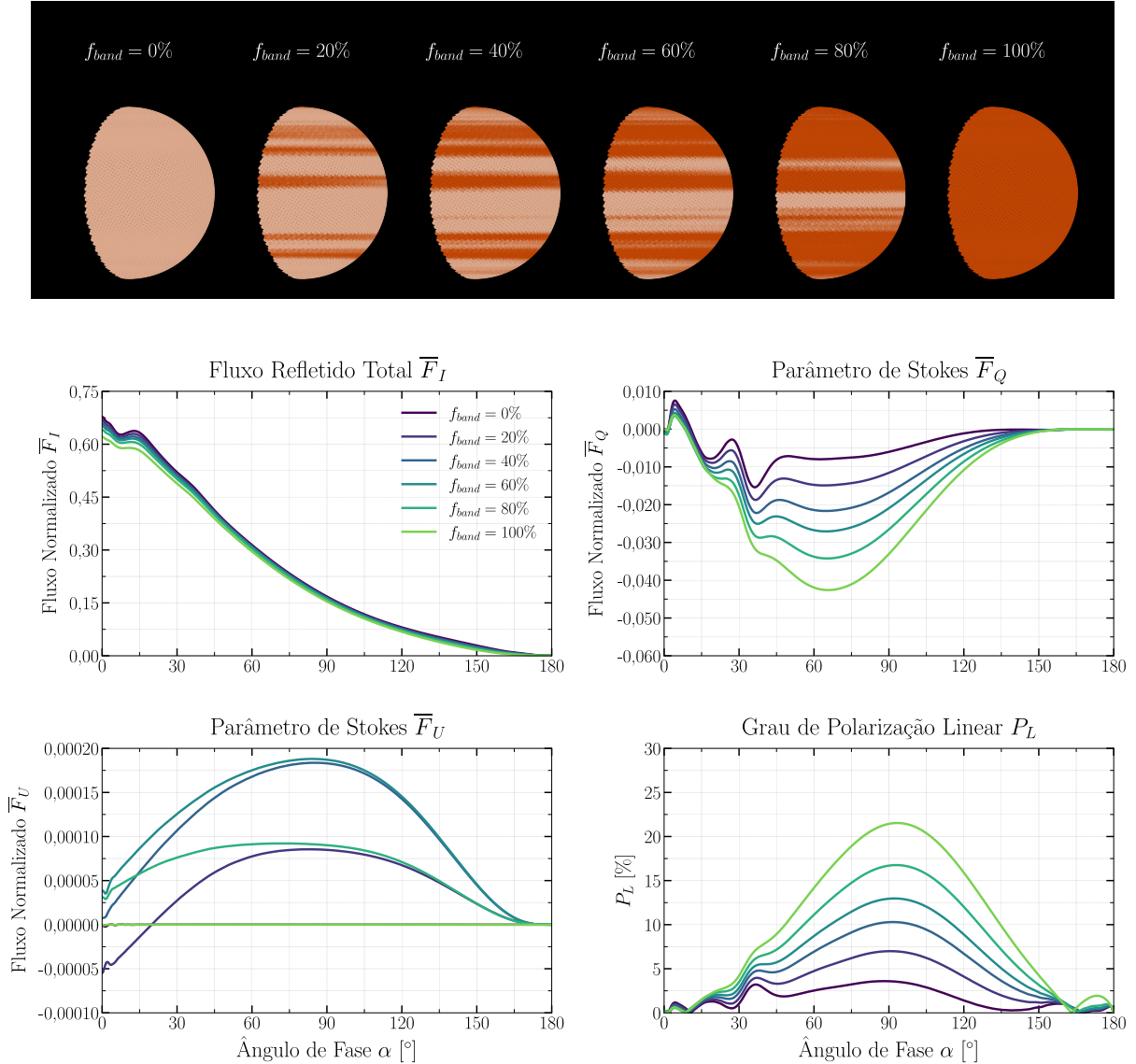


Fonte: O autor.

nas zonas situa-se em pressões de 0, 3 bar, preservando uma coluna substancial de gás sobrejacente. Essa camada de hidrogênio e hélio atua como um forte meio de espalhamento Rayleigh conservativo, o que eleva a componente de polarização do sistema. Consequentemente, para um disco planetário totalmente coberto por zonas ($f_{band} = 0\%$), o máximo de polarização alcançado pela Classe I é aproximadamente 15% maior do que o observado na Classe II, cujas nuvens de água condensam em altitudes significativamente mais elevadas (topo em 0, 05 bar), suprimindo a contribuição da coluna gasosa para o sinal polarizado.

A assinatura polarimétrica direcional característica dos aerossóis, o arco primário,

Figura 3.19 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um exoplaneta gigante gasoso de Classe II (nuvens de água) em função da cobertura atmosférica. Semelhante à Figura 3.18, os gráficos acompanham a evolução da intensidade e dos parâmetros de polarização conforme a transição morfológica de um planeta coberto unicamente por zonas ($f_{band} = 0\%$) passa para um planeta dominado por bandas de subsidência ($f_{band} = 100\%$).



Fonte: O autor.

manifesta-se em ângulos de fase próximos a $\alpha \approx 30^\circ$, posição governada pelo índice de refração do gelo de amônia. No modelo de Classe I, a amplitude deste pico mantém-se estável em aproximadamente 5%, independentemente da fração de cobertura por bandas (f_{band}). Neste cenário, a atenuação do sinal do arco primário provocada pelo afundamento topográfico das nuvens nas bandas (que eleva a absorção e o espalhamento Rayleigh pelo gás sobrejacente) é compensada pela diminuição da profundidade óptica da camada. O afinamento óptico atenua o regime de espalhamento múltiplo despolarizante, favorecendo o espalhamento simples e preservando a amplitude do sinal. É importante ressaltar que o formato e a amplitude do arco primário para o gelo de amônia, neste caso, são primariamente artefatos relacionados à aproximação de

esfericidade. Conforme demonstrado em laboratório por Pope et al. (1992), o espalhamento por cristais de amônia é apropriadamente descrito pela teoria de Mie apenas para partículas pequenas ($r_{eff} \approx 1 \mu\text{m}$), enquanto a parametrização das classes de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000) é feita para $r_{eff} \approx 5 \mu\text{m}$. Na atmosfera real, a irregularidade dos cristais maiores tenderia a atenuar e dispersar o sinal direcional desta feição.

No modelo de Classe II, o arco primário está situado ao redor de $\alpha \approx 42^\circ$ (assim como nas Figuras 3.13, 3.15 e 3.16). Neste caso, a amplitude do pico sofre uma atenuação em função da fração de cobertura devido ao aumento da proporção de gás disponível ao espalhamento Rayleigh à medida que a maior parte das nuvens de água desce a pressões maiores nas bandas.

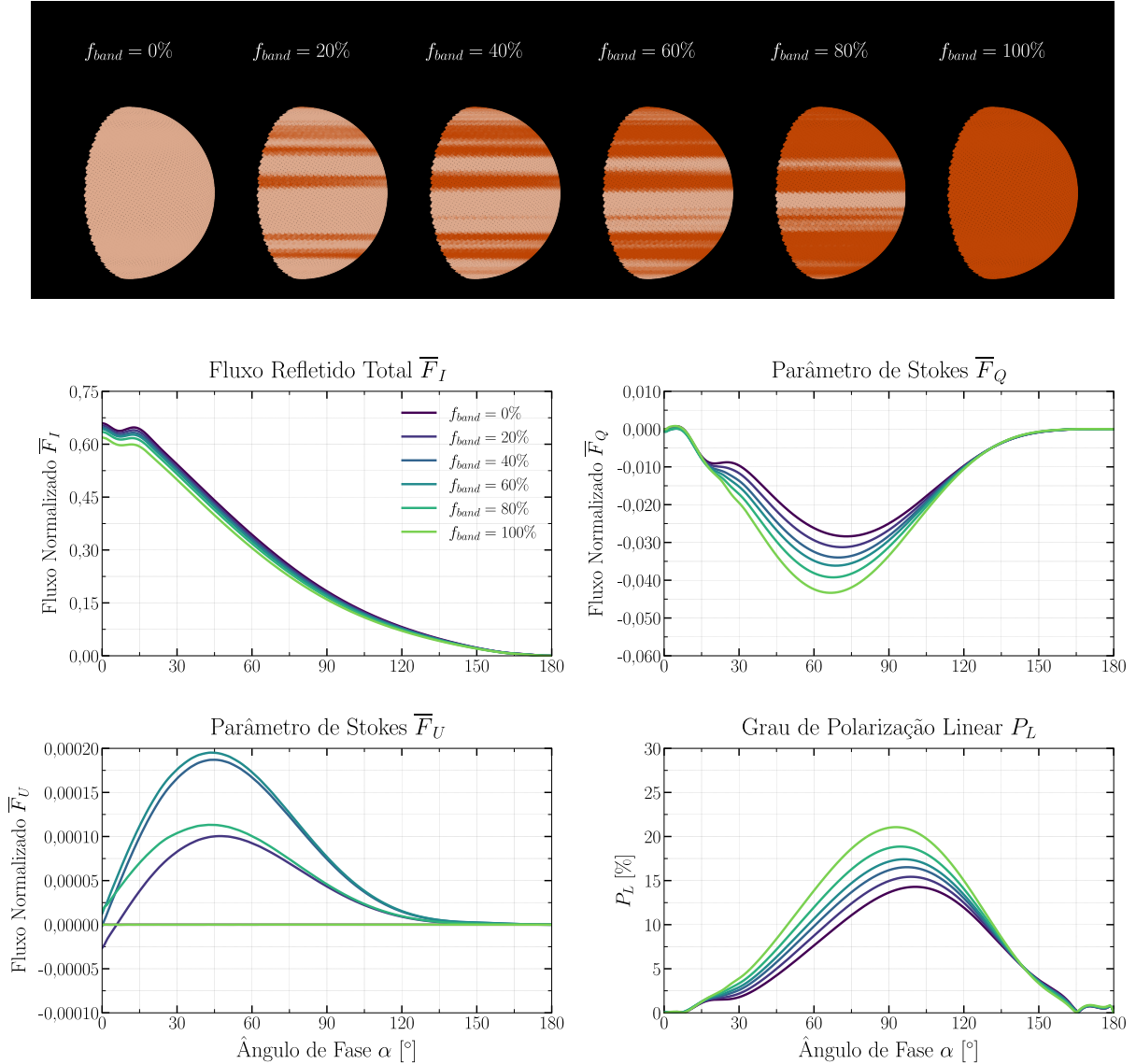
Por fim, comparamos o comportamento polarimétrico das Classes I e II com um modelo fisicamente detalhado da atmosfera de Júpiter. Esta estratificação foi construída com base nos perfis recuperados *in situ* pela sonda *Galileo* (Young, 1998) e na análise estrutural de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000). Diferentemente dos cenários simplificados anteriores, definimos quatro regiões principais de aerossóis sobrepostas à estrutura gasosa: uma névoa fotoquímica estratosférica (*haze*) de poliacetileno, modelada com o índice de refração $m = 1,54 - i10^{-4}$ (Sciamma-O'Brien et al., 2023); uma nuvem superior de gelo de amônia análoga à utilizada na Classe I; uma camada intermediária de gelo de amônia situada entre ~ 2 e 4 bar; e uma nuvem profunda, composta por NH_4SH e H_2O , estendendo-se de 4 bar até a base atmosférica em 5,623 bar.

A inserção da névoa estratosférica e da estrutura multicamadas altera a assinatura óptica do sistema, conforme ilustrado na Figura 3.20. O principal efeito observado na polarização, em comparação às Classes I e II, é a atenuação das assinaturas direcionais de aerossóis, especialmente o arco primário. Fisicamente, o *haze* atua como um filtro difusor no topo da atmosfera: os fótons retroespalhados pelas nuvens de amônia perdem grande parte de sua coerência direcional ao atravessarem repetidamente os aerossóis estratosféricos antes de escaparem para o espaço.

Além de diluir a assinatura direcional do arco primário, a absorção inerente à névoa (representada pela porção imaginária $k = 10^{-4}$) e o seu próprio regime de espalhamento diluem a amplitude máxima da polarização Rayleigh em $\alpha \approx 90^\circ$, reduzindo o pico polarimétrico global do planeta para cerca de 21% quando totalmente coberto por bandas, e para aproximadamente 15% no cenário dominado pela base. A variação no grau de polarização em função da cobertura apresenta um alcance dinâmico significativamente menor em comparação com as Classes I e II. Esta diluição evidencia que assinaturas angulares nítidas de camadas de nuvens subjacentes são extremamente sensíveis à presença de aerossóis na alta atmosfera. Cumpre ressaltar que, tanto para este modelo detalhado quanto para os modelos das Classes I e II, o albedo geométrico se aproxima das predições fotométricas de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000).

A partir destes resultados, reconstruímos os mapas espacialmente resolvidos de Júpiter (gerados proceduralmente para uma fração de cobertura de $f_{band} = 50\%$) para os comprimentos de onda efetivos do sistema fotométrico SDSS-*griz*, estabelecendo uma comparação morfoló-

Figura 3.20 – Curvas de fase polarimétrica simuladas para um modelo de Júpiter estruturado a partir de Sudarsky, Burrows e Pinto (2000). Semelhante à Figura 3.18, os gráficos acompanham a evolução da intensidade e dos parâmetros de polarização conforme a transição morfológica de um planeta coberto unicamente por zonas ($f_{band} = 0\%$) passa para um planeta dominado por bandas de subsidência ($f_{band} = 100\%$).



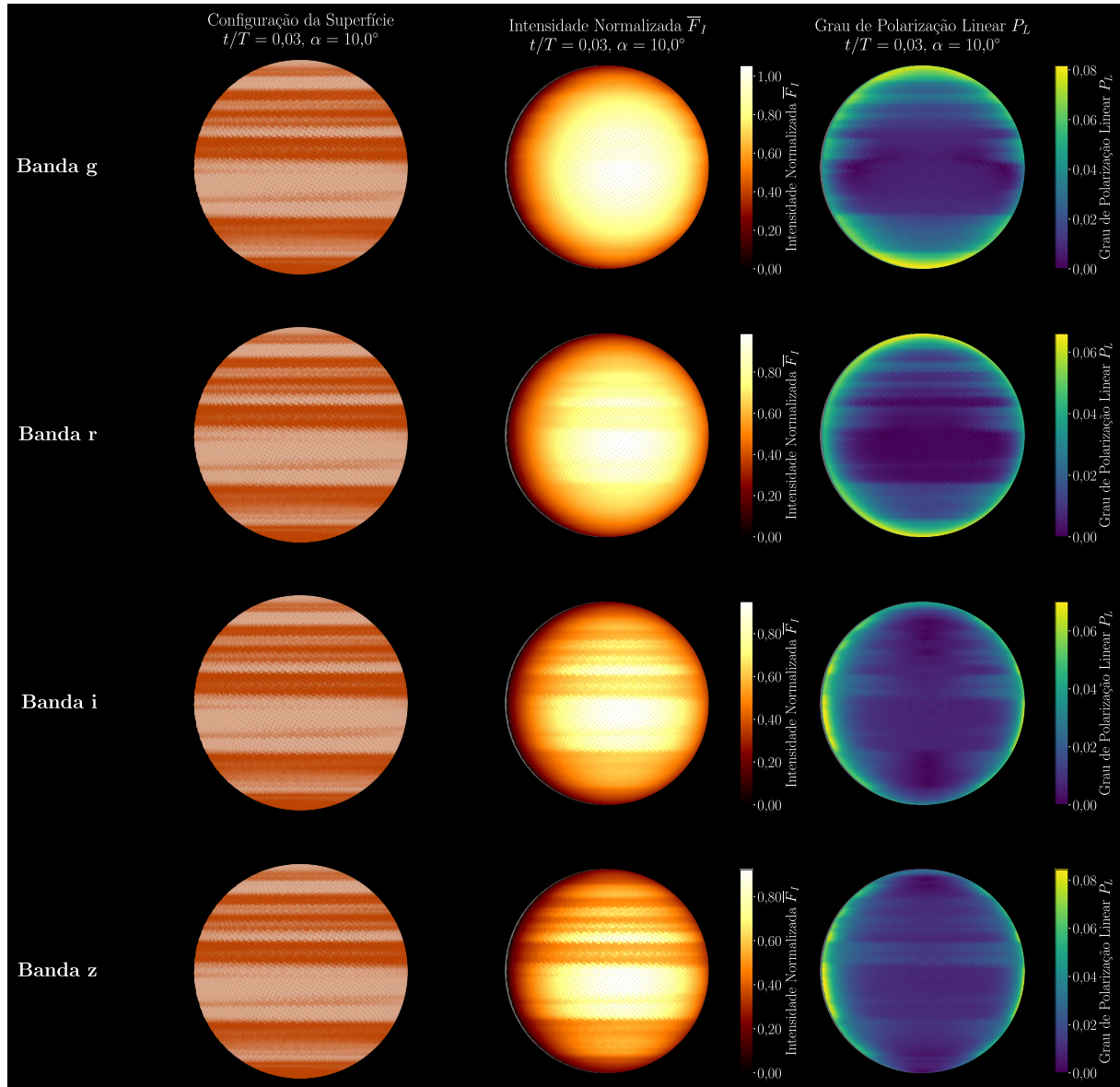
Fonte: O autor.

gica com as observações multibanda de McLean et al. (2017). Os mapas renderizados podem ser observados na Figura 3.21.

Deste modo, a nossa modelagem demonstra ser capaz de recuperar a morfologia estrutural básica de Júpiter, evidenciando como a topografia das camadas de nuvens (o afundamento das nuvens nas regiões de subsidência) altera o balanço entre o espalhamento de aerossóis e a coluna de gás Rayleigh sobrejacente.

Contudo, uma comparação aos dados empíricos do instrumento *ToPol* (McLean et al., 2017) revela que a parametrização microfísica uniforme apresenta limitações. Nas nossas simulações (Figura 3.21), a forte eficiência do espalhamento Rayleigh homogeneiza a intensidade

Figura 3.21 – Mapas espacialmente resolvidos do modelo detalhado de Júpiter, simulados para as bandas fotométricas SDSS-*g*, *r*, *i* e *z* num ângulo de fase baixo ($\alpha = 10^\circ$). A malha de visualização está dividida em três colunas: à esquerda, a configuração morfológica do disco (zonas claras e cinturões escuros); ao centro, a intensidade refletida normalizada ($\bar{F}_I$); e à direita, o grau de polarização linear (P_L). A malha ilustra a dependência do contraste polarimétrico latitudinal em função do comprimento de onda. Na banda *g*, o espalhamento Rayleigh sobrejacente aos cinturões domina a polarização do disco; nas bandas mais longas (*i* e *z*), a quebra na eficiência de Rayleigh diminui o contraste entre as zonas e os cinturões.



Fonte: O autor.

na banda *g*, reduzindo o contraste fotométrico, enquanto no Júpiter real o maior contraste fotométrico ocorre nos filtros azuis. Ademais, nosso modelo não prevê a inversão latitudinal da polarização nos comprimentos de onda longos (filtros V e R).

Essas divergências apontam para duas mecânicas atmosféricas fundamentais que não estão contempladas em nossa idealização (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001):

- absorção variável por cromóforos: a ausência de contraste no azul em nosso modelo

corroborar a necessidade de um material fortemente absorvedor em curtos comprimentos de onda. Na atmosfera de Júpiter, o albedo de espalhamento simples ($\tilde{\omega}$) no azul varia espacialmente, sendo significativamente menor nos cinturões (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001). A inclusão de uma maior parte imaginária no índice de refração dos aerossóis nas bandas suprimiria o excesso de luz Rayleigh, restaurando o alto contraste fotométrico observado no filtro B;

- b) estratificação de tamanhos e partículas não-esféricas: o modelo adotado assume aerossóis na escala de microns baseados na Teoria de Mie (esferas). No entanto, recuperações detalhadas sugerem que a névoa estratosférica joviana é composta por partículas menores ($r_{eff} \approx 0,01$ a $0,05 \mu m$) (Simon-Miller; Banfield; Gierasch, 2001), que atuam adicionando polarização positiva. Simultaneamente, as nuvens profundas de amônia são compostas por cristais irregulares, que não geram o intenso ramo de polarização negativa típico das esferas de Mie em pequenos ângulos de fase. O uso exclusivo de espalhadores esféricos de tamanho micrométrico subestima a polarização positiva das zonas vista nos telescópios.

Portanto, enquanto a arquitetura computacional atual atinge êxito em modelar a macrofísica da coluna de gás, rastrear assinaturas de fase e derivar as grandezas globais de albedo, o mapeamento polarimétrico exato das zonas jovianas em trabalhos futuros exigirá a substituição das matrizes de Mie por matrizes de espalhamento vetorial derivadas de partículas fractais e a inclusão mandatória da química de cromóforos.

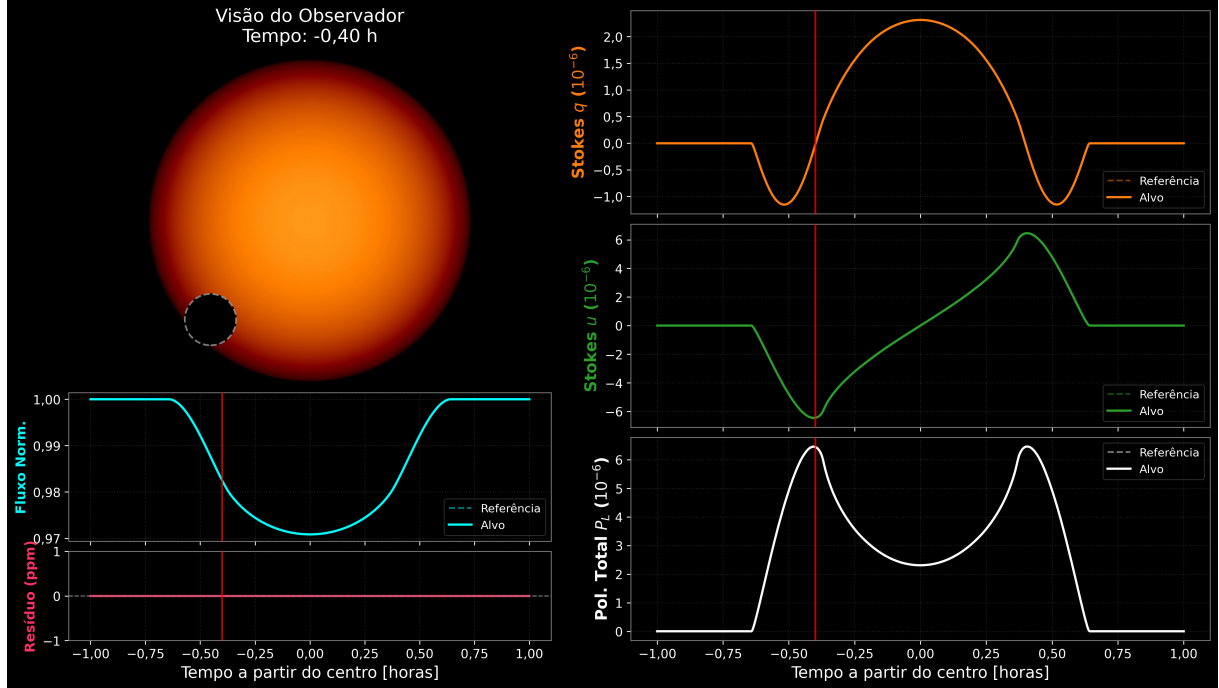
3.4.6 Assinaturas Polarimétricas no Trânsito: Manchas e Achatamento

Como demonstrado nas Figuras 3.4 e 3.5, nosso modelo é capaz de reproduzir resultados consistentes para o sinal fotométrico do trânsito de exoplanetas e para o fenômeno de *spot-crossing*. Nesta seção, validamos a implementação da assinatura polarimétrica no trânsito por meio da reprodução do trânsito do exoplaneta WASP-43b, conforme realizado por Kostogryz, Yakobchuk e Berdyugina (2015). Além disso, utilizamos este sistema como base para a exploração do sinal polarimétrico induzido por manchas estelares e pelo achatamento planetário.

A Figura 3.22 ilustra o trânsito de referência do exoplaneta WASP-43b (Hellier et al., 2011), para o qual consideramos exatamente os mesmos parâmetros orbitais e estelares ($R_p/R_\star = 0,15947$; $T_{eff} = 4520$ K; $i = 82,60^\circ$; $\lambda = 450$ nm) adotados por Kostogryz, Yakobchuk e Berdyugina (2015).

Esta simulação demonstra que o esquema de integração sobre uma malha tridimensional de *spangles* é capaz de recuperar, em formato e amplitude, a assinatura polarimétrica obtida por meio do modelo bidimensional simétrico de Kostogryz, Yakobchuk e Berdyugina (2015). Diferentemente da modelagem estritamente fotométrica, em que a simetria radial da estrela torna a orientação do plano orbital no céu uma variável degenerada, motivo pelo qual

Figura 3.22 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b. À esquerda, são apresentados o mapa de configuração da estrela sob a perspectiva do observador e as curvas de fluxo normalizado e de resíduo. À direita, ilustram-se as curvas para os parâmetros de Stokes $q = Q/I$ e $u = U/I$, além do grau de polarização linear P_L , todos normalizados em relação à intensidade estelar. A linha vertical em vermelho ilustra a posição do planeta nas curvas. As legendas e o resíduo referem-se à comparação entre o modelo de referência esférico e sem manchas e o modelo alvo avaliado, que, neste caso de validação, são idênticos.



Fonte: O autor.

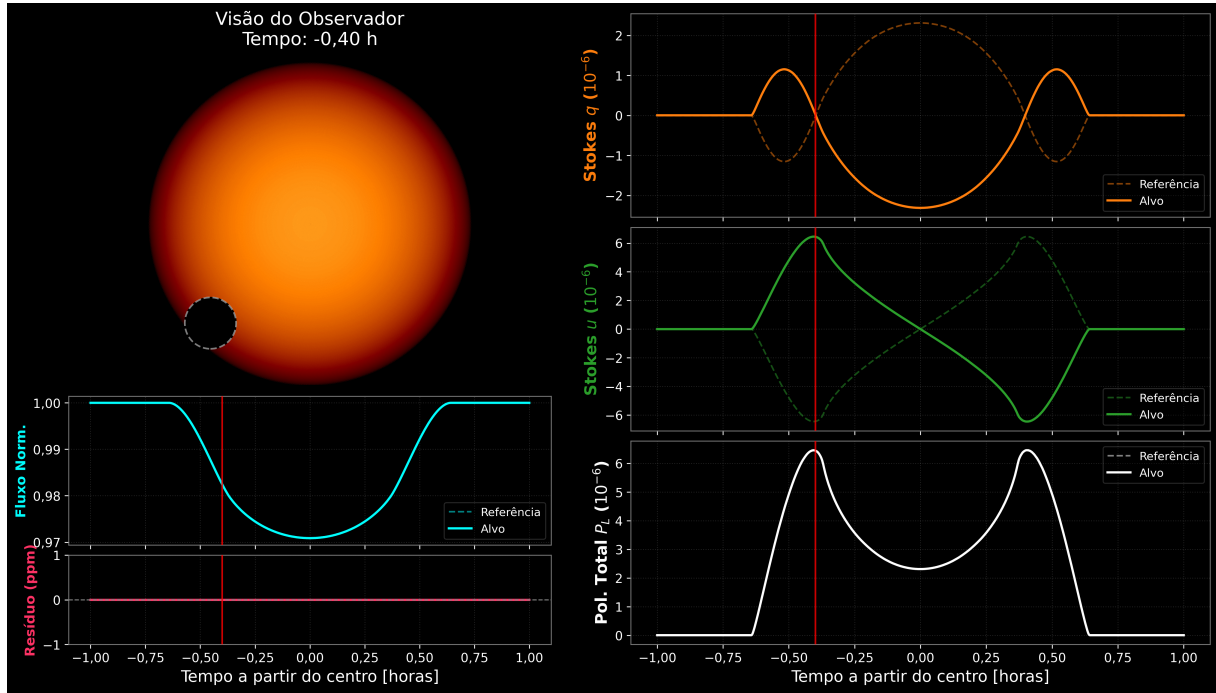
a longitude do nó ascendente (Ω) é comumente omitida em ferramentas clássicas de ajuste de trânsito (Kreidberg, 2015), os parâmetros de Stokes q e u dependem estritamente do referencial adotado. Em nossa parametrização base, alinhamos o trajeto do exoplaneta horizontalmente ao longo do eixo cartesiano, o que no sistema astronômico (medido a partir do Norte Celeste) equivale a $\Omega = 90^\circ$, em conformidade com o estabelecido por Kostogryz, Yakobchuk e Berdyugina (2015). A partir deste modelo, simulamos a variação da polarização para quaisquer outros referenciais observacionais Ω por meio da aplicação da matriz de rotação de Stokes aos parâmetros resultantes, como uma etapa de pós-processamento.

A Figura 3.23 ilustra o trânsito do WASP-43b, considerando o modelo base com $\Omega = 90^\circ$ e um modelo rotacionado para $\Omega = 180^\circ$.

Por meio desta modelagem, é possível notar que, assim como o fluxo normalizado, a polarização linear total P_L é completamente independente de Ω . Os máximos absolutos de q e u ocorrem em longitudes Ω alinhadas ao referencial correspondente (referencial de Q ou U no plano do céu).

Para a simulação das regiões ativas, modelamos a fotosfera, a umbra e a penumbra como emissores de corpo negro. Adotando uma temperatura efetiva $T_{\text{eff}} = 4520$ K para a estrela, definimos déficits térmicos médios de $\Delta T_{\text{umbra}} = 1500$ K e $\Delta T_{\text{penumbra}} = 500$ K, valores

Figura 3.23 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, em que o modelo de referência é mantido com $\Omega = 90^\circ$ e o modelo alvo é rotacionado para $\Omega = 180^\circ$.



Fonte: O autor.

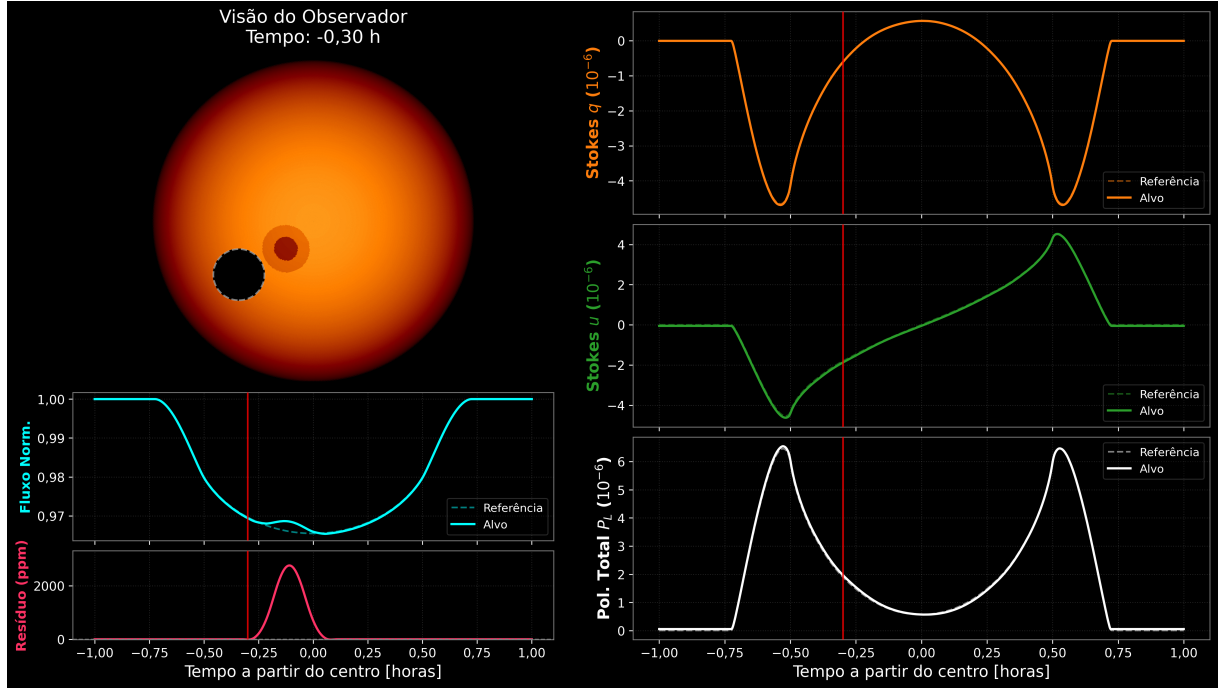
compatíveis com os reportados por Eker et al. (2003) e Silva-Valio et al. (2010). O raio total da mancha foi fixado em 15% do raio estelar, estendendo-se a umbra até a metade deste valor. Nas Figuras 3.24 e 3.25, avaliamos dois cenários distintos de ocultação (*spot-crossing*) para uma inclinação orbital de $i = 86^\circ$: no primeiro, o cruzamento ocorre sobre uma mancha localizada próxima ao centro do disco estelar; no segundo, o trânsito atinge uma mancha próxima ao limbo.

Na Figura 3.24, é possível perceber que, mesmo havendo o evento de ocultação (*spot-crossing*) e a modulação fotométrica correspondente sendo evidente no resíduo, o sinal polarimétrico permanece inalterado. Isso ocorre porque a polarização estelar por espalhamento tende a zero no centro do disco; logo, a mancha central não introduz assimetrias polarimétricas significativas, deixando o exoplaneta como o único agente relevante a bloquear a luz polarizada do limbo.

Em contrapartida, na Figura 3.25, a mancha localizada próxima ao limbo atua na quebra da simetria radial da estrela. Isso resulta em um grau de polarização linear de linha de base consideravelmente maior, mantendo-se elevado mesmo fora do período de trânsito. O formato da curva de polarização durante o *spot-crossing* no limbo torna-se acentuadamente assimétrico e apresenta um mínimo global deslocado em relação ao centro geométrico do trânsito, resultante do balanço vetorial entre a sombra do planeta e a região ativa. Um efeito de deslocamento e assimetria semelhante ocorre até mesmo quando a mancha não é ocultada, como ilustrado na Figura 3.26.

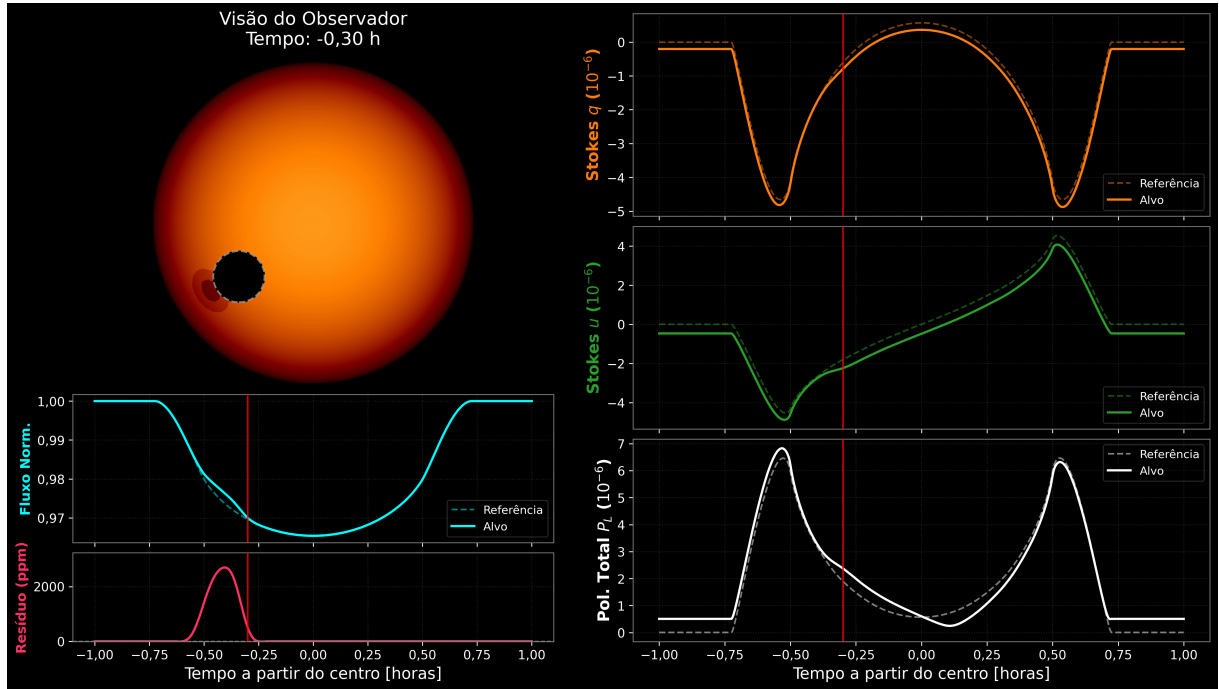
Por fim, exploramos o impacto da morfologia planetária por meio da introdução de um achatamento acentuado ($f = 0,3$) associado a diferentes obliquidades projetadas ($\psi = 0^\circ$,

Figura 3.24 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, porém com a inclinação orbital modificada para $i = 86^\circ$. O modelo de referência é isento de manchas, enquanto o modelo alvo apresenta uma região ativa nas coordenadas estelares $(-10^\circ, -10^\circ)$.



Fonte: O autor.

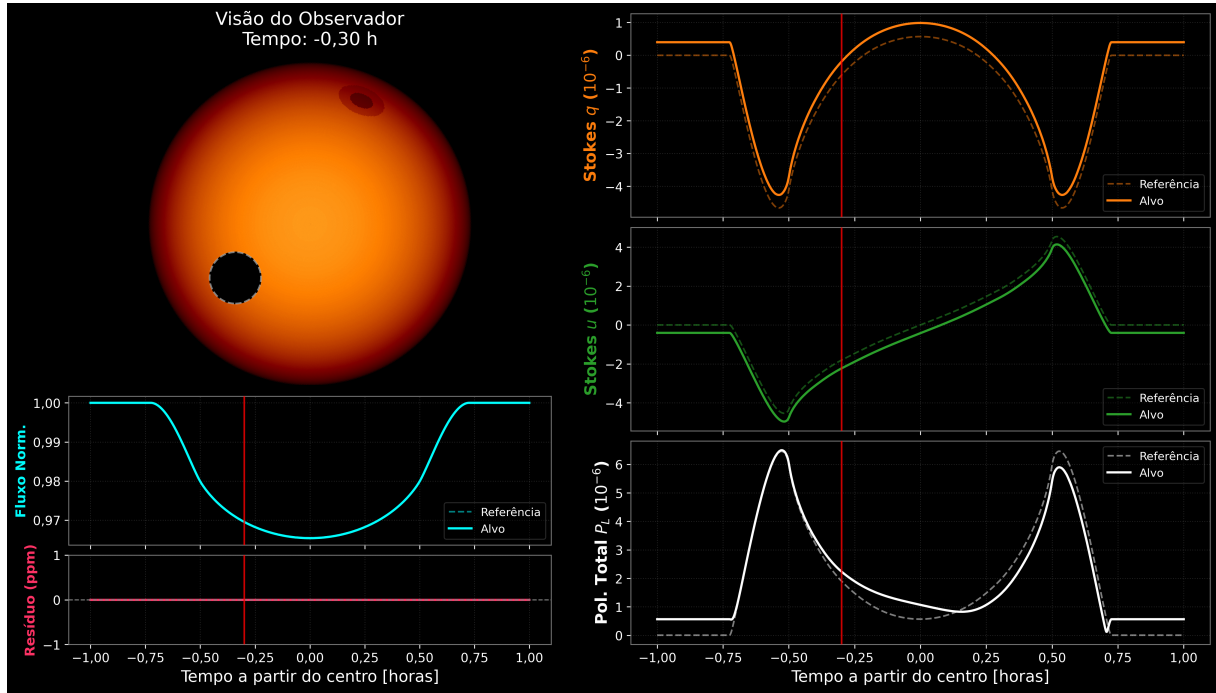
Figura 3.25 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o cruzamento sobre uma mancha localizada próxima ao limbo, nas coordenadas estelares $(-25^\circ, -45^\circ)$.



Fonte: O autor.

45° e 90°). Para isolar o efeito da geometria oblata, comparamos os sinais de um modelo esférico de referência com os de um alvo achatado configurado com a exata mesma área de

Figura 3.26 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, ilustrando um cenário sem *spot-crossing* direto, onde a mancha encontra-se nas coordenadas estelares (50° , 30°).



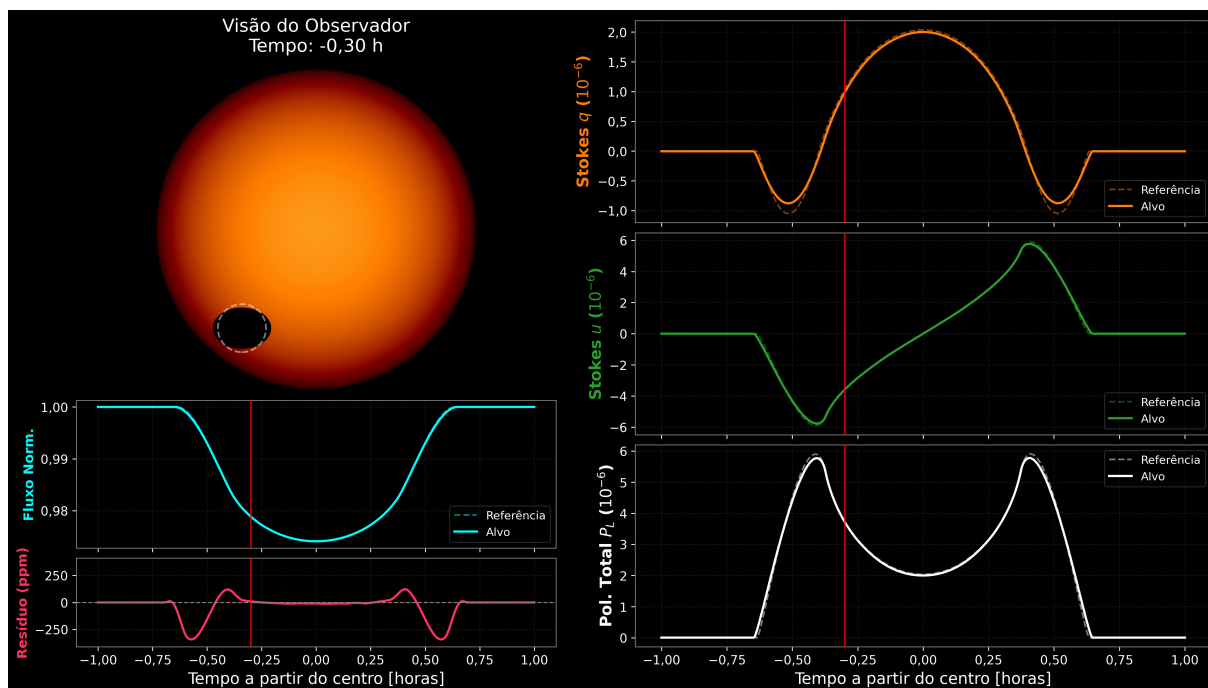
Fonte: O autor.

bloqueio projetada. A Figura 3.27 ilustra esta comparação para uma obliquidade nula ($\psi = 0^\circ$). Neste cenário, nota-se que a expansão do raio equatorial resulta no aumento da duração total do trânsito. Como consequência geométrica, observa-se uma atenuação marginal da amplitude polarimétrica durante as fases de ingresso e egresso, uma vez que a progressão da silhueta planetária sobre as regiões altamente polarizadas do limbo estelar ocorre de forma mais gradual. A amplitude da variação do sinal polarimétrico é diretamente proporcional à variação no sinal fotométrico. Fotometricamente, o resíduo diferencial entre os modelos manifesta-se sob a forma de oscilações simétricas confinadas exclusivamente aos momentos de contato.

Na Figura 3.28, apresentamos a simulação para a obliquidade $\psi = 90^\circ$. Neste cenário, considerando a trajetória não-central do modelo de referência WASP-43b ($i = 82,60^\circ$), o planeta esférico mantém uma maior eficiência geométrica na ocultação do disco durante o ingresso e o egresso. Esse desalinhamento do planeta oblato com a curvatura local do limbo resulta em picos de polarização levemente menores. Fotometricamente, no entanto, o resíduo apresenta um comportamento diametralmente oposto ao observado na Figura 3.27. Como o planeta oblato distribui sua área de bloqueio sobre um gradiente mais severo de escurecimento de limbo (estendendo-se em direção à borda inferior mais escura), a silhueta bloqueia regiões de menor intensidade. Consequentemente, o déficit de fluxo é atenuado, mantendo o resíduo positivo (> 0) durante todo o evento de trânsito. Pela mesma razão, durante o meio do trânsito, o planeta oblato oculta uma região de maior polarização elevando proporcionalmente o mínimo do grau de polarização linear em relação ao modelo esférico.

Apresentamos, nas Figuras 3.29 e 3.30, os resultados para a obliquidade $\psi = 45^\circ$,

Figura 3.27 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, ilustrando o impacto morfológico do achatamento planetário. O modelo de referência assume um exoplaneta esférico, enquanto o modelo alvo adota um planeta oblato com achatamento $f = 0,3$ e obliquidade $\psi = 0^\circ$. Ambos os corpos foram modelados de forma a conservar a exata mesma área de bloqueio projetada. O círculo tracejado na visão do observador representa o planeta esférico.

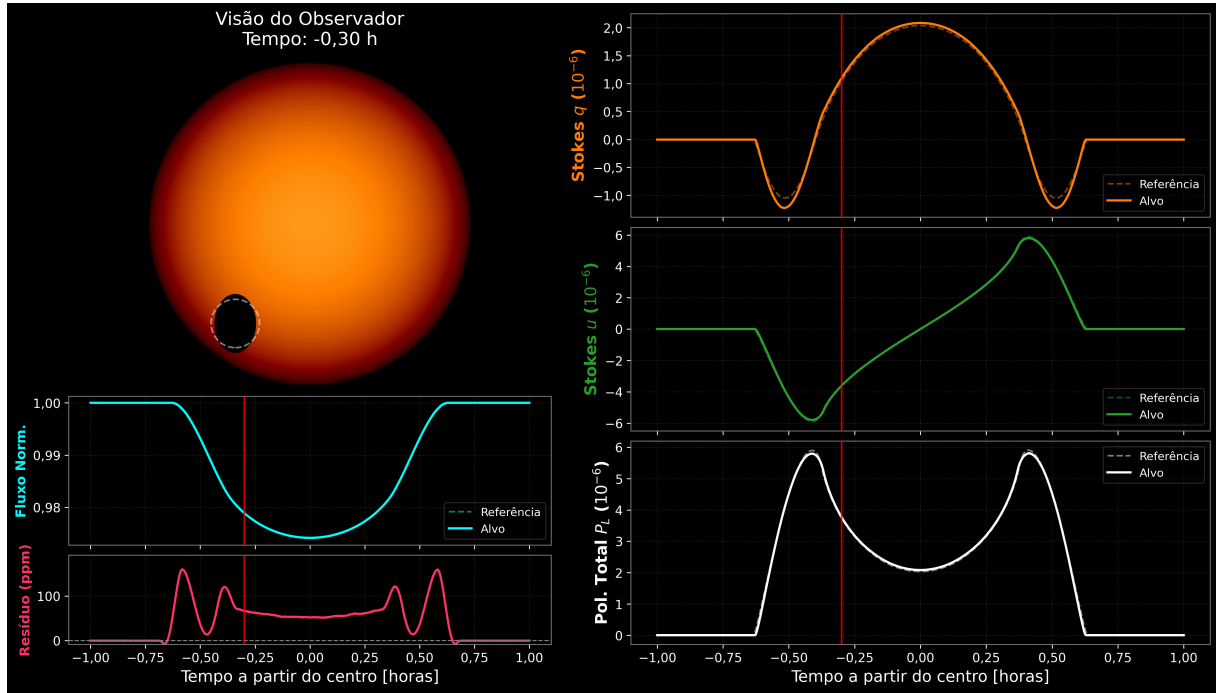


Fonte: O autor.

expandindo a análise para abranger a dependência espectral (comprimento de onda) e termodinâmica (temperatura efetiva da estrela hospedeira), respectivamente. Nestas configurações, a inclinação do eixo planetário induz uma quebra de simetria geométrica durante as fases de ingresso e egresso. Como resultado, é possível isolar o efeito morfológico do achatamento através do surgimento de uma assinatura assimétrica no resíduo fotométrico e de um evidente desequilíbrio na magnitude dos picos polarimétricos entre o primeiro e o último contato. Fisicamente, no ingresso, a orientação do planeta oblato alinha-se de forma mais eficiente à tangente local do disco estelar em comparação ao modelo esférico e ao momento do egresso. Essa conformidade geométrica eleva a fração ocultada da extremidade altamente polarizada do limbo, fazendo com que a amplitude de polarização seja maior no ingresso do que no egresso.

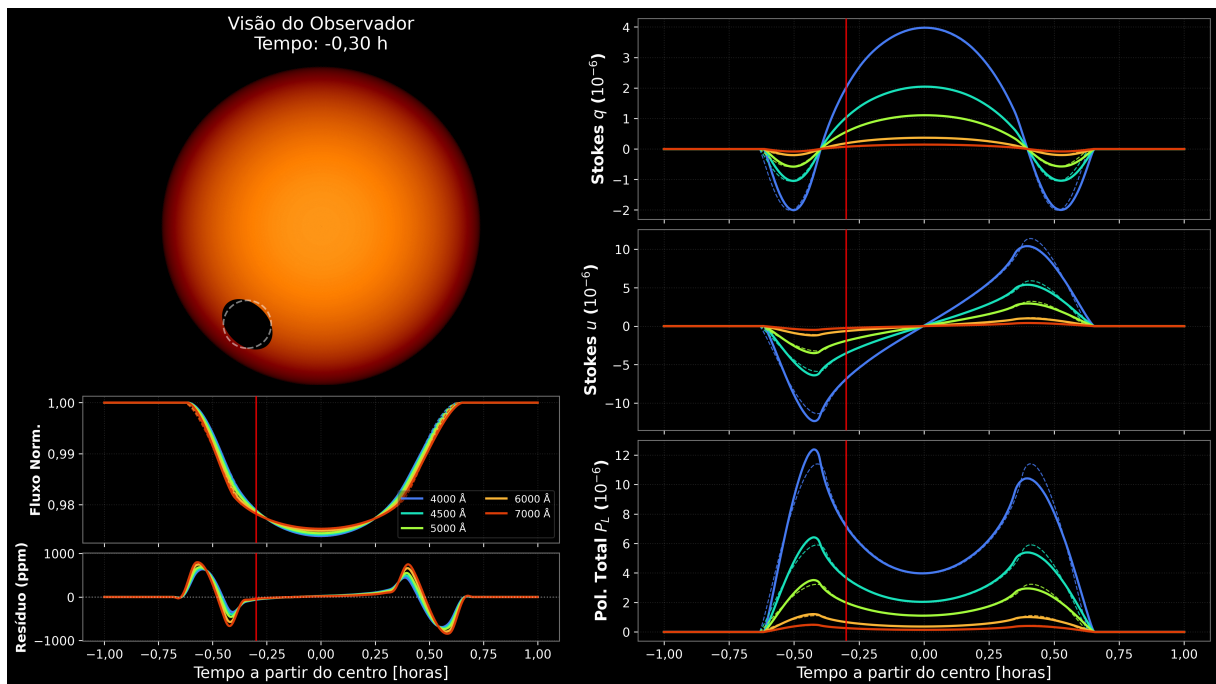
A partir da análise destas figuras, nota-se que as dependências espectral e termodinâmica do escurecimento de limbo não apenas alteram o formato e a profundidade do trânsito fotométrico, mas também a intensidade do sinal polarimétrico. Em especial, a variação espectral resulta em diferenças que chegam a uma ordem de grandeza na amplitude da polarização entre os comprimentos de onda mais curtos ($\lambda = 4000 \text{ \AA}$) e os mais longos ($\lambda = 7000 \text{ \AA}$), refletindo a eficiência do espalhamento estelar. Contudo, a morfologia assimétrica, ditada pela geometria do achatamento e da obliquidade, mantém-se consistente em todos os cenários, atuando como um traço morfológico independente da banda de observação ou da temperatura estelar.

Figura 3.28 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblató ($f = 0,3$) com a obliquidade projetada modificada para $\psi = 90^\circ$ (alinhamento polar transversal).



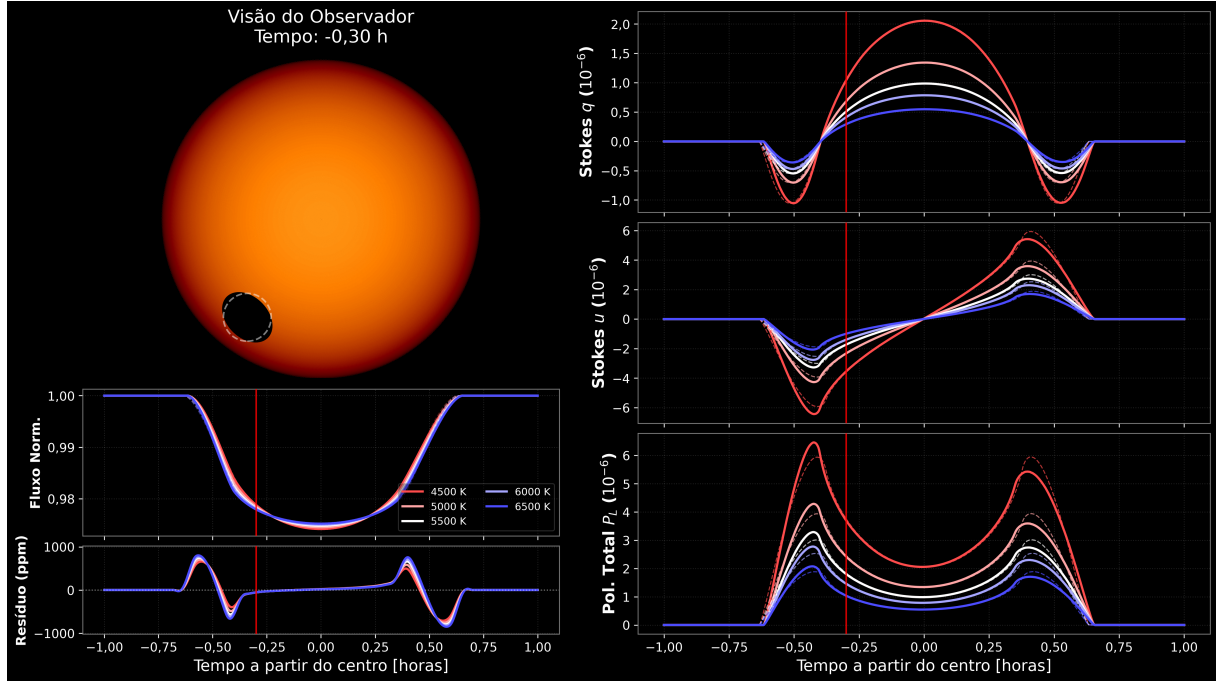
Fonte: O autor.

Figura 3.29 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblató ($f = 0,3$) com a obliquidade projetada modificada para $\psi = 45^\circ$. O painel sobre põe múltiplas simulações para evidenciar a dependência espectral dos sinais fotométricos e polarimétricos em função de diferentes comprimentos de onda, de $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ a $\lambda = 7000 \text{ \AA}$.



Fonte: O autor.

Figura 3.30 – Trânsito primário simulado do exoplaneta WASP-43b, avaliando o trânsito do planeta oblató ($f = 0,3$) em $\psi = 45^\circ$. Neste cenário, o painel mantém o comprimento de onda fixo ($\lambda = 4500 \text{ \AA}$) e ilustra a resposta da morfologia e amplitude dos sinais em função da temperatura efetiva (T_{eff}) da estrela, de $T_{\text{eff}} = 4500 \text{ K}$ a $T_{\text{eff}} = 6500 \text{ K}$.



Fonte: O autor.

4 OBSERVAÇÕES E ANÁLISE DO SISTEMA K2-131

Enquanto a modelagem numérica permite explorar uma vasta gama de cenários exoplanetários em ambientes isolados de ruído estocástico, a astronomia observacional impõe restrições severas ditadas pela instrumentação e pela atmosfera terrestre. A busca por sinais polarimétricos da ordem de partes por milhão (ppm) em alvos não resolvidos espacialmente representa um dos desafios técnicos de maior interesse na astrofísica contemporânea. Este capítulo tem como objetivo a aplicação dos modelos desenvolvidos no Capítulo 3 aos dados reais de uma campanha de observação em solo.

O alvo selecionado para este estudo foi o sistema K2-131, caracterizado por um planeta de período ultracurto (USP) cuja geometria orbital e ausência esperada de atmosfera espessa o tornam um candidato ideal para a busca de luz polarizada refletida por superfícies extremas. Utilizando o recém-comissionado instrumento SPARC4, acoplado ao telescópio de 1,60 m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA), buscamos extrair a curva de fase fotométrica e polarimétrica deste sistema.

Nas seções a seguir, documentamos o percurso observacional e analítico exigido por esta campanha. A Seção 4.1 descreve o arranjo instrumental e relata as adversidades meteorológicas que impactaram a qualidade fotométrica dos dados. A Seção 4.2 fundamenta a escolha do alvo e estabelece as previsões teóricas de amplitude do sinal. A Seção 4.3 foca no processamento das observações, apresentando as técnicas de redução e descorrelação (*detrending*) aplicadas para mitigar a forte variância atmosférica. Por fim, a Seção 4.4 confronta os limites empíricos alcançados com simulações de modelagem direta (*Forward Modeling*), evidenciando as severas restrições geométricas do sistema K2-131 e estabelecendo um *benchmark* de sensibilidade instrumental para futuras observações polarimétricas de exoplanetas rochosos.

4.1 INSTRUMENTAÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS

As observações apresentadas neste trabalho foram conduzidas no Observatório do Pico dos Dias (OPD), operado pelo Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA), utilizando o telescópio refletor Perkin-Elmer de 1,60 m de abertura. Acoplado ao foco Cassegrain deste telescópio encontra-se o *Simultaneous Polarimeter and Rapid Camera in 4 bands* (SPARC4) (Rodrigues et al., 2024), um instrumento fotopolarimétrico projetado para a aquisição simultânea em quatro bandas largas (com faixas de transmissão semelhantes ao sistema SDSS *griz*).

O design óptico do SPARC4 emprega uma série de divisores de feixe dicróicos que separam a luz incidente, direcionando-a simultaneamente para quatro câmeras CCD independentes. Para a aquisição polarimétrica, o instrumento é equipado com um analisador de polarização de duplo feixe, que divide a luz nas componentes ortogonais ordinária e extraordinária, operando em conjunto com uma lâmina de meia-onda (para polarização linear) ou de quarto de

onda (para polarização circular) rotativa (Rodrigues et al., 2012a).

A campanha observacional dedicada ao sistema K2-131 foi conduzida durante o primeiro semestre de 2015, englobando um total de seis noites de coleta de dados: 31 de março, 02, 03, 21 e 22 de abril, e 02 de junho. Dada a curta duração do período orbital do exoplaneta ($P_{orb} \approx 8,8$ horas), a estratégia de observação consistiu no monitoramento contínuo do alvo por diversas horas consecutivas em cada noite. Esta abordagem visou cobrir o evento de trânsito primário e varrer a maior fração possível da curva de fase orbital.

A obtenção de alta precisão fotométrica a partir do solo depende diretamente da estabilidade atmosférica. Durante a campanha, as condições meteorológicas apresentaram variações significativas de *seeing*, umidade e cobertura de nuvens. Esses fatores degradaram a qualidade das observações, impactando a estabilidade das séries temporais, a amostragem dos ciclos polarimétricos e exigindo a posterior aplicação de métodos de descorrelação (*detrending*).

As medidas foram realizadas em ciclos contínuos de 16 posições angulares da lâmina de meia-onda (em passos discretos de $22,5^\circ$). Como a arquitetura do SPARC4 permite o controle independente de suas quatro câmeras, os tempos de exposição puderam ser ajustados individualmente para maximizar a eficiência de cada canal. Em média, adotou-se tempos de integração de 60 s para o canal *g*, 20 s para os canais *r* e *i*, e 30 s para o canal *z*, com calibrações pontuais realizadas a cada noite em função da massa de ar e das condições do céu. Isso também significa que o número de observações em cada posição da lâmina nos canais *r*, *i* e *z* foi significativamente maior do que para o canal *g*.

Além da observação do alvo principal e da obtenção de imagens de calibração (*bias* e *flats* para cada posição da lâmina), observamos duas estrelas padrão despolarizadas para a correção da polarização instrumental: HD94851 e CD-3810980 (Turnshek et al., 1990; Cikota et al., 2016).

4.2 O SISTEMA K2-131

O exoplaneta K2-131b foi descoberto a partir de dados fotométricos da Campanha 10 da missão espacial K2 (Dai et al., 2017). Trata-se de um planeta rochoso, caracterizado como uma Super-Terra, com raio de aproximadamente $1,8 R_{\oplus}$, que orbita uma estrela anã da sequência principal do tipo G. O aspecto mais notável de sua arquitetura orbital é o seu período ultracurto ($P_{orb} \approx 0,369$ dias, ou cerca de 8,8 horas), implicando uma proximidade extrema à sua estrela hospedeira.

Devido à proximidade extrema, o K2-131b sofre intensa dissipação de maré, o que virtualmente garante que sua rotação esteja sincronizada com a translação (acoplamento de maré). Como resultado, o planeta apresenta um hemisfério diurno permanentemente iluminado, submetido a níveis extremos de irradiação estelar. Sob este regime termodinâmico, é altamente improvável que o planeta retenha uma atmosfera espessa de compostos voláteis primordiais (como hidrogênio e hélio). Em vez disso, a superfície rochosa no lado diurno deve encontrar-

se em estado de fusão, formando um vasto oceano de magma global ou hemisférico (Winn; Sanchis-Ojeda; Rappaport, 2018; Rouan et al., 2011).

Do ponto de vista polarimétrico, este cenário extremo torna o K2-131b um laboratório astrofísico de interesse para a aplicação dos modelos de *Forward Modeling* explorados no Capítulo 3. Superfícies líquidas produzem uma forte polarização direcional (*glint*) ditada pelas Equações de Fresnel. No entanto, diferentemente da água líquida ($n \approx 1,33$), oceanos de magma compostos por silicatos e basaltos fundidos possuem índices de refração consideravelmente maiores na faixa do visível (tipicamente $n \approx 1,50$ a $1,60$) (Deer; Howie; Zussman, 2013). Essa característica óptica eleva a refletividade direcional da superfície e desloca o ângulo de Brewster para valores mais altos, potencialmente gerando um pico agudo e intenso de polarização na curva de fase do planeta.

Adicionalmente, a evaporação parcial dessa superfície de magma pode dar origem a uma atmosfera secundária tênue, composta por vapores minerais refratários. A eventual condensação desses compostos no terminador ou no lado noturno formaria nuvens espalhadoras altamente refletivas, capazes de introduzir assinaturas polarimétricas de espalhamento único e alterar a distribuição de fluxo ao longo da órbita.

Contudo, a modelagem de um USP também impõe um desafio inerente à polarimetria no visível e no infravermelho próximo: a intensa emissão térmica do próprio planeta. Devido às temperaturas superficiais que superam 2000 K (Singh et al., 2022), o oceano de magma emite uma parcela significativa de radiação térmica de corpo negro. Como a emissão térmica direta é majoritariamente não-polarizada (ou possui polarização líquida marginal quando integrada sobre o disco), o alto fluxo térmico emitido pelo lado diurno atua como um fator de diluição para a fração de luz polarizada refletida (especialmente o *glint*).

A competição radiativa entre a reflexão polarizada e a emissão térmica não-polarizada determina a amplitude final do grau de polarização linear observável. Como demonstrado por Singh et al. (2022) para este alvo, o sinal resultante da reflexão no fluxo integrado é da ordem de poucas dezenas de partes por milhão (ppm). Esta escala de grandeza, confrontada com os desafios de observação em solo, exige um tratamento de dados rigoroso, consolidando o K2-131b como um alvo de teste definitivo para os limites empíricos do polarímetro SPARC4.

Em suma, a escolha deste sistema como alvo principal da campanha polarimétrica foi motivada pela possibilidade de amostrar a curva de fase completa de um planeta com atmosfera tênue, permitindo que as características ópticas de sua superfície se sobressaíssem.

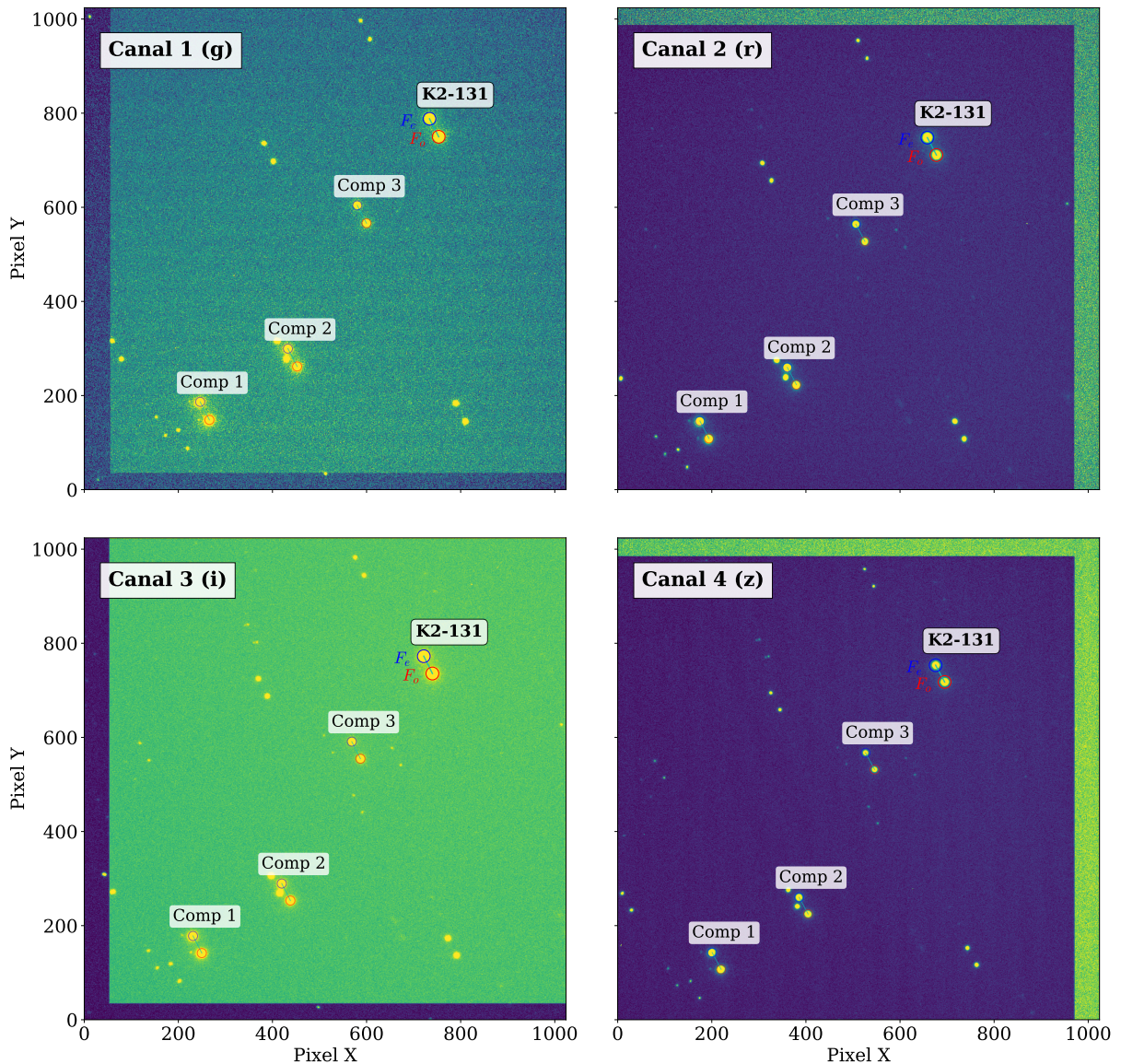
4.3 TRATAMENTO DE DADOS

Para a calibração e extração das séries temporais a partir das observações do alvo K2-131 e das estrelas padrão, utilizamos o *pipeline* de redução do SPARC4 (Martoli et al., 2026).

O processamento inicial das imagens brutas consistiu na remoção das assinaturas intrínsecas dos detectores CCD. Primeiramente, subtraímos as imagens de calibração de tempo

nulo (*bias*) de todos os quadros científicos para remover o nível base de leitura eletrônica. Em seguida, para corrigir as variações espaciais de sensibilidade dos pixels e possíveis vinhetagens, as imagens foram divididas por campos de iluminação uniforme (*flat-fields*). Devido à natureza do analisador de polarização, cuja iluminação depende da orientação da óptica, esta correção foi aplicada utilizando *flats* combinados especificamente para cada uma das 16 posições angulares da lâmina rotativa.

Figura 4.1 – Campo de visão calibrado para as observações do sistema K2-131 nos quatro canais do polarímetro SPARC4. O alvo principal (K2-131) encontra-se em destaque, juntamente com as três estrelas de referência (Comp 1, 2 e 3) selecionadas para a etapa de fotometria diferencial. A natureza polarimétrica de duplo feixe do instrumento é evidenciada pela duplicação de cada fonte luminosa no detector, correspondendo às projeções simultâneas e ortogonais dos feixes ordinário (F_o) e extraordinário (F_e).



Fonte: O autor.

A obtenção dos parâmetros de Stokes normalizados ($q = Q/I$ e $u = U/I$) é realizada através da composição entre os fluxos dos feixes ordinário (F_o) e extraordinário (F_e) para o alvo.

Primeiramente, define-se a diferença normalizada de fluxo $z(\phi)$ para cada posição angular da lâmina:

$$z(\phi) = \frac{F_e - kF_o}{F_e + kF_o}, \quad (4.1)$$

em que ϕ é o ângulo da lâmina e k é uma constante de normalização referente à diferença de sensibilidade e transmissão óptica entre os dois feixes (Campagnolo, 2019).

Para o caso de uma lâmina de meia-onda, a extração de q e u é feita ajustando-se o modelo teórico de modulação aos valores observados de $z(\phi)$ através do método de mínimos quadrados. A função teórica minimizada é dada por:

$$z(\phi) = q \cos(4\phi) + u \sin(4\phi). \quad (4.2)$$

Desta maneira, um ciclo completo de rotação da lâmina fornece um valor para q e u , que pode ser usado para compor o grau de polarização linear ($P_L = \sqrt{q^2 + u^2}$). Para corrigir o efeito da polarização instrumental, utilizamos os valores medidos de q e u para as estrelas padrão não polarizadas e subtraímos das medidas do alvo. Adicionalmente, o sinal residual de polarização causado pelo espalhamento da luz por poeira interestelar na Via Láctea é corrigido subtraindo a média da observação de cada medida. Ambas as etapas de calibração foram conduzidas separadamente para cada noite e canal (Rodrigues, 2015).

Paralelamente à extração do sinal polarimétrico, as mesmas observações foram utilizadas para a reconstrução da curva de luz fotométrica do sistema K2-131. A extração da curva de luz é feita por meio da técnica de fotometria diferencial, aplicada quadro a quadro sobre todas as observações.

Em um polarímetro de duplo feixe como o SPARC4, o fluxo total de uma dada estrela em uma exposição individual é obtido pela soma das contagens registradas em suas componentes ordinária e extraordinária ($F = F_o + F_e$). A fotometria diferencial é, então, obtida através da razão entre o fluxo total do alvo e a soma dos fluxos das estrelas de comparação estáveis presentes no campo de visão (identificadas como Comp 1, 2 e 3 na Figura 4.1):

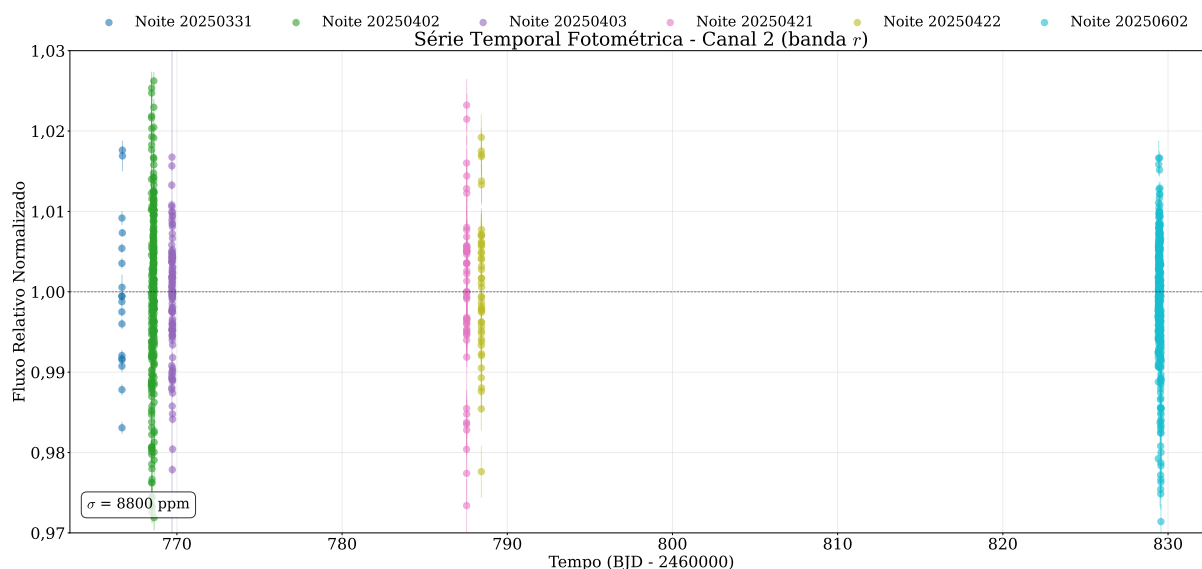
$$\overline{F}_I(t) = \frac{F_{\text{alvo}}(t)}{\sum_{i=1}^3 F_{\text{comp},i}(t)}. \quad (4.3)$$

Como a rotina de observação polarimétrica do instrumento realiza passos discretos no ângulo da lâmina retardadora, a amostragem fotométrica independe da modulação completa. Cabe ressaltar que uma pequena modulação fotométrica espúria em função da posição da lâmina foi reportada por Martioli et al. (2026), impactando principalmente o canal g . No presente trabalho, esse efeito instrumental foi mitigado pela utilização de *flat-fields* individuais para cada uma das 16 posições angulares, conforme detalhado na etapa de redução. Consequentemente, enquanto a inversão dos parâmetros de Stokes (q e u) consome um ciclo completo para fornecer uma única medida integrada, a fotometria diferencial retorna 16 valores independentes de fluxo

relativo por ciclo, garantindo uma curva de luz com alta resolução temporal.

As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram as séries temporais fotométricas e polarimétricas completas para o canal 2, respectivamente. Ambas as figuras apresentam as estimativas do desvio padrão global para cada observável, considerando toda a campanha. Tanto na fotometria quanto na polarimetria a variabilidade atmosférica e instrumental ultrapassa a amplitude do evento de trânsito, impedindo a detecção visual direta do sinal planetário nestes dados brutos. A dispersão nas medidas polarimétricas é consistente com a precisão obtida na campanha de validação científica do instrumento Martioli et al. (2026).

Figura 4.2 – Série temporal fotométrica do sistema K2-131 obtida no canal 2 (banda r) do instrumento SPARC4. O gráfico apresenta o fluxo relativo normalizado em função do tempo contínuo (BJD), destacando em cores distintas as diferentes noites que compõem a campanha observacional. A linha tracejada indica o nível de referência basal unitário, e o valor do desvio padrão global (σ) reflete a dispersão dos dados previamente à etapa de descorrelação instrumental (*detrending*).

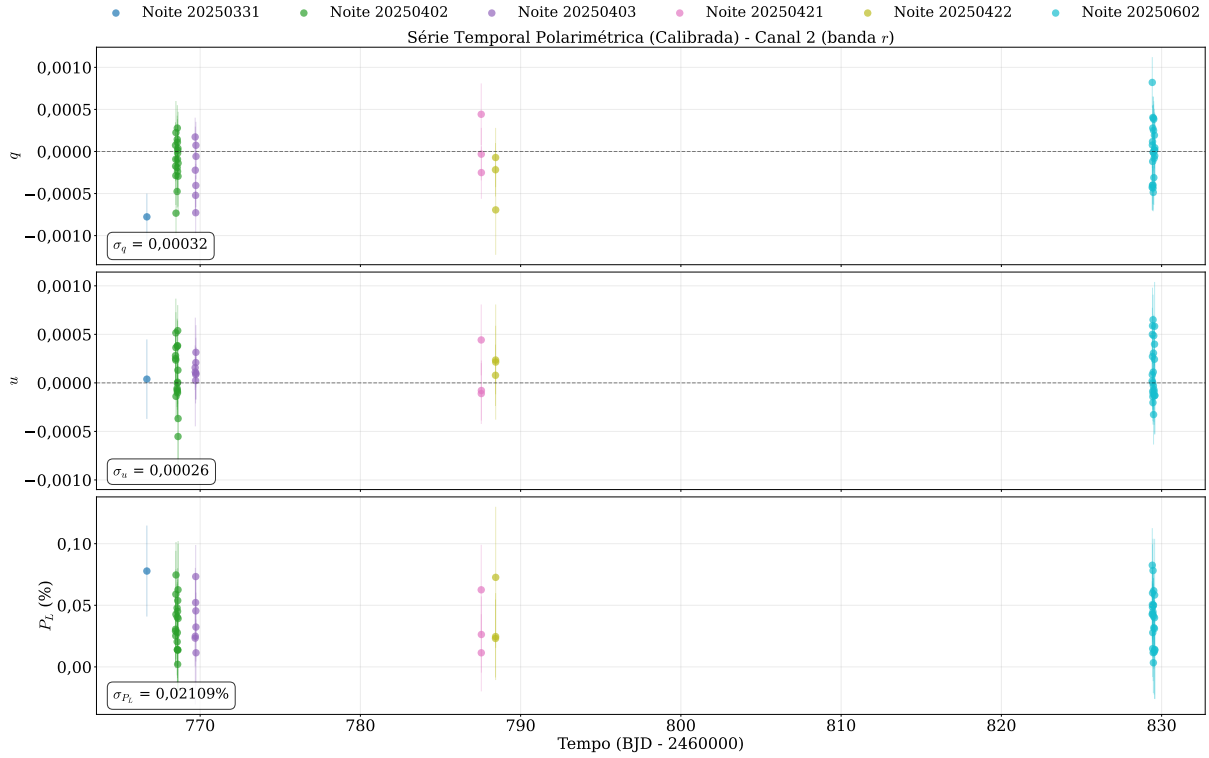


Fonte: O autor.

A etapa de descorrelação da curva de luz é motivada pela dependência sistemática observada entre as medidas de fluxo fotométrico bruto e a variação da massa de ar (*airmass*). A Figura 4.4 ilustra essa correlação para o Canal 2 na noite de 02/06/2025. Nota-se que o fluxo é fortemente afetado pela extinção atmosférica (com coeficiente de correlação $r \approx -0,52$), justificando a necessidade de uma intervenção analítica para recuperar o sinal astrofísico subjacente.

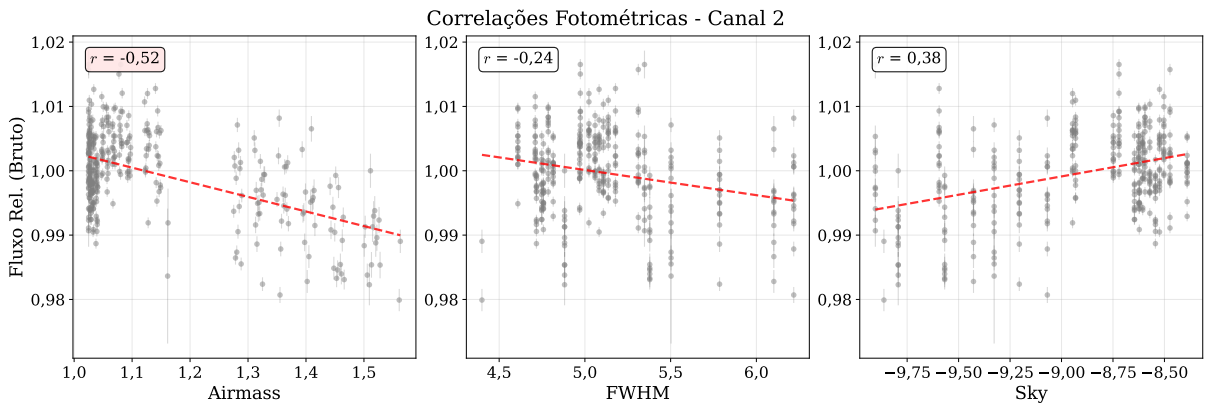
Para a mitigação deste ruído sistemático, aplicou-se uma técnica de descorrelação por meio de Regressão Linear. O modelo assume que as flutuações instrumentais e atmosféricas no observável fotométrico podem ser descritas como uma função linear de regressores externos. Utilizou-se a massa de ar (*airmass*) como única variável preditiva, visando corrigir a perda de luz à medida que o alvo altera a sua elevação no céu. Após o ajuste do modelo (prioritariamente às regiões fora do trânsito esperado), a tendência identificada foi removida da série temporal original, preservando apenas os resíduos estocásticos e os possíveis sinais planetários. Esta etapa

Figura 4.3 – Série temporal polarimétrica do sistema K2-131 correspondente ao canal 2 (banda r). Os painéis ilustram, de cima para baixo, a evolução temporal dos parâmetros de Stokes normalizados (q e u) e o grau de polarização linear total (P_L). Os dados apresentados já contemplam as correções vetoriais referentes à polarização instrumental (IP) e à polarização interestelar (ISP). As anotações inseridas em cada painel indicam os respectivos desvios padrão (σ) medidos ao longo de toda a campanha.



Fonte: O autor.

Figura 4.4 – Correlação entre o fluxo fotométrico relativo bruto e a massa de ar para o sistema K2-131 (Canal 2, noite de 02/06/2025). A forte dependência com a extinção atmosférica ao longo das observações é evidenciada pela linha tracejada em vermelho, que representa o ajuste linear aos dados. O valor de r indica o coeficiente de correlação de Pearson.



Fonte: O autor.

reduziu a dispersão na curva de luz de 8800 ppm para 6761 ppm. Para os observáveis polarimétricos, não se observou correlação suficiente com os parâmetros atmosféricos e instrumentais

que justificasse a aplicação de *detrending*.

A fim de investigar a presença de modulações periódicas nos resíduos fotométricos e nos parâmetros de Stokes originais (q , u e P_L), procedeu-se ao cálculo do periodograma de Lomb-Scargle para a série temporal completa (Figura 4.5). A análise de frequência cega não revelou picos estatisticamente significativos (acima do limiar de falso alarme de 1%) na vizinhança do período orbital do K2-131b ($P = 0,37$ dias) em nenhum dos observáveis.

Embora o parâmetro u tenha apresentado injeção de potência espúria em frequências baixas ($P \approx 1,5$ dias), o cálculo da Função Janela (*Spectral Window Function* (VanderPlas, 2018)) da campanha confirmou tratar-se de forte *aliasing* observacional. As interrupções diurnas da amostragem induziram a modulação de tendências instrumentais lentas para harmônicos de longo período.

A ausência de detecções diretas no domínio da frequência é metodologicamente esperada, uma vez que a amplitude teórica do sinal polarimétrico e fotométrico do planeta encontra-se submersa no ruído fotônico e na cintilação residual das medições individuais.

Apesar da não-detecção de um sinal astrofísico inequívoco, as curvas de fase fotométricas e polarimétricas, dobradas sobre o período orbital do planeta K2-131b ($P_{orb} = 0,37$ dias), foram utilizadas como base fundamental para a construção dos modelos numéricos preditivos apresentados na seção seguinte. A Figura 4.6 apresenta a curva de luz resultante, enquanto a Figura 4.7 detalha o comportamento dos parâmetros de Stokes em fase. No que tange ao grau de polarização linear, aplicou-se a correção assintótica de Wardle & Kronberg para mitigar o viés de Rice (Simmons; Stewart, 1985).

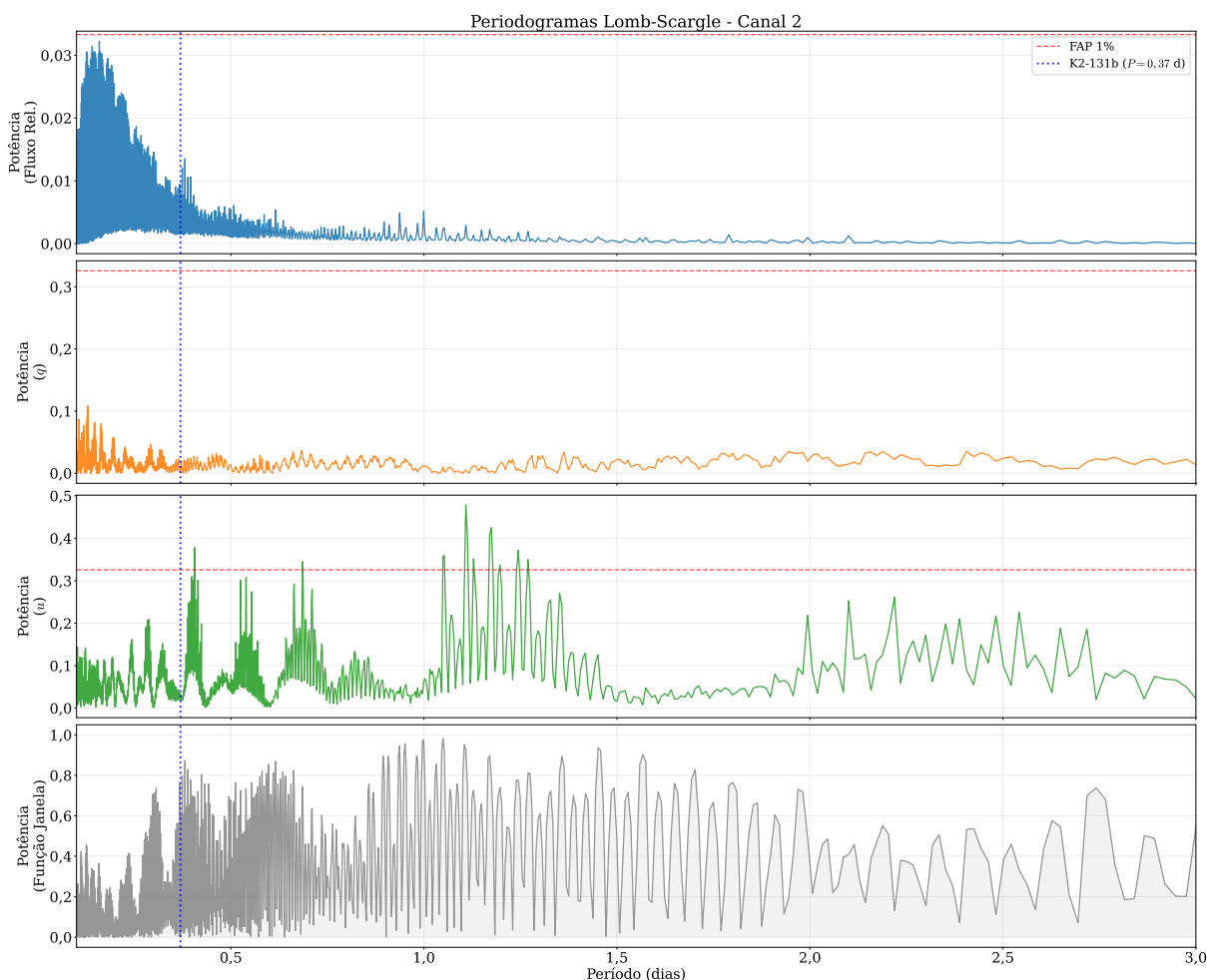
4.4 MODELAGEM DIRETA DO SISTEMA K2-131

A ausência de um sinal polarimétrico detectável nas observações do SPARC4 motiva uma investigação quantitativa sobre os limites físicos do sistema K2-131. Para avaliar a sensibilidade instrumental necessária para a detecção de luz refletida pelo exoplaneta, estruturamos três cenários físicos distintos para a superfície e atmosfera. Estes cenários foram elaborados para preservar a consistência com as predições de albedo geométrico de Singh et al. (2022), testando condições de contorno esperadas para USPs (Rouan et al., 2011; Pluriel; Marcq; Turbet, 2019; Chao et al., 2021) e comparando-as ao piso de ruído de nossas observações.

Os cenários avaliados são delineados da seguinte forma:

- a) uma superfície oceânica homogênea de magma ($n = 1,55$) com alto albedo superficial intrínseco guiado por um espalhamento difuso (lambertiano) e atmosfera tênue ($p = 10^{-5}$ bar). Este modelo age como uma aproximação para a presença de superfícies rugosas ou suspensão de partículas refletoras cristalizadas sobre o magma, conforme discutido por Rouan et al. (2011) para o exoplaneta Kepler-10b, outro USP de alto albedo geométrico;
- b) uma superfície oceânica homogênea de magma com baixo albedo superficial recoberta

Figura 4.5 – Periodogramas de Lomb-Scargle para o Canal 2 (banda r). De cima para baixo apresentam-se os espectros de potência da curva de luz, dos parâmetros de Stokes q e u , e a função janela espectral. A linha azul pontilhada indica o período orbital do planeta K2-131b e a linha vermelha tracejada o limiar de 1% de probabilidade de falso alarme (FAP).



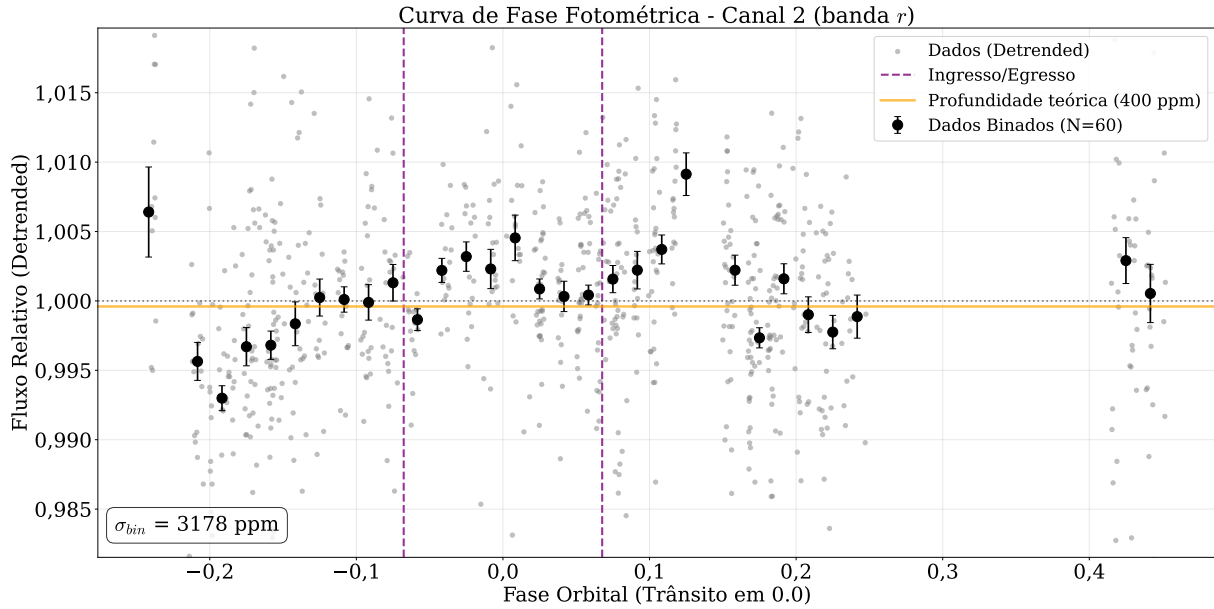
Fonte: O autor.

por uma atmosfera gasosa densa (testada no limite extremo de $p \approx 50$ bar). Este cenário atua como um teste de estresse para investigar se o espalhamento de Rayleigh puro seria capaz de reproduzir o alto albedo geométrico observado, assumindo a sobrevivência de um invólucro volátil espesso;

- c) uma superfície homogênea de magma de baixo albedo superficial recoberta por uma atmosfera tênue, mas dominada por espessas nuvens de condensados minerais (névoa de silicatos, $\tau \geq 10$). Neste cenário, o espalhamento múltiplo pelas partículas da nuvem (regime de Mie) atua como o principal mecanismo de reflexão e atenuação polarimétrica da luz.

A modelagem destes cenários baseou-se nos parâmetros orbitais do sistema K2-131b derivados por Dai et al. (2017) e Singh et al. (2022). Visando uma comparação direta com as observações do SPARC4, as curvas fotométricas e polarimétricas teóricas (Figuras 4.8 e 4.9) são exibidas no mesmo referencial de fase dos dados empíricos (Figuras 4.6 e 4.7). Ressalta-se que

Figura 4.6 – Curva de fase fotométrica (Canal 2) em fase com o período orbital de 0,37 dias. As linhas tracejadas em roxo delimitam os tempos previstos de ingresso e egresso do trânsito. Os pontos em cinza representam as medições individuais, enquanto os círculos pretos indicam a binagem mediana. A linha horizontal laranja representa a profundidade do trânsito (~ 400 ppm) reportada por Dai et al. (2017).



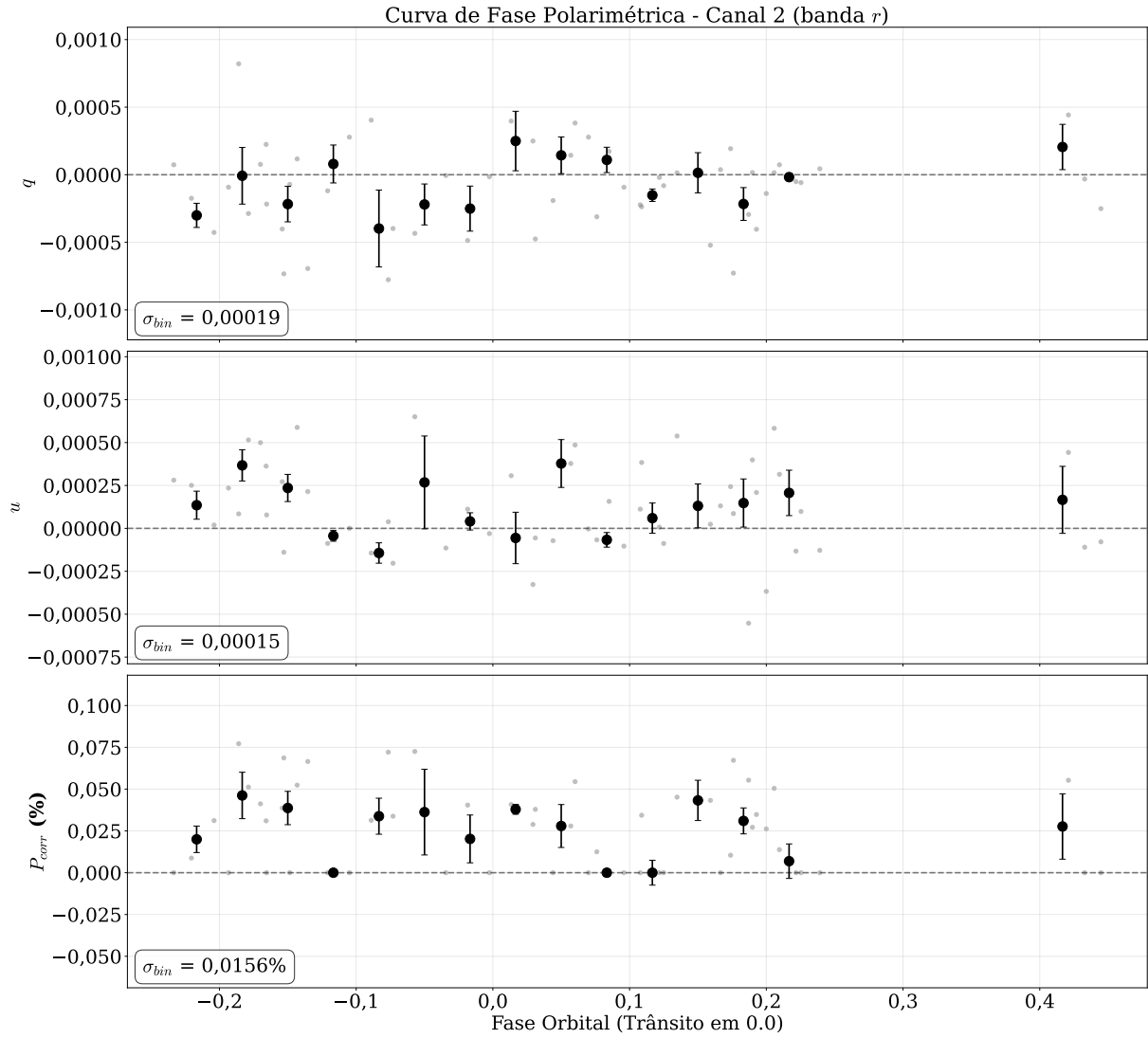
Fonte: O autor.

as predições descrevem o sinal observável do sistema como um todo, com as grandezas normalizadas em relação ao fluxo conjunto da estrela e do planeta. A transição entre a fase planetária cheia e a ocultação pela estrela (o eclipse secundário), visível no painel direito da Figura 4.8, corresponde ao evento exato utilizado na determinação do albedo geométrico em Singh et al. (2022). Nestas simulações, desconsideramos a assinatura de emissão térmica do planeta; embora o lado diurno atinja uma temperatura de equilíbrio de 3000 K, a contribuição deste fluxo é ordens de grandeza inferior ao sinal refletido, inclusive no canal de maior comprimento de onda avaliado (canal 4, $\lambda = 819$ nm).

Uma das principais diferenças entre o oceano de água de um planeta terrestre temperado e o oceano de magma de um USP é o deslocamento do pico de *glint* para fases maiores, tanto na polarimetria quanto na fotometria. O cenário de oceano de magma recoberto por uma atmosfera de baixa pressão é o mais consistente com a teoria de formação de USPs (Winn; Sanchis-Ojeda; Rappaport, 2018) e apresenta uma amplitude do grau de polarização intermediária entre os cenários analisados. Neste regime atmosférico, a luz refletida é dominada pelo espalhamento de Rayleigh único e pelo *glint* do oceano de magma. A precisão polarimétrica necessária para a detecção da luz refletida neste cenário é da ordem de 1 ppm.

Embora a presença de uma atmosfera densa em USPs pareça contraintuitiva face às temperaturas extremas do hemisfério diurno, descobertas recentes, como TOI-561b (Teske et al., 2025), estabelecem um precedente empírico para a retenção de invólucros voláteis espessos nestes sistemas. Este cenário gasoso fornece uma via alternativa para justificar albedos geomé-

Figura 4.7 – Curvas de fase polarimétricas para os parâmetros de Stokes q e u , e o grau de polarização linear corrigido (P_{corr}). A aplicação da correção do viés de Rice assegura que os limites superiores de polarização sejam consistentes com o nível de ruído instrumental.

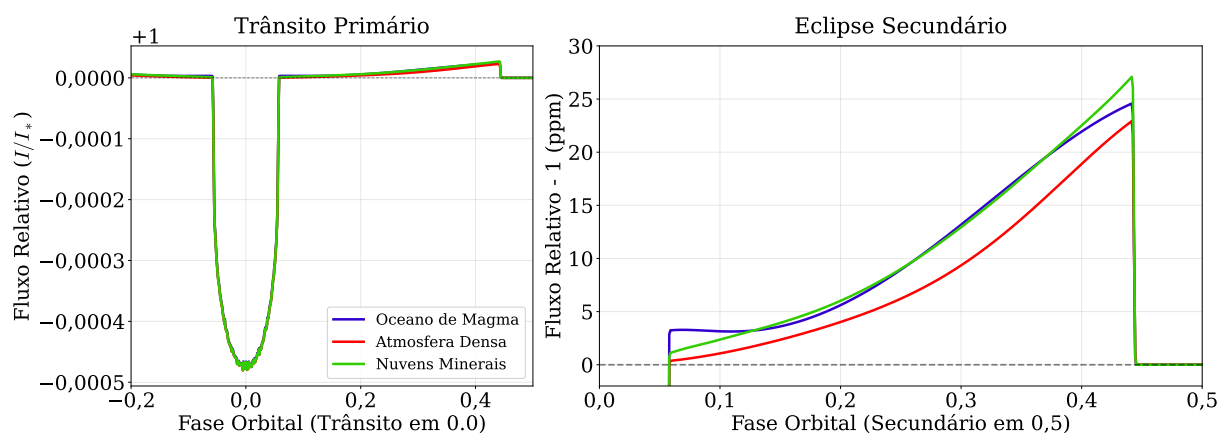


Fonte: O autor.

tricos intermediários sem a necessidade de uma superfície hiper-refletora como a do primeiro cenário; todavia, mesmo considerando pressões atmosféricas extremas ($p > 100$ bar), o albedo geométrico modelado não ultrapassa 0,5. Apesar de apresentar a maior amplitude de polarização dentre os modelos, o comportamento da luz refletida neste cenário é puramente dominado pelo espalhamento de Rayleigh, resultando na supressão completa da assinatura de *glint* da superfície subjacente.

A existência de condensados minerais é suportada por configurações planetárias semelhantes às do satélite joviano Io. Um análogo exoplanetário empírico é 55 Cancri e (Tamburo et al., 2018), no qual o mecanismo proposto para explicar seu alto albedo geométrico é a presença de nuvens vulcânicas. Este cenário serve como uma terceira alternativa física na qual a assinatura polarimétrica, mesmo restrita à escala sub-ppm, apresenta picos angulares pontu-

Figura 4.8 – Curvas de fase fotométricas simuladas para o sistema K2-131b sob três cenários físicos distintos. À esquerda, o fluxo relativo evidenciando o evento de trânsito primário em fase 0,0 e o eclipse secundário em fase 0,4 – 0,5. À direita, uma ampliação focada no eclipse secundário (fase $\approx 0,5$), ilustrando a transição do fluxo refletido na fase planetária cheia para a ocultação total pela estrela. As simulações assumem normalização conjunta (estrela+planeta) e desconsideram a emissão térmica no hemisfério diurno.



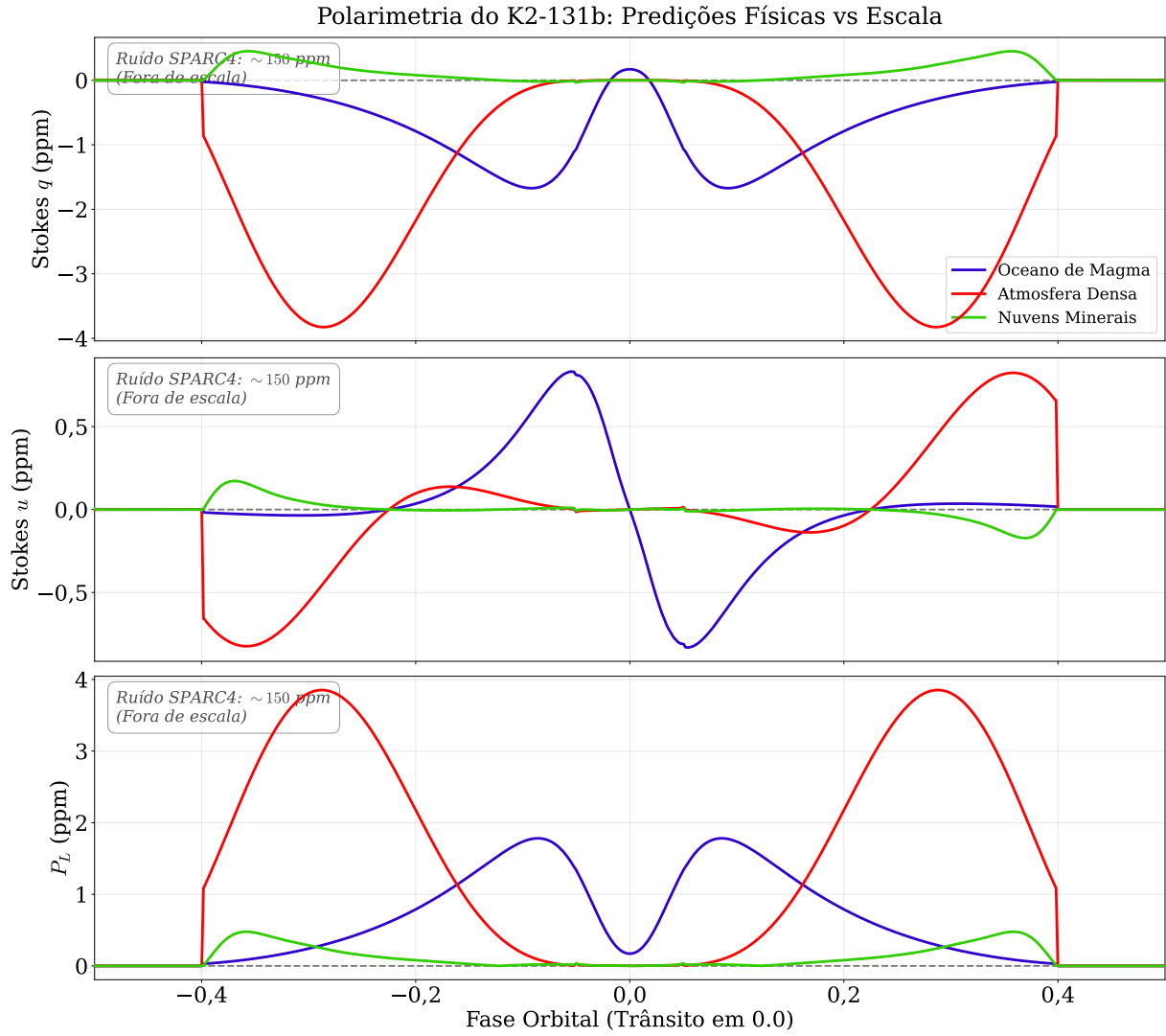
Fonte: O autor.

ais diretamente relacionados ao tamanho e ao índice de refração dos aerossóis que compõem a névoa.

Dentre os modelos avaliados, o primeiro e o segundo cenários apresentam amplitudes teóricas consistentes com o alcance da precisão instrumental atual, recentemente demonstrada na detecção de luz refletida do exoplaneta HD 189733b (Wiktorowicz et al., 2025). A assinatura em u é proveniente da quebra de simetria pela inclinação orbital do K2-131b ($i = 82,7^\circ$).

Adicionalmente, nota-se que a assinatura de polarização associada ao trânsito primário é reproduzida em nossas simulações; no entanto, sua amplitude é ordens de grandeza menor do que o sinal de reflexão. Embora intrínseco aos resultados teóricos de todos os cenários, este sinal encontra-se muito além de qualquer viabilidade observacional com a tecnologia atual, reforçando a premissa de que a caracterização polarimétrica destes sistemas deve priorizar a captura da luz refletida ao longo de curvas de fase completas.

Figura 4.9 – Curvas de fase polarimétricas teóricas resultantes do *Forward Modeling* do exoplaneta K2-131b. Os painéis detalham, de cima para baixo, os parâmetros de Stokes normalizados (q e u) e o grau de polarização linear (P_L) em função da fase orbital. As diferentes curvas representam os três cenários avaliados: oceano de magma em uma atmosfera tênue, atmosfera espessa de Rayleigh ($p \approx 50$ bar) e nuvens de condensados minerais ($\tau \geq 10$).



Fonte: O autor.

5 DISCUSSÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A caracterização de exoplanetas encontra-se em um momento de transição fundamental. À medida que superamos a era puramente focada na detecção e estatística populacional, a astrofísica exige ferramentas cada vez mais sofisticadas para a investigação da natureza física, química e atmosférica desses mundos. Neste contexto, a polarimetria emerge como uma alternativa capaz de romper degenerescências inerentes à fotometria e espectroscopia escalares.

O presente trabalho foi concebido com o objetivo de estreitar a lacuna metodológica existente entre a teoria da transferência radiativa vetorial e a realidade observacional da polarimetria de exoplanetas. Através de uma abordagem dividida entre o desenvolvimento de uma arquitetura computacional de simulação tridimensional e a execução de uma campanha observacional no solo, pudemos mapear tanto o potencial teórico da técnica quanto suas restrições tecnológicas atuais.

Neste capítulo final, sintetizamos os principais resultados obtidos em ambas as frentes de pesquisa. Discutimos o impacto das inovações numéricas introduzidas na modelagem de exoplanetas, avaliamos os limites empíricos e físicos estabelecidos pela observação do sistema K2-131, e delineamos as perspectivas futuras para a polarimetria exoplanetária na era dos grandes telescópios.

5.1 O LEGADO COMPUTACIONAL

Historicamente, a complexidade analítica da transferência radiativa limitou grande parte da modelagem polarimétrica exoplanetária a aproximações de discos homogêneos e esféricos. Uma das principais contribuições desta dissertação é a superação destas limitações através do acoplamento e expansão dos códigos `PyMieDAP` e `Pryngles`.

O *pipeline* numérico desenvolvido provou ser uma ferramenta preditiva versátil e fisicamente consistente. Ao transitar do regime local plano-paralelo para uma malha tridimensional de integração global, demonstramos que a polarimetria responde de maneira dramática à quebra de simetria do sistema. Nossos experimentos numéricos (Capítulo 3) revelaram que:

- a) heterogeneidades e rotação: a implementação espacial de continentes, oceanos e coberturas parciais de nuvens gera assinaturas inequívocas no parâmetro de Stokes U . Demonstramos que o sinal polarimétrico não apenas indica a presença dessas estruturas, mas permite recuperar o período de rotação do planeta de forma mais eficiente do que a fotometria na análise em frequência;
- b) achatamento e obliquidade: a modelagem de planetas oblatos demonstrou que a excentricidade do disco planetário induz um sinal de polarização não-nulo e sensível à obliquidade orbital, tanto na assinatura de luz refletida quanto durante o trânsito primário. Mais ainda, corrigimos aproximações da literatura ao demonstrar que, sob a

imposição física de conservação de volume, o achatamento pode atenuar (e não aumentar) o grau de polarização linear observável devido à diluição fotométrica pelo alargamento equatorial;

- c) transitos e oclusão estelar: a simulação da ocultação geométrica (*spot-crossing* e polarização de limbo) atestou a precisão da malha em resolver variações na escala de sub-ppm, replicando soluções analíticas com alta fidelidade geométrica.

Esses avanços consolidam a ferramenta desenvolvida como um arcabouço preparatório essencial para a próxima geração de observatórios, permitindo testar hipóteses estruturais que serão alvo de futuras missões espaciais e terrestres.

5.2 O SISTEMA K2-131 E OS LIMITES DA INSTRUMENTAÇÃO ATUAL

A frente observacional deste trabalho materializou o desafio imposto pelos modelos teóricos. A campanha dedicada ao exoplaneta de período ultracurto K2-131b, utilizando o polarímetro SPARC4 no telescópio de 1,60 m do OPD, representou um teste de estresse logístico, instrumental e analítico.

Apesar da aplicação de técnicas de descorrelação para mitigar a variância induzida pela atmosfera terrestre em nossas observações, a amplitude teórica do sinal planetário permaneceu submersa no ruído fotônico e na cintilação. Contudo, a não-detecção nos permitiu estabelecer quantitativamente o teto de sensibilidade atual para polarimetria exoplanetária no cenário astronômico brasileiro.

A análise teórica subsequente, fundamentada no albedo geométrico prévio do alvo (Singh et al., 2022), permitiu impor restrições à natureza física de K2-131b. O nosso modelo demonstrou que um invólucro gasoso denso e dominado por espalhamento de Rayleigh é radiativamente incapaz de justificar os altos albedos observados nos comprimentos de onda mais longos (ótico-vermelho), mesmo quando forçado a pressões atmosféricas insustentáveis ($p > 50$ bar).

Esta incompatibilidade termodinâmica e óptica restringe os mecanismos de espalhamento de K2-131b a duas hipóteses de contorno extremo: a presença de uma superfície hiper-refletora (um oceano de magma global) ou o forte espalhamento múltiplo por aerossóis pesados (nuvens minerais refratárias suspensas em uma atmosfera tênue). Em ambas as configurações, as nossas previsões fixam a amplitude polarimétrica refletida deste alvo na restrita escala de 0,5 a 2 ppm.

5.3 PERSPECTIVAS FUTURAS

O panorama estabelecido por esta dissertação aponta caminhos claros tanto para a evolução da modelagem computacional quanto para futuras campanhas observacionais:

- a) evolução do *framework* computacional: as divergências notadas na modelagem multi-banda de Júpiter indicam que o próximo passo evolutivo natural para o *pipeline* é a superação da Teoria de Mie clássica. A incorporação de matrizes de espalhamento vetorial derivadas de partículas não-esféricas (como agregados fractais de gelo de amônia) e a inserção de absorção cromática (cromóforos) permitirão reproduzir com exatidão observações de alta resolução de corpos do Sistema Solar. Adicionalmente, a combinação da metodologia de geração procedural da topologia planetária, a variabilidade induzida pela rotação e técnicas de inferência Bayesiana tem o potencial de impulsionar consideravelmente áreas de vanguarda, como a exocartografia (Deeg; Belmonte et al., 2018);
- b) a era dos grandes telescópios (ELTs): a lacuna remanescente entre o sinal exoplanetário intrínseco (na ordem de 1 a 10 ppm) e a precisão alcançável por telescópios da classe de 1 a 2 metros reafirma que a polarimetria exoplanetária no regime visível requer um salto formidável em área coletora. A entrada em operação da próxima geração de Telescópios Extremamente Grandes (como o ELT de 39 m do ESO) e de telescópios espaciais providos de óptica de alto contraste (como o *Habitable Worlds Observatory*) será o divisor de águas definitivo para a detecção da luz refletida. Paralelamente, o contínuo refinamento das rotinas de calibração polarimétrica do SPARC4 (Martioli et al., 2026) poderá rebaixar o piso de ruído instrumental local a níveis que viabilizem, a curto prazo, a detecção de sinais de gigantes gasosos altamente refletivos a partir do solo nacional. Acima de tudo, como demonstrado nos Capítulos 3 e 4, a estratégia observacional da polarimetria de exoplanetas, em especial para instrumentos como o SPARC4, deve ser redirecionada à busca sistemática por assinaturas de luz refletida ao longo da curva de fase, em detrimento da busca por sinais restritos ao trânsito primário.

Em síntese, a caracterização de exoplanetas heterogêneos demanda ferramentas analíticas que superem as limitações das aproximações unidimensionais e escalares. A polarimetria apresenta o rigor físico adequado para esta tarefa, embora sua aplicação empírica permaneça restrita pela necessidade de detecções na escala de partes por milhão. Ao estruturar um *pipeline* numérico tridimensional e confrontá-lo com limites observacionais reais extraídos do SPARC4, esta dissertação quantifica as atuais barreiras instrumentais e consolida uma metodologia de simulação validada. Conclui-se que, enquanto telescópios de médio porte cumprem a função essencial de caracterizar a sistemática instrumental e estabelecer limites de ruído, a exploração definitiva da técnica dependerá do ganho fotônico da próxima geração de observatórios. Para este cenário observacional futuro, a infraestrutura de modelagem e as rotinas de integração aqui desenvolvidas encontram-se estabelecidas e diretamente aplicáveis.

REFERÊNCIAS

- ARAGO, F. J. D. Quelques nouveaux details sur la passage de la comète découverte dans le mois de juillet 1819, devant le disque du soleil. **Ann Chim Phys, Ser**, v. 2, n. 13, p. 104–110, 1820.
- BARNES, J. W.; FORTNEY, J. J. Measuring the oblateness and rotation of transiting extrasolar giant planets. **The Astrophysical Journal**, v. 588, n. 1, p. 545–556, 2003.
- BERDYUGINA, S. V. et al. First detection of polarized scattered light from an exoplanetary atmosphere. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 673, n. 1, p. L83–L86, 2008.
- Blender Online Community. **Blender - a 3D modelling and rendering package (Versão 5.0)**. Amsterdam, The Netherlands, 2025. Disponível em: <<http://www.blender.org>>. Acesso em: 20 fev. 2026.
- CAMPAGNOLO, J. C. N. astropop: the astronomical polarimetry and photometry pipeline. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, The Astronomical Society of the Pacific, v. 131, n. 996, p. 024501, 2019.
- CAMPBELL, B.; WALKER, G. A.; YANG, S. A search for substellar companions to solar-type stars. **Astrophysical Journal**, v. 331, p. 902–921, 1988.
- CARCIOFI, A. C.; MAGALHÃES, A. M. The polarization signature of extrasolar planet transiting cool dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 635, n. 1, p. 570–577, 2005.
- CHAKRABARTY, A.; SENGUPTA, S.; MARLEY, M. S. Polarization of rotationally oblate self-luminous exoplanets with anisotropic atmospheres. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 927, n. 1, p. 51, 2022.
- CHANDRASEKHAR, S. **Radiative transfer**. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1960.
- CHAO, K.-H. et al. Lava worlds: From early earth to exoplanets. **Geochemistry**, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 125735, 2021.
- CIKOTA, A. et al. Linear spectropolarimetry of polarimetric standard stars with vlt/fors2. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 464, n. 4, p. 4146–4159, 2016.
- COTTON, D. V. et al. The intrinsic and interstellar broad-band linear polarization of nearby fgk dwarfs. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 467, n. 1, p. 873–897, 2017.
- COX, C.; MUNK, W. Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. **Journal of the optical society of America**, Optical Society of America, v. 44, n. 11, p. 838–850, 1954.
- DAI, F. et al. The discovery and mass measurement of a new ultra-short-period planet: K2-131b. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 154, n. 6, p. 226, 2017.

- DEBYE, P. Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 335, n. 11, p. 57–136, 1909.
- DEEG, H. J.; BELMONTE, J. A. et al. **Handbook of exoplanets**. [S.l.]: Springer, 2018.
- DEER, W. A.; HOWIE, R. A.; ZUSSMAN, J. **An introduction to the rock-forming minerals**. [S.l.]: Mineralogical Society of Great Britain and Ireland, 2013.
- DOI, M. et al. Photometric response functions of the sloan digital sky survey imager. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 139, n. 4, p. 1628–1648, 2010.
- EKER, Z. et al. Deriving effective sunspot temperatures from soho/virgo irradiance measurements-a starspot modelling approach. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 404, n. 3, p. 1107–1115, 2003.
- FLETCHER, L. N. et al. How well do we understand the belt/zone circulation of giant planet atmospheres? **Space Science Reviews**, Springer, v. 216, n. 2, p. 30, 2020.
- GEHRELS, T. et al. **Planets, stars and nebulae: studied with photopolarimetry**. [S.l.]: University of Arizona Press, 1974. v. 23.
- GONZÁLEZ, Á. **Measurement of areas on a sphere using Fibonacci and latitude-longitude lattices**. **Math Geosci** 42: 49–64. 2010.
- GORDON, K. E. G. et al. Polarized signatures of variable worlds: Modeling heterogeneous habitable earth-and early mars-like (exo) planets. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 993, n. 1, p. 36, 2025.
- GROOT, A. et al. Colors of an earth-like exoplanet-temporal flux and polarization signals of the earth. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 640, p. A121, 2020.
- HAAN, J. F. de; BOSMA, P.; HOVENIER, J. The adding method for multiple scattering calculations of polarized light. **Astronomy and Astrophysics**, v. 183, p. 371–391, 1987.
- HANSEN, J. E. Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. part i. the doubling method. **J. Atmos. Sci**, v. 28, n. 1, p. 120–125, 1971.
- HANSEN, J. E. Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres part ii. sunlight reflected by terrestrial water clouds. **Journal of Atmospheric Sciences**, American Meteorological Society, Boston MA, USA, v. 28, n. 8, p. 1400 – 1426, 1971.
- HANSEN, J. E.; HOVENIER, J. Interpretation of the polarization of venus. **J. atmos. Sci**, v. 31, n. 4, p. 1137–1160, 1974.
- HANSEN, J. E.; TRAVIS, L. D. Light scattering in planetary atmospheres. **Space science reviews**, Springer, v. 16, n. 4, p. 527–610, 1974.
- HELLIER, C. et al. Wasp-43b: the closest-orbiting hot jupiter. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 535, p. L7, 2011.
- HOVENIER, J. W.; MEE, C. V. Van der; DOMKE, H. **Transfer of polarized light in planetary atmospheres: basic concepts and practical methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2014. v. 318.

- HULST, H. C. **A new look at multiple scattering**. [S.l.]: NASA Institute for Space Studies, Goddard Space Flight Center, 1963.
- HULST, H. C. van de. **Light scattering by small particles**. [S.l.]: Courier Corporation, 1981.
- INGERSOLL, A. P. et al. Dynamics of jupiter's atmosphere. **Jupiter: The planet, satellites and magnetosphere**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, v. 105, 2004.
- International Civil Aviation Organization. **Manual of the ICAO Standard Atmosphere (extended to 80 kilometres (262 500 feet))**. 3rd. ed. Montreal, Canada, 1993.
- KANE, S. R.; GELINO, D. M. Photometric phase variations of long-period eccentric planets. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 724, n. 1, p. 818–826, 2010.
- KARALIDI, T. et al. Observing the earth as an exoplanet with loupe, the lunar observatory for unresolved polarimetry of earth. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 74, n. 1, p. 202–207, 2012.
- KOEPKE, P. Remote sensing signatures of whitecaps. In: **Oceanic Whitecaps: And Their Role in Air-Sea Exchange Processes**. [S.l.]: Springer, 1986. p. 251–260.
- KOLOKOLOVA, L.; HOUGH, J. **Polarimetry of stars and planetary systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- KOSTOGRYZ, N. et al. Center-to-limb variation of intensity and polarization in continuum spectra of fgk stars for spherical atmospheres. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 586, p. A87, 2016.
- KOSTOGRYZ, N.; YAKOBCHUK, T.; BERDYUGINA, S. Polarization in exoplanetary systems caused by transits, grazing transits, and starspots. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 806, n. 1, p. 97, 2015.
- KREIDBERG, L. batman: Basic transit model calculation in python. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, University of Chicago Press, v. 127, n. 957, p. 1161, nov 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1086/683602>>. Acesso em: 21 mar. 2026.
- LORENZ, L. V. **Oeuvres scientifiques de L. Lorenz**. [S.l.]: Lehmann & Stage, 1898. v. 1.
- LYOT, B. **Recherches sur la polarisation de la lumière des planètes et de quelques substances terrestres**. Tese (Doutorado) — H. Tessier, 1929.
- MAHAPATRA, G. et al. From exo-earths to exo-venuses: Flux and polarization signatures of reflected light. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 671, p. A165, 2023.
- MALUS, É. L. Ueber eine Eigenthümlichkeit des von durchsichtigen Körpern zurückgeworfenen Lichtes. **Annalen der Physik**, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 31, n. 3, p. 286–296, 1809.
- MARTIOLI, E. et al. Scientific validation of the sparc4 pipeline: Multi-band imaging, polarimetry, and photometric time series for improved characterization of transiting exoplanets. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, The Astronomical Society of the Pacific, v. 138, n. 5, p. 054502, 2026.

MARTONCHIK, J. V.; ORTON, G. S.; APPLEBY, J. F. Optical properties of nh₃ ice from the far infrared to the near ultraviolet. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 23, n. 4, p. 541–547, 1984.

MAYOR, M.; QUELOZ, D. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. **Nature**, v. 378, n. 6555, p. 355–359, nov. 1995.

MCLEAN, W. et al. A polarimetric investigation of jupiter: Disk-resolved imaging polarimetry and spectropolarimetry. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 601, p. A142, 2017.

MEE, C. Van der. Reflection and transmission of polarized light: The adding method for homogeneous atmospheres. **Journal of mathematical analysis and applications**, Elsevier, v. 116, n. 2, p. 574–593, 1986.

MIE, G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. **Annalen der physik**, Wiley Online Library, v. 330, n. 3, p. 377–445, 1908.

MILLAR-BLANCHAER, M. A. et al. Detection of polarization due to cloud bands in the nearby luhman 16 brown dwarf binary. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 894, n. 1, p. 42, 2020.

NUSSENZVEIG, H. Does the glory have a simple explanation? **Optics letters**, Optical Society of America, v. 27, n. 16, p. 1379–1381, 2002.

NUSSENZVEIG, H. M. **Diffraction effects in semiclassical scattering**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992.

NUSSENZVEIG, H. M. s. The theory of the rainbow. **Scientific American**, JSTOR, v. 236, n. 4, p. 116–128, 1977.

PERLIN, K. Improving noise. In: **Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 681–682.

PERRYMAN, M. **The Exoplanet Handbook**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

PLURIEL, W.; MARCQ, E.; TURBET, M. Modeling the albedo of earth-like magma ocean planets with h₂o-co₂ atmospheres. **Icarus**, Elsevier, v. 317, p. 583–590, 2019.

POPE, S. K. et al. Clouds of ammonia ice: Laboratory measurements of the single-scattering properties. **Icarus**, Elsevier, v. 100, n. 1, p. 203–220, 1992.

PRAHL, S. **miepython: A Python library for Mie scattering calculations**. Zenodo, 2026. Disponível em: <<https://github.com/scottprahl/miepython>>. Acesso em: 10 jan. 2026.

REIN, E.; OFIR, A. Fast and precise light-curve model for transiting exoplanets with rings. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 490, n. 1, p. 1111–1119, 2019.

RODRIGUES, C. V. **Redução de dados polarimétricos**. 2015. Disponível em: <https://www.das.inpe.br/~claudia.rodrigues/polarimetria/reducao_pol.html>. Acesso em: 14 abr. 2026.

RODRIGUES, C. V. et al. Sparc4-simultaneous polarimeter and rapid camera in 4 bands: first light, commissioning, and preliminary results. **Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira**, v. 35, n. 1, p. 44–48, 2024.

RODRIGUES, C. V. et al. Sparc4 a simultaneous polarimeter and rapid camera in 4 bands. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2012. v. 1429, n. 1, p. 252–255.

RODRIGUES, C. V. et al. Concept of sparc4: a simultaneous polarimeter and rapid camera in 4 bands. In: SPIE. **Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy IV**. [S.l.], 2012. v. 8446, p. 773–785.

ROOIJ, W. D.; STAP, C. Van der. Expansion of mie scattering matrices in generalized spherical functions. **Astronomy and Astrophysics**, v. 131, p. 237–248, 1984.

ROSSI, L.; BERZOSA-MOLINA, J.; STAM, D. M. Pymiedap: a python–fortran tool for computing fluxes and polarization signals of (exo) planets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 616, p. A147, 2018.

ROSSI, L.; STAM, D. Using polarimetry to retrieve the cloud coverage of earth-like exoplanets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 607, p. A57, 2017.

ROUAN, D. et al. The orbital phases and secondary transits of kepler-10b. a physical interpretation based on the lava-ocean planet model. **The Astrophysical Journal Letters**, The American Astronomical Society, v. 741, n. 2, p. L30, 2011.

SCIAMMA-O'BRIEN, E. et al. First optical constants of laboratory-generated organic refractory materials (tholins) produced in the nasa ames cosmic facility from the visible to the near infrared (0.4–1.6 μ m): Application to titan's aerosols. **The Planetary Science Journal**, The American Astronomical Society, v. 4, n. 7, p. 121, 2023.

SEAGER, S.; WHITNEY, B. A.; SASSELOV, D. D. Photometric light curves and polarization of close-in extrasolar giant planets. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 540, n. 1, p. 504, 2000.

SENGUPTA, S.; MAITI, M. Polarization of starlight by an unresolved and oblate extrasolar planet in an elliptical orbit. **The Astrophysical Journal**, v. 639, n. 2, p. 1147–1152, 2006.

SHKURATOV, Y. G. et al. A critical review of theoretical models of negatively polarized light scattered by atmosphereless solar system bodies. **Earth, Moon, and Planets**, Springer, v. 65, n. 3, p. 201–246, 1994.

SILVA, A. V. Method for spot detection on solar-like stars. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 585, n. 2, p. L147–L150, 2003.

SILVA-VALIO, A. et al. Properties of starspots on CoRoT-2. **A&A**, v. 510, p. A25, fev. 2010.

SIMMONS, J.; STEWART, B. Point and interval estimation of the true unbiased degree of linear polarization in the presence of low signal-to-noise ratios. **Astronomy and Astrophysics**, v. 142, p. 100–106, 1985.

SIMON-MILLER, A. A.; BANFIELD, D.; GIERASCH, P. J. Color and the vertical structure in jupiter's belts, zones, and weather systems. **Icarus**, Elsevier, v. 154, n. 2, p. 459–474, 2001.

- SINGH, V. et al. Probing kepler's hottest small planets via homogeneous search and analysis of optical secondary eclipses and phase variations. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 658, p. A132, 2022.
- SMITH, B. Geometrical shadowing of a random rough surface. **IEEE transactions on antennas and propagation**, IEEE, v. 15, n. 5, p. 668–671, 1967.
- SNELLEN, I. A. et al. Fast spin of the young extrasolar planet β pictoris b. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 509, n. 7498, p. 63–65, 2014.
- STAM, D.; HOVENIER, J.; WATERS, L. Using polarimetry to detect and characterize jupiter-like extrasolar planets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 428, n. 2, p. 663–672, 2004.
- STRATTON, J. A. **Electromagnetic theory**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- STRUTT, J. Xv. on the light from the sky, its polarization and colour. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 41, n. 271, p. 107–120, 1871.
- SUDARSKY, D.; BURROWS, A.; PINTO, P. Albedo and reflection spectra of extrasolar giant planets. **The Astrophysical Journal**, v. 538, n. 2, p. 885–903, 2000.
- TAKASHIMA, T. Polarization effect on radiative transfer in planetary composite atmospheres with interacting interface. **Earth, Moon, and Planets**, Springer, v. 33, n. 1, p. 59–97, 1985.
- TAMBURO, P. et al. Confirming variability in the secondary eclipse depth of the super-earth 55 cancri e. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 155, n. 5, p. 221, 2018.
- TESKE, J. K. et al. A thick volatile atmosphere on the ultrahot super-earth toi-561 b. **The Astrophysical Journal Letters**, The American Astronomical Society, v. 995, n. 2, p. L39, 2025.
- TILSTRA, L. et al. Surface reflectivity climatologies from uv to nir determined from earth observations by gome-2 and sciamachy. **Journal of Geophysical Research: Atmospheres**, Wiley Online Library, v. 122, n. 7, p. 4084–4111, 2017.
- TINBERGEN, J. **Astronomical Polarimetry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- TREES, V. J.; STAM, D. M. Blue, white, and red ocean planets-simulations of orbital variations in flux and polarization colors. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 626, p. A129, 2019.
- TREES, V. J.; STAM, D. M. Ocean signatures in the total flux and polarization spectra of earth-like exoplanets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 664, p. A172, 2022.
- TRETTER, S. A. Double-sideband suppressed-carrier amplitude modulation and coherent detection. **Communication System Design Using DSP Algorithms with Laboratory Experiments for the TMS320C6713™ DSK**, Springer US, p. 133–141, 2008.
- URNSHEK, D. et al. An atlas of hubble space telescope photometric, spectrophotometric, and polarimetric calibration objects. **Astronomical Journal**, v. 99, p. 1243–1261, 1990.

VANDERPLAS, J. T. Understanding the lomb–scargle periodogram. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, The American Astronomical Society, v. 236, n. 1, p. 16, mai 2018.

VEENSTRA, A. K. et al. A general polarimetric model for transiting and nontransiting ringed exoplanets. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 693, p. A310, 2025.

WANG, F.; FUJII, Y.; HE, J. Unveiling nongray surface of cloudy exoplanets: The influence of wavelength-dependent surface albedo and cloud scattering properties on retrieval solutions. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 931, n. 1, p. 48, 2022.

WIKTOROWICZ, S. J. Nondetection of polarized, scattered light from the hd 189733b hot jupiter. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 696, n. 2, p. 1116–1124, 2009.

WIKTOROWICZ, S. J. et al. A scatter of light from a polarized world. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 170, n. 5, p. 291, 2025.

WINN, J. N.; SANCHIS-OJEDA, R.; RAPPAPORT, S. Kepler-78 and the ultra-short-period planets. **New Astronomy Reviews**, Elsevier, v. 83, p. 37–48, 2018.

WOLSZCZAN, A.; FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar psr1257+12. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 355, n. 6356, p. 145–147, 1992.

YOUNG, R. E. The galileo probe mission to jupiter: Science overview. **Journal of Geophysical Research: Planets**, v. 103, n. E10, p. 22775–22790, 1998.

ZUCHOWSKI, L.; YAMAZAKI, Y.; READ, P. Modeling jupiter’s cloud bands and decks: 2. distribution and motion of condensates. **Icarus**, Elsevier, v. 200, n. 2, p. 563–573, 2009.

ZUGGER, M. E. et al. Light scattering from exoplanet oceans and atmospheres. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 723, n. 2, p. 1168, 2010.

ZULUAGA, J. I.; SUCERQUIA, M.; ALVARADO-MONTES, J. A. The bright side of the light curve: A general photometric model of non-transiting exorings. **Astronomy and Computing**, Elsevier, v. 40, p. 100623, 2022.