

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/FÍSICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO-FÍSICA

MOISES SOUZA SANTOS

RECORRÊNCIA ESPACIAL APLICADA AO ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA

PONTA GROSSA

2018

MOISES SOUZA SANTOS

RECORRÊNCIA ESPACIAL APLICADA AO ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

PONTA GROSSA

2018

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Santos, Moises Souza
S237r Recorrência espacial aplicada ao estudo
de estados quimera/ Moises Souza Santos.
Ponta Grossa, 2018.
78f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de
Concentração: Física), Universidade
Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. José Danilo
Szezech Jr..

1.Estados quimera. 2.Gráficos de
recorrência. 3.Redes de conectividade
cortical do gato. 4.Neurônios. 5.Ruído e
robustez. I.Szezech Jr., José Danilo. II.
Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Doutorado em Ciências. III. T.

CDD: 531

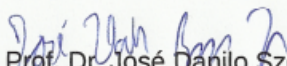
TERMO DE APROVAÇÃO

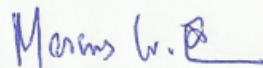
MOISES SOUZA SANTOS

“RECORRÊNCIA ESPACIAL APLICADA AO ESTUDO DE ESTADOS QUIMERA”

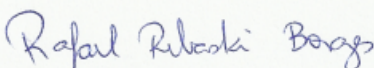
Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

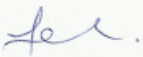
Orientador:


Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior
Departamento de Matemática - UEPG/PR


Prof. Dr. Marcus Werner Beims
Departamento de Física – UFPR


Prof. Dr. Marcos de Oliveira Ribas
Departamento de Física – UTFPR- Curitiba


Prof. Dr. Rafael Ribaski Borges
Departamento de Matemática – UTFPR - Apucarana


Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Matemática – UEPG-PR

Ponta Grossa, 01 de março de 2018

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Patrícia e minha filha Amanda pelo apoio e incentivo emocional no período de desenvolvimento das minhas atividades acadêmicas.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr. (Departamento de Matemática e Estatística - Universidade Estadual de Ponta Grossa ([UEPG](#))) pela paciência e dedicação no decorrer deste trabalho.

As agências de fomento Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico ([CNPq](#)), Fundação Araucária e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior ([CAPES](#)) pela bolsa de estudos e todo o suporte financeiro utilizado durante o curso.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física e a [UEPG](#) pelo espaço e oportunidade.

Aos professores Dr. Antônio Marcos Batista (Departamento de Matemática e Estatística - [UEPG](#)), Dr. Ricardo Luiz Viana (Departamento de Física - Universidade Federal do Paraná ([UFPR](#))), Dr. Iberê Luiz Caldas (Departamento de Física Aplicada - Universidade de São Paulo ([USP](#))), Dr. Jürgen Kurths (Departamento de Física - Universidade de Humboldt, Berlin - Alemanha e Potsdam Instituto de Pesquisa sobre Impacto Climático, Potsdam - Alemanha) e demais integrantes do grupo de dinâmica não-linear e sistemas complexos ([UEPG](#) - [UFPR](#) - [USP](#)) pelas discussões e sugestões.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa, Universidade de São Paulo e a Universidade Federal do Paraná pelo suporte computacional.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho, em especial aos amigos da sala 105 (Bloco L - [UEPG](#)).

Resumo

A importância do estudo de estados quimera em redes neuronais reflete no fato destes possuírem uma forte ligação com alguns tipos de anomalias diagnosticadas no cérebro, por exemplo, epilepsia, mal de Parkinson e Alzheimer. Neste trabalho, realizamos um estudo da aplicação dos gráficos de recorrência, em sua versão espacial, na caracterização da coexistência de estados coerentes e incoerentes em sistemas dinâmicos acoplados. Utilizamos um modelo constituído de osciladores de fase para uma primeira abordagem da matriz de recorrência. Nossos resultados indicam que os diagnósticos quantitativos, baseados no gráfico de recorrência, detectam não só a existência de estados quimera como também estados sincronizados e dessincronizados que por ventura emergem na rede. Sobre esse aspecto, mostramos que a análise via recorrência espacial é superior à utilização do parâmetro de ordem global pós-colapso de estados quimera. Este cenário ocorre em algumas situações onde a rede exibe quimera e esta subitamente desaparece do sistema, que passa a exibir um comportamento sincronizado na frequência de seus osciladores. Neste caso, o parâmetro de ordem global não identifica esta mudança de comportamento sendo necessário uma interpretação via outro diagnóstico. Também utilizamos a rede de conectividade cortical de gato, como forma de acoplamento, e distinguimos duas formas de estados híbridos: uma quimera com a região incoerente em dinâmica temporal de *spikes* e outra quimera onde a região incoerente apresenta dinâmica temporal de *bursts*. Identificamos que este último caso de estados quimera possui maior robustez com relação à perturbação externa aplicada no sistema. Concluimos que a região de quimera com *bursts* necessita de uma intensidade de perturbação duas vezes superior que a região de *spikes* para deixar de existir na rede de neurônios.

Palavras-chave: Estados quimera, gráficos de recorrência, rede de conectividade cortical do gato, neurônios, ruído e robustez.

Abstract

The importance of the study of chimera states in neuronal networks reflects in the fact that they have a strong relationship with some types of anomalies diagnosed in the brain, for example, epilepsy, Parkinson's disease and Alzheimer's. In this work, we perform a study of the application of recurrence graphs, in their spatial version, in the characterization of the coexistence of coherent and incoherent states in coupled dynamical systems. We used a model constituted of phase oscillators for a first approach of the recurrence matrix. Our results indicate that the quantitative diagnoses, based on the recurrence graph, detect not only the existence of chimera states but also synchronized and desynchronized states that may emerge in the network. On this aspect, we show that the spatial recurrence analysis is superior to the use of the global order parameter post-collapse of chimera states. This scenario occurs in some situations where the network displays chimera and this suddenly disappears from the system that starts to exhibit a synchronized behavior in the frequency of its oscillators. In this case, the global order parameter does not identify this behavior change and an interpretation through another diagnosis is necessary. We also used the cat cortical connectivity network as a form of coupling, and we distinguished two forms of hybrid states: a chimera with the incoherent region in temporal dynamics of spikes and another chimera where the incoherent region presents temporal dynamics of bursts. We have identified that this last case of chimera states has greater robustness with respect to the external perturbation applied in the system. We conclude that the region of chimera with bursts needs a disturbance intensity twice as great as the region of spikes to cease to exist in the network of neurons.

Keywords: Chimera states, recurrence plot, cat cortical connectivity network, neuron, noise and robustness.

Lista de Abreviaturas e Siglas

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

SML *liquid-crystal spatial light modulator*

UEPG Universidade Estadual de Ponta Grossa

UFPR Universidade Federal do Paraná

USP Universidade de São Paulo

BC *Burst Chimera*

SC *Spike Chimera*

IN incoerente ou dessincronizado

SI coerente ou sincronizado

LED *light emitter diode*

Lista de Símbolos

- ω_i frequência natural do i -ésimo oscilador
- N tamanho da rede ou quantidade de elementos
- ϕ_i fase do i -ésimo oscilador
- T tempo médio de colapso dos estados quimera
- σ variância no tempo de disparos
- α_S parâmetro de fase de Sakaguchi
- α intensidade de acoplamento interno
- β intensidade de acoplamento externo
- p alcance do acoplamento
- δ intensidade da perturbação externa
- Θ fase dos disparos neuronais
- ε_0 intensidade de acoplamento
- ε raio de retorno
- M quantidade de pontos
- $RP_{i,j}$ matriz ou gráfico de recorrência
- RR taxa de recorrência
- DET determinismo
- LAM laminaridade
- s adaptação
- b frequência de disparos
- μ controle de variação da corrente lenta
- x_i potencial de membrana do i -ésimo neurônio

y_i corrente rápida do i -ésimo neurônio

z_i corrente lenta do i -ésimo neurônio

x potencial de membrana

x_{rev} potencial reverso

x_{rest} potencial de repouso

z corrente lenta

y corrente rápida

I_0^* corrente externa

Θ fase de disparos neuronais

I_i^* corrente externa com perturbação

$\Upsilon(x_j)$ sinapses químicas

n_i' número de conexões internas do i -ésimo neurônio

n_i'' número de conexões externas do i -ésimo neurônio

$G'_{i,j}$ matriz de conexão dentro da mesma região cortical

$G''_{i,j}$ matriz de conexão entre diferentes regiões corticais

χ distribuição normal com média zero e variância unitária

Γ tempo médio das quimeras

Lista de Figuras

- 2.1 Evolução temporal e perfil espacial das fases fase do i -ésimo oscilador (ϕ_i). Em (a) temos evolução temporal e em (b) perfil espacial das fases para um tempo t qualquer. Parâmetros utilizados no sistema acoplado: tamanho da rede ou quantidade de elementos (N)=400, parâmetro de fase de Sakaguchi (α_S)=1,47, $k = 4,0$, frequência natural do i -ésimo oscilador (ω_i)=0 e tempo transiente de 4×10^3 . A variável i indica a posição do oscilador na rede. p. 20
- 2.2 Função degrau $G(i - j)$ representando a função de acoplamento para o elemento $i=N/2$ da rede de osciladores. A variável inteira alcance do acoplamento (p) representa a quantidade de vizinhos de ambos os lados do elemento $N/2$ p. 22
- 2.3 Evolução temporal e perfil espacial das fases (ϕ_i). Em (a) mostramos a evolução temporal das fases para os N -osciladores. Em (b) o perfil espacial das fases (ϕ_i) para um tempo t qualquer. Parâmetros: $N=400$, $\alpha_S=1,47$, $\omega_i=0$, $p=0,35N$ e transiente de 4×10^3 . A variável i indica a posição do oscilador na rede. p. 23
- 2.4 Perfil espacial e parâmetro de ordem local. Em (a) temos a o perfil espacial (eixo vertical) para um tempo t qualquer após um transiente de 4×10^3 onde o eixo horizontal (variável k), em ambos os casos, representa a posição dos osciladores na rede. Em (b) encontra-se o parâmetro de ordem local (eixo vertical) onde utilizamos $\delta_0 = 0,025N$. Parâmetros: $N=512$ osciladores idênticos ($\omega_k = 0$), $\alpha_S=1,47$ e $p=0,35N$ p. 25
- 2.5 Colapso dos estados quimera e parâmetro de ordem global. Na figura (a) temos a evolução das fases (ϕ_k) dos osciladores e em (b) o módulo do parâmetro de ordem global onde desprezamos um tempo transiente de 2×10^3 . A escala de cores indica a intensidade da fase (ϕ_k) e a variável k a posição do oscilador na rede. Parâmetros utilizados: $N=40$, $p=0,35N$, $\alpha_S=1,47$ p. 26

2.6	Configuração experimental e estados quimera em osciladores óticos. Na figura (a) a polarização cria uma relação não linear entre a mudança de fase e a intensidade da luz que atinge a câmera. A análise das informações e o acoplamento são implementados usando um computador. Na figura (b) temos os estados quimera onde a região incoerente é evidenciada pela região hachurada na cor azul. A variável i indica a posição (pixels) dos osciladores no <i>liquid-crystal spatial light modulador</i> (SML) e I_i a intensidade da luz captada pela câmera infravermelha para o i -ésimo oscilador.	p. 28
2.7	Estados quimera para osciladores óticos acoplados. A figura (a) representa a evolução temporal da intensidade (I_i) de toda rede onde desprezamos um tempo transiente de 4×10^3 . Na figura (b) mostramos o perfil espacial dos osciladores para um tempo t qualquer onde destacamos a região incoerente. A variável n representa o tempo discreto, e i a posição dos osciladores óticos na rede. Parâmetros utilizados: $N=256$, intensidade de acoplamento (ϵ_0)=0,44, $a = 0,85$ e $p=0,35N$	p. 29
3.1	Raio de retorno (raio de retorno (ϵ)) para um ponto qualquer pertencente a uma trajetória no espaço bidimensional.	p. 32
3.2	Matriz de recorrência da variável η_i para o mapa de Ikeda com $a = 0,61$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a sua respectiva matriz de recorrência para $\epsilon=0,05$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada. Os pontos escuros representam matriz ou gráfico de recorrência ($RP_{i,j}$)=1(estado recorrente) e os claros $RP_{i,j}=0$ (estados não recorrentes) para a série temporal de η_i	p. 34
3.3	Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\epsilon=0,05$ e quantidade de pontos (M)=840. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$).	p. 35
3.4	Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\epsilon=0,05$ e $M=840$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$). Nesta figura destacamos comportamentos similares em diferentes intervalos de tempos.	p. 38

3.5	Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\varepsilon=0,05$ e $M=840$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$). Nesta figura destacamos a mais evidente região laminar que indica pouca (ou nenhuma) mudança de comportamento durante o intervalo de comprimento v	p. 39
4.1	Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto acoplados. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e (b) representa o seu perfil espacial da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ_i a sua fase. Parâmetros: $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,37$	p. 42
4.2	Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto acoplados. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e (b) representa o seu perfil espacial que evidência a falta de um comportamento coletivo da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ_i suas respectivas fases. Demais parâmetros: $\alpha_S=1,57$ e $p=0,35N$	p. 43
4.3	Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e em (b) o correspondente perfil espacial da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores e ϕ_i as respectivas fases. Demais parâmetros utilizados: $\alpha_S=1,47$, $p=0,35N$ e condições iniciais através da equação 2.4.	p. 44
4.4	Gráficos de recorrência espacial e perfis das fases (ϕ_i) para osciladores de Kuramoto. Parâmetros utilizados: quantidade de sítios $N=300$, alcance do acoplamento ($p=0,35N$) e raio de retorno $\varepsilon=0,1$. Em (a) e (d) para $\alpha_S=1,57$. Em (b) e (e) para $\alpha_S=1,37$. Em (c) e (f) para $\alpha_S=1,47$. Os números inteiros i e j representam a posição dos osciladores na rede ($i, j = 1, 2, \dots, N$).	p. 45
4.5	Diagnósticos obtidos da matriz de recorrência ($RP_{i,j}$) e parâmetro de ordem global. Na figura (a) temos a evolução temporal das fases (ϕ_i), t representa a variável temporal e i a posição do oscilador na rede. Na figura (b) a variável Z representa o parâmetro de ordem global (equação 2.9), taxa de recorrência (RR) (taxa de recorrência), laminaridade (LAM) (laminaridade) e determinismo (DET) (determinismo). $N=40$, $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,47$	p. 47

4.6	Diagnósticos para $N=100$, $p=0,25N$ e $\alpha_S=1,47$. A variável t representa a variável temporal e i a posição espacial dos osciladores de fase. Na figura (a) temos evolução das fases (ϕ_i) dos osciladores. Na figura (b) a variável Z representa o parâmetro de ordem global, RR (taxa de recorrência), LAM (laminaridade) e DET (determinismo).	p. 48
4.7	Perfis espaciais após colapso dos estados quimera para $\alpha_S=1,47$. A variável ϕ_i representa a fases e i a posição espacial dos osciladores na rede. Em (a) temos $N=40$ e $p=0,35N$. Em (b) utilizamos $N=100$ e $p=0,25N$	p. 49
4.8	Tempo médio de colapso dos estados quimera (tempo médio de colapso dos estados quimera (T)) em função do tamanho rede (N) para 2×10^3 (duas mil) condições iniciais distintas (equação 2.4), $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,47$. Os pontos indicam os resultados numéricos e a linha representa o ajuste exponencial. O eixo vertical encontra-se em escala logarítmica.	p. 50
5.1	Dinâmica de disparos no modelo neuronal de Hindmarsh-Rose. Em (a) e (c) corrente externa (I_0^*)=4,2 e frequência de disparos (b)=3,0 representando o regime de <i>spikes</i> . Em (b) e (d) temos um exemplo do regime de <i>bursts</i> para $I_0^*=3,4$ e $b=2,4$. As condições iniciais são aleatórias.	p. 53
5.2	Dinâmica de disparos no modelo neuronal de Hindmarsh-Rose. Em (a) $I_0^*=4,2$ e $b=3,0$ representando o regime de <i>spikes</i> . Em (b) temos um exemplo do regime de <i>bursts</i> para $I_0^*=3,4$ e $b=2,4$. Em (c) e (d) temos a respectiva fase (fase de disparos neuronais (Θ)) conforme a equação 5.2. Condições iniciais aleatórias.	p. 55
5.3	Matriz de conectividade cerebral do gato representada pela escala de cores: azul-escuro representa a ausência de conexão (0), vermelho indica fracas conexões (1/3), ciano está relacionada a intensidades intermediárias (2/3) e amarelo representa forte (1) conectividade entre as áreas corticais. Os valores entre 0 (zero) e 1 (um) indicam a intensidade de fibras conectando as diferentes áreas. Esta matriz não é simétrica (conectividade direcionada). . . .	p. 56
6.1	Evolução espaço-temporal da rede para intensidade de acoplamento interno (α)= 10^{-3} e intensidade de acoplamento externo (β)= 10^{-3} . Em (a) temos a evolução espaço-temporal e em (b) o perfil espacial incoerente dos neurônios. A variável potencial de membrana do i -ésimo neurônio (x_i) representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição dos elementos da rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica.	p. 60

- 6.2 Evolução espaço-temporal da rede do gato para $\alpha=0,21$ e $\beta=0,04$. Em (a) mostramos o comportamento espaço-temporal e em (b) o perfil espacial sincronizado da rede neuronal. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio na rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica. p. 61
- 6.3 Estados quimera com a parte coerente e incoerente em dinâmica temporal de *spikes*. Em (a) temos a evolução espaço-temporal da rede e em (b) mostramos o seu respectivo perfil espacial. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio na rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica. Parâmetros de acoplamento: $\alpha=0,70$ e $\beta=0,08$ p. 62
- 6.4 Estados quimera onde a parte incoerente possui dinâmica temporal de *bursts*. Em (a) mostramos o comportamento espaço-temporal e em (b) o perfil espacial da rede. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica. Parâmetros de acoplamento: $\alpha=1,50$ e $\beta=0,10$ p. 63
- 6.5 Dinâmica temporal para alguns neurônios da rede do gato para os parâmetros de acoplamento $\alpha=1,51$ e $\beta=0,10$. Em (a) e (c) regime temporal de *spikes* sincronizados. Em (b) e (d) regime temporal de *bursts* dessincronizados. A figura (a) possui variância no tempo de disparos (σ)=1,10. Na figura (c) $\sigma=0,36$. Na figura (b) $\sigma=15,31$ e na (d) $\sigma=17,20$ p. 65
- 6.6 Espaço dos parâmetros de acoplamento $\alpha \times \beta$. Em (a) utilizamos $I_0^*=4,20$, em (b) $I_0^*=4,40$ e em (c) $I_0^*=4,60$. Os comportamentos são indicados por: incoerente ou dessincronizado (incoerente ou dessincronizado (IN)), estados quimera com a parte incoerente em dinâmica de *spikes* (*Spike Chimera* (SC)), coerente ou sincronizado (coerente ou sincronizado (SI)), estados quimera com a parte incoerente em dinâmica de *bursts* (*Burst Chimera* (BC)). Note que a corrente I_0^* aumenta de (a) para (c). p. 67

6.7	Espaço dos parâmetros de acoplamento ($\alpha \times \beta$) para diferentes intensidades de ruído externo. Em (a) intensidade da perturbação externa (δ)=0,04, em (b) δ =0,16 e em (c) δ =0,25. Onde IN indica que o perfil espacial é incoerente, SC estados quimera com <i>spikes</i> , SI sincronização completa, BC estados quimera com <i>bursts</i>	p. 69
6.8	Robustez dos estados quimera obtidos na matriz de conectividade cerebral do gato pela intensidade do ruído externo. Em (a) temos os estados obtidos pela variação de δ , em (b) o tempo médio T de BC obtido para α =1,50 e β =0,10, SC para α =0,70 e β =0,08.	p. 70

Sumário

1	Introdução	p. 16
2	Estados Quimera	p. 19
2.1	Evidências Teóricas	p. 19
2.1.1	Parâmetro de Ordem Local	p. 24
2.1.2	Parâmetro de Ordem Global	p. 26
2.2	Evidências Experimentais	p. 27
3	Recorrência	p. 31
3.1	Matriz de Recorrência	p. 31
3.2	Ferramentas de Recorrência	p. 36
3.2.1	Taxa de Recorrência	p. 36
3.2.2	Determinismo	p. 37
3.2.3	Laminaridade	p. 38
4	Osciladores de Kuramoto	p. 41
4.1	Estados Quimera via Matriz de Recorrência	p. 41
4.2	Diagnósticos e Colapso dos Estados Quimera	p. 46
5	Modelo Neuronal	p. 52
5.1	Dinâmica de Disparos Neurais	p. 52
5.2	Matriz de Conectividade Neuronal	p. 55
6	Matriz do Gato	p. 58
6.1	Estados na Matriz Conectividade Cerebral do Gato	p. 58
6.2	Robustez dos Estados Quimera: Perturbação Externa	p. 68
7	Conclusão	p. 72
7.1	Trabalhos Futuros	p. 74
	Referências Bibliográficas	p. 75

1 *Introdução*

Na natureza existem algumas espécies de animais que possuem a formidável capacidade de permanecer em estado de vigília constante, mesmo durante seu período de repouso ou adormecimento (1). Esse comportamento está relacionado à sincronização parcial de seu sistema nervoso central onde um hemisfério cerebral possui comportamento dessincronizado (parte ativa responsável pela vigília contra adversidades do meio a que o animal se encontra exposto), ao passo que, o outro hemisfério (parte dormente/repouso) apresenta um estado de sincronização neuronal. Assim, podemos ter uma concomitância de estados ou comportamentos distintos em sistemas biológicos.

No campo teórico, a coexistência de estados coerentes e incoerentes em sistemas acoplados foi descoberta por Kuramoto e Battogtokh (2). Esses autores identificaram que um conjunto de osciladores idênticos acoplados separam-se em dois domínios espaciais com características distintas, onde um apresenta comportamento completamente sincronizado, ao passo que, o outro domínio apresenta-se completamente dessincronizado. Posteriormente, tal coexistência de domínios espaciais foi rotulada de estados quimera^a por Abrams e Strogatz (3). Essa denominação se deve a sua característica espacial híbrida semelhante ao animal da mitologia grega constituído de partes distintas: cabeça de leão, corpo de cabra e cauda de serpente.

Logo, em sistemas acoplados, dependendo da configuração e intensidade de interação entre as partes — nós ou vértices que formam a rede — pode ocorrer um regime espacial híbrido denominado de estados quimera: a coexistência de duas regiões espaciais com características distintas. Uma região é coerente onde há uma forte relação entre os elementos que a constitui, ou seja, todos possuem o mesmo padrão de comportamento ao longo do tempo. Por sua vez, na região espacialmente incoerente os elementos não possuem um padrão coletivo de evolução temporal. Conforme mencionado no primeiro parágrafo, essa coexistência de estados (coerente e incoerente) é muito similar ao comportamento cerebral de alguns animais. Um dos motivos é a constante iminência de ataque por predadores ou adversidades do meio a que se encontram

^aTermo emprestado da mitologia grega e refere-se a qualquer combinação híbrida de dois ou mais animais distintos

sujeitos tais animais (1).

No campo experimental, Hagerstrom e coautores utilizaram um aparato constituído por osciladores óticos acoplados baseados na polarização da luz (4). Esses autores obtiveram a coexistência de estados através de um SML^b que é iluminado por um feixe de luz colimada originado por um diodo superluminescente. A luz passa através de um polarizador divisor de feixe e uma lâmina quarto de onda. O feixe é refletido pelo SML e captado por uma lente infravermelha. Nesta estrutura, um computador controla a dependência espacial para a frente de onda incidente no SML e o seu *feedback*^c captado pela câmara infravermelha. Outro trabalho experimental, exibindo a coexistência de estados coerentes e incoerentes, deve-se a Tinsley e colaboradores que obtiveram estados quimera para osciladores químicos fotossensíveis regidos pela equação de Belousov-Zhabotinsky (5). Aqui, a rede consiste de 2 (duas) populações de osciladores químicos acoplados (*A* e *B*) onde cada grupo possui 20 (vinte) osciladores. Nesta configuração, os elementos estão fortemente conectados, quando pertencentes ao mesmo grupo (*A* ou *B*) e fracamente conectados caso contrário, ou seja, entre elementos de *A* para *B* e vice-versa. A luz emitida por essas reações químicas é responsável pela interação entre os sistemas. Além desses, podemos citar ainda os trabalhos experimentais com sistemas mecânicos onde foram observados estados quimera (6, 7, 8).

As evidências (teóricas e experimentais) elencadas até o momento, sobre a coexistência de estados coerentes e incoerentes ou simplesmente estados quimera, indicam a importância de seu estudo e as formas de diagnosticá-la nas mais distintas áreas científicas. Por exemplo, existem alguns pássaros e golfinhos que devido a um ataque iminente de predadores permanecem em estado de vigília permanente. Esta vigília está ligada a uma sincronização parcial de áreas cerebrais nestes animais (9). Assim, o sistema de defesa de algumas presas pode ser uma evidência biológica da coexistência de estados coerentes e incoerentes no córtex cerebral. Por outro lado, em seres humanos a sincronização de algumas regiões do cérebro indica, muitas vezes, anomalias no sistema nervoso central (10). Portanto, nem sempre podemos dizer que estados quimera são benéficos para os seres vivos ou outros sistemas cujo os quais possuímos alguma forma de interesse.

Logo, existem inúmeras motivações para o estudo, compreensão e destruição de estados quimera em redes ou sistemas acoplados. Na literatura, existem poucas ferramentas para o estudo de tais padrões espaciais híbridos. Nos trabalhos citados acima, a forma de diagnosticar a existência de estados quimera é inspirada nos trabalhos pioneiros de Kuramoto e Strogatz via aplicação do parâmetro de ordem global (11) e/ou sua forma local (12).

^bmodulador de luz espacial de cristal líquido (modelo P512-1550)

^creação ao estímulo

Portanto, neste trabalho introduzimos a recorrência espacial como uma nova alternativa para o estudo da coexistência de padrões híbridos em sistemas dinâmicos. Um aspecto que merece ser destacado sobre os gráficos (ou matriz) de recorrência é a sua utilização na análise de dados experimentais, uma vez que, muitas vezes não se dispõe das equações que regem o sistema. Desta forma, analisamos somente a série de dados que temos à nossa disposição. Além disso, temos evidências de que a matriz de recorrência torna-se bastante útil quando estamos interessados no colapso dos estados quimera (13). Dependendo do comportamento coletivo final da rede a utilização da recorrência espacial mostra-se superior à análise via parâmetro de ordem global conforme veremos no capítulo 4.

No capítulo 2 faremos um breve histórico sobre estados quimera no campo teórico e suas observações experimentais em trabalhos recentes. Posteriormente, apresentaremos o parâmetro de ordem global e local como ferramentas de inspeção teórica para a coexistência de estados espaciais coerentes e incoerentes em sistemas acoplados. No capítulo 3 introduzimos a matriz de recorrência, alguns de seus padrões visuais, suas ferramentas qualitativas mais relevantes e no capítulo 4 discutiremos nossos resultados obtidos. No capítulo 5 introduziremos o modelo de disparos neuronais que será utilizado com extensão do uso do diagnóstico (recorrência espacial) para redes de neurônios acoplados. No capítulo 6 discutiremos os resultados obtidos para a matriz de acoplamento do gato e finalmente no capítulo 7 as nossas conclusões onde apresentaremos perspectivas para futuros trabalhos.

Os resultados desta tese estão publicados em revistas com parâmetro de impacto: *Recurrence quantification analysis of chimera states*. *Physics Letters A*, 2015 e *Chimera-like in a neuronal network model of the cat brain*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017. Além disso, tivemos a apresentação de trabalhos em eventos: *XVIII Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics*, Alagoas, 2014, XVIII Semana da Física e I Simpósio de Pesquisa em Física e Ensino de Física dos Campos Gerais, Paraná, 2015 e no *7th International Symposium on Recurrence Plots*, São Paulo, 2017.

2 *Estados Quimera*

Conforme mencionado anteriormente, em algumas redes de osciladores acoplados pode coexistir dois domínios espaciais com características distintas: uma região coerente (sincronizada) e outra região incoerente (dessincronizada). Tal comportamento é denominado na literatura de estados quimera (3). Neste capítulo, discutiremos sobre as evidências de tais comportamentos em sistemas dinâmicos. Esses padrões espaciais foram, inicialmente, relatados em trabalhos teóricos (2, 3) e, posteriormente, surgiram comprovações experimentais sobre esse comportamento peculiar (4, 5, 6, 7, 8).

2.1 Evidências Teóricas

Redes ou sistemas acoplados podem exibir ricos comportamentos dinâmicos: sincronização caótica (14), supressão de sincronização (15), multiestabilidade (16). No entanto, nosso interesse volta-se para o comportamento descoberto, no ano de 2002, por Kuramoto e Battogtokh (2) para osciladores acoplados onde as fases evoluem conforme a equação:

$$\frac{\partial \phi(x', t)}{\partial t} = \omega(x') - \int G(x' - x'') \sin[\phi(x', t) - \phi(x'', t) + \alpha_S] dx'', \quad (2.1)$$

onde as variáveis reais x' e x'' representam as posições dos osciladores na rede. A variável t representa o tempo e $\omega(x')$ é a frequência natural dos osciladores. O parâmetro de fase de Sakaguchi (α_S) (2, 17) pode variar no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e a função de acoplamento $G(x' - x'')$ é dada por:

$$G(x' - x'') = \frac{k}{2} e^{-k|x' - x''|}, \quad (2.2)$$

onde a variável k é uma constante de acoplamento (2). Para uma rede finita de osciladores a integral da expressão 2.1 por ser discretizada:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N G(i - j) \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha_S) \quad (2.3)$$

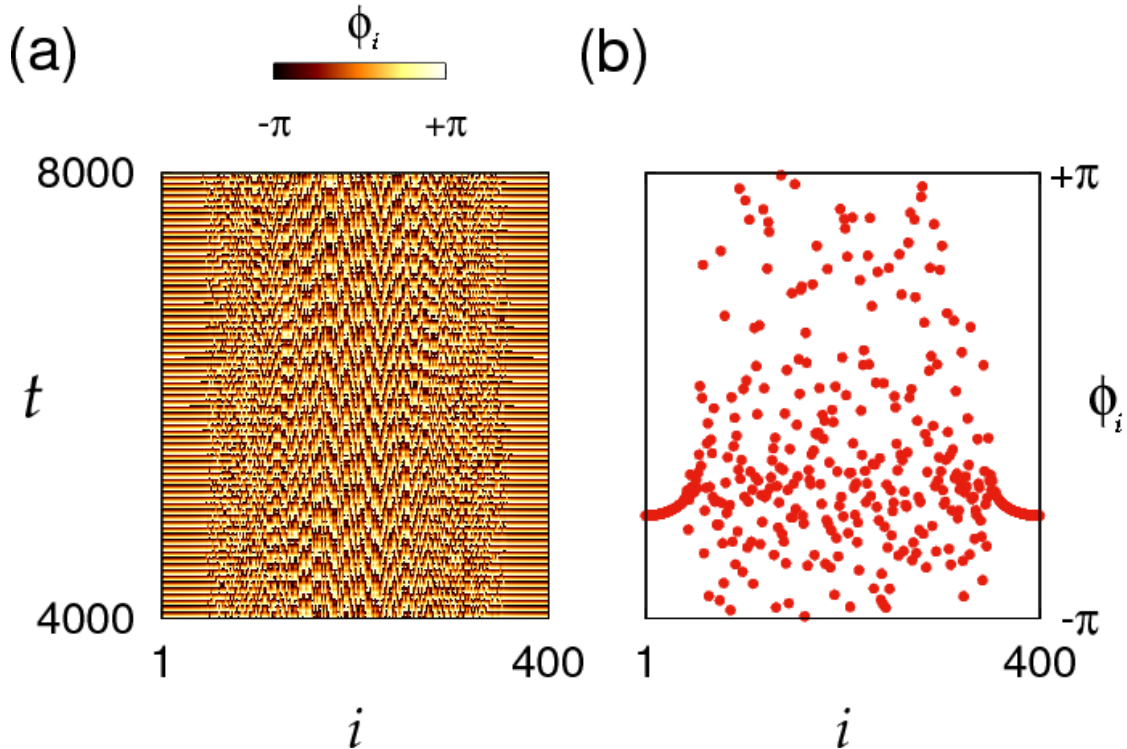
onde o tamanho da rede ou quantidade de elementos (N) é a uma variável inteira, ω_i representa a frequência natural e i a posição ($i = 1, 2, \dots, N$) do oscilador na rede. Além disso, se a rede possuir condição de contorno periódica, que é o caso aqui apresentado, teremos $N + i = i$.

Solucionando numericamente a expressão 2.3, para $\omega_i=0$ (osciladores idênticos) (3), pelo método de integração Runge-Kutta 4ª-ordem com passo fixo ($h = 0,025$), onde as condições iniciais são dadas conforme a referência (3):

$$\phi_i = 6re^{-0,76x_0^2}, \quad (2.4)$$

para r distribuído randomicamente no intervalo $[-5/10, 5/10]$ e a variável x_0 pertencente ao intervalo $[-\pi, \pi]$. Desta forma, temos a seguinte relação entre as variáveis: $i = 1, 2, \dots, N \leftrightarrow x_0 = -\pi, -\pi + 2\pi/N, \dots, \pi$. Assim, através da expressão 2.3 podemos obter a coexistência de estados coerentes e incoerentes na rede de osciladores de fase acoplados. O estado coerente significa um padrão espacial contínuo e suave, caso contrário, temos um estado incoerente. A figura 2.1 exemplifica o comportamento espaço-temporal do sistema, onde descartamos um tempo transiente de 4×10^3 .

Figura 2.1: Evolução temporal e perfil espacial das fases ϕ_i . Em (a) temos evolução temporal e em (b) perfil espacial das fases para um tempo t qualquer. Parâmetros utilizados no sistema acoplado: $N=400$, $\alpha_S=1,47$, $k=4,0$, $\omega_i=0$ e tempo transiente de 4×10^3 . A variável i indica a posição do oscilador na rede.



Na figura 2.1 (a) temos no eixo vertical, representado por t , o tempo de observação dos $N=400$ elementos (osciladores) pertencentes a rede e no eixo horizontal temos as suas respectivas posições. A escala de cores refere-se a amplitude das fases (ϕ_i). Observe na figura que os elementos pertencentes às bordas apresentam, entre eles, uma sincronização espacial (estado coerente), enquanto que, os demais sítios da rede não exibem sincronização entre si, e nem com o restante dos elementos do sistema (estado incoerente). No intuito de tornar mais evidente a coexistência de populações híbridas mostramos na figura 2.1 (b) o perfil espacial dos 400 osciladores, onde escolhemos um instante de tempo qualquer para representarmos as fases de todos os N -sítios. O eixo horizontal refere-se a posição dos osciladores ($i = 1, 2, \dots, 400$) e o eixo vertical a suas respectivas fases (ϕ_i). Esta figura destaca, de forma mais clara, a coexistência de dois domínios distintos no espaço: um próximo das bordas com os elementos da rede sincronizados entre si e outro em torno da região central onde não existe aparente “correlação” entre estes osciladores com os demais sítios da rede. Note que os mesmos possuem um perfil suave e contínuo na região coerente. Por sua vez, na região espacial incoerente os elementos evoluem, aparentemente, como se não houvesse qualquer forma de interação com o restante do sistema, mesmo existindo um acoplamento entre eles via a equação 2.2, tornando o perfil espacial completamente descontínuo e não sincronizado.

Após o trabalho de Kuramoto, no ano de 2004, utilizando a mesma expressão 2.1, mas com a função de acoplamento $G(x' - x'')$ dada pela seguinte equação:

$$G(x' - x'') = \frac{[1, 0 + A \cos(x' - x'')]}{2\pi}, \quad (2.5)$$

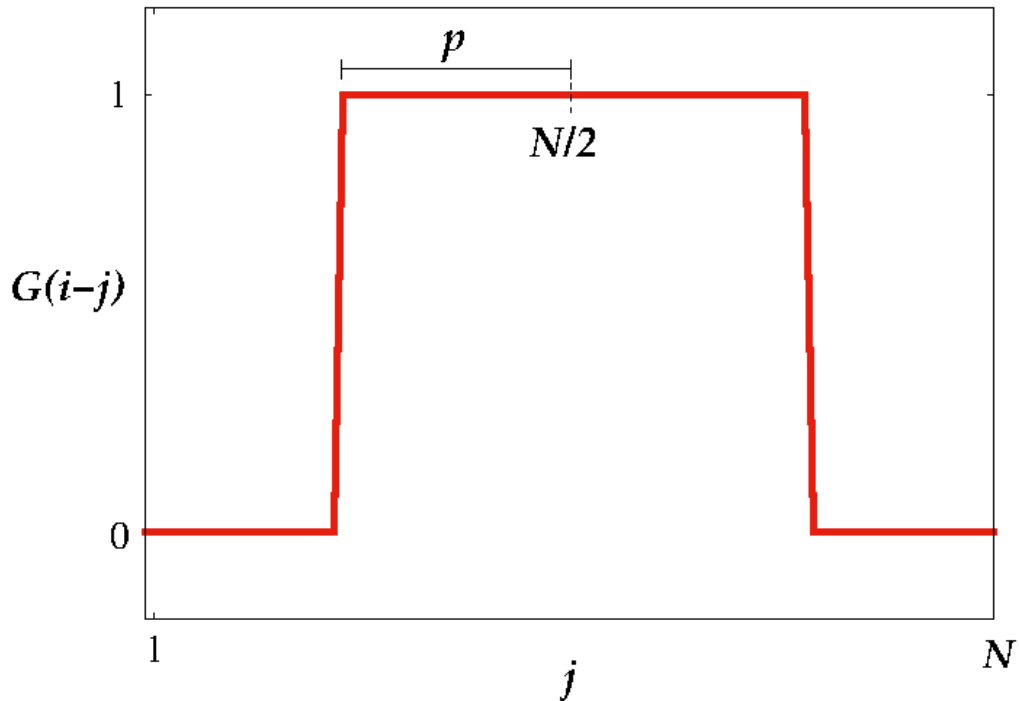
onde $0 \leq A \leq 1$ é um parâmetro. As variáveis reais x' e x'' representam as posições espaciais dos osciladores na rede. Abrams e Strogatz (3) obtiveram resultados numéricos similares aos encontrados por Kuramoto e Battogtokh (2) além de resultados analíticos devido a inserção da função 2.5 para o espaço de parâmetros ($A \times \alpha_S$). Assim, após o ano de 2004 a coexistência de estados coerentes e incoerentes passou a ser denominada de **estados quimera**. Existem diversos outros trabalhos teóricos que evidenciam a formação de estados quimera nos mais diversos sistemas e formas de acoplamento: rede de mapas (12), neurônios acoplados (18, 19, 20), rede com mudança na estrutura conectiva (remoções de algumas conexões) (21) são alguns exemplos. Dos trabalhos teóricos, devido principalmente a Kuramoto (2) e Abrams (3), surgiram as bases para a compreensão e detecção do surgimento deste novo comportamento dinâmico espaço-temporal.

Outra forma de acoplamento pode ser obtida através da função degrau:

$$G(i-j) = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| \leq p, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

O alcance do acoplamento (p) é uma variável inteira. O valor de p indica quantos nós, de ambos os lados, estarão conectados com um elemento i qualquer. Na figura 2.2 temos um exemplo da função degrau para uma rede de tamanho N .

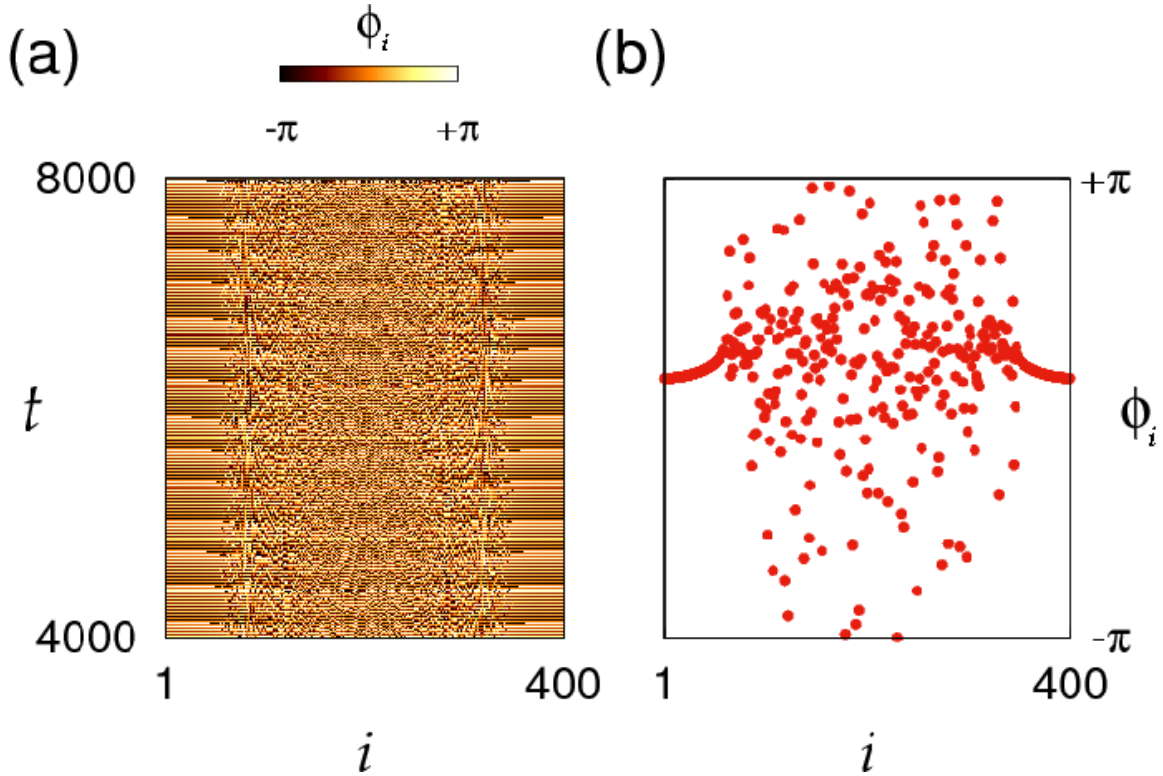
Figura 2.2: Função degrau $G(i-j)$ representando a função de acoplamento para o elemento $i=N/2$ da rede de osciladores. A variável inteira p representa a quantidade de vizinhos de ambos os lados do elemento $N/2$.



Fonte: O autor

Na figura 2.2 temos a representação gráfica da função 2.6 para o caso do elemento central da rede ($i = N/2$). Este acoplamento é mais vantajoso, computacionalmente, que os acoplamentos dados pelas expressões 2.2 e 2.5. Isto deve-se a forma como é realizado as conexões no programa: observe que as conexões são realizadas somente para um alcance p e as demais são desprezadas ($|i-j| > p \rightarrow G(i-j) = 0$). Desta forma, podemos obter acoplamento local ($p \approx 0$) até acoplamento global ($p \approx N$). Na figura 2.3 temos o resultado da simulação numérica da equação 2.3, mas com o acoplamento não local ($p=0,35N$) dado pela expressão 2.6.

Figura 2.3: Evolução temporal e perfil espacial das fases (ϕ_i). Em (a) mostramos a evolução temporal das fases para os N -osciladores. Em (b) o perfil espacial das fases (ϕ_i) para um tempo t qualquer. Parâmetros: $N=400$, $\alpha_S=1,47$, $\omega_i=0$, $p=0,35N$ e transiente de 4×10^3 . A variável i indica a posição do oscilador na rede.



Fonte: O autor

Na figura 2.3 utilizamos $N=400$ osciladores acoplados. Perceba que essa figura é muito similar àquela obtida através da utilização do acoplamento 2.2. No entanto, utilizamos um esforço computacional menor, uma vez que uma quantidade inferior de conexões é realizadas durante a simulação numérica. Vale ressaltar que a posição espacial da região coerente e incoerente podem mudar dependendo da condição inicial. Entretanto, conforme mencionado acima, estados quimera não ficam limitados a essas formas de acoplamento^a. Existem evidências, por exemplo, da coexistência de estados em osciladores de Ginzburg-Landau com acoplamento global (22). Podemos ainda obter estados quimera em uma rede de osciladores conectados de forma regular onde a estrutura da mesma sofre perturbação, ou seja, retira-se algumas conexões de forma aleatória (21). Neste último caso, cria-se uma rede conectada de forma não local e algumas conexões foram retiradas, ao acaso, com certa probabilidade de remoção. De qualquer forma, a maneira de identificar a presença de estados quimera é baseada principalmente nos trabalhos pioneiros de Kuramoto e Strogatz conforme discutiremos nas próximas seções.

^aequações 2.2, 2.5 ou a 2.6

2.1.1 Parâmetro de Ordem Local

A coexistência de estados híbridos pode ser diagnosticada através da utilização do parâmetro de ordem local. Para uma rede constituída por $k = 1, 2, 3, \dots, N$ elementos o parâmetro de ordem local pode ser definido como (12):

$$\bar{Z}_k = \left| \frac{1}{2\delta_0} \sum_{|j-k| \leq \delta_0} e^{i\Psi_j} \right|, \quad (2.7)$$

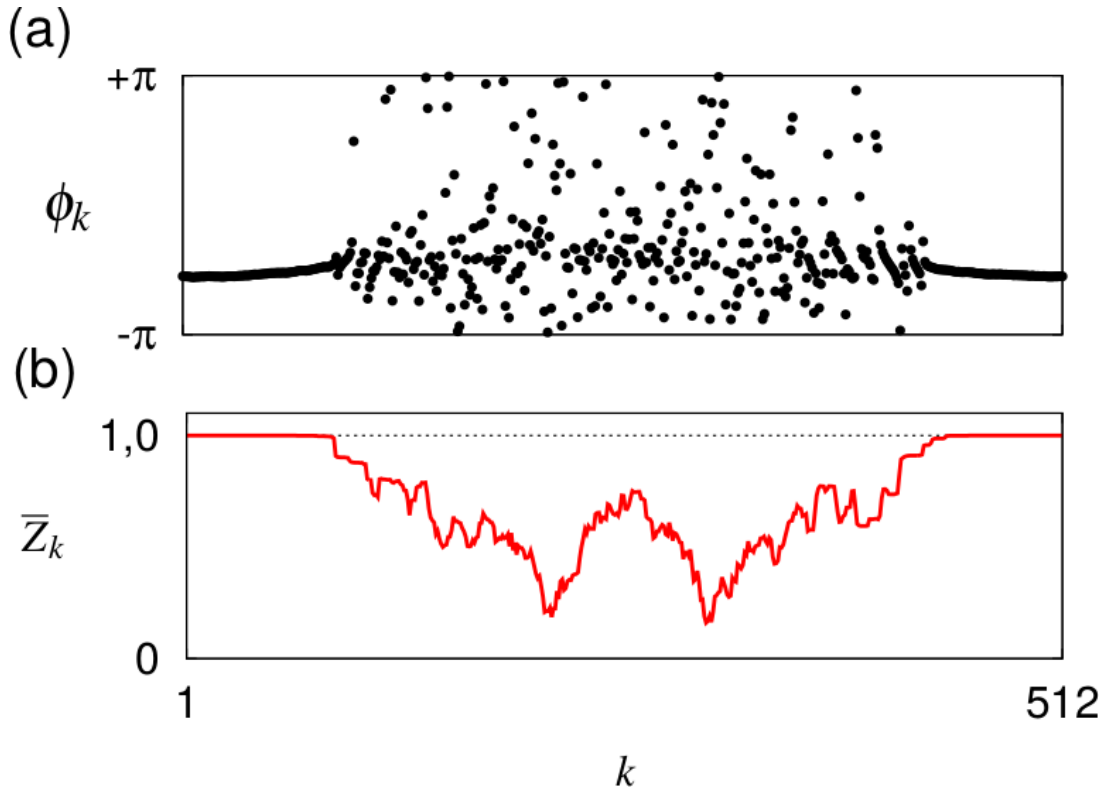
onde Ψ_j é a variável dinâmica de interesse, δ_0 é uma variável inteira que indica a quantidade de vizinhos locais (primeiros vizinhos) de ambos os lados do sítio k , e i representa a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$).

Desta forma, na região coerente temos que o parâmetro de ordem local tende a unidade ($\bar{Z}_k \rightarrow 1$), pois seus elementos possuem uma forte coerência espacial (região de sincronizada espacialmente), e na parte incoerente da rede (região dessincronizada) o valor do parâmetro de ordem local é menor que a unidade ($\bar{Z}_k < 1$), isso se deve à perda da correlação espacial entre elementos pertencentes a região incoerente do sistema. Para melhor exemplificar o comportamento do parâmetro de ordem local, aplicado a uma rede de osciladores acoplados onde as fases evoluem conforme a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k - \frac{1}{2p} \sum_{j=k-p}^{k+p} \sin[\phi_k - \phi_j + \alpha_S], \quad (2.8)$$

onde p é o alcance do acoplamento de ambos os lados de um elemento de índice k , ω_k a frequência natural do k -ésimo oscilador que pode ser nula ($\omega_k = 0$ conforme a referência (3)), ϕ_k (ϕ_j) representa a fase do k -ésimo (j -ésimo) elemento da rede e α_S representa o parâmetro de fase de Sakaguchi. O perfil espacial da rede para um tempo t qualquer após um transiente de 4×10^3 e o seu respectivo parâmetro de ordem local estão exemplificados na figura 2.4, onde podemos observar a presença de estados quimera para os parâmetros: $N=512$ osciladores, $p = 0,35N$ e $\alpha_S = 1,47$. A solução numérica da expressão 2.8 foi realizada pelo método de Runge-Kutta 4ª ordem com passo de integração fixo ($h = 0,025$), onde as condições iniciais são dadas conforme a referência (3). A quantidade de vizinhos locais ($\delta_0 = 0,025N$) para o cálculo do parâmetro de ordem local ($\bar{Z}_k$) é de acordo com a referência (12).

Figura 2.4: Perfil espacial e parâmetro de ordem local. Em (a) temos a o perfil espacial (eixo vertical) para um tempo t qualquer após um transiente de 4×10^3 onde o eixo horizontal (variável k), em ambos os casos, representa a posição dos osciladores na rede. Em (b) encontra-se o parâmetro de ordem local (eixo vertical) onde utilizamos $\delta_0 = 0,025N$. Parâmetros: $N=512$ osciladores idênticos ($\omega_k = 0$), $\alpha_S=1,47$ e $p=0,35N$.



Fonte: O autor

Na figura 2.4 (a) temos a presença de dois domínios que exibem comportamentos distintos, um localizado próximo às bordas (região coerente da rede) e outro mais ao centro da figura (região incoerente da rede), assinatura típica dos estados quimera. Nota-se, pela figura 2.4 (b), que a região coerente é caracterizada por $\bar{Z}_k \approx 1$ e isto está relacionado ao sincronismo dos osciladores dentro da região coerente do sistema acoplado. Já na região incoerente, devido a falta de sincronismo entre os osciladores, temos $\bar{Z}_k < 1$, ou seja, comportamento dessincronizado no espaço.

Assim, quando a rede apresenta estados quimera, temos regiões espaciais com o parâmetro de ordem local próximo da unidade ($\bar{Z}_k \approx 1$), ao passo que, outras regiões da rede apresentam valores absolutos do parâmetro de ordem local menores que unidade ($\bar{Z}_k < 1$). Acompanhando a evolução temporal do parâmetro de ordem local podemos afirmar (ou não) a coexistência de domínios híbridos, na rede, para determinados intervalos de tempo.

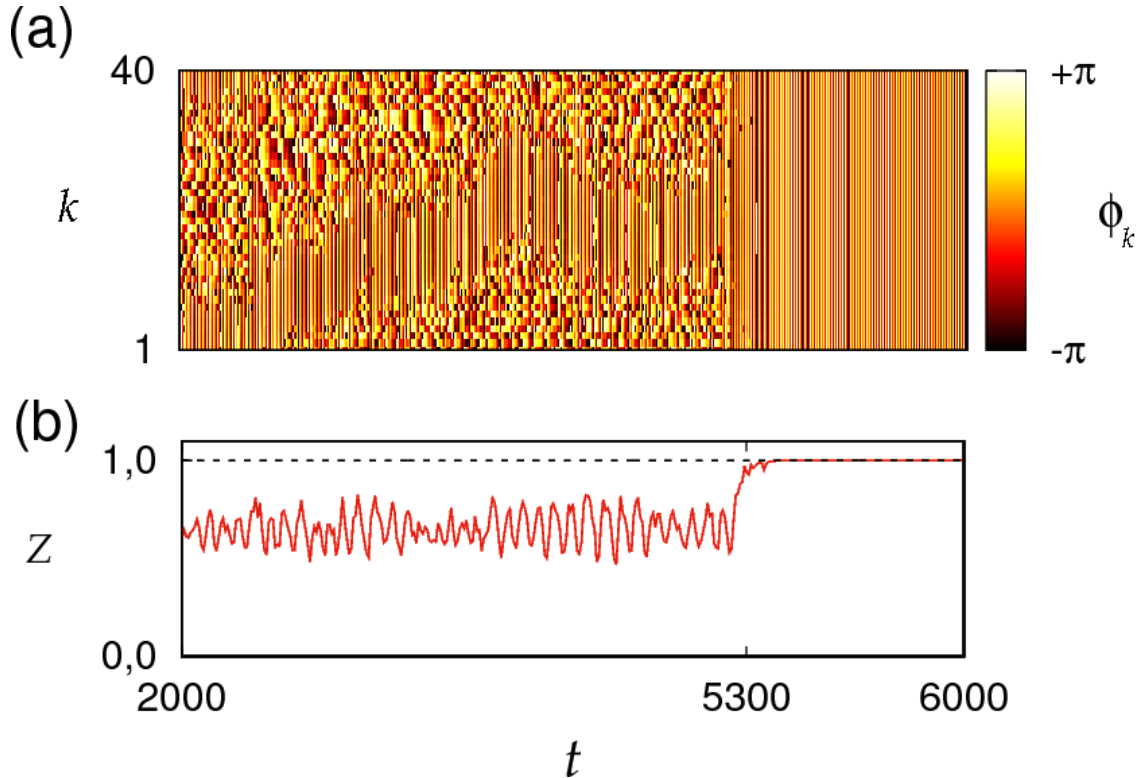
2.1.2 Parâmetro de Ordem Global

Estados quimera eventualmente podem colapsar em um estado coerente (sincronizado). Esta mudança de comportamento pode ser caracterizada pela utilização do parâmetro de ordem global (11). Podemos obter a versão global partindo da expressão 2.7, ou seja, $\delta \rightarrow N/2$. Assim, o parâmetro de ordem global pode ser definido da seguinte forma:

$$Z = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\Psi_k} \right|, \quad (2.9)$$

onde Ψ_k é a variável dinâmica de interesse. Note que a definição refere-se a um tempo t qualquer. Quando o valor absoluto aproxima-se da unidade ($Z \rightarrow 1$) temos que os N elementos da rede possuem sincronização completa entre si. Utilizamos novamente a equação 2.8 como protótipo de sistema acoplado e aplicação do parâmetro de ordem global. Assim, para $N=40$ osciladores acoplados, mantendo-se fixos os demais parâmetros ($\alpha_S=1,47$, $p=0,35N$) temos como resultado, da simulação numérica, a figura 2.5.

Figura 2.5: Colapso dos estados quimera e parâmetro de ordem global. Na figura (a) temos a evolução das fases (ϕ_k) dos osciladores e em (b) o módulo do parâmetro de ordem global onde desprezamos um tempo transiente de 2×10^3 . A escala de cores indica a intensidade da fase (ϕ_k) e a variável k a posição do oscilador na rede. Parâmetros utilizados: $N=40$, $p=0,35N$, $\alpha_S=1,47$.



Na figura 2.5 (a) temos a evolução temporal das fases (ϕ_k) para toda a rede de osciladores acoplados onde desprezamos um tempo transiente de 2×10^3 . Já na figura 2.5 (b), mostramos o parâmetro de ordem global (eixo vertical) e no eixo horizontal temos o tempo (t). Observe a mudança de comportamento que ocorre em ϕ_k para $t \approx 5,3 \times 10^3$, ou seja, temos o chamado colapso dos estados quimera (11). A partir deste instante de tempo ocorre uma mudança no comportamento espaço-temporal. A rede deixa de exibir estados quimera e os osciladores passam a ter o mesmo comportamento (estado coerente) ao longo do tempo. Assim, temos a sincronização em todos os sítios da rede. Desta forma, o parâmetro de ordem global 2.9 tende a unidade ($Z \rightarrow 1$) indicando o comportamento coletivo alcançado por todo o sistema descrito pela equação 2.8.

Wolfrum e Omel'Chenko, em 2011, utilizaram a expressão 2.8, juntamente com a equação 2.9, e calcularam o tempo médio de vida dos estados quimera para diferentes valores de N . Estes autores mostraram que a coexistência de estados coerentes e incoerentes possui crescimento exponencial com o tamanho da rede (11). Assim, o parâmetro de ordem global pode ser utilizado para detectar a mudança no comportamento da rede. Até aqui, discutimos alguns dos mais importantes resultados teóricos sobre a coexistência de estados. Na próxima seção abordaremos alguns trabalhos experimentais sobre o estudo de estados quimera em sistemas acoplados.

2.2 Evidências Experimentais

Em 2012, Hagerstrom e colaboradores obtiveram as primeiras evidências experimentais sobre estados quimera. Esses autores utilizaram uma configuração de osciladores óticos de cristal líquido através de um *liquid-crystal spatial light modulator* (SML)^b que possui uma área ativa de $7,68 \times 7,68 \text{ mm}^2$ e 512×512 pixels^c. O SML é iluminado por um feixe de luz colimada possuindo 1550 nm e originado por um *light emitter diode* (LED)^d. A luz deste diodo passa através do polarizador divisor de feixe e uma lâmina quarto de onda orientada num ângulo de 45° com a direção da luz incidente linearmente polarizada. Este feixe é refletido pelo SML e passa novamente pela lâmina quarto de onda, pelo polarizador divisor de feixe e agora uma lente é utilizada para focalizar a imagem do SML em uma câmera^e infravermelha. Nesta estrutura, um computador controla a dependência espacial (acoplamento) para a frente de onda

^bcristal líquido modulado por luz (modelo P512-1550)

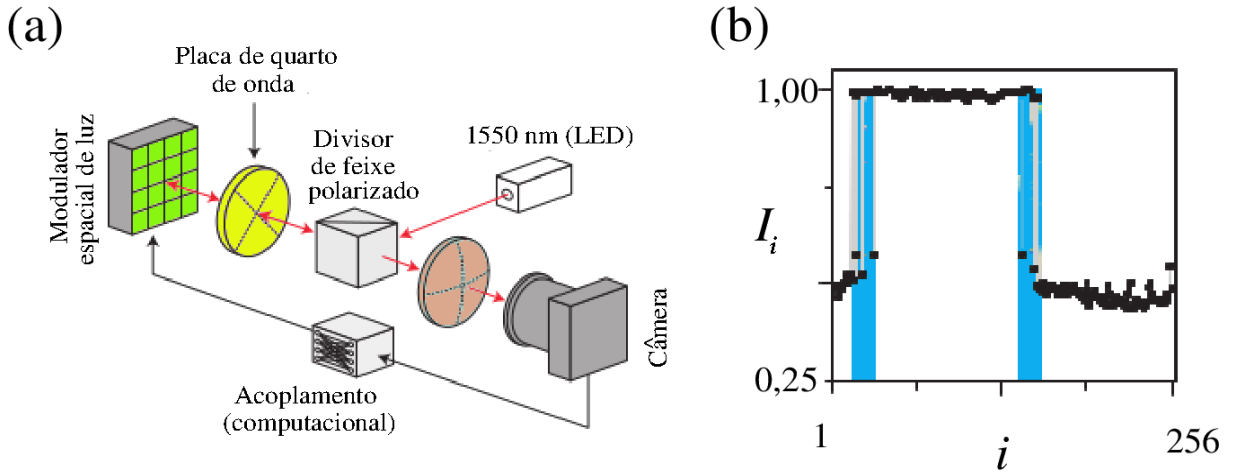
^cmenor unidade de uma imagem digital

^ddiodo emissor de luz

^emodelo Goodrich SU320KTSW-1.7RT/RS170

no SML e o seu *feedback*^f captado pela câmera infravermelha cuja área ativa é de $8 \times 6,4 \text{ mm}^2$ e 320×256 pixels. A polarização ótica cria uma relação não linear entre a mudança de fase aplicada pelo SML e a intensidade da luz captada pela câmera. A figura 2.6 (a) exemplifica o exposto acima e mostra um dos resultados obtidos por Hagerstrom e coautores (4).

Figura 2.6: Configuração experimental e estados quimera em osciladores óticos. Na figura (a) a polarização cria uma relação não linear entre a mudança de fase e a intensidade da luz que atinge a câmera. A análise das informações e o acoplamento são implementados usando um computador. Na figura (b) temos os estados quimera onde a região incoerente é evidenciada pela região hachurada na cor azul. A variável i indica a posição (pixels) dos osciladores no SML e I_i a intensidade da luz captada pela câmera infravermelha para o i -ésimo oscilador.



Fonte: Adaptado de Hagerstrom (4)

Na figura 2.6 (b) temos o resultado experimental onde a variável I_i representa a intensidade da luz captada pela câmera infravermelha e a variável inteira i a posição (pixels) dos osciladores no SML. Note que a região hachurada, na cor azul, indica os osciladores óticos com comportamento incoerente da quimera, ao passo que, os demais elementos pertencem a região coerente (4).

Para modelar o comportamento dinâmico e comparar com seus resultados experimentais (figura 2.6 (b)), os autores utilizaram a expressão:

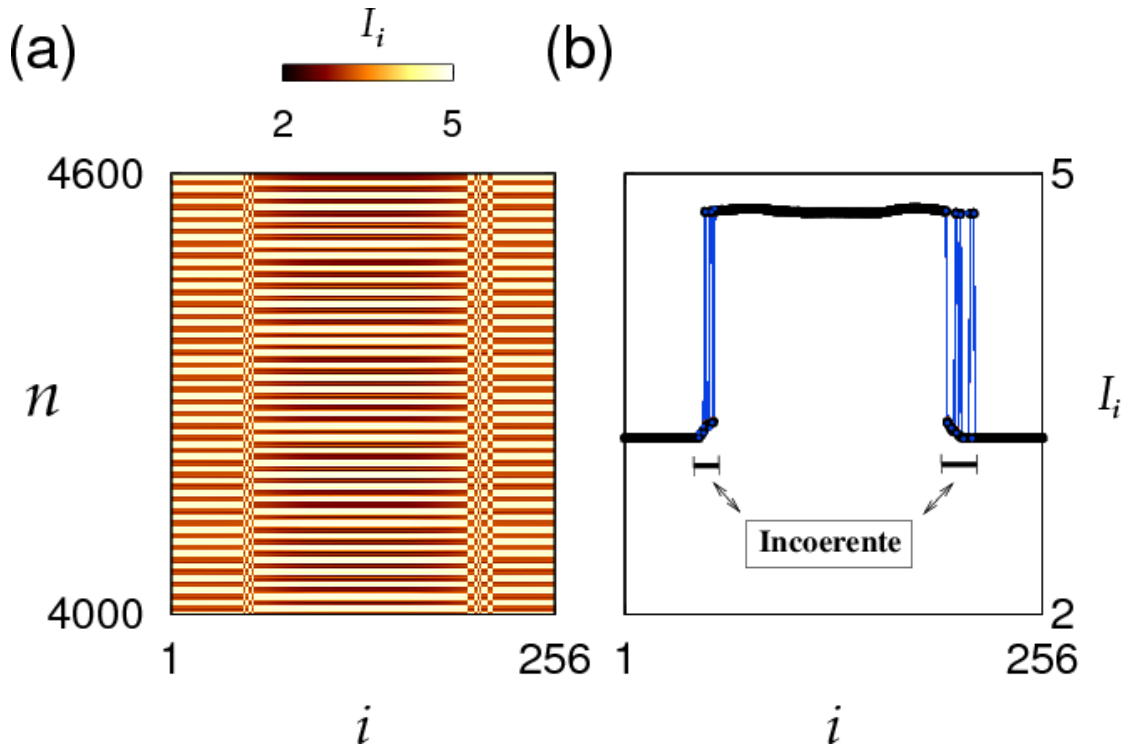
$$\Phi_i^{n+1} = 2a\pi \left\{ I(\Phi_i^n) + \frac{\epsilon_0}{2p} \sum_{j=-p}^p [I(\Phi_{i+j}^n) - I(\Phi_i^n)] \right\}, \quad (2.10)$$

onde a variável Φ_i^n representa a fase do i -ésimo elemento ($i = 1, 2, \dots, N$) para a n -ésima iterada da rede, a controla a dinâmica temporal para um elemento isolado e $I(\Phi_i^n)$ representa a intensidade medida pela correspondente região na câmera de infravermelho: $I(\Phi) = [1 - \cos(\Phi)]/2$.

^freação ao estímulo

Além disso, a rede possui condição de contorno periódica ($N + i = i$). O parâmetro de controle ϵ_0 está relacionado a intensidade do acoplamento e p é uma variável inteira que representa a quantidade de elementos conectados, de ambos os lados, ao i -ésimo oscilador ótico. Para $a = 0,85$ a dinâmica individual^g dos mapas é caótica (4). O resultado numérico da equação 2.10 para 256 osciladores acoplados encontra-se na figura 2.7.

Figura 2.7: Estados quimera para osciladores óticos acoplados. A figura (a) representa a evolução temporal da intensidade (I_i) de toda rede onde desprezamos um tempo transiente de 4×10^3 . Na figura (b) mostramos o perfil espacial dos osciladores para um tempo t qualquer onde destacamos a região incoerente. A variável n representa o tempo discreto, e i a posição dos osciladores óticos na rede. Parâmetros utilizados: $N=256$, $\epsilon_0=0,44$, $a = 0,85$ e $p=0,35N$.



Fonte: O autor

Na figura 2.7 simulamos a evolução espaço-temporal da expressão 2.10 para os parâmetros: $N=256$, $\epsilon_0=0,44$ e $p=0,35N$. Na figura 2.7 (a) temos a evolução temporal das intensidades I_i . Note a existência de osciladores óticos que possuem comportamento temporal distinto do restante da rede. A figura 2.7 (b) representa o perfil espacial dos osciladores óticos para um tempo n qualquer onde a região incoerente dos estados quimera encontra-se evidenciada. Um resultado similar, ao apresentado pela figura 2.7 (b), foi utilizado por Hagerstrom e colaboradores para comparação dos seus resultados experimentais, obtidos a partir do banco ótico,

^gpor exemplo, utilizando $\epsilon_0=0$ na equação 2.10

conforme a figura 2.6. Logo temos a validação da previsão teórica, obtida via simulação da equação 2.10, através de resultados experimentais da figura 2.6 (b) (4).

Outro artigo relevante, no campo experimental, deve-se ao trabalho de Tinsley e co-autores por intermédio da reação fotossensível de Belousov–Zhabotinsky (5). Esses autores utilizaram uma rede com 2 (dois) grupos (A e B) de osciladores químicos acoplados. Neste sistema os elementos estão fortemente conectados quando pertencentes ao mesmo grupo, ou fracamente conectados caso contrário. A mudança na intensidade do acoplamento pode ser imaginada como uma imposição espacial, ou seja, elementos pertencentes a um determinado grupo estão mais próximos e possuem uma maior interação entre eles. Assim, para essa configuração, Tinsley e colaboradores obtiveram a presença de estados coerentes e incoerentes no espaço, assim sendo, mais uma observação experimental de estados quimera.

Um outro trabalho pertinente refere-se a uma experiência com pêndulos mecanicamente acoplados (7). De maneira similar, ao caso descrito no parágrafo anterior, o acoplamento entre elementos é mais intenso dentro do mesmo grupo (A ou B) e com menor intensidade entre osciladores (pêndulos) pertencentes a grupos distintos. Exemplificando, osciladores que constituem o grupo A quando interagem, via acoplamento, com outros elementos (osciladores) dentro do mesmo grupo A possuem uma intensidade (ou peso)^h na conectividade, ao passo que, se um oscilador do grupo A interage com qualquer outro pertencente ao grupo B a intensidade da conexão é automaticamente inferior. Sendo o contrário, por simples analogia, também válido.

Demais evidências sobre a constatação experimental de estados quimera em sistemas acoplados, podem ser encontradas em um experimento realizado no ano de 2016 com metrônomo. Nesse caso, três plataformas possuindo quinze metrônomos cada onde as conexões entre as plataformas distintas é realizada por intermédio de uma haste rígida de balanço (8). Convém citar ainda um experimento realizado por Gambuzza e colaboradores por meio de circuitos eletrônicos. Neste, cada oscilador simula a dinâmica neuronal do modelo de FitzHugh–Nagumo (FHN) (23). O experimento consiste em acoplar 10 (dez) circuitos (FHN) com seus primeiros vizinhos (acoplamento não local). Esses trabalhos utilizaram o parâmetro de ordem complexoⁱ como diagnóstico para a detecção de incoerência e coerência espacial. No próximo capítulo introduziremos a matriz de recorrência como uma nova alternativa ao parâmetro de ordem no estudo e caracterização de estados quimera em sistemas acoplados.

^hquando comparado a intensidade entre osciladores de grupos distintos

ⁱlocal, global ou ambos

3 *Recorrência*

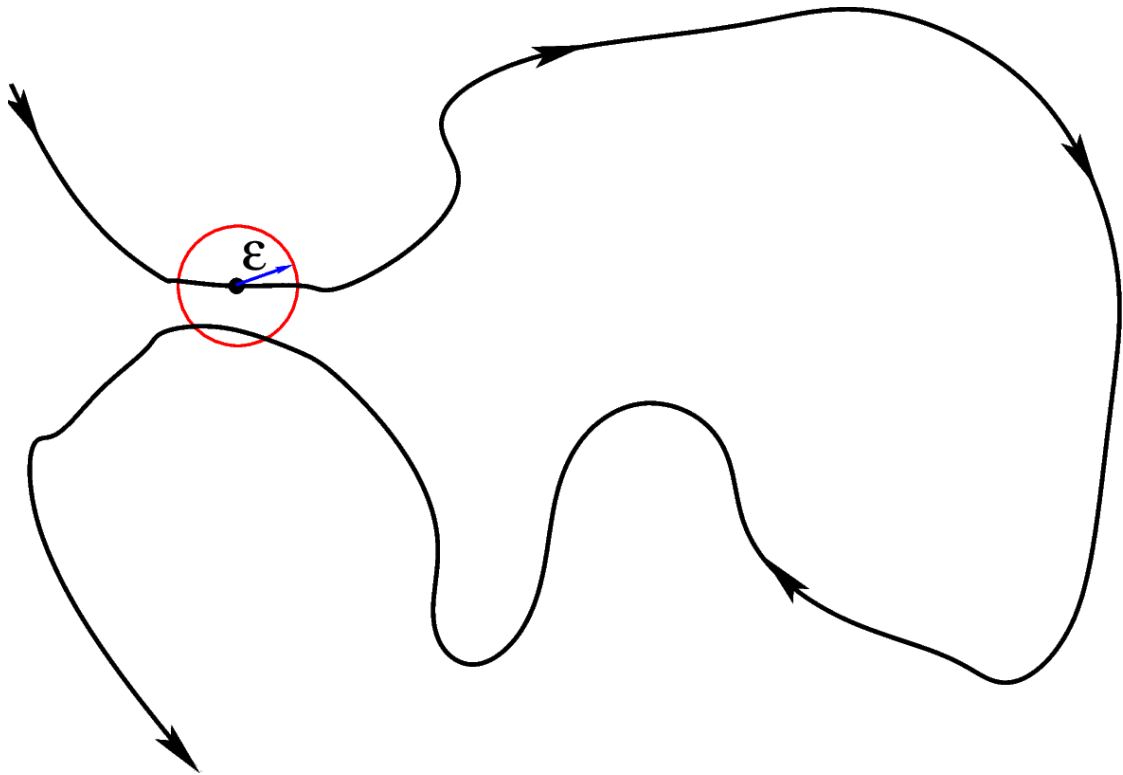
Alguns animais possuem a notável capacidade de buscar e localizar suprimentos vitais em épocas de escassez de recursos. Dentre estes, podemos citar o elefante que encontra água e comida em períodos de seca intensa ou os gnus (grande mamífero nativo do continente africano) que migram para sul (ou norte) dependendo do clima da região onde encontram-se. Um outro animal mais conhecido, a andorinha, faz um trajeto de aproximadamente 10^4 (dez mil) quilômetros entre os continentes africano e europeu. Essa travessia deve-se à mudança de estações e busca de melhores condições para a sua subsistência. Os fatos instintivos elencados aqui ocorrem devido a duas características principais: situações similares ocorrem frequentemente de maneira análoga e alguns eventos ocorrem repetidas vezes (24). Desta forma, os sistemas reais apresentam “certo determinismo” que, em princípio, conhecidas as condições iniciais, permite-nos fazer previsões sobre seu comportamento temporal. Sendo assim, podemos dizer que a recorrência é uma característica fundamental da natureza.

3.1 Matriz de Recorrência

O comportamento determinístico, relatado no início deste capítulo, refere-se ao poder de previsão sobre o estado de um sistema desde que saibamos exatamente as condições iniciais do mesmo. Assim, dizemos que o sistema é recorrente quando a sua variável dinâmica retorna, tão próxima quanto se queira, de um determinado valor de referência $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^m$. Por exemplo, definindo um raio de retorno (ϵ) em torno de um valor inicial $\vec{w}_0$ temos que o sistema é recorrente quando a variável dinâmica $\vec{w}_{0+\delta t}$ retorna para às proximidades ou vizinhança de $\vec{w}_0$ após um intervalo de tempo (δt).

A figura 3.1 representa uma trajetória qualquer em duas dimensões e o raio de retorno (ϵ) para o qual considera-se a trajetória recorrente. Desta forma, toda vez que a trajetória (linha na cor preta) retorna para a “dentro” da circunferência (na cor vermelha) de raio ϵ temos a recorrência desta trajetória com relação ao ponto central da circunferência.

Figura 3.1: Raio de retorno (ϵ) para um ponto qualquer pertencente a uma trajetória no espaço bidimensional.



Fonte: O autor

Se a trajetória mostrada na figura 3.1 é formada por $i = 1, 2, 3, \dots, M$ pontos e cada ponto estiver associado a um vetor $\vec{w}_i$ a matriz (ou gráfico) de recorrência será uma matriz quadrada $M \times M$ que relaciona o vetor $\vec{w}_i$ com a sua evolução em tempos posteriores $\vec{w}_j$. A quantidade de pontos (M) pode também representar o tamanho de uma série temporal. Desta forma, o gráfico de recorrência fornece-nos informações sobre a correlação temporal (ou não) existente no sistema de nosso interesse. Note que, até o presente momento, não falamos nada a respeito de equações de movimento ou estado de um sistema em particular. Essa técnica somente baseia-se em informações das variáveis dinâmicas e que, a priori, podem ser de qualquer grandeza. Assim, os gráficos de recorrência necessitam somente da série de dados ou informações a serem analisadas. Isso pode ser bastante relevante quando se trata com dados experimentais visto que, na grande maioria dos casos, não se conhecem as equações que regem o sistema ou são de difícil obtenção.

Podemos afirmar que os gráficos de recorrência, como ferramenta de análise e caracterização de sistemas, possuem inúmeras aplicações no mundo moderno. De fato, nos últimos anos as matrizes de recorrência foram introduzidas em diversas áreas científicas (25). A pedra fundamental sobre recorrência de sistemas foi lançada por Henry Poincaré, no ano de 1889,

ocasião em que o mesmo ganhou um prêmio do rei Oscar II da Suécia e Noruega devido ao seu trabalho sobre a estabilidade do nosso sistema solar, ou seja o problema de n -corpos (26, 27). Porém, em torno de 100 (cem) anos após o trabalho de Poincaré, no ano de 1987, é que os gráficos de recorrência e seus quantificadores nascem como uma moderna ferramenta de análise para a dinâmica não linear (25). A matriz ou gráfico de recorrência ($RP_{i,j}$)^a pode ser definida da seguinte forma:

$$RP_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\|) \begin{cases} \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\| \leq \varepsilon, & RP_{i,j} = 1 \\ \|\vec{w}_i - \vec{w}_j\| > \varepsilon, & RP_{i,j} = 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $\vec{w}_i$ é o vetor de estado da variável em estudo e pertence a $\mathbb{R}^m$ ($i, j = 1, \dots, M$), $\Theta(\cdot)$ é a função de *Heaviside*^b, $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana e ε o raio de retorno. Por exemplo, se $\vec{w}_i$ encontra-se na vizinhança de $\vec{w}_j$ temos a indicação que os estados representados por esses vetores são recorrentes, o que implica em $RP_{i,j}=1$, caso contrário, $RP_{i,j}=0$. Logo, a matriz de recorrência é uma matriz binária composta de zero (estado não recorrente) e um (estado recorrente) que pode ser visualizada por cores contrastantes^c quando disposta em um gráfico bidimensional.

Um exemplo de simples aplicação, para a definição 3.1, refere-se ao estudo da variável dinâmica η do mapa bidimensional de Ikeda (26):

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} &= 1,0 + a[1 + \eta_i \cos(\tau) - \zeta_i \sin(\tau)], \\ \zeta_{i+1} &= a[\eta_i \sin(\tau) + \zeta_i \cos(\tau)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

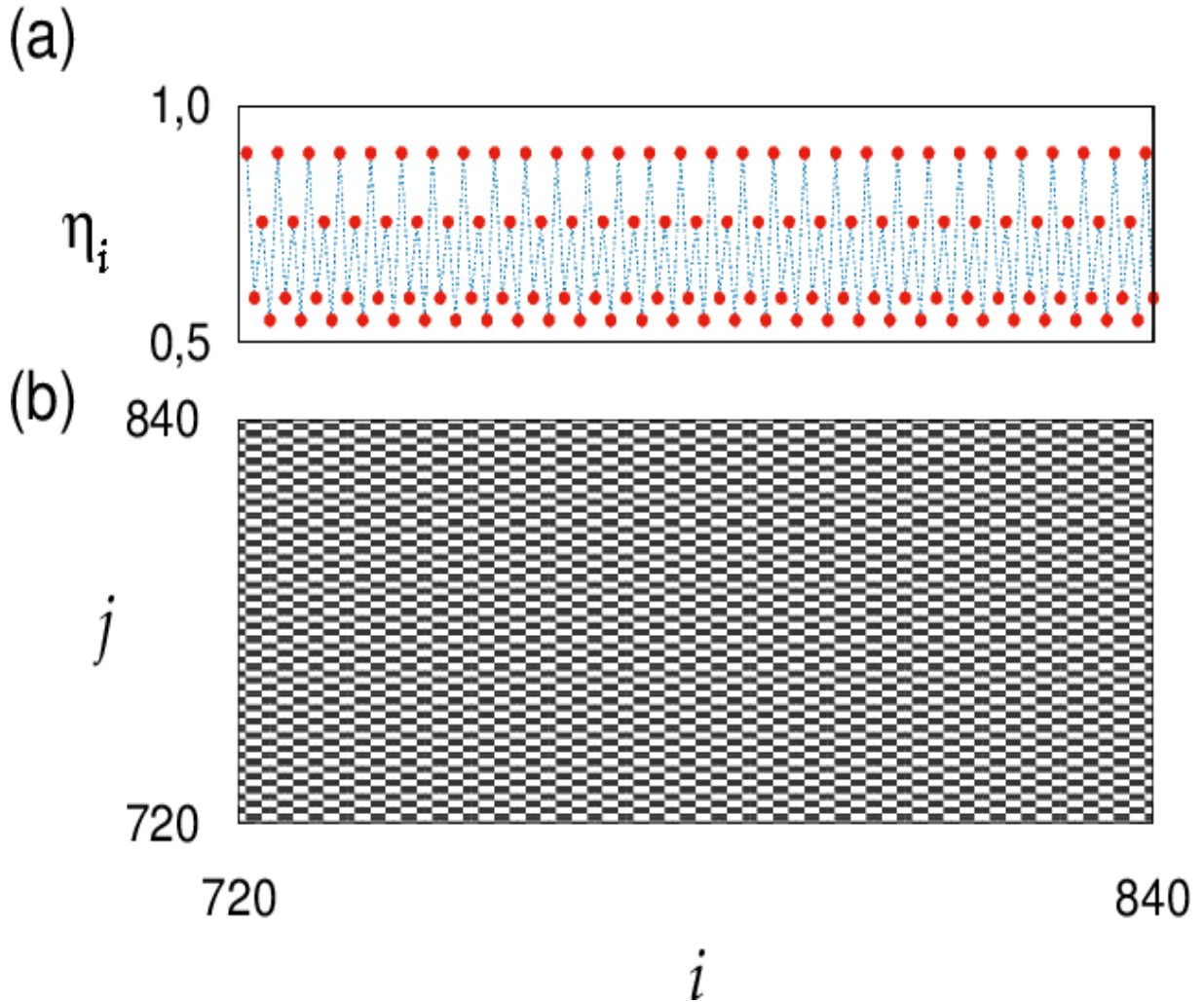
onde $\tau = 0,4 - 6,0/(\eta_i^2 + \zeta_i^2)$. A variável i representa o tempo discreto e a o parâmetro de controle do mapa. O mapa de Ikeda trata-se de um sistema bidimensional em que o estado atual depende do seu comportamento anterior. Além disso, o mapa regido pelas expressões 3.2 possui comportamentos distintos variando-se o valor de seu parâmetro de controle, assim, podemos obter dinâmicas temporais regulares ou caóticas (26, 28). O mapa de Ikeda é utilizado para descrever o comportamento da luz dentro de uma cavidade (28). Na figura 3.2 (a) temos a evolução temporal (eixo vertical) da variável η_i (após um tempo transiente) do mapa de Ikeda 3.2 para $a = 0,61$ (comportamento periódico). O eixo horizontal representa janela temporal $M=840$. Note que para estes parâmetros o mapa apresenta período 4 (quatro).

^ado inglês *recurrence plot*

^bdegrau

^cpor exemplo, preto para recorrente (uns) e branco para não recorrente (zeros)

Figura 3.2: Matriz de recorrência da variável η_i para o mapa de Ikeda com $a = 0,61$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a sua respectiva matriz de recorrência para $\varepsilon=0,05$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada. Os pontos escuros representam $RP_{i,j}=1$ (estado recorrente) e os claros $RP_{i,j}=0$ (estados não recorrentes) para a série temporal de η_i .



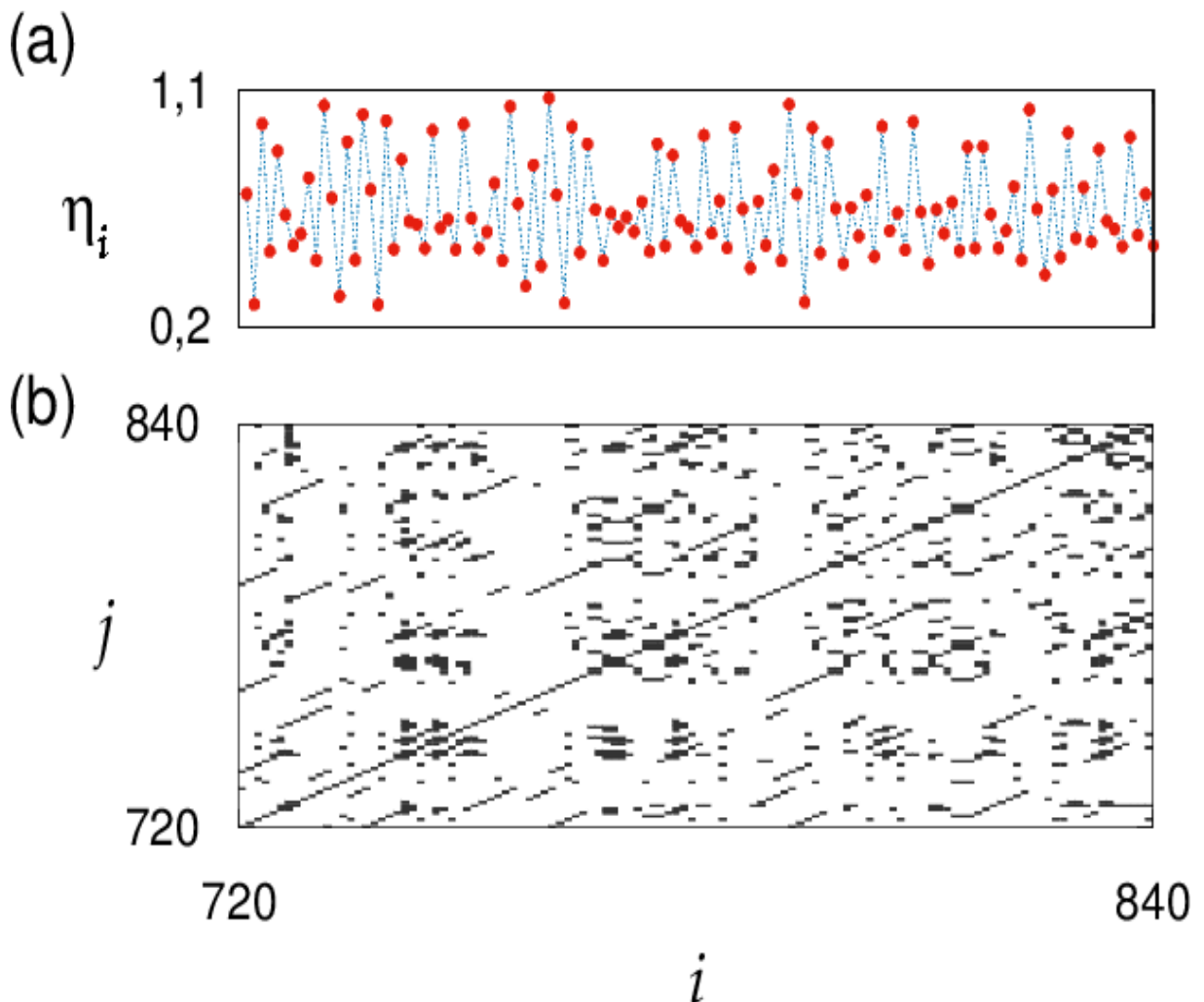
Fonte: O autor

A figura 3.2 (b) representa o $RP_{i,j}$ calculado a partir da variável η_i para o raio de retorno $\varepsilon=0,05$. Para obter esta figura comparamos os valores de η_i e η_j ($i, j = 720, 721, \dots, M$). Por exemplo, a primeira linha vertical a esquerda representa η_{720} comparada com diferentes η_j . Observe a periodicidade do mapa que para múltiplos do número 4 (quatro) ocorre a recorrência de η_{720} ($RP_{720,j} = 1, j = 720, 724, 728, \dots$). O $RP_{i,j}$ é obtido variando-se os índices i e j na equação 3.1. Assim, os pontos escuros na matriz $RP_{i,j}$ indicam a recorrência da variável analisada. Já os pontos claros, de forma contrária ao que foi dito acima, referem-se a não existência de correlação entre η_i e η_j .

Conforme mencionamos a pouco, o mapa de Ikeda pode apresentar ricos comporta-

mentos dinâmicos através da variação do parâmetro de controle a (26). Na figura 3.3 temos a evolução temporal da variável η_i e o seu respectivo gráfico de recorrência $RP_{i,j}$. Para $a = 0,71$ o mapa de Ikeda (equação 3.2) apresenta comportamento irregular. Observando a figura 3.3 (a) torna-se difícil identificar padrões de regularidade visual. Esta figura mostra que não existe (ou existe pouca) correlação entre os instantes de tempos em que observamos a variável η_i . Os pontos existentes na figura 3.3 (b), na maioria das vezes, devem-se ao valor de ε utilizado. Desta forma, podemos calibrar o raio de recorrência ε conforme os dados a nossa disposição.

Figura 3.3: Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\varepsilon=0,05$ e $M=840$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$).



Fonte: O autor

A dependência da matriz de recorrência com o valor do raio de recorrência (ou retorno) pode parecer a princípio “estranho”, ou seja, parece que “forçamos” a recorrência do sistema conforme o valor de ε que escolhemos. No entanto, o próprio teorema da recorrência de Henri

Poincaré fala sobre uma “vizinhança arbitrária”: Em um sistema possuindo energia finita e confinado em um volume finito, após um tempo suficientemente longo, retorna para uma vizinhança arbitrariamente pequena de quase qualquer estado inicial dado a não ser por um conjunto de medida nula (29). O conjunto de medida nula contém as condições iniciais que leva o sistema a trajetórias “erráticas” ou “anormais” (26, 29). Além disso, dependendo do período que o sistema possui, do raio de retorno, ou ambos, o tempo de recorrência pode ser muito longo, por exemplo, maior que a idade do Universo conhecido.

Observando a figura 3.3 (b) notamos a formação de linhas paralelas à diagonal principal. Estas linhas ocorrem quando $RP_{i+k,j+k} = 1$ (para $k = 1, \dots, l$) onde l é o tamanho da linha diagonal. Desta forma, elas indicam comportamentos similares em diferentes intervalos de tempo. Já as linhas verticais (ou horizontais) estão relacionadas à estacionariedade da série temporal para algum intervalo de tempo. Desta forma, linhas verticais (v) indicam que houve pouca (ou nenhuma) mudança de comportamento por um período de tempo correspondente ao comprimento destas linhas.

3.2 Ferramentas de Recorrência

A matriz de recorrência foi inicialmente introduzida na literatura para detectar a não linearidade e eventuais dinâmicas caóticas em sinais experimentais (30). Eckmann, utilizando o teorema da recorrência de Poincaré, introduziu a matriz de recorrência para estudar sistemas dinâmicos (31). Ele denominou os padrões obtidos no $RP_{i,j}$ em tipologia e textura. A tipologia está ligada aos padrões em larga escala referindo-se mais ao aspecto visual da matriz de recorrência (por exemplo, figuras 3.2 (b) e 3.3 (b)). Já a textura refere-se aos padrões em curta escala contidos no $RP_{i,j}$ como, por exemplo, densidade de pontos, comprimentos das linhas, etc. A seguir apresentaremos as principais ferramentas obtidas através na análise dos padrões em curta escala.

3.2.1 Taxa de Recorrência

Além dos aspectos visuais fornecidos pela tipologia, que podem ser subjetivos e levar a diferentes interpretações sobre o comportamento do sistema, podemos retirar informações quantitativas através das estruturas presentes na matriz de recorrência, via análise em pequena escala. Desta forma, podemos obter maior coesão em nossas conclusões a respeito dos dados em estudo. Uma primeira quantidade, taxa de recorrência (RR)^d, refere-se a densidade de pontos

^ddo inglês *recurrence rate*

recorrentes existentes no $RP_{i,j}$ e pode ser definida pela seguinte expressão matemática:

$$RR = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M RP_{i,j}. \quad (3.3)$$

A taxa de recorrência representa a relação entre os pontos recorrentes no $RP_{i,j}$ e o total de pontos da matriz quadrada $i \times j = M^2$, ou seja, a taxa de recorrência (RR) calcula a densidade de pontos recorrentes presentes no $RP_{i,j}$. Esta medida pode ser utilizada para detectar alterações em sistemas dinâmicos (30). Isso fica claro quando comparamos as figuras 3.2 (b) e 3.3 (b) pois estas figuras referem-se a duas séries temporais distintas.

Os pontos contabilizados na taxa de recorrência incluem tanto os isolados (dispersos) quanto os que formam alguma espécie de estrutura no $RP_{i,j}$. Logo, a taxa de recorrência é uma medida de proporcionalidade entre os pontos recorrentes e o total de pontos esperados na matriz de recorrência. Os pontos isolados, geralmente, estão relacionados à ocorrência de eventos atípicos ou raros na série analisada. Altos valores (próximos da unidade) na taxa de recorrência indicam altas probabilidades de ocorrência do mesmo estado em tempos distintos (32).

3.2.2 Determinismo

Outra informação quantitativa retirada da matriz de recorrência é determinismo (DET)^e que está relacionado a presença de linhas diagonais (l) no $RP_{i,j}$. Estas linhas estão ligadas a previsibilidade do sistema. O DET pode ser definido pela seguinte equação:

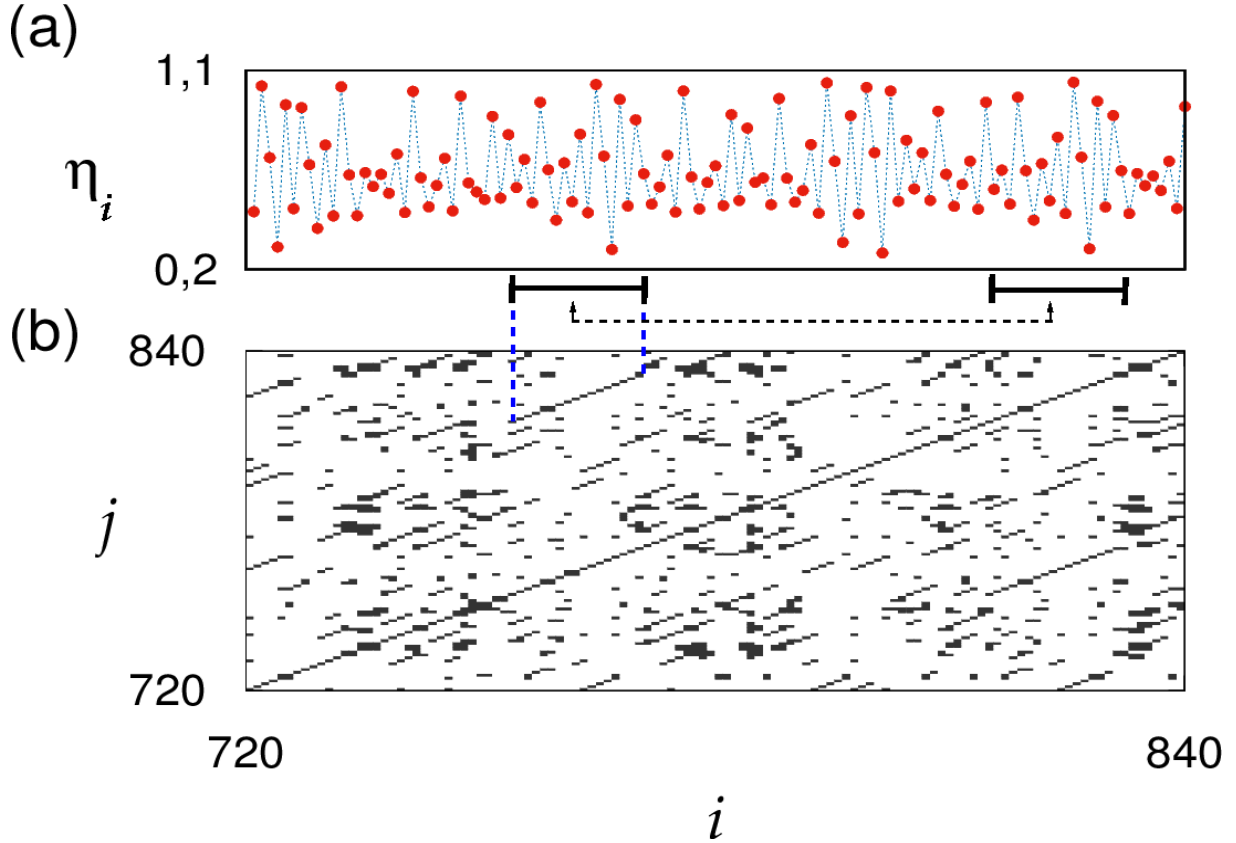
$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^M lP(l)}{\sum_{l=1}^M lP(l)}, \quad (3.4)$$

onde l é o tamanho (ou comprimento) da linha diagonal, $P(l)$ é a probabilidade de encontrarmos uma linha diagonal de tamanho l e o comprimento mínimo (tamanho de corte) é representado por $l_{min} = 2$. As linhas diagonais ocorrem quando um seguimento retorna paralelamente o outro durante um intervalo de tempo. Esse intervalo possui comprimento l .

Assim, o tamanho destas linhas diagonais indica a duração, com comportamento similar, da série temporal da variável dinâmica. Na figura 3.4 temos um exemplo de comportamentos que se repetem em intervalos de tempos distintos. Nesta figura utilizamos novamente o mapa de Ikeda, equação 3.2, para o parâmetro de controle $a = 0,71$.

^edo inglês *determinism*

Figura 3.4: Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\varepsilon=0,05$ e $M=840$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$). Nesta figura destacamos comportamentos similares em diferentes intervalos de tempos.



Fonte: O autor

Na figura 3.4 (b) destacamos uma linha diagonal que se refere ao intervalo de tempo em que a série temporal apresenta comportamento similar. Note que existem outras linhas diagonais de diferentes comprimentos. Assim, a probabilidade ($P(l)$) é a razão entre a quantidade de linhas com comprimento l pelo total de linhas diagonais no $RP_{i,j}$.

3.2.3 Laminaridade

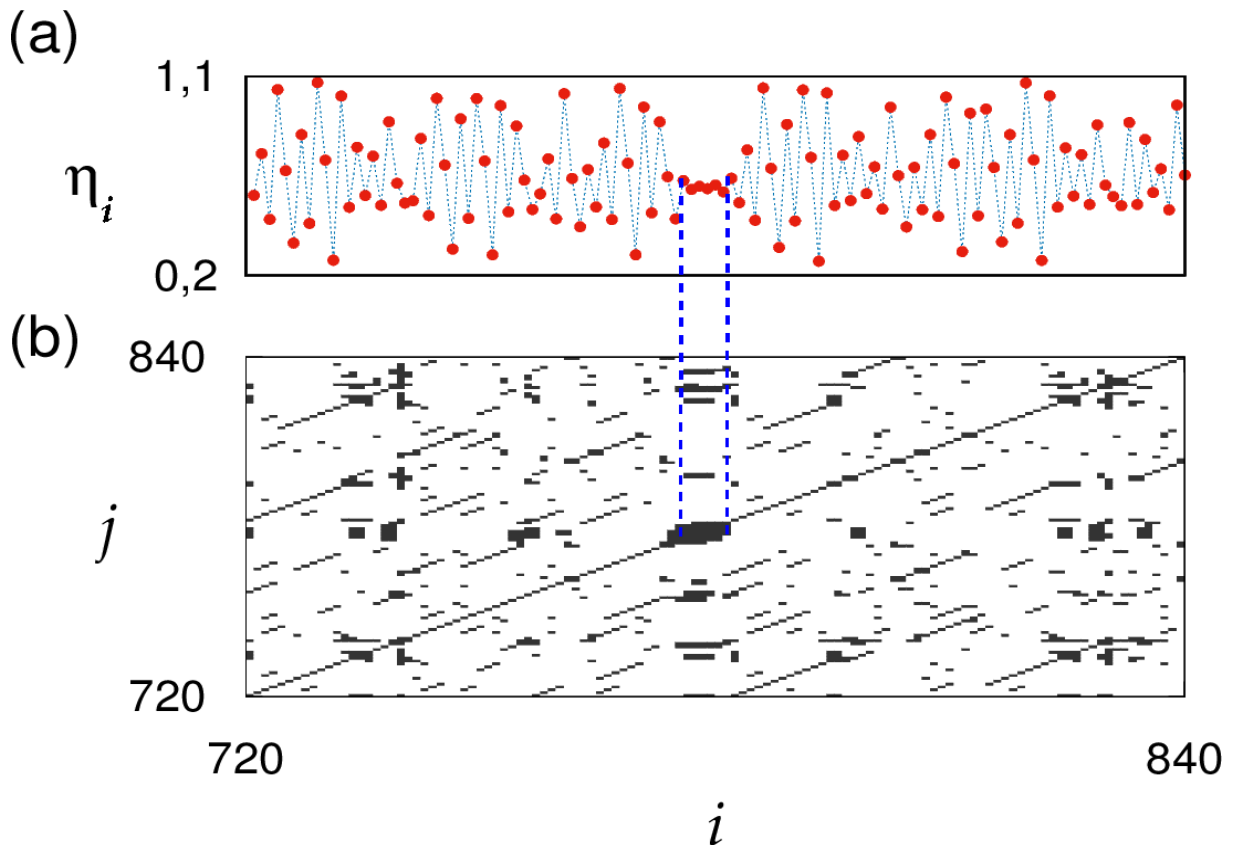
Uma terceira informação quantitativa, a laminaridade (LAM)^f, é obtida pela análise das linhas verticais (ou horizontais) existentes no $RP_{i,j}$ e definida conforme a expressão:

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^M vP(v)}{\sum_{v=1}^M vP(v)}, \quad (3.5)$$

^fdo inglês *laminarity*

onde a variável v representa o comprimento das linhas verticais (ou horizontais), $P(v)$ a sua probabilidade de ocorrência e v_{min} é o menor comprimento (tamanho de corte) destas linhas. Geralmente utiliza-se $v_{min} = l_{min} = 2$ como menor comprimento das linhas verticais (ou horizontais) e diagonais. A laminaridade (LAM) fornece informações sobre a estacionariedade da série temporal. Na figura 3.5 temos um exemplo de formação de linhas horizontais para a série temporal do mapa de Ikeda.

Figura 3.5: Matriz de recorrência para a variável η_i do mapa de Ikeda com $a = 0,71$. Em (a) temos a variável dinâmica η_i . Em (b) a matriz de recorrência para o raio de retorno $\varepsilon=0,05$ e $M=840$. Os índices i e j referem-se ao tamanho da série analisada ($i, j = 720, 721, \dots, M$). Nesta figura destacamos a mais evidente região laminar que indica pouca (ou nenhuma) mudança de comportamento durante o intervalo de comprimento v .



Fonte: O autor

Na figura 3.5 (b) as linhas verticais (ou horizontais) indicam que a variável sofre pouca (ou nenhuma) mudança para alguns intervalos de tempo, ou seja, estas linhas indicam a estacionariedade do sistema por determinado período de tempo (30). O comprimento v indica o intervalo de tempo em que o sistema permaneceu inalterado ou que as mudanças de comportamento não foram significativas. Note a correspondência evidência da pela linha azul pontilhada na figura 3.5 entre a série temporal e o seu respectivo $RP_{i,j}$. Podem existir diversos tamanhos

de linhas verticais no gráfico de recorrência. Assim, a probabilidade ($P(v)$) é a razão entre a quantidade de linhas com comprimento v pelo total de linhas verticais existentes no $RP_{i,j}$.

Outro aspecto que merece ser destacado com relação a figura 3.5 refere-se a presença de um “bloco” no $RP_{i,j}$ relativo a região de estacionariedade da série. Note que o comportamento mostrado na figura 3.5 (a) é semelhante ao perfil espacial de uma rede que exhibe estados quimera. Assim, podemos utilizar os blocos existentes na matriz de recorrência para determinar a região coerente e os pontos dispersos a região incoerente. Neste sentido ao invés de usarmos a série temporal, como temos feito até o momento, utilizaremos a recorrência espacial para caracterização de comportamentos em sistemas acoplados. Este será o objetivo do próximo capítulo.

4 *Osciladores de Kuramoto*

Sistemas dinâmicos acoplados, em rede, têm sido utilizados para modelar osciladores biológicos, comportamentos sociais, mídia excitável, sistemas neurais, controle genético e outros sistemas auto-organizados (33). Tratando-se de sistemas acoplados, a dinâmica coletiva depende fortemente do alcance e intensidade do acoplamento (3, 12). Neste capítulo trabalharemos com uma classe de comportamento dinâmico que pode vir a surgir em sistemas acoplados: coexistência espacial de coerência e incoerência. Assim os estados quimera serão interpretados via a utilização da matriz de recorrência espacial. Além disso, nossos resultados mostram que o gráfico de recorrência espacial pode auxiliar no diagnóstico para o estudo de comportamento sincronizado e/ou dessincronizado (13).

4.1 Estados Quimera via Matriz de Recorrência

No capítulo 2 introduzidos a ideia de estados quimera em osciladores acoplados. Naquela ocasião, para osciladores de fase de Kuramoto, fixamos a intensidade de acoplamento e o parâmetro de fase de Sakaguchi. Assim, mostramos algumas formas de acoplamentos possíveis por meio dos quais podemos obter a coexistência de estados. O acoplamento não local possui diversas aplicações em diferentes campos da ciência (12). Assim, nosso sistema de estudo consiste em N osciladores de fase acoplados, de forma não local, onde a fase (ϕ_i) do i -ésimo oscilador evolui conforme a equação diferencial:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{2p} \sum_{j=i-p}^{i+p} \sin[\phi_i - \phi_j + \alpha_S], \quad (4.1)$$

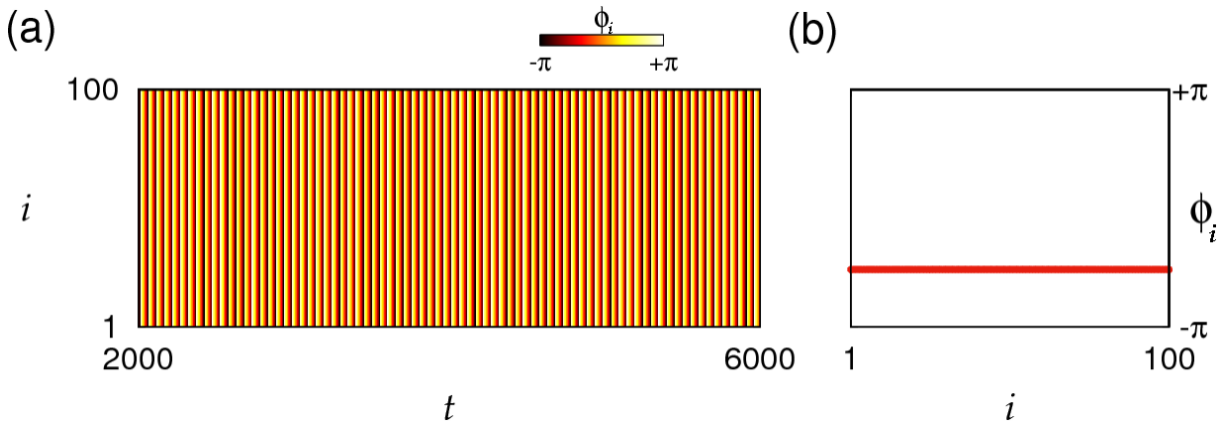
onde ϕ_i é a fase do i -ésimo sítio da rede e a variável ω_i representa a frequência natural do sistema que pode ser definida como nula ($\omega_i=0$, osciladores idênticos) (3). A constante de conexão p indica o alcance^a do acoplamento e a variável α_S representa o parâmetro de fase de Sakaguchi (17). Lembrando que o sistema representado pela expressão 4.1 possui condição de contorno

^aquantidade de vizinhos conectados, de ambos os lados, no i -ésimo elemento

periódica, ou seja, $N + i = i$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

A solução numérica é obtida através do método de Runge-Kutta 4ª-ordem com passo fixo de integração ($h = 0,025$). Observe que na equação 4.1 podemos ter desde um acoplamento puramente local (primeiros vizinhos conectados ao i -ésimo elemento) até acoplamento global (todos conectados com todos) variando-se o valor do alcance p . Como exemplo, temos na figura 4.1 o comportamento dinâmico obtido da equação 4.1 para um valor de alcance intermediário de acoplamento, $\alpha_S=1,37$ e as condições iniciais, para os osciladores de fase, são dadas pela expressão 2.4.

Figura 4.1: Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto acoplados. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e (b) representa o seu perfil espacial da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ_i a sua fase. Parâmetros: $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,37$.

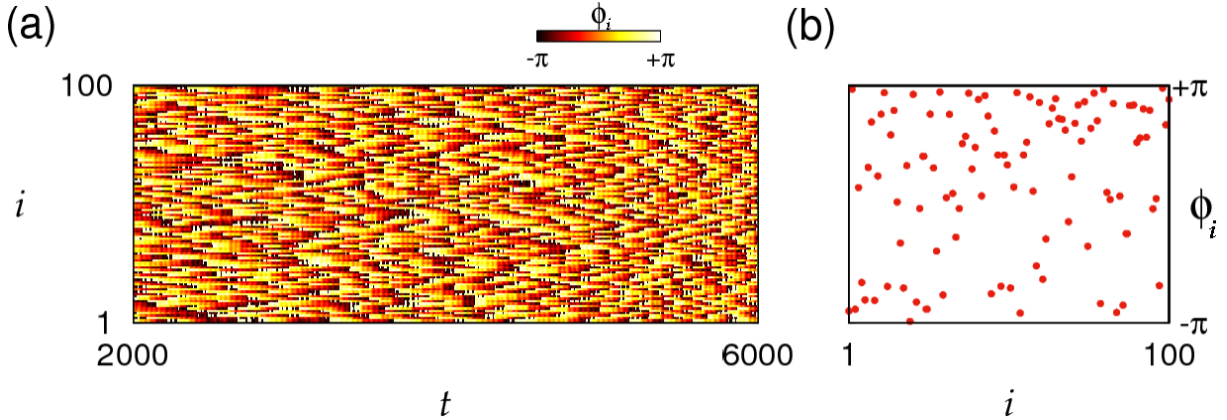


Fonte: O autor

Na figura 4.1 a variável ϕ_i representa a fase do i -ésimo oscilador. Nessa figura, em (a) nota-se que o comportamento dos elementos da rede é completamente sincronizado (sincronização de fase). Logo, em todos os instantes de tempo t o sistema, como um conjunto, possui o mesmo comportamento dinâmico. Note na figura 4.1 (b), que indica as fases dos osciladores em um instante de tempo t qualquer, ou seja, temos um comportamento coletivo dos nós (elementos da rede). Assim, temos uma sincronização de fases para os parâmetros acima utilizados.

Um outro exemplo de comportamento dinâmico encontra-se na figura 4.2. Aqui novamente utilizamos uma rede composta por 100 (cem) osciladores ($N = 100$), alcance de acoplamento $p=0,35N$ e aumentamos o valor do parâmetro de Sakaguchi ($\alpha_S=1,57$).

Figura 4.2: Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto acoplados. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e (b) representa o seu perfil espacial que evidência a falta de um comportamento coletivo da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores na rede e ϕ_i suas respectivas fases. Demais parâmetros: $\alpha_S=1,57$ e $p=0,35N$.

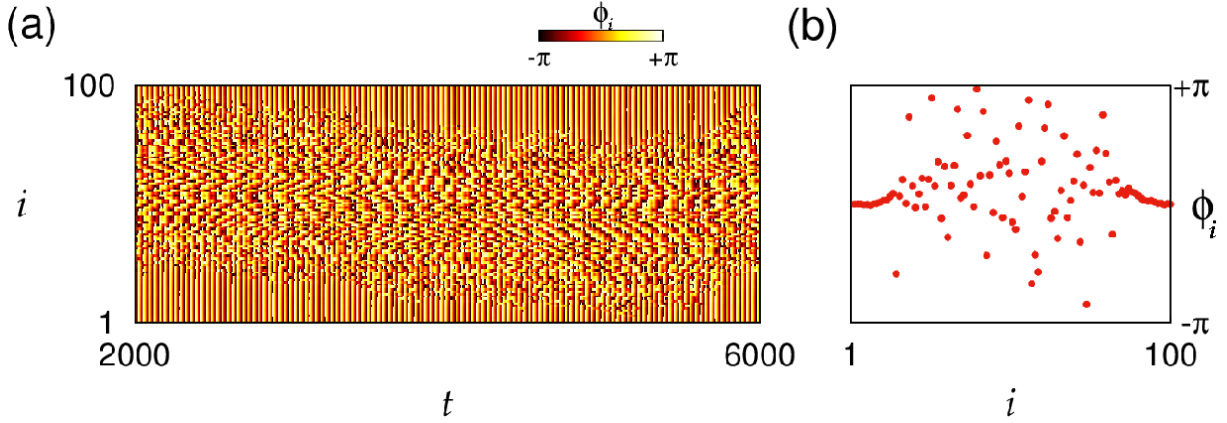


Fonte: O autor

Na figura 4.2 (a) temos a evolução temporal de todos os N -osciladores. Neste caso, nota-se que a rede é espacialmente incoerente, ou seja, os osciladores não possuem um comportamento coletivo. Observe que as fases (ϕ_i), indicadas pela escala de cores, mudam de sítio para sítio a medida que o tempo evolui. Esse ponto pode ser melhor evidenciado se olharmos para a figura 4.2 (b) onde nota-se que as fases encontram-se distribuídas aleatoriamente no intervalo $[-\pi, \pi]$. Nesse caso, o perfil espacial das fases (ϕ_i) dos i -ésimos osciladores exemplifica a completa perda de coerência espacial na rede.

No entanto, há a possibilidade de um terceiro comportamento dinâmico emergir no sistema descrito pela equação 4.1. Neste sentido, podemos obter a coexistência espacial dos comportamentos obtidos, individualmente, nas figuras 4.1 e 4.2. Assim, para algum valor intermediário do parâmetro de fase ($1,37 < \alpha_S < 1,57$), mantendo-se fixos a quantidade de osciladores (N) e o alcance do acoplamento (p) é possível o surgimento de estados quimera na rede descrita pela equação 4.1. Desta forma, uma parte do sistema possui sincronização completa, ao passo que, o restante dos osciladores estão dessincronizados entre si e com os demais elementos do grupo sincronizado (região coerente da rede de osciladores). Observe as figuras 4.3 (a) e (b) que representam, respectivamente, a evolução temporal e o perfil espacial dos N -sítios.

Figura 4.3: Evolução espaço-temporal e perfil espacial para $N=100$ osciladores de Kuramoto. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e em (b) o correspondente perfil espacial da rede. A variável t representa o tempo, i a posição dos osciladores e ϕ_i as respectivas fases. Demais parâmetros utilizados: $\alpha_S=1,47$, $p=0,35N$ e condições iniciais através da equação 2.4.



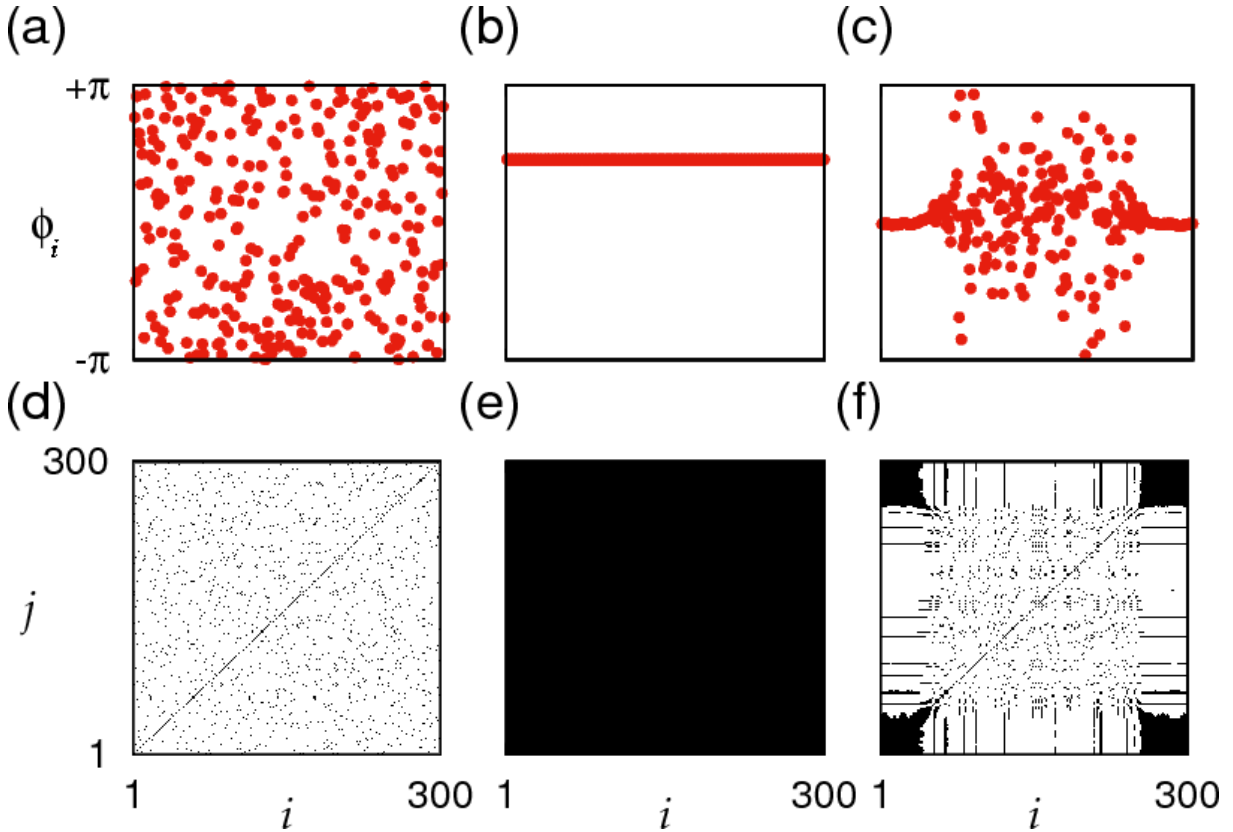
Fonte: O autor

Na figura 4.3 (a) temos a coexistência espacial de estados sincronizados e não sincronizados na rede de osciladores, portanto, temos a existência de estados quimera no sistema regido pela equação 4.1. Observe que próximo aos extremos da rede temos a região sincronizada, ou seja, a região coerente da quimera onde os sítios têm comportamentos similares. As fases (ϕ_i) dos N -elementos é representada pela escala de cores e i indica a posição dos mesmos na rede.

Já na parte incoerente (região central da rede evidenciada na figura 4.3 (b)) não temos um comportamento coletivo dos sítios e nesse caso prevalecem diferentes valores nas respectivas fases (ϕ_i) dos elementos. Assim a figura 4.3 (b) distingue as duas regiões espaciais sendo, por sua vez, uma característica essencial presente em estados quimera: existência de domínios distintos na rede de osciladores (2).

Conforme mencionado, no início deste capítulo, podemos utilizar a matriz de recorrência para diferenciar os três comportamentos dinâmicos que emergem em sistemas acoplados análogos aos exemplificados nas figuras acima. Neste sentido, faremos isso utilizando o perfil espacial dos osciladores acoplados. Assim, ao invés do gráfico da série temporal tratados no capítulo 3, aqui trabalharemos com o gráfico do perfil espacial da rede, ou seja, recorrência espacial trocando M por N na equação 3.1. Na figura 4.4 temos os perfis espaciais para três valores distintos do parâmetro de fase de Sakaguchi (α_S) com as suas respectivas matrizes de recorrência.

Figura 4.4: Gráficos de recorrência espacial e perfis das fases (ϕ_i) para osciladores de Kuramoto. Parâmetros utilizados: quantidade de sítios $N=300$, alcance do acoplamento ($p=0,35N$) e raio de retorno $\varepsilon=0,1$. Em (a) e (d) para $\alpha_S=1,57$. Em (b) e (e) para $\alpha_S=1,37$. Em (c) e (f) para $\alpha_S=1,47$. Os números inteiros i e j representam a posição dos osciladores na rede ($i, j = 1, 2, \dots, N$).



Fonte: O autor

A figura 4.4 (a) exemplifica o comportamento dessincronizado (totalmente incoerente) dos sítios da rede de osciladores de Kuramoto para $\alpha_S=1,57$ e $p=0,35N$. Na figura 4.4 (d) mostramos a respectiva matriz de recorrência para este caso. Note, excluindo a diagonal principal, a existência de pontos dispersos no gráfico de recorrência indicando a falta de sincronização espacial da rede. Na figura 4.4 (b) temos o perfil espacial das fases (ϕ_i) para o parâmetro de Sakaguchi $\alpha_S=1,37$ e $p=0,35N$. Para estes valores de parâmetros temos a sincronização da rede. A figura 4.4 (e) mostra o gráfico de recorrência para a sincronização das fases dos N -osciladores e o preenchimento total (pontos pretos) dessa matriz indica a sincronização completa da rede de osciladores.

Já a figura 4.4 (c), mostramos as fases (ϕ_i) dos osciladores de Kuramoto para $\alpha_S=1,47$ e $p=0,35N$ que, neste caso, apresenta estados quimera. Os elementos nas extremidades representam a região coerente da quimera, ao passo que, os osciladores dessincronizados no centro da figura representam a região incoerente. A figura 4.4 (f) exibe o gráfico de recorrência para

estados quimera. Observando esta figura nota-se que ela é formada por blocos e pontos dispersos. Comparando as figuras 4.4 (c) e (f) fica evidente que os blocos representam as regiões coerentes (domínio sincronizado) e os pontos dispersos referem-se a parte incoerente (domínio dessincronizado) do perfil espacial dos N -osciladores. Assim, formação dos blocos está vinculada a região coerente e os pontos dispersos estão relacionados a região incoerente dos estados quimera.

Desta forma, utilizando a matriz de recorrência podemos identificar diferentes padrões exibidos no perfil espacial de osciladores acoplados. Tomando como base o gráfico de recorrência identificamos 3 (três) comportamentos na rede (13):

- sincronização;
- dessincronização;
- estados quimera.

4.2 Diagnósticos e Colapso dos Estados Quimera

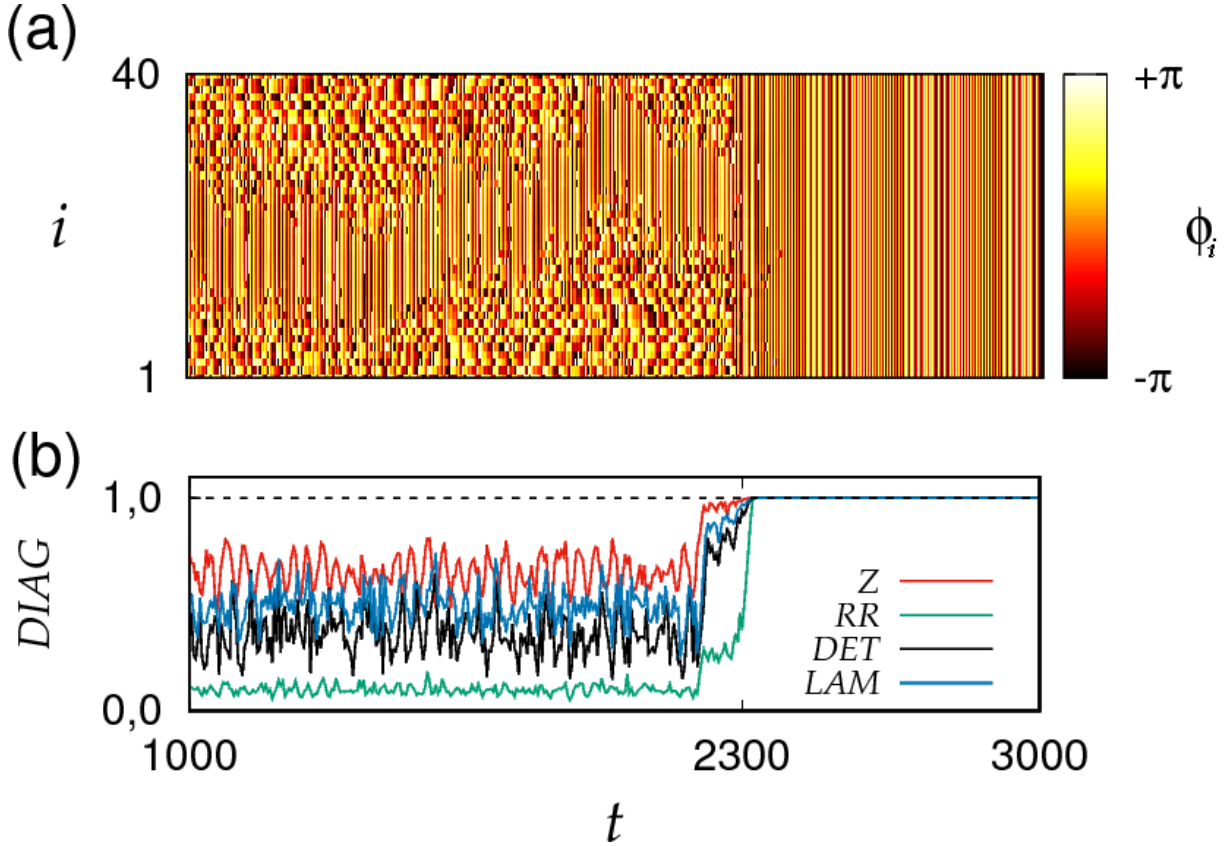
Conforme mostramos na seção anterior para o sistema dado pela expressão 4.1 o surgimento de diferentes comportamentos espaciais está relacionado ao parâmetro de fase de Sakaguchi (α_S) para valores fixos de N e p . Assim, podemos obter estados sincronizados (figura 4.1), dessincronizados (figura 4.2) ou estados quimera (figura 4.3) que se refere a coexistência dos 2 (dois) anteriores.

Para os valores fixos de p e α_S a presença de estados quimera na rede de osciladores de Kuramoto, observados nas figuras 4.3 (a) e (b), depende das condições iniciais^b (equação 2.4). Assim, a coexistência coerente e incoerente pode desaparecer para algum tempo t^* .

Utilizando a matriz de recorrência espacial, conforme descrito anteriormente, podemos detectar a mudança de comportamento nos osciladores. A figura 4.5 mostra o colapso dos estados quimera e uma comparação entre os diagnósticos quantitativos do $RP_{i,j}$ com relação ao parâmetro de ordem global (equação 2.9). Neste caso, após um tempo t^* a rede muda de comportamento e torna-se sincronizada (coerente).

^besta modificação é realizada através da “semente” no gerador randômico do programa

Figura 4.5: Diagnósticos obtidos da matriz de recorrência ($RP_{i,j}$) e parâmetro de ordem global. Na figura (a) temos a evolução temporal das fases (ϕ_i), t representa a variável temporal e i a posição do oscilador na rede. Na figura (b) a variável Z representa o parâmetro de ordem global (equação 2.9), RR (taxa de recorrência), LAM (laminaridade) e DET (determinismo). $N=40$, $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,47$.



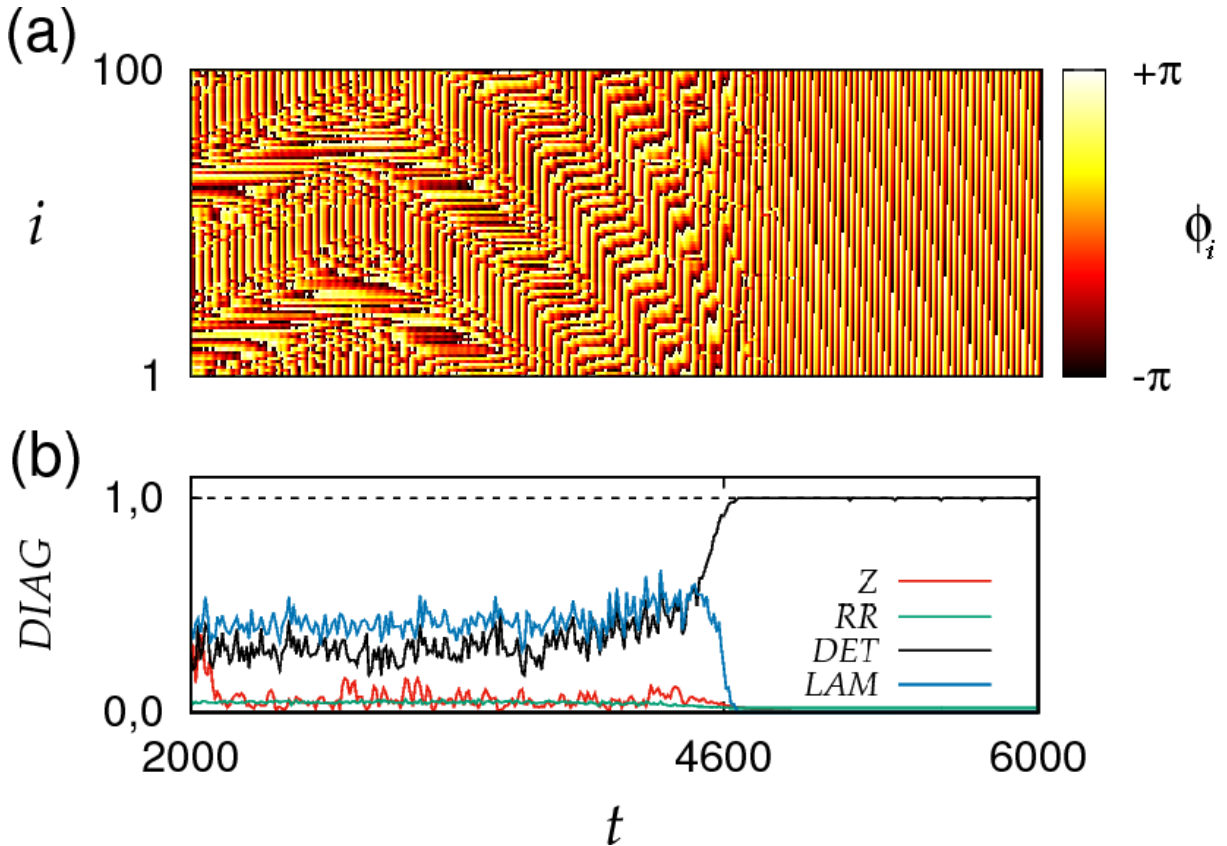
Fonte: O autor

Na figura 4.5 (b) obtemos o comportamento temporal dos seguintes diagnósticos ($DIAG$): parâmetro de ordem global (Z) (equação 2.9), taxa de recorrência (RR), determinismo (DET), laminaridade (LAM) para $N=40$, $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,47$. Para esses parâmetros a rede exibe estados quimera que eventualmente podem sofrer colapso. Observe, na figura 4.5 (a), a mudança de comportamento dinâmico ocorrida para $t \approx 2,3 \times 10^3$. Nesse caso, o sistema passa de um estado, inicialmente, com a presença de estados quimera para um caso de sincronização de fase. Note que todos diagnósticos tendem a unidade quando ocorre o colapso dos estados quimera, ou seja, esses diagnósticos determinam a mudança do comportamento do sistema.

Outro caso de colapso de estados quimera encontra-se na figura 4.6 (a) para $N=100$ osciladores acoplados conforme a equação 4.1. Nesta figura, percebe-se que após $t \approx 4,6 \times 10^3$ a rede passa a exibir sincronização. Neste caso, o determinismo é o único diagnóstico que tende a unidade ($DET \rightarrow 1$). Aqui, diferentemente do caso anterior, a rede exibe uma sincronização das frequências (os N -osciladores possuem a mesma taxa de variação temporal das fases (ϕ_i))

após o colapso dos estados quimera.

Figura 4.6: Diagnósticos para $N=100$, $p=0,25N$ e $\alpha_S=1,47$. A variável t representa a variável temporal e i a posição espacial dos osciladores de fase. Na figura (a) temos evolução das fases (ϕ_i) dos osciladores. Na figura (b) a variável Z representa o parâmetro de ordem global, RR (taxa de recorrência), LAM (laminaridade) e DET (determinismo).



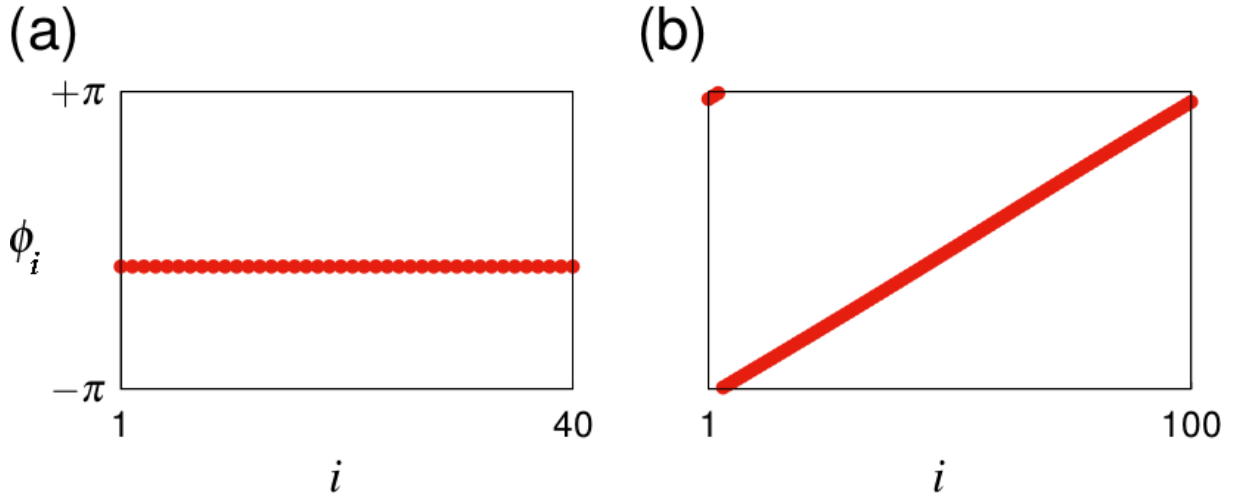
Fonte: O autor

A mudança de comportamento, mostrada na figura 4.6 (a), implica em uma vantagem no uso das ferramentas de recorrência ($RP_{i,j}$), especificamente o determinismo (DET) sobre o parâmetro de ordem global (Z) quando analisamos o colapso dos estados quimera. Assim, o determinismo é o único diagnóstico que detecta as 2 (duas) mudanças no comportamento dinâmico da rede após o colapso dos estados quimera tanto para a sincronização de fase ou de frequência.

Sendo assim, o determinismo identifica o colapso dos estados quimera em ambos os casos: sincronização de fase ou frequência. Podemos dizer que, para o sistema regido pela equação 4.1, os comportamentos observados nas figuras 4.5 (a) e 4.6 (a) possuem comportamento transiente (11, 13). No entanto, a análise através dos gráficos de recorrência identificam o colapso dos estados quimera para ambos os casos aqui analisados. Os perfis espaciais, após a

mudança no comportamento coletivo da rede, estão plotados na figura 4.7 para maior clareza.

Figura 4.7: Perfis espaciais após colapso dos estados quimera para $\alpha_S=1,47$. A variável ϕ_i representa a fases e i a posição espacial dos osciladores na rede. Em (a) temos $N=40$ e $p=0,35N$. Em (b) utilizamos $N=100$ e $p=0,25N$.



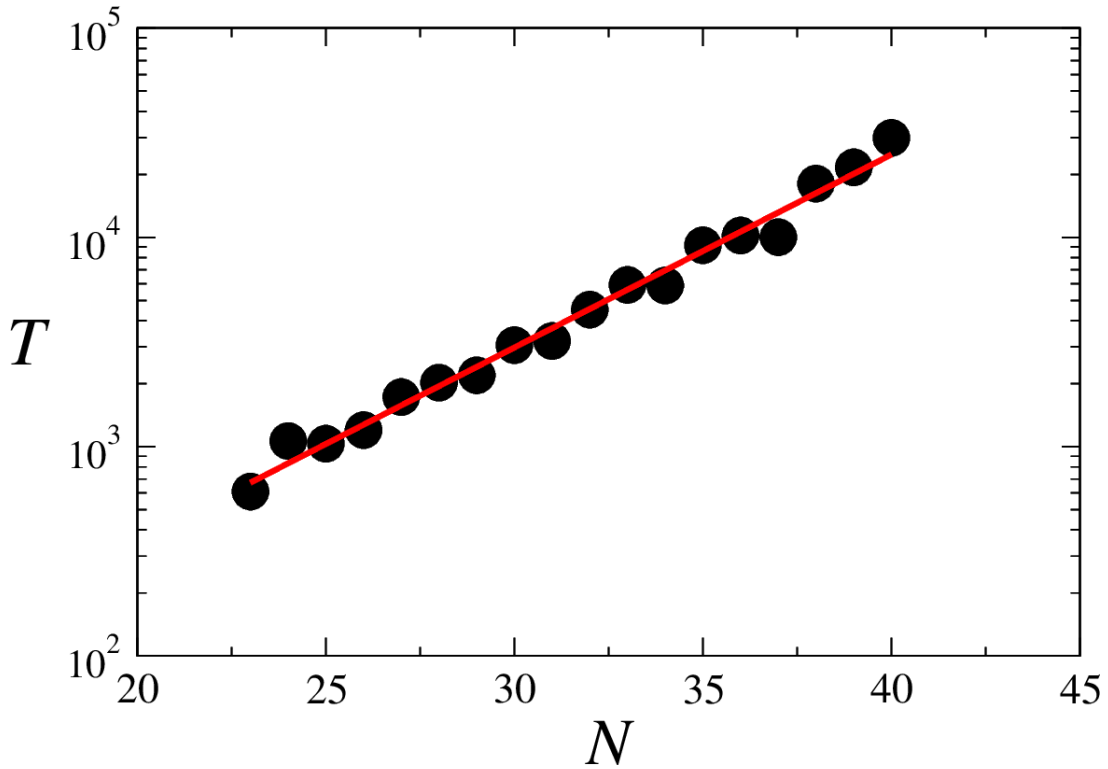
Fonte: O autor

Na figura 4.7 temos o perfil espacial do osciladores, após o colapso dos estados quimera, para 2 (dois) valores de N (tamanho da rede) e valor fixo do parâmetro de fase ($\alpha_S=1,47$). Na figura 4.7 (a) utilizamos 40 (quarenta) osciladores e $p=0,35N$ na equação 4.1. Nesta figura nota-se a sincronização de fase entre os sítios da rede após o colapso dos estados quimera. A figura 4.7 (b) mostra o comportamento espacial dos sítios da rede após o colapso dos estados quimera. Neste caso, utilizado 100 (cem) sítios e $p=0,25N$, temos a sincronização de frequência dos N -osciladores acoplados após a súbita mudança de comportamento espaço-temporal.

Assim, se a rede exibe estado quimera e, posteriormente, sofre colapso do mesmo, podemos ter duas formas de comportamento coletivo a partir do desaparecimento dos domínios híbridos. No caso de sincronização de fase temos que todos os diagnósticos tendem a 1 (unidade) ($DIAG \rightarrow 1$) e a utilização das ferramentas de recorrência (RR , DET e LAM) e parâmetro de ordem global (Z) (equação 2.9) são muito similares na detecção da mudança de comportamento: estados quimera para sincronização de fase. Por outro lado, para uma sincronização de frequência, pós colapso dos estados quimera, isso já não se aplica. Quando temos a sincronização de frequência notamos que o determinismo tende a unidade ($DET \rightarrow 1$), ao passo que, o parâmetro de ordem global (Z), assim como RR e LAM , tende a zero ($Z \rightarrow 0$). Logo, o determinismo é o único diagnóstico, dentre os 4 (quatro) apresentados que detecta os dois tipos de sincronização. Desta forma, o DET será utilizado para o cálculo do tempo de vida dos estados quimera para diferentes valores de N , uma vez que, as figuras 4.5 e 4.6 mostram que o tempo

de colapso tem uma dependência com a quantidade de osciladores.

Figura 4.8: Tempo médio de colapso dos estados quimera (T) em função do tamanho rede (N) para 2×10^3 (duas mil) condições iniciais distintas (equação 2.4), $p=0,35N$ e $\alpha_S=1,47$. Os pontos indicam os resultados numéricos e a linha representa o ajuste exponencial. O eixo vertical encontra-se em escala logarítmica.



Fonte: O autor

A figura 4.8 mostra o tempo médio de colapso dos estados quimera (T) em função do tamanho da rede (N). Nesta figura utilizamos 2×10^3 (duas mil) condições iniciais distintas, dadas conforme a equação 2.4, para cada valor de N . Logo, os pontos (na cor preta) referem-se aos resultados da simulação numérica e a linha (na cor vermelha) ao ajuste exponencial dos dados obtidos. Os resultados mostram um crescimento exponencial do tempo de vida média dos estados quimera conforme aumenta-se o tamanho da rede de osciladores.

Desta forma, utilizando o determinismo como diagnóstico para detectar o colapso dos estados quimera, no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), a coexistência de domínios híbridos, obtida via a equação 4.1, deixa de apresentar a característica transiente e a mesma passa a configurar em estado permanente. Essa característica pode ser expressa pela seguinte regressão,

$$T \approx e^{0,21N}. \quad (4.2)$$

Assim, os estados quimera, obtidos através da equação 4.1 para $\alpha_S=1,47$ e $p=0,35N$, possuem comportamento transiente que dependem de forma exponencial do tamanho da rede.

Enfatizamos, que o gráfico de recorrência espacial pode ser utilizado como uma técnica para a caracterização de estados quimera em redes de osciladores acoplados não se limitando ao caso aqui estudado. Ou seja, para sistemas acoplados, uma vez caracterizada a existência de estruturas (blocos) e pontos dispersos na matriz de recorrência espacial podemos inferir a coexistência de estados híbridos na rede. Onde os blocos referem-se a região coerente (parcela de osciladores sincronizados) e os pontos dispersos estão relacionados à região incoerente (parcela dessincronizada) da rede.

Além disso, os diagnósticos quantitativos, provenientes do gráfico de recorrência espacial, podem auxiliar na investigação sobre a existência de estados quimera com a vantagem sobre o parâmetro de ordem global quando a rede passa a exibir sincronização de frequência no cenário após o colapso. Os resultados deste capítulo encontram-se publicados na referência (13). Nos próximos capítulos utilizaremos as ideias aqui desenvolvidas para o estudo da matriz de conectividade neuronal do gato. Aplicaremos a técnica da matriz de recorrência espacial no estudo deste sistema neuronal.

5 *Modelo Neuronal*

Um dos maiores desafios da neurociência é compreender os mecanismos e estruturas que influenciam a atividade neuronal no cérebro dos mamíferos (34). O córtex cerebral humano é considerado, muitas vezes, o mais cognitivo dentre os mamíferos e muito maior que o esperado para um animal com o nosso tamanho corporal (35), ou seja, nós possuímos um dos mais complexos sistemas cerebrais de todos os vertebrados sendo que um humano adulto possui cerca de $86,1 \pm 8,1$ bilhões de neurônios. A extrema quantidade e complexidade nas conexões cerebrais demanda poder computacional, portanto, existem poucos resultados para um grupo pequeno de espécies animais (35).

5.1 Dinâmica de Disparos Neurais

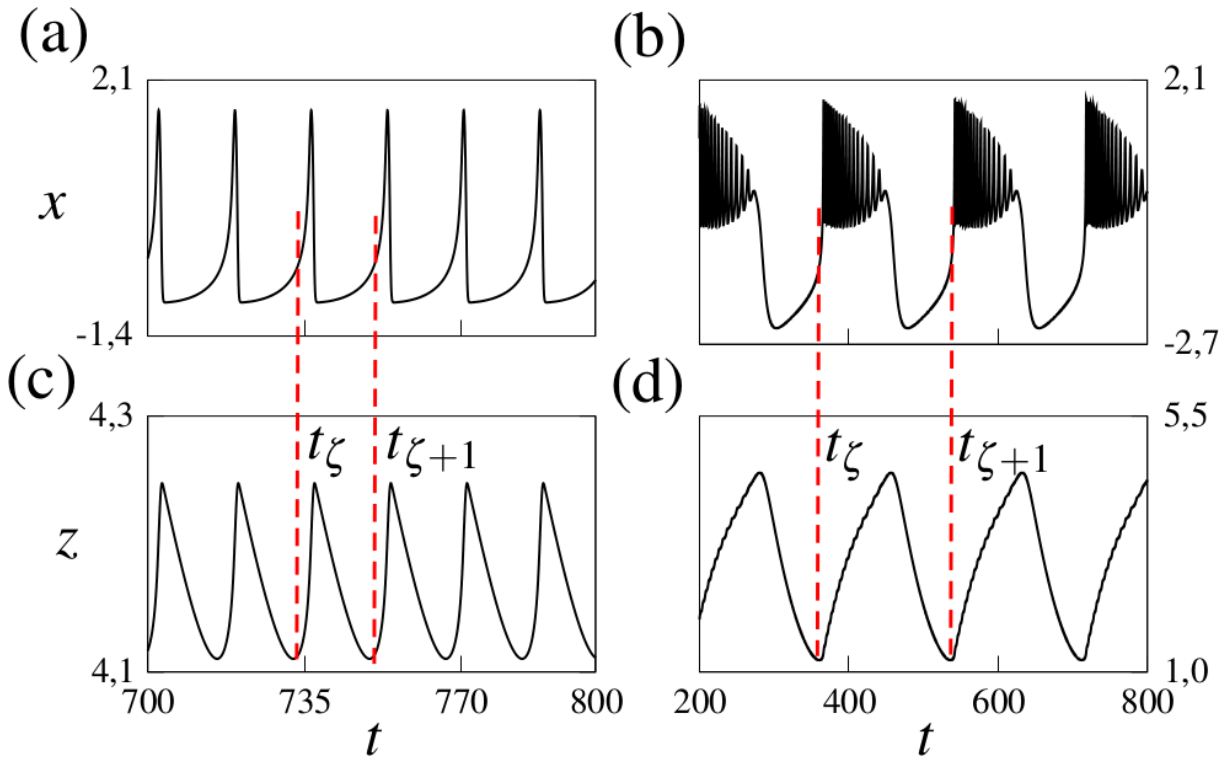
Neurônios são entes biológicos fundamentais do sistema nervoso central responsáveis pelo armazenamento, transmissão e processamento de informações no cérebro. Essas ocorrem através de sinapses nervosas que podem ser da forma elétrica ou química. A sinapse elétrica identifica-se por meio de uma troca de íons (corrente iônica) através da membrana celular, por outro lado, a química ocorre devido a presença de substâncias mediadoras (neurotransmissores) (36). A dinâmica individual de neurônios pode ser modelada através de mapas, autômatos celulares ou equações diferenciais. Para o estudo de estados quimera utilizaremos o modelo de equações diferenciais para disparos neuronais proposto por Hindmarsh-Rose (37, 38). Este modelo pode ser descrito pelo conjunto de 3 (três) equações adimensionais:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^3 + bx^2 + I_0^* - z, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \frac{dz}{dt} &= \mu [s(x - x_{\text{rest}}) - z],\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde temos as seguintes parâmetros: corrente externa (I_0^*), frequência de disparos (b), adaptação (s), controle de variação da corrente lenta (μ), potencial de repouso (x_{rest}) (em nossas simulações numéricas fixamos $s=4$, $\mu=0,01$ e $x_{rest}=-1,6$ (20)). Além das variáveis: potencial de membrana (x), corrente rápida (y) de íons sódio (Na^+) ou potássio (K^+) e a corrente lenta (z) do íon cálcio (Ca^{2+}).

O modelo de três equações diferenciais adimensionais, proposto por Hindmarsh-Rose, descreve observações experimentais dos disparos neuronais de um molusco de água doce (*Lymnaea*) (38). Além disso, dependendo do valor da corrente externa (I_0^*) e do parâmetro de controle (b) podemos obter diferentes comportamentos dinâmicos no sistema descrito pelo conjunto de equações 5.1 (39). Assim, o modelo de Hindmarsh-Rose pode apresentar ricos comportamentos. Por exemplo, na figura 5.1 temos dois regimes temporais para o potencial de membrana (x): *spikes*^a e *bursts*^b. Nesta figura utilizamos condições iniciais aleatórias para as variáveis x, y, z .

Figura 5.1: Dinâmica de disparos no modelo neuronal de Hindmarsh-Rose. Em (a) e (c) $I_0^*=4,2$ e $b=3,0$ representando o regime de *spikes*. Em (b) e (d) temos um exemplo do regime de *bursts* para $I_0^*=3,4$ e $b=2,4$. As condições iniciais são aleatórias.



Fonte: O autor

^asequência regular de disparos

^bsequência rápida de disparos seguida por um “longo” período de inatividade

A figura 5.1 (a) representa a evolução temporal do potencial de membrana (x) no regime de *spikes* e na figura 5.1 (b) no regime de *bursts*. O eixo horizontal representa a variável temporal t e o eixo vertical indica o potencial de membrana. A integração numérica foi realizada pelo método de integração Runge-Kutta 4^a-ordem com passo fixo ($h = 0,025$). Observe que os valores do potencial de membrana variam em diferentes intervalos. Na figura 5.1 (a) a variável x pertence ao intervalo $[-14/10, 21/10]$, ao passo que, na figura 5.1 (b) o potencial de membrana está restrito ao intervalo $[-27/10, 21/10]$.

No entanto, note que o valor mínimo da variável z corresponde ao início da atividade neuronal seja *spikes* ou *bursts*. Este aspecto importante diz respeito ao comportamento que será objeto de estudo, ou seja, estamos interessados no início da atividade neuronal: momento em que algum neurônio da matriz cerebral emite um sinal elétrico ou químico. Esse pulso de informações corresponde ao início de um *burst* ou *spike* e, desta forma, marca o começo da neuroatividade.

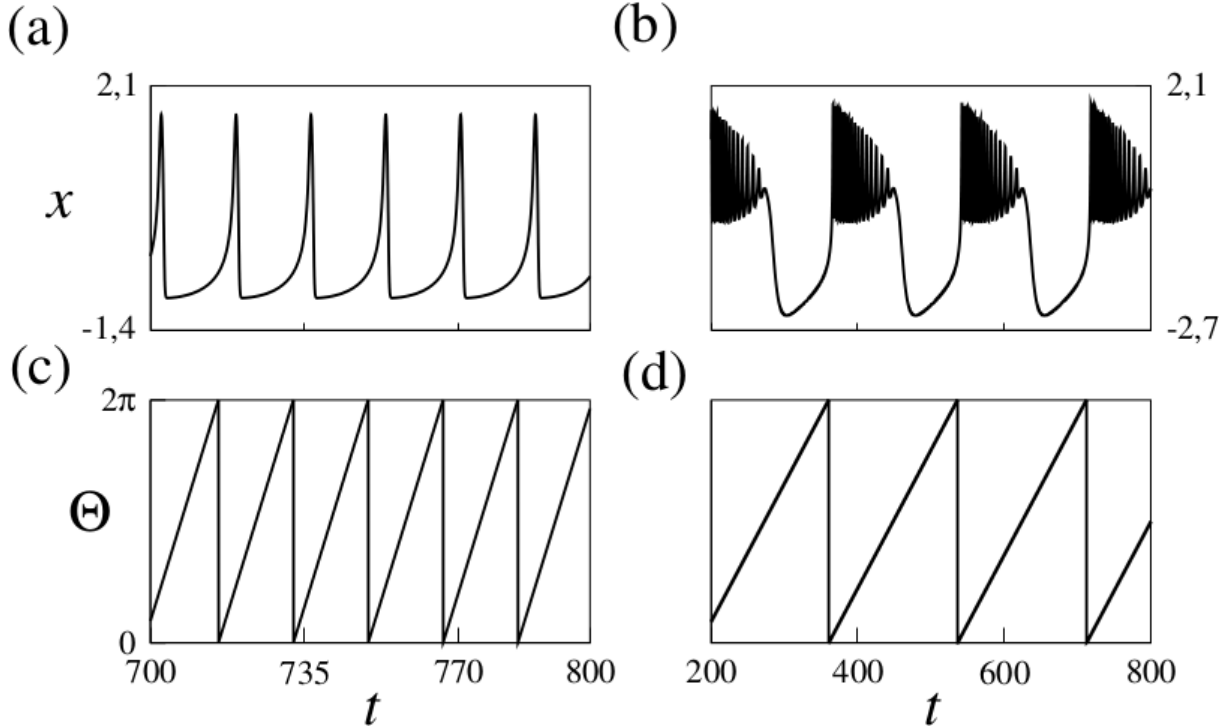
Uma das formas possíveis para monitorar a atividade de disparos neuronais é através de uma medida indireta através do comportamento da variável lenta. Assim, conforme notamos nas figuras 5.1 (c) e (d) o início de um *spike* ou *burst* coincide respectivamente com o mínimo da variável lenta (z) conforme a linha pontilhada destacada na figura 5.1. Portanto podemos definir uma Θ (20, 34):

$$\Theta = 2\pi \left[k + \frac{t - t_\zeta}{t_{\zeta+1} - t_\zeta} \right], \quad (5.2)$$

onde t_ζ é o tempo de disparo do neurônio conforme destacado na figura 5.1, pela linha pontilhada na cor vermelha, que indica o início da atividade neuronal (*burst* ou *spike*). As variáveis inteiras k e ζ representam o número de disparos (ou atividades) de um neurônio ($k, \zeta = 0, 1, \dots$). Para $k = 0$ a variável Θ fica restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Na figura 5.2 mostramos o comportamento dinâmico do potencial de membrana (x) (equação 5.1) e o sua respectiva fase de disparos obtida pela equação 5.2. Utilizamos condições iniciais aleatórias para as variáveis: potencial de membrana (x), corrente rápida (y) e corrente lenta (z). Na figura 5.2 (a) fixamos a intensidade da corrente inicial ($I_0^*=4,2$) e o parâmetro de controle ($b=3,0$) representando o regime de *spikes*. Na figura 5.2 (b) temos um exemplo do regime de *bursts* para os parâmetros: $I_0^*=3,4$ e $b=2,4$. Nas figuras 5.2 (c) e (d) mostramos as respectivas fases (Θ) para os dois tipos de dinâmica.

Figura 5.2: Dinâmica de disparos no modelo neuronal de Hindmarsh-Rose. Em (a) $I_0^*=4,2$ e $b=3,0$ representando o regime de *spikes*. Em (b) temos um exemplo do regime de *bursts* para $I_0^*=3,4$ e $b=2,4$. Em (c) e (d) temos a respectiva fase Θ conforme a equação 5.2. Condições iniciais aleatórias.



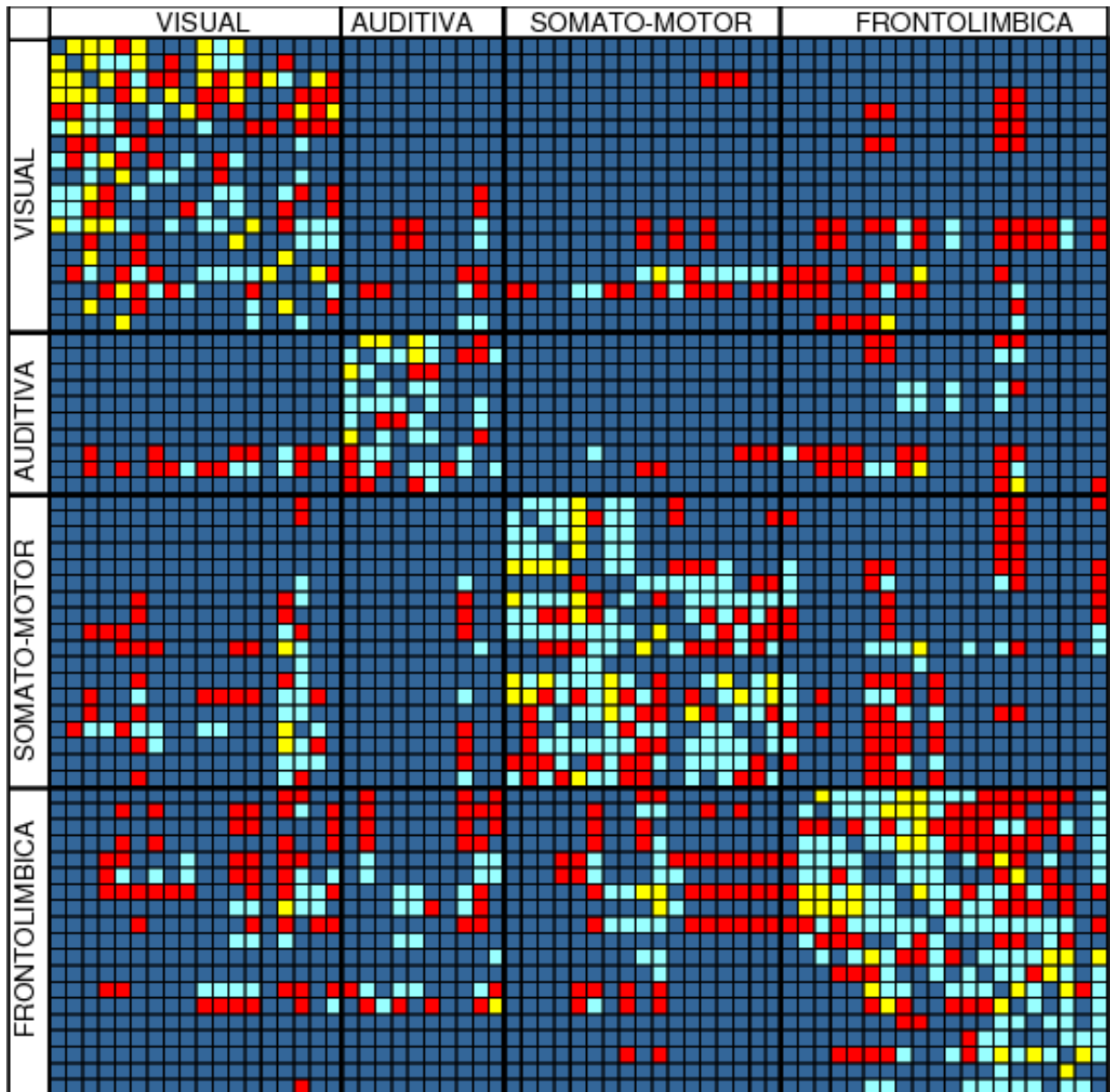
Fonte: O autor

Na figura 5.2 (a) temos a dinâmica temporal de *spikes* e na figura 5.2 (c) a sua respectiva fase Θ . Já na figura 5.2 (b) mostramos a dinâmica de *bursts* e na figura (d) temos a fase Θ para esse comportamento. Ambos os casos referem-se a um neurônio isolado descrito pelo modelo de disparos proposto por Hindmarsh-Rose. A definição 5.2 restringe a variável de fase Θ ao intervalo $[0, 2\pi]$ (para $k = 0$) conforme exemplifica as figuras 5.2 (c) e (d) independente da dinâmica dos neurônios. A fase definida pela equação 5.2 será utilizada no capítulo 6 para a comparação entre disparos em uma rede de neurônios acoplados. Na próxima seção introduziremos a matriz de conectividade neuronal que empregaremos como protótipo em nossas simulações de rede neuronal.

5.2 Matriz de Conectividade Neuronal

A matriz que representa a conectividade cortical do cérebro de um gato deve-se a Jack W. Scannell (40). Esta matriz representa a rede de conexões do córtex cerebral do gato e encontra-se dividida em 65 áreas corticais conforme está representado na figura 5.3.

Figura 5.3: Matriz de conectividade cerebral do gato representada pela escala de cores: azul-escuro representa a ausência de conexão (0), vermelho indica fracas conexões (1/3), ciano está relacionada a intensidades intermediárias (2/3) e amarelo representa forte (1) conectividade entre as áreas corticais. Os valores entre 0 (zero) e 1 (um) indicam a intensidade de fibras conectando as diferentes áreas. Esta matriz não é simétrica (conectividade direcionada).



Fonte: Adaptada de Scannell (40)

Na figura 5.3 temos a matriz neuronal do gato dividida em 4 (quatro) regiões cognitivas: visual, auditiva, somato-motor e frontolímbica. Essas regiões são subdivididas em áreas corticais. A região visual possui 18, a auditiva 10, a somato-motor 18 e a frontolímbica 19 áreas corticais. Nessa figura, as cores representam a intensidade das conexões entre as áreas, ou seja, a cor azul-escuro indica que a intensidade de conexão entre duas áreas é nula (0), em vermelho representa uma fraca intensidade (1/3), em ciano moderada (2/3) e amarelo uma intensidade de

conexão forte (1). Além disso, essa matriz exclui a possibilidade de autoconexão (uma área cortical conectada com ela mesma) que corresponde a linha diagonal secundária.

Conforme mencionamos no início deste capítulo, as sinapses que ocorrem na matriz cerebral podem ser do tipo elétricas e/ou químicas (9). No primeiro caso, as sinapses ocorrem via troca de íons (partículas carregadas) na membrana celular que migram de uma extremidade da célula para a outra (41). Portanto, as sinapses elétricas influenciam as comunicações de curta distância entre elementos da matriz cerebral e são bidirecionais (42), ou seja, entre dois neurônios conectados de forma elétrica não existe somente um emissor (ou receptor) de informações. Desta forma, um neurônio *A* tanto pode receber informações (através de impulsos nervosos) de um outro neurônio *B* bem como enviá-las para o neurônio *B*. Podemos dizer que trata-se de um “caminho de mão dupla” para a troca de interações neurais e, geralmente, são de curto alcance (9, 42).

No entanto, as sinapses químicas são consideradas unidirecionais (9). Neste aspecto, somente o neurônio emissor (pré-sináptico) *A* é responsável pelo envio de informações para o neurônio receptor (pós-sináptico) *B*. Temos uma transmissão de informações em um sentido apenas: de *A* para *B*. Essas informações neuronais transmitem-se via substâncias químicas (neurotransmissores) e possuem a característica de longo alcance (42). Além disso, as sinapses químicas podem ser subdivididas em excitatória e inibitória (9). Na sinapse excitatória o neurônio *A* envia um sinal para o neurônio *B* e esse sinal auxilia a atividade neuronal de *B*: *A* excita *B*, ou seja, aumenta a probabilidade de *B* disparar. Já na sinapse química inibitória o envio de informações do neurônio *A* para o neurônio *B* gera um retardo na atividade de *B*: o sinal emitido por *A* inibe a atividade neuronal de *B*. Assim, a transmissão de impulsos nervosos entre neurônios, nas sinapses químicas, ocorre através de neurotransmissores (43, 44).

Na próximo capítulo empregaremos a matriz da figura 5.3 como forma de acoplamento entre neurônios onde a dinâmica individual será dada pela equação 5.1. Para as sinapses, entre os neurônios, utilizaremos as químicas excitatórias. Isso se deve a característica de não simetria (unidirecionalidade) da matriz de conectividade do gato.

6 *Matriz do Gato*

Neste capítulo apresentaremos nossos resultados sobre a obtenção de diferentes estados na rede de conectividade sináptica do gato e a sua robustez com relação a perturbação externa. Utilizamos uma análise numérica via diagnósticos de recorrência espacial. As ferramentas derivadas da matriz de recorrência ($RP_{i,j}$) são utilizadas para investigar o surgimento de estados distintos em uma rede de neurônios, onde a dinâmica individual de uma área cortical (sítio isolado) será simulada, computacionalmente, pelo modelo de disparos neuronais proposto por Hindmarsh-Rose. Os resultados apresentados e discutidos neste capítulo encontram-se publicados na referência (20).

6.1 Estados na Matriz Conectividade Cerebral do Gato

Neurônios são as células responsáveis pela rápida comunicação de informações dentro do cérebro (41). Além disso, o córtex cerebral dos mamíferos é considerado como um exemplo de rede complexa (34). Desta forma, há uma imensa quantidade de fenômenos dos quais as regras da matriz cerebral são de vital importância, por exemplo, memória, linguagem, atenção e consciência (34).

Sendo assim, sistemas neuronais têm sido estudados e modelados por redes complexas em diferentes níveis de descrições (20). Um aspecto importante, apontado por pesquisas mais recentes, indica que sistemas neuronais podem exibir a coexistência de estados espaciais coerentes e incoerentes, ou estados quimera (9, 18). Esse comportamento híbrido possui relações com alguns fenômenos observados em golfinhos e pássaros (19). Além disso, estados quimera possuem dinâmicas muito similares às encontradas em alguns distúrbios cerebrais, por exemplo, alguns tipos de epilepsias (45).

Com o intuito de auxiliar na compreensão da formação desses estados em redes neuronais e ampliar a aplicação da recorrência espacial, como diagnóstico, montamos nosso sistema neuronal com base na matriz de conectividade do gato, descrita no capítulo 5 (veja a figura

5.3). Nesta matriz cada um dos 65 sítios (áreas corticais) é composto por 1 neurônio. Para a dinâmica individual de disparos utilizaremos o modelo de Hindmarsh-Rose descrito no capítulo 5 conforme as equações 5.1. Logo, o sistema acoplado consiste das expressões:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= y_i - x_i^3 + bx_i^2 + I_i^* - z_i - \frac{\alpha}{n_i'} \sum_{j=1}^N G'_{i,j} \Upsilon(x_j) \\ &\quad - \frac{\beta}{n_i''} \sum_{j=1}^N G''_{i,j} \Upsilon(x_j), \\ \frac{dy_i}{dt} &= 1 - 5x_i^2 - y_i, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \mu [s(x_i - x_{\text{rest}}) - z_i], \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde temos as seguintes variáveis: x_i , corrente rápida do i -ésimo neurônio (y_i) (íons Na^+ ou K^+), frequência de disparos (b), corrente externa com perturbação (I_i^*), corrente lenta do i -ésimo neurônio (z_i) (íon Ca^{2+}), α , número de conexões internas do i -ésimo neurônio (n_i'), matriz de conexão dentro da mesma região cortical ($G'_{i,j}$), sinapses químicas ($\Upsilon(x_j)$), β , número de conexões externas do i -ésimo neurônio (n_i''), matriz de conexão entre diferentes regiões corticais ($G''_{i,j}$), controle de variação da corrente lenta (μ), adaptação (s), potencial de repouso (x_{rest}), quantidade de neurônios ($N=65$) e $i, j = 1, 2, \dots, N$.

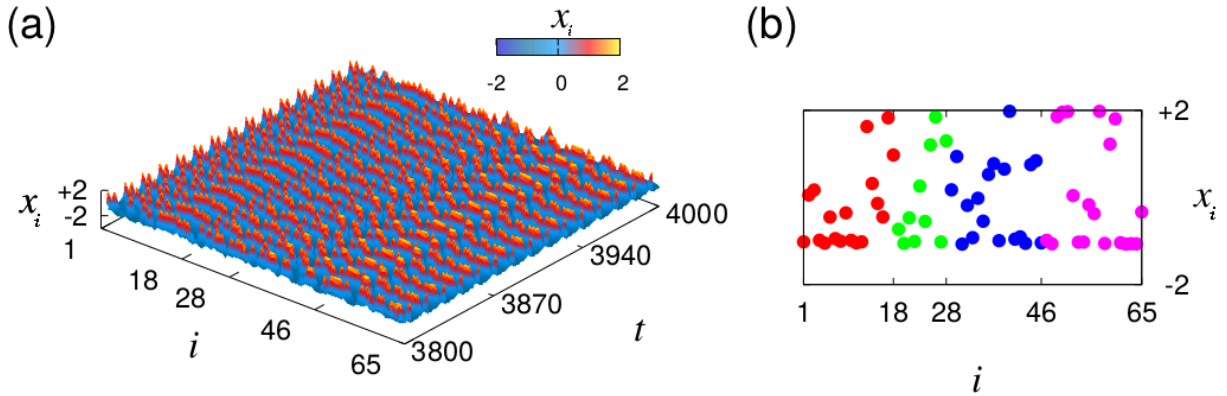
A função de atividade sináptica química ($\Upsilon(x_j)$) pode ser escrita como:

$$\Upsilon(x_j) = (x_i - x_{\text{rev}})[1 + e^{-\lambda(x_j - \theta)}]^{-1} \quad (6.2)$$

onde λ e θ são parâmetros de controle ($\lambda = 10$, $\theta = -0,25$ (39, 46)). O potencial reverso (x_{rev}) controla o tipo de sinapse: se $|x_i| < x_{\text{rev}}$, a função é negativa ($\Upsilon(x_j) < 0$), ou seja, o acoplamento é excitatório, caso contrário inibitório. Nós utilizamos $x_{\text{rev}}=2$ (acoplamento excitatório) e fixamos os parâmetros: $b=3,2$, $I_i^*=I_0^*=4,4$ (sem perturbação externa), $\mu=0,01$, $s=4$ e $x_{\text{rest}}=1,6$ (20). Os elementos da matriz $G'_{i,j}$ e $G''_{i,j}$ são 0 (na ausência de conexões), 1/3 (conexões fracas), 2/3 (intensidade de conexão intermediária), ou 1 (intensidade forte) de acordo com a matriz de conectividade do gato (figura 5.3).

Temos na figura 6.1 um primeiro exemplo do comportamento dinâmico da rede do gato para baixas intensidades de acoplamentos (α e β) entre as áreas corticais. As condições iniciais são distribuídas randomicamente nos intervalos: $x_i \in [-2, 2]$, $y_i \in [0, 2/10]$, $z_i \in [0, 2/10]$.

Figura 6.1: Evolução espaço-temporal da rede para $\alpha=10^{-3}$ e $\beta=10^{-3}$. Em (a) temos a evolução espaço-temporal e em (b) o perfil espacial incoerente dos neurônios. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição dos elementos da rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica.



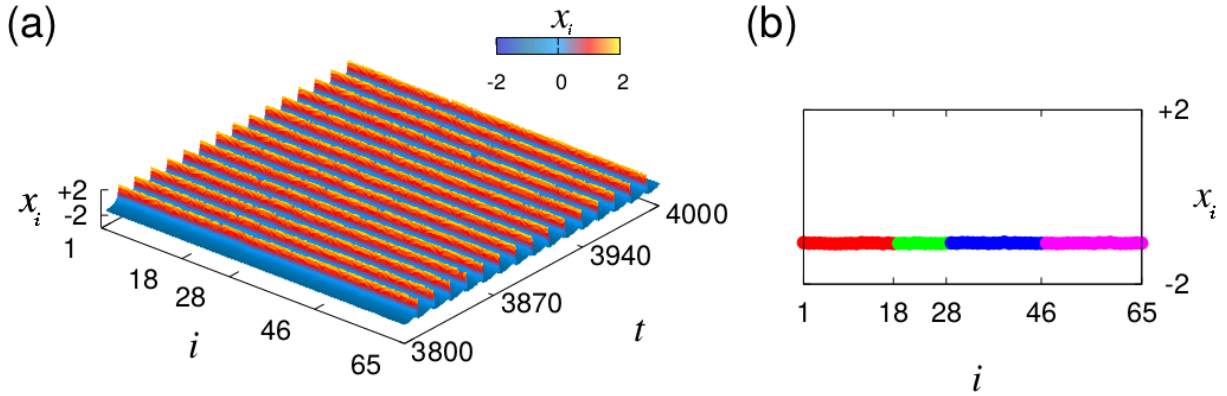
Fonte: O autor

A figura 6.1 (a) representa a evolução espaço-temporal de todos os $N=65$ elementos que formam a rede de neurônios do gato. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i identifica a posição dos neurônios na rede. Note a falta de comportamento coletivo entre os elementos, ou seja, o i -ésimo neurônio evolui de forma totalmente independente dos demais integrantes (sítios) da rede. Já na figura 6.1 (b) mostramos o perfil espacial dos N -neurônios que evidência a falta de sincronização para os valores de parâmetros utilizados (α e β).

Na figura 6.1 as cores indicam as diferentes regiões do córtex cerebral do gato: vermelha (visual), verde (auditiva), azul (somato-motor) e magenta (frontolímbica). Desta forma, as 4 regiões corticais do gato não possuem sincronização interna (dentro da mesma região cortical) ou externa (entre regiões distintas). Logo, temos um comportamento espacial incoerente ou dessincronizado da rede neuronal, ou seja, os sítios não apresentam uma dinâmica coletiva para o sistema fracamente acoplado.

Outro exemplo de comportamento dinâmico da variável x_i que emerge na rede de neurônios (conectados através da matriz sináptica do gato via equação 6.1) é mostrado na figura 6.2. Neste caso, para as intensidades de acoplamento interno (α) e externo (β) as 4 regiões corticais apresentam uma sincronização completa entre seus sítios (N -neurônios).

Figura 6.2: Evolução espaço-temporal da rede do gato para $\alpha=0,21$ e $\beta=0,04$. Em (a) mostramos o comportamento espaço-temporal e em (b) o perfil espacial sincronizado da rede neuronal. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio na rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica.



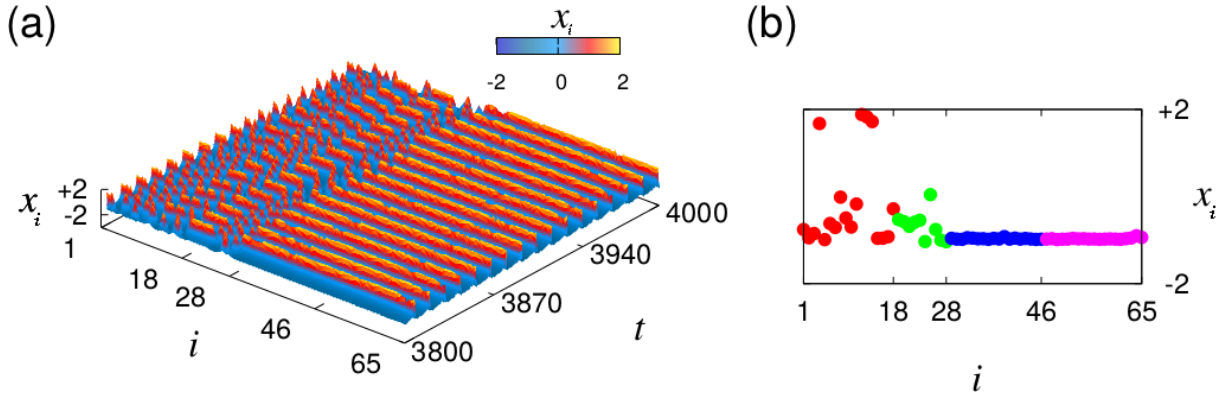
Fonte: O autor

Na figura 6.2 (a) temos o comportamento espaço-temporal da rede de neurônios acoplados conforme as expressões 6.1 para os parâmetros de acoplamento $\alpha=0,21$ e $\beta=0,04$. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i identifica a posição dos neurônios na rede. Observe que na figura 6.2 (a) o comportamento completamente sincronizado do sistema, a medida que, evolui o tempo t . Desta forma, todos os N -neurônios apresentam o mesmo comportamento coletivo temporal.

Observe na figura 6.2 (b), onde as cores indicam as diferentes regiões cognitivas do córtex cerebral do gato (figura 5.3), que o perfil espacial evidência a completa sincronização da rede neuronal na variável x_i , ou seja, existe uma sincronização interna (neurônios em uma mesma região apresentam comportamento coletivo) juntamente com uma sincronização externa (sincronização entre neurônios das 4 regiões cognitivas) tornando o perfil espacial do sistema completamente coerente ou sincronizado.

No entanto, a rede de neurônios regida pelo conjunto de equações 6.1 não se limita aos comportamentos observados nas figuras 6.1 e 6.2. Variando a intensidade do acoplamento interno (α) e externo (β), mantendo-se os demais parâmetros fixos, podemos obter a coexistência de estados sincronizados (coerência) e dessincronizados (incoerência). Temos na figura 6.3 um exemplo de comportamentos híbridos que pode surgir na rede do gato com acoplamento químico excitatório. As condições iniciais são distribuídas randomicamente nos intervalos: $x_i \in [-2, 2]$, $y_i \in [0, 2/10]$, $z_i \in [0, 2/10]$.

Figura 6.3: Estados quimera com a parte coerente e incoerente em dinâmica temporal de *spikes*. Em (a) temos a evolução espaço-temporal da rede e em (b) mostramos o seu respectivo perfil espacial. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio na rede. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica. Parâmetros de acoplamento: $\alpha=0,70$ e $\beta=0,08$.



Fonte: O autor

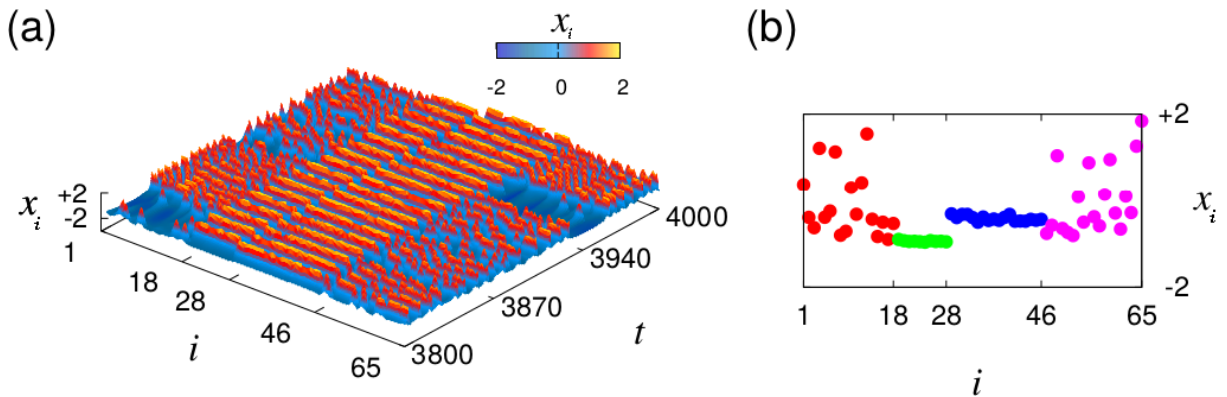
Na figura 6.3 a variável i indica a posição dos elementos (neurônios) na rede, x_i representa o potencial de membrana dos neurônios e t a variável temporal. Note que a região visual e auditiva, não possuem sincronização entre seus elementos. Observe que isso vale para todos os tempos após um transiente de 3800. Logo, essas regiões indicam a parte incoerente do perfil espacial da rede de neurônios (equação 6.1).

Ainda na figura 6.3 (a), para o caso das regiões somato-motor e frontolímbica, notamos a formação de um comportamento coletivo, ou seja, temos um estado sincronizado na variável x_i . Desta forma, os neurônios pertencentes a essas regiões corticais possuem tanto sincronização interna quanto uma sincronização externa: essas duas regiões possuem sincronização entre si. Estas regiões da rede determinam a parte coerente do sistema acoplado. Assim, temos a coexistência característica de estados espaciais na rede de conectividade (acoplamento químico excitatório) neuronal do gato onde a dinâmica individual é dada pelo modelo de Hindmarsh-Rose.

O perfil espacial dos elementos da rede para a variável x_i (figura 6.3 (b)) torna mais evidente a afirmação exposta nos dois parágrafos anteriores. Observe nesta figura a coexistência de estados espaciais com características distintas onde o eixo horizontal representa a posição de um neurônio e o eixo vertical seu respectivo potencial de membrana. Um aspecto importante refere-se ao comportamento dinâmico da parte coerente e incoerente evidenciadas na figura 6.3. Nestas regiões do espaço, a dinâmica temporal do potencial de membrana em ambos os casos é *spikes*. A este comportamento denominamos de SC (20).

Conforme mostramos no capítulo anterior, o modelo neuronal de Hindmarsh-Rose, para um neurônio, pode exibir dinâmica temporal de *spikes* ou *bursts* conforme os parâmetros utilizados no modelo (veja a figura 5.2). No entanto, quando acoplamos N -neurônios através da rede do gato observamos uma nova forma de coexistência de estados dinâmicos. Lembre-se que para a corrente inicial $I_0^*=4,40$ e $b=3,2$ o modelo de Hindmarsh-Rose, para um neurônio isolado, apresenta *spikes*. Na figura 6.4 mostramos o comportamento espaço-temporal da rede obtido em nossas simulações.

Figura 6.4: Estados quimera onde a parte incoerente possui dinâmica temporal de *bursts*. Em (a) mostramos o comportamento espaço-temporal e em (b) o perfil espacial da rede. A variável x_i representa o potencial de membrana, t a variável temporal e i indica a posição do neurônio. Na figura (b) a cor vermelha representa a região visual, verde a auditiva, azul a somato-motor e magenta a frontolímbica. Parâmetros de acoplamento: $\alpha=1,50$ e $\beta=0,10$.



Fonte: O autor

Na figura 6.4 (a) t representa a variável temporal, i indica a posição e x_i o potencial de membrana do i -ésimo neurônio. Neste resultado utilizamos $\alpha=1,50$, $\beta=0,10$ e os demais parâmetros do sistema de equações 6.1 são fixos. As regiões visual e frontolímbica estão em regime temporal de *bursts*. Note que existe um período de inatividade seguido por uma sequência rápida de disparos neuronais sendo, portanto, uma característica de *bursts* conforme mostrado no capítulo 5. Ao passo que, as regiões auditiva e somato-motor possuem dinâmica de *spikes*. Neste caso, a sequência de atividade neuronal é bem comportada com intervalos temporais regulares entre os disparos.

Na figura 6.4 (b) mostramos o perfil espacial da rede: uma parte sincronizada (coerência espacial) e outra dessincronizada (incoerência espacial), ou seja, temos novamente estados quimera. A parte incoerente dos estados quimera é representada pelas regiões visual (vermelha) e frontolímbica (magenta), ao passo que, a parte coerente é representada pelas regiões auditiva (verde) e somato-motor (azul).

No entanto, a quimera obtida na figura 6.3 possui uma característica distinta da quimera mostrada na figura 6.4. Aqui, pelo motivo da parte incoerente da rede possuir dinâmica temporal de *bursts* denominamos este comportamento de BC. Assim, a rede cognitiva do gato pode apresentar dois tipos de estados quimera: SC ou BC.

Antes de analisarmos a dinâmica temporal dos neurônios, quer seja *bursts* ou *spikes*, necessitamos saber qual o comportamento espacial da rede. Conforme mostramos nos capítulos anteriores, a matriz de recorrência pode ser utilizada para distinguir os comportamentos espaciais em sistemas acoplados: sincronizado, dessincronizado ou estados quimera. No entanto, a variável de análise será dada por Θ (fase definida pela equação 5.2 do capítulo 5), ou seja, na equação 3.1 teremos: $|\vec{w}_i - \vec{w}_j| = |\Theta_i - \Theta_j|$. Assim, o gráfico de recorrência espacial será obtido das fases de disparos neuronais da rede. Para o raio de retorno podemos utilizar no máximo 10% do intervalo de Θ (47, 48, 49). Isto nos permite definir $\varepsilon = 0,3$ para qualquer variação no potencial de membrana ou comportamento dinâmico do modelo descrito pelas expressões 6.1.

Além disso, devido a dinâmica temporal de *bursts* apresentar intervalos irregulares entre disparos, quando comparada a dinâmica de *spikes*, podemos definir uma variância entre os tempos de atividade neuronal (observe novamente a figura 5.1). A equação 6.3 representa a variância nos intervalos entre os início dos disparos:

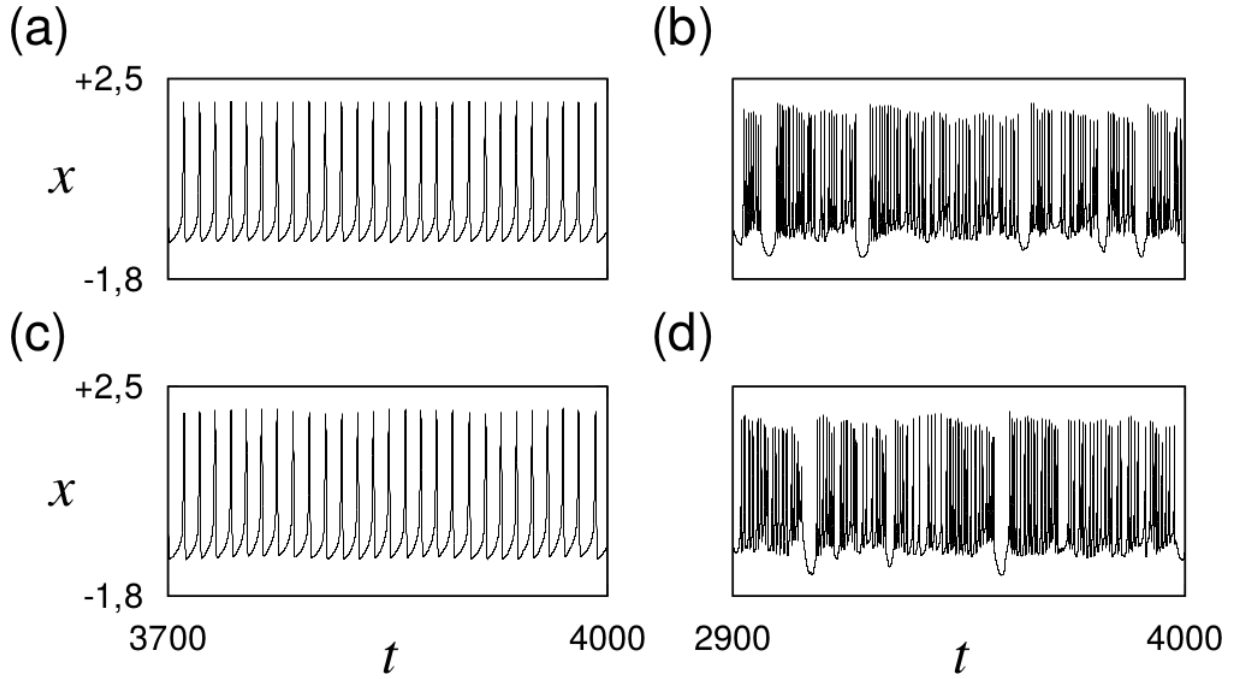
$$\sigma = \langle \Delta t_{\zeta}^2 \rangle - \langle \Delta t_{\zeta} \rangle^2, \quad (6.3)$$

para $\Delta t_{\zeta} = t_{\zeta+1} - t_{\zeta}$, onde t_{ζ} representa o tempo de início de um evento^a, $t_{\zeta+1}$ o evento posterior e $\zeta \in \mathbb{Z}_+$. Assim, através da análise da matriz de recorrência espacial e a variância dos disparos, poderemos identificar quando a rede exibe comportamento de uma forma ou de outra (BC ou SC). A informação espacial obtemos da recorrência e a dinâmica temporal da variância dos disparos.

Temos um exemplo de aplicação da equação 6.3 na figura 6.5. Nesta escolhemos, de forma aleatória, 4 neurônios pertencentes a rede do gato (equação 6.1) para analisar a σ . Assim, comparamos 2 neurônios da parte incoerente com outros 2 da parte coerente da rede. Na figura 6.5, utilizamos os parâmetros de acoplamento $\alpha=1,51$ e $\beta=0,10$. Para esta combinação de intensidades a matriz do gato, modelada através da dinâmica neuronal de Hindmarsh-Rose, conforme as expressões 6.1 exibe *Chimera-Burst* (20).

^a*spike* ou *burst*

Figura 6.5: Dinâmica temporal para alguns neurônios da rede do gato para os parâmetros de acoplamento $\alpha=1,51$ e $\beta=0,10$. Em (a) e (c) regime temporal de *spikes* sincronizados. Em (b) e (d) regime temporal de *bursts* dessincronizados. A figura (a) possui $\sigma=1,10$. Na figura (c) $\sigma=0,36$. Na figura (b) $\sigma=15,31$ e na (d) $\sigma=17,20$.



Fonte: O autor

Conforme a figura 6.5 exemplifica, com o auxílio da expressão 6.3, quando um neurônio exibir comportamento de *spikes* os valores da variância dos tempos de disparos neuronais são pequenos quando comparados ao regime de *bursts*. Isso se deve ao comportamento temporal irregular na atividade neuronal deste último. Na figura 6.5 mostramos a dinâmica temporal de 4 dos $N=65$ neurônios utilizados em nossas simulações.

Os resultados indicam que para a dinâmica de *bursts* temos a variância maior que dez ($\sigma > 10$), caso contrário os neurônios da rede encontram-se em regime de *spikes*. Nas figuras 6.5 (a) e (c) os neurônios encontram-se em regime temporal de *spikes* pois temos $\sigma=1,10$ e $\sigma=0,36$ respectivamente. Já nas figuras 6.5 (b) e (d) a dinâmica temporal é de *bursts* pois as variâncias assumem valores maiores que 10, ou seja, $\sigma=15,31$ e $\sigma=17,20$.

Assim, utilizando a variância nos tempos de disparos neuronais (equação 6.3) podemos distinguir regime de *spikes*, *bursts* ou ambos. No entanto, a variância não identifica a presença de estados quimera na rede, ou seja, ela limita-se a informação temporal da dinâmica. Lembrando que a coexistência híbrida refere-se ao perfil espacial do sistema acoplado em um tempo qualquer. Logo, necessitamos utilizar um diagnóstico que forneça informações sobre o perfil espacial da rede. Conforme discutido em parágrafos anteriores e nos capítulos 3 e 4, a recorrência

pode dar tais informações sobre o comportamento espacial:

- sincronizado (coerente);
- dessincronizado (incoerente);
- estados quimera (coexistência de estados).

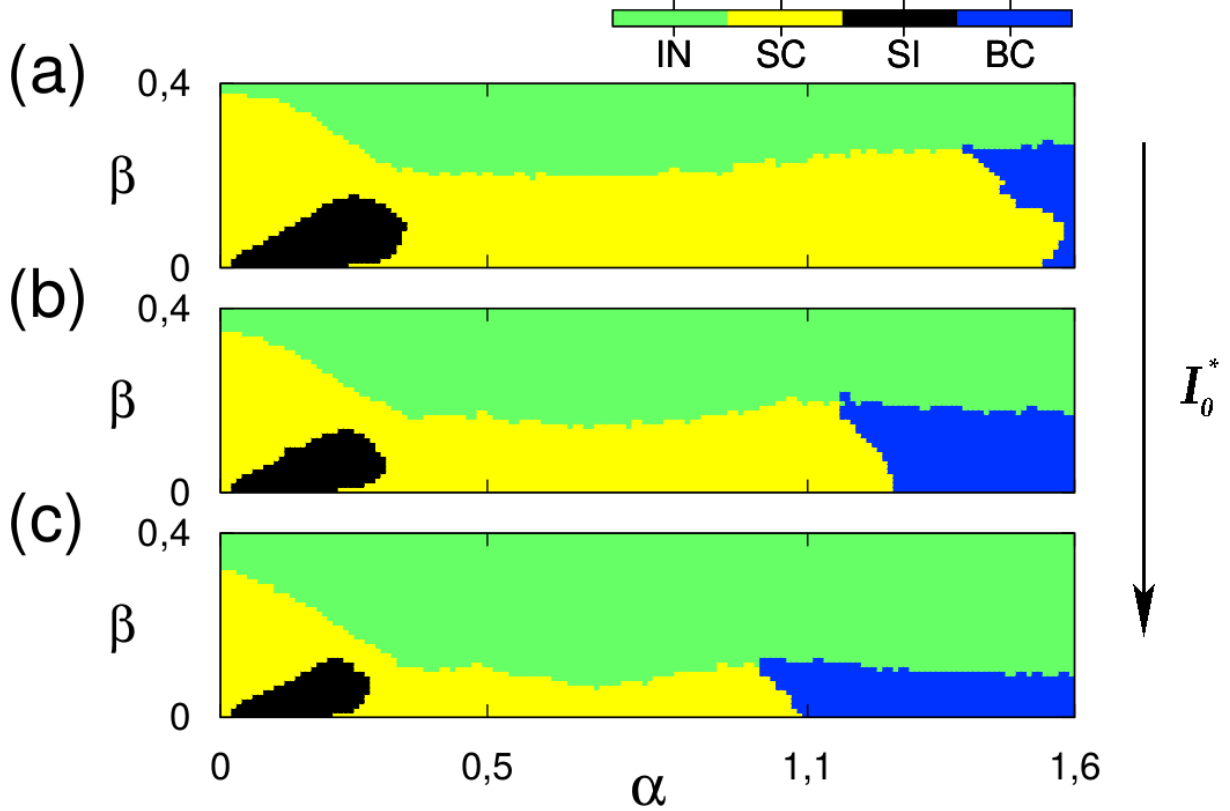
Por sua vez, a variância na sequência dos disparos informa a dinâmica temporal dos neurônios da rede : *spikes* ou *bursts*. Desta forma, os estados obtidos no modelo dado pelas equações 6.1 podem ser resumidos em:

- **IN** → incoerente ou dessincronizado (exemplo figura 6.1);
- **SI** → sincronizado ou coerente (exemplo figura 6.2);
- **SC** → estados quimera com a parte incoerente possuindo dinâmica temporal de *spikes* (exemplo figura 6.3);
- **BC** → estados quimera com a parte incoerente em dinâmica temporal de *bursts* (exemplo figura 6.4).

Para detectar os diferentes comportamentos na rede do gato utilizamos o seguinte critério: cada uma das 4 regiões cognitivas possui um respectivo gráfico de recorrência. Cada uma destas regiões pode apresentar um dos 3 padrões espaciais (sincronizado, dessincronizado ou estados quimera). Se pelo menos uma das quatro regiões apresentar mais de 50% de seus respectivos neurônios sincronizados, ou seja, existirem blocos no respectivo gráfico de recorrência espacial indicando uma maior parte dos neurônios sincronizados, temos estados quimera: **BC** ou **SC** dependendo do valor de σ .

Para as 4 regiões sincronizadas (**SI**) temos o preenchimento total das respectivas matrizes de recorrência espacial ($RP_{i,j}$) e se as regiões estiverem dessincronizadas (**IN**) temos somente pontos dispersos em seus respectivos $RP_{i,j}$. Lembrando que as 4 regiões são visual, auditiva, somato-motor e frontolímbica (figura 5.3). Assim, analisamos um conjunto de gráficos de recorrência (um para cada região cognitiva da matriz do gato). Desta forma, os diferentes comportamentos (**SI**, **IN**, **BC** ou **SC**) podem ser identificados no sistema. Na figura 6.6 mostramos os comportamentos obtidos para o espaço dos parâmetros ($\alpha \times \beta$), para 3 valores diferentes de I_0^* , obtidos através do $RP_{i,j}$ e σ . Esta figura representa o comportamento mais provável para um conjunto de 100 condições iniciais distribuídas randomicamente nos intervalos: $x_i \in [-2, 2]$, $y_i \in [0, 2/10]$, $z_i \in [0, 2/10]$.

Figura 6.6: Espaço dos parâmetros de acoplamento $\alpha \times \beta$. Em (a) utilizamos $I_0^*=4,20$, em (b) $I_0^*=4,40$ e em (c) $I_0^*=4,60$. Os comportamentos são indicados por: incoerente ou dessincronizado (IN), estados quimera com a parte incoerente em dinâmica de *spikes* (SC), coerente ou sincronizado (SI), estados quimera com a parte incoerente em dinâmica de *bursts* (BC). Note que a corrente I_0^* aumenta de (a) para (c).



Fonte: O autor

Na figura 6.6 a intensidade de corrente (I_0^*) aumenta na vertical de cima para baixo. A região na cor verde indica o espaço de parâmetros ($\alpha \times \beta$) onde não existe sincronização (coerência) entre os neurônios da rede (IN). A região, na cor preta, indica sincronização (ou coerência) (SI) no espaço de parâmetros. A região, na cor amarela indica que a rede possui estados quimera com a região incoerente em regime temporal de *spikes* (SC). A região, na cor azul indica que o sistema possui estados quimera onde a parte incoerente apresenta dinâmica temporal de *bursts* (BC). O tempo de simulação numérica é de 5000 tempos (para cada condição inicial) e transiente de 1000.

Note a pequena variação que ocorre nas regiões de fronteira, ou seja, surgem poucas mudanças, a medida que, alteramos a corrente inicial na rede. Logo, o panorama geral dos comportamentos espaciais (IN, SI, SC ou BC) não sofrem mudanças significativas com a mudança na corrente externa (I_0^*). Na próxima seção trataremos da robustez dos estados obtidos na presença de perturbação externa.

6.2 Robustez dos Estados Quimera: Perturbação Externa

Perturbação externa ocorre naturalmente em diversos sistemas reais (50). Sendo assim, não podemos eliminar totalmente a influência do ruído que, na grande maioria dos casos, é um obstáculo indesejado para a compreensão e estudo dos comportamentos gerais de sistemas. Do ponto de vista da atividade neuronal, podemos dizer que o distúrbio no sinal cerebral é um problema fundamental para o processo de informação e afeta, em todos os seus aspectos, o funcionamento do sistema nervoso (51).

No entanto, a influência externa não é totalmente maléfica como pode-se imaginar em um primeiro momento. Evidências experimentais e computacionais veem mostrando que múltiplas fontes de ruído contribuem para a variabilidade celular (51). Sendo assim, o ruído afeta as redes neuronais produzindo efeitos prejudiciais bem como, eventualmente, trazer potenciais benéficos para o sistema nervoso.

Podemos citar, como exemplo, o mal de Parkinson que é uma patologia ligada a sincronização de *bursts* (10). Neste aspecto, a inserção no ruído no sistema pode retirar o mesmo deste estado síncrono e gerar efeitos positivos sobre o controle da doença (10). Essa inserção de perturbação no cérebro pode ser realizada por meio de pulsos elétricos^b ou pela administração de medicamentos. Esta última forma de perturbação é muito utilizada para o tratamento de uma outra anomalia neuronal: a epilepsia. Aqui, novamente, a doença caracteriza-se pela sincronização de áreas específicas do cérebro e os fármacos operam no sentido de destruir o comportamento síncrono melhorando a qualidade de vida das pessoas que possuem tal distúrbio (52). Estas doenças possuem similar características com estados quimera devido a coexistência híbrida de comportamentos.

Desta forma, temos indícios que contribuem para o estudo e inserção do ruído em nosso modelo de rede neuronal. Nesta direção, modificamos a corrente I_j nas expressões 6.1 para incluir a perturbação externa na matriz de conectividade sináptica do gato conforme a seguinte equação:

$$I_i^* = I_0^* + \delta\chi, \quad (6.4)$$

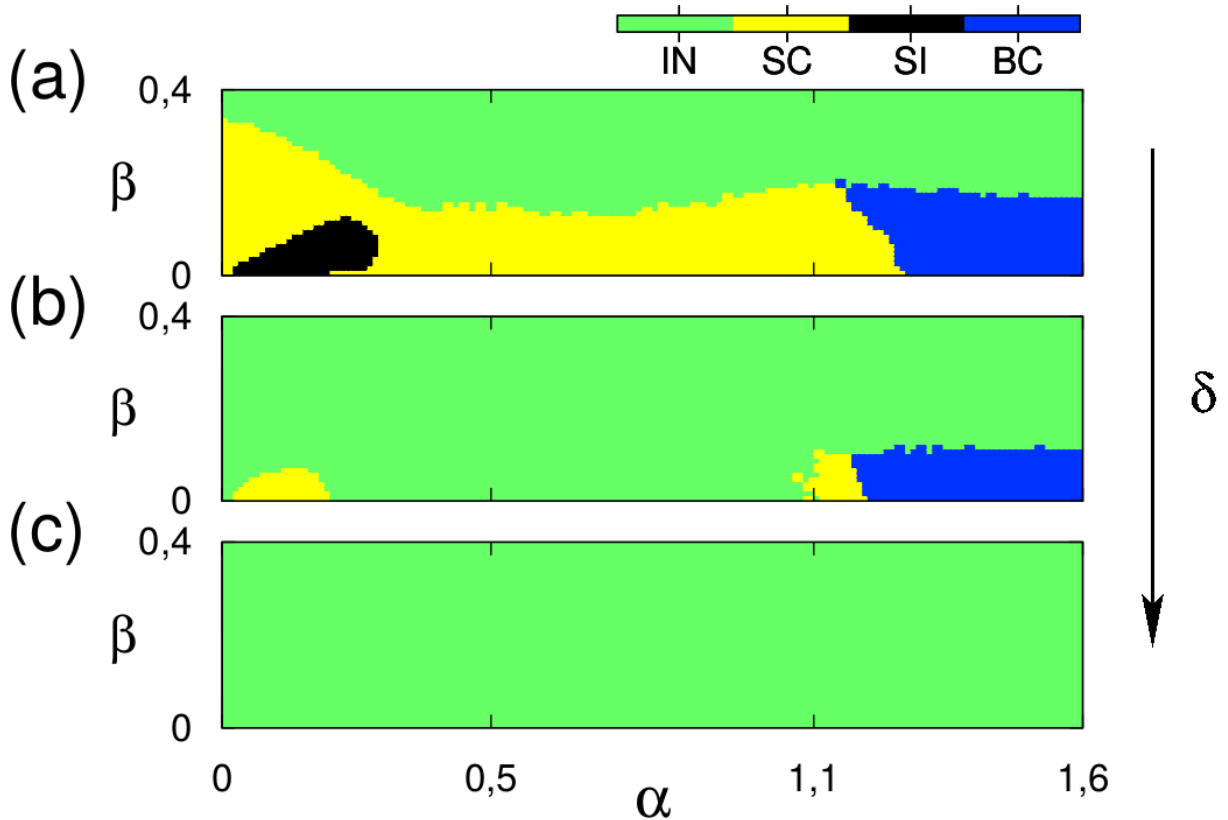
onde temos os seguintes significados para as variáveis: δ e distribuição normal com média zero e variância unitária (χ). O valor de $I_0^*=4,4$ é utilizado devido a essa corrente inicial possuir a maior área relativa de estados quimera (BC) na figura 6.6 com relação as demais correntes utilizadas.

A figura 6.7 mostra os resultados obtidos para a inserção do ruído no sistema repre-

^bpor exemplo, a utilização de eletrodos

sentado pelo conjunto de equações 6.1. Nesta figura as cores representam os comportamentos mais prováveis para um conjunto de 100 condições iniciais distintas para um tempo de simulação 5000 desprezado um tempo transiente de 1000 para cada condição inicial: $x_i \in [-2, 2]$, $y_i \in [0, 2/10]$, $z_i \in [0, 2/10]$.

Figura 6.7: Espaço dos parâmetros de acoplamento ($\alpha \times \beta$) para diferentes intensidades de ruído externo. Em (a) $\delta=0,04$, em (b) $\delta=0,16$ e em (c) $\delta=0,25$. Onde IN indica que o perfil espacial é incoerente, SC estados quimera com *spikes*, SI sincronização completa, BC estados quimera com *bursts*.



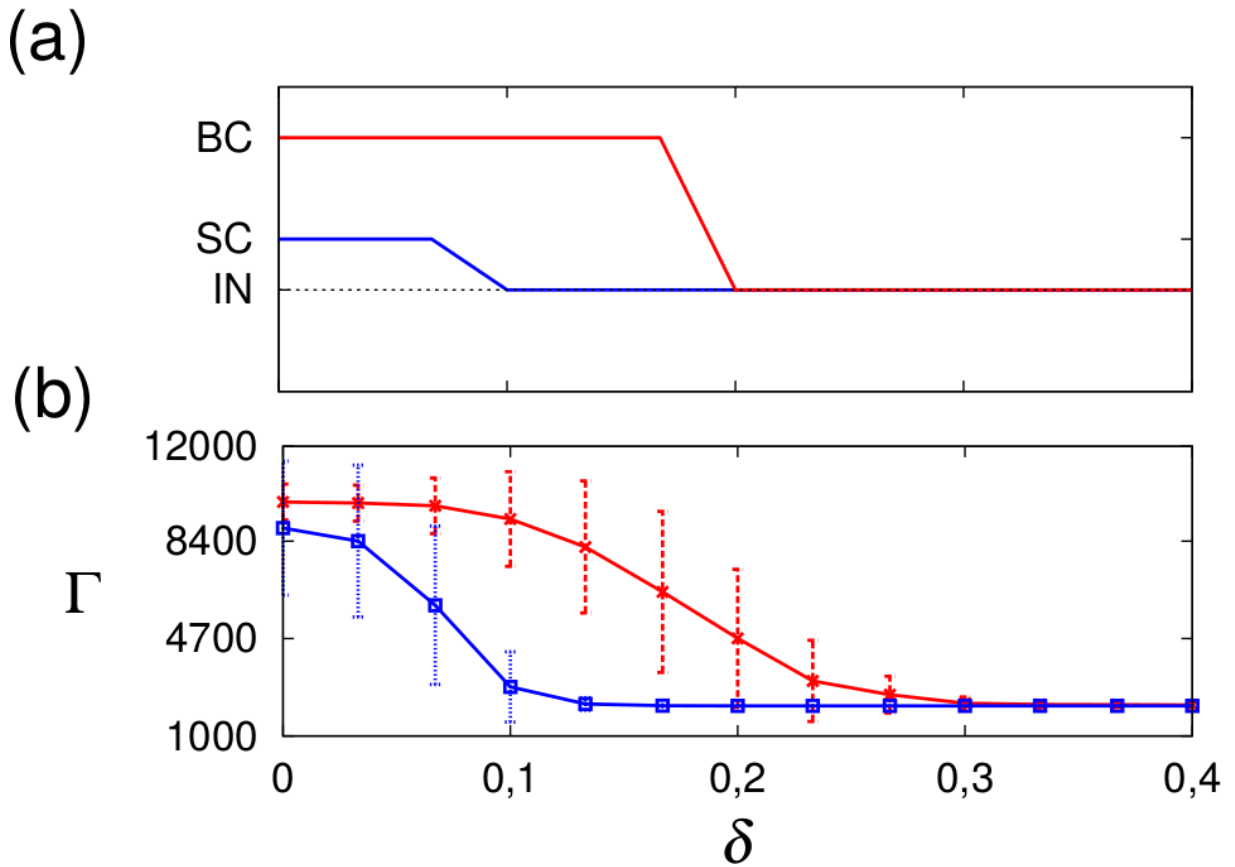
Fonte: O autor

Na figura 6.7 o eixo vertical representa a intensidade do acoplamento externo (β) e o eixo horizontal a intensidade de acoplamento interno (α). Note que para a intensidade de perturbação externa baixa ($\delta=0,04$) praticamente não há mudanças no espaço dos parâmetros de acoplamento ($\alpha \times \beta$) quando comparamos com o caso sem a presença de ruído (figura 6.6 (b)), ou seja, para pequenas perturbações o sistema é robusto (20).

No entanto, com o aumento da perturbação externa ocorre uma destruição de três das quatro regiões anteriormente existentes na rede. Observe na figura 6.7 (b) que o estado coerente (SI) desaparece e a quimera SC sofre uma erosão diminuindo drasticamente sua proporção no espaço dos parâmetros ($\alpha \times \beta$). No caso da figura 6.7 (c) temos somente a presença de estados incoerentes (IN). A intensidade de perturbação ($\delta=0,25$) destrói a sincronização e as quimeras.

Na figura 6.8 mostramos o tempo médio das quimeras (Γ) (SC e BC) pela intensidade do ruído (δ) na corrente (I_i^*). Este resultado foi obtido a partir de um conjunto de 200 condições iniciais distintas para um tempo de simulação máximo de 12000 para cada condição inicial: $x_i \in [-2, 2]$, $y_i \in [0, 2/10]$, $z_i \in [0, 2/10]$. A figura 6.8 revela quais dos estados quimera (SC ou BC) é mais robusto conforme aumenta-se gradativamente a intensidade do ruído externo.

Figura 6.8: Robustez dos estados quimera obtidos na matriz de conectividade cerebral do gato pela intensidade do ruído externo. Em (a) temos os estados obtidos pela variação de δ , em (b) o tempo médio T de BC obtido para $\alpha=1,50$ e $\beta=0,10$, SC para $\alpha=0,70$ e $\beta=0,08$.



Fonte: O autor

A figura 6.8 mostra que os estados finais são os mesmos para ambos os casos, ou seja, após o colapso dos estados quimera ambos os comportamentos tornam-se incoerentes (IN). Na figura 6.8 (a) um temos comparativo sobre os dois comportamentos existentes, a medida que, aumentamos a intensidade da perturbação externa sobre os neurônios da rede. Observe que para intensidades relativamente baixas ($\delta \approx 0$) os dois comportamentos (BC e SC) continuam a existir no sistema e os tempos médios de vida (Γ) são muito próximos.

Por outro lado, com o aumento de δ percebe-se que a região composta por estados quimera (SC) começa a sofrer os efeitos da perturbação de forma mais acentuada que a região

de estados quimera com *bursts* (BC). Note que o tempo médio (Γ) começa a diminuir e o desvio padrão aumenta para o caso da quimera com *spikes* (SC). Observe, na figura 6.8 (a) que para intensidade de perturbação próxima de 0,1 ($\delta \approx 0,1$) ocorre o colapso para os estados quimera constituídos, na parte incoerente, por dinâmica temporal de *spikes*.

No entanto, a região de BC não desaparece na vizinhança de $\delta \approx 0,1$. Observe que, apesar do tempo médio (Γ) sofrer influência da perturbação (figura 6.8 (b)) o comportamento ainda sobrevive para valores ligeiramente acima de 0,1. Este fato indica uma maior estabilidade do comportamento de quimera com *bursts* (BC) com relação ao quimera com *spikes* (SC). Desta forma, BC é mais robusto, em relação à perturbação externa (equação (6.4)).

Porém, se continuarmos aumentando a intensidade da perturbação externa (δ), a figura 6.8 (a) mostra que BC também deixa de existir no sistema. Assim, para valores acima de 0,25 ambos os estados quimera são suprimidos na rede neuronal do gato. A figura 6.8 (a) ainda evidência o comportamento final que obteremos com a variação na intensidade do ruído externo. A supressão dos comportamentos (SC e BC) leva o sistema a um perfil espacial incoerente ou dessincronizado semelhante ao mostrado na figura 6.1.

Logo, a figura 6.8 mostra que a robustez dos estados quimera possuindo a região incoerente com dinâmica de *bursts* é superior ao caso onde a região incoerente da rede exibe comportamento temporal de *spikes*: BC é mais robusto com relação à perturbação externa em relação a SC. Relembre que para $\delta \approx 0,10$ os estados quimera (SC) deixam de existir na rede, ao passo que, os estados quimera (BC) permanecem até $\delta \approx 0,20$. Atente para a figura 6.8 (b) que mostra ainda, com o auxílio do desvio padrão, a existência de BC até a intensidade de perturbação próxima a 0,25 ($\delta \approx 0,25$) para algumas condições iniciais. No entanto, para $\delta > 0,25$ ambos são suprimidos dando origem somente a estados incoerentes na rede.

7 Conclusão

Com este trabalho conclui-se que a matriz de recorrência $RP_{i,j}$, na sua versão espacial, pode ser aplicada no estudo de estados quimera em redes de osciladores acoplados. Conforme tratamos no capítulo 3, a formação de blocos sobre a diagonal principal do gráfico de recorrência espacial indica a parte coerente dos estados quimera e a parte incoerente é descrita pelos pontos dispersos ou ausentes. Desta forma, podemos inferir sobre a coexistência de estados com características híbridas em sistemas acoplados observando a matriz de recorrência, tomando por base o perfil espacial dos osciladores.

Além disso, mostramos que estados quimera possuem natureza transiente para o sistema regido pela expressão 4.1 quando tratamos com redes pequenas do ponto de vista do limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Sobre este ponto de vista, nossos resultados apontam indícios de que a matriz de recorrência espacial tem uma vantagem sobre a utilização do parâmetro de ordem global 2.9 pois este não detecta a sincronização de frequência no cenário pós-colapso dos estados quimera.

Outro aspecto relevante, trata-se da natureza transiente dos estados quimera que crescem de forma exponencial com o tamanho da rede (13). Isso significa que a coexistência espacial, utilizando a forma de acoplamento dado pela equação 4.1 como protótipo, para redes muito grandes é estável. Por outro lado, torna-se difícil sua caracterização para redes pequenas, uma vez que, a sua natureza transiente, juntamente com a característica exponencial, inviabilizam sua observação quando trabalhamos com poucos sítios (elementos) na rede.

Em vista disso, a matriz de recorrência espacial pode ser utilizada como ferramenta de análise para o estudo de estados quimera, tanto na sua detecção, como em seu possível colapso para alguma condição inicial. No mais, este diagnóstico nos fornece informações sobre a forma de sincronização (fase ou frequência) alcançada pelo sistema após o desaparecimento de estados híbridos. Logo, o gráfico de recorrência é capaz de identificar diversos padrões espaciais que venham a surgir nos mais diversos sistemas.

Quando trabalhamos com a matriz cognitiva do gato, os resultados obtidos indicam que esta também pode exibir estados quimera. Porém, a coexistência espacial refere-se a estados quimera com a região incoerente em dinâmica temporal de *spikes* (SC), ou estados quimera com a região incoerente em dinâmica temporal de *bursts* (BC). Além disso, conforme mencionado no parágrafo anterior e mostrado no capítulo 6, a matriz de recorrência caracteriza os demais estados espaciais, por exemplo, a sincronização.

Sendo assim, podemos ampliar a utilização dos gráficos de recorrência, na sua versão espacial, para o estudo de sistemas neuronais mesmo que estejamos interessados em uma sincronização de disparos (fase ou frequência). De fato, no capítulo 6 a recorrência espacial, aplicada no estudo da matriz de conectividade sináptica do gato, identificou os comportamentos existentes na mesma: IN, SI, SC e BC. Lembrando que para diferenciar dinâmica de *bursts* de *spikes* utilizamos o desvio padrão dos tempos de disparos neuronais.

Além disso, mostramos que o estado BC possui maior robustez ao ruído externo. Desta forma, necessitamos de uma intensidade de perturbação externa (δ) duas vezes superior para suprimir o estado BC quando comparado ao valor utilizado para destruir o estado SC para a rede de neurônios Hindmarsh-Rose, com acoplamento químico excitatório e distribuídos nas 4 regiões cognitivas do gato: visual, auditiva, somato-motor e frontolímbica.

7.1 Trabalhos Futuros

Como uma forma de extensão dos resultados aqui apresentados, podemos estudar a inserção de conexões elétricas na matriz sináptica do gato. Para este fim, é necessário a utilização de sub-redes em cada área cortical. Assim, o sistema ampliado implicará em conexões elétricas (interações de curto alcance internamente entre neurônios das sub-redes) e conexões químicas (interações de longo alcance entre os elementos das sub-redes) que podem ser inibitórias e/ou excitatórias.

Do ponto de vista da conectividade neuronal podemos trabalhar com outras matrizes cerebrais, por exemplo, a humana: tanto a de uma pessoa normal bem como a de uma que possui alguma forma de anomalia, por exemplo, o mal de Alzheimer, que pode ter ligações com estados quimera. Outros diagnósticos podem ser inseridos no estudo de sistemas onde ocorre a coexistência de estados híbridos. Temos o *cross-recurrence plot*^a que fornece informações sobre a comparação entre duas séries de dados, ou sistemas autônomos, e pode ser definido conforme a expressão:

$$CR_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{y}_j\|), \quad (7.1)$$

onde $\Theta(\cdot)$ é a função de *Heaviside*^b, $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana e ε representa o raio de retorno para todos os pares possíveis de i e j . O vetor $\vec{x}$ está relacionado a série base (principal) a ser comparada – primeira trajetória – e $\vec{y}$ a série que queremos comparar – segunda trajetória – (53). Assim, $\vec{x}$ pode caracterizar a série de disparos neuronais de um humano saudável e $\vec{y}$ outra série de uma pessoa com o mal de Alzheimer (ou alguma forma de patologia cerebral).

Outra técnica consiste na utilização do *joint recurrence plot*^c que corresponde a recorrência simultânea entre dois ou mais sistemas. Essa forma de recorrência pode ser definida através da equação:

$$JR_{i,j}^{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{se } \|\vec{x}_i - \vec{y}_j\| < \varepsilon_x \text{ e } \|\vec{y}_i - \vec{y}_j\| < \varepsilon_y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (7.2)$$

onde $\vec{x}_i$ e $\vec{y}_j$ são vetores de estados, $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana, e as variáveis ε_x e ε_y representam os diferentes *thresholds* (raios de retorno) para cada sistema que eventualmente podem ser iguais. O $JR_{i,j}^{x,y}$ é a recorrência conjunta que mede a probabilidade de ambos os sistemas retornarem simultaneamente para a vizinhança de um ponto anteriormente visitado (54).

^arecorrência cruzada

^bdegrau

^crecorrência conjunta

Referências Bibliográficas

- 1 RATTENBORG, N. C.; AMLANER, C. J.; LIMA, S. L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. *Neuroscience and Biobehavioral Reviews*, v. 24, p. 817–842, 2000.
- 2 KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, v. 05, n. 04, p. 380–385, 2002.
- 3 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 17, p. 174102/01–174102/04, 2004.
- 4 HAGERSTROM, A. M. et al. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics*, p. 658–661, 2012.
- 5 TINSLEY, M. R.; NKOMO, S.; SHOWALTER, K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics*, p. 662–665, 2012.
- 6 KAPITANIAK, T. et al. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific Reports*, v. 04, p. 06379/01–06379/04, 2014.
- 7 OLMÍ, S. et al. Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators. *Physical Review E*, v. 92, p. 030901/01–030901/06, 2015.
- 8 BLAHA, K. et al. Symmetry effects on naturally arising chimera states in mechanical oscillator networks. *Chaos*, v. 26, p. 116307/01–116307/10, 2016.
- 9 HIZANIDIS, J. et al. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific Reports*, v. 06, p. 19845/01–19845/10, 2016.
- 10 BATISTA, C. A. S. et al. Delayed feedback control of bursting synchronization in a scale-free neuronal network. *Neural Network*, v. 23, p. 114–124, 2010.
- 11 WOLFRUM, M.; OMEL'CHENKO, O. E. Chimera states are chaotic transients. *Physical Review E*, v. 84, p. 015201/01–015201/04, 2011.
- 12 OMEL'CHENKO, I. et al. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Physical Review Letters*, v. 106, p. 234102/01–234102/04, 2011.
- 13 SANTOS, M. S. et al. Recurrence quantification analysis of chimera states. *Physics Letters A*, v. 379, n. 37, p. 2188–2192, 2015.
- 14 BOCCALETTI, S. et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, v. 366, n. 01-02, p. 01–101, 2002.
- 15 LIND, P. G.; GALLAS, J. A. C.; HERRMANN, H. J. Coherence in scale-free networks of chaotic maps. *Physical Review E*, v. 70, p. 056207/01–056207/08, 2004.

- 16 DE FREITAS, M. S. T.; VIANA, L. R.; GREBOGI, C. Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 14, n. 03, p. 927–950, 2004.
- 17 SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Progress of Theoretical Physics*, v. 76, n. 03, p. 576–581, 1986.
- 18 SAKAGUCHI, H. Instability of synchronized motion in nonlocally coupled neural oscillators. *Physical Review E*, v. 73, p. 031907/01–031907/07, 2006.
- 19 HIZANIDIS, J. et al. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 24, n. 03, p. 1450030/01–1450030/09, 2014.
- 20 SANTOS, M. S. et al. Chimera-like in a neuronal network model of the cat brain. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 101, p. 86–91, 2017.
- 21 YAO, N. et al. Robustness of chimera states in complex dynamical systems. *Scientific Reports*, v. 03, p. 03552/01–03552/08, 2013.
- 22 GAUTAM, S. C.; SEN, A. Chimera states: The existence criteria revisited. *Physical Review Letters*, v. 112, p. 144101/01–144101/04, 2014.
- 23 GAMBUTTA, L. V. et al. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. *Physical Review E*, v. 90, p. 032905/01–032905/08, 2014.
- 24 MARWAN, N. et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, v. 438, p. 237–329, 2007.
- 25 MARWAN, N. A historical review of recurrence plots. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 164, p. 03–12, 2008.
- 26 ALLIGOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. *Chaos: an introduction to dynamical system*. New York, USA: Springer Verlag, 1996. 603 p.
- 27 WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos*. New York, USA: Springer Verlag, 2003. 843 p.
- 28 KUZNETSOV, A. P.; SAVIN, A. V.; SAVIN, D. V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. *Physica A*, v. 387, n. 07, p. 1464–1474, 2007.
- 29 HUANG, K. *Statistical Mechanics*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1987. 493 p.
- 30 CHEN, W. S. Use of recurrence plot and recurrence quantification analysis in Taiwan unemployment rate time series. *Physica A*, v. 390, n. 07, p. 1332–1342, 2011.
- 31 ECKMANN, J. P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, v. 04, n. 09, p. 973–977, 1987.
- 32 MARWAN, N.; KURTHS, J. Cross recurrence plot and their applications. *Mathematical Physics Research at the Cutting Edge*, p. 101–139, 2004.

- 33 WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, v. 393, p. 440–442, 1998.
- 34 LAMEU, E. L. et al. Suppression of bursting synchronization in clustered scale-free (rich-club) neuronal networks. *Chaos*, v. 22, n. 04, p. 043149/01–043149/12, 2012.
- 35 AZEVEDO, F. A. C. et al. Equal numbers of neuronal and nonneuronal cells make the human brain an isometrically scaled-up primate brain. *The Journal of Comparative Neurology*, p. 532–541, 2009.
- 36 KANDEL, E. R. et al. *Princípios de Neurociências*. Porto Alegre, Brasil: AMGH, 2014. 1496 p.
- 37 HINDMARSH, J. L.; ROSE, R. M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature*, v. 276, p. 162–164, 1982.
- 38 HINDMARSH, J. L.; ROSE, R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of Royal Society B*, v. 221, n. 1222, p. 87–102, 1984.
- 39 STORACE, M.; LINARO, D.; LANGE, E. de. The Hindmarsh-Rose neuron model: Bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. *Chaos*, v. 18, p. 033128/01–033128/10, 2008.
- 40 SCANNELL, J. W.; BLAKEMORE, C.; YOUNG, M. P. Analysis of connectivity in the cat cerebral cortex. *The Journal of Neuroscience*, v. 15, n. 02, p. 1463–1486, 1995.
- 41 LOVINGER, D. M. Communication networks in the brain: Neurons, receptors, neurotransmitters, and alcohol. *Alcohol research & health*, v. 31, p. 196–214, 2008.
- 42 THOMSON, A. M. Chemical and electrical interneuron coupling. *Current Biology*, v. 10, n. 03, p. 100–112, 2000.
- 43 SATIN, L. S.; KINARD, T. A. Neurotransmitters and their receptors in the islets of Langerhans of the pancreas. *Endocrine*, v. 08, n. 03, p. 213–223, 1998.
- 44 WU, P. H. et al. Radiation induces acute alterations in neuronal function. *PLoS ONE*, v. 07, n. 05, p. 37677/01–37677/08, 2012.
- 45 ROTHKEGEL, A.; LEHNERTZ, K. Irregular macroscopic dynamics due to chimera states in small-world networks of pulse-coupled oscillators. *New Journal of Physics*, v. 16, p. 055006/01–055006/22, 2014.
- 46 HIZANIDIS, J. et al. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific Reports*, v. 06, p. 19845/01–19845/10, 2016.
- 47 MINDLIN, G.; GILMORE, R. Topological analysis and synthesis of chaotic time series. *Physica D*, v. 58, p. 229–242, 1992.
- 48 ZBILUT, J. P. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. *Physics Letters A*, v. 171, p. 199–203, 1992.
- 49 YANG, D. et al. Selection of optimal threshold to construct recurrence plot for structural operational vibration measurements. *Journal of Sound and Vibration*, v. 349, p. 361–374, 2015.
- 50 INTOSALMI, J. et al. Computational study of noise in a large signal transduction network. *BMC Bioinformatics*, v. 12, p. 252/01–252/12, 2012.

- 51 FAISAL, A. A.; SELEN, L. P. J.; WOLPERT, D. M. Noise in the nervous system. *Neuroscience*, v. 09, p. 292–299, 2008.
- 52 JONES-DAVIS, D. M.; MACDONALD, R. L. GABA_A receptor function and pharmacology in epilepsy and status epilepticus. *Currente Opinion in Pharmacology*, v. 03, p. 12–18, 2003.
- 53 MARWAN, N.; KURTHS, J. Nonlinear analysis of bivariate data with cross recurrence plots. *Physics Letters A*, v. 302, n. 05, p. 299–307, 2002.
- 54 LI, S. et al. Identifying spatial patterns of synchronization between NDVI and climatic determinants using joint recurrence plots. *Environmental Earth Sciences*, v. 64, n. 03, p. 851–859, 2011.