

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

SUELLEN KARINA PALHANO IOCHUCKI

**PROPOSTAS PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA:
INTRODUÇÃO À APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS POR
POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS**

PONTA GROSSA

2016

SUELLEN KARINA PALHANO IOCHUCKI

**PROPOSTAS PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA:
INTRODUÇÃO À APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS POR
POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas

PONTA GROSSA

2016

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

I64 Iochucki, Suellen Karina Palhano
 Propostas para o ensino da
 trigonometria: Introdução à aproximação de
 funções periódicas por polinômios
 trigonométricos/ Suellen Karina Palhano
 Iochucki. Ponta Grossa, 2016.
 97f.

 Dissertação (Mestrado Profissional em
 Matemática em Rede Nacional - Área de
 Concentração: Matemática), Universidade
 Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Wanderley
 Aparecido Cerniauskas.

 1. Ensino de matemática.
 2. Trigonometria. 3. Funções
 trigonométricas. 4. GeoGebra.
 5. Convergência de polinômios
 trigonométricos. I. Cerniauskas, Wanderley
 Aparecido. II. Universidade Estadual de
 Ponta Grossa. Mestrado Profissional em

CDD: 516.24

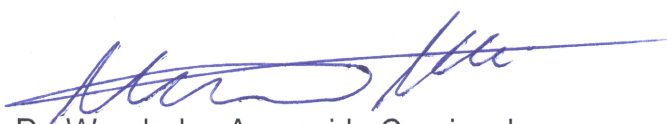
TERMO DE APROVAÇÃO

Suellen Karina Palhano lochucki

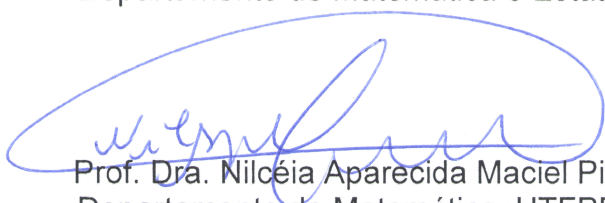
**“PROPOSTAS PARA O ENSINO DA TRIGONOMETRIA: INTRODUÇÃO À
APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES PERIÓDICAS POR POLINÔMIOS
TRIGONOMÉTRICOS”**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Wanderley Aparecido Cerniauskas
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR



Prof. Dra. Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro
Departamento de Matemática, UTFPR/PR



Prof. Dra. Scheila Valechenski Biehl
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 27 de Junho de 2016.

À minha família, amor incondicional, Christian, Bianca e Nicolas

AGRADECIMENTOS

- À Deus por ser o motivo de tudo acontecer em minha vida.
- Ao meu esposo Christian pelo incentivo, cumplicidade e companheirismo em todos os momentos.
- Aos meus filhos Bianca e Nicolas por serem a minha inspiração e minha força para alcançar meus objetivos.
- Aos meus pais João e Nelci por me proporcionarem toda a base e educação.
- Aos meus sogros João e Leatrice e a avó Iolanda, pelo auxílio com meus filhos em momentos de minha ausência.
- Ao meu orientador Wanderley pela dedicação e prontidão em me auxiliar.
- Ao professor Grados por todo carinho e comprometimento durante minha formação, e aos demais professores pelas contribuições realizadas .
- Aos meus alunos por demonstrarem reciprocidade ao meu trabalho.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem sobre o conteúdo de Trigonometria utilizando os programas Geogebra e Maxima. Traz um roteiro de como a Trigonometria pode ser trabalhada em sala de aula dividido em etapas. Propõe aplicações da Trigonometria em diferentes áreas do conhecimento e sugere a introdução da aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e exploratória. A sua relevância justifica-se por possibilitar ao professor olhar o processo de ensino-aprendizagem de forma significativa ao aluno. Durante o desenvolvimento da pesquisa, a abordagem do conteúdo de trigonometria ocorreu pela história da matemática e com a utilização de softwares. A utilização dos recursos computacionais mostrou-se importante aliada ao saber científico, assim como a utilização de aplicações para a contextualização do tema.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Trigonometria, Funções Trigonométricas, GeoGebra, Maxima, Convergência de Polinômios Trigonômétricos.

ABSTRACT

This work presents an approach to trigonometry content using Geogebra and Maxima programs. It provides a road map of how trigonometry can be worked in the classroom divided into stages . It proposes applications of trigonometry in different areas of knowledge and suggests the introduction of the approach of periodic functions by trigonometric polynomials . It is a qualitative and exploratory research . Its relevance is justified because it allows the teacher to look at the process of teaching and learning significantly to the student. During the development of research, the approach of trigonometry content was the history of mathematics and the use of software. The use of computing resources was an important ally to scientific knowledge , as well as the use of applications for the contextualization.

Keywords: Teaching math, Trigonometry, Trigonometric Functions, GeoGebra, Maxima, Convergence of trigonometric polynomials .

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Hiparco de Nicéia	19
FIGURA 2	– Ptolomeu	20
FIGURA 3	– Al Battani	21
FIGURA 4	– Distância entre a Terra e à Lua - Exemplo 1 - Astronomia	21
FIGURA 5	– Largura do rio - Ilustração do Exemplo 2 - Topografia	23
FIGURA 6	– Distância entre localidades - Ilustração do Exemplo 3 - Cartografia	25
FIGURA 7	– Trabalho Mecânico - Ilustração do Exemplo 5.4 - Física	26
FIGURA 8	– Altura de um prédio - Ilustração do Exemplo 5.5 - Engenharia Civil	28
FIGURA 9	– Variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos - Ilustração do Exemplo 5 - Medicina	30
FIGURA 10	– Papiro de Rhind	32
FIGURA 11	– Relógio de Sol Egípcio	32
FIGURA 12	– Nomes dos lados de um triângulo retângulo	34
FIGURA 13	– Semelhança de Triângulos 1	35
FIGURA 14	– Semelhança de Triângulos 2	36
FIGURA 15	– Teorema de Pitágoras	38
FIGURA 16	– Círculo Trigonométrico	41
FIGURA 17	– Círculo Trigonométrico com triângulo retângulo qualquer	42
FIGURA 18	– Círculo Trigonométrico com triângulo retângulo	43
FIGURA 19	– Triângulo A'B'C'' semelhante ao triângulo A'B'C' da figura 13 no Círculo Trigonométrico	44
FIGURA 20	– Ângulo de 90 graus no Círculo Trigonométrico	45
FIGURA 21	– Transição da razão Seno do Círculo trigonométrico para a função Seno .	46
FIGURA 22	– Protocolo da construção da figura 23	47
FIGURA 23	– Função Seno no intervalo $[0, 2\pi]$	48
FIGURA 24	– Função Seno $f(x)=\text{sen}(x)$	48
FIGURA 25	– Função Cosseno $f(x)=\text{cos}(x)$	49
FIGURA 26	– Função Tangente $f(x)=\text{tg}(x)$	49
FIGURA 27	– Leonahrd Euler	50
FIGURA 28	– François Viète	51
FIGURA 29	– Gráfico de uma função g não contínua em $x=0$	54
FIGURA 30	– Gráfico de uma função h contínua em $x=0$	55
FIGURA 31	– Círculo Trigonométrico de Raio 1 utilizado para a demonstração de $\cos(a+b)$	59
FIGURA 32	– Exemplo do gráfico de uma função de período um	61
FIGURA 33	– Gráfico da região limitada por $f(x) = x$ e o eixo $0x$, no intervalo $[0,4]$..	63
FIGURA 34	– Gráfico e cálculo da área da região limitada por $f(x) = -x^2 + 4$ e o eixo $0x$	64
FIGURA 35	– Área limitada por uma curva sendo $f(x) > 0$	65
FIGURA 36	– Área limitada por uma curva sendo $f(x) < 0$	66
FIGURA 37	– Gráfico e cálculo de área para a função $f(x) = 2x^2 + 1$ no intervalo $[0,2]$	67
FIGURA 38	– Gráfico e cálculo de área para a função $g(x) = 3x - 1$ no intervalo $[0,2]$	67

FIGURA 39	– Gráfico e cálculo de área para a função soma $f(x) + g(x)$ no intervalo $[0, 2]$	68
FIGURA 40	– Cálculos para ortogonalidade das funções Seno e Cosseno	70
FIGURA 41	– Cálculo 2 para ortogonalidade das funções Seno e Cosseno	72
FIGURA 42	– Cálculos para obter a_0	73
FIGURA 43	– Gráfico da função f_1	74
FIGURA 44	– Cálculo para determinar a_n para o exemplo 10.1	76
FIGURA 45	– Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.1	76
FIGURA 46	– Aproximação de f_1 por P_1	77
FIGURA 47	– Aproximação de f_1 por $P_3(x)$	78
FIGURA 48	– Aproximação de f_1 por P_5	79
FIGURA 49	– Aproximação de f_1 por P_7	79
FIGURA 50	– Gráfico da função f_2	80
FIGURA 51	– Cálculo para determinar a_0 para o exemplo 10.2	80
FIGURA 52	– Cálculo para determinar a_n para o exemplo 10.2	81
FIGURA 53	– Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.2	81
FIGURA 54	– Aproximação de f_2 por P_1	82
FIGURA 55	– Aproximação de f_2 por P_2	83
FIGURA 56	– Aproximação de f_2 por P_3	83
FIGURA 57	– Aproximação de f_2 por P_4	84
FIGURA 58	– Aproximação de f_2 por P_5	84
FIGURA 59	– Aproximação de f_2 por P_6	85
FIGURA 60	– Gráfico da função f_3	85
FIGURA 61	– Cálculo para determinar de a_0 para o exemplo 10.3	86
FIGURA 62	– Cálculo para determinar de a_n para o exemplo 10.3	87
FIGURA 63	– Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.3	88
FIGURA 64	– Aproximação de f_3 por P_1	89
FIGURA 65	– Aproximação de f_3 por P_3	90
FIGURA 66	– Aproximação de $f_2(x)$ por P_1 e P_5	92
FIGURA 67	– Gráfico de ε_1 de f_2 por P_1	92
FIGURA 68	– Gráfico de ε_5 de f_2 por P_5	93

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Exemplo 3 - Cartografia	24
TABELA 2	– Razão entre os lados dos triângulos da figura 13	34
TABELA 3	– Razões entre os lados dos triângulos da figura 14	35
TABELA 4	– Teorema de Pitágoras para os triângulo $A_i B_i C_i$	37
TABELA 5	– Teorema de Pitágoras para os triângulos $A'_i B'_i C'_i$	37
TABELA 6	– Aplicação do Teorema de Pitágoras e classificação dos pares de triângulos da figura 14	38
TABELA 7	– Razões Trigonômicas do triângulo $A'B'C'$ da Figura 13	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	MOTIVAÇÃO	9
1.1.1	Problema de Pesquisa	10
1.2	OBJETIVOS	10
1.2.1	Objetivo Geral	10
1.2.2	Objetivos Específicos	10
2	REVISÃO DE LITERATURA	12
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE PESQUISA	17
5	APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA	18
5.1	APLICAÇÕES NA ASTRONOMIA	18
5.2	APLICAÇÕES NA TOPOGRAFIA	22
5.3	APLICAÇÕES NA CARTOGRAFIA	24
5.4	APLICAÇÕES NA FÍSICA	26
5.5	APLICAÇÕES NA MÚSICA	27
5.6	APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL	27
5.7	APLICAÇÕES NA TRANSMISSÃO DE ONDAS DE RÁDIO	29
5.8	APLICAÇÕES NA MEDICINA	29
6	UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	31
6.1	CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA	32
7	FUNÇÕES CONTÍNUAS	53
7.1	SOFTWARE MAXIMA	53
7.2	INTRODUÇÃO À CONTINUIDADE	54
8	FUNÇÕES PERIÓDICAS	58
8.1	EXEMPLOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS	58
9	ÁREA SOB UMA CURVA	63
9.1	CÁLCULO DA ÁREA DE UMA REGIÃO	63
10	APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS POR POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS	69
10.1	POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS	69
10.1.1	Coeficientes do Polinômio Trigonométrico	69
10.2	EXEMPLOS	74
10.3	CONVERGÊNCIA DO POLINÔMIO TRIGONOMÉTRICO	90
11	CONCLUSÃO	94
	REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

O ensino da trigonometria tem enfrentado muitas barreiras e as dificuldades apenas acumulam-se com o passar dos anos letivos. O conteúdo de trigonometria no ensino básico é abordada em três etapas diferentes de forma gradual. Na primeira trabalha-se a trigonometria no triângulo retângulo, na segunda trabalha-se a trigonometria no círculo trigonométrico e na terceira trabalham-se as funções trigonométricas. Se a primeira etapa não é bem aprendida, dificilmente as outras serão de fácil aprendizagem. Por isso, os professores que lecionam a segunda e terceira etapa precisam trabalhar novamente com as etapas anteriores.

Uma das hipóteses para a não aprendizagem é a de o conteúdo não ser ensinado de forma contextualizada. Como os alunos não compreendem a relação entre teoria e prática, podem sentir-se desmotivados. Mesmo no Ensino Superior, em cursos que exigem a aprendizagem da trigonometria, a dificuldade permanece presente.

Assim, este trabalho utiliza-se do software Geogebra para apresentar a abordagem da trigonometria realizada na fase escolar dada pelas três etapas mencionadas acima, para auxiliar na construção de gráficos e para apresentar um método de aproximação de funções periódicas por polinômios que envolvem relações trigonométricas, utiliza-se o software Maxima.

1.1 MOTIVAÇÃO

A experiência profissional da autora do trabalho corresponde ao trabalho tanto na Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) quanto na Educação Superior (Cursos de Engenharias). Nos cursos de graduação, atua com disciplinas de Matemática Instrumental e Cálculo Diferencial e Integral (1,2 e 3).

Durante as aulas, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, foi possível perceber o grande bloqueio por parte dos alunos, principalmente, quando estes já haviam sido introduzidos na Trigonometria. Mesmo nos cursos de graduação, etapa em que se espera que os alunos já tenham formalizados os conteúdos básicos, e também se espera mais autonomia dos

alunos, a realidade tem sido divergente com relação às expectativas. Os alunos não compreendem de fato o que estão fazendo e simplesmente desejam abandonar tal aprendizado. Ignoram a importância tanto teórica quanto aplicada do tema.

Numa primeira etapa, o conteúdo de Trigonometria é visto no triângulo retângulo. Em geral é feito, por meio de razões entre os lados do triângulo, com uso de tabelas para os ângulos principais. Os exercícios, em geral, trazem a figura de um triângulo com pelos menos dois dados fornecidos e cabe ao aluno descobrir os dados não explícitos.

Já numa segunda etapa, é realizada a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para a Trigonometria do círculo trigonométrico. Nesta etapa, comumente, é usada a Geometria como aliada, tabelas e fórmulas. Essa fase torna-se bastante difícil, devido à abstração do conteúdo.

Na terceira etapa, é realizado o estudo das funções trigonométricas. Nessa etapa a Trigonometria é vista como uma ferramenta.

Abordar cada etapa do ensino de Trigonometria sem a devida contextualização desmotiva seu estudo. Tendo tudo isto em vista, a autora compreende que os trabalhos na área de Ensino de Trigonometria contribuem com o processo de ensino-aprendizagem na matemática, de forma a tornar o estudo mais prazeroso e significativo ao principal elemento da educação: o aluno.

1.1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Este trabalho tem como questão norteadora:

Como tornar o ensino de trigonometria mais atrativo aos alunos?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar algumas propostas para o ensino-aprendizagem de trigonometria com base em aplicações em diferentes áreas do conhecimento e nas TIC (tecnologia da informação e comunicação).

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Explorar aplicações da trigonometria para explicitar a contextualização do tema;

- Oferecer métodos para contribuir na compreensão da trigonometria com o auxílio de recursos computacionais (softwares Geogebra e Maxima).

2 REVISÃO DE LITERATURA

A partir do levantamento realizado sobre trabalhos relacionados à temática dessa investigação, percebe-se que são muitas as pesquisas nessa área, isso mostra quanto o tema é relevante e quanto se busca a evolução do ensino nesse campo. As pesquisas apresentam em geral, a evolução da Trigonometria (histórico) e metodologias de ensino para as funções trigonométricas. Na sequência apresentam-se algumas pesquisas, para indicar o material produzido nessa área.

Em sua dissertação Borges (2009) apresenta uma sequência de 12 atividades que tem por objetivo contribuir para a compreensão da transição das razões trigonométricas, do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, com a utilização do software Geogebra; e também de trabalhar com a definição de radiano. A aplicação das atividades mostrou que, apesar da dificuldade dos alunos se expressarem por escrito, houve avanço na aprendizagem, interesse e concentração por parte dos mesmos.

No artigo de Rosembaum (2010), são pesquisadas possíveis contribuições de pesquisas da área da Educação Matemática para a organização do ensino, com o objetivo de aprendizagem de funções trigonométricas. De acordo com os autores, tais pesquisas são fundamentais para o planejamento docente.

Palis (2010) em sua apresentação mostra os resultados de sua pesquisa, a qual visa compreender as dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos, na transição da educação básica para a superior. Além disso, descreve resultados obtidos a partir de intervenções pedagógicas que buscam uma melhoria no processo de transição entre o ensino médio e o ensino superior.

Vazquez (2010) apresenta em seu trabalho o desenvolvimento de atividades de introdução à trigonometria, visando à formação conceitual do tema. O trabalho é realizado em turmas de 2ª série do Ensino Médio. A autora percebe grande dificuldade por parte dos alunos em compreender o conceito radiano.

Nacarato et al. (2010) fazem um apanhado da evolução histórica da trigonometria e da

transposição didática que está presente nos materiais didáticos e propostas curriculares. Como resultado, os autores concluem que até 1980 há sintonia entre documentos curriculares e materiais didáticos. Além disso, foi possível perceber a lacuna da trigonometria como conteúdo escolar e como saber científico.

Em seu artigo Silva e Frota (2010, p.9) relatam sua experiência no ensino de trigonometria. O objetivo principal é associar o conteúdo com modelos matemáticos conhecidos e situações práticas. Para as autoras “ A experiência conduzida evidenciou a necessidade de uma maior ênfase no estudo das relações trigonométricas e do ciclo trigonométrico, para além do triângulo retângulo.” .

Em sua dissertação, Oliveira (2010) apresenta uma investigação do ensino de trigonometria. A autora aborda desde o triângulo retângulo até o círculo trigonométrico. Em seu trabalho afirma que é possível, por meio da abordagem escolhida, alcançar uma aprendizagem significativa da trigonometria.

Silva e Frota (2011) apresentam uma sequência didática para que seja realizada a introdução da trigonometria no Ensino Médio. A sequência é sugerida por meio de modelagem, com a utilização de material concreto e recursos computacionais.

Nasser et al. (2012) pesquisam como ocorre a transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, buscando justificar os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo. Os autores concluem que os obstáculos dessa transição, podem ser amenizados com uma abordagem adequada durante o Ensino Médio.

Em sua apresentação, Miranda et al. (2013) relata sua experiência quanto às dificuldades encontradas na disciplina de “Cálculo 1”. Como conclusão tem-se que as dificuldades são provenientes da forma com que a trigonometria é vista na Educação Básica.

Oliveira (2014) em seu trabalho faz um estudo sobre funções trigonométricas no ensino médio de acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais). O autor ainda destaca a formação do conceito “radiano”. Em sua dissertação é explicitada a teoria de aprendizagem significativa do psicólogo David Ausubel, pela qual diferencia as aprendizagens mecânica e significativa. Por fim traz atividades com a utilização do software Geogebra.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Com o objetivo de ilustrar as dificuldades quanto à aprendizagem do conteúdo de trigonometria, destaca-se Nacarato et al. (2010, p.1) que diz que mesmo o conteúdo de trigonometria sendo obrigatório no Ensino Médio, os alunos ingressam no Ensino Superior sem os conhecimentos matemáticos. Tais dificuldades estão relacionadas aos conceitos básicos deste conteúdo, à representação geométrica e à aplicação do tema. Em geral, o conteúdo é apresentado sem contextualização e sem aplicações relevantes. Em seu trabalho Vazquez (2010, p.1) diz que “A aprendizagem em Trigonometria tem se constituído um obstáculo pedagógico, pois alunos que não conseguem alcançar níveis de aprendizagem satisfatórios tendem a criar certa aversão pelo conteúdo.” Com isto, é possível entender o bloqueio oriundo dos alunos, dificultando também o trabalho docente.

O processo de ensino-aprendizagem deve contemplar ferramentas e metodologias capazes de contextualizar o conteúdo, de forma que o aluno compreenda a necessidade de se aprender. Oliveira (2014, p.3) em seu trabalho diz que a trigonometria deve ser abordada destacando aspectos importantes das funções trigonométricas e gráficos. Ainda enfatiza que deve-se evitar a memorização de fórmulas e algoritmos.

O estudo da matemática não precisa ser trabalhado apenas de forma mecânica, com uso de apenas exercícios de repetição. Pode ser trabalhado com a utilização de situações-problema, propondo que o aluno busque a solução utilizando a interpretação e a aplicação do conteúdo.

Matemática é uma Ciência em constante evolução, pode ser considerada como um corpo de conhecimento constituído por teorias bem determinadas, sendo aplicável a todas as disciplinas e desempenha um papel dominante na ciência moderna. É importante salientar que matemática não é um processo “mecânico” de se chegar a um resultado, pois temos máquinas que são muito mais eficientes em fazer isso. Matemática é um conjunto de dados organizados logicamente, e rigorosamente verificados pela eficiência de sua estrutura, com conceitos triviais, os algoritmos que confirmam as propriedades dos números até sua lógica que permite chegar a um processo mecânico. Depois de desenvolver sua estrutura conceitual os algoritmos fazem sentido. (NASSER et al., 2012, p.14)

Trabalhar com a matemática no Ensino Médio, é trabalhar para que o discente esteja

preparado para o mercado de trabalho e também para a vida acadêmica. Ensinar com qualidade é papel de todo professor. Em relação, especificamente ao ensino de Matemática no Ensino Médio, tem-se:

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a: -compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; [...] -estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; (BRASIL, 1997, p.42)

É necessário que o aluno consiga relacionar os conceitos de trigonometria. As autoras Silva e Frota (2010, p.4) sugerem necessidades que os alunos precisam suprir para uma boa aprendizagem em Trigonometria.

Com relação aos conhecimentos trigonométricos, é preciso que o aluno saiba transitar desde o Teorema de Pitágoras, das razões trigonométricas no triângulo retângulo até interpretações no ciclo trigonométrico. Os vários modelos matemáticos podem então ser compreendidos de forma integrada: noções estudadas no Ensino Fundamental são retomadas e ampliadas no Ensino Médio, utilizando as diversas formas de representação em matemática.

Mas em geral, o ensino de Trigonometria não tem sido trabalhado com tais finalidades, na maioria das vezes é simplesmente estudado por meio de exercícios repetitivos, não contextualizados. Exercícios de repetição também são importantes, mas os professores não devem apenas se restringir a eles. Cabe ao professor determinar atividades que motivem o discente a querer resolvê-las. As atividades tem a função de ligar diferentes disciplinas, para que a matemática não seja percebida isoladamente. Em concordância a isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais, propõe que:

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa. (BRASIL, 1997, p.44)

O professor é responsável por possibilitar uma formação sólida, pela qual o aluno aprenda os conteúdos significativamente e esteja preparado para resolver diferentes situações-problemas. Cabe ao profissional, encaminhar sua aula para que o aluno possa realizar descobertas. Oliveira em seu trabalho instiga o docente a promover o ensino de forma adequada e organizada à aprendizagem significativa.

Na sala de aula, o professor deve ter o cuidado de iniciar os conteúdos pelos aspectos mais simples da temática e avançar para os mais complexos, traduzindo-se na ampliação dos conhecimentos, das habilidades e das atitudes. Os conteúdos devem ser trabalhados de forma gradual, com uma distribuição adequada, tanto no que diz respeito à qualidade quanto à quantidade, principalmente porque estas devem ser apresentadas tendo por base as experiências e os conhecimentos prévios dos alunos. O terceiro aspecto a ser considerado é a continuidade, conexões entre os conteúdos, de tal modo que estes se complementem e se integrem conforme o ensino e a aprendizagem se processam. (OLIVEIRA, 2014, p.8)

Devido à grande rejeição por parte dos alunos com relação à trigonometria, tem se criado hipóteses para esse acontecimento. O autor Nascimento (2014, p.33) aponta alguns motivos para que o ensino da Trigonometria tenha alcançado tanto insucesso.

Sabemos que algumas dificuldades apresentadas são originadas também de limitações conceituais dos professores, oriundas de sua formação escolar e de sua formação acadêmica (inicial e continuada) que, de certa forma, reflete em seu exercício. Algumas delas são: transição da Trigonometria do triângulo retângulo para a do ciclo trigonométrico; distinção entre arcos e ângulos; abordagem simultânea das razões e relações trigonométricas de grandezas angulares medidas em graus e as razões e relações trigonométricas de grandezas de medidas lineares medidas em radianos, sem perceber a importância de entender e diferenciar tais situações, as quais ajudarão na compreensão das funções trigonométricas; transmissão do conteúdo sem conhecimento histórico, favorecendo a um conhecimento limitado, pois a história nos coloca de frente a origem dos fatos, os quais e, muitas vezes, nos dá a compreensão de dúvidas que nos acompanharam desde a formação básica e que ainda as transmitimos; entre outras.

As dificuldades em trigonometria estendem-se do Ensino Médio para o Ensino Superior. Nos cursos superiores, a carga horária destinada a esse conteúdo é reduzida, por considerar que o aluno tenha sido preparado durante o Ensino Médio. Assume-se que o aluno da graduação saiba todo o conteúdo que serve de base para as disciplinas do curso superior. Nacarato et al. (2010, p.1) afirmam que mesmo sendo o conteúdo em questão obrigatório no Ensino Médio, contesta-se que os alunos chegam ao Ensino Superior sem o conhecimento necessário nessa área do conhecimento matemático. O professor do Ensino Superior precisa retomar conceitos básicos da trigonometria, e nem sempre há tempo suficiente para esta revisão. Palis (2010, p. 1-2) trata desse assunto em seu trabalho, dizendo “A transição matemática ensino médio-superior na área técnico-científica tem sido objeto de preocupação internacional e se configura como um desafio para professores e uma barreira para alunos.”, e ainda diz que o professor universitário responsável pelas disciplinas iniciais necessita reconstruir os conceitos iniciados na Educação Básica.

O acúmulo de conteúdo mal aprendido torna-se uma grande barreira no Ensino Superior, fazendo com que não haja tempo suficiente para o cumprimento de todo o plano de ensino.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE PESQUISA

A investigação desse trabalho tem caráter qualitativo, pois não se refere a quantificar resultados e sim propor uma abordagem para o ensino da trigonometria. Uma definição é a de SAMPIERI et al. (2006, p.5)

O enfoque qualitativo, em geral, é utilizado para descobrir e refinar as questões da pesquisa. (...) Com frequência esse enfoque está baseado em métodos de coleta de dados sem medição numérica, como as descrições e observações. Regularmente, questões e hipóteses surgem como parte de processo de pesquisa, que é flexível e se move entre os eventos e sua interpretação, entre as respostas e o desenvolvimento da teoria. Seu propósito consiste em "reconstruir" a realidade, tal como é observada pelos atores de um sistema social predefinido.

A pesquisa tem caráter exploratório que pode ser definido como:

Os estudos exploratórios servem para nos familiarizarmos com fenômenos relativamente desconhecidos, para obter informações sobre a possibilidade de realizar uma pesquisa mais completa sobre um contexto particular, pesquisar problemas do comportamento humano que os profissionais de determinada área consideram cruciais, identificar conceitos ou variáveis promissoras, estabelecer prioridades sobre pesquisas futuras, ou sugerir afirmações e postulados (SAMPIERI et al., 2006, p.100).

No capítulo 5 são apresentadas aplicações da trigonometria em diferentes áreas do conhecimento. O capítulo 6 traz uma sequência didática para o ensino de trigonometria utilizando o contexto histórico e o software Geogebra. O capítulo 7 explica intuitivamente o conceito funções contínuas com o auxílio do software Maxima. No capítulo 8 é abordado o conceito de funções periódicas, bem como exemplos. No capítulo 9, é abordado o conceito de área sob uma curva, utilizando o comando da operação de integração do software Maxima. O capítulo 10 sugere um método para aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos, utilizando também o software Maxima.

5 APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Ao contextualizar a Trigonometria contribui-se com o rompimento do bloqueio que parte dos alunos apresentam perante este conteúdo. Muitos se perguntam o "porquê" de se estudar a Trigonometria. Para o aluno é necessário que fique claro, que as descobertas matemáticas surgiram devido a uma necessidade enfrentada, ou seja, que o conteúdo foi gerado após tentativas de solucionar algum problema; as aplicações trigonométricas surgiram antes da formalização do conteúdo. Durante o trabalho é apresentado algumas partes do contexto histórico, objetivando mostrar como o tema surgiu. Pode-se observar que na Antiguidade, houve a necessidade de se utilizar a Trigonometria, seja para construir as pirâmides, o relógio de sol, ou mesmo para auxiliar no plantio. As aplicações vão além das Engenharias e da Física, elas atingem áreas tão diferentes como a Medicina e a Música, por exemplo.

Neste capítulo apresenta-se alguns campos de aplicações da Trigonometria.

5.1 APLICAÇÕES NA ASTRONOMIA

Os astrônomos utilizavam as relações trigonométricas para determinar distâncias inaccessíveis, como as dimensões de corpos celestes e a distâncias entre eles. Um dos primeiros problemas encontrado pelos Gregos na Antiguidade era o de encontrar a distância entre a Terra e a Lua. Por meio da Astronomia foram realizadas grandes contribuições na teoria da Trigonometria.

Na Babilônia, segundo Costa (2003, p.3), a trigonometria surgiu pela Astronomia, que contribuía para a religião, para o calendário e para o plantio. “Parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador 1. Também é plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da trigonometria primitiva egípcia.” Outra evolução ocorrida por meio da Astronomia, foi o surgimento do conceito de ângulo na Grécia, de acordo com Nacarato et al. (2010, p.1), são utilizadas circunferências, pela qual se utilizam as cordas e surgem as primeiras tabelas trigonométricas.

De acordo com Souza et al. (2011, p.51), “o grego Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) é considerado o maior astrônomo da antiguidade e tido como o “pai da trigonometria”, tendo toda a sua obra se perdido ao longo do tempo. Fortemente influenciado pela matemática da Babilônia [...]”. A divisão de um círculo em 360 partes, formando 360 graus, é proveniente de Hiparco de Nicéia.

Hiparco foi uma figura importante e pode-se afirmar que seus trabalhos contribuíram para a transição entre a astronomia babilônica e as ideias do grande Claudio Ptolomeu (150 d.C.), considerado o autor da mais importante obra da trigonometria, surgida no século II de nossa era, em Alexandria, *Syntaxis Mathematica*, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como *Almagesto*, que significa em árabe A maior = *al magest*, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época, em Astronomia. (SOUZA et al., 2011, p.55)



Figura 1: Hiparco de Nicéia

Fonte: Wikipédia¹

Ainda de acordo com os autores, a obra de Ptolomeu tinha sua essência na astronomia, mas como eram apresentadas várias identidades, gerou grande interesse por parte dos matemáticos.

Segundo Costa (2003, p.8) “Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro do *Almagesto*. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como tal tabela pode ser calculada.”

Após os gregos, o povo hindu deu continuidade aos estudos em relação à Trigonometria, fazendo aplicações na Astronomia. “A partir do século V d.C. os hindus passaram a

¹Disponível em < [http : //pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco](http://pt.wikipedia.org/wiki/Hiparco) > acesso em jan. 2015



Figura 2: Ptolomeu

Fonte: Wikipédia²

trabalhar com a semi-corda, que atualmente corresponde ao seno, a qual chamavam de jiva.” (SOUZA et al., 2011, p.60). O estudo hindu consistia em cálculos aritméticos, enquanto que os gregos utilizavam cálculos geométricos. De acordo com os autores, entre 850 e 929, Al Battani, um matemático árabe introduziu o círculo de raio unitário. Apesar de utilizarmos este artifício atualmente, para a época foi uma grande inovação.

Estudos realizados em Mecânica com movimentos periódicos (que de tempos em tempos passam a se repetir), como o movimento de um pêndulo, de uma corda em vibração e outros, mostraram a necessidade de serem ampliadas as noções de seno, cosseno e tangente de um ângulo, tanto para ângulos maiores que 360° como para ângulos negativos. É nesse momento, início da Idade Moderna, que surge a necessidade das funções circulares. (SOUZA et al., 2011, p.1)

De acordo com Miashiro e Galvão (2013, p.3), os hindus aperfeiçoaram os conhecimentos helênicos a partir do século V d.C. Foram responsáveis pela construção de uma tabela para a utilização nos conteúdos de trigonometria esférica. Isso foi possível por considerarem a relação funcional entre a metade da corda e metade do ângulo central. Segundo BOYER (1996, p.143 apud MIASHIRO e GALVÃO, 2013, p. 3) “Assim, aparentemente surgiu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos de seno de um ângulo, e a introdução da função seno, representa a contribuição mais importante dos Siddhantas à história da matemática”

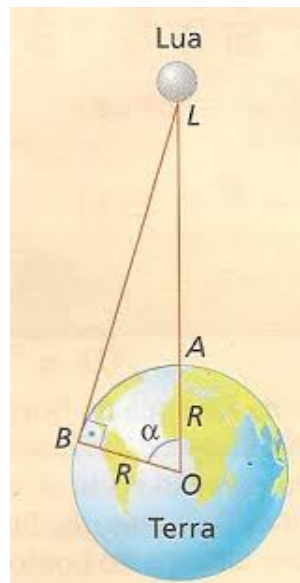
Na sequência, segue o problema para se determinar o Raio do Planeta Terra baseado no vídeo disponibilizado por Lontra (2013).

²Disponível em < [http : //pt.wikipedia.org/wiki/Ptolemeu](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ptolemeu) > acesso em jan. 2015



Figura 3: Al Battani

Fonte: Wikipédia³



Exemplo 5.1.

Figura 4: Distância entre a Terra e à Lua - Exemplo 1 - Astronomia

Fonte: Fórum PiR2 - Física e Matemática⁴

Considerando a Figura 4, na qual representa-se o planeta Terra por uma esfera de centro O e supõe-se que o ponto B representa o local do observatório, tem-se que o triângulo

³Disponível em < <http://pt.wikipedia.org/wiki/Al-Battani> > acesso em jan. 2015

⁴Disponível em < <http://pir2.forumeiros.com/t19650-distancia-da-terra-a-lua18:37> > acesso em out. 2015

OBL é retângulo em B, pois $\overline{OB}$ é raio R da esfera (Terra). A distância $\overline{AL}$ (distância procurada) somada ao raio R da "Terra", formam a hipotenusa do triângulo OBL. Nesse caso é preciso conhecer o Raio da Terra e considerar o ângulo α . Assim tem-se que:

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{\overline{OL}} \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{R + \overline{AL}} \Rightarrow$$

$$(R + \overline{AL}) \cos(\alpha) = R \Rightarrow$$

$$R \cos(\alpha) + \overline{AL} \cos(\alpha) = R \Rightarrow$$

$$\overline{AL} = \frac{R - R \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Rightarrow$$

$$\overline{AL} = \frac{R}{\cos(\alpha)} - R.$$

Assim, conhecendo α e R , obtém-se a distância procurada.

5.2 APLICAÇÕES NA TOPOGRAFIA

As razões trigonométricas também estão presentes no estudo da Topografia, sendo que esta é a ciência que trata de descrever as características do relevo de uma localidade. A Matemática é ferramenta desta ciência pois a Topografia também se utiliza do cálculo de área e perímetro de regiões. São utilizados mapas, cartas e plantas, e o conceito de escalas. Na China também há vestígios da utilização de triângulos retângulos na medição de profundidades e distâncias.

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo mas, infelizmente não temos registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas. (COSTA, 2003, p.3)

Na sequência é apresentado um exemplo que mostra como medir a largura de um rio.

Exemplo 5.2. *Em uma das margens de um rio se encontram dois topógrafos A e B. Eles estão a 25m de distância um do outro. O topógrafo A avista uma pedra na outra margem do rio bem à frente do topógrafo B. E com o auxílio de um Teodolito (instrumento que serve para medir ângulos) percebe que a linha perpendicular à margem que representa a distância entre seu colega e a pedra forma 50° em relação ao Teodolito (linha Teodolito-pedra). Qual é a largura aproximada do rio?*

Solução:

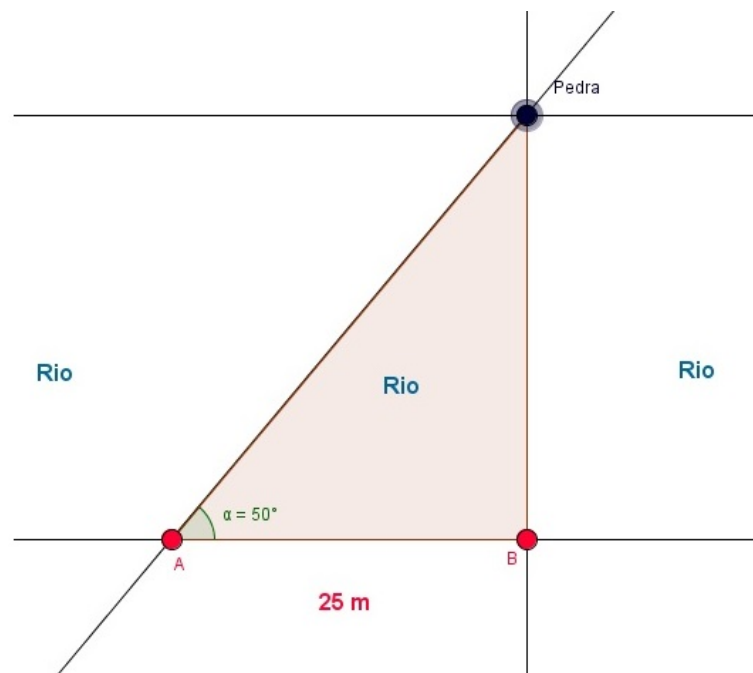


Figura 5: Largura do rio - Ilustração do Exemplo 2 - Topografia

Fonte: Autoria própria.

Para determinar a largura l do rio, basta relacioná-la à distância conhecida de 25 metros (distância entre A e B). Ou seja, como A, B e a pedra formam um triângulo retângulo em B, tem-se que

cateto oposto = l e

cateto adjacente = 25m.

$\alpha = 50^\circ$

e $\text{tg } 50^\circ \cong 1,19$.

A relação trigonométrica adequada é $\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, ou ainda

$$\text{tg} 50^\circ = \frac{l}{25} \Rightarrow$$

$$1,19 \cong \frac{l}{25} \Rightarrow$$

$$1,19 \times 25 \cong l \Rightarrow$$

$$l \cong 29,75 \text{ metros.}$$

Com isso tem-se que a largura aproximada do rio é de 29,75 metros.

5.3 APLICAÇÕES NA CARTOGRAFIA

A Cartografia é a ciência que estuda as representações da Terra, por meio de mapas, cartas e projeções. Surgiu por volta de 2500 a.C., quando o povo Sumério confeccionou o primeiro mapa que se tem registro. Após este, outros povos tais como os Astecas, Egípcios e Chineses, também desenvolveram métodos para a área. Povos como os Egípcios e Chineses usavam a delimitação de terras para a cobrança de impostos.

A matemática está relacionada à cartografia por meio de Geometria Esférica. Apesar da Terra não ser completamente redonda, a representação que mais se aproxima é a da Esfera.

Na sequência apresenta-se um exemplo de aplicação na cartografia. Esse exemplo está no material de Nadal (2013, p. 2-3). Antes de apresentá-lo, é necessário citar alguns conceitos que são utilizados no problema.

d) Meridiano terrestre é a circunferência máxima cujo plano contém o eixo de rotação da Terra, geralmente aquele que contém os pólos e um ponto da superfície esférica é denominado de meridiano do lugar ou meridiano do observador.

i) Latitude astronômica de um ponto (ϕ) é o ângulo formado pela vertical do lugar e sua projeção sobre o plano do equador terrestre, ou é o arco de meridiano contado desde o equador até o ponto considerado. Por convenção varia de 0° a 90° na Terra Esférica - Cálculos - Sistemas de Referência e Tempo hemisfério norte e de 0° a -90° no hemisfério sul.[...]

j) Longitude astronômica de um ponto (λ) é o ângulo diedro formado entre o meridiano que passa por um ponto da terra esférica e o meridiano de Greenwich, ou é o arco de equador contado desde o meridiano de Greenwich até o meridiano de um ponto considerado. Por convenção a longitude varia de 0° a 180° no sentido leste de Greenwich e de 0° a -180° por oeste de Greenwich. Às vezes a longitude é expressa em horas, minutos e segundos. [...]

(NADAL, 2013)

Exemplo 5.3. *Calcular a distância esférica entre dois marcos geodésicos situados nas cidades de Curitiba e de Calcutá, supondo a Terra com raio igual a 6372 km. As coordenadas dos pontos são:*

Tabela 1: Exemplo 3 - Cartografia

Local	Latitude	Longitude
Curitiba	$\phi = 25^\circ 26' 52'' S$	$\lambda = 49^\circ 13' 50'' W$
Calcutá	$\phi = 22^\circ 33' 25'' N$	$\lambda = 88^\circ 20' 12'' E$

A ilustração do problema segue na figura 6.

Solução:

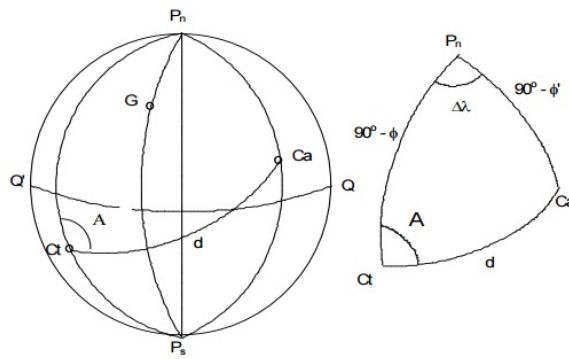


Figura 6: Distância entre localidades - Ilustração do Exemplo 3 - Cartografia

Fonte: Página da UFPR - Professor Nadal⁵

i) Para a apresentação do Cálculo da distância esférica(d) entre Curitiba e Calcutá, fez-se o uso de fórmulas já deduzidas por Nadal (2013):

Calculando inicialmente o valor de $\Delta\lambda$:

$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, substituindo os valores tem-se que

$$\Delta\lambda = 88^{\circ}20'12 - (-49^{\circ}13'50''), \text{ logo: } \Delta\lambda = 137^{\circ}34'02''$$

Utilizando-se a expressão:

$$\cos d = \sin\phi\sin\phi' + \cos\phi\cos\phi'\cos\Delta\lambda$$

e substituindo os valores numéricos

$$\cos d = \sin(-25^{\circ}26'52'')\sin(22^{\circ}33'25'') + \cos(-25^{\circ}26'52'')\cos(22^{\circ}33'25'')\cos(137^{\circ}34'02'')$$

obtem-se que

$$\cos d = -0,780303985$$

e, portanto, d encontra-se no 2° ou no 3° quadrante. Como o triângulo esférico é euleriano escolhe-se a solução no 2° quadrante:

$$[d] = 38,711583563^{\circ} \text{ e,}$$

$$d = 141^{\circ}17'18''$$

Para representar a distância em quilômetros (D) utiliza-se a fórmula deduzida pelo autor:

$$D = R d' \text{ (R é o raio da Terra e } d' \text{ é a distância esférica expressa em radianos) tal que,}$$

⁵Disponível em < <http://www.cartografica.ufpr.br/docs/Nadal/APLICA%C3%87%C3%95ES%20DA%20TRIGONOMETRIA> acesso em out. 2015

$$D = 6372 \text{ km} \times 2,465948062 \text{ rad} \implies$$

$$D = 15713 \text{ Km.}$$

5.4 APLICAÇÕES NA FÍSICA

No campo da Física há muitas aplicações trigonométricas, principalmente por seu estudo envolver medidas direcionadas (módulo, sentido e direção). Para realizar os cálculos dessas medidas são utilizados os vetores (segmentos orientados). Uma das aplicações encontrada na Física é o cálculo do Trabalho Mecânico (medido em joules) sobre um corpo. Quando uma Força é aplicada em um corpo, esta realiza um trabalho de deslocamento sobre o mesmo. Sendo que τ representa o Trabalho Mecânico, F a força, d a distância e θ o ângulo no qual a força é exercida, a fórmula para este cálculo é

$$\tau = Fd\cos\theta.$$

Exemplo 5.4. *Determine o Trabalho Mecânico realizado sobre um corpo pela força F de intensidade $\frac{\sqrt{2}}{2}$ num percurso de 4 metros, de acordo com a figura 7, desconsiderando o atrito da superfície.*

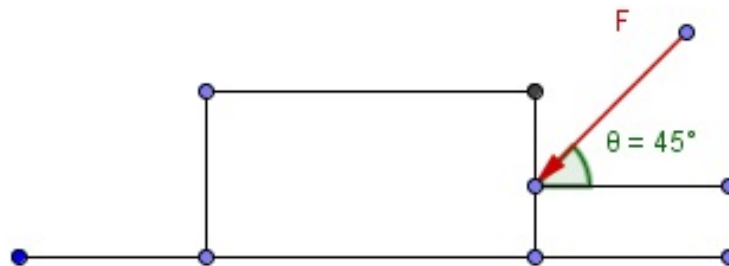


Figura 7: Trabalho Mecânico - Ilustração do Exemplo 5.4 - Física

Fonte: Autoria própria.

Solução:

Tem-se que:

$$F = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$d = 4 \text{ metros e}$

$\theta = 45^\circ$.

Substituindo na fórmula $\tau = Fd\cos\theta$ tem-se que:

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\tau = 2 \text{ joules.}$$

Portanto a força realiza sobre o corpo um Trabalho Mecânico igual a 2 joules.

5.5 APLICAÇÕES NA MÚSICA

Outra aplicação das Funções Trigonômétricas se encontra na Música. É comum perceber a surpresa dos alunos, ao explicar que as ondas sonoras são representadas por funções matemáticas. E exatamente por se tratar de ondas é que as funções trigonométricas são aplicáveis à Música. Os tons musicais são determinados pelo tamanho da onda, que é um conceito matemático chamado de frequência. De acordo com Souza et al. (2009, p. 3-4),

O som é o resultado de uma vibração, que se transmite ao meio de propagação, provocando zonas de maior compressão de partículas e zonas de menor compressão (zonas de rarefação) de partículas, originando uma onda sonora.

Se quisermos ouvir o som de uma corda, deveremos pinçá-la para que esta saia de sua posição de equilíbrio e realize movimentos vibratórios, em um certo intervalo de tempo.

[...]No entanto, a função que buscamos deve representar uma relação entre o deslocamento e o tempo. Desse modo, se um ponto P percorrer uma circunferência f vezes em um segundo, teremos que a função $y = \sin x$ poderá ser representada por:

$$y = \sin 2\pi ft.$$

5.6 APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL

A Trigonometria é amplamente utilizada na Construção Civil, já que toda a sua base agrega medidas de ângulos. Quando é necessário determinar medidas e ângulos, cujo acesso é mais difícil, se faz o uso da Trigonometria, desde os conceitos mais básicos. Em sua apresentação, Silva e Frota (2010) destacam tais aplicações, com atividades que foram propostas para alunos do Ensino Médio. No trabalho de Silva e Frota (2010, p.5) tem-se exemplos das atividades que podem ser aplicadas para alunos da Educação Básica:

1ª: Trigonometria da construção de uma escada: Realizar uma entrevista com um pedreiro indagando acerca de como ele constrói uma escada. Analisar e identificar qual a trigonometria envolvida na construção da escada;

2ª: Trigonometria do esquadro do chão de um cômodo: Realizar uma entrevista com um pedreiro indagando como ele tira os esquadros do chão de um cômodo. Analisar e identificar qual a trigonometria envolvida no estabelecimento do esquadro do chão.

3ª: Trigonometria do esquadro da parede de um cômodo: Realizar uma entrevista com um pedreiro perguntando como ele tira os esquadros das paredes de um cômodo e analisar qual a trigonometria envolvida nesse processo;

Exemplo 5.5. A sombra de um prédio forma com o chão um ângulo de 30° . Sabendo que a sombra mede 85 metros, determine a altura do prédio.

Solução:

A figura 8 representa a solução do problema.

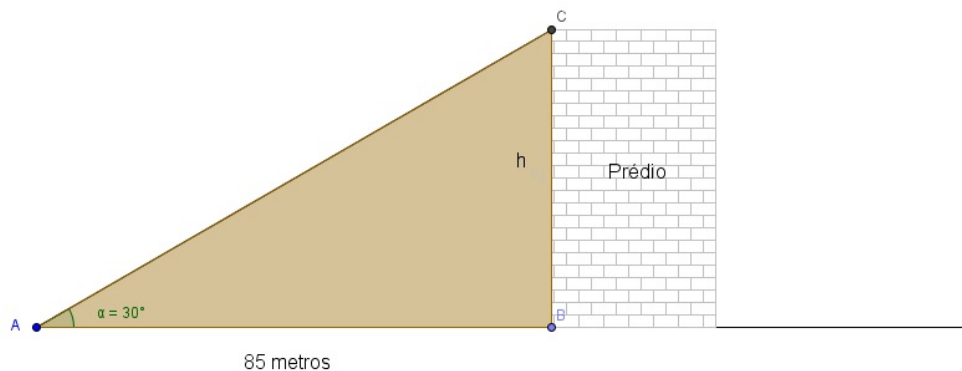


Figura 8: Altura de um prédio - Ilustração do Exemplo 5.5 - Engenharia Civil

Fonte: Autoria própria.

Seja o triângulo ABC , então a sombra descrita por $\overline{AB}$ indica o cateto adjacente ao ângulo α e a altura do prédio h descrita por $\overline{BC}$ indica o cateto oposto ao ângulo α . Neste caso se utiliza a relação trigonométrica da tangente, ou seja

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{85} \Rightarrow$$

$$h = \frac{85\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$h \cong 49,07 \text{ metros.}$$

Portanto, a altura do prédio é de aproximadamente 49,07 metros.

5.7 APLICAÇÕES NA TRANSMISSÃO DE ONDAS DE RÁDIO

A transmissão de rádios ocorre por meio de ondas de transmissão que podem ser representadas por funções trigonométricas. O trabalho de Silva e Frota (2010) também traz exemplos nesse campo. A representação cartesiana de uma onda se dá pela Senóide e pela Cossenóide. Assim como na Música, as aplicações envolvem o estudo de amplitude e frequência. Estes conceitos podem ser associados à frequência de um canal de rádio por exemplo.

4ª: Trigonometria na transmissão de rádio: Realizar uma entrevista com um profissional que trabalhe com transmissão de ondas de rádio (rádio AM e/ou FM). Analisar qual a trigonometria envolvida nessa transmissão;

5ª: Trigonometria na transmissão de Internet a rádio: Realizar uma entrevista com um profissional que trabalhe com transmissão de ondas de rádio (para internet) e analisar qual a trigonometria envolvida nessa transmissão. (p.5) (SILVA; FROTA, 2010)

5.8 APLICAÇÕES NA MEDICINA

Será ilustrado como a Trigonometria aplica-se a Medicina. O gráfico que representa a frequência cardíaca é formado por ondas e são geradas por funções trigonométricas. Outro exemplo de aplicação na Medicina é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos. Em sua publicação, Mello (2007) traz um gráfico representado na figura 9. O gráfico representa a variação da pressão pelo tempo.

O gráfico indicado abaixo representa uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos). Em geral, a pressão indicada no gráfico obedece um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Note por meio do gráfico que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundos, o que implica dizer que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por minuto. (MELLO, 2007)

O exemplo utilizado é apresentado na publicação de Mello (2007). Neste exemplo o autor parte da cossenóide trivial $f(t)=\cos t$, sendo t o tempo em segundos, para determinar a função descrita pelo gráfico, por meio de transformações geométricas.

Exemplo 5.6. *Com relação ao gráfico da figura 9. Sabendo que a função $f(t)=\cos t$ tem domínio real e imagem $[-1,1]$, as transformações do seu gráfico necessárias para que ele modele os dados do nosso problema são:*

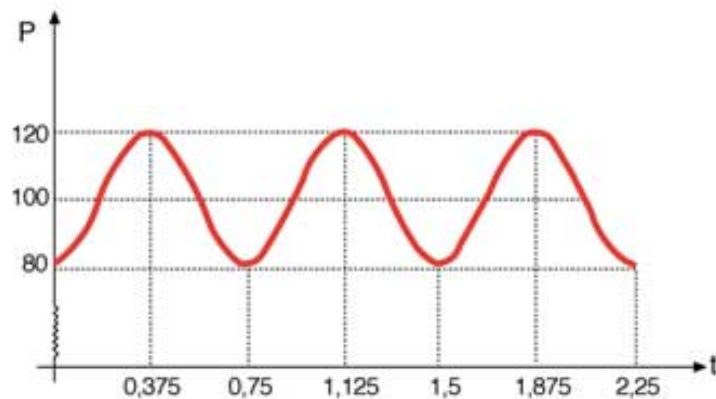


Figura 9: Variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos - Ilustração do Exemplo 5 - Medicina

Fonte: Página "articulando trigonometria"⁶

- 1) modificação do período de 200 para $800/3$, gerando a função $f(t) = \cos(800t/3)$;
- 2) reflexão de f pelo eixo t , gerando a função $f(t) = -\cos(800t/3)$;
- 3) modificação da imagem para $[-20, 20]$, gerando $f(t) = -20\cos(800t/3)$;
- 4) translação vertical do gráfico de 100 unidades, gerando a função final $f(t) = 100 - 20\cos(800t/3)$. Usando essa função, podemos encontrar, por exemplo, a pressão após 2 segundos calculando o valor de $f(2)$.

Solução:

A função obtida é

$$f(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{800t}{3}\right).$$

Fazendo $t = 2s$, tem-se

$$f(2) = 100 - 20\cos\left(800\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$f(2) \cong 110 \text{ mmHg}.$$

Uma observação importante é que o autor do exemplo 5.6 utiliza os ângulos medidos em uma unidade denominada "grados".

Uma unidade "grados" equivale à $\frac{9}{10}$ do grau.

⁶Disponível em http://articulandotrigonometria.blogspot.com.br/2010_10_01_archive.html > acesso em out. 2015

6 UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este capítulo traz uma sequência didática para o ensino da trigonometria, utilizando o software Geogebra para as construções. Propõe o ensino de trigonometria de forma gradual e aliado aos acontecimentos históricos.

O início do estudo da trigonometria na vida escolar acontece, em geral, no último ano do Ensino Fundamental. Esse estudo é realizado com a utilização do triângulo retângulo. Nessa etapa, a abordagem está relacionada com a Geometria. São utilizadas as razões trigonométricas no triângulo retângulo para se obter os conceitos trigonométricos. De acordo com Oliveira (2010, p.47), “Propõe-se aos alunos olhar de maneira diferenciada ao estudo das semelhanças de triângulos: a observação de que a razão entre dimensões de um triângulo retângulo comparada às razões correspondentes obtidas em um triângulo semelhante gera o mesmo valor”.

A partir da semelhança de triângulos, pode-se iniciar o estudo da trigonometria, uma vez que são percebidas proporcionalidades entre as medidas correspondentes destes triângulos, ou seja, que geram as mesmas razões. Ao calcular a razão entre os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes, obtém-se o mesmo valor, este valor chama-se razão de semelhança.

Essa mesma abordagem corresponde ao surgimento histórico da palavra trigonometria que tem origem grega e significa medidas do triângulo. O surgimento deste campo da matemática deu-se primeiramente por semelhança de triângulos. De acordo com Costa (2003, p.2) a Trigonometria apresenta seus primeiros indícios tanto no Egito quanto na Babilônia. O surgimento é dado pela razão entre números que representam as medidas de triângulos. Segundo a autora “No Egito, isto pode ser observado no Papiro Ahmes, conhecido como Papiro Rhind (ver figura 10), que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas [...]”. O estudo presente nesta época contribuiu para a construção de pirâmides e para o relógio de sol (Ver figura 11).

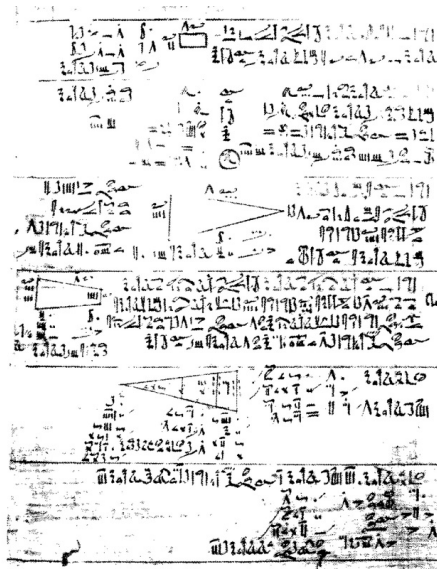


Figura 10: Papiro de Rhind

Fonte: Wikipédia⁷



Figura 11: Relógio de Sol Egípcio

Fonte: Ciência on-line⁸

6.1 CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

O Geogebra, que é uma ferramenta de grande auxílio no processo de ensino-aprendizagem da matemática, permite construções de geometria dinâmica, tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior. Para lidar com números irracionais o Geogebra utiliza arredondamento com até quinze casas decimais, será explorado este fato para trabalhar o conceito de aproximação numérica.

Um detalhamento sobre o Programa Geogebra foi realizado por Nascimento (2012, p.128) em seu trabalho:

⁷Disponível em < [http : //pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind](http://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind) > acesso em jan. 2015

⁸Disponível em < [http : //www.ciencia-online.net/2013/03/relogio-de-sol-do-antigo-egipto.html](http://www.ciencia-online.net/2013/03/relogio-de-sol-do-antigo-egipto.html) > acesso em jan. 2015

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para criar se ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês.

Aqui se faz necessário introduzir a nomenclatura dos lados do triângulo retângulo. A autora Oliveira (2010), destaca a importância dessa nomenclatura por facilitar a comunicação e a linguagem matemática.

Considere um triângulo retângulo com θ sendo um de seus ângulos agudos, chamamos de:

Hipotenusa: o lado que se opõe ao ângulo de 90 graus;

Cateto Adjacente: o lado que junto à hipotenusa forma o ângulo θ ;

Cateto oposto: lado oposto ao ângulo θ .

Dado um triângulo A , de lados a_1 , a_2 e a_3 e um triângulo B , de lados b_1 , b_2 e b_3 , diz-se que A e B são semelhantes se existe $r > 0$ tal que

$$b_1 = ra_1, \quad b_2 = ra_2, \quad \text{e} \quad b_3 = ra_3,$$

o número r é chamado razão de semelhança.

(Ver Figura 12).

A figura 13 é composta da representação de dois triângulos retângulos cujas medidas dos lados são números racionais. Nesta figura pode-se observar que os lados são igualmente proporcionais (Ver tabela 2). As razões entre seus lados correspondentes são iguais à $\frac{2}{3}$. Portanto os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura 13 são semelhantes de razão $\frac{2}{3}$.

A figura 14 foi construída no programa Geogebra, utilizando aproximações numéricas com duas casas decimais para descrever o comprimento dos segmentos que formam os triângulos. A intenção foi apresentar outro exemplo de dois triângulos retângulos semelhantes entre si, utilizou-se os valores numéricos fornecidos por essa figura, para realizar os cálculos de razões entre os lados $\overline{A_2B_2}$ e $\overline{A'_2B'_2}$ e entre os lados $\overline{C_2A_2}$ e $\overline{C'_2A'_2}$; encontra-se razão

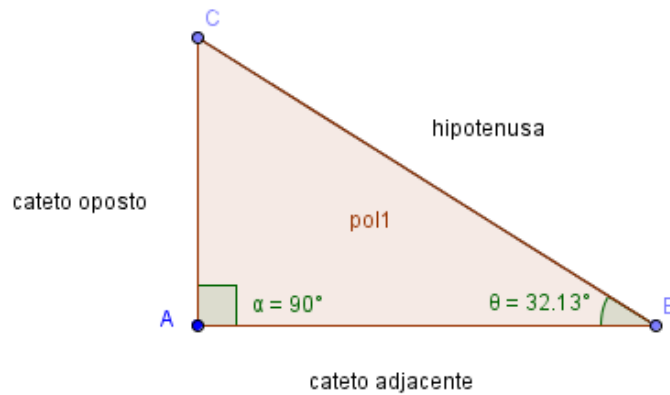


Figura 12: Nomes dos lados de um triângulo retângulo

Fonte: Autoria própria

Tabela 2: Razão entre os lados dos triângulos da figura 13

Razões entre os lados dos triângulos ABC e A'B'C' (Figura 13)	
$\frac{AB}{A'B'}$	$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$\frac{CA}{C'A'}$	$= \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$
$\frac{BC}{B'C'}$	$= \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$

Fonte: Autoria própria.

igual a 2. Porém ao efetuar-se o cálculo para o terceiro par de lados $\overline{B_2C_2}$ e $\overline{B'_2C'_2}$ (utilizando o arredondamento fornecido pelo Geogebra em uma calculadora científica disponível no link <http://www.calculadoraonline.com.br/cientifica>, programada para não utilizar o arredondamento nos resultados), a razão encontrada não foi exatamente dois, conforme o esperado. Em princípio, pode-se pensar que seja um erro do software ou ainda um erro de construção, entretanto o problema encontra-se no processo de arredondamento.

Para investigar este problema deve-se observar que programa Geogebra é incapaz de lidar com números irracionais e analisar a ferramenta de arredondamento do programa Geogebra (pode-se utilizar até 15 casas decimais). Na sequência deve-se realizar as construções de triângulos retângulos $A_iB_iC_i$, utilizando i casas decimais e mantendo fixos os lados $\overline{A_iB_i}$ e $\overline{C_iA_i}$ respectivamente de comprimento 4 e 6. Também deve-se realizar as construções de triângulos $A'_iB'_iC'_i$, mantendo fixos os lados $\overline{A'_iB'_i}$ e $\overline{C'_iA'_i}$, respectivamente de comprimentos 2 e 3. Para tais

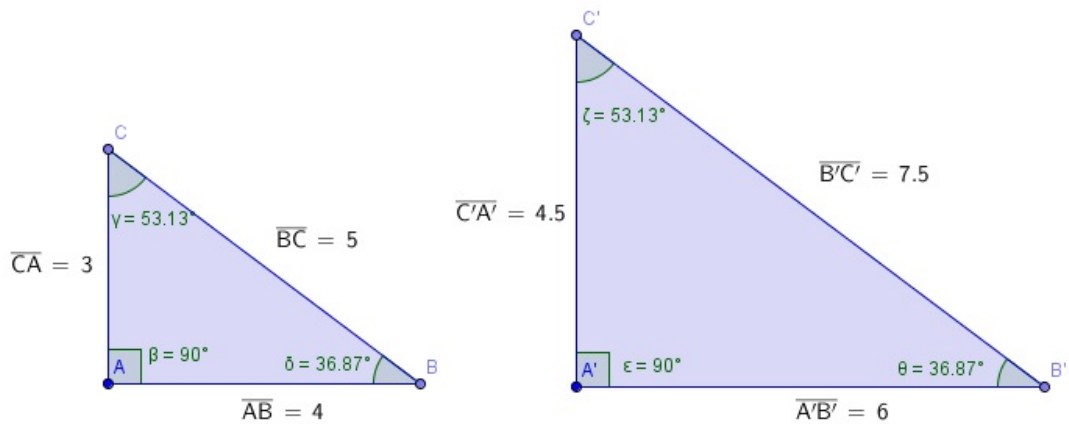


Figura 13: Semelhança de Triângulos 1

Fonte: Autoria própria

construções deve-se utilizar $i=3,4,5,10$ e 15 . O programa Geogebra é incapaz de lidar com os números irracionais que surgem neste exemplo. Para os cálculos entre os lados $\overline{B_iC_i}$ e $\overline{B'_iC'_i}$ descritos na tabela 3, utilizou-se os respectivos arredondamentos com i casas decimais fornecidos pelo Geogebra.

Tabela 3: Razões entre os lados dos triângulos da figura 14

Casas decimais	B_iC_i	$B'_iC'_i$	$\frac{B_iC_i}{B'_iC'_i}$
$i=2$	7,21	3,61	1,997229916897507
$i=3$	7,211	3,606	1,999722684414864
$i=4$	7,2111	3,6056	1,999972265364988
$i=5$	7,21110	3,60556	1,999991124833105
$i=10$	7,2111025509	3,6055512755	1,999999999972265
$i=15$	7,211102550927978	3,605551275463989	2
Representação com radical	$2\sqrt{13}$	$\sqrt{13}$	2

Fonte: Autoria própria.

Pelo teorema de Pitágoras (na figura 15, tem-se um exemplo da aplicação do Teorema de Pitágoras), fixando as medidas inteiras dos lados que formam um ângulo reto, obtém-se que a medida do terceiro lado de ambos os triângulos são números irracionais para $i=3,4,5,10$ e 15 . O lado $\overline{B_iC_i}$ mede $2\sqrt{13}$ e o lado $\overline{B'_iC'_i}$ mede $\sqrt{13}$. O que claramente explicita a razão adequada que está descrita na última linha da tabela 2. Assumindo que o Triângulo T_2 (triângulo

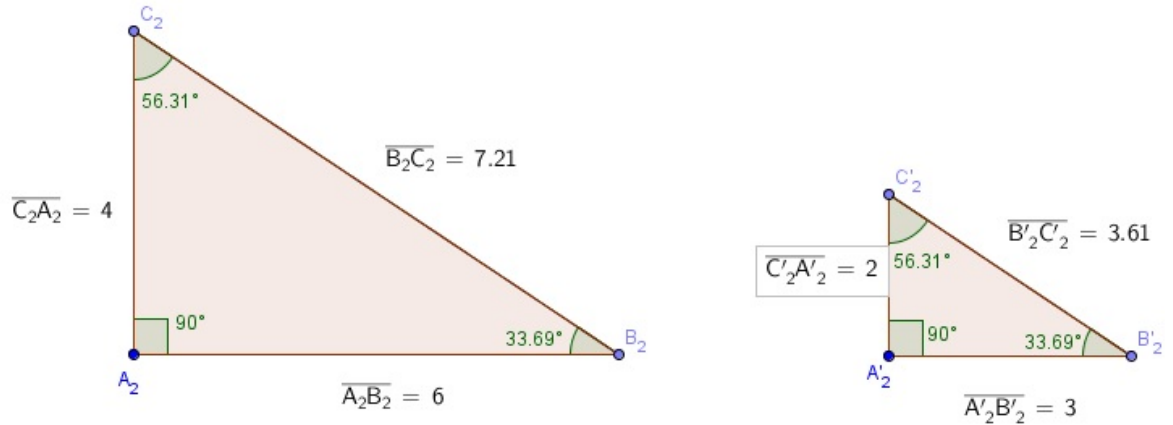


Figura 14: Semelhança de Triângulos 2

Fonte: Autoria própria

$A_2B_2C_2$, tem lado B_2C_2 de comprimento 7,21) ele não será retângulo, uma vez que não satisfaz o Teorema de Pitágoras, pois $4^2 + 6^2 \neq (7,21)^2$. Pelo mesmo argumento, os demais triângulos T'_2 (supondo $\overline{B'_2C'_2}=3,61$), T_3 (supondo $\overline{B_3C_3}=7,211$), T'_3 (supondo $\overline{B'_3C'_3}=3,606$), T_4 (supondo $\overline{B_4C_4}=7,2111$), T'_4 (supondo $\overline{B'_4C'_4}= 3,6056$), T_5 (supondo $\overline{B_5C_5}=7,21110$), T'_5 (supondo $\overline{B'_5C'_5}=3,60556$), T_{10} (supondo $\overline{B_{10}C_{10}}=7,2111025509$), T'_{10} (supondo $\overline{B'_{10}C'_{10}}=3,6055512755$), T_{15} (supondo $\overline{B_{15}C_{15}}=7,211102550927978$) e T'_{15} (supondo $\overline{B'_{15}C'_{15}}=3,605551275463989$) não são retângulos.

Abaixo tem-se os cálculos utilizando o Teorema de Pitágoras, para os pares de triângulos $A_2B_2C_2$ e $A'_2B'_2C'_2$

$$\overline{C_2A_2}^2 + \overline{A_2B_2}^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \neq 51,9841 = (7,21)^2 = \overline{B_2C_2}^2 \text{ e}$$

$$\overline{C'_2A'_2}^2 + \overline{A'_2B'_2}^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \neq 13,0321 = (3,61)^2 = \overline{B'_2C'_2}^2.$$

Utilizando $i=2$ percebe-se que na construção realizada pelo software Geogebra são as descrições numéricas que não representam triângulos que são retângulos. O erro E_2 cometido, ao assumir que o lado B_2C_2 tem a medida fornecida pelo Geogebra no cálculo de $\overline{B_2C_2}$ é $|52 - 51,9841| = 0,0159$. E o erro E'_2 cometido, ao assumir que o lado $B'_2C'_2$ tem a medida fornecida pelo Geogebra no cálculo de $\overline{B'_2C'_2}$ é $|13 - 13,0321| = 0,0321$.

Na tabela 4 são apresentados os cálculos da aplicação do teorema de Pitágoras para os

triângulos T_3, T_4, T_5, T_{10} e T_{15} .

Tabela 4: Teorema de Pitágoras para os triângulo $A_i B_i C_i$

i	$\overline{C_i A_i}^2 + \overline{A_i B_i}^2$	$\overline{B_i C_i}^2$	$E_3 = (\overline{C_i A_i}^2 + \overline{A_i B_i}^2) - \overline{B_i C_i}^2 $
3	52	$(7,211)^2 = 51,998521$	0,001479
4	52	$(7,2111)^2 = 51,99996321$	0,00003679
5	52	$(7,21110)^2 = 51,99996321$	0,00003679
10	52	$(7,2111025509)^2 = 51,9999999959648$	0,000000004036
15	52	$(7,211102550927978)^2 = 51,99999999999999$	0,00000000000001

Fonte: Autoria própria.

Na tabela 5 são apresentados os cálculos da aplicação do teorema de Pitágoras para os triângulos $T'_3, T'_4, T'_5, T'_{10}$ e T'_{15} .

Tabela 5: Teorema de Pitágoras para os triângulos $A'_i B'_i C'_i$

i	$\overline{C'_i A'_i}^2 + \overline{A'_i B'_i}^2$	$\overline{B'_i C'_i}^2$	$E'_3 = (\overline{C'_i A'_i}^2 + \overline{A'_i B'_i}^2) - \overline{B'_i C'_i}^2 $
3	13	$(3,606)^2 = 13,003236$	0,003236
4	13	$(3,6056)^2 = 13,00035136$	0,00035136
5	13	$(3,60556)^2 = 13,00006291$	0,00006291
10	13	$(3,6055512755)^2 = 13,000000000259677$	0,000000000259677
15	13	$(3,605551275463989)^2 = 12,999999999999998$	0,0000000000002

Fonte: Autoria própria.

Com estes cálculos é possível observar que os erros E_i e E'_i diminuem conforme aumenta-se i. Para indicar que um erro E_i diminui conforme aumentamos i, usa-se a letra grega ε como segue:

Dado $\varepsilon > 0, \exists i \in \mathbb{N}$ tal que $|E_i| < \varepsilon$.

Com esta ilustração conclui-se que não podemos confiar nos valores numéricos fornecidos pelo Geogebra para representar um segmento de comprimento irracional. É preciso salientar que o processo de construção geométrico do programa foi bem sucedido, o problema está na representação algébrica das medidas dos lados.

Note que utilizando quinze casas decimais, apesar dos valores se apresentarem de forma próxima do desejado, o Teorema de Pitágoras não é satisfeito, portanto esse par não é formado por triângulos retângulos, apesar de serem semelhantes com razão 2.

Por último são apresentados os cálculos utilizando o Teorema de Pitágoras, supondo $\overline{A_2 B_2}$ ortogonal a $\overline{A_2 C_2}$ (supondo $A_2 B_2 C_2$) e $\overline{A'_2 B'_2}$ ortogonal a $\overline{A'_2 C'_2}$ para determinar a medida exata de $B_2 C_2$ e $B'_2 C'_2$.

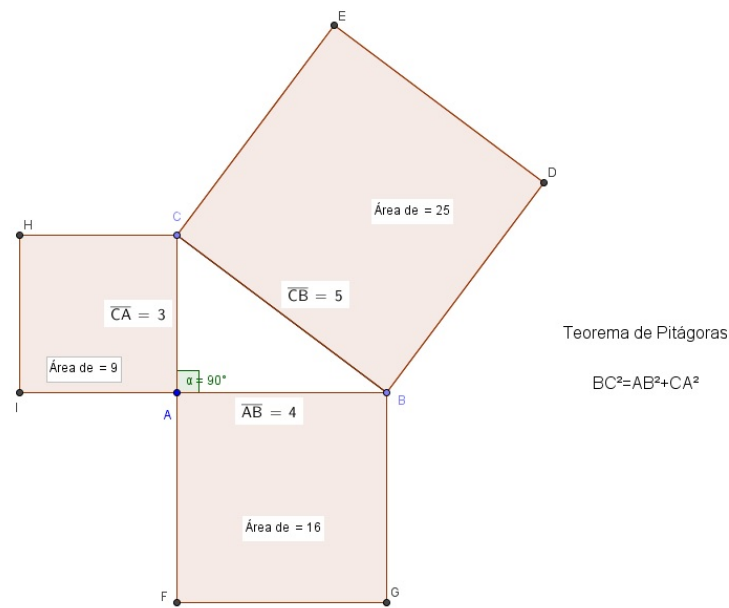


Figura 15: Teorema de Pitágoras

Fonte: Autoria própria

$$\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 = (2\sqrt{13})^2 \Rightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{13} \text{ e}$$

$$\overline{C'A'}^2 + \overline{A'B'}^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 = (\sqrt{13})^2 \Rightarrow \overline{B'C'} = \sqrt{13}.$$

Na tabela 6, está descrita a conclusão da aplicação do Teorema de Pitágoras para os pares de triângulos gerados a partir das medidas descritas na construção da figura 14, utilizando os arredondamentos $i=2,3,4,5,10$ e 15 casas decimais. Pelo Teorema de Pitágoras sabe-se que todos os triângulos retângulos satisfazem "a soma dos quadrados dos catetos é igual a soma do quadrado da hipotenusa", se não satisfazem, é por que não são retângulos.

Tabela 6: Aplicação do Teorema de Pitágoras e classificação dos pares de triângulos da figura 14

Casas decimais	Triângulos T_i e T'_i	Classificação de T_i e T'_i
$i=2$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e não-semelhantes
$i=3$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e não-semelhantes
$i=4$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e não-semelhantes
$i=5$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e não-semelhantes
$i=10$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e não-semelhantes
$i=15$	Não se aplica o Teorema	Não-retângulos e semelhantes
Representação com radical	Aplica-se o Teorema	Retângulos e semelhantes

Fonte: Autoria própria.

Utilizar um programa como o Geogebra torna viável a construção do conhecimento geométrico. Todavia, como ilustrado acima todo conhecimento científico deve ser bem tra-

balhado para que o aluno tenha clareza sobre os resultados obtidos, e a investigação torne-se significativa. Na ilustração apresentada fica claro que existem limitações para se fazer a transição da Geometria para a Álgebra utilizando o programa Geogebra. Com essas construções consegue-se investigar a importância de interpretar as representações algébricas feitas por aproximações numéricas.

Uma maneira de evitar este problema é propor ao aluno que determine o quadrado da razão quando trabalhar com a razão entre as hipotenusas. Note que sendo r a razão de semelhança entre dois triângulos, obtém-se

$$r = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}},$$

então elevando ao quadrado obtém-se

$$r^2 = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{C'A'}^2}.$$

Além disso, quando os catetos dos triângulos envolvidos são números inteiros, pelo Teorema de Pitágoras as respectivas hipotenusas ao quadrado também serão números inteiros.

Neste ponto, pela análise feita com triângulos semelhantes, é convencional que o trabalho seguirá com triângulos retângulos com hipotenusa de comprimento 1 para simplificar as razões trigonométricas que surgem.

Em um triângulo retângulo, podemos identificar as principais razões trigonométricas chamadas seno, cosseno e tangente e respectivamente definidas como:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}.$$

Ao invertermos as razões entre os lados do triângulo, identificamos as razões inversas cossecante (razão inversa à razão seno), secante (razão inversa à razão cosseno) e cotangente (razão inversa à razão tangente):

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{1}{\text{sen } \theta},$$

$$\text{sec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{1}{\text{cos } \theta},$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{1}{\text{tg } \theta}.$$

Para o triângulo $A'B'C'$ da figura 13, considerando θ o ângulo $\widehat{A'B'C'}$, tem-se que a hipotenusa vale 7,5, o cateto oposto vale 4,5 e o cateto adjacente vale 6. Usando a aproximação

numérica para o ângulo fornecido pelo Geogebra obtem-se $\theta \cong 36,87^\circ$. Desta forma as razões trigonométricas obtidas na tabela 4 fornecem valores aproximados para seno, cosseno, tangente do ângulo $36,87^\circ$.

Tabela 7: Razões Trigonômétricas do triângulo A'B'C' da Figura 13

$sen 36,87^\circ \cong \sin \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6$
$cos 36,87^\circ \cong \cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{7,5} = 0,8$
$tg 36,87^\circ \cong \tan \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{4,5}{6} = 0,75$

Fonte: Autoria própria.

A continuidade do estudo da Trigonometria é dada pela introdução do Círculo (ou Ciclo) Trigonométrico, em geral isso acontece no segundo ano do Ensino Médio. Brasil (2006, p.74) colocou as seguintes orientações

É preciso atenção à transição do seno e do co-seno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o co-seno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos.

O Círculo Trigonométrico (Figura 16) é representado sobre o plano cartesiano Oxy e tem raio igual a uma unidade de medida. Além disso, o seu centro coincide como a origem $(0,0)$ do plano cartesiano, dessa forma, ele fica dividido em quatro partes que chamamos de quadrantes. Assim, é possível estabelecer uma relação entre as razões trigonométricas e um ponto no círculo trigonométrico por quadrante. Esse ponto, se considerarmos a relação trigonométrica Seno, por exemplo, tem como coordenadas $(\theta, \sin(\theta))$. O ponto de partida tem como coordenadas $(0,1)$, e a mensuração do ângulo é realizada no sentido anti-horário. Para cada ponto P do primeiro quadrante no Círculo Trigonométrico, tem-se um ângulo $\theta(P)$ entre $\overline{OP}$ e $\overline{OX}$ corresponde a um triângulo retângulo com um ângulo interno θ e suas correspondentes razões trigonométricas. De forma similar, a cada ponto P do segundo quadrante associa-se um triângulo retângulo e suas correspondentes razões trigonométricas (Figura 18). Nessa etapa, o professor precisa explicar o valor negativo para o cosseno, devido à orientação do eixo Ox . Aqui, já não se trata apenas de uma distância (em módulo) e sim de uma medida orientada. Um procedimento similar deve ser realizado para os demais quadrantes. Assim pode-se estabelecer uma relação entre as razões trigonométricas e um ponto no Círculo Trigonométrico, já que é possível representar o triângulo retângulo dentro do círculo (Figura 17).

A Transição entre as razões trigonométricas do triângulo retângulo para as funções trigonométricas do Círculo Trigonométrico pode ser utilizada para auxiliar o ensino de Funções.

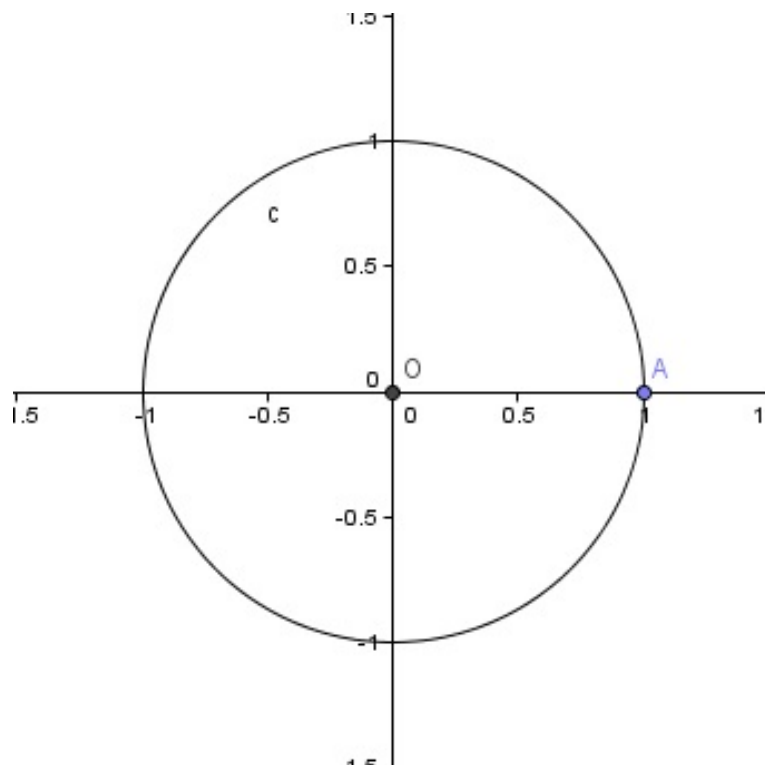


Figura 16: Círculo Trigonômico

Fonte: Autoria própria.

No documento Brasil (2006, p.72) elaborado pelo Ministério da Educação, são propostos os conteúdos e encaminhamentos metodológicos a serem seguidos.

O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial.

O encaminhamento metodológico proposto por Brasil (2006, p.73) valoriza a importância de se aprender as razões trigonométricas por meio do triângulo retângulo, para que se realize a transição para o Círculo Trigonômico e posteriormente para Funções Trigonômicas.

No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0° e 90° , deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90° e 180° .

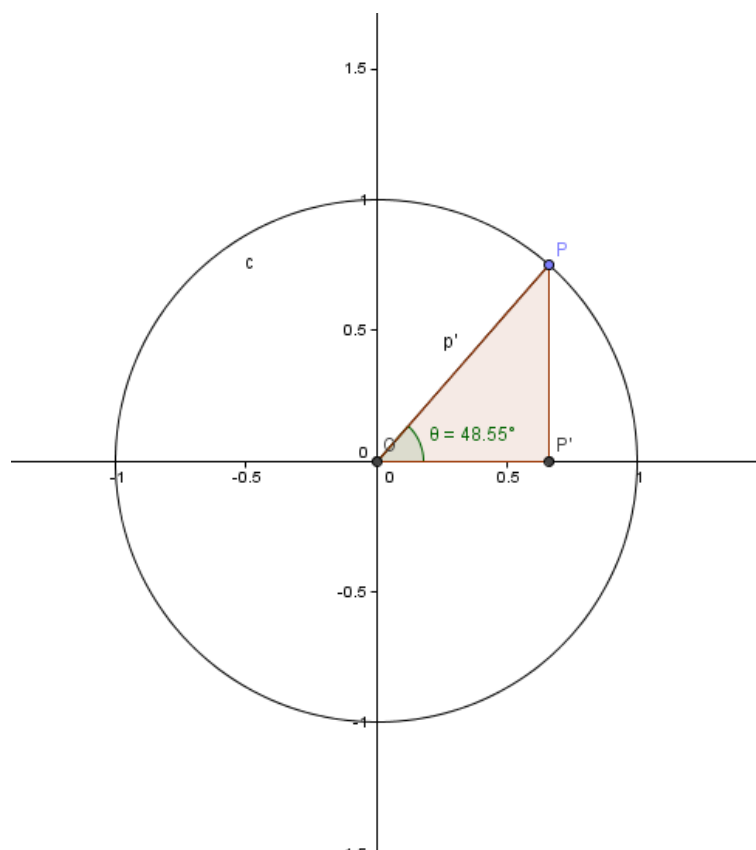


Figura 17: Círculo Trigonômétrico com triângulo retângulo qualquer

Fonte: Autoria própria.

O ensino da trigonometria deve ocorrer de forma gradual iniciando pelo triângulo retângulo, passando para o círculo trigonométrico até chegar no plano cartesiano, onde se estuda as funções trigonométricas. É necessário que o aluno perceba a ligação entre cada parte do aprendizado de trigonometria, para que se estabeleça uma relação entre os conhecimentos adquiridos.

As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180° . Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{seno}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e co-seno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano. (BRASIL, 2006, p.74)

Na figura 19 foi construído um triângulo de hipotenusa 1 (uma unidade de medida) semelhante ao triângulo $A'B'C'$ da figura 13, com um dos vértices no Círculo Trigonômétrico. Para determinar as medidas dos lados dos catetos desse novo triângulo, utiliza-se a razão pro-

porcional obtida pela hipotenusa. Utilizando os lados do triângulo A'B'C' (figura 13) tem-se:

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B''C''}} = \frac{4,5}{\text{cateto oposto}} = \frac{7,5}{1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A''C''}} \Rightarrow \text{cateto oposto} = 0,6$$

e

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{6}{\text{cateto adjacente}} = \frac{7,5}{1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A''C''}} \Rightarrow \text{cateto adjacente} = 0,8.$$

Com esta ilustração destaca-se que os valores obtidos para cateto adjacente e cateto oposto são respectivamente os valores de $\cos \theta$ e $\sin \theta$.

Quando fixa-se o raio (a hipotenusa) igual a um para cada ponto P no primeiro quadrante, tem-se que

cateto oposto = $\sin \theta$ e cateto adjacente = $\cos \theta$,

sendo θ o ângulo entre $\overline{OP}$ e $\overline{OX}$.

Ainda pode-se concluir que: "no Círculo Trigonométrico mede-se o seno verticalmente (paralelo ao eixo y) e o cosseno (paralelo ao eixo x)."

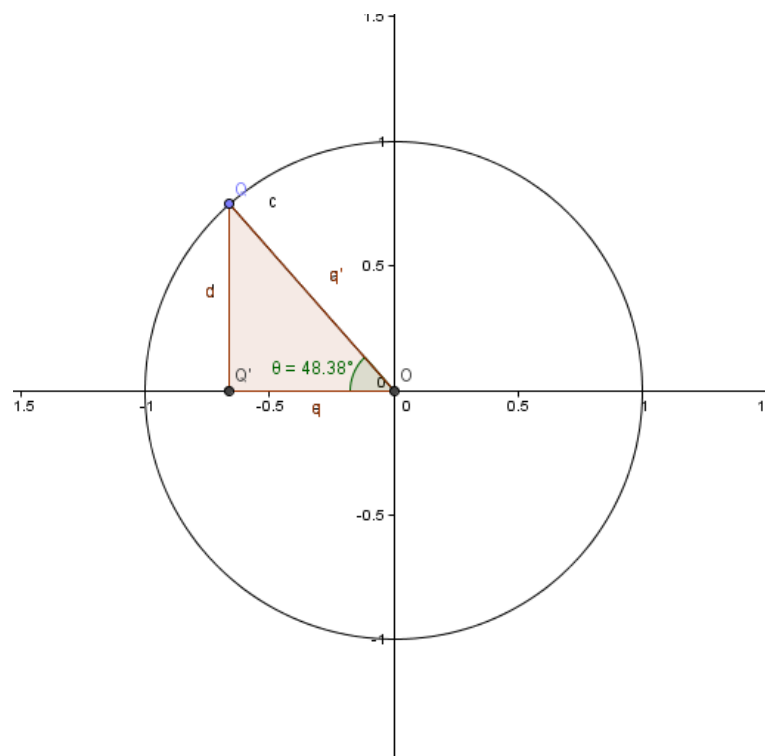


Figura 18: Círculo Trigonométrico com triângulo retângulo

Fonte: Autoria própria.

Também é preciso um estudo cuidadoso com respeito aos ângulos que são marcados por pontos sobre os eixos x e y. Pois nesse caso não é possível a representação triangular,

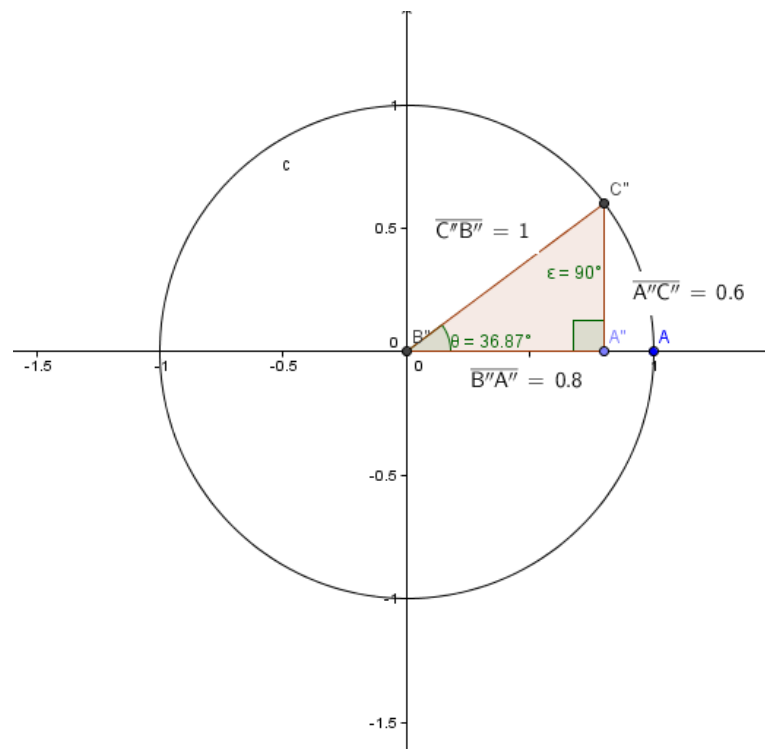


Figura 19: Triângulo A''B''C'' semelhante ao triângulo A'B'C' da figura 13 no Círculo Trigonométrico

Fonte: Autoria própria.

assim deve-se considerar apenas a medida direcionada sobre o eixo que tem comprimento 1. Para ilustrar este caso considere P sobre o Círculo Trigonométrico da figura 20 de forma que o segmento $\overline{OP}$ tenha um ângulo de 90 graus com o eixo $0x$. Com essa representação pode-se identificar o segmento vertical OP com o raio do Círculo. Utilizando a medida do raio, conclui-se que $\sin 90^\circ = 1$. Como a medida do segmento horizontal $\overline{OP'}$ igual a zero conclui-se que $\cos 90^\circ = 0$.

Note que à medida que um ponto P se desloca, no sentido antihorário, sobre a parte de Círculo Trigonométrico no primeiro quadrante obtém-se um ângulo $\theta(P)$ (medido em radianos) no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. A figura 21 ilustra uma forma geométrica de representar a relação entre $\theta(P) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e a razão $\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$. Para tal ilustração, escolhe-se três pontos correspondentes aos três ângulos distintos representados respectivamente na figura 21 pelo ângulo α_1 , ângulo α_2 e ângulo α_3 . Simbolicamente, escreve-se: $(\alpha_1, \sin \alpha_1)$, $(\alpha_2, \sin \alpha_2)$ e $(\alpha_3, \sin \alpha_3)$ estão na relação, ou ainda, $(\alpha_1, \sin \alpha_1)$, $(\alpha_2, \sin \alpha_2)$ e $(\alpha_3, \sin \alpha_3)$ são pontos do Gráfico de seno.

Destaca-se que neste trabalho são usadas duas forma de representação de ângulo: o grau e o radiano. Ambas as unidades estão relacionadas da seguinte forma:

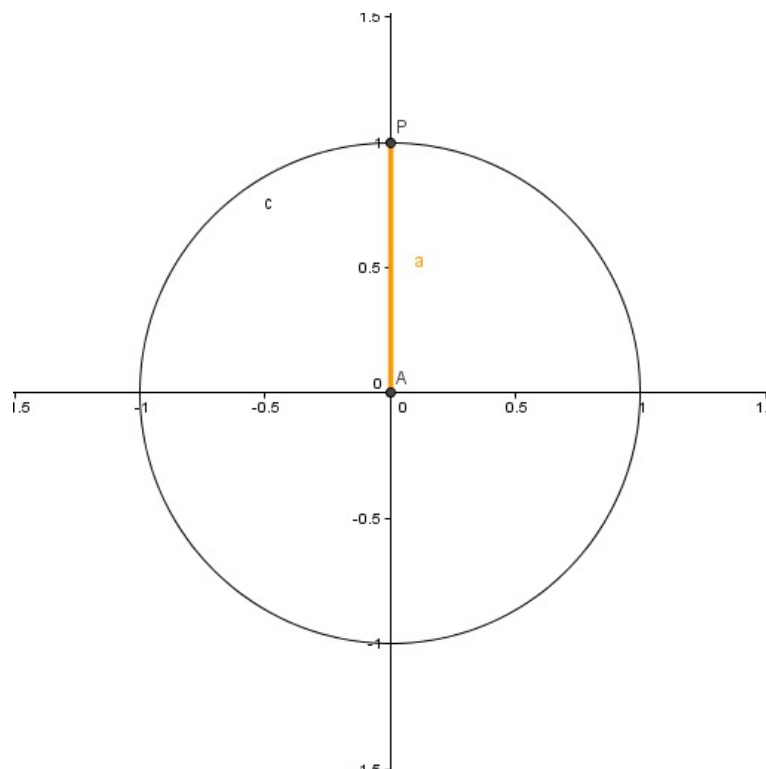


Figura 20: Ângulo de 90 graus no Círculo Trigonométrico

Fonte: Autoria própria.

$$2\pi \text{ radianos} = 360 \text{ graus.}$$

Na figura 21, os ângulos (medidos em graus) são representados por pontos no eixo horizontal Ox e o valor correspondente da razão seno por pontos no eixo vertical Oy, desta forma cada ponto B'_i ($i=1, 2$ e 3) tem coordenadas $(\alpha_i, \text{sen } \alpha_i)$. Cada razão representada pelo ponto B'_i na figura 21 está relacionada com o ponto B_i sobre o Círculo Trigonométrico.

Relações como a ilustrada na figura 21 são chamadas de funções trigonométricas. A variável da função, chamada de termo independente (ou de argumento da função) da função, é o ângulo e a relação trigonométrica é chamada de termo dependente da função (ou valor da função).

É importante perceber que a representação triangular se degenera conforme o ângulo se aproxima de 90 graus. Esta representação é feita na figura 20.

Agora explora-se a capacidade do programa Geogebra de relacionar todos os valores obtidos para a razão Seno no Círculo Trigonométrico com a sua representação no plano cartesiano. Pode-se visualizar dinamicamente este processo com o auxílio do software Geogebra, seguindo o protocolo de construção apresentado na figura 22. Na figura 22 pode-se visualizar

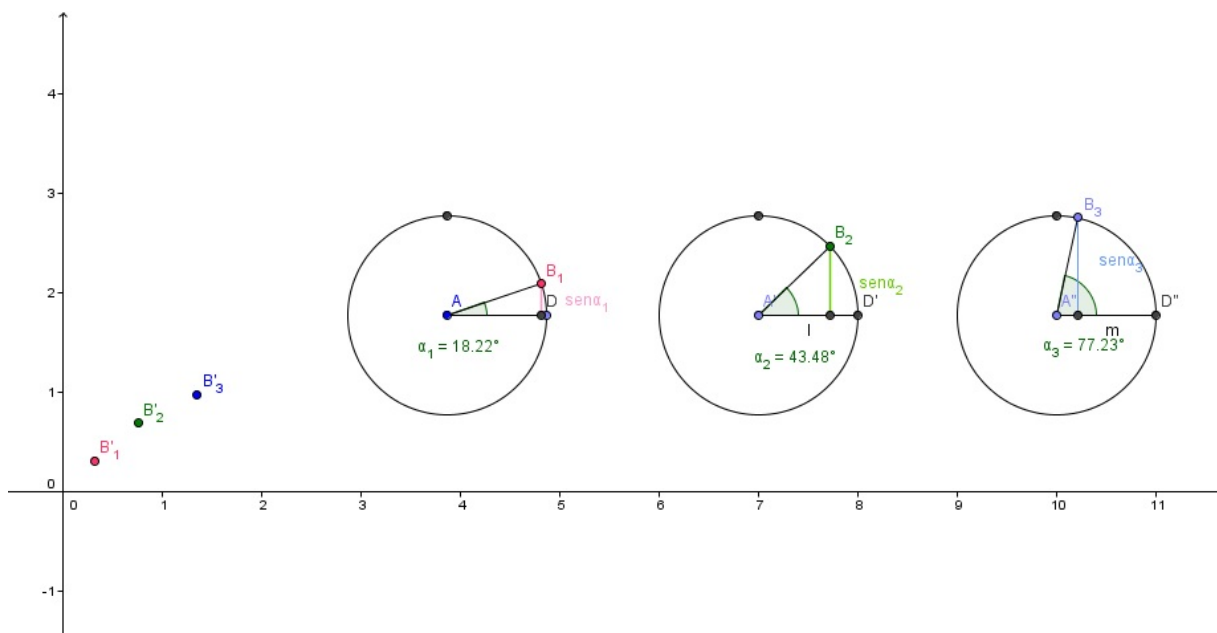


Figura 21: Transição da razão Seno do Círculo trigonométrico para a função Seno

Fonte: Autoria própria.

uma das etapas deste processo dinâmico. O "Rastro" produzido é chamado gráfico da função seno.

A figura 23 descreve tal relação considerando todos os pontos do intervalo $[0, 2\pi]$. Na qual consegue-se a representação gráfica da função seno. O programa Geogebra possui a ferramenta "Rastro", pela qual é possível ver dinamicamente a construção realizada. Essa figura foi construída associando um ponto B sobre o Círculo Trigonométrico a um ponto B' sobre o plano cartesiano. O ponto B' tem coordenadas cartesianas $(\alpha, \text{sen } \alpha)$. À medida que o ponto B desloca-se em torno do Círculo, B' desloca-se em torno de uma curva descrita na figura 23, que representa a função Seno. O programa Geogebra é capaz de produzir uma animação utilizando o ponto B. O protocolo de construção é gerado automaticamente pelo software Geogebra.

Nas figuras 24 e 25, tem-se a representação geométrica (gráfico) no plano cartesiano das funções Seno e Cosseno.

Na sequência, será representado a função tangente. A função tangente é definida por uma razão, cujo denominador é a função cosseno. Note que para ângulos como $0, \pi$ e 2π , a função tangente não pode ser definida.

Na figura 26, percebe-se que para valores próximos de ângulos θ_0 , para o qual a função tangente não está definida ela cresce (ou decresce) rapidamente. Em outras palavras, um pequeno erro $\delta > 0$ na escolha de valores próximos de θ_0 produz um grande erro $M > 0$ no

▼ Protocolo de Construção			
N.	Nome	Definição	Valor
1	Ponto A	Ponto de interseção de EixoX, EixoY	$A = (0, 0)$
2	Círculo c	Círculo com centro A e raio 1	$c: x^2 + y^2 = 1$
3	Ponto B	Ponto sobre c	$B = (0.24, 0.97)$
4	Ponto C_1	Ponto de interseção de c, EixoX	$C_1 = (1, 0)$
5	Ponto D_1	Ponto de interseção de c, EixoY	$D_1 = (0, 1)$
6	Ponto E	Ponto de interseção de c, EixoX	$E = (-1, 0)$
7	Ponto F	Ponto de interseção de c, EixoY	$F = (0, -1)$
8	Ângulo α	Ângulo entre C_1, A, B	$\alpha = 75.87^\circ$
9	Segmento a	Segmento $[A, B]$	$a = 1$
10	Reta b	Reta passando por B e perpendicular a EixoX	$b: x = 0.24$
11	Reta d	Reta passando por B e perpendicular a EixoY	$d: y = 0.97$
12	Ponto G	Ponto de interseção de b, EixoX	$G = (0.24, 0)$
13	Segmento sen α	Segmento $[B, G]$	$\text{sen } \alpha = 0.97$
14	Ponto B'	$(a, \text{sen}(\alpha))$	$B' = (1.32, 0.97)$

Figura 22: Protocolo da construção da figura 23

Fonte: Autoria própria.

valor da função. Supondo que a tangente está definida em $(a, \theta_0) \cup (\theta_0, b)$, este comportamento pode ser indicado simbolicamente da seguinte forma:

Dado $M > 0, \exists \delta > 0$ tal que ocorre uma das condições:

- (i) $x \in (a, \theta_0)$ e $(\theta_0 - x) < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (ou $f(x) < -M$).
- (ii) $x \in (\theta_0, b)$ e $(x - \theta_0) < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (ou $f(x) < -M$).

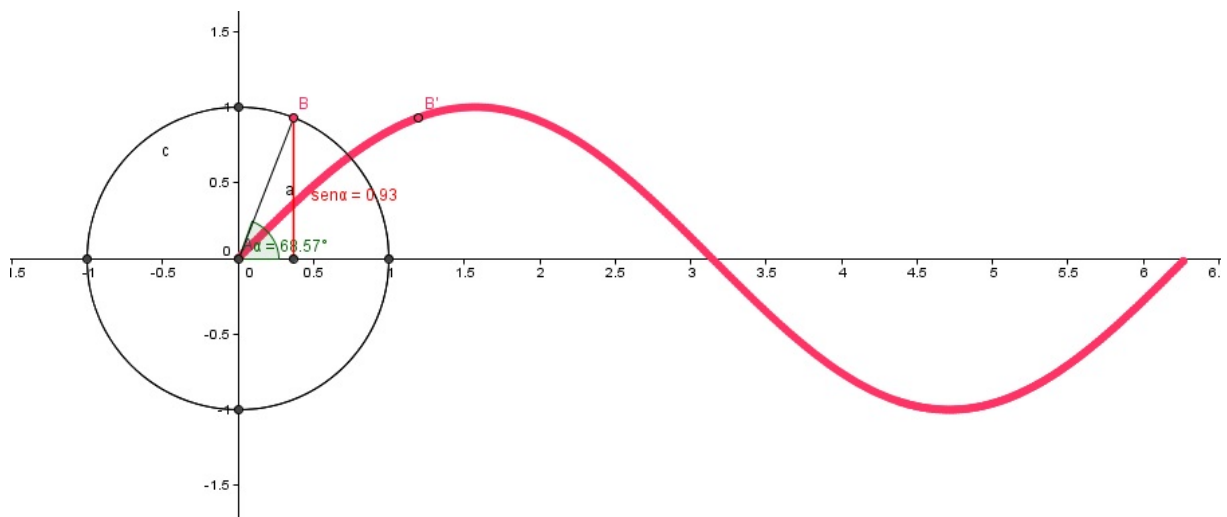


Figura 23: Função Seno no intervalo $[0, 2\pi]$

Fonte: Autoria própria.

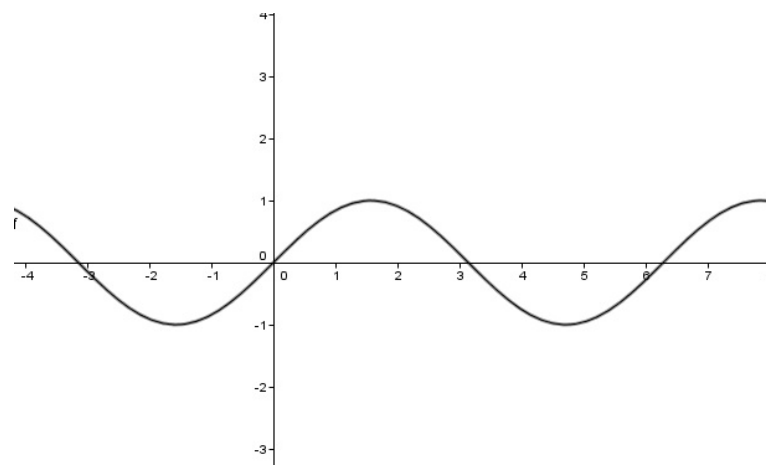


Figura 24: Função Seno $f(x)=\text{sen}(x)$

Fonte: Autoria própria.

Quando (i) ocorre usa-se a notação

$$\lim_{x \rightarrow \theta^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } \lim_{x \rightarrow \theta^-} f(x) = -\infty),$$

e quando (ii) ocorre usa-se a notação

$$\lim_{x \rightarrow \theta^+} f(x) = -\infty \text{ (ou } \lim_{x \rightarrow \theta^+} f(x) = +\infty).$$

Geometricamente identifica-se este comportamento como segue:

Ao traçar retas verticais passando pelos pontos $(\theta_0, 0)$ nota-se que o gráfico da função se aproxima da reta, mas não a intercepta.

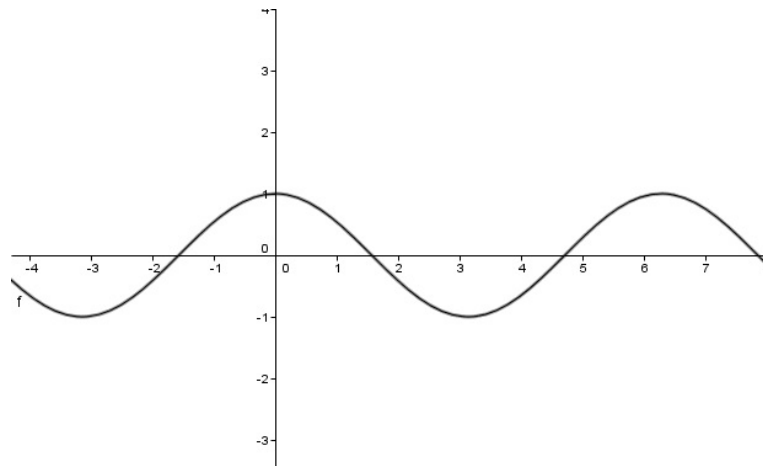


Figura 25: Função Cosseno $f(x)=\cos(x)$

Fonte: Autoria própria.

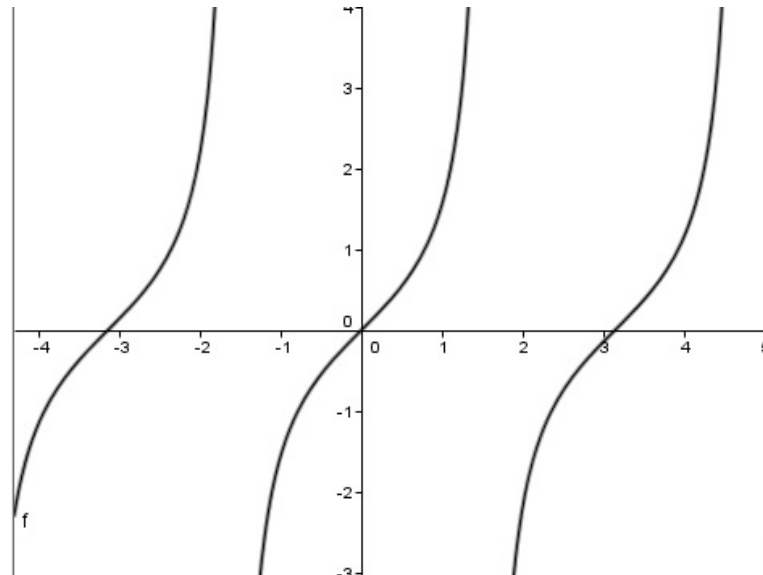


Figura 26: Função Tangente $f(x)=\text{tg}(x)$

Fonte: Autoria própria.

Para se chegar ao conceito de funções como se conhece hoje Leonahrd Euler (ver figura 15) forneceu contribuições significativas. De acordo com Souza et al. (2011, p.63) , o uso definitivo da letra π é creditado à ele.

Em geometria, álgebra, trigonometria e análise, encontra-se em toda a parte a simbologia criada por Euler, bem como terminologia e ideias. O uso de letras minúsculas a,b,c para os lados de um triângulo e das maiúsculas A,B,C para os ângulos opostos vem de Euler. Nas funções, ele usou $f(x)$, ou seja, função de x, introduziu as expressões $\text{sen}x$, $\text{tan}x$. (SOUZA et al., 2011)

Ainda de acordo com os autores:

No final do século XVIII, ele já havia apresentado todos os teoremas da trigonometria como corolários da teoria das funções complexas, embora para a agrimensura e navegação a trigonometria mantivesse sua utilidade. Assim, a mesma tornou-se um conjunto de relações entre números reais e complexos.

Euler contribuiu de forma significativa para conceituar funções como conceito central da análise.



Figura 27: Leonahrd Euler

Fonte: Wikipédia⁹

De acordo com Brasil (2004, p.100), a transição de razões trigonométricas para funções trigonométricas se deu por François Viète, no século XVI, e subsidiou os trabalhos de Euler, no século XVIII. No Ensino Médio essa transição é realizada quando se passa da Trigonometria no triângulo retângulo para o Círculo Trigonométrico.

Segundo Corrêa (2008, p.5), François Viète (ver figura 16) não era matemático por formação. Ele era formado em Direito e exercia sua profissão, além disso, estudava matemática nas horas vagas. Viète é considerado como pai da Álgebra Moderna.

Para concluir, gostaríamos de destacar mais uma vez que, mesmo que não tenha sido esse o seu propósito, a maior contribuição do trabalho de Viète foi a introdução do uso de letras para representar tanto grandezas conhecidas, como desconhecidas, tanto

⁹Disponível em < [http : // pt . wikipedia . org / wiki / Leonhard _ Euler](http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler) > acesso em jan. 2015

grandezas numéricas quanto geométricas, propiciando uma generalidade inédita. Isso permitiu que os problemas fossem enunciados de uma forma geral e também que pudessem ser resolvidos por um método geral. (CORRÊA, 2008, p. 77)

Tendo como inspiração a análise utilizada por Diofanto, para os números na Aritmética, Viète pretendia restaurar a análise dos antigos a fim de resolver todos os problemas. A sua arte analítica é um método universal para resolver problemas cuja principal ferramenta é a álgebra que, por sua vez, se constitui em um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas. Podemos afirmar que estas grandezas são abstratas ainda que, ao realizar os cálculos, Viète tenha considerado o aspecto dimensional, ou seja, tenha se inspirado na Geometria. (CORRÊA, 2008, p.85)



Figura 28: François Viète

Fonte: Wikipédia¹⁰

Lindegger (2000, p. 57-58 citado por NASCIMENTO, 2014, p. 26) destaca o Matemático Viète por ter acrescentado o tratamento analítico à Trigonometria. Ainda de acordo com o autor, o campo da Trigonometria evolui no estudo de relações funcionais, deixando de ser apenas estudo específico no triângulo retângulo. Tal evolução foi muito importante para o Cálculo e Análise Matemática. O autor conclui dizendo que a Trigonometria, nesse instante, passa a ser tratada como ciência.

A partir do século XVII, a introdução de novas notações algébricas por Viète, fez com que a trigonometria assumisse na primeira metade do século XVII, um moderno caráter analítico. Na sua obra “*Cânon Mathematicus*”, Francois Viète construiu tabelas

¹⁰Disponível em < http://pt.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te > acesso em fev. 2015

das seis funções trigonométricas com ângulos em aproximações de minutos. No lugar das frações sexagesimais ele usou as decimais e desenvolveu métodos para resolver problemas de triângulos planos e esféricos com as seis funções trigonométricas. (MIASHIRO; GALVÃO, 2013, p.3)

Nascimento (2014, p.27) traz em seu trabalho o momento em que a função trigonométrica passou a ser estudada. Nota-se em seu relato a importância da Trigonometria para outras áreas além da matemática.

As funções trigonométricas, a partir do século XVII, apresentam-se como maior objeto de estudo da Trigonometria, devido o “surgimento” da Geometria analítica e também, por possibilitar a descrição de fenômenos periódicos, oscilatório e vibratório, exercendo assim, grande importância para os cientistas. Desta forma, as funções trigonométricas apresentam-se como objeto de estudos devido os estudos das oscilações dos pêndulos dos relógios, e também para o aperfeiçoamento das técnicas de navegação e as vibrações de som dos instrumentos musicais.

Com esta última citação, cabe ressaltar, que mesmo passado tanto tempo após o nascimento da Trigonometria, a dificuldade encontrada na história reflete-se na atualidade como um grande problema enfrentado pelos alunos na abstração dos conteúdos matemáticos. Muito provavelmente, este é um dos principais motivos pelo qual o processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria e suas funções é tão falível.

7 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Neste capítulo será apresentada uma noção de continuidade para uma função f em um ponto x_0 observando como um pequeno erro $\delta > 0$ na escolha de um valor x para representar x_0 pode influenciar o erro $\varepsilon > 0$ cometido ao escolher $f(x)$ para representar $f(x_0)$. O conceito de continuidade será importante para propor o método de aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos, descrito no capítulo 10. Para representar as construções gráficas será utilizado o software Maxima.

7.1 SOFTWARE MAXIMA

O software Maxima será utilizado neste trabalho para a realização de cálculos e para a construção gráfica. O programa MAXIMA é um software livre, eficiente para realizar a representação gráfica em 2 e 3 dimensões. Realiza diversos tipos de cálculos envolvendo funções, possibilitando melhor ênfase em seu ensino. Em seu livro Santos (2009, p.11) faz uma introdução ao software.

O MAXIMA é derivado do sistema Macsyma, o lendário sistema de álgebra computacional desenvolvido entre os anos de 1968 e 1982 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) como parte do Projecto MAC. O MIT enviou uma cópia do código fonte do Macsyma para o Departamento de Energia em 1982, sendo que essa versão é agora conhecida como Macsyma DOE. Essa cópia foi mantida pelo Professor William F. Schelter da Universidade do Texas entre 1982 e 2001, ano do seu falecimento.

Em 1998, Schelter obteve permissão do Departamento de Energia para colocar disponível o código fonte do Macsyma DOE sob a Licença Pública GNU e em 2000 ele iniciou o projecto MAXIMA no SourceForge para manter e desenvolver o Macsyma DOE, agora chamado MAXIMA.

Um sistema de computação algébrica, como o MAXIMA, permite manipular e explorar expressões matemáticas de maneira simbólica e interactiva. O usuário digitaliza na janela do programa algumas fórmulas, comandos e o sistema avalia-os devolvendo uma resposta que pode ser manipulada posteriormente, caso seja necessário. É-nos permitido também obter soluções numéricas aproximadas e visualizar graficamente quer dados, quer funções matemáticas. O MAXIMA, como se trata de um software do tipo "freeware", com funcionalidades similares aos softwares comercializados, não estimula o uso de cópias não autorizadas.

O programa Maxima foi escolhido por permitir realizar construções gráficas e cálculos de forma eficaz.

7.2 INTRODUÇÃO À CONTINUIDADE

De acordo com Correia (1999, p.6), um dos pontos mais importantes na teoria euleriana de funções, está na noção de continuidade. Esta noção era essencialmente geométrica (p.6).

Assim, a continuidade era uma propriedade que caracterizava uma certa classe de curvas, as curvas representáveis por uma única expressão analítica, por uma única fórmula. A correspondência entre esta classe de curvas e o conjunto das funções era biunívoca, pelo que a noção de continuidade se tornava inseparável da noção de função.

Será utilizada a noção intuitiva para continuidade, que diz que uma função contínua é aquela que não possui "salto" em seu gráfico. Esta noção será ilustrada com dois exemplos representados nas figuras 29 e 30.

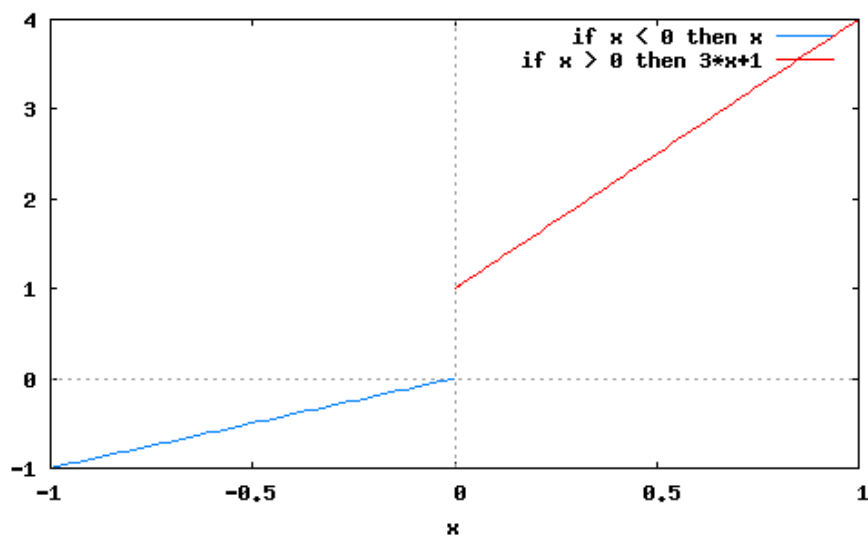


Figura 29: Gráfico de uma função g não contínua em x=0

Fonte: Autoria própria.

A figura 29 representa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por partes como

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0; \\ 3x + 1, & x > 0; \end{cases}$$

Na sequência são apresentados valores que g assume nos pontos $x_1^- = -0,2$, $x_2^- = -0,1$, $x_3^- = -0,05$ e $x_4^- = -0,005$:

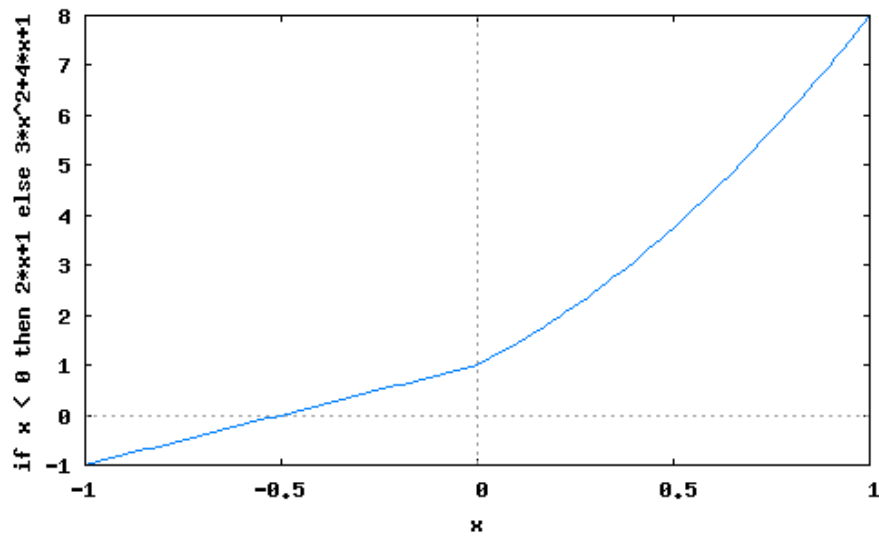


Figura 30: Gráfico de uma função h contínua em $x=0$

Fonte: Autoria própria.

$$g(-0,2) = -0,2;$$

$$g(-0,1) = -0,1;$$

$$g(-0,05) = -0,05;$$

$$g(-0,005) = -0,005.$$

À medida que x_1^- , x_2^- , x_3^- e x_4^- aproximam-se pela esquerda de zero, os valores de $g(x_1^-)$, $g(x_2^-)$, $g(x_3^-)$ e $g(x_4^-)$ também se aproximam de zero.

Agora serão apresentados os valores que a função g assume nos pontos $x_1^+ = 0,2$, $x_2^+ = 0,1$, $x_3^+ = 0,05$ e $x_4^+ = 0,005$:

$$g(0,2) = 3(0,2) + 1 = 1,6;$$

$$g(0,1) = 3(0,1) + 1 = 1,3;$$

$$g(0,05) = 3(0,05) + 1 = 1,15;$$

$$g(0,005) = 3(0,005) + 1 = 1,015.$$

À medida que os valores x_1^+ , x_2^+ , x_3^+ e x_4^+ aproximam-se pela direita de zero, os valores de $g(x_1^+)$, $g(x_2^+)$, $g(x_3^+)$ e $g(x_4^+)$ se aproximam de um.

Isto indica que um erro pequeno $\delta_k = |x_k^- - x_k^+|$ produz um erro $\varepsilon_k = |g(x_k^-) - g(x_k^+)| > 1$, ou seja, indica que g é descontínua na origem. O erro ε_k é uma medida aproximada para o "salto" produzido do gráfico de g .

A figura 30 representa o gráfico da função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por partes como

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0; \\ 4x^2 + 3x + 1, & x > 0; \end{cases}$$

Tem-se,

$$h(-0,2) = 2(-0,2) + 1 = 0,6;$$

$$h(-0,1) = 2(-0,1) + 1 = 0,8;$$

$$h(-0,05) = 2(-0,05) + 1 = 0,9;$$

$$h(-0,005) = 2(-0,005) + 1 = 0,99.$$

À medida que x_1^-, x_2^-, x_3^- e x_4^- aproximam-se pela esquerda de zero, $h(x_1^-)$, $h(x_2^-)$, $h(x_3^-)$ e $h(x_4^-)$ se aproximam de um.

Tem-se também que,

$$h(0,2) = 4(0,2)^2 + 3(0,2) + 1 = 1,76;$$

$$h(0,1) = 4(0,1)^2 + 3(0,1) + 1 = 1,34;$$

$$h(0,05) = 4(0,05)^2 + 3(0,05) + 1 = 1,16;$$

$$h(0,005) = 4(0,005)^2 + 3(0,005) + 1 = 1,015025.$$

À medida que x_1^+, x_2^+, x_3^+ e x_4^+ pela direita de zero, $h(x_1^+)$, $h(x_2^+)$, $h(x_3^+)$ e $h(x_4^+)$ também se aproximam de um.

Isto indica que um erro pequeno $\delta_k = |x_1^- - x_1^+|$ produz um erro pequeno $\varepsilon_k = |h(x_1^-) - h(x_1^+)|$, ou seja, indica que h é contínua na origem.

Utilizando essa noção de continuidade pode-se verificar que as funções

$$\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{sen}(x)$$

e

$$\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{cos}(x)$$

são contínuas.

Também pode-se verificar, utilizando (i) e (ii) da página 47, que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ a função

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por partes como

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x), & x < \pi \\ x_0, & x = \pi \\ \operatorname{tg}(x), & x > \pi \end{cases}$$

é descontínua em π .

8 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma propriedade importante das funções trigonométricas é a periodicidade. Neste capítulo apresenta-se a definição de funções periódicas, bem como os principais exemplos deste tipo de função.

Uma função $f(x)$ é periódica se existe uma constante real $P \neq 0$ tal que $f(x + P) = f(x)$ para todo x pertencente ao domínio da função.

Tem-se também que o menor P que satisfaça a igualdade acima é chamado de período da função. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|P|$, portanto o software Geogebra se torna um importante aliado no reconhecimento desta propriedade.

A frequência de uma função periódica é dada por

$$F = \frac{1}{P}.$$

A frequência determina a quantidade de repetições em cada intervalo unitário de x . A unidade de medida da frequência é o Hertz.

8.1 EXEMPLOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

Para mostrar que as funções trigonométricas são periódicas, se faz uso de duas identidades, $\sin(a+b)$ e $\cos(a+b)$, as quais são demonstradas na sequência. A figura 31 foi construída com o auxílio do software Geogebra.

Considere o Círculo Trigonométrico de raio 1, descrito na figura 31. Tem-se que o arco AP corresponde ao ângulo a e o arco PQ corresponde ao ângulo b . Portanto o arco AQ corresponde ao ângulo $a+b$. Primeiramente pode-se encontrar uma expressão para $\cos(a + b)$. Como o raio é igual a 1, tem-se que:

$$\overline{OS} = \cos(a);$$

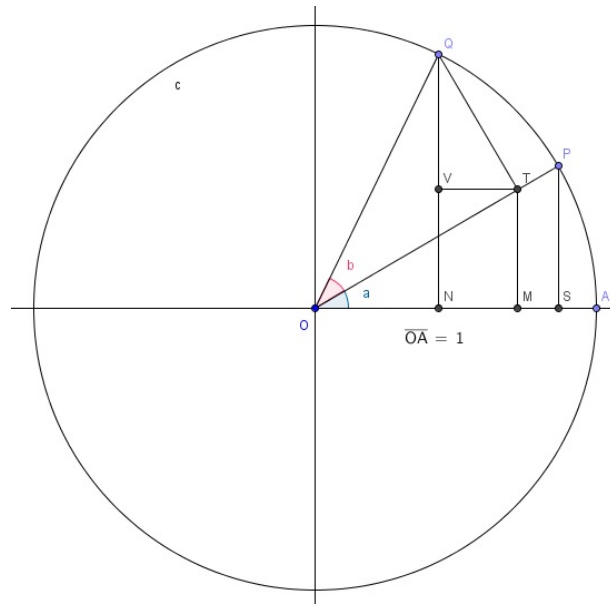


Figura 31: Círculo Trigonométrico de Raio 1 utilizado para a demonstração de $\cos(a+b)$

Fonte: Autoria própria.

$$\overline{OT} = \cos(b);$$

$$\overline{PS} = \sin(a);$$

$$\overline{QT} = \sin(b);$$

$$\overline{ON} = \cos(a+b).$$

Como os triângulos $\triangle OPS$ e $\triangle OTM$ são semelhantes (já que possuem um ângulo reto e outro igual a a), pode-se calcular a razão entre suas medidas:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\cos(a)} = \frac{\cos(b)}{1} \Rightarrow \overline{OM} = \cos(a) \cdot \cos(b).$$

Os triângulos $\triangle OPS$ e $\triangle QVT$ também são semelhantes (possuem um ângulo reto e outro igual a a), então também calcula-se a razão entre suas medidas:

$$\frac{\overline{VT}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{OP}} \Rightarrow \frac{\overline{VT}}{\sin(a)} = \frac{\sin(b)}{1} \Rightarrow \overline{VT} = \sin(a) \cdot \sin(b).$$

Como $\overline{ON} = \cos(a+b)$ e $\overline{ON} = \overline{OM} - \overline{VT}$ segue que

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

Agora, assumindo que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, que pode ser verificado com alguns exemplos numéricos, tais como:

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6});$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Determina-se, utilizando o que foi encontrado, $\operatorname{sen}(a+b)$:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right).$$

Pela prova anterior, e como $\cos(-x) = \cos(x)$ e como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ saí que:

$$\begin{aligned} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen}(-b) \\ &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)(-\operatorname{sen}(b)) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)(\operatorname{sen}(b)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b).$$

Nomeando da seguinte forma,

$$(1) \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b);$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Seguem os exemplos:

Exemplo 8.1. Para provar que a função seno é 2π -periódica basta mostrar que

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$$

. Para isto usa-se a identidade (1):

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\operatorname{sen}(2\pi).$$

Como $\cos(2\pi) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$ tem-se

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen}(x) \cdot 1 + \cos(x) \cdot 0 = \operatorname{sen}(x).$$

Exemplo 8.2. Para provar que a função cosseno é 2π -periódica basta mostrar que

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi).$$

Para isto usa-se a identidade (2):

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2\pi).$$

Da mesma forma, como $\cos(2\pi) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2\pi) = \cos(x) \cdot 1 - \operatorname{sen}(x) \cdot 0 = \cos(x).$$

Sabendo que a função seno e a função cosseno são periódicas verifica-se diretamente que a função tangente e as funções trigonométricas inversas também são periódicas.

Exemplo 8.3. A função $f(x) = tg(x)$ é periódica de período $P = 2\pi$. Se $\cos(x) \neq 0$,

$$tg(x + 2\pi) = \frac{\text{sen}(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = tg(x).$$

Exemplo 8.4. A função $f(x) = \text{cosec}(x)$ é 2π -periódica, pois

$$\text{cosec}(x + 2\pi) = \frac{1}{\text{sen}(x+2\pi)} = \frac{1}{\text{sen}(x)} = \text{cosec}(x), \text{ com } \text{sen}(x) \neq 0$$

Para as funções secante e cotangente a prova é análoga.

Exemplo 8.5. A função constante $f(x)=c$, onde c é um número real, é periódica para qualquer $P \neq 0$. Como $f(x+P)=c$, tem-se que $f(x)=f(x+P)$.

Exemplo 8.6. A figura 32 representa o gráfico da função piso dada por $\lfloor x \rfloor$. A função piso de um número real x é o resultado do arredondamento de x para baixo, isto é $f(x)$, é o inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$.

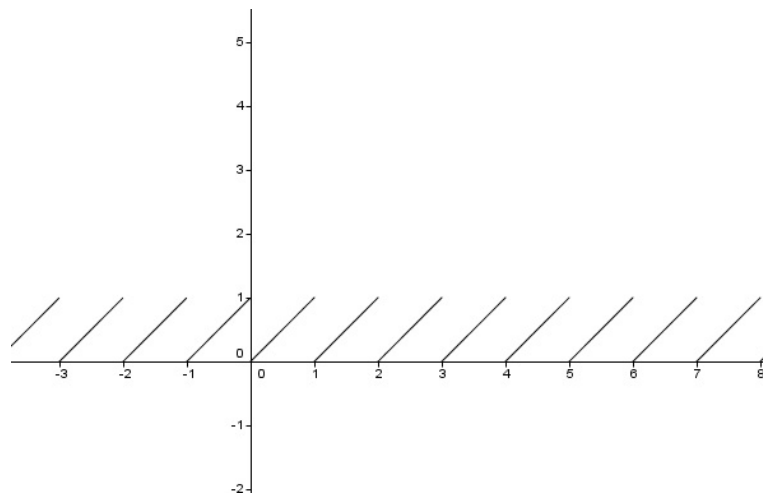


Figura 32: Exemplo do gráfico de uma função de período um

Fonte: Autoria própria

Observando o gráfico do exemplo 8.5 é possível identificar a repetição que ocorre a cada intervalo de comprimento um. O mesmo tipo de comportamento pode ser observado ao representar o gráfico das funções trigonométricas, nota-se que seu gráfico se repetem a cada período, nestes casos, o período é 2π . Este comportamento indica que as funções trigonométricas são periódicas. BOMFIM (2013) em sua dissertação diz

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas,

som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc. A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais

restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $\alpha \cos nx + b \sin nx$. Para que se tenha uma ideia da relevância deste fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

9 ÁREA SOB UMA CURVA

Neste capítulo será explorada uma técnica que fornece o valor para a área de regiões delimitadas por curvas que podem ser expressas através de funções. Isto será feito com o auxílio do software Maxima. Com a utilização do software é possível resolver problemas envolvendo o cálculo de "integral de uma função", sem formalizar os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, mas utilizando a representação geométrica. Assim pode-se utilizar o termo "integral" como a área de uma figura geométrica.

9.1 CÁLCULO DA ÁREA DE UMA REGIÃO

Ao definir-se uma função num intervalo fechado, determina-se graficamente uma região plana, como ilustrado na figura 33.

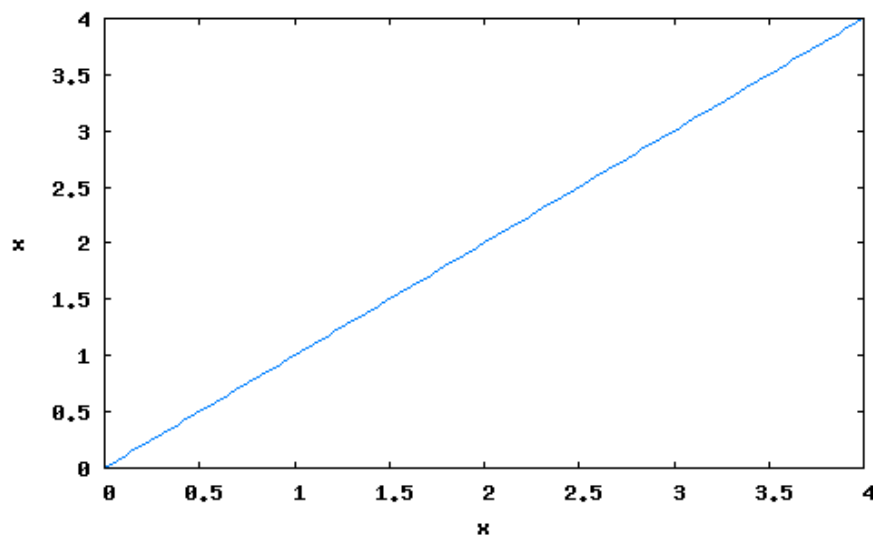


Figura 33: Gráfico da região limitada por $f(x) = x$ e o eixo $0x$, no intervalo $[0,4]$

Fonte: Autoria própria.

Na figura 33, está descrito o gráfico da função

$$f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x.$$

A região limitada pelo gráfico de f , o eixo Ox e as retas $x=0$ e $x=4$, é uma região triangular. Para calcular a área dessa região pode-se usar recursos da Geometria Elemental. Considerando a base b do triângulo sobre o eixo Ox ($b=4$), vértice na origem e altura h , sendo o lado paralelo ao eixo Oy ($h=f(4)$), tem-se que:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8 u.a.$$

Porém, o interesse está em regiões que não podem ser descritas por figuras geométricas tradicionais, cujos cálculos de áreas são simples. Neste trabalho foi escolhido como recurso o método computacional para o cálculo de áreas. Com este recurso é possível determinar a área de regiões limitadas por qualquer gráfico de função. Para se utilizar o recurso computacional, foi escolhido o software MAXIMA.

Como ilustração, na figura 34 está descrita uma parábola. Neste caso pode-se calcular a área da região entre a parábola e o eixo Ox de forma computacional.

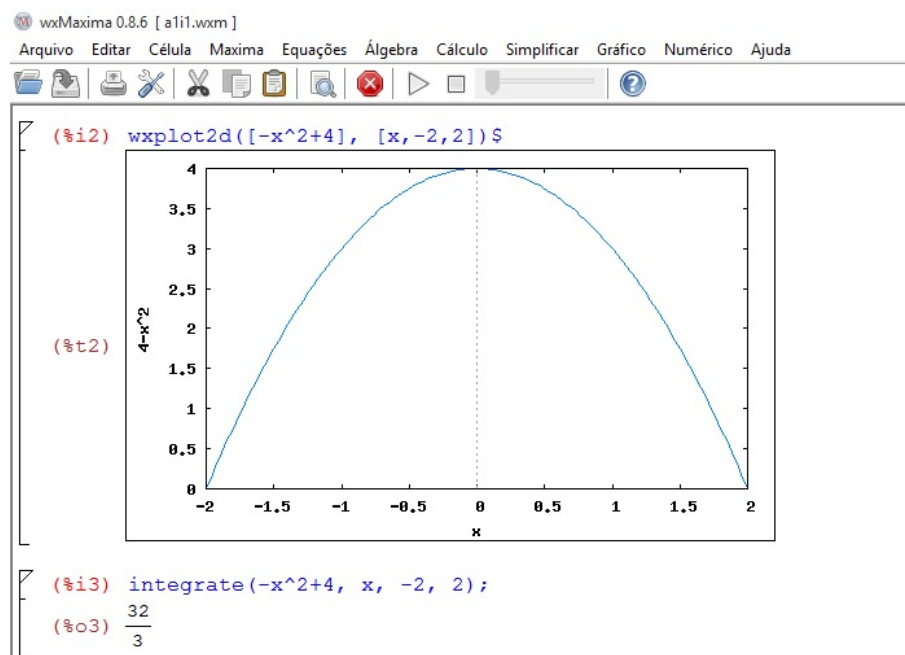


Figura 34: Gráfico e cálculo da área da região limitada por $f(x) = -x^2 + 4$ e o eixo Ox

Fonte: Autoria própria.

Ao realizar os cálculos de área para este trabalho, se $f(x) > 0$ para x em um intervalo fechado $[a,b]$, como por exemplo na figura 35, a área A_1 limitada pelo gráfico de f , pelo eixo Ox e pelas retas $x=a$ e $x=b$ será denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

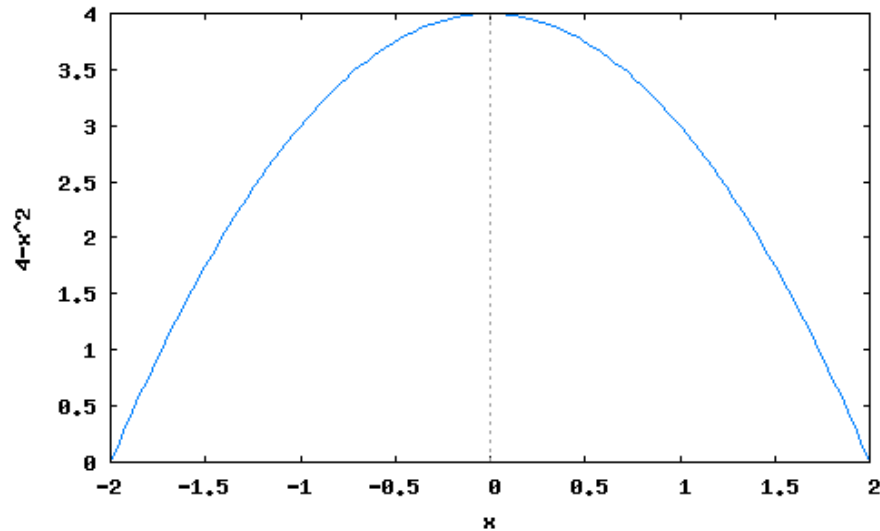


Figura 35: Área limitada por uma curva sendo $f(x) > 0$

Fonte: Autoria própria.

Por outro lado se $f(x) < 0$ para x em um intervalo fechado $[c,d]$, como por exemplo na figura 36, a área A_2 limitada pelo gráfico de f , pelo eixo Ox e pelas retas $x=c$ e $x=d$ será denotada por:

$$\int_d^c f(x)dx,$$

ou ainda por

$$-\int_c^d f(x)dx.$$

O uso do símbolo $\int_a^b f(x)dx$ se justifica pelas ferramentas computacionais necessárias para obter A_1 . Tal símbolo é lido como "integral de a até b de f de x em relação a x ". Será utilizada a notação :

$$\int_a^d f(x)dx$$

para indicar a soma $\int_a^b f(x)dx + \int_b^d f(x)dx$.

Com esta notação tem-se, assumindo que $c=b$, que pode-se escrever:

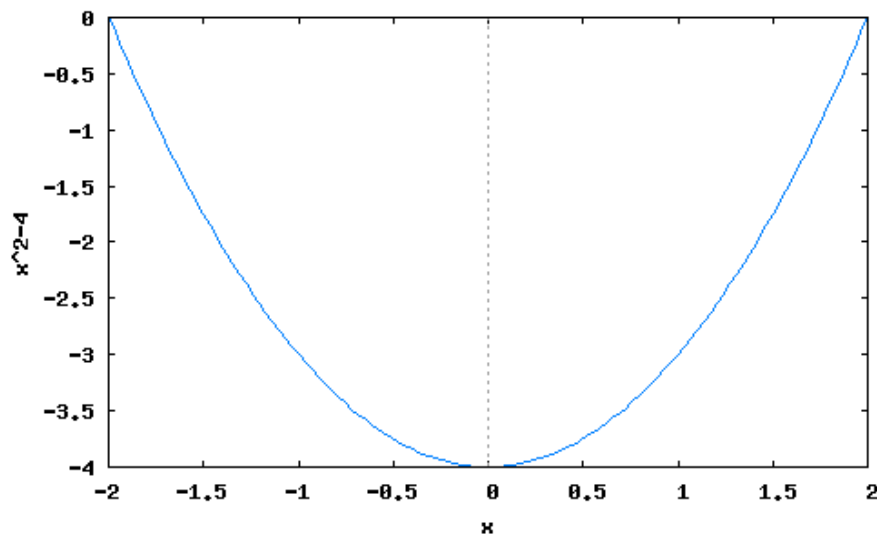


Figura 36: Área limitada por uma curva sendo $f(x) < 0$

Fonte: Autoria própria.

$$A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_d^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^d f(x)dx = \int_a^d f(x)dx.$$

Note ainda que se f e g são duas funções definidas em um intervalo $[a, b]$ vale

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Na sequência é feita a interpretação gráfica dessa igualdade com uma ilustração.

A figura 37 contém o gráfico de f no intervalo de $[0, 2]$ definida por $f(x) = 2x^2 + 1$ e também o cálculo da área da região limitada por f , pelo eixo Ox e pelas retas $x=0$ e $x=2$, tendo como resultado $\frac{22}{3}$ unidades de área. A figura 38 contém o gráfico de g no intervalo de $[0, 2]$ definida por $g(x) = 3x - 1$ e também o cálculo da área da região limitada por g , pelo eixo Ox e pelas retas $x=0$ e $x=2$, tendo como resultado 4 unidades de área. Note que na figura 39 está representada o gráfico da função soma $f + g$ no mesmo intervalo e também a área da região limitada pela função $f + g$, pelo eixo Ox e pelas retas $x=0$ e $x=2$, tendo como resultado $\frac{34}{3}$ unidades de área:

$$\int_0^2 (f + g)(x)dx = \frac{34}{3} = \frac{22}{3} + 4 = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx.$$

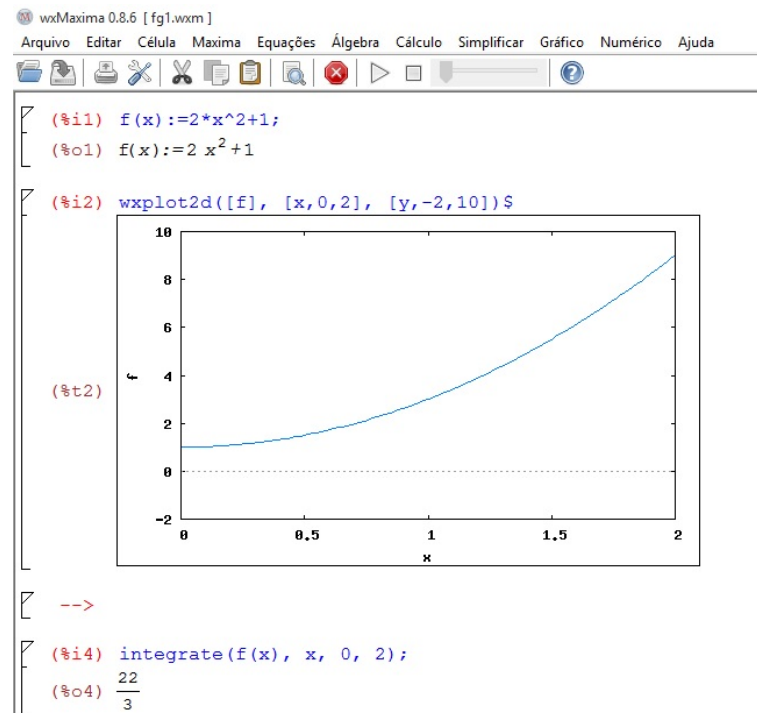


Figura 37: Gráfico e cálculo de área para a função $f(x) = 2x^2 + 1$ no intervalo $[0, 2]$

Fonte: Autoria própria.

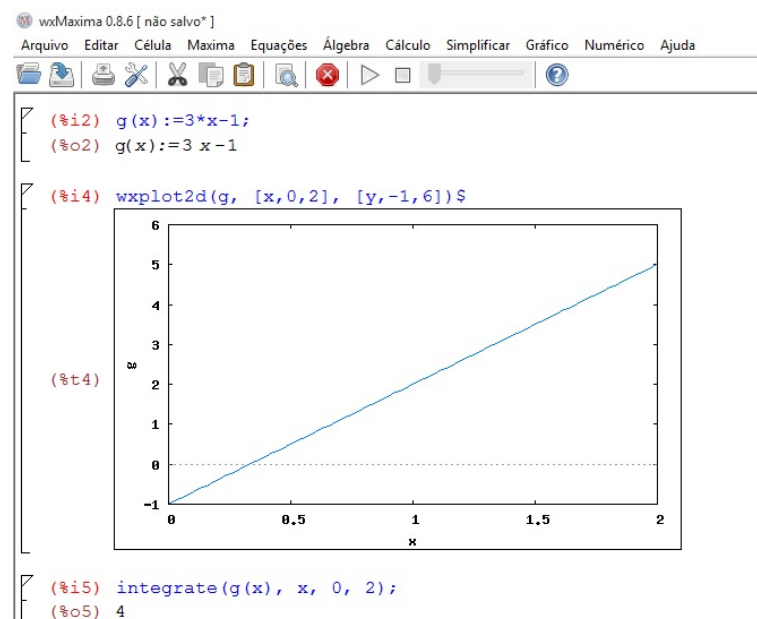


Figura 38: Gráfico e cálculo de área para a função $g(x) = 3x - 1$ no intervalo $[0, 2]$

Fonte: Autoria própria.

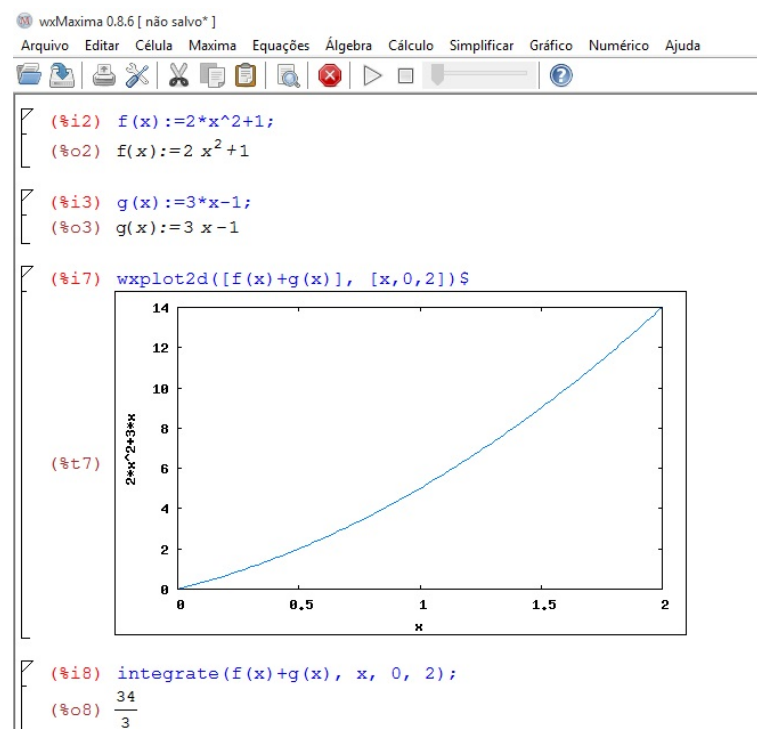


Figura 39: Gráfico e cálculo de área para a função soma $f(x) + g(x)$ no intervalo $[0, 2]$

Fonte: Autoria própria.

10 APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS POR POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Neste capítulo será apresentada técnicas que permitem descrever o comportamento de uma função contínua e periódica utilizando as funções seno e cosseno. Este capítulo apresenta um conteúdo de Nível Superior, que pode ser introduzido na Educação Básica, desde que não sejam formalizados os conteúdos à rigor científico, e sim utilizando as TIC para se estabelecer o conceito da operação de integração como área sob uma curva. Será utilizado o software Maxima para as construções gráficas e para os cálculo de área.

10.1 POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Uma função $P_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada polinômio trigonométrico de ordem k se existem números reais $a_0, \dots, a_k$ e $b_1, \dots, b_k$ tais que:

$$P_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Busca-se descrever como uma função periódica f contínua pode ser associada a um polinômio trigonométrico. Tal associação é conhecida como aproximação por polinômios trigonométricos.

Para um estudo mais aprofundado sugere-se ao leitor consultar BOYCE e DIPRIMA (2010).

10.1.1 COEFICIENTES DO POLINÔMIO TRIGONOMÉTRICO

Nesta seção assume-se que f é uma função contínua e 2π -periódica. Tem-se como objetivo, apresentar uma técnica para determinar os coeficientes $a_0, \dots, a_k$ e $b_1, \dots, b_k$ de modo que o polinômio trigonométrico P_k dado por

$$P_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

forneça um valor aproximado para f . Denota-se tal aproximação como

$$f(x) \cong P_k(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Note que, para cada inteiro m positivo, espera-se

$$f(x)\cos(mx) \cong \frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(mx)\cos(nx) + \sum_{n=1}^k (b_n \sin(nx)\cos(mx))$$

e

$$f(x)\sin(mx) \cong \frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n=1}^k (a_n \sin(mx)\cos(nx) + \sum_{n=1}^k (b_n \sin(nx)\sin(mx)).$$

Agora será explorada uma importante propriedade geométrica associada aos produtos entre funções trigonométricas que aparecem na relações acima. Isto será feito com o auxílio do software Maxima, os comandos utilizando podem ser visualizados na figura 40.

```

wxMaxima 0.8.6 [ ortogonal.wxm ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

[ (%i6) integrate(sin(n*x)*cos(m*x), x, -%pi, %pi);
  (%o6) 0 ]

[ (%i8) integrate(sin(n*x)*sin(m*x), x, -%pi, %pi);
  (%o8) 2*((n-m)sin(pi*n+pi*m)+(-n-m)sin(pi*n-pi*m))
         2*n^2-2*m^2 ]

[ (%i10) integrate(sin(n*x)*sin(n*x), x, -%pi, %pi);
  (%o10) sin(2*pi*n)-2*pi*n
         2*n ]

[ (%i9) integrate(cos(n*x)*cos(m*x), x, -%pi, %pi);
  (%o9) 2*((n-m)sin(pi*n+pi*m)+(n+m)sin(pi*n-pi*m))
         2*n^2-2*m^2 ]

[ (%i11) integrate(cos(n*x)*cos(n*x), x, -%pi, %pi);
  (%o11) sin(2*pi*n)+2*pi*n
         2*n ]

```

Figura 40: Cálculos para ortogonalidade das funções Seno e Cosseno

Fonte: Autoria própria.

De acordo com a notação utilizada, o comando em (%i6) presente na figura 40 é utilizado para calcular $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx$, seu valor é fornecido em (%o6). Desta forma, tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cos(mx)dx = 0. \quad (1)$$

O comando em (%i8) da figura 40 é utilizado para calcular $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx$, quando $n \neq m$. Assim (%o8) indica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx = -\frac{2((n-m)\text{sen}(\pi n + \pi m) + (-n-m)\text{sen}(\pi n - \pi m))}{2n^2 - 2m^2}. \quad (2)$$

Como n e m são inteiros positivos $\text{sen}(\pi(n+m)) = 0$ e $\text{sen}(\pi(n-m)) = 0$. Assim, por (2), tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx = 0, \quad n \neq m. \quad (3)$$

Usando o comando (%i10), como $\text{sen}(2\pi n) = 0$, o valor em (%o10) indica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(nx)dx = -\frac{\text{sen}(2\pi n) - 2\pi n}{2n} = -\frac{-2\pi n}{2n} = \pi, \quad m = n. \quad (4)$$

Das equações (3) e (4) concluí-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases} \quad (5)$$

Usando o comando (%i9), o valor em (%o9) indica que, para $n \neq m$, tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = -\frac{2((n-m)\text{sen}(\pi n + \pi m) + (n+m)\text{sen}(\pi n - \pi m))}{2n^2 - 2m^2} = 0. \quad (6)$$

Usando o comando (%i11), o valor em (%o11) indica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)dx = \frac{\text{sen}(2\pi n) + 2\pi n}{2n} = \frac{+2\pi n}{2n} = \pi, n = m. \quad (7)$$

Das equações (6) e (7) obtém-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases} \quad (8)$$

Multiplicando ambos os lados da relação

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

por $\cos(mx)$, sendo m um número inteiro positivo, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \cong \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^k a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^k b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx. \quad (10)$$

O cálculo de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx$, realizado pelo software Maxima está presente na figura 41. Como m é um inteiro positivo, o resultado desse termo é zero. Assim, usando (1) e (8) em (10) obtém-se

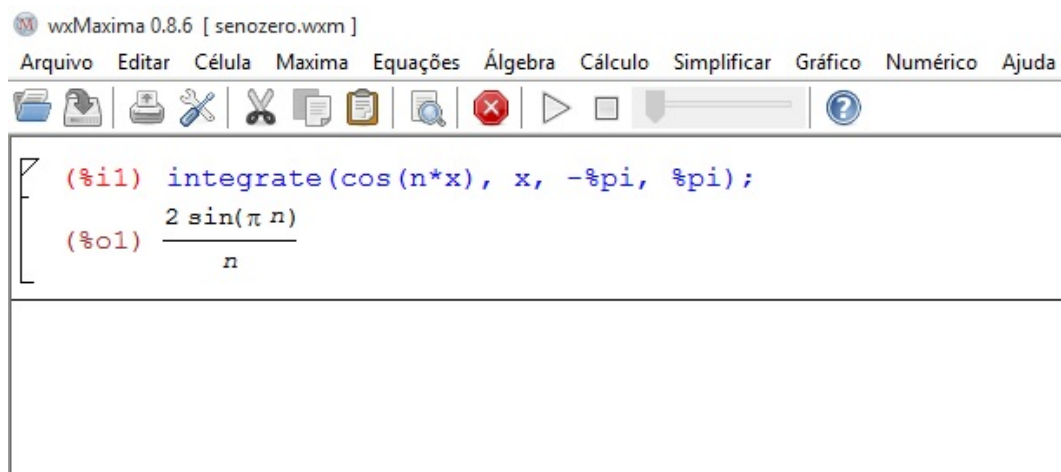


Figura 41: Cálculo 2 para ortogonalidade das funções Seno e Cosseno

Fonte: Autoria própria.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \cong a_m \pi,$$

ou ainda

$$a_m \cong \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx, \quad m \neq n.$$

Para determinar a_0 , usa-se $m=0$ em (10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0) dx \cong \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0) dx + \sum_{n=1}^k a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0) \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^k b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(0) dx. \quad (12)$$

Utilizando o software Maxima obtem-se os resultados descritos na figura 42.

```

wxMaxima 0.8.6 [ não salvo* ]
Arquivo Editar Célula Maxima Equações Álgebra Cálculo Simplificar Gráfico Numérico Ajuda

(%i1) integrate(cos(0), x, -\pi, \pi);
(%o1) 2 \pi

(%i4) integrate(cos(0)*cos(n*x), x, -\pi, \pi);
(%o4) \frac{2 \sin(n \pi)}{n}

(%i7) integrate(sin(n*x)*cos(0), x, -\pi, \pi);
(%o7) 0

```

Figura 42: Cálculos para obter a_0

Fonte: Autoria própria.

Como $\sin(n\pi) = 0$, concluí-se que, pela figura 42

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cong \frac{a_0}{2} 2\pi, \text{ ou ainda}$$

$$a_0 \cong \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Para determinar b_n , usa-se um procedimento semelhante. Multiplica-se ambos os lados da relação por $\sin(mx)$ e utiliza-se o Maxima para concluir que

$$b_n \cong \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Destas considerações, para realizar a aproximação de funções por polinômios trigonométricos num intervalo de $[-\pi, \pi]$, utiliza-se os coeficientes a_n e b_n dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (13)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Esses coeficientes são chamados Coeficientes de Fourier e determinam o polinômio trigonométrico P_k , de ordem k , para f .

10.2 EXEMPLOS

Exemplo 10.1. Seja a função f_1 definida por partes como $f_1(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \leq 0; \\ \pi - x, & x > 0; \end{cases}$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

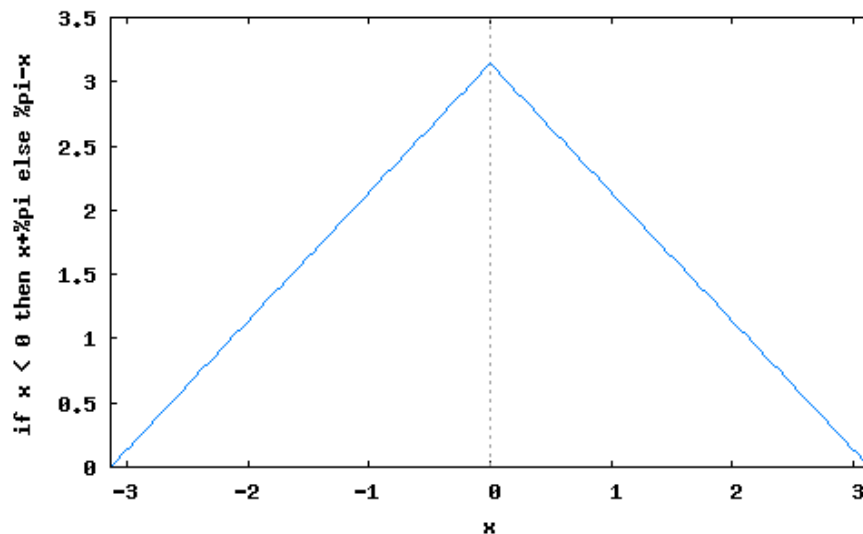


Figura 43: Gráfico da função f_1

Fonte: Autoria própria.

Note que $f_1(-\pi) = f_1(\pi)$.

Para determinar os polinômios trigonométricos para f_1 é preciso calcular os coeficientes a_0, a_n, b_n dados por (13), (14) e (15).

Note que o coeficiente $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx$, é a área da região limitada por $f_1(x)$, pelo eixo Ox e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$, a qual pode ser calculada usando resultados elementares da geometria, pois a região descrita é delimitada por dois triângulos retângulos T_1 e T_2 , de bases e alturas medindo π . Assim, tem-se que:

$$a_0 = \text{área}(t_1) + \text{área}(t_2) = 2\left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}\right) = 2\frac{\pi\pi}{2} = \pi^2.$$

$$\text{Conclui-se que } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi.$$

Note que, para $n \neq 0$, $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos(nx) dx$ é a área entre as retas $x = -\pi$, $x = \pi$, delimitada pelo gráfico da função f_n definida em $[-\pi, \pi]$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n,1}, & -\pi \leq x \leq 0; \\ f_{n,2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} = \begin{cases} (x + \pi) \cos(nx), & -\pi \leq x \leq 0; \\ (\pi - x) \cos(nx), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Desta forma tem-se que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f_{n,1} dx + \int_0^{\pi} f_{n,2} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right).$$

Na figura 44 são apresentados os cálculos realizados no Maxima para determinar a_n . Usando o comando (%i1) determina-se

$$\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx,$$

cujo valor é apresentado em (%o1) e em (%o2) de forma simplificada. Utilizando o comando (%i3) determina-se

$$\int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx,$$

cujo valor é fornecido em (%o4).

Interpretando a figura 44, os cálculos realizados no Maxima informam que para $n > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} + \left(-\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-2 \frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} \right) \\ &= \frac{-2}{\pi} \left(\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Para calcular

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right),$$

utilizou-se o Maxima conforme na figura 45.

```

(%i1) integrate((x+%pi)*cos(n*%pi*x/%pi), x, -%pi, 0);
(%o1)  $\frac{1}{n^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$ 

(%i2) ratsimp(%);
(%o2)  $\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2}$ 

(%i3) integrate((%pi-x)*cos(n*%pi*x/%pi), x, 0, %pi);
(%o3)  $\frac{1}{n^2} - \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$ 

(%i4) ratsimp(%);
(%o4)  $\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2}$ 

```

Figura 44: Cálculo para determinar a_n para o exemplo 10.1

Fonte: Autoria própria.

```

(%i2) integrate((x+%pi)*sin(%pi*n*x/%pi), x, -%pi, 0);
(%o2)  $\frac{\sin(\pi n)}{n^2} - \frac{\pi}{n}$ 

(%i3) ratsimp(%);
(%o3)  $\frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2}$ 

(%i4) integrate((%pi-x)*sin(%pi*n*x/%pi), x, 0, %pi);
(%o4)  $\frac{\pi}{n} - \frac{\sin(\pi n)}{n^2}$ 

(%i5) ratsimp(%);
(%o5)  $\frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2}$ 

```

Figura 45: Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.1

Fonte: Autoria própria.

Interpretando os comandos do MAXIMA obtem-se:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2} - \frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Desta forma obtem-se o polinômio trigonométrico P_k , de ordem k , para f_1 dado por

$$P_k(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{-2}{\pi} \left(\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} \right) \cos(nx) \right). \quad (16)$$

Substituindo $k=1$ em (16), como $\cos(\pi) = -1$ tem-se o seguinte polinômio,

$$P_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos(\pi) - 1}{1^2} \cos(x)$$

$\Rightarrow$

$$P_1(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi}.$$

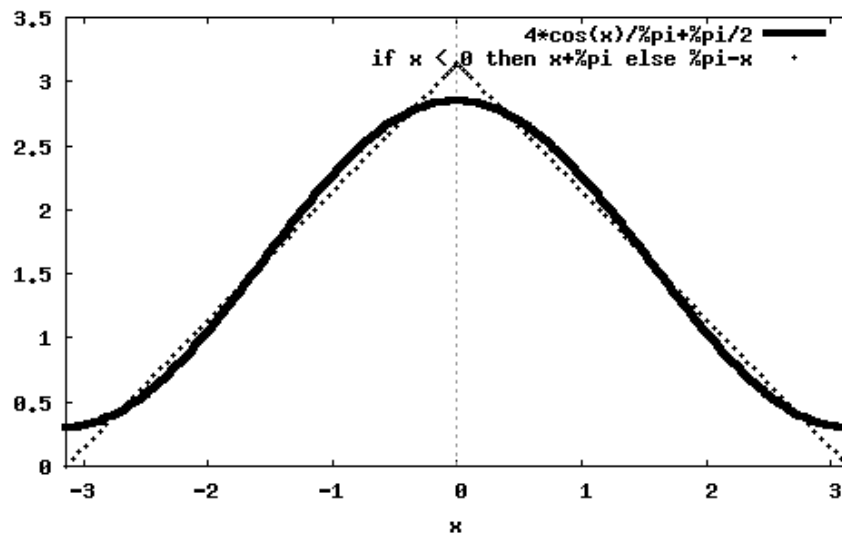


Figura 46: Aproximação de f_1 por P_1

Fonte: Autoria própria.

Note que se substituir k em (16) por tem-se que $(\cos(n\pi) - 1)$ se anula, portanto P_k e P_{k+1} são idênticos.

Substituindo $k=3$ em (16), tem-se o polinômio:

$$P_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} + \frac{4\cos(3x)}{9\pi}.$$

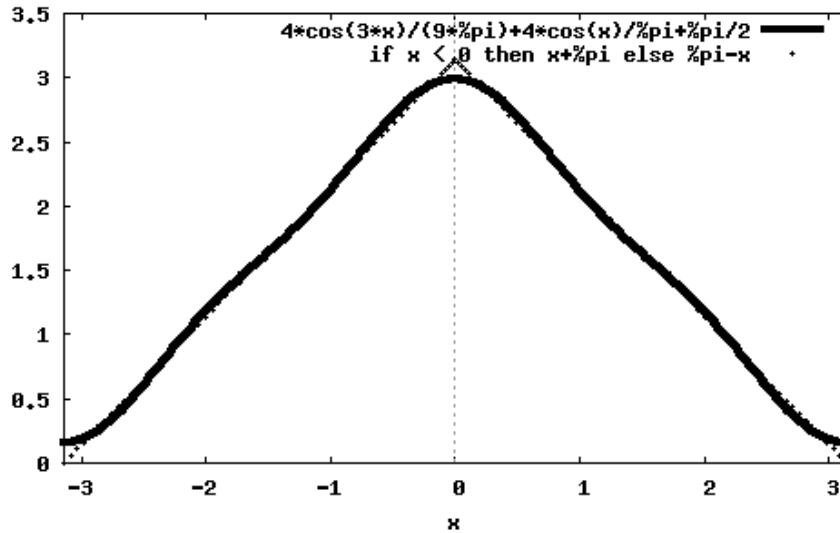


Figura 47: Aproximação de f_1 por $P_3(x)$

Fonte: Autoria própria.

Substituindo $k=5$ em (16), tem-se o polinômio:

$$P_5 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} + \frac{4\cos(3x)}{9\pi} + \frac{4\cos(5x)}{25\pi}.$$

Substituindo $k=7$ em (16), tem-se o polinômio:

$$P_7 = \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} + \frac{4\cos(3x)}{9\pi} + \frac{4\cos(5x)}{25\pi} + \frac{4\cos(7x)}{49\pi}.$$

As figuras 46, 47, 48 e 49, representam geometricamente as respectivas aproximações f_1 por P_1 , f_3 por P_3 , f_5 por P_5 e f_7 por P_7 , à medida que aumenta-se k , o gráfico de P_k aproxima-se do gráfico de f_1 .

Exemplo 10.2. Seja f_2 a função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por $f_2(x) = \pi^2 - x^2$.

Note que $f_2(-\pi) = f_2(\pi)$.

Serão determinados os polinômios trigonométricos para f_2 .

Para calcular

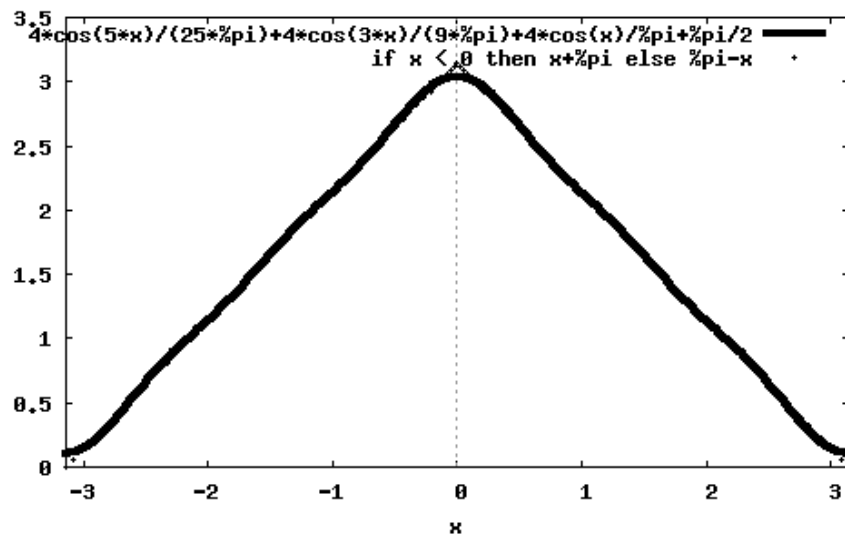


Figura 48: Aproximação de f_1 por P_5

Fonte: Autoria própria.

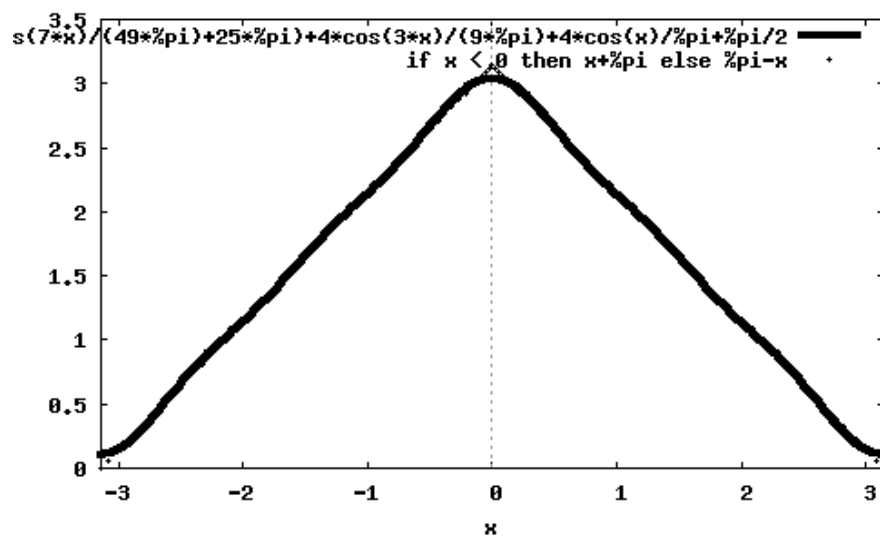


Figura 49: Aproximação de f_1 por P_7

Fonte: Autoria própria.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx.$$

utilizou-se o Maxima como descrito na figura 51 para obter

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2\pi^3 - 6\pi^2\pi}{3} \right) = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Agora será calculado a_n para $n \neq 0$ dado por:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

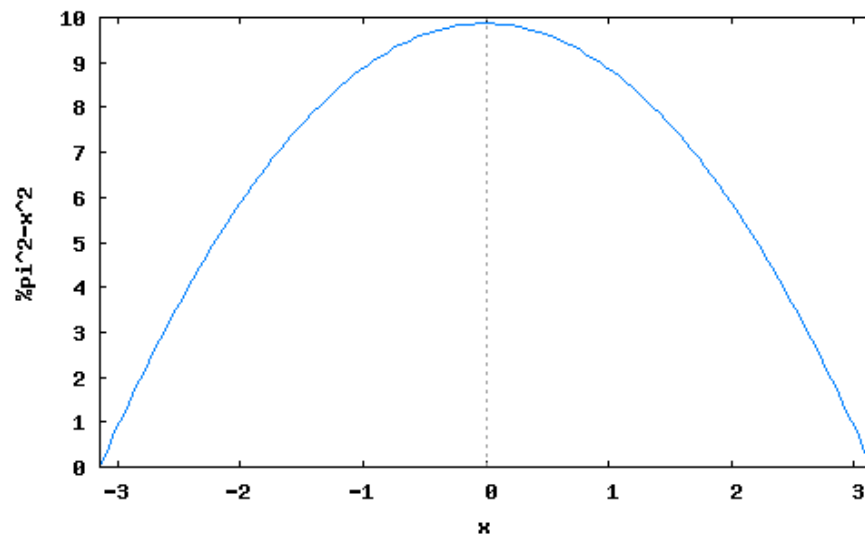


Figura 50: Gráfico da função f_2

Fonte: Autoria própria.

```

wxMaxima 0.8.6 [ ex2c1.wxm ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

(%i2) integrate(%pi^2-x^2, x, -\pi, \pi);
(%o2) 2*(pi^3-3*pi^2*pi)/3

(%i3) ratsimp(%);
(%o3) (2*pi^3-6*pi^2*pi)/3

```

Figura 51: Cálculo para determinar a_0 para o exemplo 10.2

Fonte: Autoria própria.

Utilizando o Maxima como na figura 52 obtém-se que

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(2n^2\pi^2 - 2n^2\pi^2 - 4) \operatorname{sen}(n\pi) + 4n\pi \cos(n\pi)}{n^3} \right) \\
 &= \frac{4 \operatorname{sen}(n\pi) - 4n\pi \cos(n\pi)}{\pi n^3}.
 \end{aligned}$$

Agora será calculado b_n :

```

wxMaxima 0.8.6 [ não salvo* ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

(%i1) integrate((%pi^2-x^2)*cos(n*%pi*x/%pi), x, -\pi, \pi);
(%o1) 
$$-\frac{2((n^2\pi^2 - \pi^2 n^2 - 2)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi))}{n^3}$$


(%i2) ratsimp(%);
(%o2) 
$$-\frac{(2n^2\pi^2 - 2\pi^2 n^2 - 4)\sin(n\pi) + 4n\pi\cos(n\pi)}{n^3}$$


```

Figura 52: Cálculo para determinar a_n para o exemplo 10.2

Fonte: Autoria própria.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \sin(nx) dx, n \in \mathbb{N}.$$

```

wxMaxima 0.8.6 [ ex2c3.wxm ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

(%i1) integrate((%pi^2-x^2)*sin(n*%pi*x/%pi), x, -\pi, \pi);
(%o1) 0

```

Figura 53: Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.2

Fonte: Autoria própria.

Utilizando o Maxima como descrito na figura 53 obtém-se que

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto o polinômio trigonométrico obtido é

$$P_k(x) = \frac{4\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{4\sin(n\pi) - 4n\pi(\cos(n\pi))}{\pi n^3} \cos(nx) + 0 \cdot \sin(nx) \right)$$

⇒

$$P_k(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{4\sin(n\pi) - 4k\pi(\cos(n\pi))}{\pi n^3} \cos(nx) \right). \quad (17)$$

Substituindo $k=1$ em (17), como $\sin(\pi) = 0$ e $\cos(\pi) = -1$ tem-se o seguinte polinômio:

$$P_1(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \left(\frac{4\sin(\pi) - 4\pi(\cos(\pi))}{\pi} \cos(x) \right)$$

$\Rightarrow$

$$P_1(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x).$$

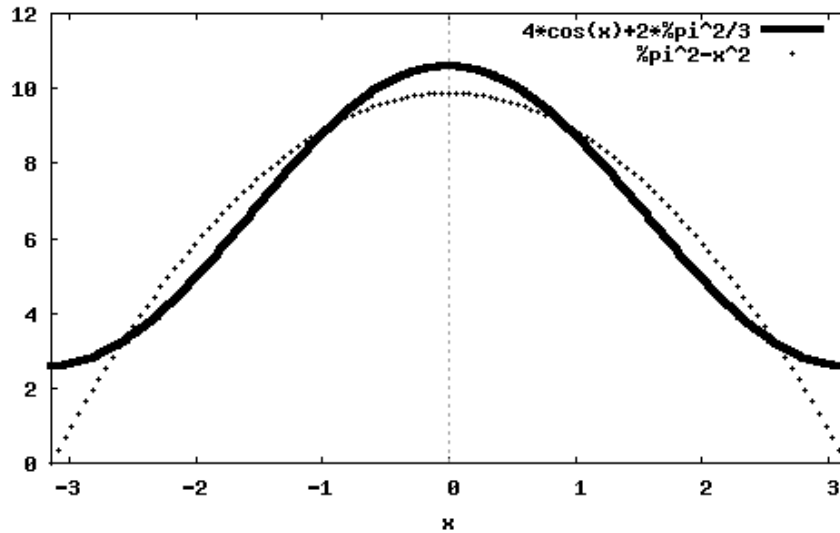


Figura 54: Aproximação de f_2 por P_1

Fonte: Autoria própria.

Substituindo $k=2$ em (17), obtem-se o polinômio:

$$P_2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x) - \cos(2x).$$

Substituindo $k=3$ em (17), obtem-se o polinômio:

$$P_3 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x) - \cos(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9}.$$

Substituindo $k=4$ em (17), obtem-se o polinômio:

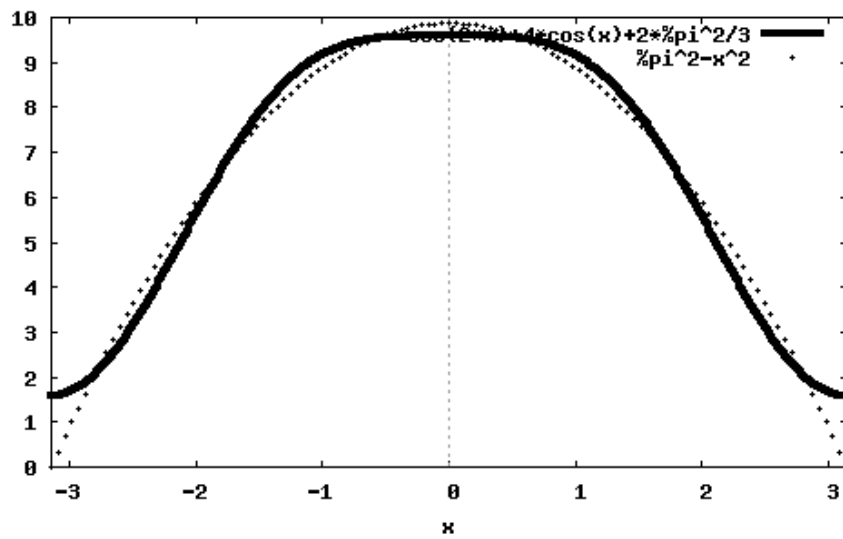


Figura 55: Aproximação de f_2 por P_2

Fonte: Autoria própria.

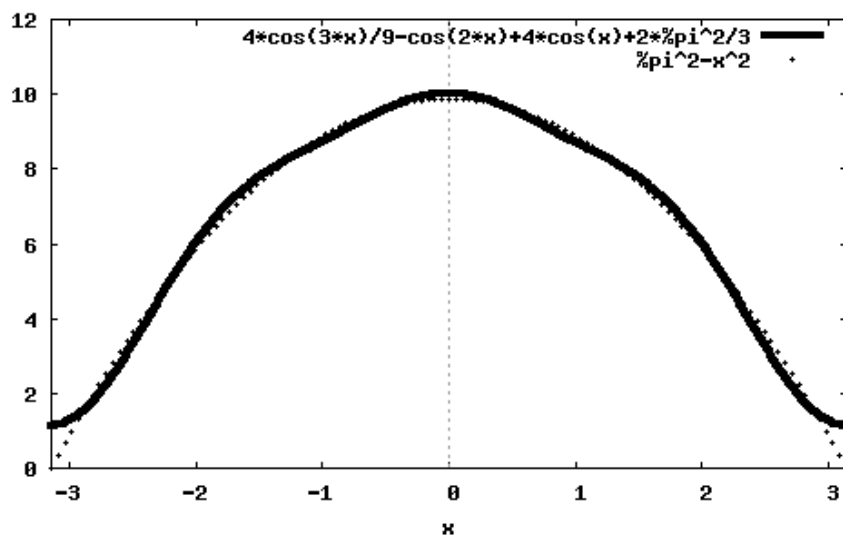


Figura 56: Aproximação de f_2 por P_3

Fonte: Autoria própria.

$$P_4 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x) - \cos(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9} - \frac{\cos(4x)}{4}.$$

Substituindo $k=5$ em (17), obtem-se o polinômio:

$$P_5 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x) - \cos(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9} - \frac{\cos(4x)}{4} + \frac{4\cos(5x)}{25}.$$

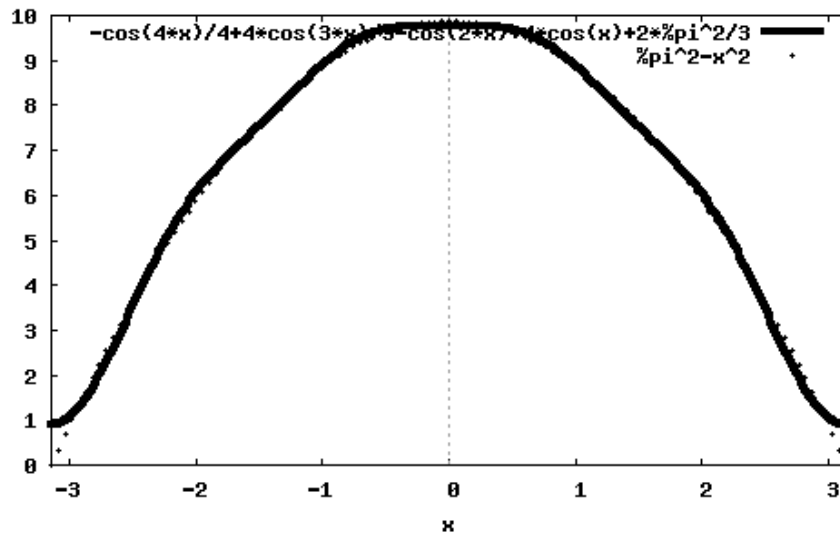


Figura 57: Aproximação de f_2 por P_4

Fonte: Autoria própria.

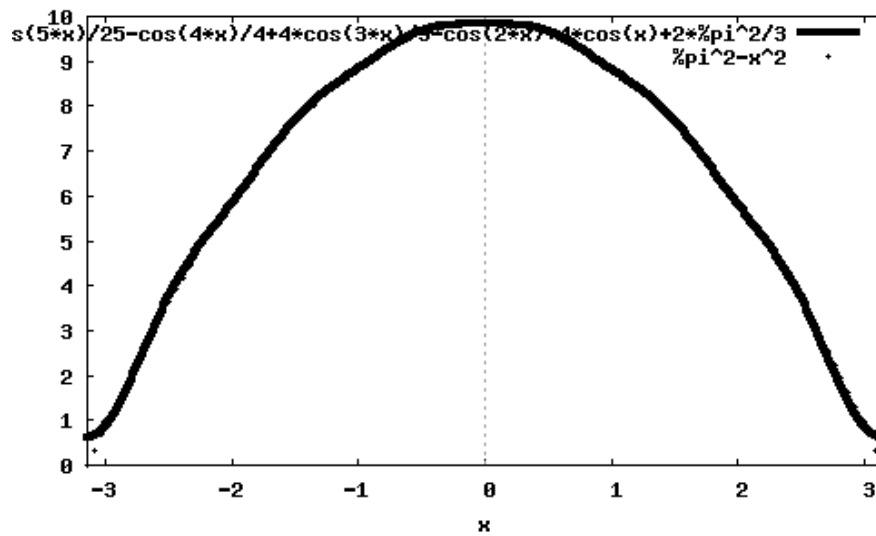


Figura 58: Aproximação de f_2 por P_5

Fonte: Autoria própria.

Substituindo $k=6$ em (17), obtem-se o polinômio:

$$P_6 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(x) - \cos(2x) + \frac{4\cos(3x)}{9} - \frac{\cos(4x)}{4} + \frac{4\cos(5x)}{25} - \frac{\cos(6x)}{9}.$$

As figuras 54, 55, 56, 57, 58 e 59 representam graficamente as respectivas aproximações de f_2 por P_1 , f_2 por P_2 , f_2 por P_3 , f_2 por P_4 , f_2 por P_5 e f_2 por P_6 , à medida que aumenta-se

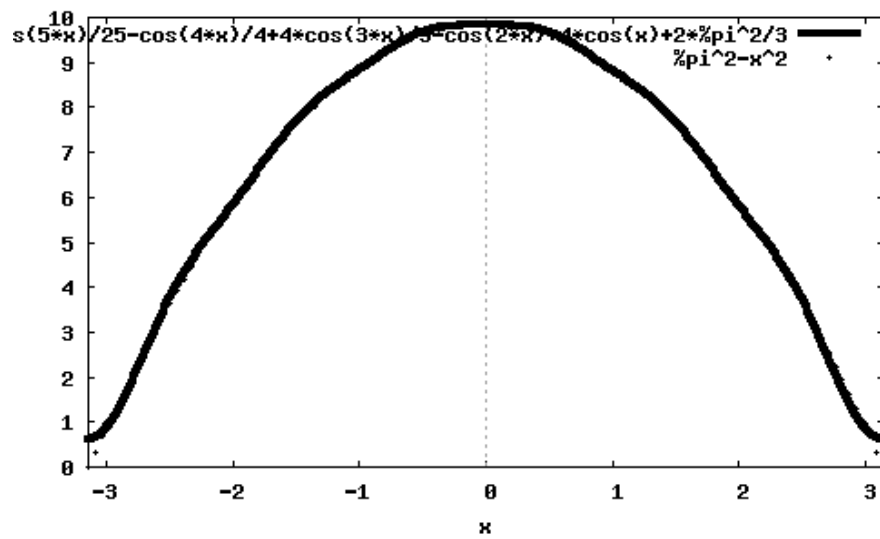


Figura 59: Aproximação de f_2 por P_6

Fonte: Autoria própria.

k , o gráfico do polinômio P_k se aproxima mais do gráfico de f_2

Exemplo 10.3. Seja a função, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por $f_3(x) = \begin{cases} \frac{-8x^2}{\pi} - 8x, & x < 0 \\ \frac{8x^2}{\pi} - 8x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Note que $f_3(-\pi) = f_3(\pi)$.

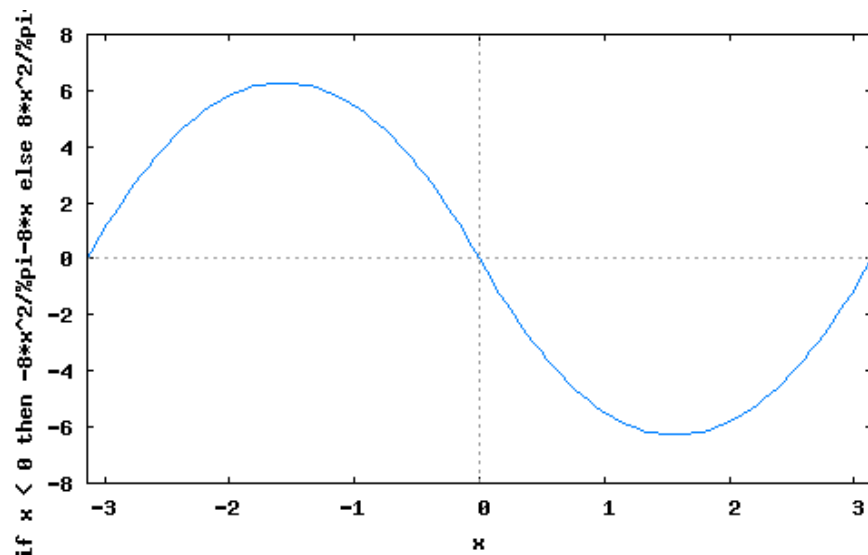


Figura 60: Gráfico da função f_3

Fonte: Autoria própria.

Serão determinados os polinômios trigonométricos para f_3 .

$$\text{Para calcular } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) dx,$$

utilizou-se o Maxima como descrito na figura 61 para obter

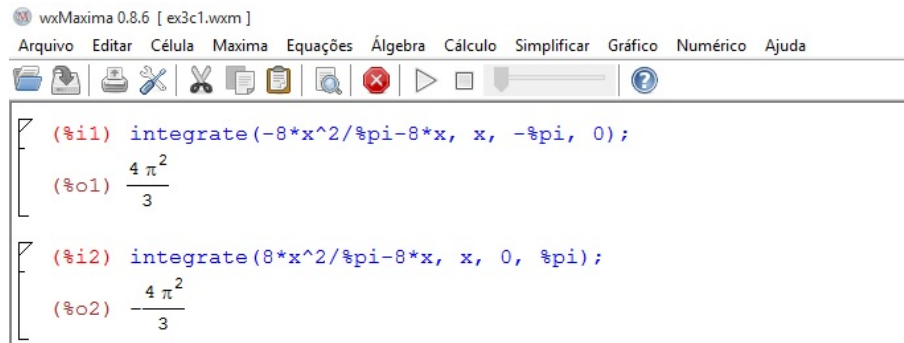


Figura 61: Cálculo para determinar de a_0 para o exemplo 10.3

Fonte: Autoria própria.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{3} + \frac{-4\pi^2}{3} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Agora será calculado a_n para $n \neq 0$ dado por

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x) \cos(nx)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) \cos(nx) dx \right).
 \end{aligned}$$

Interpretando a figura 62 obtem-se

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x) \cos(nx)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) \cos(nx) dx \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Agora será calculado b_n

```

wxMaxima 0.8.6 [ ex3c2.wxm ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

(%i1) integrate((-8*x-8*x^2/%pi)*cos(n*x), x, -%pi, 0);
(%o1) 
$$\frac{16 \sin(\pi n) - 8 \pi n \cos(\pi n)}{\pi n^3} - \frac{8}{n^2}$$


(%i2) ratsimp(%);
(%o2) 
$$\frac{16 \sin(\pi n) - 8 \pi n \cos(\pi n) - 8 \pi n}{\pi n^3}$$


(%i3) integrate((-8*x+8*x^2/%pi)*cos(n*x), x, 0, %pi);
(%o3) 
$$\frac{8}{n^2} - \frac{16 \sin(\pi n) - 8 \pi n \cos(\pi n)}{\pi n^3}$$


(%i4) ratsimp(%);
(%o4) 
$$-\frac{16 \sin(\pi n) - 8 \pi n \cos(\pi n) - 8 \pi n}{\pi n^3}$$


```

Figura 62: Cálculo para determinar de a_n para o exemplo 10.3

Fonte: Autoria própria.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x) \operatorname{sen}(nx)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) \operatorname{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) \operatorname{sen}(nx) dx \right).
 \end{aligned}$$

como descrito na figura 10.3, segue que

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_3(x) \operatorname{sen}(nx)) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \left(\frac{-8x^2}{\pi} - 8x \right) \operatorname{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{8x^2}{\pi} - 8x \right) \operatorname{sen}(nx) dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{8\pi \operatorname{sen}(\pi n) + 16 \cos(\pi n) - 16}{\pi n^3} + \frac{8\pi \operatorname{sen}(\pi n) + 16 \cos(\pi n) - 16}{\pi n^3} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{8\pi \operatorname{sen}(\pi n) + 16 \cos(\pi n) - 16}{\pi n^3} \\
 &= \frac{16}{\pi} \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2}{\pi n^3} \\
 &= \frac{16(\pi \operatorname{sen}(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^3}.
 \end{aligned}$$

Assim pode-se substituir os coeficientes no Polinômio

```

(%i5) integrate((-8*x-8*x^2/%pi)*sin(n*x), x, -%pi, 0);
(%o5) 
$$\frac{8\pi n \sin(\pi n) + 16 \cos(\pi n)}{\pi n^3} - \frac{16}{\pi n^3}$$


(%i6) ratsimp(%);
(%o6) 
$$\frac{8\pi n \sin(\pi n) + 16 \cos(\pi n) - 16}{\pi n^3}$$


(%i7) integrate((-8*x+8*x^2/%pi)*sin(n*x), x, 0, %pi);
(%o7) 
$$\frac{8\pi n \sin(\pi n) + 16 \cos(\pi n)}{\pi n^3} - \frac{16}{\pi n^3}$$


(%i8) ratsimp(%);
(%o8) 
$$\frac{8\pi n \sin(\pi n) + 16 \cos(\pi n) - 16}{\pi n^3}$$


```

Figura 63: Cálculo para determinar b_n para o exemplo 10.3

Fonte: Autoria própria.

$$P_k(x) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^k (0 \cdot \cos(nx) + \frac{16(\pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^3} \sin(nx))$$

$\Rightarrow$

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^k \left(\frac{16(\pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n) - 2)}{\pi^2 n^3} \sin(nx) \right). \quad (18)$$

Substituindo $k=1$ em (18), como $\sin(\pi) = 0$ e $\cos(\pi) = -1$ tem-se o seguinte polinômio:

$$P_1(x) = \frac{16 \sin x (\pi \sin \pi + 2 \cos \pi - 2)}{\pi^2}$$

$\Rightarrow$

$$P_1(x) = \frac{-64 \sin x}{\pi^2}.$$

Substituindo $k=2$ em (18), considerando que $\sin(2\pi) = 0$ e $\cos(2\pi) = 1$, tem-se o seguinte polinômio

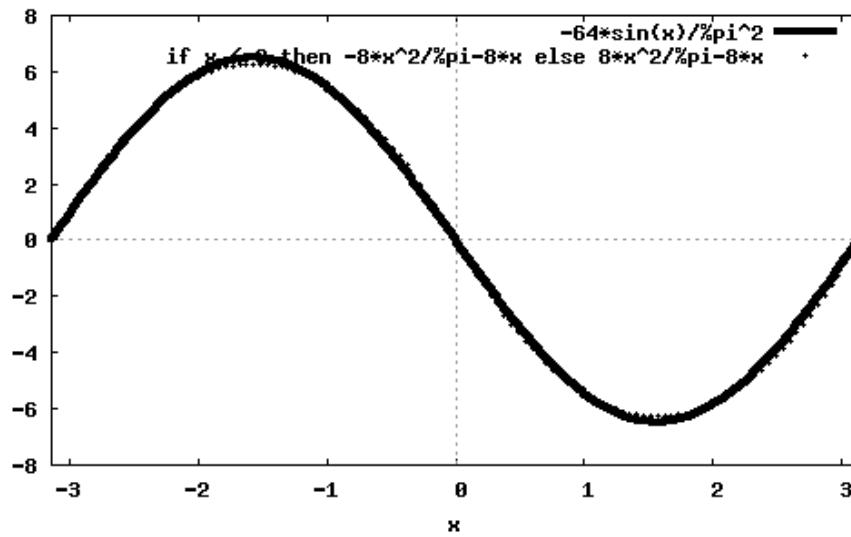


Figura 64: Aproximação de f_3 por P_1

Fonte: Autoria própria.

$$P_2(x) = \frac{-64\text{sen}x}{\pi^2} + \frac{16\text{sen}2x(2\pi\text{sen}(2\pi) + 2\cos(2\pi) - 2)}{2^3\pi^2}$$

$\Rightarrow$

$$P_2(x) = \frac{-64\text{sen}x}{\pi^2} + 0 = \frac{-64\text{sen}x}{\pi^2}.$$

Assim,

$$P_1(x) = P_2(x).$$

Substituindo $k=3$ em (18), tem-se o $P_3(x)$

$$P_3(x) = \frac{-64\text{sen}x}{\pi^2} + \frac{16(3\pi\text{sen}(3\pi) + 2\cos(3\pi) - 2)}{3^3\pi^2}\text{sen}(3x) = \frac{-64\text{sen}x}{\pi^2} + \frac{-64\text{sen}3x}{27\pi^2}$$

$\Rightarrow$

$$P_3(x) = \frac{-64}{\pi^2}(\text{sen}x + \frac{\text{sen}3x}{27}).$$

Visualmente para $k=3$, percebe grande proximidade entre a função f_3 e o polinômio P_3 .

As figuras 64 e 65 representam graficamente as respectivas aproximações f_3 por P_1 e

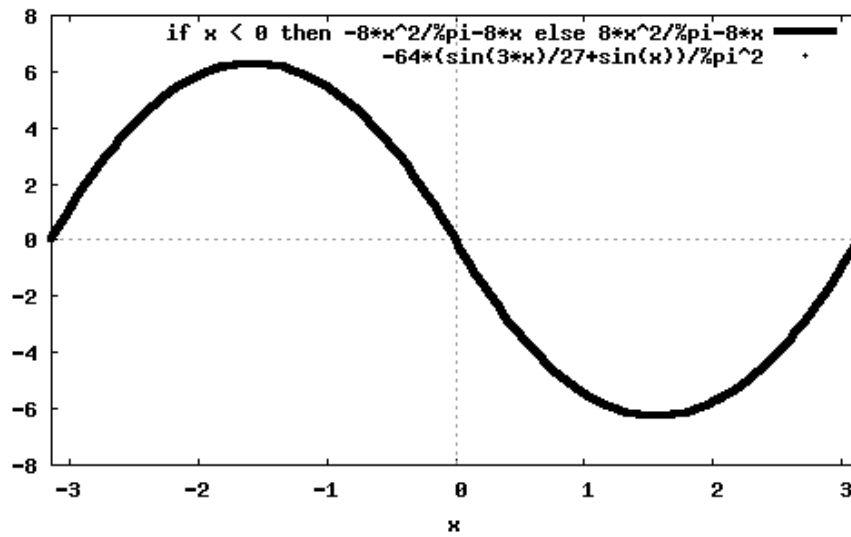


Figura 65: Aproximação de f_3 por P_3

Fonte: Autoria própria.

f_3 por P_3 , à medida que se aumenta k , o gráfico de P_k , se aproxima do gráfico de f_3 .

10.3 CONVERGÊNCIA DO POLINÔMIO TRIGONOMÉTRICO

O Teorema apresentado nesta seção garante que aproximação de uma função contínua e 2π -periódica por polinômios trigonométricos ocorre da melhor forma possível. Ele mostra que o erro cometido ao realizar tal aproximação pode ser tão pequeno quanto for desejado.

Note que para lidar-se com funções 2π -periódicas definida no conjunto dos números reais pode-se restringir o intervalo a $[-\pi, \pi]$.

O Teorema abaixo foi enunciado e demonstrado no trabalho de Oliveira (2014).

Teorema 10.4. *Sejam $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varepsilon > 0$. Então, existe um polinômio trigonométrico P tal que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.*

O polinômio P mencionado no Teorema 10.4 é um polinômio da forma

$$P_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ cujos coeficientes a_0 , a_n e b_n são dados em (13), (14) e (15).

Para diminuir o erro denotado por ε no Teorema 10.4, deve-se aumentar a ordem do polinômio trigonométrico para a função f . Será realizada a ilustração deste procedimento para

o exemplo 10.2, onde o polinômio trigonométrico dado por

$$P_k(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{4\pi \sin(n\pi) - 4k\pi \cos(n\pi)}{\pi n^3} \cos(nx) \right)$$

é a aproximação para a função f_2 definida em $[-\pi, \pi]$ por $f_2(x) = \pi^2 - x^2$.

A figura 66 representa a função f_2 e seus polinômios trigonométricos P_1 e P_5 . Pelos gráficos da figura 66 percebe-se que P_5 está mais próximo de f_2 se comparado a P_1 .

Tem-se por interesse determinar o erro ε_k ao aproximar f por seu polinômio trigonométrico P_k de ordem k . O erro ε_k é obtido determinando a maior distância entre os pontos $(x, f(x))$ e $(x, P_k(x))$ contido no gráficos de f e P_k respectivamente. Tal erro será o maior valor que a função ε_k definida em $[-\pi, \pi]$ por

$$\varepsilon_k = |f(x) - P_k(x)|$$

e chamada de função erro entre f_2 e P_k . A figura 67 descreve o erro ε_1 . Note que, graficamente, o valor máximo desta função está próximo de 2,5 e ocorre nas extremidades de $[-\pi, \pi]$. Isto pode ser confirmado substituindo $x = \pi$ em ε_1 .

$$\varepsilon_k = |f(x) - P_k(x)| = |(\pi^2 - \pi^2) - \left(\frac{2\pi^2}{3} + 4\cos(\pi) \right)| = \left| \frac{2\pi^2 - 12}{3} \right| \cong 2,579736267392905.$$

A figura 68 descreve a função erro ε_5 para f_2 e P_5 . Note que o valor máximo desta função está próximo de 1 e novamente ocorre nas extremidades de $[-\pi, \pi]$. Note ainda que o erro ε_5 é menor que o erro ε_1 . Continuando este processo pode-se observar que o erro ε_k diminui conforme o valor de k aumenta.

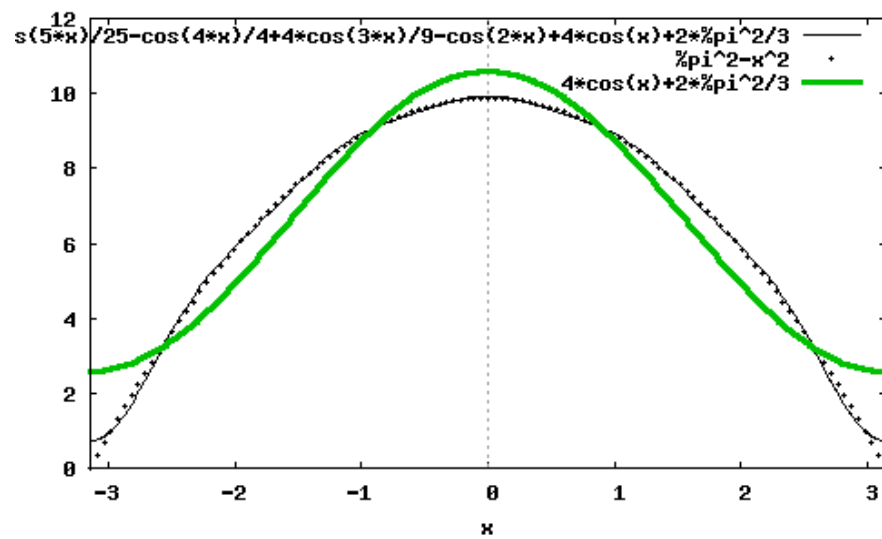


Figura 66: Aproximação de $f_2(x)$ por P_1 e P_5

Fonte: Autoria própria.

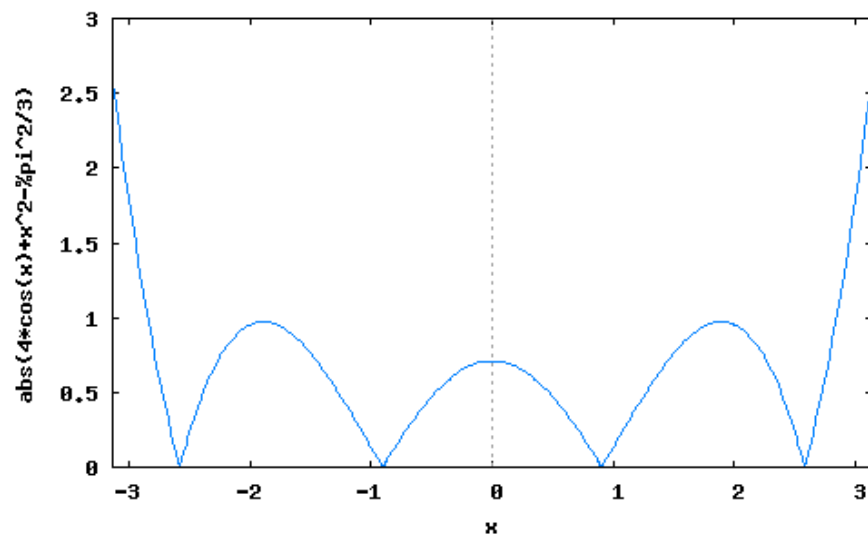


Figura 67: Gráfico de ε_1 de f_2 por P_1

Fonte: Autoria própria.

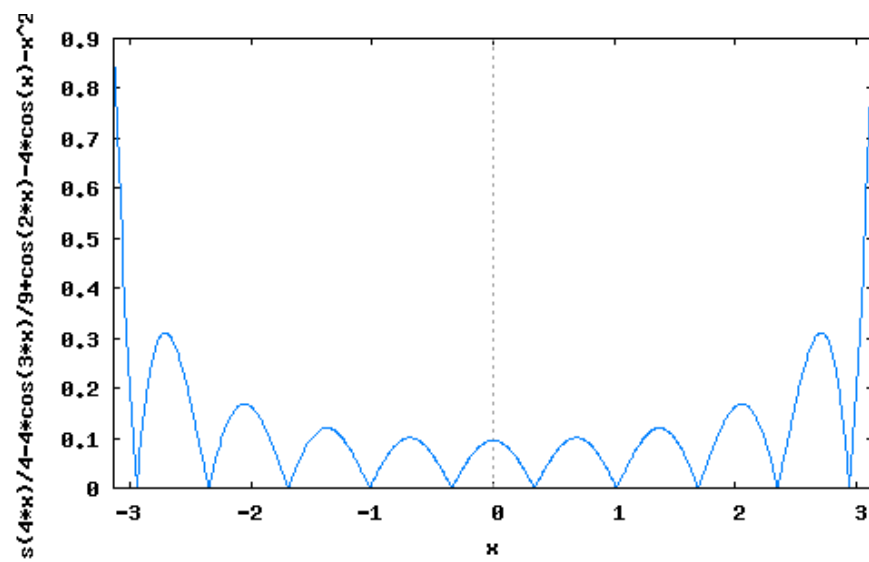


Figura 68: Gráfico de ε_5 de f_2 por P_5

Fonte: Autoria própria.

11 CONCLUSÃO

Ensinar matemática e obter uma aprendizagem satisfatória não tem sido fácil. Mas é preciso considerar que nem todos aprendem da mesma forma. Para superar a realidade enfrentada nas aulas de matemática pode-se recorrer à metodologias capazes de melhorar o processo de ensino-aprendizagem.

Um estratégia importante deste trabalho foi introduzir em cada etapa a abordagem histórica. O aluno precisa ter claro que os conteúdos matemáticos surgiram de uma necessidade, e não o contrário, como tem sido ensinado. Não é necessário recorrer as fórmulas se for compreendido que elas foram criadas observando as soluções para os problemas enfrentados em cada situação.

Para explicitar a necessidade de se aprender o conteúdo de Trigonometria, se faz necessário que o conteúdo abordado seja relacionado à prática. Para muitos alunos, a dificuldade em se aprender Matemática está na abstração dos conteúdos, por isso trabalhar com aplicações é tão relevante. Mostrar o concreto ao discente, ajuda assimilar os conteúdos, já que estará motivado em resolver uma situação-problema mais próxima de sua realidade.

Neste trabalho foram apresentadas aplicações de Trigonometria em diferentes áreas do conhecimento. Para o aluno, já é esperado que existam aplicações em profissões que trabalham com disciplinas exatas, por isso é importante que sejam apresentadas aos alunos aplicações de áreas das quais não se espera, como por exemplo a Medicina e a Música. Desta forma o aluno pode ficar curioso e se interessar mais pelo assunto, uma vez que essas duas áreas estão presentes no seu dia-a-dia.

Atualmente, tem-se incentivado o uso de Novas Tecnologias. Este trabalho teve seu desenvolvimento utilizando os programas Geogebra e Maxima, ambos livres para seu acesso. Trabalhar com softwares em sala de aula permite que o aluno investigue, crie hipóteses e confirme resultados. Permite que realize cálculos sem ainda tê-los estudados como o "cálculo da integral de uma função" por exemplo. Os programas não substituem as outras metodologias como a resolução de exercícios e de situações-problemas, ou mesmo a explicação oral. Mas

sim, devem estar relacionados a todas essas ferramentas.

O Programa Geogebra, faz uso de linguagem simples, realiza construções geométricas e cálculos algébricos. Mostrou-se um programa eficiente em boa parte do trabalho realizado. Neste trabalho foi verificado que apresenta uma desvantagem: não representa números irracionais, pois não faz uso de radicais, apenas faz uso de arredondamento com até 15 casas decimais.

O Programa Maxima, faz uso de linguagem mais aprimorada, se comparada com o Geogebra, realiza cálculos e representação gráfica. Mostrou-se muito eficiente durante a execução deste trabalho. Com ele é possível obter resultados importantes como a "área sob uma curva", utilizando conteúdos de Ensino Superior, sendo que para isso basta que a linguagem do professor seja adequada à etapa em que se está ensinando.

Com o auxílio dos programas é possível trabalhar com a "aproximação de funções periódicas por polinômios trigonométricos", apesar de ser um conteúdo que possui cálculos que são ensinados no Ensino Superior, com a utilização do Maxima não é necessário que os alunos saibam realizar esses cálculos. Assim pode-se enfatizar os outros conceitos envolvidos nessa estratégia de aproximação. Primeiramente o aluno pode representar graficamente uma função periódica e tentar realizar a aproximação por tentativa e erro. Após isso, o professor poderá mostrar como se realiza o procedimento para uma aproximação melhor.

Usar diferentes metodologias é uma forma de atingir diferentes alunos, seja investir na História da Matemática, na Resolução de Problemas aplicados ao conteúdo ou na utilização de Novas Tecnologias. É importante que cada professor escolha a maneira mais viável para se ensinar, cabendo à ele conduzir seus alunos para a construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- BOMFIM, J. C. D. R. **ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE SOFTWARES COMPUTACIONAIS**. Dissertação (Mestrado) — FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL, 2013.
- BORGES, C. F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para o ensino**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2010.
- BRASIL, M. da E. **Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Coleção Explorando o Ensino da Matemática**. 2004.
- BRASIL, M. da Educação e do D. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>: [s.n.], 1997.
- BRASIL, M. da Educação Secretaria da E. B. **Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. 1. ed. Brasília: [s.n.], 2006.
- CORRÊA, B. M. **A Introdução à Arte Analítica de François Viète: Comentários e Tradução**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- CORREIA, J. M. T. **A Evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 1999.
- COSTA, N. M. L. da. **A história da Trigonometria**. 2003.
- LONTRA, A. **TRIGONOMETRIA E ASTRONOMIA**. <https://www.youtube.com/watch?v=xWYkgmp3cWA>: [s.n.], 2013.
- MELLO, J. L. P. **TRIGONOMETRIA: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares**. <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0910200706.htm>: [s.n.], 2007.
- MIASHIRO, P. M.; GALVÃO, M. E. E. L. O estudo da função seno com o software cabrigéomètre ii. In: **Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. [S.l.: s.n.], 2013.
- MIRANDA, S. M. C.; PADILHA, S. L.; CIANI, A. B. . trigonometria, cálculo, ensino e aprendizagem. In: **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM**. [S.l.: s.n.], 2013.
- NACARATO, A. M.; BREDARIOL, C. C.; PASSOS., M. P. F. **TRIGONOMETRIA: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares**. Disponível em: <http://nutes2.nutes.ufrj.br/coordenacao/textosapoio/trigonometria.pdf>: [s.n.], 2010.

NADAL, C. A. **APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA NA CARTOGRAFIA E NA ASTRONOMIA**. <http://www.cartografica.ufpr.br/docs/Nadal/APLICA>[s.n.], 2013.

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do uso do software GEOGEBRA no ensino de Geometria: Reflexão e prática na escola**. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1370724062/67.pdf>: [s.n.], 2012.

NASCIMENTO, M. A. **Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), 2014.

NASSER, L.; SOUZA, G. A. de; TORRACA., M. A. Transição do ensino médio para o superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? In: **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2012.

OLIVEIRA, C. A. C. de. **Trigonometria: o radiano e as funções Seno, cosseno e tangente**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

OLIVEIRA, T. de. **Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2010.

PALIS, G. de L. R. A transição do ensino médio para o ensino superior. In: . **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2010.

ROSEMBAUM, A. T. J. e L. S. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. **EMP-Educação Matemática Revista**, 2010.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. **Metodologia de Pesquisa**. [S.l.]: MacGrawHill, 2006.

SANTOS, B. **Introdução ao software Maxima**. 1. ed. Porto: [s.n.], 2009.

SILVA, M. F. da; FROTA, M. C. R. Uma experiência com modelos da trigonometria associados a situações práticas. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2010.

SOUZA, C. A. de; VICTER, E. das F.; LOPES, J. R. **Uma Breve História da Trigonometria e seus Conceitos Fundamentais**. [S.l.]: Entorno, 2011.

SOUZA, L. G. S. et al. **Matemática E Música: Relações e suas implicações no ensino de matemática**. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/musica/pages/arquivos/2009-Minicurso-Matem>[s.n.], 2009.

VAZQUEZ, C. M. R. Trigonometria no ensino médio: a construção de alguns conceitos. In: . **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. [S.l.: s.n.], 2010.