

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/FÍSICA
MESTRADO

PAULO EDUARDO LOPES DA ROSA

TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS E EMARANHAMENTO DE FORMAÇÃO
EM CADEIAS E GRAFOS DE SPIN-1/2

PONTA GROSSA
2024

PAULO EDUARDO LOPES DA ROSA

TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS E EMARANHAMENTO DE FORMAÇÃO
EM CADEIAS E GRAFOS DE SPIN-1/2

Dissertação apresentada para obtenção do título
de mestre em Ciências/Física na Universidade
Estadual de Ponta Grossa

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de An-
drade.

PONTA GROSSA
2024

R788

Rosa, Paulo Eduardo Lopes da

Transferência de estados quânticos e emaranhamento de formação em cadeias e grafos de spin-1/2 / Paulo Eduardo Lopes da Rosa. Ponta Grossa, 2024. 62 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade.

1. Cadeias - spin. 2. Transferência - estados. 3. Grafos. I. Andrade, Fabiano Manoel de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Física. III.T.

CDD: 530.1

TERMO DE APROVAÇÃO

PAULO EDUARDO LOPES DA ROSA

TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS E EMARANHAMENTO DE FORMAÇÃO EM CADEIAS E GRAFOS DE SPIN 1/2”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Ciências, Área de Concentração em Física Quântica, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **FABIANO MANOEL DE ANDRADE**
Data: 27/11/2024 14:57:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Orientador _____

Dr. Fabiano Manoel de Andrade – UEPG – Presidente

Documento assinado digitalmente
 **ANA CRISTINA SPOTTE COSTA**
Data: 27/11/2024 13:04:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr^a. Ana Cristina Sprotte Costa – UFPR – Titular

Documento assinado digitalmente
 **DANILO CIUS**
Data: 27/11/2024 14:48:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Danilo Cius – IFUSP – Titular

Ponta Grossa, 27 de novembro de 2024.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu professor e orientador Fabiano Manoel de Andrade, pela paciência e didática de ensino ao me guiar nos caminhos que precisei seguir para alcançar os conhecimentos que obtive até então. Agradeço também a todos os professores com os quais tive aula durante esse período do mestrado, pelos ensinamentos passados dentro e fora de sala de aula.

A minha mãe Sônia Barbosa e meus familiares por me ajudarem sendo a melhor família que eu poderia ter nessa vida.

Em especial a minha namorada Isabela Caroline pelo apoio e auxílio pessoal que me deu nesses últimos meses.

Aos meus amigos e colegas da pós-graduação por todos os momentos de risadas e divertimento enquanto não estávamos nos computadores escrevendo códigos (e enquanto estávamos também), em especial ao Conrado Bittencourt, Patrício Cardoso, Thiago Tsutsui, Danilo Vantroba, Luciano Correa, Wathqan Kolthoum, Eduardo Soares, Alison Antunes, Henrique Gabrick, Marlon Schmidt, Ana Paula e Lucas Eduardo.

A todos os colegas do grupo de pesquisa Física Quântica e Informação Quântica (FQIQ), pelas dicas, sugestões e coisas que estudamos juntos.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

A Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela estrutura e as "tias" do Restaurante Universitário, por me ajudarem a ter a melhor das alimentações enquanto estudava.

Por fim, agradeço imensamente também a todos os amigos que tive contato nesse período, em especial a Erick Teixeira, Thiago Teixeira, Renan Rodrigues, Bhianca Amabylle e Fabiana Troyner, pelas vivências e experiências de vida.

“Em algum lugar, algo incrível está esperando para ser conhecido.”
(Carl Sagan)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre cadeias de spin-1/2 no contexto da Computação Quântica e Informação Quântica, destacando suas aplicações e possíveis implementações experimentais. Discutimos temas como a geração e o armazenamento de emaranhamento bipartido entre sítios das cadeias de spin. Além disso, investigamos e exemplificamos a dinâmica da transferência de estados quânticos nessas cadeias. O espaço de Hilbert que descreve o estado quântico de uma cadeia composta por N spins acoplados possui dimensão 2^N . Contudo, ao estudar a transferência de estados, é possível adotar uma abordagem simplificada baseada na teoria de grafos, em que a dimensão do espaço de Hilbert escala linearmente com N , desde que a cadeia apresente apenas uma única excitação. Isso ocorre porque, neste caso, o subespaço relevante do Hamiltoniano pode ser representado de forma equivalente à matriz de adjacência de um grafo associado à cadeia. Essa equivalência permite simplificar cálculos, como o da fidelidade na transferência de estados, tornando-os computacionalmente mais eficientes. Com base nessa abordagem, apresentamos resultados sobre a transferência de estados em cadeias de spins, bem como configurações alternativas para a geração e o armazenamento de emaranhamento em cadeias desacopladas.

Palavras-chave: Cadeias de Spin, Transferência de Estados Quânticos, Grafos

ABSTRACT

In this work, we present a bibliographic review of spin-1/2 chains in the context of Quantum Computing and Quantum Information, highlighting their applications and possible experimental implementations. We discuss topics such as the generation and storage of bipartite entanglement between sites of spin chains. Additionally, we investigate and exemplify the dynamics of quantum state transfer in these chains. The Hilbert space describing the quantum state of a chain composed of N coupled spins has a dimension of 2^N . However, when studying state transfer, a simplified approach based on graph theory can be adopted, in which the Hilbert space dimension scales linearly with N , provided the chain exhibits only a single excitation. This is because, in this case, the relevant subspace of the Hamiltonian can be equivalently represented by the adjacency matrix of a graph associated with the chain. This equivalence simplifies calculations, such as fidelity in state transfer, making them computationally more efficient. Based on this approach, we present results on state transfer in spin chains, as well as alternative configurations for generating and storing entanglement in decoupled chains.

Keywords: Spin Chains, Quantum State Transfer, Graphs

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Grafo Caminho P_2	20
Figura 2	Exemplo de um grafo com 5 vértices e 6 arestas.	20
Figura 3	Grafo X com rotulagem alterada	20
Figura 4	Exemplos de Grafos árvores.	22
Figura 5	Representação esquemática de uma cadeia de spins $1/2$	23
Figura 6	Representação esquemática de uma cadeia de 4 spins e logo abaixo um grafo caminho P_4 , onde associa-se $ 0\rangle_1 = 1, 1\rangle_2 = 2, 1\rangle_3 = 3$ e $ 1\rangle_4 = 4$ onde $ a\rangle_\alpha$ são os estados associados a cada vértice, onde a pode ser 0 ou 1 e α varia de 1 a N . Usamos a cor vermelha para representar o estado $ 0\rangle$ e branco para o estado $ 1\rangle$	24
Figura 7	Representação da propagação da informação de um estado quântico de spin $1/2$ numa cadeia de spins unidimensional. Em (a) temos um estado arbitrário antes de interagir com o sistema; em (b) temos o estado após a aplicação de um campo magnético uniforme; em (c) temos o estado gerado com uma única excitação na antípoda A e de (c) para (d) temos a transferência do estado dessa excitação para a outra antípoda, em B . O estado inicial $ \Psi(0)\rangle$ é considerado à partir de (c).	29
Figura 8	Ilustração dos cinco primeiros passos de um caminhante (esfera em cor preta) clássico e quântico em uma rede. Observamos que para o caso clássico a trajetória seguida pelo caminhante é bem definida. Já no caso quântico, devido ao caráter ondulatório, o que temos é um espalhamento do caminhante por toda a rede.	29
Figura 9	Grafo caminho de 3 vértices representando um cadeia de 3 spins com uma excitação no vértice 1.	30
Figura 10	Duas representações diferentes de matrizes esparsas, em ambas as cores brancas representam os termos nulos, no caso (a) temos um quadrado alaranjado para cada termo 1 presente no Hamiltoniano e em (b) temos uma representação melhor de ser visualizada na qual as cores mais intensas representam a área da matriz possuindo mais termos não-nulos presentes e a mais clara o inverso. Essa representação corresponde ao Hamiltoniano H_{XX} de uma cadeia de 10 spins.	32
Figura 11	Fidelidades para uma cadeia com três spins, acoplamentos $J_{1,2} = J_{2,3} = 1$ e estado inicial $ \Psi(0)\rangle = 011\rangle$. A curva azul representa a medida entre o estado evoluído e uma excitação no terceiro e último spin da cadeia. A curva tracejada representa a medida entre a evolução do estado inicial em relação a ele mesmo (isso se repetirá como padrão para nossos gráficos de fidelidade). A TPE ocorre aqui para múltiplos inteiros de $t = \pi/\sqrt{2}$	33

Figura 12	Fidelidades para uma cadeia com quatro spins, acoplamentos $J_{1,2} = J_{2,3} = J_{3,4} = 1$ e estado inicial $ \Psi(0)\rangle = 0111\rangle$	34
Figura 13	Zoom no gráfico da Fig. 12 na região entre os tempos 26 e 30 e fidelidade entre 0,95 a 1,00.	34
Figura 14	Valores máximos de fidelidades obtidos para cadeias de spins de até 80 spins numa escala de tempo entre 0 a $4000/J$ onde J é a intensidade uniforme de acoplamento entre todos os spins. As barras representam os valores de fidelidade de cada cadeia, a reta em $F = 2/3$ representa a maior fidelidade para a transmissão clássica de um estado quântico. A curva representa o valor máximo de emaranhamento nessas cadeias.	35
Figura 15	Acoplamento ponderado $J_{i,i+j}$ com $J_0 = 1$ para uma cadeia de 20 spins, onde N é o número de spins.	36
Figura 16	TPE numa cadeia de 4 spins com $J_{1,2} = \sqrt{3}$, $J_{2,3} = 2$ e $J_{3,4} = \sqrt{3}$ e estado inicial $ \Psi(0)\rangle = 0111\rangle$. Aqui a TPE ocorre para $t = \pi/2$	37
Figura 17	(a) Cadeia de 8 spins com acoplamentos modulados por $J_{i,i+1} = J_0\sqrt{i(N-i)}$ e (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada q-bit em relação ao estado inicial.	38
Figura 18	Cadeia de cinco spins com uma excitação concentrada no vértice 3 (a) e (b) fidelidade medida em cada um dos cinco spins da cadeia com relação ao spin no vértice 3 do grafo associado, ou seja, fidelidade de obter a excitação em cada um dos vértices. O renascimento perfeito ocorre para $t_{RP} = 3,6276$	39
Figura 19	Grafo caminho P_3	39
Figura 20	(a) Grafo hipercubo Q_2 , obtido também por $P_2 \times P_2$; (b) grafo hipercubo Q_3 , obtido também por $P_2 \times Q_2$; (c) grafo hipercubo Q_4 , obtido também pelo produto $P_2 \times Q_3$ e (d) grafo hipercubo Q_4 , obtido também pelo produto $P_2 \times Q_4$	42
Figura 21	(a) Grafo hipercubo Q_3 e (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada spin localizado em cada vértice desse respectivo grafo. Podemos ver que a excitação distribui-se numa sobreposição entre os vértices adjacentes ao 1, depois aos adjacentes ao vértice 8 até concentrar-se nele, levando à TPE entre os vértices 1 e 8 para o tempo de $t = \pi/2$	43
Figura 22	Dinâmica do RP para um grafo árvore de nove vértices. A excitação concentrada no vértice 5 distribui-se em sobreposição até os vértices 7 e 1 no tempo de $t_M = \pi$ e retorna ao vértice 5 com período de $t_{RP} = 2\pi$	44

Figura 23	(a) Seis configurações de estados iniciais com duas e três excitações para uma cadeia com cinco spins (outras configurações são obtidas por simetria dessas mesmas e portanto causariam o mesmo comportamento). Os vértices vermelhos representam um estado $ 0\rangle$ e as cores brancas representam um estado $ 1\rangle$; (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada configuração inicial para a cadeia com cinco spins. Neste caso, cada configuração está com sua respectiva fidelidade para o renascimento do estado inicial.	45
Figura 24	Duas configurações iniciais diferentes (a) e (b) na cadeia de três spins e seus respectivos gráficos de fidelidade e EoF (c) entre os spins 1 e 3, à esquerda para o estado inicial com uma excitação no vértice 1 e à direita para uma excitação no vértice 2.	47
Figura 25	(a) Cadeia de quatro spins com uma excitação no primeiro spin e (b) perfil do EoF entre dois pares de q-bits dessa cadeia não modulada com uma excitação no vértice 1. Os pares não mostrados possuem $EoF = 0$ para qualquer valor de tempo.	48
Figura 26	(a) Cadeia de quatro spins com uma excitação no segundo spin e (b) perfil do EoF entre dois pares de q-bits dessa cadeia não modulada com uma excitação no vértice 1. Os pares não mostrados possuem $EoF = 0$ para qualquer valor de tempo.	48
Figura 27	Perfil do Emaranhamento de Formação entre 2 pares de q-bits numa cadeia de 5 spins (a) não modulada com uma excitação no vértice 3. Os pares não mostrados possuem $EoF = 0$ para qualquer valor de tempo.	49
Figura 28	(a) Cadeia árvore de nove spins T_9 ; (b) fidelidade do estado inicial (renascimento perfeito) e cinco padrões de EoF para os 18 pares de q-bits emaranhados.	51
Figura 29	(a) Representação esquemática do protocolo com uma cadeia de 11 spins. O estado inicial (α) consiste de todos os q-bits no estado $ 0\rangle$ exceto os representados pelos vértices A e C. Em β temos o estado evoluído até o tempo de espelhamento t_M no qual A e C estão emaranhados e remove-se o q-bit B, chegando ao estado representado em γ . Em (b) temos três funções, a fidelidade do estado inicial em relação ao estado futuro em vermelho, a fidelidade do estado à partir do momento em que remove-se o q-bit B (t_M) e o estado futuro na cor preta, e o valor do EoF entre os q-bits A e C para toda a evolução, obtido numericamente.	52
Figura 30	(a) Cadeia de 11 spins configurada como um grafo caminho, as arestas mais grossas representam o acoplamento $J = \Delta$ e as mais finas $J = \delta$, sendo $\Delta/\delta = 0, 1$ e cada um dos vértices em vermelho claro representam um estado $ +\rangle$; (b) dinâmica do renascimento de estado quântico inicial na cor preta e $EoF(3, 9)$ para essa mesma cadeia.	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	PERSPECTIVA ATUAL SOBRE A CQIQ.	12
1.2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
1.2.1	Base	13
1.2.2	Operador densidade	14
1.2.3	Estado Puro	14
1.2.4	Estado Misto	15
1.2.5	Traço Parcial	15
1.2.6	Emaranhamento de Formação	17
1.3	GRAFOS	19
1.3.1	Definições	19
1.3.2	Aplicações de grafos na mecânica quântica e em CQIQ	21
2	CADEIAS DE SPIN-1/2	23
2.1	GRAFOS DE SPINS	23
2.1.1	Estrutura e Acoplamentos	24
2.2	APLICAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES EXPERIMENTAIS	26
3	TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS	28
3.1	TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM CADEIAS DE SPIN	28
3.2	TRANSFERÊNCIA DE ESTADO QUÂNTICO EM GRAFOS DE SPIN	37
3.2.1	Produtos Cartesianos	41
3.3	MÚLTIPLAS EXCITAÇÕES	43
4	PROTOCOLO DE GERAÇÃO DE EMARANHAMENTO	46
4.1	EMARANHAMENTO EM GRAFOS DE SPIN COM ACOPLAMENTO	
$J = 1$		46
4.1.1	Grafos Caminho P_N	46
4.1.2	Grafo Árvore T_9	50
4.2	EoF EM GRAFOS DE SPIN DESACOPLADOS	52
5	CONCLUSÕES	54
5.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	54
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

A mecânica quântica, desenvolvida no início do século XX, revolucionou a nossa compreensão do universo em escalas microscópicas e tem sido fundamental para o desenvolvimento de diversas tecnologias avançadas que utilizamos hoje, como os transistores (1). Na década de 1980, Richard Feynman propôs que uma ferramenta muito eficiente para simular sistemas naturais seria um computador quântico, capaz de resolver problemas complicados em diferentes áreas da ciência (2). Com o passar do tempo, surgiram novas subáreas como as da Computação Quântica e Informação Quântica (CQIQ). *A CQIQ é o estudo das tarefas de processamento de informação que podem ser realizadas utilizando sistemas modelados pela mecânica quântica* (3).

A aplicação potencial dos sistemas que se aproveitam de fenômenos intrinsecamente quânticos é vasta. Novos dispositivos e tecnologias como a criptografia quântica (4) também estão sendo desenvolvidos nesse contexto, assim como contribuições para subáreas que ainda podem estar emergindo. Esse trabalho tem como objetivo dar uma pequena contribuição no vasto campo da pesquisa em CQIQ, em que focamos em explorar propriedades tais como emaranhamento e transferência de estados quânticos (TEQ) em cadeias de spin-1/2.

Unidades clássicas de informação podem ser geradas e armazenadas com a combinação de bits, como por exemplo 1 e 0, uma base binária. Com um sistema de caráter quântico, essas unidades de informação podem ser geradas com a combinação de estados quânticos, como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.1)$$

em que α e β são números complexos, e dessa forma, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são chamados de *quantum bits*, ou simplesmente q-bits (3).

Q-bits podem ser associados a diferentes sistemas quânticos de dois níveis. Para exemplificar, citamos as duas diferentes polarizações de um fóton (5); o alinhamento de um spin nuclear em um campo magnético (6); e dois estados de um elétron orbitando um único átomo (7). Considerando o que há em comum em diversas pesquisas na área da CQIQ, os requerimentos levados em conta para a construção de um computador quântico em termos de q-bits são (8):

- ter q-bits físicos bem isolados do ambiente para minimizar a decoerência, o que ocorre quando o sistema quântico interage com o ambiente externo e acaba destruindo o estado quântico;
- os q-bits devem ser facilmente endereçáveis e acopláveis a outros q-bits de forma controlada. Isso significa que cada q-bit individual precisa ser manipulado de maneira precisa, sem interferir com outros q-bits indesejadamente;
- usar uma arquitetura tolerante a falhas que permita a correção de erros, oferecendo suporte a q-bits lógicos que são formados a partir de vários q-bits físicos, onde os erros podem ser detectados e corrigidos sem comprometer os cálculos;

- poder inicializar e medir q-bits lógicos com precisão, garantindo que o estado inicial dos q-bits seja conhecido e que as medições no final de um cálculo sejam realizadas com alta fidelidade.

Os estudos realizados e resultados apresentados nesta dissertação, concentram-se nas propriedades de cadeias e grafos de spin-1/2, fidelidade entre estados quânticos evoluídos no tempo para analisar a sua dinâmica e Emaranhamento de Formação (EoF) entre spins das cadeias. Daqui em diante, omitiremos o termo "1/2" em alguns casos no texto ao falar sobre "cadeias de spin-1/2" para ficar menos repetitivo, mas ressaltamos que estaremos sempre fazendo referência a esse modelo.

Uma ferramenta que utilizamos para estudar propriedades de cadeias de spins é a Teoria de Grafos (9), em que seus vértices representam q-bits e suas arestas a intensidade de acoplamento entre estes (10). Deste modo, reduzimos o problema do cálculo do propagador $U(t)$ que depende de um Hamiltoniano H com representação matricial da ordem de 2^N para cálculos com matrizes da ordem do número de q-bits ou de vértices do grafo associado, ou seja, N . Grafos são estruturas matemáticas com diversas aplicações, tanto na área das Ciências Exatas e da Terra como Física e Geografia, quanto de Ciências Sociais como representação de redes e conexões entre pessoas. Citaremos algumas aplicações de grafos em algumas áreas como essas citadas e outras no contexto da própria CQIQ a partir da seção 1.4.

1.1 PERSPECTIVA ATUAL SOBRE A CQIQ

O número de conquistas científicas e tecnológicas com aplicabilidade às tecnologias de Informação e Computação Quântica tem crescido exponencialmente a cada ano desde que surgiram as primeiras ideias sobre as potenciais aplicações dos computadores quânticos (11). Um computador quântico de grande escala é certamente uma meta extremamente ambiciosa, parecendo para nós agora tão distante quanto os computadores clássicos totalmente programáveis devem ter parecido há um século. Implementações de hardware para a utilização de q-bits têm sido propostas, utilizando sistemas tão diversos quanto fótons, semicondutores, supercondutores ou até moléculas (12). A computação quântica está passando de um tópico de pesquisa para uma tecnologia que desbloqueia novas capacidades computacionais. Nesse contexto, define-se o termo "supremacia quântica" (13), que é chamado o ponto em que um computador quântico consegue realizar uma tarefa específica que seria impraticável para o melhor supercomputador clássico disponível.

A equipe do Google anunciou recentemente a demonstração da supremacia quântica, utilizando um processador supercondutor programável chamado Sycamore (14). O experimento mostra que o processador quântico pode realizar, em cerca de 200 segundos, uma tarefa que o supercomputador mais poderoso do mundo levaria aproximadamente 10.000 anos para completar. Esse anúncio, embora significativo na época, foi posteriormente contestado (15). Esse

desenvolvimento trouxe à tona a discussão sobre os limites atuais da supremacia quântica e as possibilidades de melhor uso de algoritmos clássicos em supercomputadores para competir com sistemas quânticos em tarefas específicas. Outras grandes empresas como a IBM também tem feito contribuições e obtido sucesso na criação de computadores com até 1000 q-bits (16). Este avanço pode acelerar significativamente o desenvolvimento de algoritmos quânticos e aplicações práticas.

1.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, apresentaremos os conceitos fundamentais que são necessários para entender como fizemos os cálculos nesse trabalho.

1.2.1 Base

Uma base é um conjunto de vetores que gera o seu espaço e é linearmente independente; no caso, os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são uma base (base computacional de $\mathbb{C}^2$). Estamos representando estados quânticos pela notação de Dirac, onde os kets $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são chamados de q-bits (3) e são representados por matrizes coluna

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esses vetores representam os estados base de um q-bit e pertencem ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ (17). O espaço de Hilbert é um espaço vetorial de dimensão finita e discreta, com seus elementos pertencentes ao conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, sendo também conhecido como espaço de estados nesse contexto.

Um vetor unitário nesse espaço, denotado por $|\Psi\rangle$, descreve o estado completo de um sistema quântico. No caso de um único q-bit, o espaço de Hilbert é bidimensional e é indicado como $\mathbb{C}^2$. Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são ortogonais e linearmente independentes, o que significa que qualquer estado de um q-bit pode ser escrito como uma combinação linear desses dois vetores.

Para sistemas compostos por mais de um q-bit, o espaço de Hilbert correspondente não tem mais dimensão 2. Em vez disso, a dimensão aumenta com o número de q-bits, sendo dada por 2^N , em que N é o número total de q-bits. Assim, para descrever o estado completo de um sistema com N q-bits, são necessários 2^N vetores no espaço de Hilbert, representado por $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^N}$.

Na área da informação quântica, devido à sua semelhança com sequências de bits, é usual adotar como uma base completa as 2^N formas possíveis de distribuir os "zeros" e "uns" num sistema contendo N q-bits. Assim, a base de vetores v de um sistema é expressa como $|\Psi_v\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$, com $\otimes$ sendo o produto tensorial e $\Psi_i \in [0, 1]$. Essa notação é comumente simplificada de modo que

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle \equiv |\psi_1\psi_2\dots\psi_N\rangle, \quad (1.2)$$

conforme exemplificado acima ao escrever todos os valores em ordem dentro de um único ket. Por exemplo, em um sistema de três q-bits, os $2^3 = 8$ vetores que representam a base seriam os seguintes:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= |000\rangle \\ |\Psi_2\rangle &= |100\rangle \\ |\Psi_3\rangle &= |010\rangle \\ |\Psi_4\rangle &= |001\rangle \\ |\Psi_5\rangle &= |110\rangle \\ |\Psi_6\rangle &= |101\rangle \\ |\Psi_7\rangle &= |011\rangle \\ |\Psi_8\rangle &= |111\rangle. \end{aligned}$$

1.2.2 Operador densidade

No contexto da mecânica quântica, os estados de um sistema quântico podem ser classificados em estados puros e estados mistos. A representação de um estado quântico utilizando o formalismo do operador densidade ρ (18) é uma maneira de descrever ambos os tipos de estados de forma unificada. Medidas de correlações como o emaranhamento tornam-se possíveis apenas em termos da descrição do estado quântico nesse formato.

1.2.3 Estado Puro

Um estado puro é a descrição mais simples de um sistema quântico. Ele é representado por um vetor de estado $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert do sistema. Matematicamente, um estado puro pode ser representado pelo operador densidade ρ da seguinte forma:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

em que, $|\psi\rangle$ é o vetor de estado, e $\langle\psi|$ é seu conjugado transposto. O operador densidade de um estado puro satisfaz $\text{Tr}(\rho) = 1$, onde Tr denota a operação de traço, que é a soma da diagonal principal da matriz na qual o aplicamos (ver Eq. (1.5)). No contexto geral da mecânica quântica, o traço de um operador densidade ρ é equivalente à operação de $\langle\Psi|\Psi\rangle$ para um vetor de estado, o que traz a sua norma. Portanto, um operador densidade com traço 1 está normalizado. É relevante ressaltar que para um estado puro, o traço de seu operador densidade ao quadrado também é 1, ou seja, $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, grandeza reconhecida como pureza. Para estados mistos, a sua pureza acaba sendo menor do que 1, como mostraremos na seção a seguir.

1.2.4 Estado Misto

Um estado misto é representado por uma combinação estatística de estados puros $|\psi_i\rangle$ com respectivas probabilidades p_i . O operador densidade para um estado misto é dado por:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

em que $\sum_i p_i = 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\text{Tr}(\rho) = 1$ e $\text{Tr}(\rho^2) < 1$. Por exemplo, se considerarmos um estado misto, onde o sistema está em uma combinação estatística de dois estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ ortonormais, com probabilidades $p_1 = 0,7$ e $p_2 = 0,3$, o operador densidade ρ é dado por:

$$\rho = 0,7 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + 0,3 |\psi_2\rangle \langle \psi_2|.$$

O traço de ρ^2 será:

$$\text{Tr}(\rho^2) = 0,7^2 + 0,3^2 = 0,49 + 0,09 = 0,58$$

Neste caso, $\text{Tr}(\rho^2) = 0,58$, indicando que o estado é misto.

O operador densidade ρ é um operador linear positivo que contém toda a informação necessária para calcular os valores esperados de observáveis quânticos, independentemente do estado ser puro ou misto. Para estados puros, o operador densidade é um projetor $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, enquanto para estados mistos, ele é uma soma ponderada de projetores $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. No contexto dos sistemas estudados nessa dissertação, todos os estados são puros.

1.2.5 Traço Parcial

É conveniente enfatizarmos, como é feita a construção do operador traço parcial (19), que não é trivial e também não é muito exposta em artigos científicos, mas é fundamental no contexto de medidas de emaranhamento em sistemas compostos. Esse operador permite obter a descrição de um subsistema ao "desconsiderar" (ou "traçar fora") as informações sobre o outro subsistema. Para dois sistemas diferentes A e B e o sistema global $A + B$, cujo espaço de Hilbert é o produto tensorial entre as subpartes

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

sendo $\{|i_A\rangle\}$ uma base de $\mathcal{H}_A$ e $\{|i_B\rangle\}$ uma base de $\mathcal{H}_B$, os kets $|i_A\rangle |i_B\rangle$ formam uma base de $\mathcal{H}$. O traço parcial de um operador densidade ρ sobre o subsistema B é definido como sendo:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_i \langle i_B | \rho | i_B \rangle. \quad (1.3)$$

Aqui, ρ_A é o operador densidade reduzido para o subsistema A , e $|i_B\rangle$ são os estados de base do subsistema B . A operação remove as componentes do subsistema B , restando apenas os termos associados ao subsistema A . De forma análoga, para o traço parcial sobre o subsistema A temos

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho) = \sum_i \langle i_A | \rho | i_A \rangle. \quad (1.4)$$

Exemplo: Considerando ρ como um operador densidade 4×4 representando um sistema de dois q-bits (subsistemas A e B):

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00,00} & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} & \rho_{00,11} \\ \rho_{01,00} & \rho_{01,01} & \rho_{01,10} & \rho_{01,11} \\ \rho_{10,00} & \rho_{10,01} & \rho_{10,10} & \rho_{10,11} \\ \rho_{11,00} & \rho_{11,01} & \rho_{11,10} & \rho_{11,11} \end{pmatrix}.$$

Os índices da matriz se referem à base de estados $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, onde os dois primeiros dígitos se referem aos estados dos q-bits A e B , respectivamente. Para obter ρ_A ao traçar fora o subsistema B :

Neste caso, a base do subsistema B é $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, então o traço parcial sobre B será:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = \sum_{i_B=0}^1 \langle i_B | \rho | i_B \rangle$$

Para $i_B = 0$, extraímos as componentes que correspondem ao subsistema B no estado $|0\rangle$, que traz os elementos de matriz:

$$\langle 0_B | \rho | 0_B \rangle = \begin{pmatrix} \rho_{00,00} & \rho_{00,10} \\ \rho_{10,00} & \rho_{10,10} \end{pmatrix}$$

Para $i_B = 1$, extraímos as componentes que correspondem ao subsistema B no estado $|1\rangle$, que traz os elementos de matriz:

$$\langle 1_B | \rho | 1_B \rangle = \begin{pmatrix} \rho_{01,01} & \rho_{01,11} \\ \rho_{11,01} & \rho_{11,11} \end{pmatrix}$$

Somando essas contribuições, obtemos:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \rho_{00,00} + \rho_{01,01} & \rho_{00,10} + \rho_{01,11} \\ \rho_{10,00} + \rho_{11,01} & \rho_{10,10} + \rho_{11,11} \end{pmatrix}.$$

De forma análoga com a Eq. (1.4) chegamos ao traço parcial em A

$$\rho_B = \begin{pmatrix} \rho_{00,00} + \rho_{10,10} & \rho_{00,01} + \rho_{10,11} \\ \rho_{01,00} + \rho_{11,10} & \rho_{01,01} + \rho_{11,11} \end{pmatrix}.$$

Deste modo, para um sistema de N q-bits, podemos traçar quantos e quaisquer subsistemas quisermos para isolar um operador densidade referente à parte em questão. A semelhança desse operador com o traço total $\text{Tr}(\rho)$ se dá pelo fato de que

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_{i_A, i_B} \langle i_A i_B | \rho | i_A i_B \rangle, \quad (1.5)$$

$$\text{Tr}(\rho) = \langle 00 | \rho | 00 \rangle + \langle 01 | \rho | 01 \rangle + \langle 10 | \rho | 10 \rangle + \langle 11 | \rho | 11 \rangle$$

Escrevendo isso na forma de matriz, o traço é a soma dos elementos da diagonal principal:

$$\text{Tr}(\rho) = \rho_{00,00} + \rho_{01,01} + \rho_{10,10} + \rho_{11,11}.$$

1.2.6 Emaranhamento de Formação

Historicamente, embora ainda não possuía uma nomenclatura na época, o emaranhamento foi um fenômeno inicialmente identificado por Einstein, Podolsky e Rosen (20). Posteriormente, foi por Schrödinger (21) como um fenômeno peculiar da mecânica quântica. Mais tarde, John Bell identificou (22) que o emaranhamento implica em divergências com a física clássica, demonstráveis através de testes experimentais (23,24). Com o surgimento da teoria da informação quântica, o emaranhamento foi reconhecido como um recurso (25).

O emaranhamento é uma das características mais distintivas da mecânica quântica e implica uma correlação entre q-bits ou subsistemas de um sistema quântico (23). Por definição, dois sistemas físicos A e B (18), cada um com seu espaço de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente, podem ser agrupados em um sistema total $A + B$, cujo espaço de estados é o produto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se assumirmos que o sistema A é descrito por um estado quântico normalizado $|\phi_A\rangle$ pertencente a $\mathcal{H}_A$, e o sistema B por um estado quântico normalizado $|\chi_B\rangle$ pertencente ao seu espaço de estados $\mathcal{H}_B$, o ket $|\Phi\rangle$ que descreve o sistema total é o produto tensorial

$$|\Phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle. \quad (1.6)$$

A situação é diferente quando o vetor de estado do sistema global já não é mais um simples produto tensorial. Sejam $|\phi_A\rangle, |\zeta_A\rangle, \dots$, estados quânticos ortonormais pertencentes ao espaço de estados $\mathcal{H}_A$ do primeiro sistema, e $|\chi_B\rangle, |\xi_B\rangle, \dots$, estados quânticos ortonormais pertencentes ao espaço de estados do segundo. Podemos então construir produtos diferentes da Eq. (1.6) para o estado do sistema global, por exemplo:

$$|\Phi'\rangle = |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle. \quad (1.7)$$

Agora, também podemos, em vista do princípio da superposição, formar qualquer combinação linear que não será mais um produto simples:

$$|\Psi\rangle = \alpha |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle + \beta |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle, \quad (1.8)$$

sob as condições $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\alpha\beta \neq 0$, e esse é um caso de um sistema de 2 q-bits emaranhados. Por exemplo, um estado que descreve dois q-bits A e B , $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$, pode ser fatorado como um estado produto entre os subespaços $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, tal que

$$|\Psi_{AB}\rangle = |1_A\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B\rangle + |1_B\rangle).$$

No entanto, se o estado estiver emaranhado, como no estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle),$$

não há maneira de separar as componentes individuais dos subespaços de A e B , portanto o estado é dito inseparável.

Existem diferentes grandezas que nos permitem determinar se um estado está emaranhado ou não e em que intensidade (26). Neste trabalho, utilizamos o Emaranhamento de Formação EoF (27), que é uma medida bipartida capaz de mensurar o quanto dois subsistemas estão emaranhados, escrita em função da Concorrência (que por si só já é uma outra medida de emaranhamento), EoF(C).

De maneira simplificada, o EoF_{AB} para um par de q-bits A e B é dado por

$$EoF_{AB}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (1.9)$$

em que

$$h(x) = -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x), \quad (1.10)$$

é a entropia binária (28–30). Para realizar o cálculo da concorrência, primeiro define-se a matriz densidade "spin-flipped", dada pela expressão

$$\tilde{\rho}_{AB} = (\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) \rho_{AB}^* (\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B), \quad (1.11)$$

em que σ_y é uma das matrizes de Pauli (as quais definiremos no capítulo 2) e ρ_{AB}^* é o complexo conjugado da matriz obtida pelo traço parcial do operador densidade do estado completo do sistema $\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ isolando os subsistemas A e B , ou seja, $\rho_{AB} = \text{Tr}_{\text{resto}} \rho$. Com isso, calcula-se a matriz R , obtida por $R = \rho_{AB} \tilde{\rho}_{AB}$ e obtemos a concorrência C por

$$C = \max \{ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0 \}, \quad (1.12)$$

em que λ_i é a raiz quadrada dos autovalores ϵ_i de R em ordem decrescente e $EoF_{AB} \in [0, 1]$. Ou seja, dois estados maximamente emaranhados possuem $EoF_{AB} = 1$. Os quatro estados maximamente emaranhados com $EoF_{AB} = 1$ seriam os 4 elementos da base de Bell $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, e $|\Psi^-\rangle$ com os índices A e B dentro dos kets

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle),$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle),$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle).$$

Existem também estados que apresentam emaranhamento multipartido, ou seja, emaranhamento simultâneo entre mais de dois q-bits, como o estado GHZ (abreviatura para Greenberger–Horne–Zeilinger) (31)

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A 0_B 0_C\rangle + |1_A 1_B 1_C\rangle),$$

o estado W (32)

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0_A 0_B 1_C\rangle + |0_A 1_B 0_C\rangle + |1_A 0_B 0_C\rangle),$$

e o estado $Cluster$ (33)

$$|Cluster\rangle = \frac{1}{2} (|0_A 0_B 0_C 0_D\rangle + |0_A 0_B 1_C 1_D\rangle + |1_A 1_B 0_C 0_D\rangle - |1_A 1_B 1_C 1_D\rangle).$$

Para esses estados, existem diferentes métodos para calcular o emaranhamento (34, 35). Os índices A, B, C e D representam cada, um subespaço de um q-bit, e a medida que analisamos um sistema composto cada vez maior, é comum omití-los na notação para simplificar, por exemplo:

$$|Cluster\rangle = \frac{1}{2} (|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle).$$

Nesta dissertação, em termos de emaranhamento, nosso foco foi utilizar, simular e explorar a medida bipartida de EoF para diferentes sistemas compostos por cadeias e grafos de spin.

1.3 GRAFOS

A teoria de grafos possui diversas aplicações, desde solução de problemas matemáticos clássicos, como encontrar o caminho de distância total mínimo entre dois vértices definidos como P e Q (36), descrições em redes sociais (37) e soluções em problemas de redes rodoviárias (38). Muitas informações podem ser obtidas a partir de grafos, e neste trabalho apresentaremos as definições mais importantes associadas a aplicações aos nossos casos de TEQ em grafos de spin. Apresentaremos também algumas outras aplicações de grafos em CQIQ, pois há várias formas de modelar diferentes sistemas quânticos utilizando grafos.

1.3.1 Definições

Um grafo é descrito por $G(V, E)$ em que V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas associadas ao grafo G , que são pares (ordenados ou não) de vértices. A topologia de um grafo é descrita pela matriz de adjacência A_G , a qual tem seus elementos construídos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \sim j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $i \sim j$ significa que o vértice i está ligado ao vértice j . Um grafo simples, como o da Fig. 1, é descrito por

$$A_{P_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Figura 1 – Grafo Caminho P_2 .

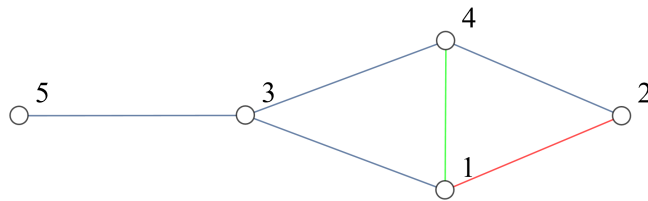
Fonte: O autor.

Um outro exemplo, para o grafo da Fig. 2, temos

$$A_X = \begin{pmatrix} 0 & \text{1} & 1 & \text{1} & 0 \\ \text{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

onde utilizamos cores nos termos a_{12} e a_{21} para vermelho e a_{14} e a_{41} para verde de tal forma que o leitor perceba facilmente como as ligações (arestas) entre vértices são denotadas na matriz adjacência. É importante notar que a rotulagem não altera a topologia do grafo, ou seja, a forma

Figura 2 – Exemplo de um grafo com 5 vértices e 6 arestas.

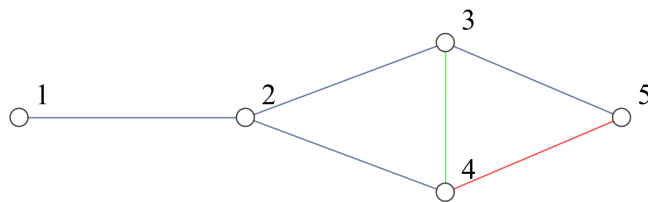


Fonte: O autor.

como seus vértices estão conectados. Para uma rotulagem diferente do grafo X como na Fig. 3, a matriz de adjacência assume a forma

$$A_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{1} & 1 \\ 0 & 1 & \text{1} & 0 & \text{1} \\ 0 & 0 & 1 & \text{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

que pode ser obtida por permutações na matriz (1.15).

Figura 3 – Grafo X com rotulagem alterada

Fonte: O autor.

Uma outra matriz associada a um grafo é a matriz Laplaciana, definida por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde D é a matriz dos graus. D nos informa com seus elementos da diagonal principal, quantas arestas estão conectadas ao vértice i . Desta forma, para o grafo da Fig. 2, temos

$$D_X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Grafos com mesmas características são classificados por famílias (9). Um grafo caminho por exemplo, é denotado por P_n onde n é seu número de vértices. Em termos formais, um grafo caminho é um grafo conectado e sem ciclos, para o qual cada vértice tem grau no máximo 2. Isso significa que todos os vértices, exceto os dois vértices das extremidades, têm exatamente dois vizinhos (um antecessor e um sucessor), enquanto os vértices das extremidades têm exatamente um vizinho.

Outro tipo específico de grafos que abordamos também são os grafos caminho ponderados, que são representados da mesma maneira em termos dos vértices e arestas, com a diferença de que as arestas possuem valores numéricos, chamados de pesos ou custos. Esses pesos podem representar, por exemplo, a distância entre dois pontos (caso seja definida uma métrica) ou a intensidade de interação entre um vértice e outro, seja o que ele estiver representando. Por exemplo, para o grafo da Fig. 3, caso fossemos ponderá-lo numa proporção tal que a aresta entre os vértices 3 e 4 tivesse um favorecimento duas vezes maior às outras, teríamos

$$A_{X'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{green}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \textcolor{green}{2} & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

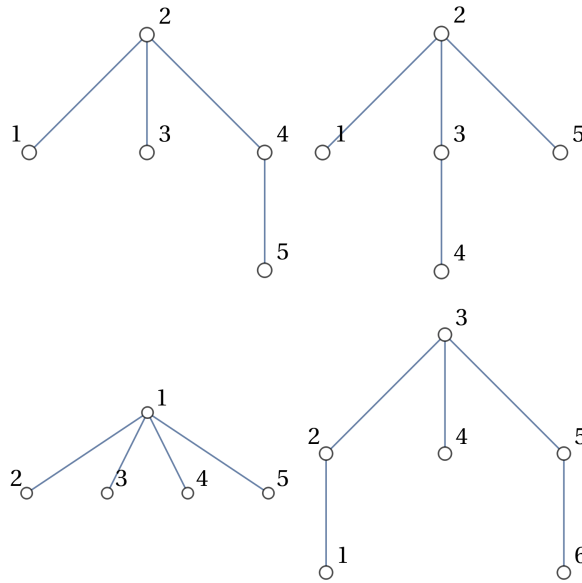
Estudamos também a família dos grafos árvores, onde um *grafo árvore* é um tipo especial de grafo que é *conexo* (há uma aresta entre qualquer par de vértices) e *acíclico* (não possui ciclos). Em outras palavras, é um grafo que não contém laços fechados e tem exatamente $n - 1$ arestas, onde n é o número de vértices. Com isso, por definição todo grafo caminho é também um grafo árvore, mas nem todo grafo árvore é também um grafo caminho. Na Fig. 4 são apresentados quatro exemplos de grafos árvore.

1.3.2 Aplicações de grafos na mecânica quântica e em CQIQ

Exemplos de fenômenos quânticos modelados com a aplicação de grafos são:

- O fenômeno das ressonâncias topológicas em espalhamento em grafos, conforme discutido por Gnutzmann e Smilansky (39). Esse conceito aborda como propriedades topológicas

Figura 4 – Exemplos de Grafos árvores.



Fonte: O autor.

dos grafos podem influenciar o comportamento de partículas quânticas em redes, revelando ressonâncias que não estão presentes em sistemas clássicos. Essa análise é crucial para entender como a geometria e a topologia de um sistema afetam a dinâmica quântica;

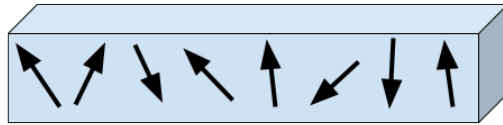
- Grafos quânticos (40) representam uma generalização dos grafos clássicos, onde os vértices simbolizam potenciais de energia e as arestas representam as interações entre partículas;
- Estados grafo, que representam estados quânticos multipartidos, onde cada q-bit está associado a um vértice, e as interações entre os q-bits são modeladas pelas arestas do grafo (41–43);
- Grafos de spins (44–46), que estendem o formalismo para a descrição de cadeias de spins, onde o Hamiltoniano é determinado pelas interações entre os spins localizados nos vértices, conforme abordaremos com mais detalhes nos Capítulos 2 e 3.

O caso que estudamos neste trabalho está relacionado aos grafos de spins, definido no capítulo a seguir.

2 CADEIAS DE SPIN-1/2

O modelo teórico escolhido e abordado para realização de estudos de informação quântica em termos de q-bits no nosso trabalho, foram as cadeias e grafos de spin. Uma cadeia de spins é um sistema de spins $1/2$ permanentemente acoplados (47), assim como representadas na Fig. 5. O conceito para serem chamadas de cadeias vem do fato de que o sistema está isolado o suficiente para que a única energia de interação seja proveniente dos próprios acoplamentos de cada spin com seu vizinho mais próximo. Partes da estrutura de alguns materiais podem ser consideradas como cadeias de spins, como exemplo, citamos a pesquisa em condutividade térmica e calor específico do óxido de estrôncio e cobre Sr_2CuO_3 (48). Apesar da simplicidade desses modelos, a sua física é bastante rica e possuem características muito interessantes quando diferentes configurações iniciais são evoluídas no tempo através da dinâmica natural do sistema. O formalismo das cadeias de spins pode ser aplicável a uma variedade de sistemas físicos que representam uma cadeia de q-bits permanentemente acoplados. Portanto, nosso foco é no aspecto matemático desse sistema, com especial atenção a sua estrutura e dinâmica naturais.

Figura 5 – Representação esquemática de uma cadeia de spins $1/2$.



Fonte: O autor.

Sistemas de spin- $1/2$ são descritos pelas matrizes de Pauli

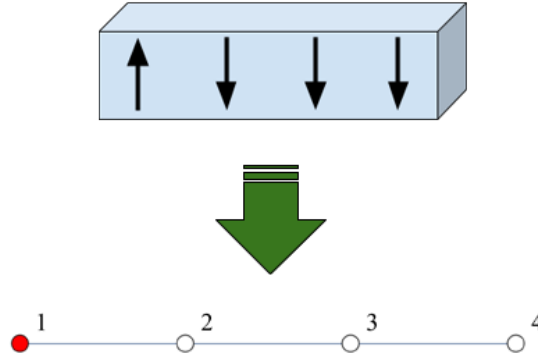
$$\sigma^x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Os dois estados do spin- $1/2$ são, portanto, os autovetores do operador de Pauli σ_z atuando no sítio i de uma cadeia de N sítios, com autovalores $+1$ e -1 respectivamente, representando os estados de spin para cima $|\uparrow\rangle$ e para baixo $|\downarrow\rangle$. Esses estados são mapeados na base computacional como os estados de q-bits $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Como as componentes do spin são bem definidos usando as matrizes de Pauli, esses operadores são muito úteis para o tratamento geral de sistemas de dois níveis.

2.1 GRAFOS DE SPINS

No contexto do estudo de transferências de estados quânticos e de geração de emaranhamento, é comum utilizarmos grafos para representar esquematicamente cadeias de spin, assim como na Fig. 6 (49). Para cada vértice do grafo, associamos um vetor de estado num espaço vetorial complexo de dimensão 2, ou seja, um q-bit (10). Portanto, cada vértice do nosso grafo representa

Figura 6 – Representação esquemática de uma cadeia de 4 spins e logo abaixo um grafo caminho P_4 , onde associa-se $|0\rangle_1 = 1, |1\rangle_2 = 2, |1\rangle_3 = 3$ e $|1\rangle_4 = 4$ onde $|a\rangle_\alpha$ são os estados associados a cada vértice, onde a pode ser 0 ou 1 e α varia de 1 a N . Usamos a cor vermelha para representar o estado $|0\rangle$ e branco para o estado $|1\rangle$.



Fonte: O autor.

um sistema de dois níveis, e as arestas representam o acoplamento e interação que há entre cada sistema. O estado inicial no espaço de Hilbert para a situação da Fig. 6, é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \otimes |1\rangle_4 = |0111\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ é então

$$|\Psi(0)\rangle = (0000000100000000)^T, \quad (2.2)$$

ou seja, um ket de 16 termos (matriz coluna) com 15 "zeros" e 1 "um". No Capítulo 3 explicamos como essa associação ajuda a entender a transferência de estados quânticos em cadeias de spins para o caso de uma única excitação.

2.1.1 Estrutura e Acoplamentos

A energia de um sistema, assim como suas propriedades de interação, podem ser descritas por um operador Hamiltoniano H . A equação de Schrödinger nos traz

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H |\Psi\rangle. \quad (2.3)$$

A partir disso, temos que a dinâmica do nosso sistema é descrita pelo seu propagador $U(t)$, o qual é dado por

$$U(t) = \exp[-iHt\hbar], \quad (2.4)$$

em que t é o tempo, i a unidade imaginária e $\hbar$ a constante de Planck reduzida, $\hbar/2\pi$. Portanto, a evolução do nosso estado total é descrita por

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (2.5)$$

onde $|\Psi(0)\rangle$ é o estado inicial ($t = 0$).

A descrição da energia de interação entre spins numa cadeia pode ser dada pelo modelo de Ising (50), o qual diz que o Hamiltoniano de um sistema com N spins é

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^z, \quad (2.6)$$

desde que consideremos apenas a interação de primeiros vizinhos e que $J_{i,i+1}$, o qual representa a intensidade do acoplamento entre spins adjacentes, seja o mesmo para todos os pares de interação. O segundo termo da Eq. (2.6) pode ser ignorado se restringirmos nossa análise a um valor fixo de spins "up". Fazendo isso, temos o Hamiltoniano de Ising na versão simplificada

$$H_{ZZ} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (2.7)$$

onde ZZ denota forças de acoplamento apenas na direção Z . Se considerarmos a energia de acoplamento entre vizinhos próximos nas direções x e y também, obtemos o Hamiltoniano descrito pelo modelo de Heisenberg

$$H_{XXZ} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [J_{i,i+1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + J_{i,i+1}^z \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z], \quad (2.8)$$

denotado por XXZ pelas intensidades dos acoplamentos em x e y serem equivalentes (a notação XYZ é também utilizada caso as intensidades de acoplamento nas três direções sejam diferentes). O primeiro termo entre parêntesis na Eq. (2.8) também é conhecido como termo de *flip-flop*. O parâmetro Δ foi introduzido para fornecer uma razão entre a de interação do termo de Ising e do termo de flip-flop, onde $\Delta = J^z/J$. Quando $\Delta = 1$ a cadeia é dita isotrópica (modelo conhecido como XXX) e quando $\Delta \neq 1$ a cadeia é dita anisotrópica.

Alguns autores, utilizam também esses Hamiltonianos reescritos em termos da transformação de Jordan-Wigner (51), que mapeia as excitações dos spins em férmions não interagentes, utilizando os operadores de criação $a_n^\dagger$ para férmions no sítio i :

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \sigma_m^z \right) (\sigma_n^x - i\sigma_n^y),$$

o que faz com que o Hamiltoniano possa ser reescrito como

$$H_{JW} = \sum_{n=1}^{N-1} J_n \left(a_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger a_n \right) + 2 \sum_{n=1}^N B_n a_n^\dagger a_{n+1}.$$

O modelo utilizado em todas as simulações e resultados obtidos nesta dissertação, consiste na versão XY (47), onde $\Delta = 0$ na Eq. (2.8)

$$H_{XY} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y). \quad (2.9)$$

também denotada de XX caso as intensidades de acoplamento J sejam iguais para todos os pares de spins ($J_{i,i+1} = J$ constante).

2.2 APLICAÇÕES E IMPLEMENTAÇÕES EXPERIMENTAIS

Recentemente, cadeias de spins têm ganhado destaque no campo do processamento de informação quântica, principalmente como uma forma eficiente de transferir informações (52). Uma cadeia de spins que garante a transferência fiel e eficiente de estados entre dois sítios pode ser utilizada na construção de barramentos quânticos para interconectar diversos componentes de um computador, como registradores em processadores quânticos ou memórias. Isso possibilita a comunicação e a escalabilidade dos componentes de um computador quântico sem a necessidade de converter o estado quântico em diferentes tipos de informação em implementações de computadores quânticos em estado sólido.

Alguns esquemas que permitem a transferência de informação em cadeias de spins incluem a engenharia das interações $J_{i,i+1}$ (53). Isso envolve ajustar os parâmetros de acoplamento entre os spins para facilitar a transferência eficiente de informação quântica ao longo da cadeia (54), algo que entraremos em mais detalhes no Capítulo 3.

No contexto de grafos de spins, sistemas de cadeias de spins podem ser utilizados para a criação e distribuição de emaranhamento bipartido (55, 56).

Algumas das plataformas experimentais mais interessantes que já foram estudadas e são promissoras para simulações de dinâmicas de cadeias de spins incluem (57)

- **Cadeias de spins em materiais magnéticos:** experimentos com cadeias de spins em materiais como compostos de óxido de manganês têm demonstrado fenômenos quânticos interessantes, como ressonâncias magnéticas e transições de fase. Um exemplo é o estudo apresentado por N. A. Spaldin et al. em (58);
- **Quantum dots:** às vezes referenciados como átomos artificiais, e também chamados de pontos quânticos, são pequenos dispositivos nos quais portadores de carga e outras propriedades como o spin são confinados em todas as três dimensões (59). O uso deste tipo de nanoestruturas semicondutoras foi proposto como uma plataforma para computação quântica também (60), e existem diferentes tipos dependendo de como a informação é codificada neles. Por exemplo, há os pontos quânticos de elétrons, onde no trabalho (53) explora-se como a combinação da dinâmica coerente de elétrons únicos e a interação controlada de troca de spins entre pares de elétrons em arranjos de pontos quânticos poderia facilitar a construção de um registrador quântico integrado em grande escala;

- **Cadeias de spins em sistemas de íons aprisionados:** os íons aprisionados têm sido uma plataforma popular para a implementação de cadeias de spins. Esses sistemas permitem a manipulação precisa de q-bits e a criação de interações entre eles, simulando cadeias de spins. Em (61) explora-se como implementar modelos de Hamiltonianos de cadeia de spins com q-bits de íons aprisionados;
- **Cadeias de spins em sistemas supercondutores:** os circuitos supercondutores são uma outra plataforma experimental para a realização de cadeias de spins, onde os q-bits são representados por modos de excitação em um sistema supercondutor. Em (62) são discutidas diversas implementações de q-bits supercondutores que podem ser configurados em estruturas de cadeias de spins.

Algumas das plataformas não se baseiam literalmente em sistemas de spins mas conseguem adaptar um sistema com q-bits de modo que a interação ainda respeite Hamiltonianos como o da Eq. (2.9), que é o caso do artigo (63) em que um sistema físico é elaborado experimentalmente com até seis q-bits, ou como o caso de cadeias de spins obtidas por "átomos frios" interagindo fortemente (64).

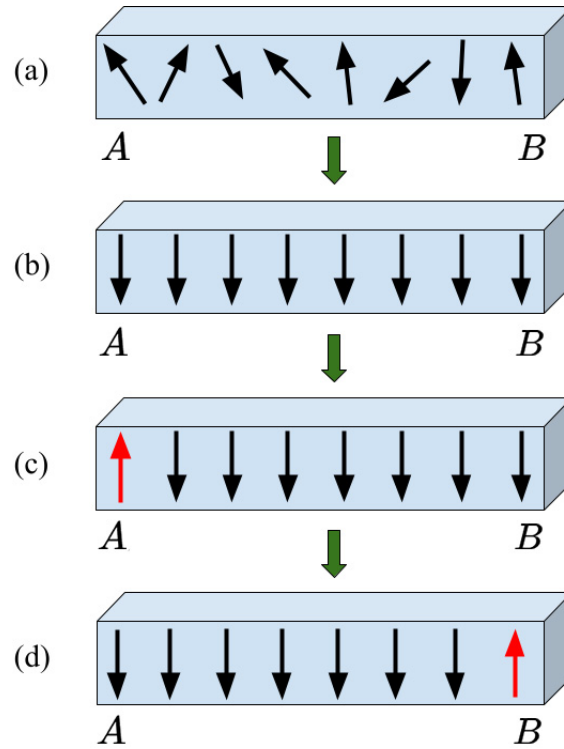
3 TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

Neste capítulo, apresentamos métodos que podem ser empregados para a transferência do estado quântico de um q-bit específico/desejado de um local para outro numa rede unidimensional com outros q-bits, que pode ser utilizada para comunicação em curtas distâncias, como por exemplo, entre processadores quânticos adjacentes (47). Estudamos casos onde a intensidade de acoplamento $J_{i,i+j}$ entre os q-bits é constante para todas as conexões (52), e outros onde ela varia para otimizar a transferência (49). Uma boa maneira de avaliar o transporte de informação numa rede sob este protocolo é por meio do cálculo da fidelidade. Veremos quais as condições para que essa transferência ocorra com fidelidade máxima, a que chamamos de transferência perfeita de estado quântico (TPE). Apresentaremos como construir grafos associados às redes de spins que permitem que haja TPE e destacaremos a diferença entre a utilização do Hamiltoniano associado ao espaço de Hilbert do sistema de spins e o caso restrito ao subespaço de uma única excitação. Apresentaremos também as condições necessárias e suficientes para que a TPE ocorra.

3.1 TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM CADEIAS DE SPIN

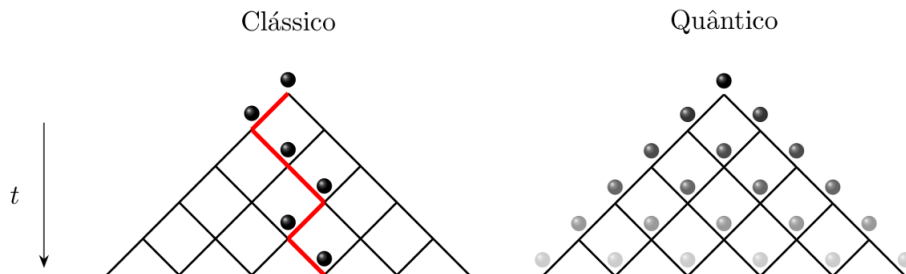
Um dos protocolos mais simples para obter TEQ em cadeia de spins (47), está exemplificado na Fig. 7, com uma cadeia linear. Inicialmente não sabemos como estão configurados cada spin (a). Alinham-se todos os spins para o estado $|1_A 1_i \dots 1_B\rangle$ (b), o que pode ser feito com a aplicação de um campo magnético constante. A partir disso, injetamos uma excitação no sistema (c). Após isso, ocorre a variação em cada um dos spins da cadeia e, para certo t , o estado na antípoda B torna-se exatamente igual ao estado da excitação criado em A (d). A dinâmica que leva à transferência da excitação em A para B é conhecida como uma caminhada quântica de tempo contínuo (CQTQ) (65). A caminhada quântica é uma generalização da caminhada aleatória clássica para sistemas quânticos, onde partículas não podem ser precisamente localizadas devido à superposição de estados e ao princípio da incerteza (66), conforme exemplificado esquematicamente na Fig. 8. Em uma caminhada aleatória unidimensional clássica (67), a movimentação de uma partícula é definida em termos de probabilidades de dar um passo de um determinado comprimento para a esquerda ou para a direita. Já para o caso das caminhadas quânticas, estas são descritas em termos de amplitudes de probabilidade.

Figura 7 – Representação da propagação da informação de um estado quântico de spin $1/2$ numa cadeia de spins unidimensional. Em (a) temos um estado arbitrário antes de interagir com o sistema; em (b) temos o estado após a aplicação de um campo magnético uniforme; em (c) temos o estado gerado com uma única excitação na antípoda A e de (c) para (d) temos a transferência do estado dessa excitação para a outra antípoda, em B . O estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ é considerado à partir de (c).



Fonte: O autor.

Figura 8 – Ilustração dos cinco primeiros passos de um caminhante (esfera em cor preta) clássico e quântico em uma rede. Observamos que para o caso clássico a trajetória seguida pelo caminhante é bem definida. Já no caso quântico, devido ao caráter ondulatório, o que temos é um espalhamento do caminhante por toda a rede.



Fonte: Adaptado de (68).

Outros protocolos de inicialização sem interação com a cadeia para a criação do estado inicial já foram propostos e são válidos para outras configurações de cadeias de spins (69). A TEQ em cadeias de spins é descrita pela substituição do Hamiltoniano da Eq. (2.9) na Eq. Eq.

(2.5), ou seja

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-iHt) |\Psi(0)\rangle, \quad (3.1)$$

onde considera-se $\hbar = 1$. A construção do estado inicial é feita assim como na Eq. (1.2) de modo que o estado excitado sempre é representado como um "1" em $i = 1$ e "0" para todos os outros termos do ket. Por exemplo, para uma cadeia com quatro spins o estado inicial no contexto da TEQ é

$$|\Psi(0)\rangle = |0_1 1_2 1_3 1_4\rangle = |0111\rangle, \quad (3.2)$$

onde os índices inferiores representam da esquerda para a direita o sítio de cada spin, como mostrado em (3.2). Daqui para frente ocultaremos esses índices para que a notação do ket associado ao sistema se torne mais compacta.

Como não se considera num primeiro momento que há interação do sistema com o ambiente, a excitação se conserva, fazendo com que o valor esperado

$$\langle H \rangle = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle$$

se mantenha ao longo de toda a dinâmica. O cálculo da exponencial matricial da Eq. (3.1) se torna cada vez mais trabalhoso a medida que aumentamos o número de spins, pois o espaço de Hilbert do sistema total é da ordem de 2^N onde N é o número de spins. Por exemplo, para um sistema com três spins como o da Fig. 9, o Hamiltoniano da Eq. (2.9) com $J_{1,2} = J_{2,3} = 1$, torna-se

$$H_{S_3} = 1/2((\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) + (\sigma_2^x \sigma_3^x + \sigma_2^y \sigma_3^y)). \quad (3.3)$$

Seja I a matriz identidade de ordem 2, cada termo do hamiltoniano (3.3) é construído da seguinte forma:

1. **Operador $\sigma_1^x \sigma_2^x$:**

$$\begin{aligned} \sigma_1^x &= \sigma^x \otimes I \otimes I, & \sigma_2^x &= I \otimes \sigma^x \otimes I \\ \sigma_1^x \sigma_2^x &= (\sigma^x \otimes I \otimes I)(I \otimes \sigma^x \otimes I) = \sigma^x \otimes \sigma^x \otimes I. \end{aligned}$$

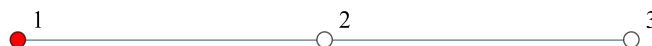
2. **Operador $\sigma_1^y \sigma_2^y$:**

$$\begin{aligned} \sigma_1^y &= \sigma^y \otimes I \otimes I, & \sigma_2^y &= I \otimes \sigma^y \otimes I \\ \sigma_1^y \sigma_2^y &= (\sigma^y \otimes I \otimes I)(I \otimes \sigma^y \otimes I) = \sigma^y \otimes \sigma^y \otimes I. \end{aligned}$$

3. **Operador $\sigma_2^x \sigma_3^x$:**

$$\begin{aligned} \sigma_2^x &= I \otimes \sigma^x \otimes I, & \sigma_3^x &= I \otimes I \otimes \sigma^x \\ \sigma_2^x \sigma_3^x &= (I \otimes \sigma^x \otimes I)(I \otimes I \otimes \sigma^x) = I \otimes \sigma^x \otimes \sigma^x. \end{aligned}$$

Figura 9 – Grafo caminho de 3 vértices representando um cadeia de 3 spins com uma excitação no vértice 1.



Fonte: O autor.

4. **Operador** $\sigma_2^y \sigma_3^y$:

$$\begin{aligned}\sigma_2^y &= I \otimes \sigma^y \otimes I, & \sigma_3^y &= I \otimes I \otimes \sigma^y \\ \sigma_2^y \sigma_3^y &= (I \otimes \sigma^y \otimes I)(I \otimes I \otimes \sigma^y) = I \otimes \sigma^y \otimes \sigma^y\end{aligned}$$

Substituindo esses termos no Hamiltoniano 3.3, temos explicitamente

$$H_{S_3} = 1/2((\sigma^x \otimes \sigma^x \otimes I + \sigma^y \otimes \sigma^y \otimes I) + (I \otimes \sigma^x \otimes \sigma^x + I \otimes \sigma^y \otimes \sigma^y)),$$

e a sua representação matricial é dada por

$$H_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Consequentemente, o operador $U(t) = \exp(-iH_{S_3}t)$ torna-se a matriz a seguir

$$U_{H_{S_3}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma)^2 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & 0 & -\sin(\gamma)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & \cos(\kappa) & 0 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma)^2 & 0 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & -\sin(\gamma)^2 & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma)^2 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & 0 & \cos(\gamma)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & 0 & \cos(\kappa) & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\gamma)^2 & 0 & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & \cos(\gamma)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\gamma = t/\sqrt{2}$, $\kappa = \sqrt{2}t$ e fizemos $\hbar = 1$ para facilitar os cálculos e tornar t adimensional.

Obter a forma final de $U(t)$ não é trivial, uma das maneiras de se resolver é expandindo a exponencial em termos da sua decomposição espectral. Por exemplo, para o Hamiltoniano 3.3 temos sua expansão espectral que pode ser escrita como:

$$H_{S_3} = \sum_{i=1}^8 \epsilon_i E_i = \epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2 + \cdots + \epsilon_8 E_8$$

onde ϵ_i são os autovalores e E_i são os projetores correspondentes aos autovetores da matriz de adjacência, construídos por

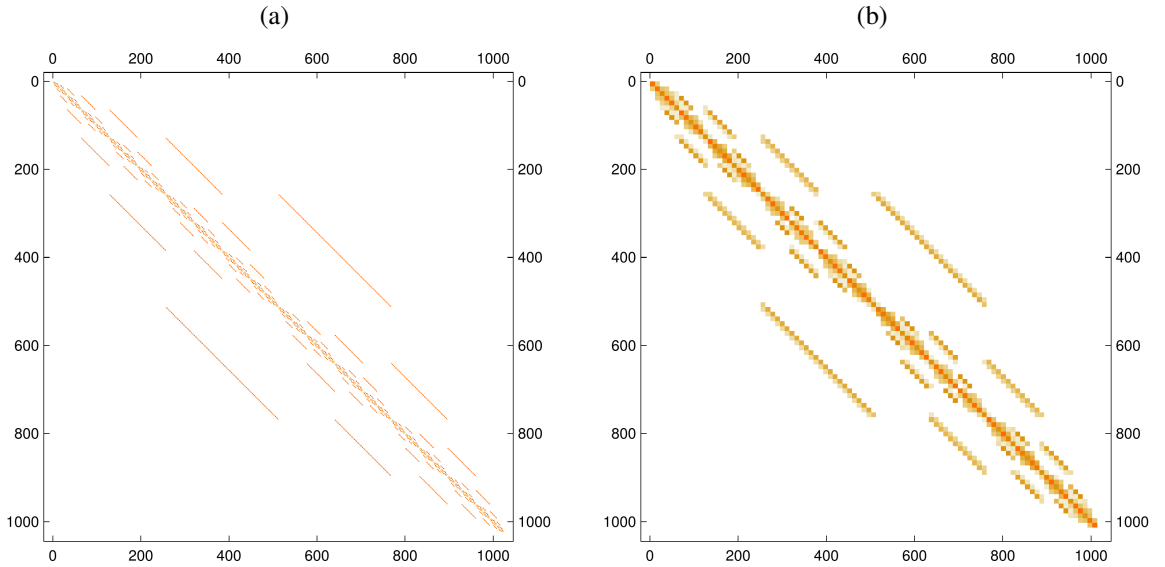
$$E_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{8i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{8i} \end{pmatrix}$$

onde e_i são os autovetores de H_{S_3} . Deste modo, a evolução temporal dessa matriz no tempo pode ser escrita como:

$$\exp(-iH_{S_3}t) = \exp(-i\epsilon_1 t)E_1 + \exp(-i\epsilon_2 t)E_2 + \cdots + \exp(-i\epsilon_8 t)E_8.$$

No final das contas o Hamiltoniano acaba sendo uma matriz esparsa, assim como na Fig. 10, onde temos isso exemplificado para uma cadeia de dez spins.

Figura 10 – Duas representações diferentes de matrizes esparsas, em ambas as cores brancas representam os termos nulos, no caso (a) temos um quadrado alaranjado para cada termo 1 presente no Hamiltoniano e em (b) temos uma representação melhor de ser visualizada na qual as cores mais intensas representam a área da matriz possuindo mais termos não-nulos presentes e a mais clara o inverso. Essa representação corresponde ao Hamiltoniano H_{XX} de uma cadeia de 10 spins.



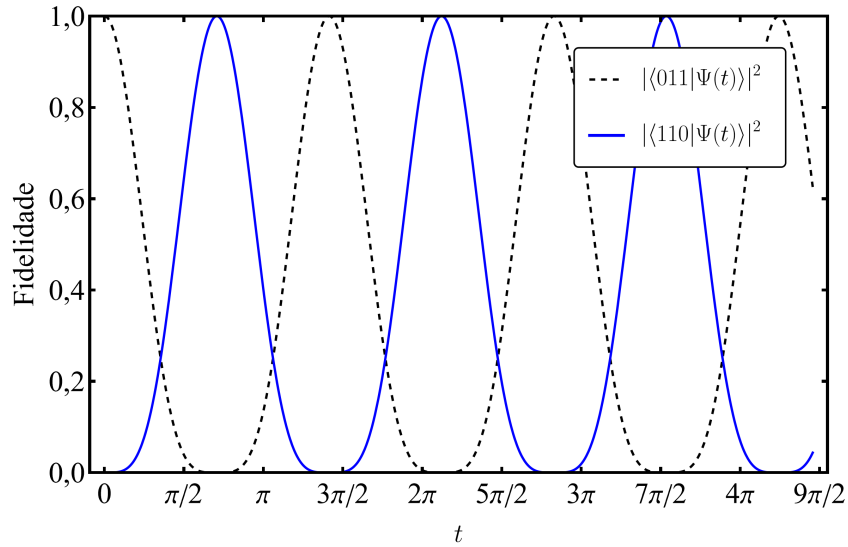
Fonte: O autor.

Assim como citamos no início deste capítulo, uma medida na mecânica quântica que pode ser utilizada para mensurar a capacidade de uma rede de spins em obter a TEQ é a fidelidade F , uma medida da semelhança entre dois estados quânticos. Em se tratando de estados puros, a fidelidade $F(t)$ do estado $|\Psi_B\rangle$ em relação a um estado $|\Psi_A\rangle$ é dada por

$$F = |\langle \Psi_B | U(t) | \Psi_A \rangle|^2, \quad (3.5)$$

deste modo, tem-se na Fig. 7 a transferência de (c) para (d) e com isso compara-se o quanto o estado final se parece com o inicial. Chamamos de TPE caso essa transferência ocorra com $F = 1$. Por exemplo, para o caso de uma cadeia com três spins acoplados onde o estado inicial é $|\Psi(0)\rangle = |011\rangle$, o estado desejado que representa uma excitação ao fim da cadeia é $U(t_{\text{TPE}}) |\Psi(0)\rangle = |110\rangle$, onde t_{TPE} é o valor de tempo no qual esse estado é obtido. A expressão da fidelidade para essa cadeia obtida pela Eq. (3.5) é $|\cos(t/\sqrt{2})|^4$. Para o caso de três spins, essa relação se satisfaz quando $t = \pi/\sqrt{2}$. Na Fig. 11 temos uma simulação desse caso.

Figura 11 – Fidelidades para uma cadeia com três spins, acoplamentos $J_{1,2} = J_{2,3} = 1$ e estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |011\rangle$. A curva azul representa a medida entre o estado evoluído e uma excitação no terceiro e último spin da cadeia. A curva tracejada representa a medida entre a evolução do estado inicial em relação a ele mesmo (isso se repetirá como padrão para nossos gráficos de fidelidade). A TPE ocorre aqui para múltiplos inteiros de $t = \pi/\sqrt{2}$.



Fonte: O autor.

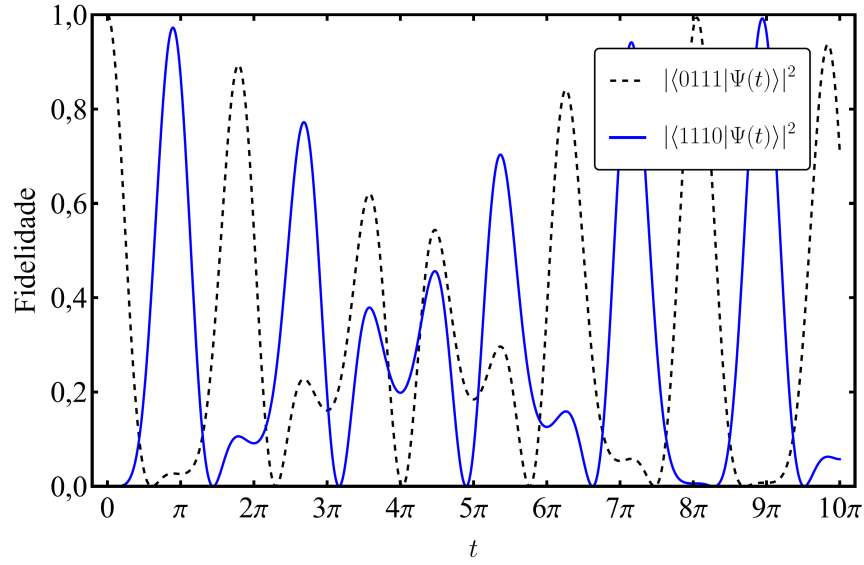
A TPE é periódica, e após $2t_{\text{TPE}}$ o estado do sistema volta a ser exatamente o inicial. Este resultado está de acordo com a simetria da cadeia de spins, pois o estado $|\Psi(t_{\text{TPE}})\rangle$ do sistema é perfeitamente espelhado ao inicial caso a TPE ocorra. Para intensidades de acoplamento iguais para cada par de spins, a TPE ocorre em cadeias de dois e de três spins.

Para quatro spins em diante, o comportamento observado é representado na Fig. 12, e em 13 temos um zoom na região de t entre 26 a 30. Perde-se a periodicidade na fidelidade pelo fato da transferência não ocorrer perfeitamente para nenhum valor de tempo, e o sistema nunca volta a ser exatamente como era o do estado inicial. Nesses casos, valores altos de fidelidade são interpretados na literatura como uma "transferência muito boa de estado" (70–72), não sendo perfeita, mas apresentando um valor de fidelidade muito próximo de 1, algumas vezes até mesmo entre 0,99 e 1. Sougato demonstrou que quanto maior o número de spins na cadeia, menor ainda é o valor de fidelidade obtido para a transferência de uma excitação de uma antípoda à outra da cadeia (52), o que está mostrado na Fig. 14 para cadeias de até 80 spins.

Existem condições necessárias e suficientes no espectro dos Hamiltonianos de cada cadeia de spins que precisam ser satisfeitas para que a TPE seja obtida (73). Quando nos referimos a esses sistemas, chamaremos o tempo necessário para transferir o estado da posição inicial para a posição de sua imagem especular, de tempo de espelhamento, t_M (que acaba sendo o mesmo que t_{TPE}). A dinâmica do sistema é, portanto, periódica a menos de uma fase 2ϕ (uma fase global, podendo ser desconsiderada) e período $2t_M$.

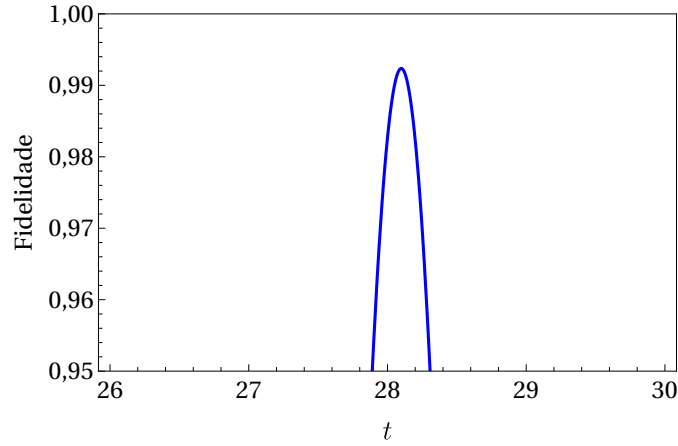
Considere uma cadeia de spins com A e B em extremidades opostas, em que A representa o estado inicial com uma excitação na sua antípoda e B o estado desejado na outra antípoda. Uma

Figura 12 – Fidelidades para uma cadeia com quatro spins, acoplamentos $J_{1,2} = J_{2,3} = J_{3,4} = 1$ e estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |0111\rangle$.



Fonte: O autor.

Figura 13 – Zoom no gráfico da Fig. 12 na região entre os tempos 26 e 30 e fidelidade entre 0,95 a 1,00.



Fonte: O autor.

condição necessária, como descrito logo abaixo, é que as razões das diferenças dos autovalores do Hamiltoniano H devem ser racionais, desde que a cadeia seja simétrica em relação a sua imagem especular.

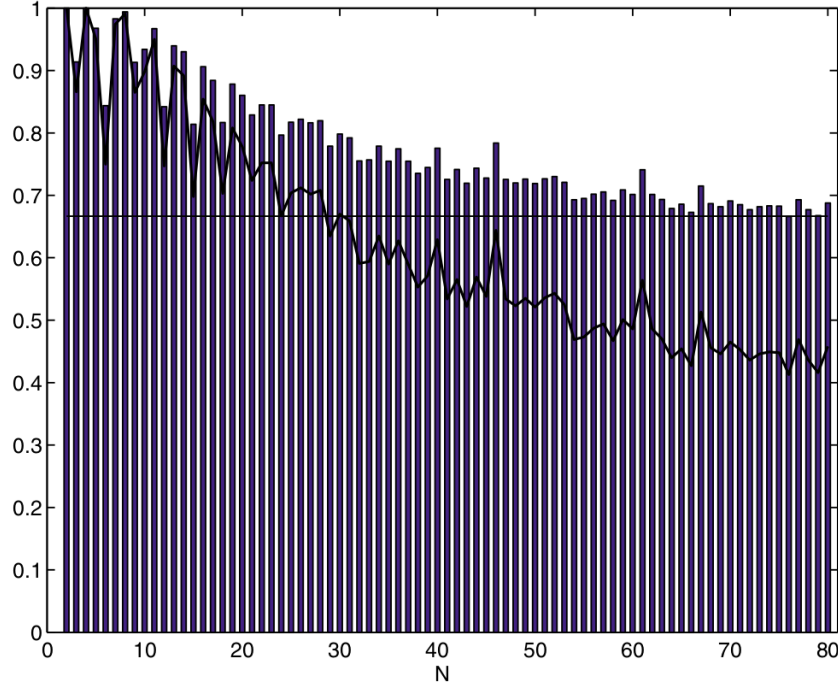
Para um sistema com capacidade para uma TPE, inicializado no estado $|A\rangle$ (74), no instante t_M , temos o estado

$$e^{-iHt_M}|A\rangle = e^{i\phi}|B\rangle, \quad (3.6)$$

mas, pela definição de um sistema simétrico, A e B são completamente equivalentes e, portanto, após outro período de tempo t_M , temos o estado

$$e^{-iH2t_M}|A\rangle = e^{-iHt_M}e^{i\phi}|B\rangle = e^{i2\phi}|A\rangle. \quad (3.7)$$

Figura 14 – Valores máximos de fidelidades obtidos para cadeias de spins de até 80 spins numa escala de tempo entre 0 a $4000/J$ onde J é a intensidade uniforme de acoplamento entre todos os spins. As barras representam os valores de fidelidade de cada cadeia, a reta em $F = 2/3$ representa a maior fidelidade para a transmissão clássica de um estado quântico. A curva representa o valor máximo de emaranhamento nessas cadeias.



Fonte: Adaptado de (52).

Assim, o sistema é periódico, com um fator de fase 2ϕ , e período $2t_M$. Concluimos então que uma cadeia de spins simétrica em relação a sua imagem especular deve ser periódica para permitir a transferência perfeita de estado. Isto pode ser escrito de forma mais simples como

$$|\langle A | e^{-iH2t_M} | A \rangle| = 1 \quad (3.8)$$

para algum tempo $0 < t_M < \infty$. O estado geral de um sistema periódico com período $2t_M$ pode ser escrito como

$$|\psi(2t_M)\rangle = \sum_j a_j e^{-i2E_j t_M} |j\rangle = e^{i2\phi} \sum_j a_j |j\rangle, \quad (3.9)$$

para autovalores E_j de H e autoestados correspondentes $|j\rangle$. Assim, para todos os estados estacionários $|i\rangle$, temos a condição

$$2E_i t_M - 2\phi = 2k_i \pi \quad (3.10)$$

em que k_i são inteiros. Desprezando a fase ϕ entre esses termos, obtemos

$$(E_i - E_j)2t_M = 2\pi(k_i - k_j) \quad (3.11)$$

e eliminando t_M entre quaisquer dois autovalores distintos ($E'_i \neq E'_j$), temos

$$\frac{E_i - E_j}{E'_i - E'_j} = \frac{k_i - k_j}{k'_i - k'_j} \in \mathbb{Q} \quad (3.12)$$

em que $\mathbb{Q}$ denota o conjunto dos números racionais. Como os k_i são inteiros, isso implica que a razão é racional. Portanto, um sistema simétrico em relação a sua imagem especular que possua TPE deve ser periódico, o que é equivalente ao requisito de que as razões das diferenças dos autovalores sejam racionais.

Algumas pesquisas já apresentaram estratégias para alterar uma cadeia de spins e conseguir obter transferências de estado de alta fidelidade. Exemplos incluem a aplicação de campos magnéticos locais (75), o uso de diferentes configurações de cadeias, como a configuração dual e *multi-rail* (76) que consiste na combinação de cadeias, ou a codificação de pacote de onda (53). Outros autores já exploraram também esse problema do ponto de vista de como deve ser construído o estado inicial para se obter a TPE (77).

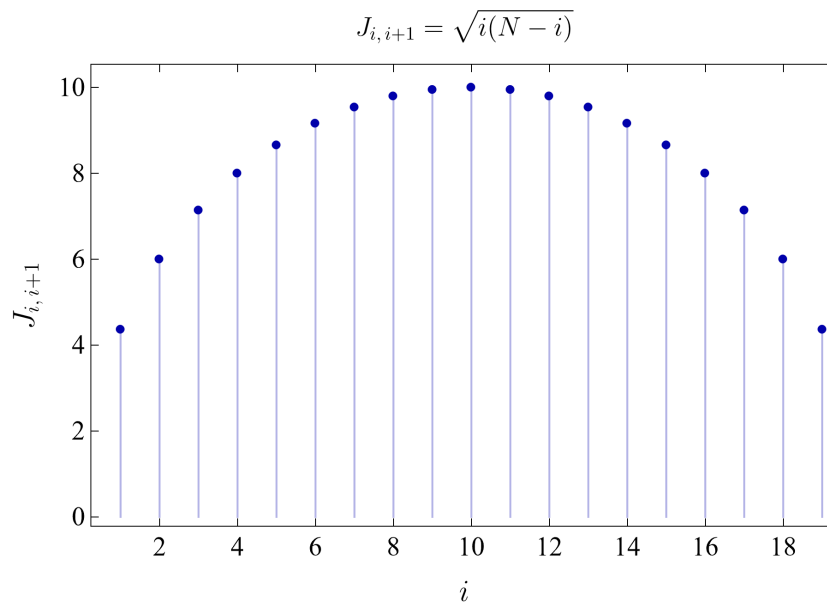
Uma das maneiras mais comuns de contornar o problema das fidelidades em cadeias com mais de três spins e obter a TPE é aplicar uma relação entre as intensidades de acoplamento para que haja solução com TPE entre os spins das antípodas das cadeias. Isso seria fazer uma engenharia dos acoplamentos termo a termo (49), e essa relação é

$$J_{i,i+1} = J_0 \sqrt{i(N-i)}, \quad (3.13)$$

onde J_0 é uma escala de intensidade e $J_{i,i+1}$ é acoplamento entre vizinhos. Na Fig. 15 temos um gráfico exemplificando os valores de acoplamento seguindo a Eq. (3.13) para uma cadeia de 20 spins. Deste modo, obtêm-se um espectro no Hamiltoniano que respeita a condição de espelhamento apresentada na Eq. (3.12).

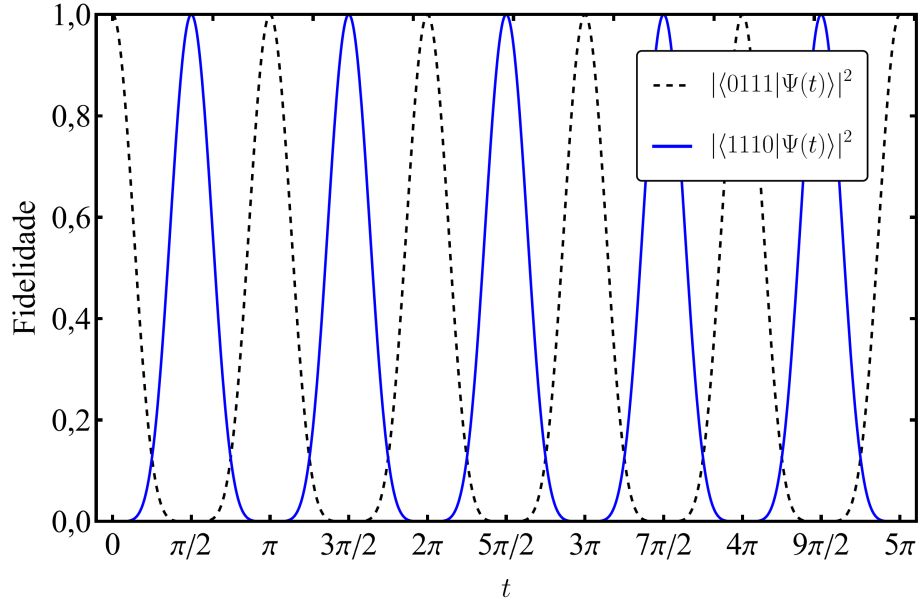
Para uma cadeia de quatro spins, seguindo a relação 3.13 com $J_0 = 1$ temos $J_{1,2} = \sqrt{3}$, $J_{2,3} = 2$ e $J_{3,4} = \sqrt{3}$, obtendo assim a TPE como mostrado na Fig. 16. Deste modo, qualquer

Figura 15 – Acoplamento ponderado $J_{i,i+j}$ com $J_0 = 1$ para uma cadeia de 20 spins, onde N é o número de spins.



Fonte: O autor.

Figura 16 – TPE numa cadeia de 4 spins com $J_{1,2} = \sqrt{3}$, $J_{2,3} = 2$ e $J_{3,4} = \sqrt{3}$ e estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |0111\rangle$. Aqui a TPE ocorre para $t = \pi/2$.



Fonte: O autor.

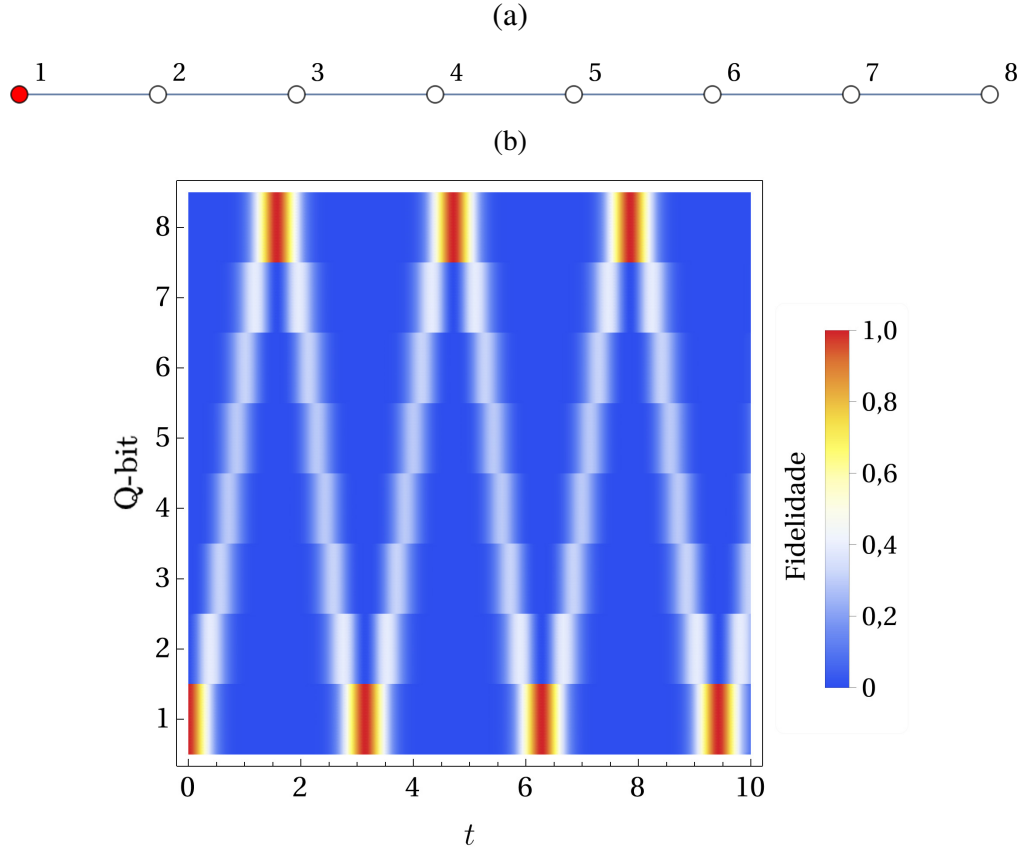
cadeia linear de spins pode obter a TPE. Na Fig. 17 temos também a fidelidade em termos de cada q-bit ao longo da TEQ numa cadeia de oito spins modulada por essa relação. Aumentar ou diminuir o valor da intensidade de acoplamento J ou J_0 faz com que a TPE ocorra numa escala de tempo menor ou maior, respectivamente.

Ainda nesse contexto, ao reproduzir e testar resultados da literatura, encontramos um comportamento interessante na cadeia de cinco spins. Uma configuração com uma excitação no q-bit central obteve a transferência do seu estado para uma sobreposição e retornou ao estado inicial. Alguns autores apenas citam esse fenômeno como TPE. Chamaremos isso de renascimento perfeito (RP) pois ao analisarmos e medirmos a evolução desse estado em cada q-bit separadamente, percebemos que a excitação presente no q-bit 3 se distribui numa sobreposição na cadeia e volta a seu estado inicial com um período de tempo de $t_{RP} \cong 3,6276$, onde denominamos t_{RP} como o tempo no qual o RP ocorre. Em outras palavras, a excitação inicial não chega a se concentrar num q-bit específico a não ser o do estado inicial. A evolução desse estado assim como as medidas de fidelidades para cada q-bit em função do tempo estão mostradas na Fig. 18. Na Seção 3.3 utilizamos novamente essa cadeia como exemplo para um caso de múltiplas excitações.

3.2 TRANSFERÊNCIA DE ESTADO QUÂNTICO EM GRAFOS DE SPIN

Ainda que o principal motivo de estudo das TEQ seja uma possível implementação como canal quântico de comunicação e portanto, uma configuração linear de spins seria o modelo

Figura 17 – (a) Cadeia de 8 spins com acoplamentos modulados por $J_{i,i+1} = J_0 \sqrt{i(N-i)}$ e (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada q-bit em relação ao estado inicial.



Fonte: O autor.

ideal, há outras maneiras de conectar os spins de modo que ainda tenhamos válida a descrição pelo Hamiltoniano H_{XY} . Aqui é onde a utilização da teoria de grafos nos ajuda (44, 74), pois a dinâmica da transferência de estado pode ser determinada pela evolução num subespaço S_G (associado à um grafo G) de dimensão N expandido pelos estados de base $|i\rangle$, $i = 1, \dots, N$, correspondente a uma configuração de spins onde todos estão no estado fundamental exceto por um localizado no vértice i (49). Podemos reescrever por exemplo, as bases do grafo da Fig. 19 de modo simplificado como

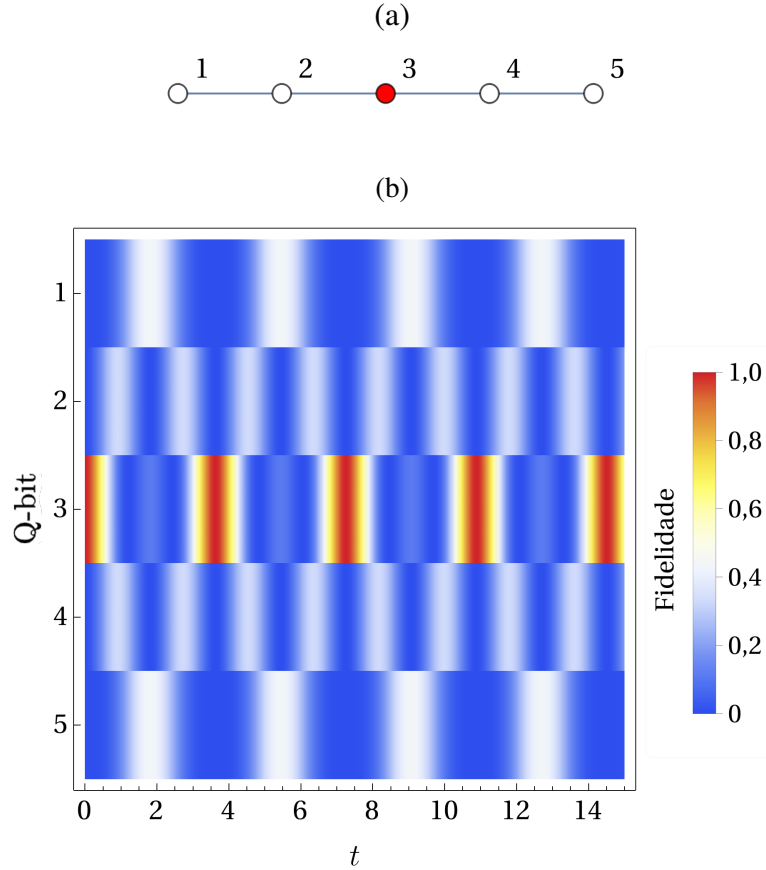
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

onde $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ representam, respectivamente, cada um uma excitação (spin up) localizada nos vértices 1, 2 e 3. O operador associado à componente z total do spin da nossa rede

$$S_{tot}^z = \sum_{i \in V(G)}^N S_i^z, \quad (3.15)$$

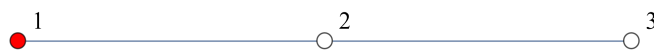
comuta com o Hamiltoniano H_{XY} , isto é $[H_{XY}, S_{tot}^z] = 0$, o que leva à conservação da componente z total do spin. Uma consequência disso é que o estado definido na Eq. (2.2) evolui em uma

Figura 18 – Cadeia de cinco spins com uma excitação concentrada no vértice 3 (a) e (b) fidelidade medida em cada um dos cinco spins da cadeia com relação ao spin no vértice 3 do grafo associado, ou seja, fidelidade de obter a excitação em cada um dos vértices. O renascimento perfeito ocorre para $t_{RP} = 3,6276$.



superposição de estados que no fim conserva apenas uma excitação. Portanto, o Hamiltoniano H_{XY} de uma cadeia de spins $1/2$ de N spins, quando restrito à esse subespaço, pode ser representado por uma matriz de ordem $N \times N$ que, dependendo do valor da constante de acoplamento J , é idêntica à matriz de adjacência $A(G)$ do grafo G associado à mesma cadeia. Uma maneira de enxergar isso (50), é a partir da representação matricial do Hamiltoniano de uma cadeia de quatro spins, onde identificamos a matriz que representa o Hamiltoniano como sendo composta por uma estrutura do tipo bloco-diagonal, em que cada bloco representa um subespaço de um número específico de excitações, sendo elas as quatro, três, duas, uma e nenhuma.

Figura 19 – Grafo caminho P_3



Fonte: O autor.

$$\begin{pmatrix}
|0000\rangle & |1000\rangle & |0100\rangle & |0010\rangle & |0001\rangle & |0011\rangle & |0101\rangle & |0110\rangle & |1001\rangle & |1010\rangle & |1100\rangle & |0111\rangle & |1011\rangle & |1101\rangle & |1110\rangle & |1111\rangle \\
\mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}
\end{pmatrix}.$$

Na matriz acima podemos notar cinco blocos, os quais estão associados à cinco subespaços com um número fixo de excitações. Repare que para uma excitação, o bloco com termos destacados em verde coincide com a matriz de adjacência de um grafo caminho P_4 ,

$$A_{P_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplificando para uma cadeia com três q-bits configurada como na Fig. 19, o Hamiltoniano H_{XX} restrito ao subespaço S_{P_3} de ordem 3×3 onde P_3 é um grafo caminho com três vértices, toma a forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & J & 0 \\ J & 0 & J \\ 0 & J & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{P_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Com isso, se considerarmos $J = 1$, o operador propagador pode ser reescrito como $U(t) = \exp(-iA_{P_3}t)$, que assume a forma

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\gamma) & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & -\sin^2(\gamma) \\ -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & \cos(\kappa) & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} \\ -\sin^2(\gamma) & -\frac{i \sin(\kappa)}{\sqrt{2}} & \cos^2(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde $\gamma = t/\sqrt{2}$ e $\kappa = \sqrt{2}t$. Obtemos os mesmos termos que para o caso de $\exp(-iH_{S_3}t)$, mas numa matriz de dimensão menor. Portanto, para o grafo da Fig. 19, a TEQ nesse subespaço é descrita por

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle = \exp(-iA_{P_3}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

se usarmos a sua matriz de adjacência associada.

Com o valor de tempo de $t = \pi/\sqrt{2}$, o estado da Eq. (3.18) se torna

$$|\Psi(\pi/\sqrt{2})\rangle = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

onde $\mu \in \mathbb{C}$ é uma fase global irrelevante para cálculo de observáveis. Isso ocorre porque o grafo caminho P_3 permite a TPE entre os vértices $i = 1$ e $i = 3$. Isso simplifica consideravelmente o cálculo do operador de evolução temporal, pois a sua representação matricial é da mesma ordem do Hamiltoniano utilizado.

Por exemplo, para uma cadeia com 10 spins, teríamos uma matriz da ordem de 2^{10} , ou seja, 1024×1024 termos. Já no subespaço com a condição de um estado inicial com apenas uma única excitação na cadeia, associando a um grafo caminho de 10 vértices, temos sua matriz de adjacência da ordem de N , ou seja, apenas 10×10 termos.

Considerando o fato de que precisamos fazer a exponencial dessas matrizes para obter $U(t)$, o cálculo no subespaço é muito mais facilitado de se obter computacionalmente, e consequentemente a medida de propriedades como a fidelidade torna-se mais rápida também.

Em se tratando de medidas de EoF, é necessário considerar o Hamiltoniano original das cadeias de spins pois assim como definido na Eq. (1.12), dependemos do traço parcial que é uma operação realizada no operador densidade do estado na dimensão completa do sistema, de ordem 2^N . Pode ser que haja um atalho que permita o cálculo de EoF no subespaço de uma excitação, mas até o momento, não o encontramos.

3.2.1 Produtos Cartesianos

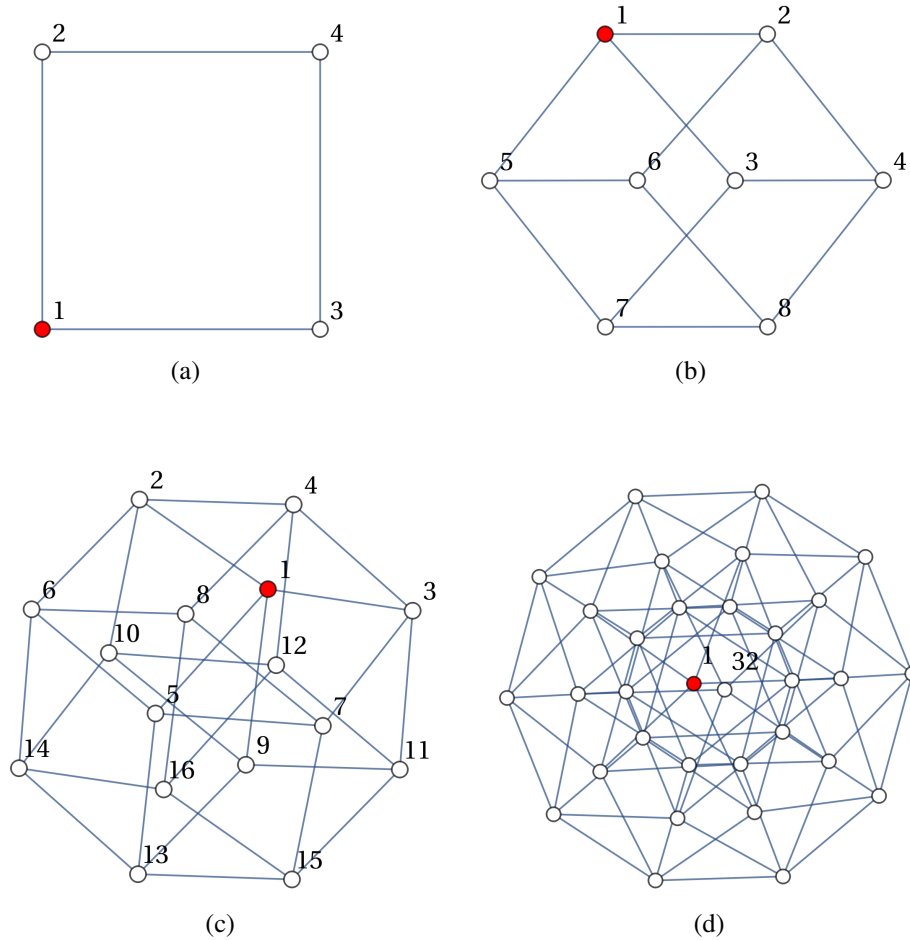
Uma das alternativas disponíveis para se obter a TPE em sistemas maiores, envolve o produto cartesiano entre grafos (9, 74), operação que quando realizada entre grafos que permitem a TPE, gera um novo grafo que também a permite. Esse produto é obtido pelas seguintes operações: Sejam $A_1(G_1)$ e $A_2(G_2)$, respectivamente, as matrizes de adjacência dos grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$, a matriz adjacência $A(G_1 \times G_2)$ do grafo resultante do produto cartesiano entre os dois grafos é obtida por

$$A(G_1 \times G_2) = A_1(G_1) \otimes I_m + I_n \otimes A_2(G_2), \quad (3.20)$$

em que I_m é uma matriz identidade de mesma ordem que A_2 , I_n da mesma ordem que A_1 , $\otimes$ sendo o produto tensorial e $\times$ representando o produto cartesiano.

O produto cartesiano de grafos caminho P_2 realizados subsequentemente, resulta em grafos hipercubos Q_n , assim como exemplificados na Fig. 20. Percebe-se, que à medida que obtemos grafos maiores a partir do produto cartesiano, a visualização das conexões torna-se cada vez mais complicada, sendo essa a desvantagem do uso dessa família de grafos. Podemos obter a TPE em grafos de spin e com diversos vértices mas ao custo de diversas arestas também, o que torna a

Figura 20 – (a) Grafo hipercubo Q_2 , obtido também por $P_2 \times P_2$; (b) grafo hipercubo Q_3 , obtido também por $P_2 \times Q_2$; (c) grafo hipercubo Q_4 , obtido também pelo produto $P_2 \times Q_3$ e (d) grafo hipercubo Q_4 , obtido também pelo produto $P_2 \times Q_4$.

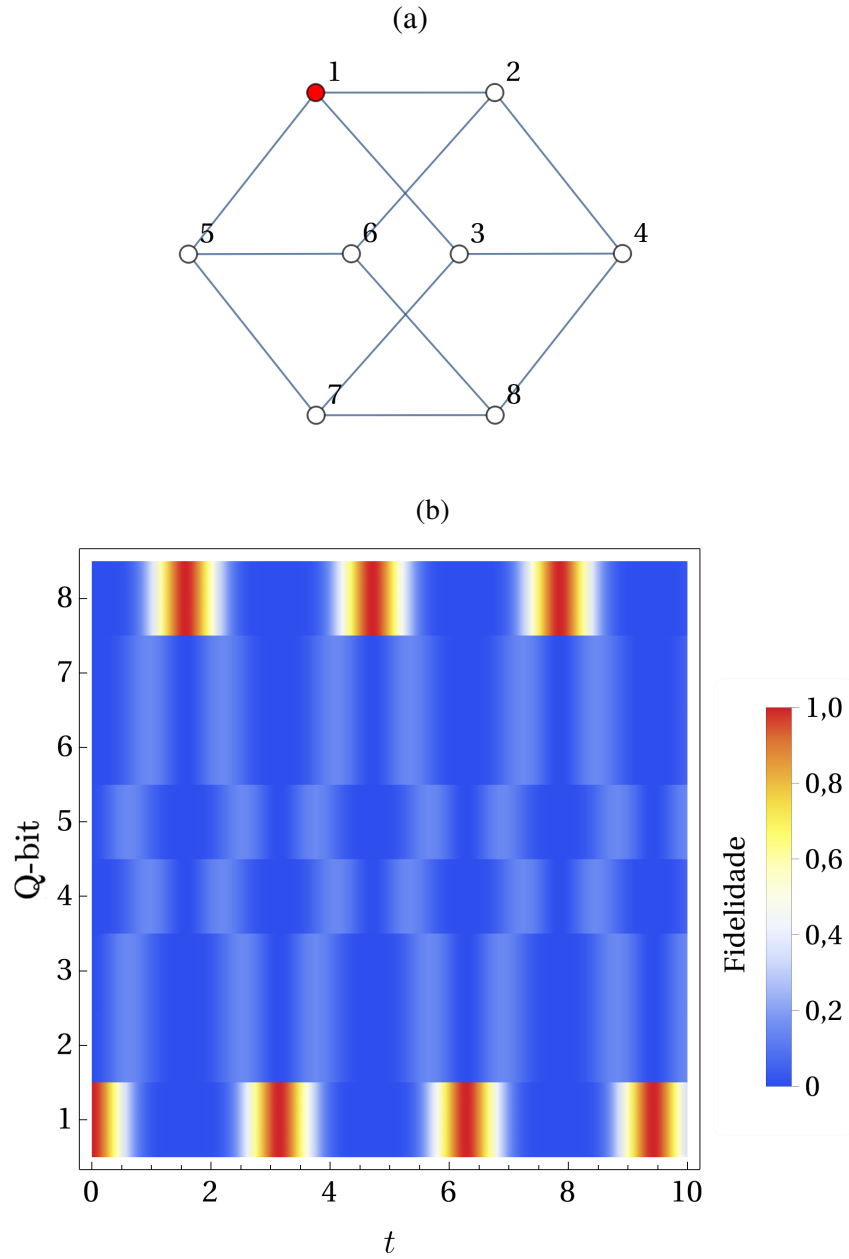


Fonte: O autor.

implementação experimental desses grafos mais complicada de ser obtida. O comportamento da fidelidade nessas cadeias está exemplificado para o caso de um hipercubo com oito vértices na Fig. 21. Percebe-se como inicialmente o estado se distribui numa sobreposição entre os vértices 2, 3 e 5, e após isso numa sobreposição entre os vértice 4, 6 e 7, até por fim chegar ao vértice 8 com transferência perfeita no tempo de $\pi/2$ e voltar de mesmo modo ao vértice 1, quando $t = \pi$.

O renascimento perfeito no grafo caminho de cinco vértices nos motivou a testar configurações semelhantes, como na Fig. 22 que temos a representação da transferência de estado para um grafo da família das árvores de nove vértices, que chamamos de T_9 , onde encontramos também um RP do estado concentrado no vértice 5, e com intensidades de acoplamentos iguais para cada aresta.

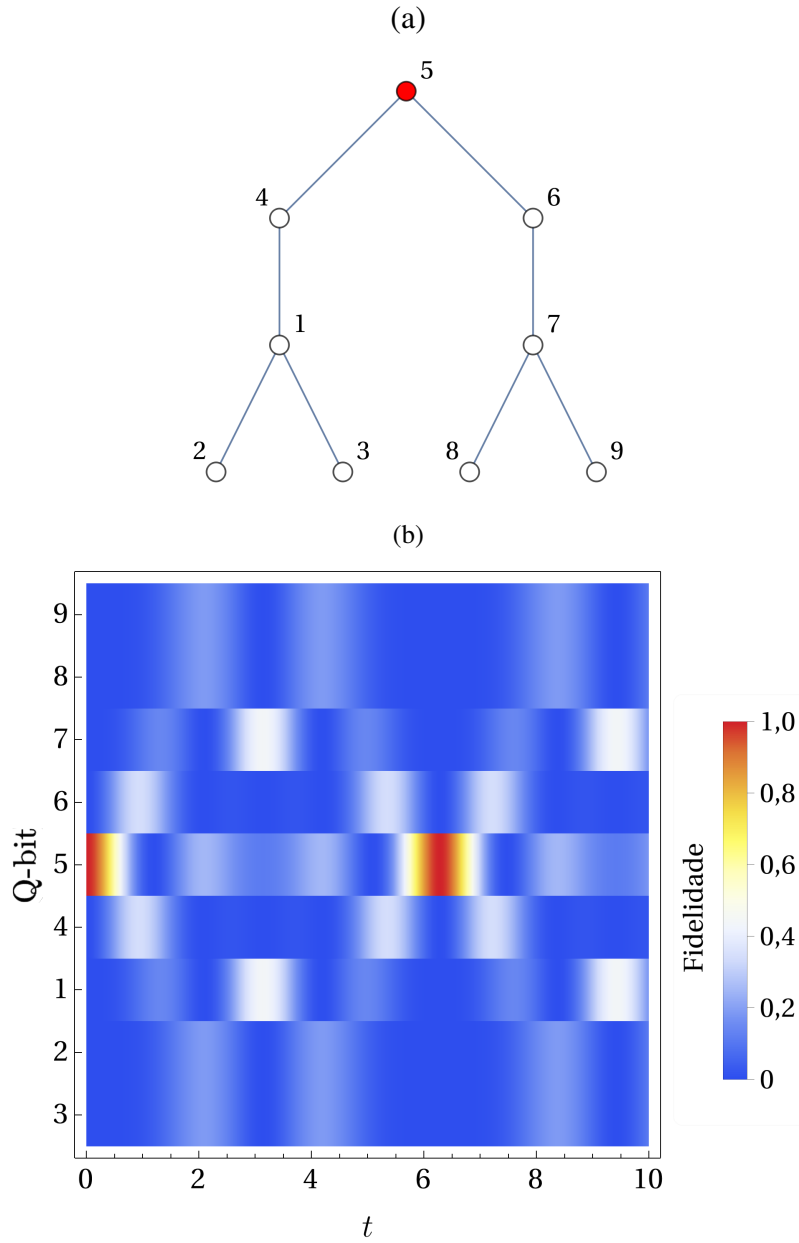
Figura 21 – (a) Grafo hipercubo Q_3 e (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada spin localizado em cada vértice desse respectivo grafo. Podemos ver que a excitação distribui-se numa sobreposição entre os vértices adjacentes ao 1, depois aos adjacentes ao vértice 8 até concentrar-se nele, levando à TPE entre os vértices 1 e 8 para o tempo de $t = \pi/2$.



3.3 MÚLTIPLAS EXCITAÇÕES

O interesse principal do estudo das TEQ é baseado na transferência de uma única excitação entre as antípodas de uma cadeia de spins. Porém, alguns autores já enfatizaram a relevância de pesquisas em redes com múltiplas excitações (78, 79). Para exemplificar o comportamento

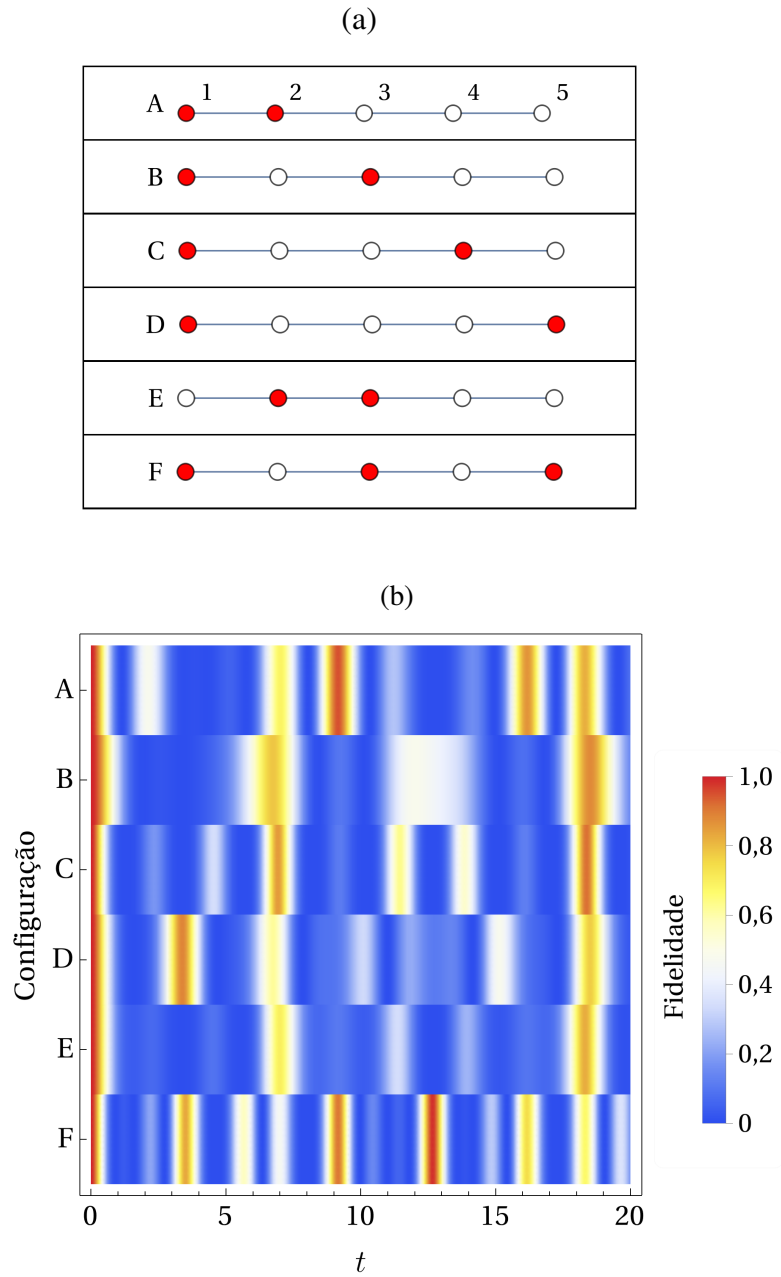
Figura 22 – Dinâmica do RP para um grafo árvore de nove vértices. A excitação concentrada no vértice 5 distribui-se em sobreposição até os vértices 7 e 1 no tempo de $t_M = \pi$ e retorna ao vértice 5 com período de $t_{RP} = 2\pi$.



Fonte: O autor.

da fidelidade na presença de múltiplas excitações, mostramos na Fig. 23 para uma cadeia com cinco spins o que ocorre com a fidelidade para seis configurações iniciais diferentes ($|\Psi(0)\rangle$), cada uma medida em relação ao seu próprio estado inicial, ou seja $F = |\langle \Psi(0) | U(t) | \Psi(0) \rangle|^2$. As cores nos grafos associados foram escolhidas de modo que vermelho representa uma excitação $|0\rangle$ e branco um estado fundamental $|1\rangle$.

Figura 23 – (a) Seis configurações de estados iniciais com duas e três excitações para uma cadeia com cinco spins (outras configurações são obtidas por simetria dessas mesmas e portanto causariam o mesmo comportamento). Os vértices vermelhos representam um estado $|0\rangle$ e as cores brancas representam um estado $|1\rangle$; (b) gráfico de densidade com as fidelidades de cada configuração inicial para a cadeia com cinco spins. Neste caso, cada configuração está com sua respectiva fidelidade para o renascimento do estado inicial.



4 PROTOCOLO DE GERAÇÃO DE EMARANHAMENTO

A criação e transmissão de emaranhamento por longas distâncias são essenciais para viabilizar tarefas de computação e informação quântica em larga escala, como teletransporte quântico, memórias e repetidores, além da distribuição segura de chaves (3, 55, 80). Nesse contexto, Estarellas et. al. (55) introduziram configurações promissoras para geração e armazenamento de emaranhamento em cadeias de spins.

Motivados por esses trabalhos, realizamos cálculos numéricos e analíticos com diferentes cadeias e configurações de conexões na busca de novos comportamentos. Assim como no estudo da TPE, utilizamos grafos para representar as cadeias de spins e a evolução dos sistemas é dada pela aplicação do operador de evolução temporal no estado inicial. As medidas realizadas são de emaranhamento entre duas partições. Medidas de emaranhamento multipartidos podem ser estudadas em trabalhos futuros.

Nesta seção, utilizamos sistemas com apenas uma excitação, onde representamos esquematicamente por vértices na cor vermelha. Para simplificar a notação, chamamos de $\text{EoF}(i, j)$ as medidas de emaranhamento entre cada spin i e j , e de $\text{EoF}(K)$ para um conjunto de pares específico K que possuir o mesmo padrão de emaranhamento, e além disso, chamaremos de $\text{EoF}_{\max}(i, j)$ o valor máximo atingido para cada caso. Chamaremos de t_E o valor de tempo no qual atinge-se o primeiro pico de emaranhamento para cada caso. Dado o fato de que o EoF é uma medida de emaranhamento bipartido, estudamos para todos os possíveis pares de spins de cada caso.

4.1 EMARANHAMENTO EM GRAFOS DE SPIN COM ACOPLAMENTO $J = 1$

Partindo dos casos mais simples, estudamos o EoF entre spins para algumas configurações de grafos com acoplamento uniforme, ou seja, mesma intensidade de acoplamento J_{ij} no Hamiltoniano H_{XX} para cada spin. Partimos dos casos com três spins pois, para a cadeia de dois spins não obtivemos o surgimento de EoF. Em adição, estudamos o EoF para o grafo pertencente à família das árvores, o T_9 que já havíamos estudado no contexto do RP no capítulo anterior.

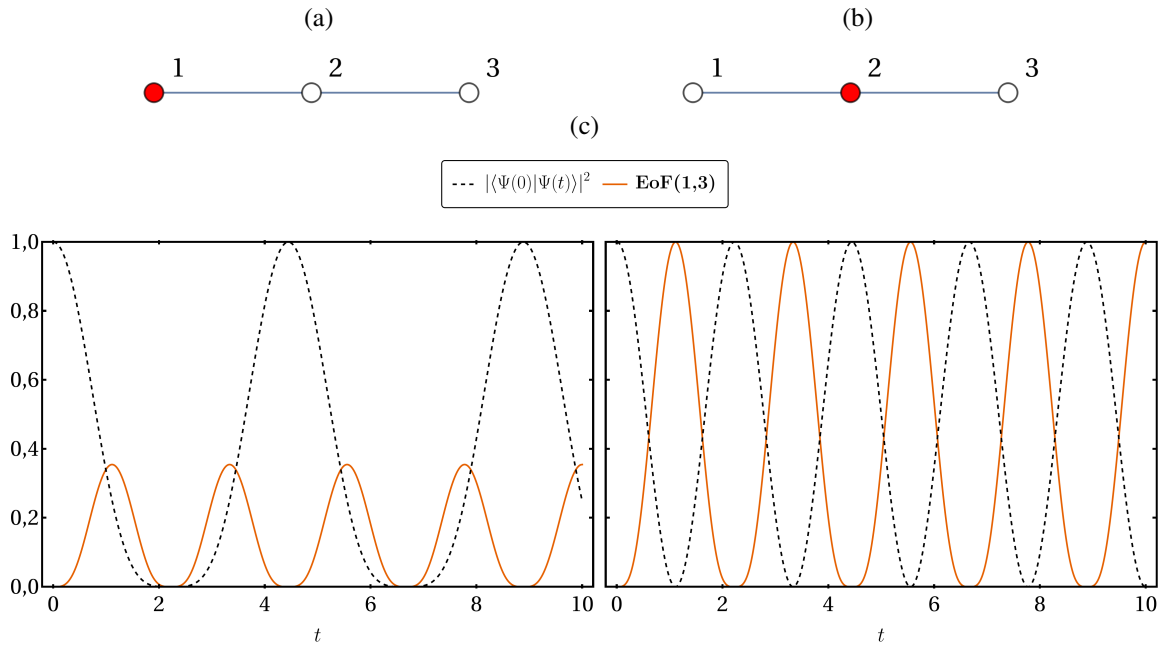
4.1.1 Grafos Caminho P_N

Utilizando a Eq. (1.9), estudamos o EoF em cadeias de spin configuradas como grafos caminho com até nove vértices. A seguir mostramos os resultados que obtivemos para os casos P_3 , P_4 e P_5 , pois o perfil de EoF para os grafos P_4 , P_6 , P_7 , P_8 , P_9 e P_{10} acabou sendo semelhante e não houve periodicidade, o que leva-nos a acreditar que o perfil de EoF em cadeias de spins, pode estar diretamente relacionado com a presença ou não de TPE ou RP. Ou seja, nos casos estudados, a periodicidade na função de EoF, obteve-se apenas nos casos que possuíam TPE ou

RP.

Para uma cadeia com três spins nós obtivemos o emaranhamento entre os vértices 1 e 3 com uma intensidade máxima de $\text{EoF}(1,3) \cong 0,35$ na configuração com um spin desemparelhado no vértice 1 e picos de $\text{EoF}(1,3) = 1$ na configuração com uma excitação no vértice 2, mostrados na Fig. 24.

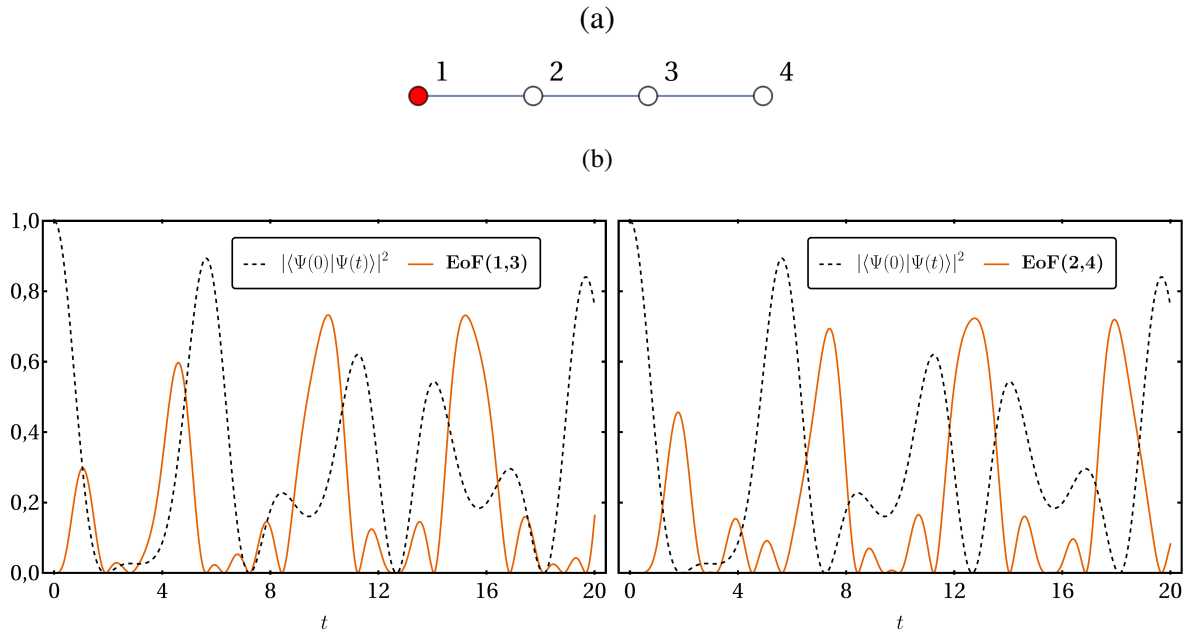
Figura 24 – Duas configurações iniciais diferentes (a) e (b) na cadeia de três spins e seus respectivos gráficos de fidelidade e EoF (c) entre os spins 1 e 3, à esquerda para o estado inicial com uma excitação no vértice 1 e à direita para uma excitação no vértice 2.



Fonte: O autor.

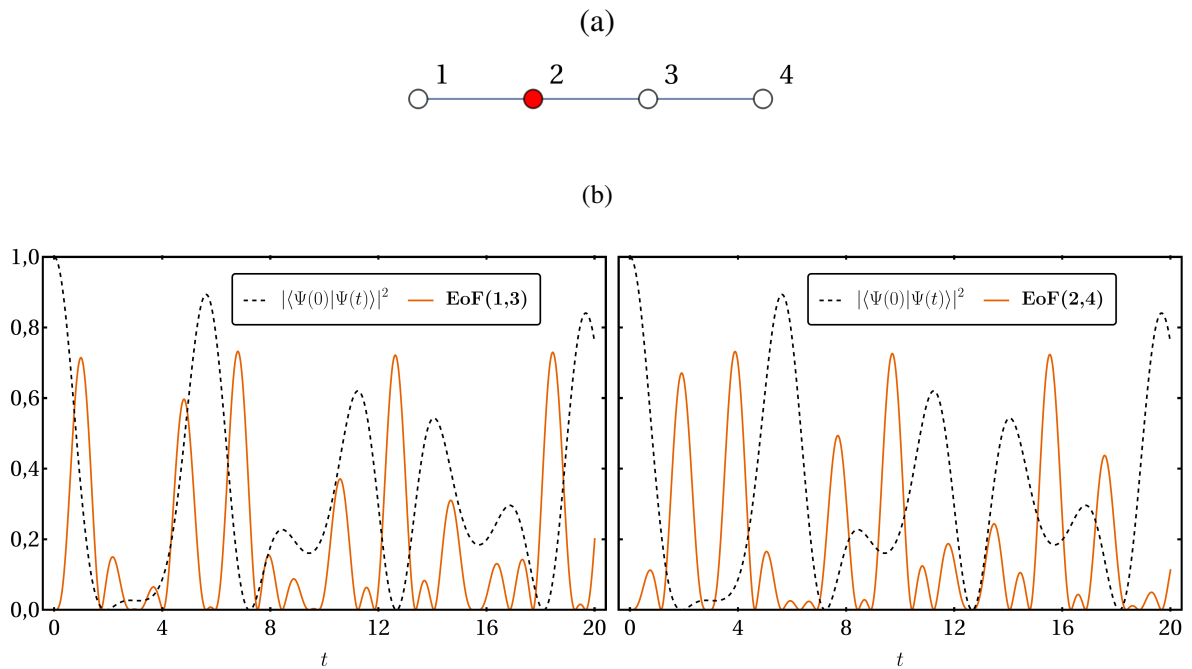
Com 4 spins em diante configurados como nos grafos Caminho, o emaranhamento surge sem periodicidade, além de demorar mais tempo para atingir valores altos, o que está exemplificado nas Figuras, 25 e 26, comportamento semelhante à própria fidelidade do estado.

Figura 25 – (a) Cadeia de quatro spins com uma excitação no primeiro spin e (b) perfil do EoF entre dois pares de q-bits dessa cadeia não modulada com uma excitação no vértice 1. Os pares não mostrados possuem $EoF = 0$ para qualquer valor de tempo.



Fonte: O autor.

Figura 26 – (a) Cadeia de quatro spins com uma excitação no segundo spin e (b) perfil do EoF entre dois pares de q-bits dessa cadeia não modulada com uma excitação no vértice 1. Os pares não mostrados possuem $EoF = 0$ para qualquer valor de tempo.



Fonte: O autor.

Um caso mais interessante no qual se manifesta a periodicidade, ocorre para a cadeia de 5

spins com uma excitação no vértice 3, cujo perfil de fidelidade para cada spin está mostrado na Fig. 18. O seu perfil de emaranhamento de formação entre os possíveis pares, é tal que 4 pares diferentes acabam se emaranhando, são eles:

$$\text{EoF}_{\max}(3, 5) \cong 0,2952$$

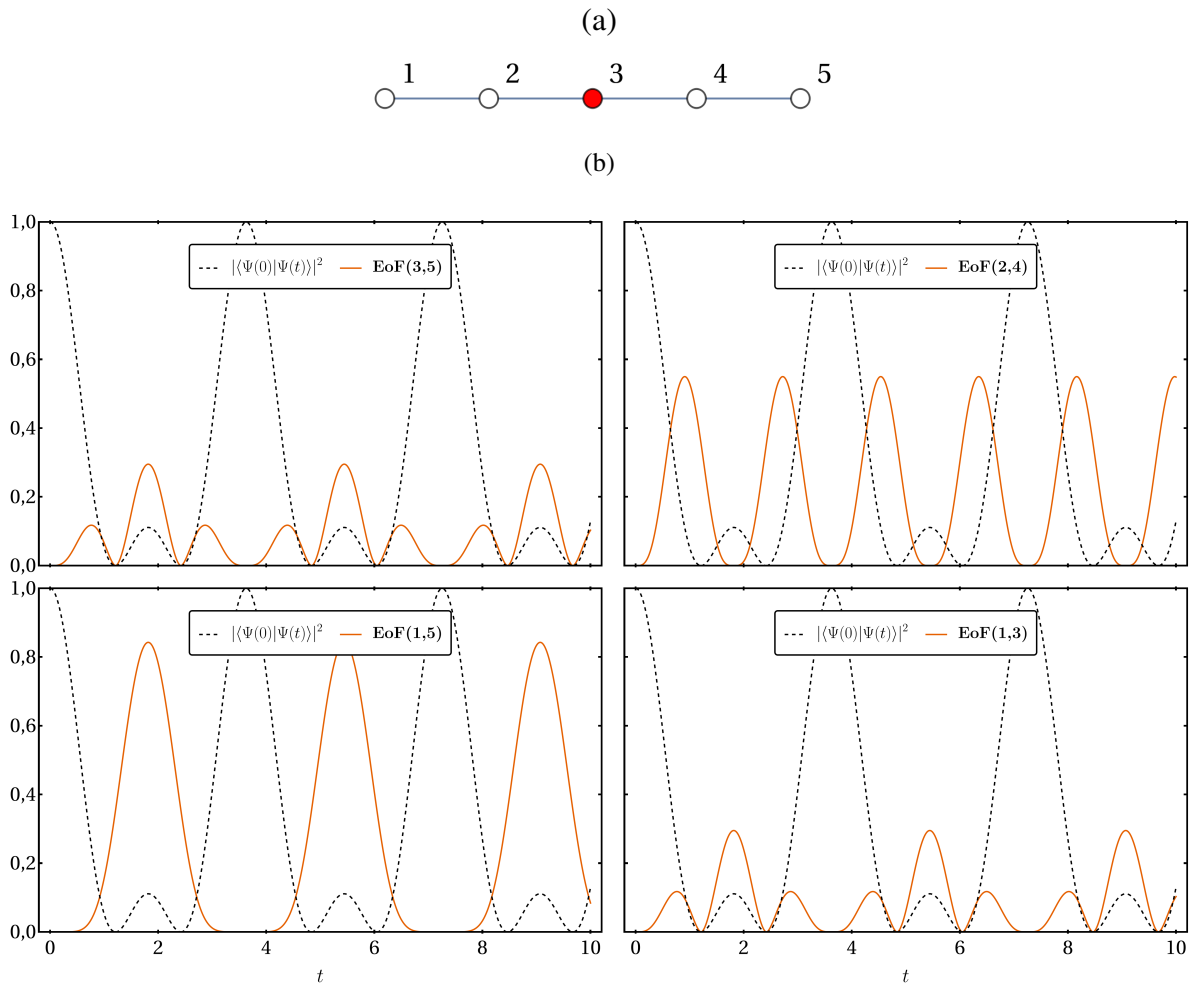
$$\text{EoF}_{\max}(2, 4) \cong 0,5500$$

$$\text{EoF}_{\max}(1, 5) \cong 0,8428$$

$$\text{EoF}_{\max}(1, 3) \cong 0,2952$$

O maior valor obtido nesta cadeia é $\text{EoF}(1, 5) \cong 0,8428$ justamente no instante de tempo em que temos o estado em sobreposição entre os spins 1 e 5, conforme mostrado na Fig. 27.

Figura 27 – Perfil do Emaranhamento de Formação entre 2 pares de q-bits numa cadeia de 5 spins (a) não modulada com uma excitação no vértice 3. Os pares não mostrados possuem $\text{EoF} = 0$ para qualquer valor de tempo.

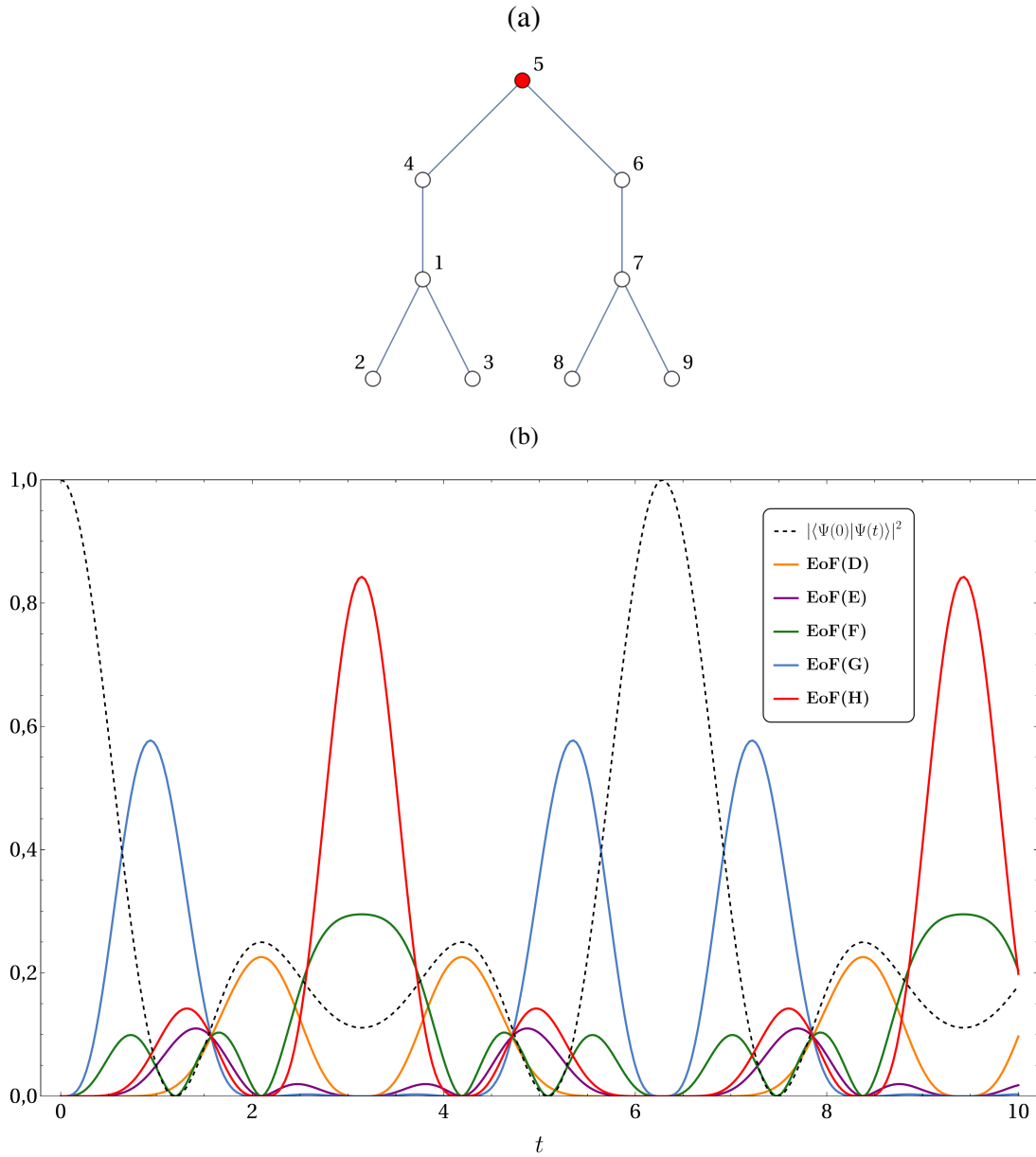


4.1.2 Grafo Árvore T_9

O comportamento da cadeia de 5 spins nos motivou a explorar o processo da transferência de estado e emaranhamento de formação para outras famílias de grafos parecidas, como a das árvores. Para um grafo árvore com 9 spins conectados como na Fig. 22, que visto como uma versão do grafo de 5 spins com 2 vértices e duas arestas à mais nas suas antípodas, encontramos um renascimento perfeito para o estado inicial no vértice 5 que se distribui em sobreposição e retorna ao vértice central. O seu perfil de emaranhamento entre os 36 pares de spins possíveis, é tal que apenas 18 apresentaram algum valor e desses há 5 padrões que se repetem, conforme estão mostrados no gráfico da Fig. 28. O maior valor obtido foi de $EoF(1, 7) \cong 0,84$, que denotamos como o padrão H. Estados iniciais com uma excitação concentrada em outros vértices não demonstraram renascimento perfeito de estado e/ou valores significativos de emaranhamento.

Figura 28 – (a) Cadeia árvore de nove spins T_9 ; (b) fidelidade do estado inicial (renascimento perfeito) e cinco padrões de EoF para os 18 pares de q-bits emaranhados.

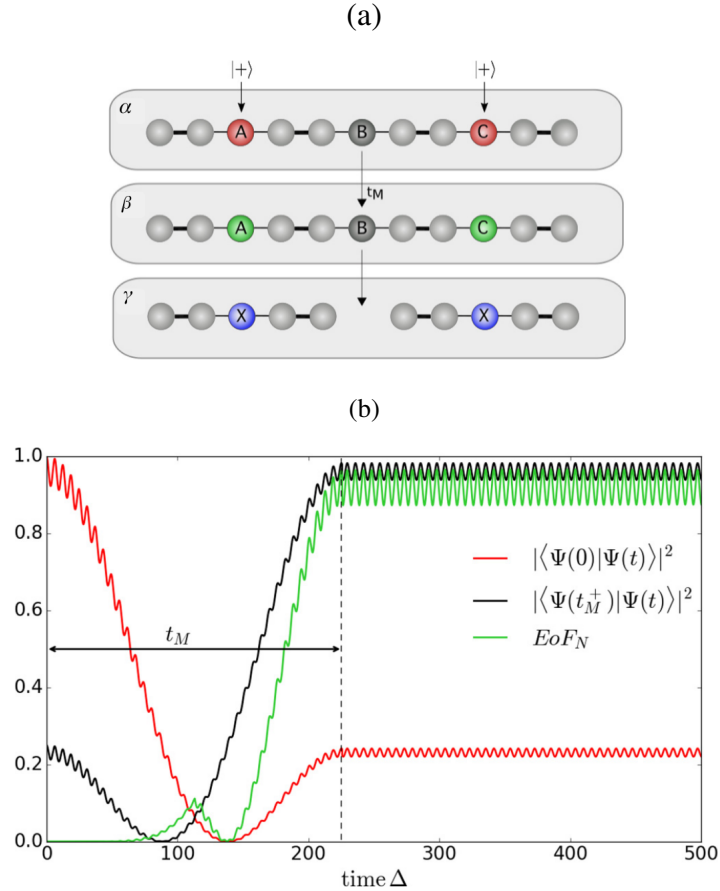
D $\rightarrow$ (8, 9), (3, 8), (3, 9), (2, 9), (2, 8), (2, 3);	$\text{EoF}_{max} \cong 0,2258$
E $\rightarrow$ (6, 9), (6, 8), (4, 9), (4, 8), (3, 6), (3, 4), (2, 6), (2, 4);	$\text{EoF}_{max} \cong 0,1101$
F $\rightarrow$ (5, 7), (1, 5);	$\text{EoF}_{max} \cong 0,2952$
G $\rightarrow$ (4, 6);	$\text{EoF}_{max} \cong 0,5773$
H $\rightarrow$ (1, 7).	$\text{EoF}_{max} \cong 0,8428$



4.2 EoF EM GRAFOS DE SPIN DESACOPLADOS

O protocolo introduzido por Estarellas et. al. (55), consiste em preparar uma cadeia de spins modulada com intensidades de acoplamento como na Fig. 29, onde temos a representação dessa cadeia por um grafo caminho de 11 vértices com arestas mais espessas e outras mais finas. A relação que se cria é de $\Delta/\delta = 0, 1$, onde as arestas mais espessas representam o acoplamento $J = \Delta$ e as mais finas $J = \delta$.

Figura 29 – (a) Representação esquemática do protocolo com uma cadeia de 11 spins. O estado inicial (α) consiste de todos os q-bits no estado $|0\rangle$ exceto os representados pelos vértices A e C. Em β temos o estado evoluído até o tempo de espelhamento t_M no qual A e C estão emaranhados e remove-se o q-bit B, chegando ao estado representado em γ . Em (b) temos três funções, a fidelidade do estado inicial em relação ao estado futuro em vermelho, a fidelidade do estado à partir do momento em que remove-se o q-bit B (t_M) e o estado futuro na cor preta, e o valor do EoF entre os q-bits A e C para toda a evolução, obtido numericamente.

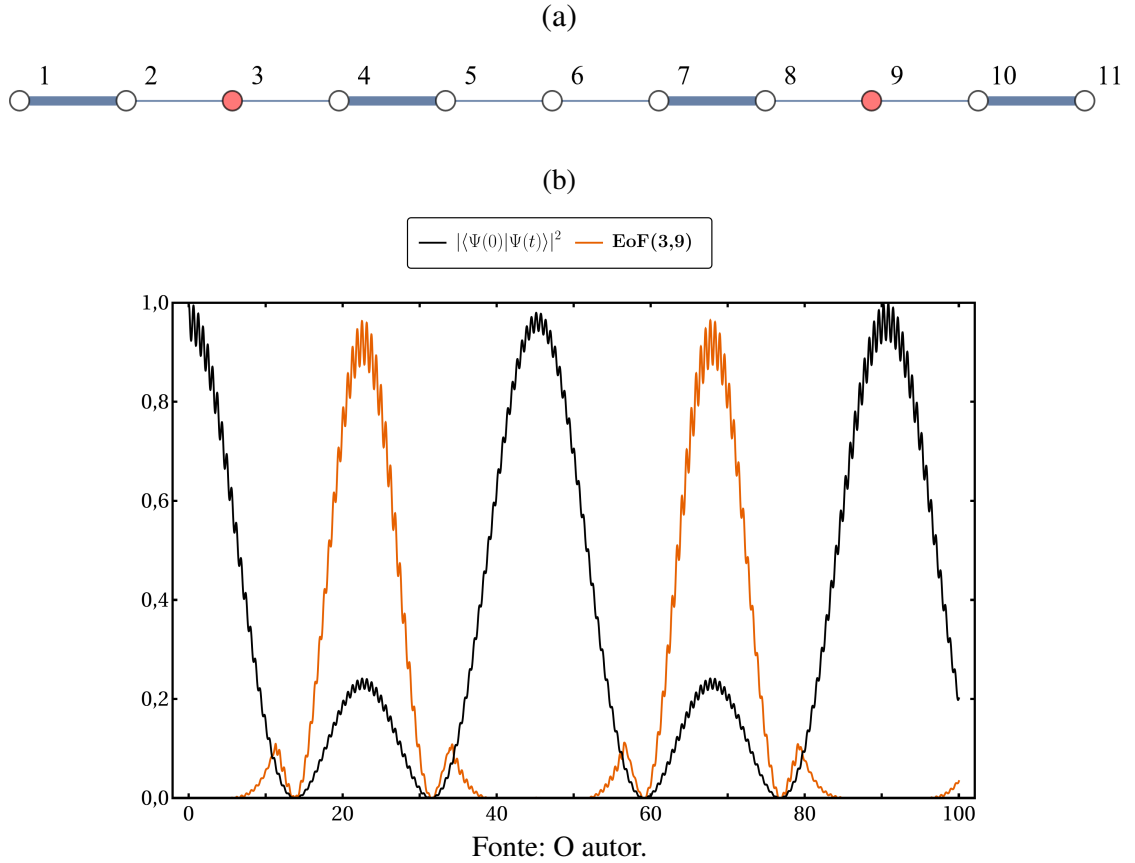


Fonte: Adaptado de (55).

Essa relação foi estudada e obtida em (45) onde os autores demonstraram que partindo de um grafo maior com RP, constrói-se um grafo caminho com conexões ponderadas que possui a mesma dinâmica. Além disso, segundo o trabalho (81), a relação entre acoplamentos $\Delta/\delta = 0, 1$ é a indicada para obter os maiores valores de emaranhamento de formação no menor tempo possível para essa configuração específica com 11 spins.

Partindo de um estado inicial com todos os spins no estado $|0\rangle$, injetam-se dois estados de sobreposição $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ na posição dos vértices A e C, e aplica-se o operador de evolução temporal $U(t) = \exp(-iHt)$ para o sistema evoluir naturalmente. Neste caso, o Hamiltoniano utilizado é uma matriz de dimensão 2048 com $J_{1,2} = J_{4,5} = J_{7,8} = J_{10,11} = 1$, e $J_{2,3} = J_{3,4} = J_{5,6} = J_{6,7} = J_{8,9} = J_{9,10} = 0,1$, construído assim como na Eq. (2.9). Na Fig. 30 nós reproduzimos a fidelidade do RP e o $EoF(3,9)$ nesse grafo, para o caso em que não houvesse a desconexão do spin central localizado no vértice 6.

Figura 30 – (a) Cadeia de 11 spins configurada como um grafo caminho, as arestas mais grossas representam o acoplamento $J = \Delta$ e as mais finas $J = \delta$, sendo $\Delta/\delta = 0,1$ e cada um dos vértices em vermelho claro representam um estado $|+\rangle$; (b) dinâmica do renascimento de estado quântico inicial na cor preta e $EoF(3,9)$ para essa mesma cadeia.



No tempo $t_A \cong 22, 49$, que é o tempo no qual o maior valor de $EoF(3,9)$ é obtido $EoF(3,9) \cong 0,9634$, desconecta-se (ou remove-se, de modo que não haja mais intensidade de acoplamento entre este e os vizinhos próximos) o spin localizado no vértice central, B, e permitindo a cadeia evoluir à partir disso. O novo sistema continua com os q-bits 3 e 9 emaranhados, com uma intensidade de EoF que oscila aproximadamente entre 0,9 e 1.

5 CONCLUSÕES

Cadeias de spins possuem grande potencial de aplicabilidade no contexto das TEQs. A evolução temporal de configurações específicas é capaz de gerar dinâmicas interessantes de transferência e renascimento de estado quântico.

A aplicação da teoria de grafos como uma ferramenta no contexto das TEQs e representação de cadeias de spins se mostrou eficiente, facilitando o entendimento de dinâmicas para sistemas subdivididos em dois níveis. A utilização das matrizes de adjacência facilitou consideravelmente o cálculo do operador de evolução temporal em sistemas de spin com apenas uma excitação.

Estudamos a TEQ e RP para as famílias de grafos caminho P_N , grafos caminho ponderados P'_N , grafos hipercubos e o grafo árvore T_9 . A família dos P'_N se mostrou a alternativa mais eficiente para TEQ de uma antípoda à outra, ocorrendo sempre para o valor de tempo de $t = \pi/2$.

Os resultados de RP e de EoF no grafo caminho P_5 e no grafo árvore T_9 foram os que mais chamaram atenção. O caso do P_5 pois na literatura que revisamos ainda não havíamos visto a abordagem dessa configuração específica em detalhes. O caso do T_9 por ser inesperado, já que em alguns trabalhos na literatura como em (82), argumenta-se que não há TPE para árvores de mais de três vértices, o que acreditávamos se manter para os casos de RP, já que as dinâmicas de TPE e RP são parecidas.

5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

O EoF é uma medida eficiente para mensurar emaranhamento de maneira bipartida entre spins das cadeias, porém, à medida que aumenta-se a dimensão do sistema, nota-se que de certo modo essa correlação se distribui e se apresenta ao mesmo tempo entre diversos pares. Portanto, releva-se a necessidade de estudar diferentes medidas de emaranhamento aplicadas nesse contexto, que sejam capazes de medir emaranhamento multipartido entre partes do sistema. Deste modo, uma motivação para a continuidade do nosso estudo é explorar o emaranhamento nesses sistemas de outras formas, visto também que, da maneira como o EoF precisa ser escrito, o cálculo torna-se computacionalmente trabalhoso para sistemas com mais de 11 spins. Isto porque a dimensão do Hamiltoniano completo do sistema é de 2^N , e mesmo utilizando métodos de diagonalização e matrizes esparsas, o tempo necessário para obter os resultados torna-se muito grande. Portanto, motiva também a busca por uma maneira mais eficiente para o cálculo de emaranhamento de formação nas cadeias de spin.

O protocolo de geração de emaranhamento estudado aparenta ser promissor para criação de pares emaranhados desacoplados. Pretendemos aplicá-lo para grafos de spin diferentes do que foi estudado por Estarellas et. al. em (55).

Outra linha a ser estudada é a robustez das cadeias spins em relação à erros, que podem ser introduzidos como variáveis no próprio Hamiltoniano, e efeitos de perturbações.

Embora apenas um exemplo de grafo árvore tenha sido abordado em termos de TEQ e EoF nesse trabalho, estamos analisando outros grafos dessa família e também a transferência de

estados inicialmente emaranhados nos sistemas.

REFERÊNCIAS

- 1 FRANCESCO LANCIOTTI; CHIQUITO, A. O transistor, 50 anos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SBF, v. 20, n. 4, 1998. Disponível em: <https://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v20_309.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 2 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. In: *Feynman and computation*. CRC Press, 1982. p. 133–153. Disponível em: <<https://s2.smu.edu/~mitch/class/5395/papers/feynman-quantum-1981.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 3 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. *Phys. Today*, v. 54, n. 2, p. 60, 2001. Disponível em: <<https://profmcrz.files.wordpress.com/2017/08/quantum-computation-and-quantum-information-nielsen-chuang.pdf>>.
- 4 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G.; EKERT, A. K. Quantum cryptography. *Scientific American*, JSTOR, v. 267, n. 4, p. 50–57, 1992. Disponível em: <<https://www.scientificamerican.com/article/quantum-cryptography/>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 5 KOK, P. et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 79, p. 135–174, Jan 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.135>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 6 DUTT, M. G. et al. Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 316, n. 5829, p. 1312–1316, 2007. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.1139831>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 7 LEVY, J. Universal quantum computation with spin-1/2 pairs and heisenberg exchange. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 14, p. 147902, 2002. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.1139831>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 8 GAMBETTA, J. M.; CHOW, J. M.; STEFFEN, M. Building logical qubits in a superconducting quantum computing system. *npj quantum information*, Nature Publishing Group UK London, v. 3, n. 1, p. 2, 2017. Disponível em: <<https://scispace.com/pdf/building-logical-qubits-in-a-superconducting-quantum-38up1h5r5t.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 9 SOUZA, B. S. d. *Produtos e coespectralidade de grafos*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Federal Do Rio Grange Do Sul, 2016. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141026/000992051.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 10 COUTINHO, G. *Quantum state transfer in graphs*. Tese (Doutorado em Combinatória e Otimização) — University of Waterloo, 2014. Disponível em: <<https://dspacemainprd01.lib.uwaterloo.ca/server/api/core/bitstreams/cd208a19-a827-448b-bbc3-b12116d3eada/content>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 11 ESTARELLAS, P. *Spin chain systems for quantum computing and quantum information applications*. Tese (Doutorado em Física) — University of York, 2018. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/158352008.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 12 LADD, T. D. et al. Quantum computers. *nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 464, n. 7285, p. 45–53, 2010. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature08812>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

- 13 PRESKILL, J. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 2, p. 79, ago. 2018. ISSN 2521-327X. Disponível em: <<https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 14 ARUTE, F. et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 574, n. 7779, p. 505–510, 2019. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41586-019-1666-5>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 15 BALL, P. Physicists in china challenge google’s ‘quantum advantage’. *Nature*, v. 588, p. 380–380, 12 2020. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/d41586-020-03434-7>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 16 CASTELVECCHI, D. Ibm releases first-ever 1,000-qubit quantum chip. *Nature*, Nature, v. 624, n. 7991, p. 238–238, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/d41586-023-03854-1>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 17 SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics 3rd edition*. [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
- 18 COHEN-TANNOUDJI CLAUDE; DIU, B. F. L. Quantum mechanics. *John Wiley & Sons*, v. 3, n. 1, p. 2187–2191, 2019.
- 19 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley, 2019. ISBN 9783527345533. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tVI_EAAQBAJ>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 20 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935. Disponível em: <<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.777>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 21 SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, v. 23, n. 50, p. 844–849, 1935. Disponível em: <http://www.fisicafundamental.net/relicario/doc/SituationinderQuantenmechanik_Schrodinger.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 22 BELL, J. S. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004.
- 23 GÜHNE, O.; TÓTH, G. Entanglement detection. *Physics Reports*, Elsevier, v. 474, n. 1-6, p. 1–75, 2009. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0370157309000623>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 24 HENSEN, B. et al. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 526, n. 7575, p. 682–686, 2015. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature15759>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 25 CHITAMBAR, E.; GOUR, G. Quantum resource theories. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 91, p. 025001, Apr 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.025001>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

- 26 VEDRAL, V. et al. Quantifying entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 12, p. 2275, 1997. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.78.2275>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 27 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.80.2245>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 28 SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948. Disponível em: <<https://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/others/shannon/entropy/entropy.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 29 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Inf. Comput.*, v. 1, n. 1, p. 27–44, 2001. Disponível em: <<https://www.rintonpress.com/journals/qic-1-1/eof2.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 30 MAZIERO, J. Entendendo a entropia de von neumann. *Revista brasileira de Ensino de Física*, 05 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/NrC4f9gwPNZWHzd7CcFrXTQ/?lang=pt>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 31 GREENBERGER, D. M.; HORNE, M. A.; ZEILINGER, A. *Going Beyond Bell's Theorem*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1989. 69–72 p. ISBN 978-94-017-0849-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0849-4_10>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 32 DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 62, p. 062314, Nov 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062314>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 33 QIN, Z. et al. Quantifying entanglement in cluster states built with error-prone interactions. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 3, p. 043118, Nov 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.043118>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 34 UCHIDA, G.; BERTLMANN, R. A.; HIESMAYR, B. C. Entangled entanglement: A construction procedure. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 379, n. 42, p. 2698–2703, 2015. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0375960115006775>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 35 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, APS, v. 81, n. 2, p. 865, 2009. Disponível em: <<https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.81.865>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 36 DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. In: _____. *Numerische Mathematik*. Dordrecht: Springer, 1959. p. 269–271. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01386390>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 37 RECUERO, R. da C. Redes sociais na internet: Considerações iniciais. In: *E-Compós*. [s.n.], 2005. v. 2. Disponível em: <<https://www.e-compos.org.br/e-compos/article/view/28>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 38 BARROSO, M. M. de A. Aplicação de grafos em um problema de rede. *Abakós*, v. 2, n. 2, p. 48–78, 2014. Disponível em: <<https://periodicos.pucminas.br/abakos/article/view/P.2316-9451.2014v2n2p48>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

- 39 GNUTZMANN, S.; SCHANZ, H.; SMILANSKY, U. Topological resonances in scattering on networks (graphs). *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 9, p. 094101, 2013. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.094101>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 40 SILVA, A. A.; ANDRADE, F. M.; BAZEIA, D. Average scattering entropy of quantum graphs. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 062208, Jun 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.062208>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 41 HEIN, M. et al. Entanglement in graph states and its applications. *arXiv preprint quant-ph/0602096*, 2006. Disponível em: <<https://inspirehep.net/literature/2727020>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 42 HEIN, M.; EISERT, J.; BRIEGEL, H. J. Multiparty entanglement in graph states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 69, p. 062311, Jun 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062311>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 43 MARKHAM, D.; SANDERS, B. C. Graph states for quantum secret sharing. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 78, p. 042309, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.042309>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 44 GODSIL, C. State transfer on graphs. *Discrete Mathematics*, Elsevier, v. 312, n. 1, p. 129–147, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.032>>.
- 45 RIEGELMEYER, J. et al. Generation and robustness of quantum entanglement in spin graphs. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 20, n. 1, p. 2, 2021. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s11128-020-02943-8>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 46 KAY, A.; ERICSSON, M. Geometric effects and computation in spin networks. *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, p. 143, jun 2005. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/143>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 47 BOSE, S. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 48, n. 1, p. 13–30, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00107510701342313>>.
- 48 SOLOGUBENKO, A. V. et al. Thermal conductivity and specific heat of the linear chain cuprate Sr_2CuO_3 : evidence for thermal transport via spinons. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 62, p. R6108–R6111, Sep 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.R6108>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 49 CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical review letters*, APS, v. 92, n. 18, p. 187902, 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.92.187902>>.
- 50 JOEL, K.; KOLLMAR, D.; SANTOS, L. F. An introduction to the spectrum, symmetries, and dynamics of spin-1/2 heisenberg chains. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 81, n. 6, p. 450–457, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.4798343>>.
- 51 KAY, A. Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 8, n. 04, p. 641–676, 2010. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0219749910006514?srsId=>

AfmBOopnWMJ6D2T4LadbIgTukkAm_rGrqV8f56Y1nyHMAgw46k5E5Dnj>. Acesso em: 30 abr. 2025.

52 BOSE, S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 20, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.207901>>.

53 NIKOLOPOULOS, G. M.; PETROSYAN, D.; LAMBROPOULOS, P. Electron wavepacket propagation in a chain of coupled quantum dots. *Journal of Physics: Condensed Matter*, v. 16, n. 28, p. 4991, jul 2004. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/16/28/019>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

54 KARBACH, P.; STOLZE, J. Spin chains as perfect quantum state mirrors. *Physical Review A*, APS, v. 72, n. 3, p. 030301, 2005. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.72.030301>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

55 ESTARELLAS, M. P.; D'AMICO, I.; SPILLER, T. P. Robust quantum entanglement generation and generation-plus-storage protocols with spin chains. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 95, p. 042335, Apr 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.042335>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

56 SPILLER, T. P.; D'AMICO, I.; LOVETT, B. W. Entanglement distribution for a practical quantum-dot-based quantum processor architecture. *New Journal of Physics*, v. 9, n. 1, p. 20, jan 2007. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/9/1/020>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

57 GEORGESCU, I. M.; ASHHAB, S.; NORI, F. Quantum simulation. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 86, p. 153–185, Mar 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.153>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

58 SPALDIN, N. A.; FIEBIG, M. The renaissance of magnetoelectric multiferroics. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 309, n. 5733, p. 391–392, 2005. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/10.1126/science.1113357>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

59 BURKARD, G.; LOSS, D.; DIVINCENZO, D. P. Coupled quantum dots as quantum gates. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 59, p. 2070–2078, Jan 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.59.2070>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

60 LOSS, D.; DIVINCENZO, D. P. Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 57, p. 120–126, Jan 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.120>>.

61 SENKO, C. et al. Realization of a quantum integer-spin chain with controllable interactions. *Phys. Rev. X*, American Physical Society, v. 5, p. 021026, Jun 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.5.021026>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

62 KJAERGAARD, M. et al. Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, Annual Reviews, v. 11, n. Volume 11, 2020, p. 369–395, 2020. ISSN 1947-5462. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

- 63 ROY, F. A. et al. Parity-dependent state transfer for direct entanglement generation. *arXiv preprint arXiv:2405.19408*, 2024. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41467-025-57818-2>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 64 LOFT, N. J. S. et al. Tunable self-assembled spin chains of strongly interacting cold atoms for demonstration of reliable quantum state transfer. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 18, n. 4, p. 045011, apr 2016. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/18/4/045011>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 65 KEMPE, J. Quantum random walks: An introductory overview. *Contemporary Physics*, Taylor & Francis, v. 44, n. 4, p. 307–327, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>>.
- 66 AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 48, p. 1687–1690, Aug 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.1687>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 67 LAWLER, G. F.; LIMIC, V. Introduction. In: _____. *Random Walk: A Modern Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), p. 1–20.
- 68 MACIEL, C. M. *Caminhadas Quânticas de Tempo Contínuo: um tratamento na Rede Dendrímico Modificado*. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal do Amazonas, 2018. Disponível em: <<https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6272>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 69 FRANCO, C. D.; PATERNOSTRO, M.; KIM, M. S. Perfect state transfer on a spin chain without state initialization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 230502, Dec 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.230502>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 70 GODSIL, C. et al. Number-theoretic nature of communication in quantum spin systems. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 050502, Aug 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.050502>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 71 BANCHI, L. et al. Pretty good state transfer in qubit chains—The Heisenberg Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, v. 58, n. 3, p. 032202, 03 2017. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4978327>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 72 SOUSA, R.; OMAR, Y. Pretty good state transfer of entangled states through quantum spin chains. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 12, p. 123003, dec 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/16/12/123003>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 73 VINET, L.; ZHEDANOV, A. How to construct spin chains with perfect state transfer. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 85, p. 012323, Jan 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.012323>>. Acesso em: 30 abr. 2025.
- 74 CHRISTANDL, M. et al. Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks. *Physical Review A*, APS, v. 71, n. 3, p. 032312, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.032312>>.
- 75 LORENZO, S. et al. Quantum-state transfer via resonant tunneling through local-field-induced barriers. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 87, p. 042313, Apr 2013.

Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042313>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

76 BURGARTH, D.; BOSE, S. Conclusive and arbitrarily perfect quantum-state transfer using parallel spin-chain channels. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 71, p. 052315, May 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.052315>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

77 WANG, Z.-M. et al. Identifying quantum states capable of high-fidelity transmission over a spin chain. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 88, p. 032303, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.032303>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

78 BROUGHAM, T.; NIKOLOPOULOS, G. M.; JEX, I. Perfect transfer of multiple excitations in quantum networks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 022323, Feb 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.022323>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

79 APOLLARO, T. J. G. et al. Many-qubit quantum state transfer via spin chains. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2015, n. T165, p. 014036, oct 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/2015/T165/014036>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

80 GUALDI, G.; GIAMPAOLO, S. M.; ILLUMINATI, F. Modular entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 106, p. 050501, Feb 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.050501>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

81 WILKINSON, K. et al. Rapid and robust generation of einstein-podolsky-rosen pairs with spin chains. *Quantum Information and Computation*, Rinton Press Inc., v. 18, n. 3-4, p. 247–264, mar. 2018. ISSN 1533-7146. Disponível em: <<https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/3370192.3370197>>. Acesso em: 30 abr. 2025.

82 COUTINHO, G.; JULIANO, E.; Jung Spier, T. No perfect state transfer in trees with more than 3 vertices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 168, p. 68–85, 2024. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895624000297>>. Acesso em: 30 abr. 2025.