

Carlos Adalberto Schnaider Batista

Sincronização em Redes Neurais

PONTA GROSSA
2012

Sincronização em Redes Neurais

Carlos Adalberto Schnaider Batista

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Ciências/Física da Universidade Estadual
de Ponta Grossa, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do grau de Doutor em
Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos
Batista.

PONTA GROSSA
2012

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

B333s Batista, Carlos Adalberto Schnaider
 Sincronização em Redes Neurais / Carlos Adalberto Schnaider.
 Ponta Grossa, 2012.
 58f.

 Tese (Doutorado em Ciências/Física), Universidade
 Estadual de Ponta Grossa
 Orientador: Prof.Dr. Antonio Marcos Batista

 1.Redes. 2. Neurônios. 3. Caos. I. Batista, Antonio Marcos. II.T.

.

CDD: 006.32

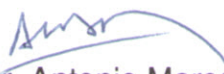
TERMO DE APROVAÇÃO

CARLOS ADALBERTO SCHNAIDER BATISTA

“Sincronização em Redes Neurais”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:



Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR



Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física, UFPR/PR



Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes
Departamento de Física, UFPR/PR



Prof. Dr. Guiliano Gadioli La Guardia –
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR



Prof. Dr. Adriano Doff Sotta Gomes
Coordenação de Física - UTFPR/PR



Prof.ª Dr.ª Andressa Novatski –
Departamento de Física - UEPG/PR

Agradeço a Deus

Agradeço ao prof. Antônio Marcos
Batista pela orientação,

aos professores Ricardo Luiz Viana
(UFPR), Sergio Roberto Lopes
(UFPR) e José Carlos Pontes
(UTFPR) pela colaboração direta nos
três trabalhos que estão apresentados
nesta tese,

aos professores e alunos que de
alguma forma contribuíram na minha
formação,

a minha família,

e a CAPES pela bolsa de estudos.



A vitória pertence somente para aqueles que lutaram por ela!

Sumário

Resumo	p. 9
Abstract	p. 10
1 Introdução	p. 11
2 Fundamentos Teóricos	p. 14
2.1 Mapas	p. 14
2.2 Pontos Fixos	p. 15
2.3 Expoente de Lyapunov e Diagrama de Bifurcações	p. 16
2.3.1 Expoente de Lyapunov	p. 16
2.3.2 Diagrama de Bifurcações	p. 18
2.4 Mapa de Rulkov	p. 20
2.4.1 Dinâmica do Mapa de Rulkov	p. 23
3 Grafos e Redes Complexas	p. 25
3.1 Grafos	p. 25
3.1.1 Grafo Direcionado	p. 26
3.1.2 Matriz de Adjacências	p. 26
3.2 Redes Complexas	p. 27
3.3 Rede Sem Escala	p. 30

3.4	Controle da Sincronização dos Disparos por meio de um Sinal Externo	p. 34
3.5	Supressão de Sincronização com um Sinal de Realimentação	p. 37
4	Redes Acopladas	p. 47
4.1	Parâmetro de Ordem	p. 50
4.2	Transição de Fase	p. 53
5	Conclusões	p. 55
	Referências Bibliográficas	p. 58

Resumo

Consideramos uma rede de mapas acoplados que exibe propriedade de rede sem escala. A conectividade de cada sítio obedece uma distribuição lei de potência, onde a maioria dos sítios tem poucas conexões e uma minoria com muitas conexões. Evidências experimentais mostram que uma rede neural biológica em algumas áreas do cérebro apresentam uma arquitetura semelhante a uma rede sem escala. Por outro lado, uma resposta coerente de um conjunto de neurônios pode ser descrita através da sincronização de fase caótica da atividade dos seus disparos. Usamos o modelo de Rulkov que possui uma dinâmica comparável aos disparos neurais para estudar a sincronização de fase caótica, em particular a sua dependência nas propriedades do acoplamento. Realizamos esse estudo inspirados nas pesquisas sobre patologias como epilepsias e Mal de Parkinson, as quais em termos dinâmicos estão relacionadas a comportamentos de sincronização. Nesta tese apresentaremos duas formas conhecidas na literatura de como tratar o problema usando métodos numéricos: Aplicando um sinal externo com determinadas amplitudes e frequências, e a realimentação de um sinal extraído da própria rede com um certo tempo de atraso no sistema para suprimir ou controlar os ritmos sincronizados. Encontramos resultados satisfatórios quanto as regiões de controle e supressão de ritmos neurais indesejados variando dos parâmetros do sistema. Finalmente, mostramos alguns resultados do efeito da sincronização segundo a interação entre um grupo de redes conforme a variação da probabilidade de conexões entre os sítios de redes diferentes e também pertencentes a mesma rede.

Palavras chave: Redes. Neurônios. Caos.

Abstract

We consider a network of coupled maps that displays a property of scale-free network. The connectivity of each site satisfies a power law distribution, where most sites have few connections and the minority dominating the connectivity with many connections. Experimental evidence show that a biological neural network in some areas of the brain have a similar architecture to a scale-free network. On the other hand, a consistent response of a set of neurons can be described by the phase synchronization of chaotic activity of your bursts. We use the model having a dynamic Rulkov comparable to the neural firing to investigate the synchronization of chaotic phase, in particular its dependence on the coupling properties. We conducted this study inspired by research on diseases such as tremors and Parkinson's disease, which in dynamic terms are related to synchronized behavior. In this thesis we present two forms well-known in the literature on how to deal with the problem by applying numerical methods: applying an external signal with certain amplitude and frequency, and a feedback signal extracted from the network itself with a certain delay time in the system to suppress or control the rhythms synchronized. We find a satisfactory regions of control and suppression of unwanted neural rhythms according to the variation of system parameters. Finally, we show some results concerning the effect of synchronization according to the interaction between a group of networks varying the probability of connections between networks and within each network.

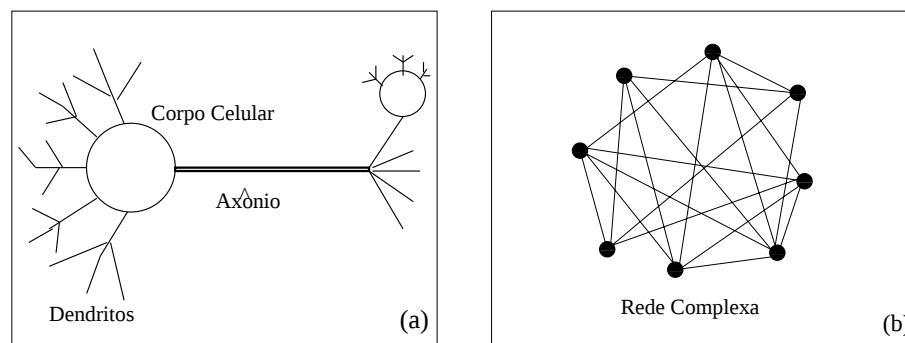
Keywords: Network. Neurons. Chaos.

1 *Introdução*

O estudo de redes complexas é utilizado em muitas aplicações científicas e tecnológicas. Muito esforço tem sido gasto para estudar tais redes usando ferramentas derivadas de áreas tais como mecânica estatística, teoria de grafos (uma representação de um conjunto de nós conectados por arestas que formam uma rede) e a dinâmica não linear [1]. No estudo de redes complexas, os sítios representam organizações ou indivíduos e as ligações funcionam como interações mútuas de acordo com a arquitetura da conexão específica [2]. Uma classe de rede complexa muito estudada é a sem escala, para a qual a conectividade, ou o número de conexões de cada sítio, apresenta uma dependência estatística na forma lei de potência [3]. Se $P(k)dk$ denota a probabilidade de encontrar um sítio com conectividade entre k e $k + dk$, para uma rede sem escala temos que $P(k) \sim k^{-\gamma}$ onde $\gamma > 1$. Dentre as principais características de uma rede sem escala é que esta deve ter poucos sítios com muitas conexões e muitos sítios com poucas conexões, segundo Albert e Barabási, “rich get richer” - ricos ficam mais ricos. Quanto mais conexões um nó possui, maior a probabilidade deste nó ter novas conexões. Eles denominaram essa característica de “preferential attachment” ou conexão preferencial. Mais especificamente, um nó tende a se conectar a um nó pré-existente com mais conexões. Essa assertiva implica em outra premissa fundamental: as redes não seriam constituídas de nós igualitários, ou seja, com a possibilidade de se ter mais ou menos o mesmo número de conexões. Ao contrário, tais redes possuiriam nós que seriam altamente conectados (hubs ou conectores) e uma grande maioria de nós com poucas conexões. Esses me-

canismos são comuns em muitas redes de sistemas físicos, biológicos e sociais. Alguns exemplos são as redes de computadores conectados (*World Wide Web*) [4], grandes programas de computadores [5], proliferação de doenças [6], contatos sexuais humanos [7], distribuição de domínios proteínicos [8], cadeia metabólica celular [9] e redes neurais [10]. Numa rede neural os neurônios são representados por sítios e os axônios, que atuam como canais de transmissão neurais, as conexões entre os sítios de uma rede complexa. A figura 1.1 (a) apresenta o modelo de um neurônio e, em (b), tem-se uma rede complexa.

Figura 1.1: Esquema comparativo entre uma rede neural (figura à esquerda) e uma rede complexa (figura à direita).



As linhas representam os axônios e os círculos os neurônios.

Fonte: O Autor.

Evidências clínicas salientam que a sincronização na dinâmica de neurônios individuais desempenha um papel fundamental em algumas condições patológicas, tais como a doença de Parkinson e epilepsias [11]. Uma das técnicas utilizadas no processo de controle desse comportamento é adicionar sinais externos periódicos de pequenas amplitudes e determinadas frequências com o intuito de controlar os ritmos neurais indesejáveis [12, 13]. Como exemplo, tem-se a sincronia da dinâmica neural localizada na ganglia thalamus e basal que aparece causando os tremores no mal de Parkinson. Desta forma, uma possível solução para controlar esses ritmos patológicos seria suprimir o estado de sincronização. Um dos recursos utilizados é a aplicação de um sinal de alta frequência ($> 100\text{Hz}$) numa determinada região do cérebro [14].

Baseados nos fatos apresentados anteriormente, este trabalho foi derivado de conhecimentos fundamentais da dinâmica não-linear e da vasta informação na literatura neurocientífica, utilizando-se dois tipos de intervenção para controlar os ritmos sincronizados. Primeiramente, aplicando um sinal externo em determinadas regiões do córtex cerebral com uma dada frequência e amplitude e, posteriormente, aplicando-se um segundo tipo de perturbação no qual é armazenado um sinal emitido pela rede e reinjetado na mesma após um tempo de atraso. Para estudar tais fenômenos usamos um modelo de rede de mapas acoplados onde cada sítio da rede representa um neurônio como já descrito anteriormente. Investigamos também o comportamento da interação entre agrupamento de redes no espaço de parâmetros.

A dinâmica das redes corticais são simuladas por um modelo multinível, rede de redes, onde cada área do córtex é tratada como uma subrede. Neste trabalho, estudamos sincronização de disparos dos neurônios em uma rede neuronal modular, que contém várias sub-redes. Por meio de simulações numéricas, encontramos a influência de fatores tais como a intensidade de intra e interconexões. As mudanças na força de acoplamento e o número de conexões por neurônio são dois fatores que afetam de certa maneira a sincronização. Sugere-se portanto que os resultados apresentados possam facilitar nossa compreensão não só da sincronização em redes modulares, mas também o impacto sobre a sincronização em redes neuronais.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos os fundamentos teóricos que envolvem o modelo considerado e as suas características. No Capítulo 3 há uma breve descrição sobre redes complexas e a teoria dos grafos. No capítulo 4 a forma do acoplamento sem escala. No Capítulo 5 exibimos os resultados das simulações quando ao efeito de acoplamento, o controle de sincronização e a supressão de sincronização. Finalmente, no Capítulo 6, o estudo da interação entre redes são apresentados.

2 *Fundamentos Teóricos*

2.1 Mapas

Um mapa unidimensional [15] é uma equação da forma,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ são os valores discretos do tempo e $f(x_n)$ é uma função não linear. Fornecido uma condição inicial x_0 , podemos obter os demais valores por meio de sucessivas iterações. A órbita de x para f determina os pontos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$, e o ponto inicial x da órbita é chamada de valor inicial da mesma. Uma órbita de período m é o conjunto de pontos fixos $x_0^*, x_1^*, \dots$, isto é,

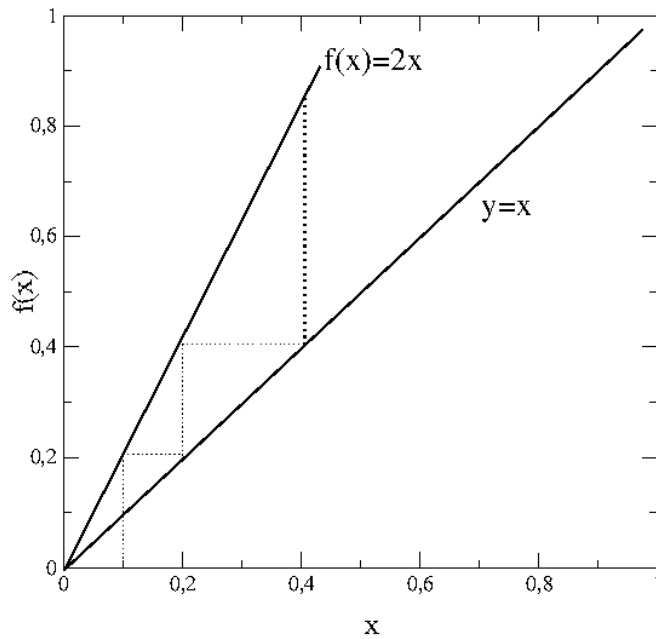
$$x^* = f^m(x^*), \quad (2.2)$$

onde f^m é a m -ésima iterada do mapa. Então dado x_0 , o mapa resulta x_1 . Dado x_1 obtem-se x_2 , e assim por diante.

A representação gráfica de uma órbita, figura (2.1), é feita pelo esboço de uma função f junto com uma linha diagonal $y = x$. Por exemplo, o único ponto fixo de $f(x) = 2x$ é $x = 0$. Dado um valor inicial $x = 0, 1$, após uma iterada, encontramos o valor $0, 2 = f(0, 1)$; traçamos então, um linha vertical pontilhada unindo esses dois pontos. Na sequência encontra-se o valor de $f(0, 2)$, sendo que este valor como se fosse outro valor inicial que no caso é $0, 4$, e na ordem

tornamos a colocar o valor que sai dentro do respectivo valor que entra. Feito isso, traçamos uma linha horizontal pontilhada entre o par valor que entra e valor que sai $(0,1;0,2)$, ou mais especificamente, entre $f(x) = 2x$ e $y = x$.

Figura 2.1: Representação de uma órbita.



Fonte: O Autor.

2.2 Pontos Fixos

Um ponto x^* é um ponto fixo do mapa f se $f(x^*) = x^*$. A análise da estabilidade local ou linear do ponto fixo é feita mediante estudo das iterações do mapa em suas vizinhanças. Seja uma iteração x_n próximo ao ponto fixo x^* , tal que

$$\delta_n = |x_n - x^*|, \quad (2.3)$$

sendo um mapa $x^* = f^m(x^*)$ de (2.3) temos

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} &= |x_{n+1} - x^*| \\
&= |f(x_n) - x^*| \\
&= |f(x^* + \delta_n) - x^*|,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

expandindo $f(x^* + \delta_n)$ em série de Taylor e truncando, temos

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1} &= \left| f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx^*} \delta_n - x^* \right| \\
&= \left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| \delta_n.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, se ocorre $\delta_{n+1} < \delta_n$ as iterações estão convergindo para x^* , logo ele é estável, sendo assim

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| < 1, \tag{2.6}$$

se $\delta_{n+1} > \delta_n$ as iterações estão se afastando de x^* , portanto ele é instável e temos

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx^*} \right| > 1. \tag{2.7}$$

Ainda, se $|f'(x^*)| = 1$ ou $|f'(x^*)| = 0$ o ponto fixo será dito neutro ou superestável, respectivamente.

2.3 Expoente de Lyapunov e Diagrama de Bifurcações

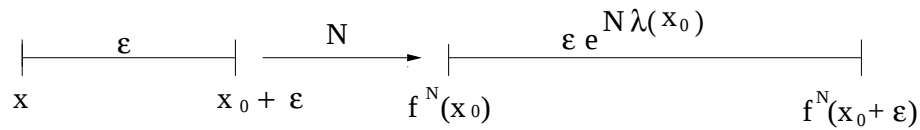
2.3.1 Expoente de Lyapunov

Se x_0 é um ponto fixo de um mapa unidimensional f e $f'(x_0) = a > 1$, então as órbitas de cada ponto x próximo de x_1 separam-se de x_0 por uma razão

multiplicativa de aproximadamente a por iteração, até a órbita de x afastar-se significativamente para longe de x_0 .

Num regime caótico o sistema apresenta sensibilidades às condições iniciais, isto é, mesmo tendo-se condições iniciais próximas, as iteradas podem divergir exponencialmente com o tempo. O expoente de Lyapunov λ mede esta divergência, que pode ser visto representado na figura 2.2

Figura 2.2: Separação exponencial de duas condições iniciais próximas, onde N é o número de iterações.



Fonte: O Autor.

Da figura (2.2) sabemos que

$$\epsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)|, \quad (2.8)$$

tal que, quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$, resulta para $\lambda(x_0)$

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right|, \\ \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto, da equação acima conclui-se que $e^{\lambda(x_0)}$ é o fator médio pelo qual a distância entre os pontos adjacentes próximos varia após um grande número de iterações.

Usando a regra da cadeia em (2.9),

$$\left. \frac{df^2(x)}{dx^2} \right|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad (2.10)$$

onde $x_1 = f(x_0)$, e o expoente de Lyapunov torna-se

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|, \quad (2.11)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{n=0}^{N-1} f'(x_n) \right|, \quad (2.12)$$

e

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln |f'(x_n)|, \quad (2.13)$$

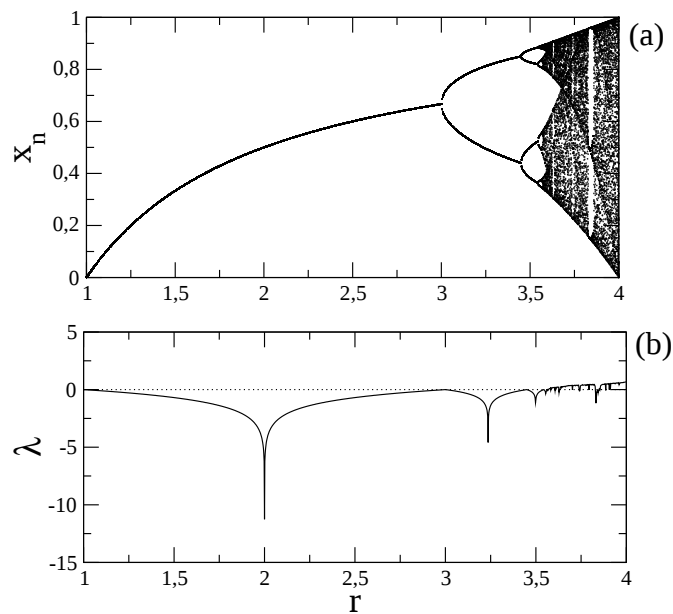
Se $\lambda(x_0) > 0$ o sistema apresenta um regime caótico e se $\lambda(x_0) \leq 0$ tal sistema apresenta um regime regular.

2.3.2 Diagrama de Bifurcações

O estudo do diagrama de bifurcações de mapas nos permite observar como pontos fixos estáveis de um sistema dinâmico se comportam devido a variação de um ou mais parâmetros do sistema. O termo “bifurcação” é genérico; o que é mais importante entendemos neste processo é como um ponto fixo altera a sua estabilidade ou instabilidade devido à alteração destes parâmetros. Podemos ver na figura 2.3(a), como se comporta a variável de estado x_n do mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$ durante a evolução do parâmetro de controle r , com uma condição inicial fixada $x_0 = 0,2$. Observamos que para $1,0 \leq r < r_\infty$ temos um regime de bifurcações, e para $r_\infty < r \leq 4,0$, predomina uma região caótica, onde $r_\infty \approx 3,57$ é um ponto onde há uma acumulação de cascata de bifurcações. Para $r > 4,0$, ocorre que $x \rightarrow \infty$ e para $r > r_\infty$ uma região caótica

em que a trajetória depende sensivelmente das condições iniciais. Existem sub-regiões na figura 2.3, como $r = 3,74$, denominadas *janelas*, que exibem comportamento periódico. São caracterizadas por órbitas de período ímpar e podem também sofrer bifurcações. Observando a figura 2.3(b) vemos que o expoente de Lyapunov é sempre negativo, com excessões nos pontos de bifurcações onde o expoente é nulo. Para $r_\infty < r \leq 4,0$ o expoente de Lyapunov é quase que completamente positivo com regiões de *janelas*, $\lambda < 0$, caracterizando um comportamento periódico.

Figura 2.3: (a) diagrama de bifurcações, (b) expoente de Lyapunov para o mapa logístico.

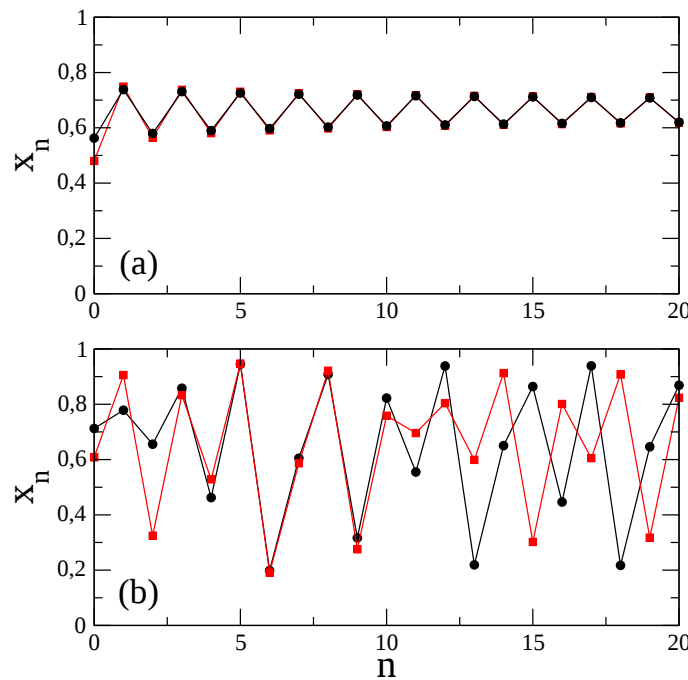


Fonte: O Autor.

Outra maneira ilustrativa de verificar o comportamento caótico de um mapa pode ser visualizado na figura 2.4. Usamos o mapa logístico $f(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n)$ para visualizar a propriedade de sistemas caóticos que apresentam grande sensibilidade às condições iniciais. Na figura 2.4 (a) definimos o parâmetro de controle $r = 3,0$ e duas condições iniciais muito próximas descritas por

círculos ($x_0 = 0,2$) e quadrados ($x'_0 = 0,25$). Há evidentemente aproximação das oscilações da variável dinâmica x_n após a terceira iterada do mapa. Por outro lado, na figura 2.4 (b) algo diferente ocorre para as mesmas condições iniciais para $r = 3,8$. Para este valor do parâmetro de controle o mapa logístico assume comportamento caótico, isto é, as oscilações da variável dinâmica divergem ao longo do tempo.

Figura 2.4: Comportamento dinâmico da variável de estado do mapa logístico para duas condições iniciais.



Em (a) $r=3,0$, comportamento regular e (b) $r=3,8$ comportamento caótico, sendo que consideramos $x_0 = 0,2$ (círculos) e $x'_0 = 0,25$ (quadrados).

Fonte: O Autor.

2.4 Mapa de Rulkov

Os impulsos nervosos são transmitidos através de um potencial de ação, que é uma rápida variação do potencial de repouso, isto é, uma variação do poten-

cial negativo para o positivo e depois um rápido retorno para o potencial de repouso negativo. O modelo para a dinâmica de um neurônio que consideramos neste trabalho possui dois tempos de escala. Um tempo de escala rápido que está relacionado com a atividade de um conjunto de picos de disparos, ou a rápida variação do potencial de repouso citado acima, enquanto que a escala de tempo lento aparece sob a forma de um decaimento até um valor mínimo, que é o potencial de repouso. Hodgkin e Huxley [16] e Hindmarsh Rose [17] propuseram modelos matemáticos descritos sob a forma de equações diferenciais, no entanto utilizamos o mapa de Rulkov [18],

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{\alpha}{1 + [x_n]^2} + y_n, \\y_{n+1} &= y_n - \sigma x_n - \beta,\end{aligned}\tag{2.14}$$

para o estudo em questão, o qual simplifica o desenvolvimento e abrevia a obtenção dos resultados devido ao tempo e a localização espacial assumirem valores discretos. O mapa de Rulkov é um modelo fenomenológico e bidimensional, tal que x_n é responsável pela dinâmica ou a escala de tempo rápida e y_n a escala lenta. O parâmetro α influi diretamente no tempo de escala dos disparos a tal ponto que produz oscilações caóticas na variável x_n quando $[4, 1; 4, 4]$ e os parâmetros σ e β podem ser associados a estímulos externos.

No mapa de Rulkov a evolução lenta de y_n para cada passo m é dado por,

$$y_{n+1} = y_n - m(\alpha + \sigma \overline{x, m}),\tag{2.15}$$

sendo que $\overline{x, m} = (\sum_{j=n+1}^{n+m} x^{(j)})/m$ é o valor médio de x_n calculado para m consecutivas iterações. Então, vemos que de (2.15) o valor de y_n aumenta durante os m passos se $\overline{x, m} < -\beta$, e diminui se $\overline{x, m} > -\beta$. Como a variação de y_n é lenta, pode-se considerar que y_n é constante, $y = y_n$. Portanto, a rápida dinâmica do

sítio pode ser entendido pela análise de um mapa unidimensional.

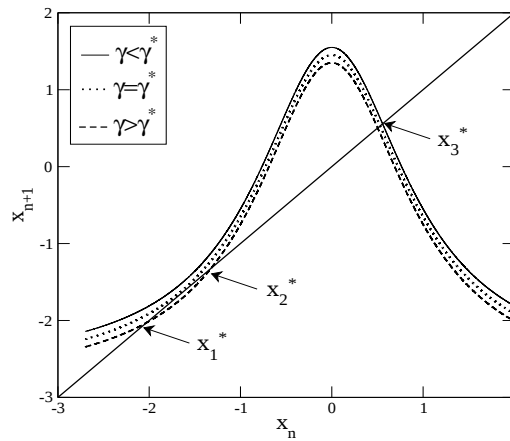
$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha, \gamma) \equiv \frac{\alpha}{(1 + x_n^2)} + \gamma. \quad (2.16)$$

O mapa (2.16) tem três pontos fixos. (x_1^*, x_2^*, x_3^*) . Utilizando-se (2.6) e (2.7), temos que

$$f'(x) = \frac{-2\alpha x}{(1 + x^2)^2}. \quad (2.17)$$

Substituindo o primeiro ponto fixo $x_1^* \approx -2,0$ (Veja figura (2.5)), para $\alpha = 4,1$, temos $f'(-2,0) \approx 0,65$, donde x_1^* é estável. Para $x_2^* \approx -1,3$, encontramos $f'(-1,3) \approx 1,47$, ou seja, x_2^* é instável, e x_3^* pode mudar de estabilidade dependendo do valor de γ .

Figura 2.5: Diagrama de Retorno.

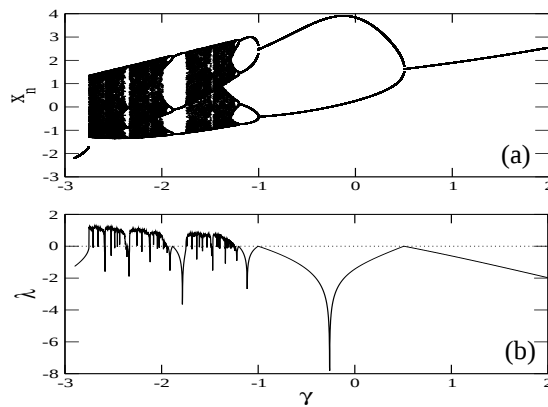


Comportamento da função $f(x_n, \alpha, \gamma)$ para $\alpha = 4,1$ $\gamma = -2,65$ (curva contínua) $\gamma = \gamma^* = -2,75$ (curva pontilhada) e $\gamma = -2.85$ (curva tracejada); x_1^*, x_2^* e x_3^* são os pontos fixos do mapa; γ^* corresponde ao valor da bifurcação onde surgem x_1^* e x_2^* . Fonte: O Autor.

As propriedades dinâmicas deste mapa estão claras na figura 2.6(a) e 2.6(b). Estas figuras mostram a análise do diagrama de bifurcações em conjunto com o cálculo do expoente de Lyapunov. O regime de bifurcações apresenta uma

tendência do mapa ir para uma região estável a medida que o valor do parâmetro de controle γ é elevado. Em (b) tem-se regiões onde predominam as janelas em que o expoente de Lyapunov é menor que 0. No final da região caótica o expoente de Lyapunov é sempre menor que zero e nos pontos de bifurcações o expoente é exatamente igual a zero.

Figura 2.6: (a) Diagrama de bifurcações e (b) expoente de Lyapunov para a equação (2.16).



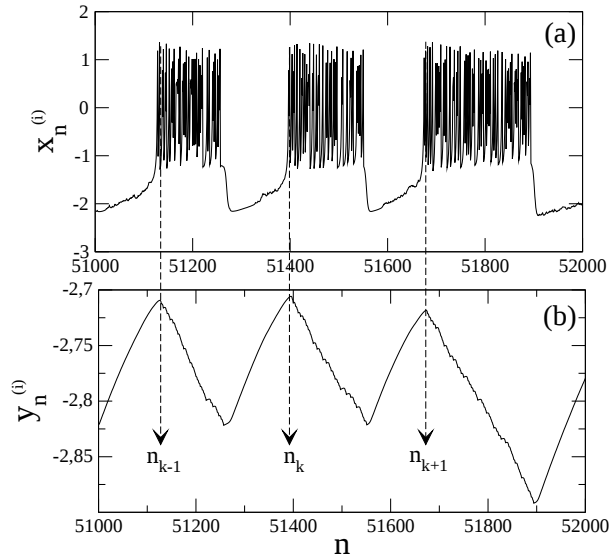
Fonte: O Autor.

2.4.1 Dinâmica do Mapa de Rulkov

Para ficar mais claro as descrições acerca dessa dinâmica para o mapa de Rulkov, podemos analisar a figura (2.7). Em (a) temos a série temporal do potencial de ação produzida pela variável rápida x_n . Os inícios dos trens de disparos são indicados pelas setas pontilhadas. Em torno de $x_n = -2$ o neurônio está em repouso ou estado quiescente. A figura 2.7 (b) mostra a evolução da dinâmica lenta. As linhas pontilhadas identificam os n_k disparos produzidos durante um intervalo de tempo observado, a quais também mostram que o início de um disparo na variável rápida, corresponde a um valor máximo da variável lenta.

Como consideramos valores de α no mapa de Rulkov para descrever oscilações caóticas, a ocorrência temporal de um n_k disparo para o n_{k+1} nunca é a

Figura 2.7: Evolução temporal para a variável rápida (a) e a lenta (b) usando o mapa de Rulkov.



$\alpha = 4,1$ e $\sigma = \beta = 0,001$.

Fonte: O Autor.

mesma.

Define-se uma fase

$$\varphi(n) = 2\pi k + 2\pi \frac{n - n_k}{n_{k+1} - n_k}, \quad (2.18)$$

e frequência

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n) - \varphi(0)}{n}, \quad (2.19)$$

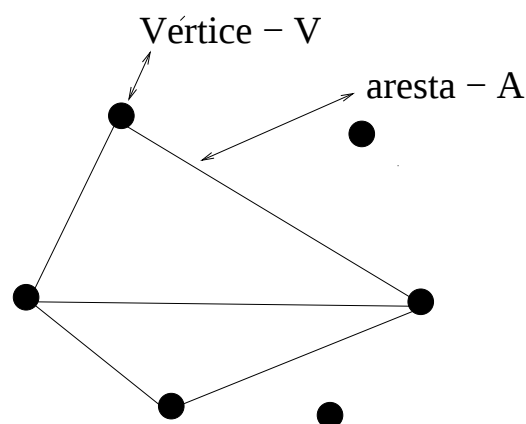
para medir-se as flutuações caóticas da variável x_n .

3 *Grafos e Redes Complexas*

3.1 Grafos

Grafos são definidos matematicamente como estruturas $G(V,A)$ compostas por um conjunto de vértices V , ou nós, e por um conjunto de arestas A . As arestas são utilizadas para indicar alguma relação entre os nós, isto é, as arestas conectam (ou não) os vértices de acordo com a conformidade do problema modelado. O estudo das redes complexas na forma da teoria dos grafos é um dos pilares fundamentais da matemática discreta. Atribui-se a Euler o primeiro trabalho neste campo realizado em 1735 [19]. Na figura 3.1 temos um exemplo de um grafo onde utilizamos círculos para denotar os vértices e linhas para as arestas.

Figura 3.1: Representação de um grafo com 6 nós e 5 arestas.

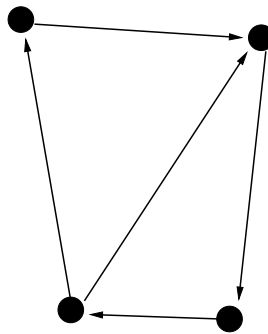


Fonte: O Autor.

3.1.1 Grafo Direcionado

Em um grafo direcionado, a ordem entre os vértices de uma aresta (V,A) é diferente da aresta (A,V) e é representada por uma flecha de A para V como mostra a figura 3.2.

Figura 3.2: Representação de um grafo direcionado.



Fonte: O Autor.

3.1.2 Matriz de Adjacências

Dado um grafo $G(A,V)$ em que $|V| = R$, a matriz de adjacência $R = (r_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ tal que:

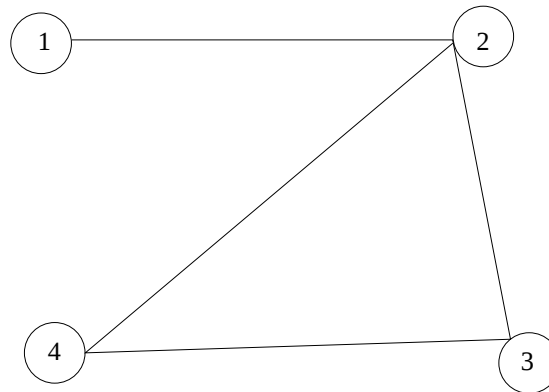
- $r_{ij}=1$ se os vértices v_i, v_j forem adjacentes;
- $r_{ij}=0$ caso contrário.

Um exemplo para representar uma matriz de adjacência a partir de um grafo encontra-se na figura 3.3.

A matriz de adjacência referente ao grafo $G(A,V)$ é representada como segue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 3.3: Grafo $G(A,V)$ que representa uma matriz de adjacência.



Fonte: O Autor.

3.2 Redes Complexas

Uma rede complexa é definida como uma estrutura que não segue um padrão regular. No entanto há uma dificuldade na literatura em encontrar uma definição fechada que aborda o conceito de “padrão regular” aplicável a este contexto. A maioria dos trabalhos sugerem que redes complexas modelem sistemas grande privilegiando o seu tamanho [19] e que podem contar com o senso comum para delimitar seu escopo [20]. Em redes neurais há uma formação de estruturas complexas. No entanto tais estruturas impõem um certo grau de imprecisão indesejado. Na tentativa de eliminar este problema há uma procura que seja, no mínimo, aceitável de como se definir uma rede complexa. Uma possível solução é a analogia entre redes complexas e grafos, donde pode-se originar uma discussão aceitável.

Tradicionalmente, redes com topologias complexas são descritas pela teoria de grafos randômicos de Erdős e Renyi (ER) [21], onde estas redes têm por característica apresentar um alto grau de auto-organização mostrando uma propriedade de larga escala em redes complexas. Entretanto, independente do sistema e da identidade de seus constituintes, a probabilidade $P(k)$ de cada sítio interagir com outro k sítio decai como uma lei de potência, $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Este resultado

indica que redes grandes auto-organizam-se dentro de um estado sem escala, uma característica não prevista por todos os modelos de redes randômicas existentes. Atribui-se essa característica ao incorporar o crescimento e conexão preferencial, duas características de redes reais:

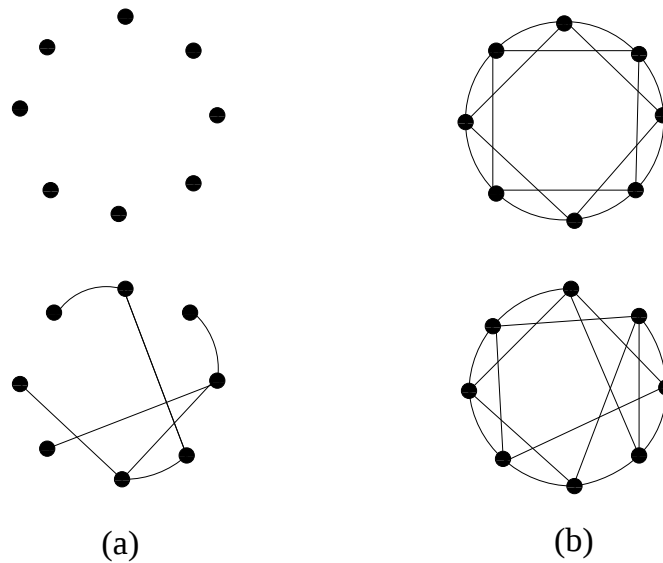
1) Crescimento - partindo de um número fixo de elementos que são conectados randomicamente (modelo-ER), com o intuito de simular uma rede no mundo real, elas são formadas pela adição contínua de novos sítios no sistema;

2) Conexão Preferencial - redes reais apresentam uma conexão preferencial. Estes dois aspectos de redes reais não são incorporados nos modelos que assumem um número fixo de sítios N que são randomicamente conectados (modelo-ER figura 3.4 (a)), onde uma rede randômica apresenta N sítios conectados com probabilidade p_{ER} [21]. O número total de conexões do sistema é dado por $n = p_{ER}N(N - 1)/2$. O exemplo mostra uma rede com $N = 10$ sítios para $p_{ER} = 0,0$ e $p_{ER} = 0,2$. Para $p_{ER} = 0,0$ não há conexões no sistema. A figura mostra o resultado para $p_{ER} = 0,2$, obtendo uma rede um total de $n = 9$ conexões. Para $p_{ER} = 1$ a rede é completamente conectada. A figura 3.4 (b) mostra o modelo proposto por Watts e Strogats, partindo de uma rede regular em uma dimensão com os vizinhos mais próximos conectados.

A ilustração apresenta uma rede com $N = 8$ sítios. Para $p_{WS} = 0$ o sistema é uma rede regular com $2N = 20$ conexões. Para $p_{WS} = 0,3$, $2p_{WS}N = 6$ conexões foram reconectadas randomicamente. Note que para $p_{WS} = 1$ é obtida uma rede randômica, equivalente ao modelo *ER* com $p_{ER} = \langle k \rangle / N = 0,4$. Mas ambas têm uma característica comum, que é a probabilidade nula de encontrar um sítio fortemente conectado, isto é, com grande k . Os sítios com grande conectividade são praticamente ausentes. Em contraste, a lei de potência para as redes estudadas, indica que sítios com muitas conexões têm probabilidade não nula de ocorrer.

Em suma, redes reais expandem continuamente pela adição de novos sítios

Figura 3.4: Ilustração dos modelos de (a) Erdős-Rényi e (b) Watts-Strogatz.



Fonte: O Autor.

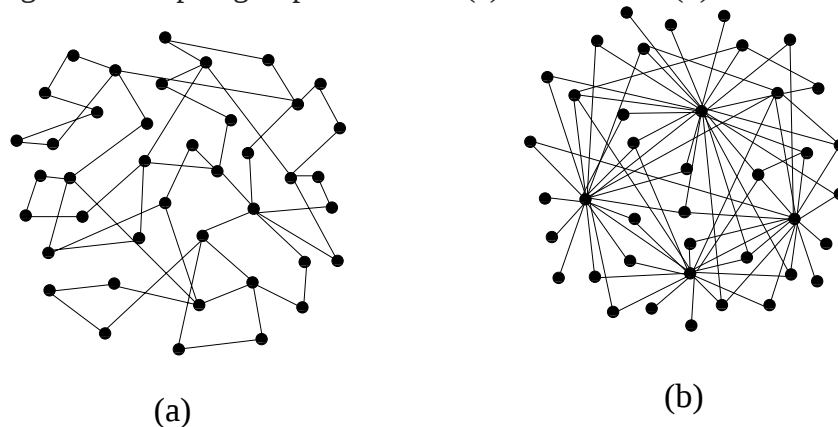
e conectam-se preferencialmente a outros que já estão presentes no sistema. Modelos de redes randômicas, as quais, assumem que sítios são conectados randomicamente e uniformemente, contrastam com sistemas reais que exibem conectividade preferencial, como visto no exemplo do ator novato atuar preferencialmente com ator mais famoso. A probabilidade com a qual um novo sítio se conecta a sítios já presentes na rede não é uniforme e há uma grande probabilidade deste ser conectado a um sítio que tem um grande número de conexões.

A maior investigação até hoje foi feita por Erdős-Renyi [22], onde foi realizado o primeiro estudo de aspecto estatístico sobre grafos randômicos baseado em um método probabilístico. O modelo era simples, assumia que todos os sítios da rede eram equivalentes, e quaisquer pares eram conectados com a mesma probabilidade P . Dentre outras propriedades (Veja figura 3.5 (a)), Erdős e Renyi observaram o surgimento de uma espécie de “enraizamento” dos sítios com relação a probabilidade $P(k) = e^{-a} a^k / k!$, onde k são as conexões e a é a inclinação da reta ajustada.

3.3 Rede Sem Escala

Uma classe de redes complexas que tem recebido grande atenção é a rede sem escala (figura 3.5 b), para a qual a conectividade ou número de conexões de cada sítio, apresenta uma dependência estatística tipo lei de potência. Então, em uma rede sem escala, um número pequeno de sítios possui uma grande conectividade, enquanto que a maioria dos sítios são encontrados com baixa conectividade. Especificamente $P(k) \sim k^{-\gamma}$ onde $\gamma > 1$ denota a probabilidade de encontrar um sítio com conectividade entre k e $k + dk$. A distribuição tipo lei de potência fica evidente, como uma consequência de dois mecanismos genéricos que já foram mencionados anteriormente. Há evidências experimentais de que a rede neural em determinadas áreas do cérebro pode ser designada por uma rede sem escala [23].

Figura 3.5: Topologias para as redes (a) randômica e (b) sem escala.



Fonte: O Autor.

A arquitetura das conexões da rede neural é um objeto de intensa investigação. Existem vastas e crescentes informações na literatura [24] de como (ou qual) seria o modelo ideal para descrevê-la. Mesmo que um modelo tridimensional de neurônios acoplados seja o ideal, resultados podem ser obtidos através do estudo de uma rede unidimensional com a qual ainda retém algumas das características gerais das redes com dimensões maiores. Deste ponto de

vista, usamos uma rede unidimensional com N neurônios governados por uma dinâmica de disparos simulados pela equação (2.14), a qual apresenta a seguinte forma quando queremos fazer um estudo de mapas acoplados:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + \left[x_n^{(i)} \right]^2} + y_n^{(i)} + C_n^{(i)} x_n^{(i)} \\ y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde o acoplamento $C^{(i)}$ é calculado no tempo de escala rápido. Usamos $\sigma = \beta = 0,001$ para todos os neurônios acoplados.

Uma investigação comum de um modelo neural é caracterizada pela conectividade alta dos neurônios e que o termo de acoplamento é um campo produzido por todos os neurônios. Assim $C_n^{(i)}$ tem a seguinte forma,

$$C_n^{(i)}(x_n^{(i)}) = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}, \quad (3.2)$$

onde N é o tamanho ou o número de sítios da rede e ε é a intensidade de interação com a qual os sítios da rede estão acoplados.

Consideramos também que a descrição não leva em conta a distância entre os neurônios. Uma rede sem escala tem como característica uma distribuição de conexões que seguem uma dependência do tipo lei de potência $P(k) \sim k^{-\omega}$ onde o expoente ω está contido no intervalo entre 2,0 e 2,2 [25], com um termo de acoplamento

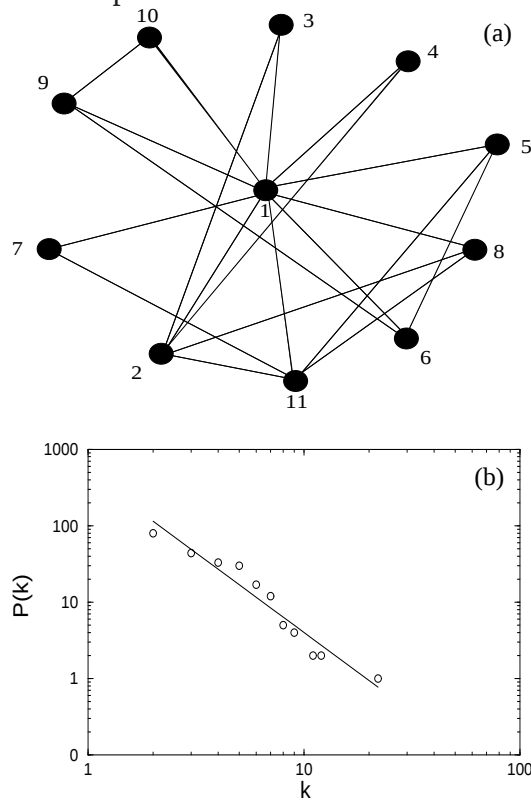
$$C_n^{(i)}(x_n^{(i)}) = \frac{\varepsilon}{k^{(i)}} \sum_{j \in I} g_{ij} x_n^{(j)}, \quad (3.3)$$

onde $\varepsilon > 0$ cada sítio i é acoplado com um determinado I que pertence a $k^{(i)}$

outros sítios escolhidos aleatoriamente ao longo da rede, e g_{ij} é a matriz de adjacências.

A rede sem escala é obtida por s passos, onde $s = 0, 1, 2, \dots, s_{max}$ tal que iniciamos com uma rede com $N_0 = 11$ sítios representada na figura 3.6 (a). Para cada passo s é adicionado um novo sítio na rede de tamanho N_s , tal que é conectada a $\ell \geq 2$ sítios já presentes. As conexões ocorrem preferencialmente aos sítios mais conectados, que são governados pelo uso de uma probabilidade diferente para cada sítio $P_s^{(i)} = k_s^{(i)} / N_s$, onde $k_s^{(i)}$ é o número de conexões por sítio para cada passo s . A figura 3.6 (b) mostra o histograma para a conectividade k , para a rede com $N = 230$.

Figura 3.6: (a) esquema da condição inicial para a rede sem escala com $N_0 = 11$ sítios. (b) distribuição final da conectividade para uma rede com $N = 230$ sítios.

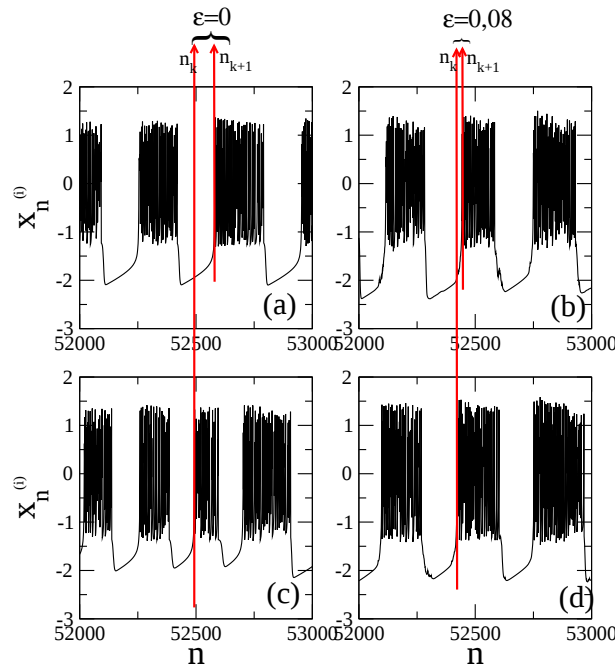


Fonte: O Autor.

Um efeito possível ao acoplamento é ilustrado na figura (3.7), onde é mostrada a série temporal da variável rápida para dois neurônios distintos na rede.

Quando não existe acoplamento há uma incoerência nos disparos e há uma determinada separação entre as setas em vermelho (figuras 3.7(a) e 3.7(c)). Para $\varepsilon \neq 0$ as fases dos disparos se aproximam, correspondendo à uma possível sincronização dos disparos. Note que a separação entre as setas para este caso é mínima, figuras 3.7 (b) e (d).

Figura 3.7: Evolução temporal da variável rápida.



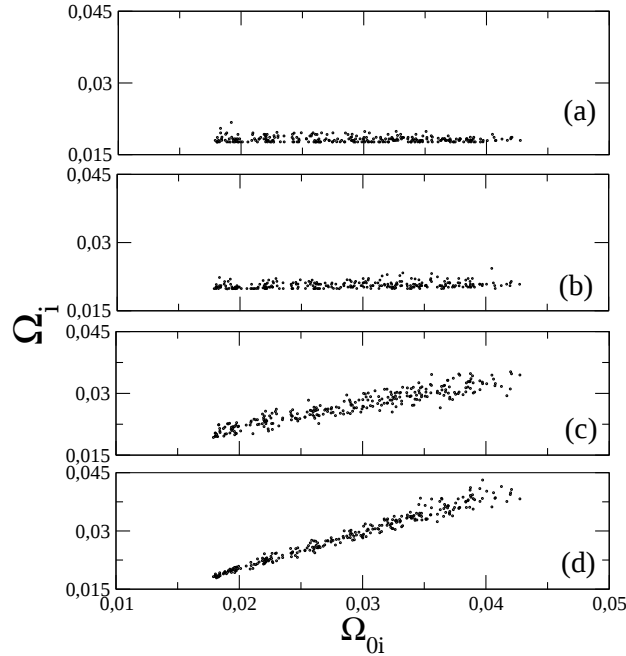
Dois mapas selecionados ($\alpha^{(i)} = 4, 1$ e $\alpha^{(i)} 4, 2$) em uma rede sem escala com $\varepsilon = 0$ [(a) e (c)] e $\varepsilon = 0,08$ [(b) e (d)]. As setas em vermelho mostram uma aproximação dos n_k disparos quando o acoplamento é diferente de zero.

Fonte: O Autor.

Se as fases dos osciladores estão sincronizadas podemos caracterizar a sincronização dos disparos pela existência de platôs de frequência. Isto pode ser feito pela comparação da frequência $\Omega^{(i)}$ de um neurônio acoplado, dado pela equação 2.19, com frequências sem perturbação para neurônios desacoplados $\Omega_0^{(i)}$. A figura 3.8 mostra como um platô comporta-se em função da intensidade do acoplamento. À medida que a constante de acoplamento vai diminuindo (partindo da figura (a) para a figura (d)) vemos que o platô sofre uma inclinação,

indicando que, para $\varepsilon \sim 0,01$, a variação das frequências crescem linearmente e conseqüentemente a frequência perturbada assemelha-se a sem perturbação.

Figura 3.8: Frequência dos disparos para uma rede sem escala versus a frequência da rede desacoplada.



Em (a) $\varepsilon = 0,10$; (b) $\varepsilon = 0,07$; (c) $\varepsilon = 0,03$ e (d) $\varepsilon = 0,01$.

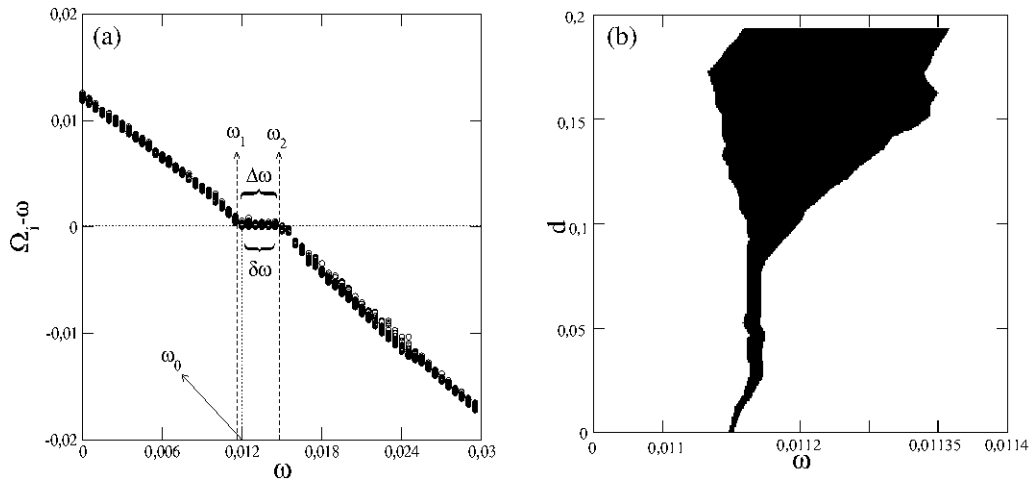
Fonte: O autor.

3.4 Controle da Sincronização dos Disparos por meio de um Sinal Externo

Dada a existência de um estado de disparos sincronizados, estamos interessados em suprimir este estado mediante a aplicação de um sinal periódico externo. Consideramos tal intervenção em apenas um neurônio $i = S$ (os demais neurônios permanecem inalterados), ao qual um termo $d \sin(\omega n)$ é aplicado com uma determinada frequência e amplitude, d e ω , respectivamente.

Usamos valores da intensidade de acoplamento para os quais a rede sem perturbação externa ($d = 0$) apresenta sincronização dos disparos. As respectivas frequências Ω_i são determinadas para um valor comum, como mostrado na figura 3.9(a), onde as diferenças de frequências ($\Omega_i - \omega$) em função de ω

Figura 3.9: Frequências de Travamento.



(a) diferença de frequências dos disparos versus a frequência externa para uma rede sem escala. (b) língua de Arnold para a amplitude das frequências versus a frequência externa para o sítio $S = 1$ com amplitude $d = 0,05$.

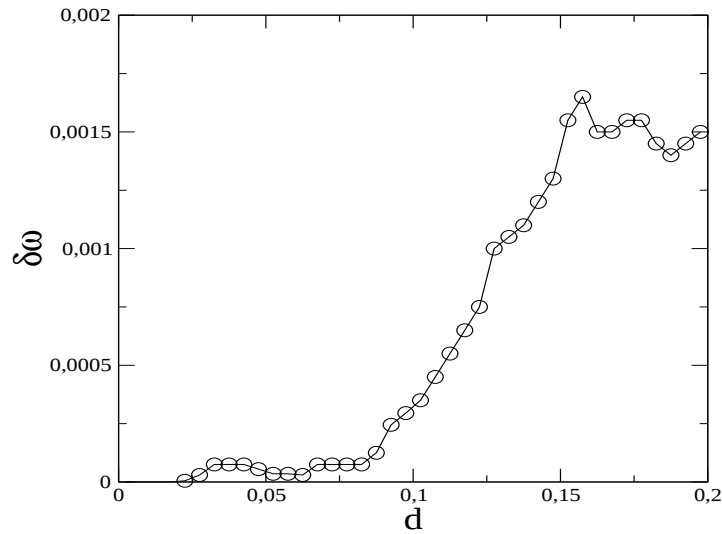
Fonte: O Autor.

são exibidas, para todos os neurônios da rede. Verificamos uma região de travamento $[\omega_1, \omega_2]$ com tamanho $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Como frequência sem perturbação ω_0 não é localizada no meio do intervalo de travamento de fase, consideramos também a distância $\delta\omega = \omega_2 - \omega_0$.

O intervalo da frequência de travamento mostrado na figura (3.9) é a seção de corte de uma língua de Arnold no plano nos parâmetros da amplitude versus a frequência externa. Essa estrutura semelhante a uma língua caracteriza uma região onde a frequência dos disparos sincronizados são mantidos iguais a frequência do sinal externo. Essa estrutura é assimétrica, especialmente para amplas amplitudes, como ilustrado na figura (3.10), onde a distância δ como uma função da amplitude do sinal. Aumentando-se muito a amplitude do sinal pode-se danificar um neurônio biológico.

Uma particularidade interessante é quando o tamanho da rede aumenta, como ilustrado na figura 3.11 (a), onde os intervalos $\Delta\omega$ são estudados em função do inverso do tamanho da rede $1/N$. Como as conectividades da rede sem escala apresentam uma estatística do tipo lei de potência, espera-se ter

Figura 3.10: Distância entre a frequência de disparos sem perturbação e o maior intervalo de travamento ω_2 .



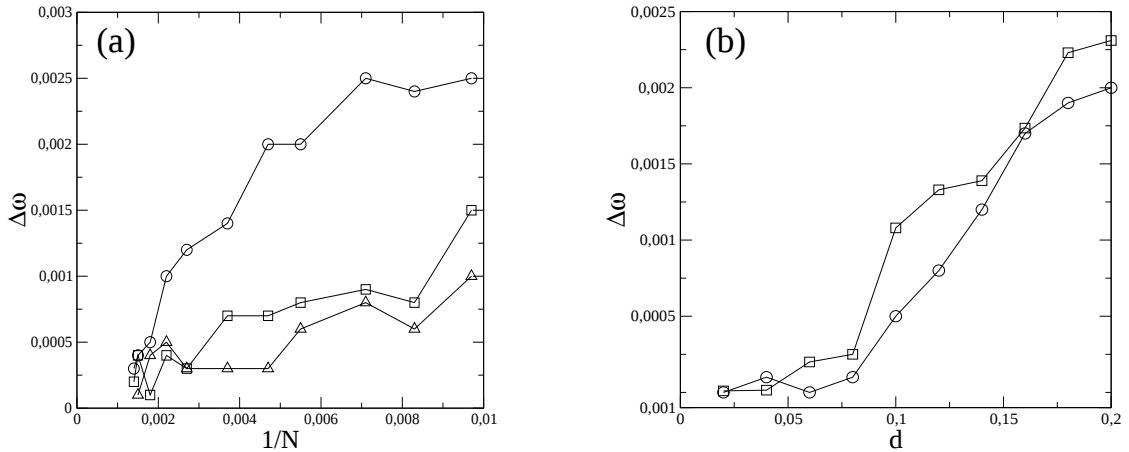
Os parâmetros são os mesmos usados na figura (3.9).

Fonte: O autor.

mais sítios com baixa conectividade e poucos fortemente conectados. Assim, na figura 3.11(a) mostramos os resultados de quando o sinal é aplicado ao sítio mais conectado (círculos), e aos dois seguintes sítios mais conectados (quadrados e triângulos), segundo a distribuição e grau de conexões. Portanto, para todos os casos o tamanho da língua decresce com $1/N$, significando que o intervalo de travamento torna-se menor para redes grandes, o que poderá deixar a intervenção do sinal praticamente inviável. Uma possibilidade para contornar este problema é usar mais que um neurônio para controlar ao mesmo tempo [12]. Com mais perturbações espera-se um aumento no tamanho da língua de travamento. Na prática não sabemos a princípio quais são os sítios mais conectados, uma vez que tal experiência de intervenção seria realizado em um pedaço de tecido com macroscópicas e escassas informações sobre as conexões existentes. Então, comparamos o efeito de uma perturbação ($N_p = 1$) aplicada ao sítio mais conectado e o efeito de múltiplas perturbações ($N_p = 10$) aplicadas a sítios escolhidos randomicamente. Nossos resultados são mostrados na figura 3.11(b). Em ambos os casos as línguas dilatam-se e mostram que o uso

de perturbações múltiplas escolhidos aleatoriamente produzem o mesmo efeito de controle que para um única perturbação no sítio mais conectado.

Figura 3.11: (a) Largura dos intervalos de frequências de travamento versus o inverso do tamanho da rede. (b) $N_p = 10$ perturbações aplicadas e escolhidas aleatoriamente.



Para $N_p = 1$ para o sítio mais conectado (círculos), o segundo mais conectado (quadrados) e o terceiro mais conectado (triângulos). (b) $N_p = 10$ perturbações aplicadas e escolhidas aleatoriamente.

Fonte: O Autor.

3.5 Supressão de Sincronização com um Sinal de Realimentação

Semelhante ao caso da perturbação com o sinal externo, consideramos a possibilidade de suprimir tais ritmos indesejáveis por meio de um sinal de realimentação de acordo com o procedimento proposto por Rosenblum e Pikovsky [13, 26]. A estrutura acoplada (em nosso caso, uma rede sem escala) é representada por um termo que inclui um campo médio X_n adicionado na equação 2.14. Este termo é aplicado somente na variável que representa a dinâmica rápida de cada neurônio que gera o trem de picos. Para que isto ocorra mesmo quando os neurônios estão acoplados, é necessário que os valores das variáveis lentas sejam comparativamente pequenas.

Na sequência, apresentamos os resultados do procedimento para suprimir a

sincronização dos disparos neurais por meio de um controle de realimentação no que diz respeito a sua dependência no campo médio:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + \left[x_n^{(i)} \right]^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon X_n + \varepsilon_f X_{n-\tau} - \varepsilon' X_n \\ y_{n+1}^{(i)} &= y_n^{(i)} - \sigma x_n^{(i)} - \beta, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.4)$$

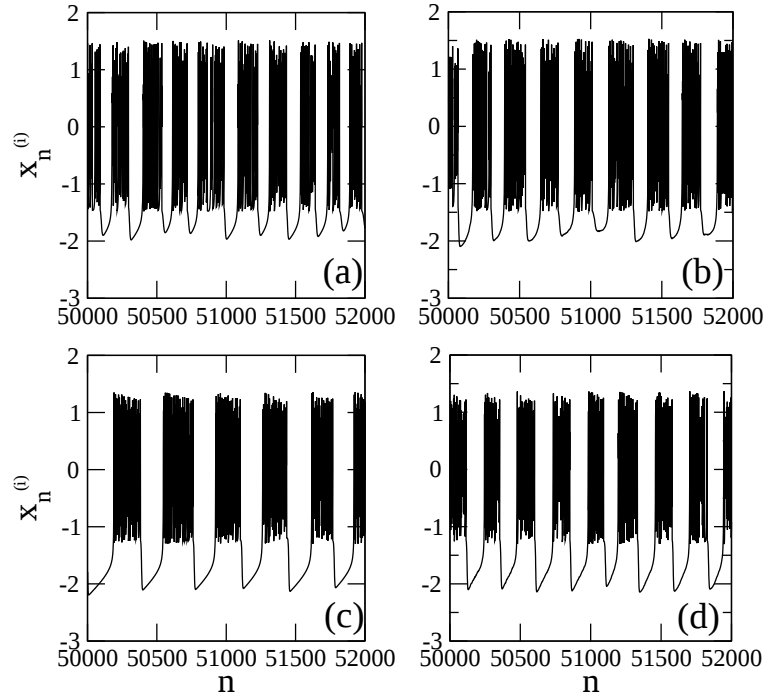
onde X_n representa o campo médio definido como,

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^{(i)}. \quad (3.5)$$

Duas condições são importantes, (i) realimentação direta que leva em consideração o campo médio atual e suas τ pré-iterações, $X_{n-\tau}$, com uma intensidade de acoplamento ε_f de tal maneira que $\varepsilon' = 0$; (ii) realimentação diferencial, para que o termo de controle seja a diferença entre a corrente e os campos médios realimentados, com $\varepsilon' = \varepsilon_f$. Há diferenças notáveis entre estes dois esquemas de controle, quando se considera sua eficiência em tirar o sistema fora de sincronização.

Um exemplo de supressão da sincronização dos disparos é a figura (3.12) onde observamos a evolução temporal de dois neurônios com (a) $\alpha = 4,1$ e (c) $\alpha = 4,2$, mostrando-se uma proximidade entre os tempos para os quais os neurônios começam a disparar. Note que o acoplamento não destrói a característica irregular (caótica) dos picos dos neurônios individuais, apenas sincroniza o início dos disparos. Na figura 3.12 (b) e (d), a evolução temporal das variáveis rápida de dois neurônios da rede com um sinal de realimentação diferencial, $\varepsilon' = \varepsilon_f = 0,08$ e atraso de tempo $\tau = 140$, aplicado no instante $n = 51000$, mostra o resultado para a supressão de sincronização.

Figura 3.12: Evolução temporal da variável rápida para o mapa de Rulkov.



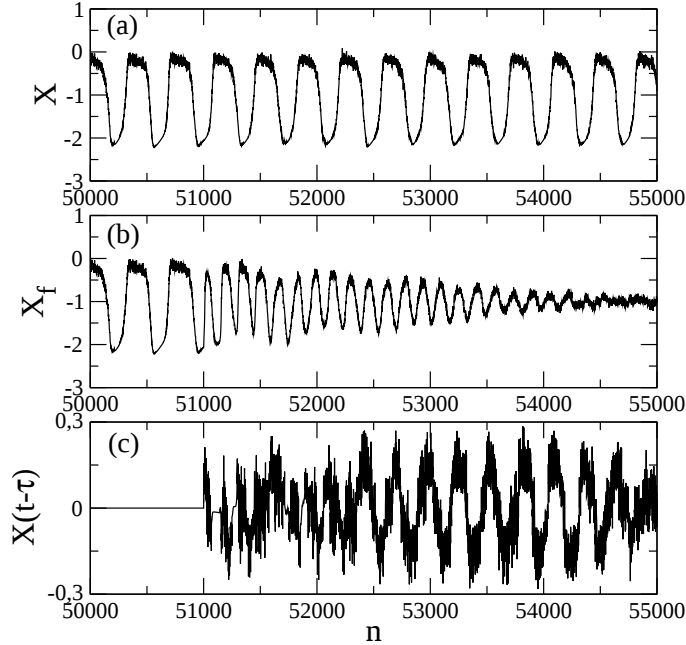
Em (a) $\alpha = 4,2$ e (c) $\alpha = 4,1$ para uma rede sem escala com $N = 230$ neurônios com uma força de acoplamento $\varepsilon = 0,08$ sem sinal de realimentação. (b) e (d) são situações respectivas para um sinal de realimentação com $\varepsilon_f = 0,08$ e $\tau = 140$.

Fonte: O Autor.

O campo médio X_f apresenta as flutuações ruidosas de pequena amplitude, (Veja figura 3.13 (b)) indicando que os neurônios não estão disparando em fase quando comparada com a figura 3.13 (a), onde o campo médio X oscila sem nenhuma perturbação. O sinal de realimentação, descrito na figura 3.13 (c) tem as amplitudes consideravelmente menores que as oscilações médias do campo. É importante que o sinal de realimentação seja uma perturbação externa pequena de modo a não danificar os neurônios.

Um estado de disparos sincronizados é caracterizado por oscilações de grande amplitude do campo médio macroscópico, visto que as flutuações de pequena amplitude marcam a ausência de sincronização. Assim, uma medida quantita-

Figura 3.13: Série temporal para o campo médio de uma rede sem escala.



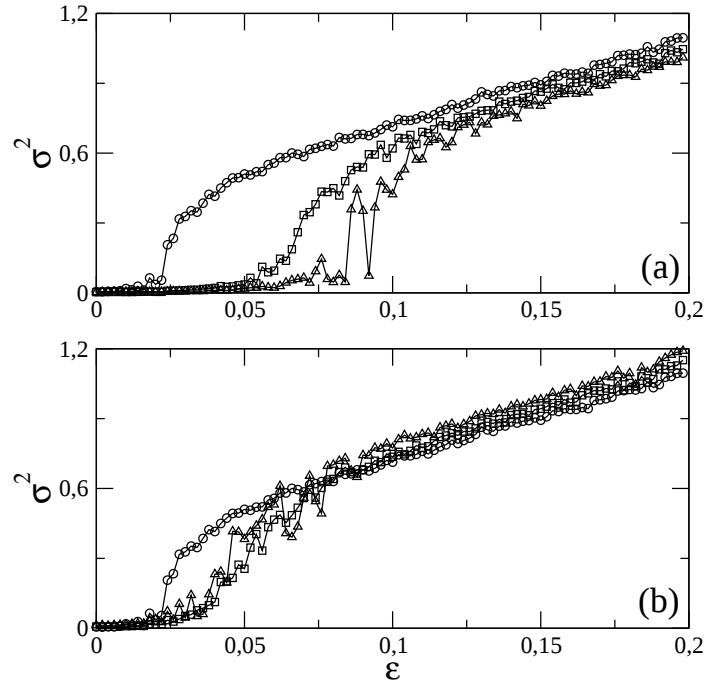
Para $N = 230$ neurônios e $\varepsilon' = 0,08$, (a) $\varepsilon_f = 0$; (b) $\varepsilon_f = 0,08$. (c) Evolução temporal do sinal de realimentação diferencial $X_{n-\tau}$ com $\tau = 140$.

Fonte: O Autor.

tiva da sincronização é a variância do campo médio $\sigma^2 = \text{Var}(X)$. Na figura 3.14 descrevemos esta quantidade *versus* a amplitude de acoplamento ε para três valores do acoplamento ε_f . Quando não há controle ($\varepsilon_f = 0$, círculos abertos na figura) a sincronização dos disparos é verificada se o acoplamento ε é maior que o valor crítico ε_c . Nestas figuras os cálculos foram feitos tanto para a supressão diferencial (figura 3.14(a)) quanto para a direta (Veja figura 3.14(b)) em que o tempo de atraso igual a 140, $\varepsilon_f = 0,2$ (quadrados) e $0,04$ (triângulos). O valor crítico ε_c é maior para o caso diferencial quando comparado ao direto.

O procedimento efetivo no controle da supressão de sincronização pode ser quantificado por meio do coeficiente de supressão [26]

Figura 3.14: Variância do campo médio *versus* a intensidade de acoplamento ε .



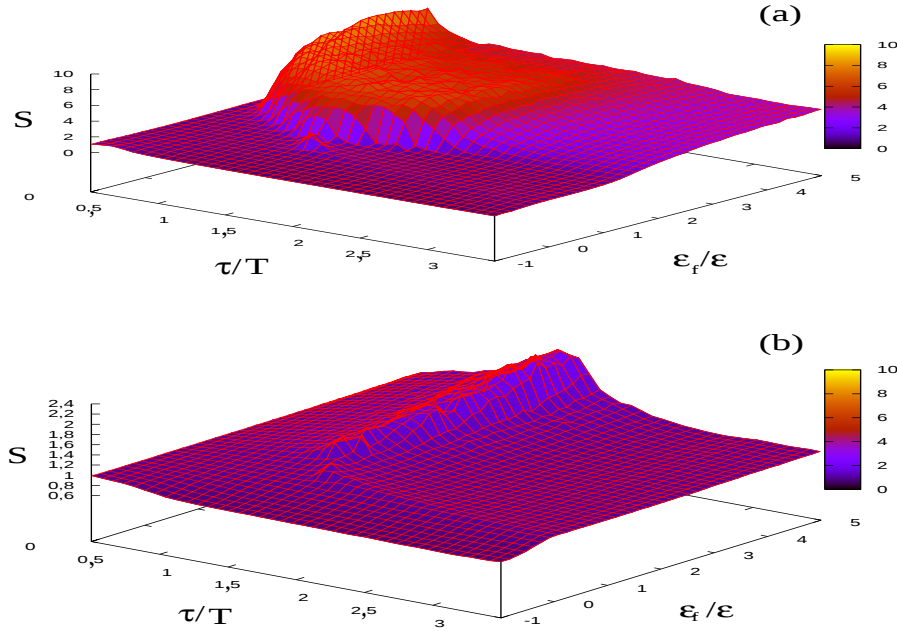
Para a rede sem escala com $N = 230$ sítios, (a) diferencial e (b) direto para $\varepsilon_f = 0$ (círculos), $\varepsilon_f = 0,2$ (quadrados) e $\varepsilon_f = 0,04$ (triângulos) e um comum tempo de atraso $\tau = 140$. Em (b) temos $\varepsilon = \varepsilon_f$.

Fonte: O Autor.

$$S = \sqrt{\frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X_f)}}, \quad (3.6)$$

onde X e X_f são os valores do campo médio na ausência e presença de controle, respectivamente. A aplicação da realimentação é eficiente quando a variação do campo médio controlado diminui, independentemente de seu valor sem controle, tendendo assim a um valor infinito de S . Em geral, quanto maior é o valor de S , mais eficiente será o sinal aplicado para suprimir a sincronização. É conveniente analisar as regiões com grandes valores de S , (domínios) variando o valor de ε_f (normalizado por ε) e o tempo de atraso τ (normalizado pela média dos disparos com período T) que pode se visto nas figuras (3.15) e (3.16).

Figura 3.15: Domínios de supressão de sincronização dos diparos neurais para o parâmetro de acoplamento ε_f (acoplamento *versus* tempo de atraso), indicado pelos valores do coeficiente de supressão S .



Considerando redes (a) sem escala e (b) acoplamento global para $N = 230$ neurônios para um controle diferencial.

Fonte: O Autor.

A figura 3.15(a) mostra os domínios (valores de S indicados em uma escala de cores) para parâmetros estudados neste trabalho e para um esquema de controle diferencial. Para pequenos valores do tempo de atraso (menor que $\sim 0,5T$) o controle alcança uma supressão boa dos estados sincronizados para um decréscimo dos valores de ε_f . Para $\tau/T \gtrsim 1,0$ a fronteira do domínio de controle estabiliza para $\varepsilon_f/\varepsilon \gtrsim 1,0$. Estes resultados contrastam com os obtidos para um acoplamento global onde C (equação (3.3)) tem a forma

$$C_n^{(i)}(x_n^{(i)}) = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N x_n^{(j)}, \quad (3.7)$$

onde o número de neurônios é o mesmo que na rede sem escala (figura. 3.15 (b)). O coeficiente de supressão assume somente valores pequenos que mal podemos distinguir um domínio de controle centrado em $\tau \sim T$. Estas diferenças

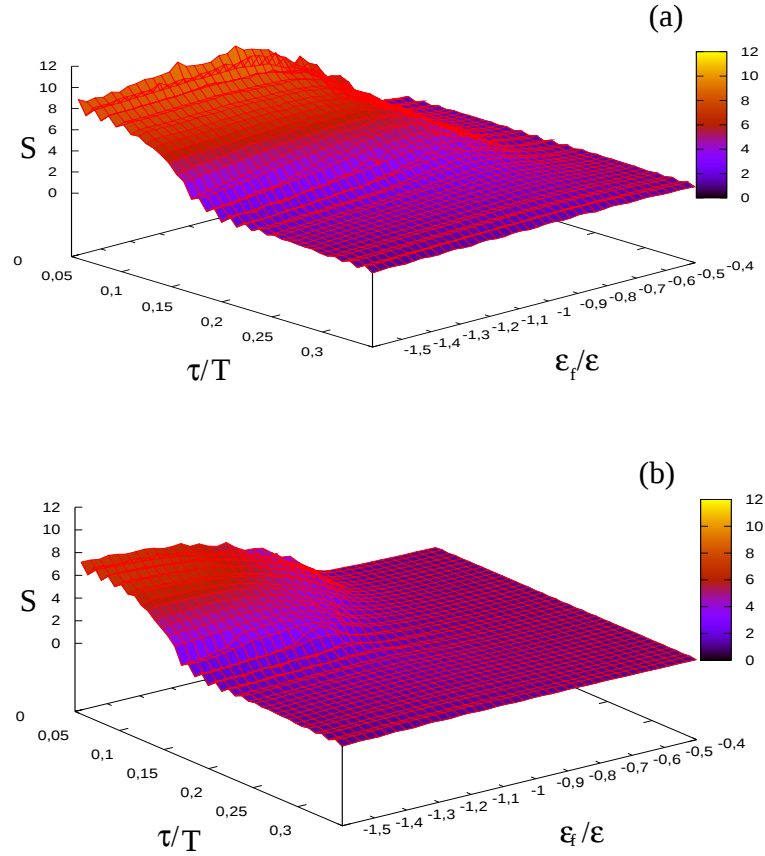
qualitativas levam a conclusão que a eficiência total da supressão de sincronização de uma rede sem escala é mais elevada que para uma estrutura de campo médio quando considera-se o mesmo número de neurônios.

A maior eficiência da supressão de sincronização em redes sem escala no que diz respeito ao campo médio, é uma consequência da existência de neurônios fortemente conectados na rede. Este fato é amplamente reconhecido em estruturas de interesse social e epidemiológica, sendo responsável pela disseminação rápida de informações e doenças, respectivamente. Em geral, com alguns sítios fortemente conectados, a informação pode propagar-se com mais eficiência do que em um esquema de acoplamento onde a mesma informação seja diluída ao longo da estrutura, desde que seja propagada através do campo médio de todos os sítios.

Os domínios são descritos na figura 3.16 (a) e (b) para o controle direto de rede sem escala e de campo médio, respectivamente. Embora a rede sem escala seja mais eficaz do que uma estrutura de acoplamento global para poder suprimir a sincronização, em ambos os casos encontramos domínios com uma preferência para valores negativos do acoplamento. Além disso, os domínios são completamente similares, sendo caracterizados por valores menores do tempo de atraso no que diz respeito ao exemplo do controle diferencial. Neste sentido, poderíamos concluir que, um controle direto usado em uma rede sem escala não é muito diferente de aplicado em uma estrutura de acoplamento global. Ainda não temos uma explicação para este fato, mesmo no sentido qualitativo.

Na rede sem escala obtida pelo procedimento de iteração neste trabalho, adicionamos um novo sítio a cada passo do processo com l conexões, tal que novos neurônios têm a maior probabilidade de serem conectados a outros que são fortemente conectados. Então, podemos esperar que algumas propriedades da rede dependam do número l de ligações. Na figura (3.17) mostramos o coeficiente de supressão para diferentes números de ligações $l=1$ (círculos), $l=2$ (triângulos) e

Figura 3.16: Domínios para a supressão de sincronização dos disparos neurais no plano acoplamento *versus* tempo de atraso, indicado pelos valores do coeficiente de supressão S .



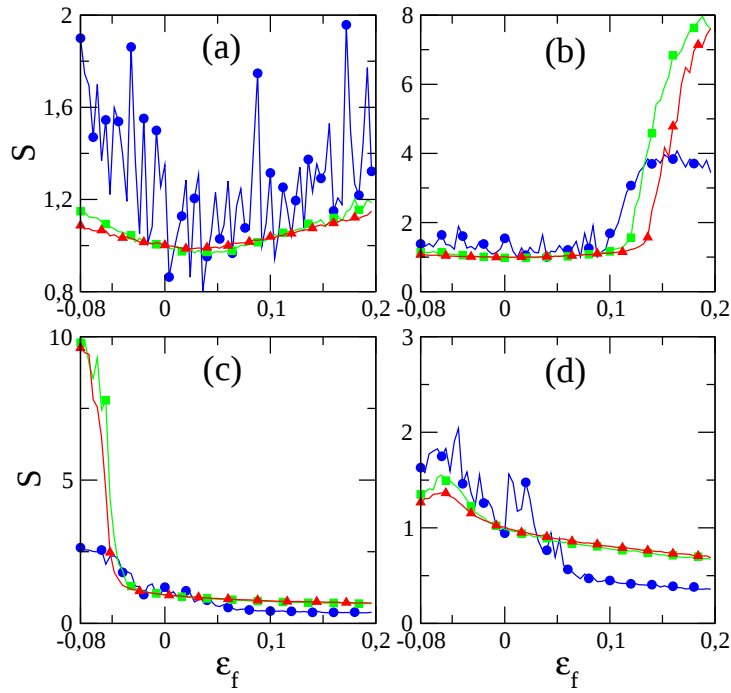
Considerando redes (a) sem escala e (b) acoplamento global para $N = 230$ neurônios com um controle direto.

Fonte: O Autor.

$l=3$ (quadrados). No controle diferencial para o caso de um tempo pequeno de atraso, figura 3.17(a) a eficiência da supressão é pequena para qualquer número de ligações, mas aumentado o tempo de atraso, figura 3.17(b), a supressão aumenta quando o valor de ϵ_f cresce. Esse aumento fica mais evidente para $l=2$ e $l=3$. Isto é explicado pelo fato de que quando $l=1$ a rede tem uma distribuição de conexões muito esparsa mas não muito densa o suficiente que não permita o efeito de acoplamento. Este fato foi observado quando um procedimento de controle foi usado com um sinal externo periódico [27]. Na 3.17(c) temos uma situação similar, mas agora para um pequeno tempo de atraso usando o controle direto, a eficiência decresce com ϵ_f , mostrando existência de um domínio de

controle para um τ pequeno e constante de acoplamento negativo (figura 3.16 (d)). A ausência de um domínio de controle para grandes tempos de atraso é manifestada no coeficiente de supressão observado na figura 3.17(d).

Figura 3.17: Coeficiente de supressão em função do acoplamento ε_f para uma rede sem escala.



Para $l=1$ (círculos), $l=2$ (triângulos) e $l=3$ (quadrados). Consideramos um controle direto para (a) $\tau = 4$ e (c) $\tau = 35$, e um controle diferencial para (b) $\tau = 4$ e (d) $\tau = 35$.

Fonte: O Autor.

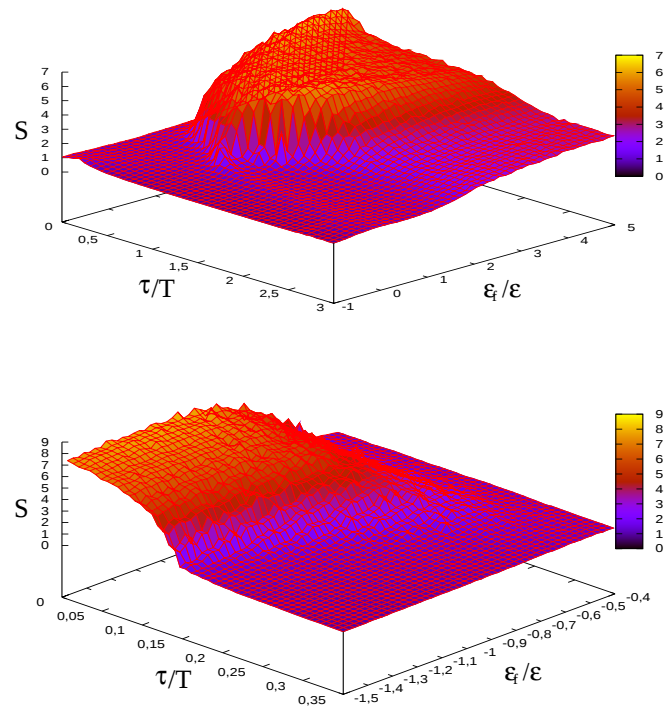
Com o avanço dos estudos sobre o cérebro, o aprimoramento e um maior domínio de redes, em uma publicação importante [28] onde os autores afirmam que uma rede com ligações seguindo uma distribuição *lei de potência exponencialmente truncada*,

$$P(k) = k^{\alpha-1} e^{k/k_c}, \quad (3.8)$$

apresenta uma topologia mais próxima das redes neurais observadas experimen-

talmente do que uma rede sem escala, onde k_c e α são parâmetros. Consideramos $P_0 = 500$, $\alpha = 2,08$ e $k_c = 7$. Implementamos a distribuição descrita acima baseando-se nos resultados já encontrados para a rede sem escala para uma possível comparação. Observando cuidadosamente na variação do parâmetro de supressão S na figura 3.18 confrontarmos com as figuras 3.16 (a) e 3.16 (b), podemos afirmar que os domínios de supressão produzidos tanto para a rede sem escala, quanto para uma rede com neurônios distribuídos com uma lei de potência exponencialmente truncada, são os mesmos. Só há diferença no módulo do domínio de supressão S que fica entre uma rede sem escala e um acoplamento de campo médio (acoplamento global).

Figura 3.18: Coeficiente de supressão em função do acoplamento ε_f e do tempo de atraso τ (ambos normalizados), para uma distribuição lei de potência exponencialmente truncada.



Fonte: O Autor.

4 *Redes Acopladas*

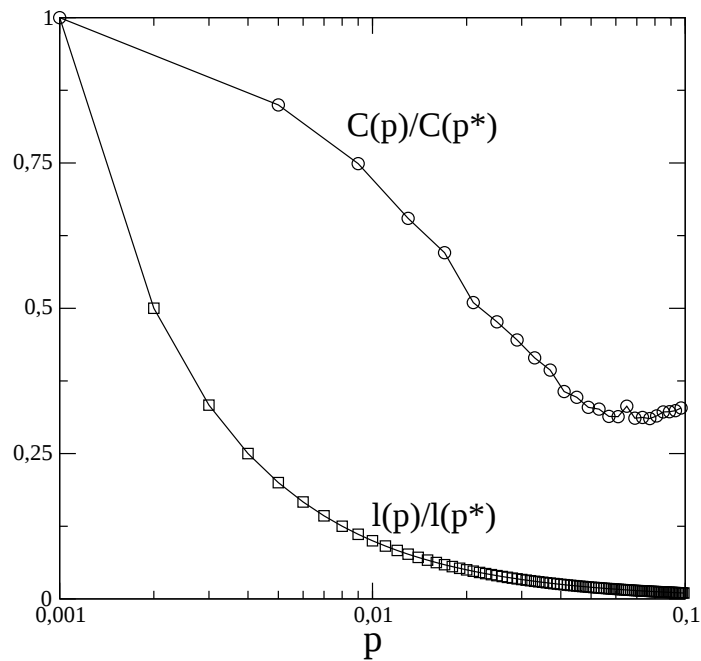
Na natureza, muitas redes complexas (como por exemplo, redes biológicas) são modulares, ou seja, são compostas por subgrafos com conectividade interna e externa. Alguns resultados interessantes sobre a sincronização em redes modulares têm sido relatados recentemente [29]. Sabe-se que a sincronização de redes depende da interação entre as propriedades intrínsecas do sistema individual e da topologia da rede. As atividades síncronas têm relações estreitas com estados cerebrais patológicos e funções cognitivas. A rede cortical é muito complexa, apresentando hierarquia e estruturas modulares agrupadas. Assim, estudar a dinâmica de uma rede neural de sub-redes também é muito significativo para os neurocientistas.

Consideramos sub-redes com propriedades de redes de mundo pequeno. Redes de mundo pequeno é um conjunto de nós com ligações locais, em que alguns nós são aleatoriamente conectados com conexões de longa distância. Estas ligações de longa distância reduzem o número de sinapses percorridas para ligar quaisquer pares de neurônios na rede. Na literatura há trabalhos supondo que algumas regiões do córtex cerebral podem ser descritas por uma rede de mundo pequeno (ou *Small World networks*) [30]. As características para a rede de mundo pequeno que utilizamos obedecem o modelo de Newman e Watts [31], o qual insere “atalhos” em uma rede regular [32]. Para verificar a propriedade de mundo pequeno nos modelos que construímos calculamos o coeficiente de agrupamento, que vem a ser a medida de quão é provável em que os vizinhos de um nó são ligados uns aos outros, e a média da separação entre os sítios,

como são mostrados na figura 4.1. Na rede de mundo pequeno o coeficiente de agrupamento apresenta valor alto e a média de separação é baixa.

Consideramos um agrupamento de M redes com arquitetura mundo pequeno com L neurônios cada (figura 4.2). Um dado sítio tem probabilidade p_i de se conectar com outros sítios dentro de cada rede, e uma probabilidade p_o de um sítio ser conectado com um sítio de outra rede.

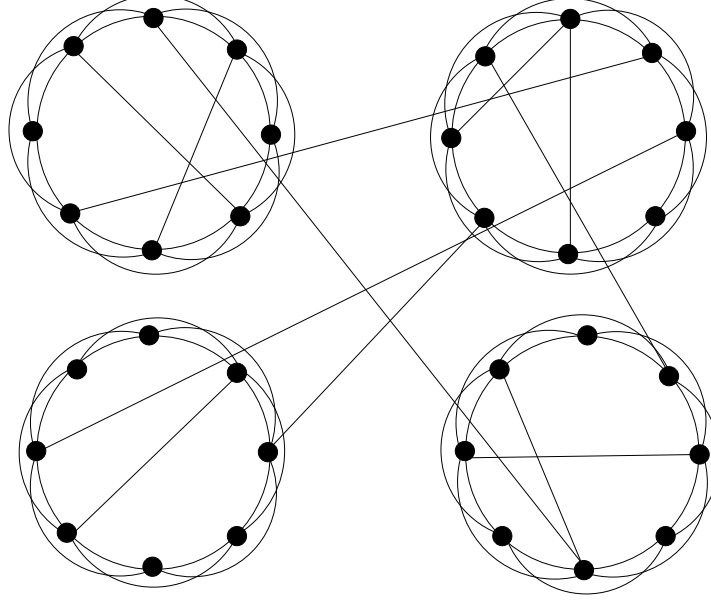
Figura 4.1: Coeficiente de agrupamento (círculos) e a média da separação entre os sítios (quadrados) versus a probabilidade das conexões não locais.



Para $N=100$ e $p^* = 10^{-3}$.
Fonte: O Autor.

Usamos como modelo para este estudo a equação 4.3. Analisamos uma rede neural que tem por características interações químicas. O modelo possui limiar para o qual um neurônio pode ser excitado conforme um sinal por ele absorvido. O termo de acoplamento adicional é prescrito como

Figura 4.2: Representação esquemática de $M = 4$ redes unidimensionais tipo mundo pequeno e cada uma com $L = 8$ sítios.



Fonte: O Autor.

$$V(x_i(n), x_j(n)) = (x_i(n) - V_s)S(x_j(n)), \quad (4.1)$$

onde o potencial reverso $V_s > x_i(n)$ para todo $x_i(n)$ implica que a sinapse é excitatória; supomos $V_s = 2, 0$. O acoplamento S tem a seguinte forma,

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x - \Theta_s)}}, \quad (4.2)$$

onde o parâmetro de saturação $\lambda = 10$ e $\Theta_s = 0,25$ são escolhidos de maneira a proporcionar que cada pico dentro de cada disparo possa atingir o limiar. Assim, o mapa de Rulkov com o termo de acoplamento fica escrito como

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= \frac{\alpha^{(i)}}{1 + \left[x_n^{(i)} \right]^2} + y_n^{(i)} + \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} V(x_n^{(i)}, x_n^{(j)}) \\ y_{n+1}^{(i)} &= y_n - \sigma x_n^{(i)} - \beta, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $i = 1, 2, \dots, ML$, $\varepsilon > 0$ é a intensidade de acoplamento e a_{ij} é a matriz de adjacência com $a_{ij} = 1$ se um neurônio i está acoplado com um neurônio j , e $a_{ij} = 0$ para outros casos.

4.1 Parâmetro de Ordem

O cálculo do parâmetro de ordem R caracteriza o surgimento da sincronização dentro da rede. Introduzido por Kuramoto [33] é dado por

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \varphi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (4.4)$$

onde R_n e φ_n são amplitude e ângulo, respectivamente, de um vetor fase para uma rede unidimensional como condições de contorno periódicas.

A equação (4.4) é composta por um termo imaginário que fisicamente não tem significado. O termo $\exp(2\pi i x_n^{(j)})$ será decomposto usando a relação de Euler (ou de Moivre)

$$\exp(2\pi i x_n^{(j)}) = \cos(2\pi x_n^{(j)}) + i \sin(2\pi x_n^{(j)}) \quad (4.5)$$

por meio do módulo de um número complexo $z = a + bi$ onde

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.6)$$

Das equações 4.5 e 4.6, segue-se que

$$R_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sqrt{[\cos(2\pi x_n^{(j)})]^2 + [\sin(2\pi x_n^{(j)})]^2}. \quad (4.7)$$

Logo, utilizamos a seguinte forma para o cálculo,

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \phi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\phi(j)), \quad (4.8)$$

para um vetor de fase de uma rede unidimensional. Se a fase ϕ dos disparos permanece descorrelacionada, o valor da soma na equação 4.8 é pequena. Por outro lado, se a fase com que os disparos começam a acontecer aproxima-se assintoticamente, o valor da soma aproxima-se de 1.

Para se analisar a sincronização variando-se o parâmetro de acoplamento e a probabilidade, calculamos a média do parâmetro de ordem dada por

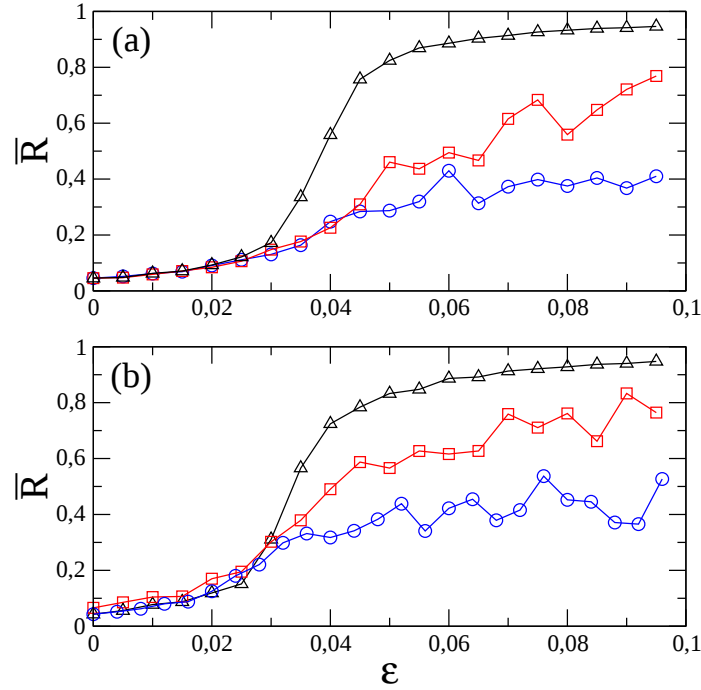
$$\bar{R}_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=m}^T R_n. \quad (4.9)$$

As simulações numéricas realizadas mostram que o estudo sobre agrupamento de redes exhibe sincronização apenas se p_o for maior que um determinado valor crítico. Este valor depende do número de sub-redes e também sabe-se, quanto maior for o agrupamento de redes um valor maior para p_o é necessário. A figura 4.3 mostra a evolução da média temporal do parâmetro de ordem para $p_i = 10^{-2}$ e $L = 100$. Na figura 4.3 (a) temos $M = 2$ e 4.3 (b) $M = 4$, onde $\bar{R}$ é calculado para diferentes valores de p_o . Na ausência de conexões entre as redes e para ε suficientemente grande ocorre $\bar{R} \approx 1/M$. Se p_o e ε são suficientemente grandes o suficiente temos $\bar{R} \approx 1$. Para $\varepsilon = 0$ teremos $\bar{R} \propto (ML)^{-1/2}$ e se $L \gg 1$ ou $M \gg 1$ ocorre que $\bar{R}$ deve ser próximo de zero.

Dentro deste estudo da interação entre redes, realizamos simulações para a intensidade crítica e para o acoplamento em função das intra e interconexões. A intensidade de acoplamento crítico de acordo com a referência é [34]

$$\varepsilon = \frac{C}{p_i(L-1) + p_o(N-L)}, \quad (4.10)$$

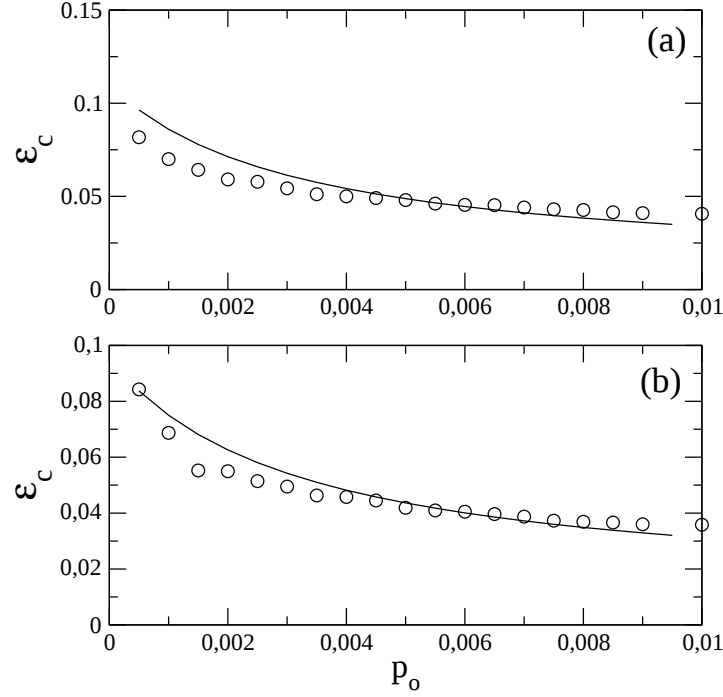
Figura 4.3: Média temporal do parâmetro de ordem como função da intensidade de acoplamento.



Para $p_i = 10^{-2}$ e $L = 100$. (a) $M = 2$ e (b) $M = 4$. Em ambas as figuras $p_o = 0$ (círculos), $p_o = 1,6 \times 10^{-4}$ (quadrados), $p_o = 2 \times 10^{-3}$ (triângulos).
Fonte: O Autor.

onde C depende de um valor limite do parâmetro de ordem médio global $\bar{R}$ para o qual atinge a sincronização global. Os detalhes numéricos são mostrados na figura 4.4 para $p_i=10^{-2}$ e $L = 100$, onde usamos $M = 2$ e $M = 4$ nas figuras 4.4 (a) e 4.4 (b), respectivamente. Em ambas as figuras os círculos representam os valores críticos para o valor limite do parâmetro de ordem igual a 0,95. A linha sólida é o resultado obtido por meio equação 4.10 com $\epsilon_c + \delta$. A probabilidade p_o aumenta e a intensidade de acoplamento crítica para a sincronização global decresce. Isto mostra que as propriedades de sincronização global são ampliadas.

Figura 4.4: $\varepsilon_c \times p_o$. para uma rede com $L = 100$ e $p_i = 10^{-2}$.



Os círculos representam os valores limites do parâmetro de ordem global equivalente a 0,95 e a linha sólida $\varepsilon_c = C/[p_i(L - 5) + p_o(N - L)] + \delta$, onde (a) $M = 2$, $C = 0,07$ e $\delta = 0,045$; (b) $M = 4$, $C = 0,112$ e $\delta = 0,0032$.

Fonte: O Autor.

4.2 Transição de Fase

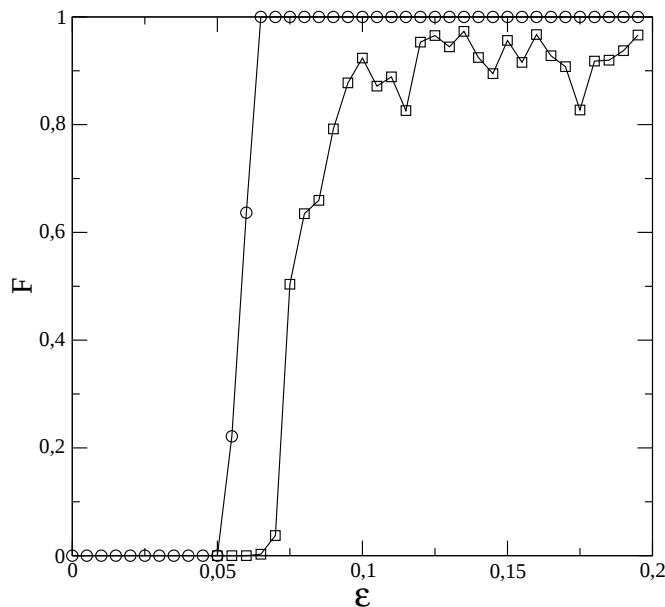
Para estudar a transição do estado não sincronizado para o estado em que os sítios da rede estão sincronizados, definimos a quantidade

$$F = \frac{1}{s} \sum_1^s N_R / \Delta_n, \quad (4.11)$$

onde N_R é o número de ocorrências de $\bar{R} > \zeta$ ($\zeta=0,95$) que encontramos dentro do intervalo Δ_n e s é o número de configurações das conexões distribuídas com probabilidade p_o . Então, F pode ser interpretado como a fração de sincronização

global em um dado intervalo de tempo. Esta quantidade depende da intensidade de acoplamento ε e pode apresentar comportamentos distintos como uma função da probabilidade p_o . Na figura 4.5 mostramos a dependência de F em função de p_o . A transição para a sincronização global é abrupta para $p_o = 10^{-1}$ e $\varepsilon \sim 0,05$, enquanto que para $p_o = 10^{-2}$ é menos abrupta.

Figura 4.5: Fração de tempo onde o agrupamento de redes possui $\bar{R}$ maior que 0,95 versus a intensidade de acoplamento.



Para $L = 100, M = 2, p_i = 10^{-2}, s = 20$ e $p_o = 10^{-1}$ (círculos) e $p_o = 10^{-2}$ (quadrados). Estas duas probabilidades mostram transições distintas para a sincronização global.

Fonte: O Autor.

Tal comportamento está relacionado com as propriedades de cada rede isolada. Se p_o é suficientemente pequeno, cada rede pode ser tratada como independente uma da outra. Portanto, cada rede tende a uma sincronização isolada, levando a uma transição suave. Por outro lado, se p_o é grande, a dinâmica coletiva de cada subrede é fortemente afetada pelas demais sub-redes. A sincronização ocorre rapidamente levando a uma transição abrupta.

5 *Conclusões*

Investigamos o modelo de Rulkov no qual temos dois elementos básicos: (i) a dinâmica neural (com tempo rápido e lento representando a atividade de disparo e picos repetitivos) descrita por um mapa de Rulkov; (ii) a arquitetura das conexões com uma propriedade de livre escala, que pode descrever a função de uma rede neural encontrada por meio de um experimento de ressonância magnética por Chialvo e colaboradores [23]. Consideramos um tipo importante de oscilações coletivas conforme o efeito de acoplamento, que se manifesta como uma sincronização nos disparos neurais.

O uso de uma intervenção externa para o controle da sincronização dos disparos em uma rede de mapas de Rulkov tem muitas similaridades com a sincronização de fase de um oscilador harmônico com uma fonte externa periódica. A estrutura semelhante à língua produzida nos espaços de parâmetros é obtida pelos valores para os quais a sincronização é mantida. Esta estrutura mostra uma forte assimetria, mas o seu tamanho aumenta com a amplitude externa. O tamanho dela diminui rapidamente com o tamanho da rede, tal que maiores tamanhos podem ser obtidos pelo aumento da amplitude aplicada ou pelo uso de uma ou mais perturbações. Mostramos numericamente que dois fatores podem ser obtidos dentro de um experimento de intervenção prático: (i) a frequência externa deve ser maior que a frequência natural da rede e (ii) múltiplos sinais (pelo menos 10) podem ser usados, uma vez que o efeito médio é semelhante ao de um único sinal no sítio com maior número de conexões.

De acordo com a possibilidade de alguns ritmos cerebrais sincronizados estarem relacionados a algumas patologias neurais, consideramos o efeito de uma técnica proposta por Rosenblum e Pikoswsky para suprimir essas oscilações sincronizadas. O método consiste em usar um sinal de realimentação com um certo tempo de atraso e com valores específicos de amplitude e tempo de retardo. O procedimento de supressão é não invasivo e realizado pela aplicação de um sinal externo de pequena amplitude e de uma curta duração de intervalo temporal.

Encontramos domínios de supressão de estados sincronizados para intervalos amplos de alguns parâmetros, e concluímos que um controle efetivo em uma rede sem escala, pode ser obtido por meio da adição de mais de uma conexão para cada passo de tempo. Além de considerarmos uma rede sem escala, consideramos também uma distribuição das conexões com decaimento que segue uma lei de potência exponencialmente truncada, concordando qualitativamente com alguns resultados com respeito as regiões de domínios de supressão no plano de parâmetros.

Em relação ao acoplamento de redes, concluímos que sincronização é somente possível se a probabilidade entre as redes é suficiente grande. Se este for o caso, a transição de estados não-sincronizados ao comportamento sincronizado é abrupta, e isso ocorre para uma intensidade de acoplamento maior que um valor crítico. Este valor crítico pode ser teoricamente previsto, considerando um agrupamento de redes, onde os osciladores acoplados em fase obedecem a um modelo de Kuramoto, que estão de acordo com a previsão teórica dada pelo modelo. Mostramos que, antes da transição para a fase de sincronização global, o sistema sofre estados intermitentes entre os estados sincronizados e não sincronizados. Na transição o estado sincronizado comporta-se como um atrator caótico contendo um número infinito de órbitas periódicas instáveis. Se algumas dessas órbitas tornam-se transversalmente instáveis, a intermitência entre

disparos e estados laminares ocorrem devido à existência de sela caótica. Um estado permanente sincronizado só seria possível se não houver órbita periódica transversalmente e instável. Por outro lado, se a probabilidade dentro das redes é muito pequena, este cenário de uma abrupta transição para a sincronização global pode não se aplicar, e temos uma transição suave para sincronização.

Como trabalhos futuros pretendemos estudar redes neurais acopladas utilizando o modelo de Hodgkin Huxley [38]. Este modelo simula fenômenos relacionados como o caos espaço-temporal e a formação de memórias. O modelo é composto por uma cadeia de equações diferenciais que interagem segundo um acoplamento bem definido, onde o tempo e a variável de estado são contínuas e o espaço é discreto. Na rede de equações diferenciais de Hodgkin-Huxley utilizaremos como topologia para as conexões entre os neurônios, os dados que se encontram na literatura sobre a conectividade do córtex cerebral. Estudaremos a possibilidade de sincronização dos disparos dos neurônios e a forma com que as interações entre as diferentes regiões do cérebro ocorrem devido a influência da conectividade.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Borhnoldt and H. G. Schuster (Eds.) *Handbook of Graphs and Networks* (Wiley-VCH Verlag, 2003).
- [2] R. Albert e A. L. Barabasi, *Review Modern Physics* v.74, n.47, 2002; S. N. Dorogovtsev and J. F.F. Mendes, *Adv. Phys.*, v. 51 n. 1079, 2002.
- [3] A. L. Barabasi e R. Albert, *Emergence of Scaling in Random Networks*. *Science*, v. 286, n. 509, 1999.
- [4] A. L. Barabasi, R. Albert e H. Jeong, *Mean-field theory for scale-free random networks*. *Physica A*, v. 281, n. 69, 2000.
- [5] A. P. S. de Moura, Y. C. Laie A. E Motter, *Signatures of small-world and scale-free properties in large computer programs*. *Physical Review E*, v.68, n. 017102, 2003.
- [6] R. Pastor Sorras e A. Vespignani, *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*. *Physical Review Letters*, vol. 86, n. 3200, 2001.
- [7] F. Lijeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley e Y. Aberg, *The web of human sexual contacts*. *Nature* v. 411, n. 907, 2001.
- [8] S. Wuchty, *Scale-free Behavior in Protein Domain Networks*. *Mol. Biol. Evol.*, v.18 n. 9, 2001.
- [9] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltavi e A. L. Barabasi, *Lethality and centrality in protein networks*. *Nature* v. 411, n. 41, 2001.
- [10] Chialvo, D. R. : *Critical brain networks*. *Physica A*, v.340, n.756, 2004.
- [11] Milton J, Jung P, editors. *Epilepsy as a dynamic disease*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [12] Ivanchenko MV, Osipov GV, Shalfeev VD, Kurths J. *Phase synchronization in ensembles of bursting oscillators*. *Phys. Rev. Lett.* v.93, n. 134101, 2004.

- [13] M. G. Rosenblum and A. S. Pikowsky. *Delayed feedback control of collective synchrony: An approach to suppression of pathological brain rhythms*. Physical Review E, v. 70, n. 041904, 2004.
- [14] Benabid, A. L., Pollak, P., Gervason, C., Hoffmann, D., Gao, D. M., Hommel, M., e colaboradores. *Long-term suppressio of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamanic nucleus*. Lancet, v. 337, 1991.
- [15] Alligood K. T. *Chaos: an introduction to dynamical systems* Tesxtbooks in mathematical sciences. Springer, 1997.
- [16] Alwin Scott *Neuroscience, A Mathematical Primer*. Springer, 2002.
- [17] Hindmarsh J. L., and Rose R. M. *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*. Proc. R. Soc. London, Serie B, 221:87 - 102 1984.
- [18] N.F. Rulkov. *Regularization of synchronized chaotic bursts*. Physical Review Letters, n. 86, v. 1, 2001.
- [19] Newman, M.E.J. . SIAM. *The Structure and Function of Complex Networks* Review. Vol. 45(2): 167-256. 2003.
- [20] Barabasi, A.L.; : *How everything is connected to everything else and what it means for business,science, and everyday life*. Plume. 2003. p.294.
- [21] Albert-László Barabási e Réka Albert. : *Emergence of Scaling in Random Networks*. Science, v. 286, n.509, 2003.
- [22] Hawoong Jeong. : *Complex scale-free networks*. Physica A, v.321, n.226, 2003.
- [23] V. M. Equiluz, D. R. Chialvo, G. A. Cecchi, M. Buliki e A. V. Apkarian, *Scale-Free Brain Functional Networks*. Physical Review Letters, v. 94, n. 018102, 2005.
- [24] Bear, M. F., Connors, B. W., and Paradiso, M. A. *Neuroscience: Exploring the brain (2nd ed.)*. Philadelphia, PA, USA: Lippincott Williams and Wilkins, 2002.
- [25] Equiluz, V. M., Chialvo, D. R., Cecchi, G. A., Buliki, M., and Apkarian, A. V. *Scale-free brain functional networks*. Physical Review Letters, v. 94, n. 018102, 2004.

- [26] M. G. Rosenblum and A. S. Pikowsky *Controlling Synchronization in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators*. Physical Review Letters, v.92, n. 114102, 2004.
- [27] C. A. S. Batista, A. M. Batista, J. A. C. Pontes, R. L. Viana e S. R. Lopes. *Chaotic phase synchronization of bursting neurons in scale-free networks of bursting neurons*. Physical Review E, v.76, n. 016218, 2007.
- [28] S. Achard, R. Salvador, B. Whitcher, J. Suckling, and E. Bullmore. *A Resilient, Low-Frequency, Small-World Human Brain Functional Network with Highly Connected Association Cortical Hubs*. The Journal of Neuroscience, January, v. 4, 2006.
- [29] Xiaojuan Sun, Jinzhi Lei, Matjaz Perc, Jurgen Kurths, and Guanrong Chen *Burst synchronization transitions in a neuronal network of subnetworks*. CHAOS, v. 21, n. 016110, 2011.
- [30] P. Hagmann, M. Kuran, X. Gigandet, P. Thiran, V.J. Wedeen, R. Meuli and J.-P. Thiran. *Mapping human whole-brain structural networks with diffusion MRI*. PLoS ONE, v. 4, n. 2, ed. 597, 2007.
- [31] M. E. J. Newman and D. J. Watts. *Renormalization group analysis of the small-world network model*. Physics Letters A, v. 263, n. 1, p. 341 – 346, 1999.
- [32] A. M. Batista, S. E. de S. Pinto, R. L. Viana and S. R. Lopes. *Short-time memories in a network with randomly distributed connections*. Physica A v. 322, n. 118, 2003.
- [33] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover, ISBN. 0486428818 , ed. 1, 2003.
- [34] Xiaofeng Gong, Shuguang Guan, Xingang Wang, and C.-H. Lai *Stability of the steady state of delay-coupled chaotic maps on complex networks*. Phys. Rev. E 77, 056212 2008.
- [35] C. A. S. Batista, S. R. Lopes, R. L. Viana e A. M. Batista. *Delayed feedback control of bursting synchronization in a scale-free neuronal network*. Neural Networks, v.23, p. 114 - 124, 2010.
- [36] C. A. S. Batista, A. M. Batista, J. A. C. Pontes, R. L. Viana e S. R. Lopes. *Bursting synchronization in a scale-free networks*. Chaos, Solitons and Fractals, v. 41, p. 2220 - 2225, 2009.

- [37] C. A. S. Batista, E. L. Lameu, A. M. Batista, S. R. Lopes, T. Pereira, R. L. Viana, G. Zamora-Lopez and J. Kurths Global phase synchronization of bursting neurons in clustered small-world networks newblock(*em preparação*).
- [38] H. Yinghang, Y. Gong, L. Wang, X. Ma, C. Yang. *Single or multiple synchronization transitions in scale-free neuronal networks with electrical or chemical coupling* Chaos, Solitons and Fractals, v. 44 p. 260-268, 2001.