

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Área de Concentração: Física

**EFEITOS DE DISSIPAÇÃO E RUÍDO NO
MODELO DE ONDAS DE DERIVA**

RICARDO SOVEK OYARZABAL

PONTA GROSSA
2017

RICARDO SOVEK OYARZABAL

EFEITOS DE DISSIPAÇÃO E RUÍDO NO MODELO DE ONDAS DE DERIVA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito necessário à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos Batista

Coorientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Júnior

Coorientador no exterior: Prof. Dr. Miguel Ángel Fernández Sanjuán

PONTA GROSSA
2017

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

098e Oyarzabal, Ricardo Sovek
 Efeitos de dissipação e ruído no modelo
 de ondas de deriva/ Ricardo Sovek
 Oyarzabal. Ponta Grossa, 2017.
 77f.

 Tese (Doutorado em Ciências - Área de
 Concentração: Física), Universidade
 Estadual de Ponta Grossa.

 Orientador: Prof. Dr. Antonio Marcos
 Batista.

 Coorientador: Prof. Dr. José Danilo
 Szezech Júnior.

 Coorientador: Prof. Dr. Miguel Ángel
 Fernández Sanjuán.

 1.Ondas de deriva. 2.Sistemas
 dissipativos. 3.Ressonância estocástica e
 tempo de escape. I.Batista, Antonio
 Marcos. II. Szezech Júnior, José Danilo.
 III. Sanjuán, Miguel Ángel Fernández. IV.
 Universidade Estadual de Ponta Grossa.
 Doutorado em Ciências. V. T.

CDD: 530.44

TERMO DE APROVAÇÃO

RICARDO SOVEK OYARZABAL

“Efeitos de dissipação e ruído no modelo de ondas de deriva”

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

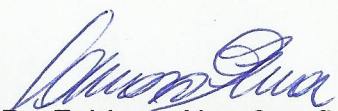
Orientador:



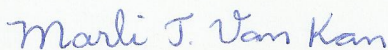
Prof. Dr. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR



Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset
Departamento de Eletrônica – UTFPR/PR



Prof. Dr. Fabiano Alan Serafim Ferrari
Instituto de Engenharia, Ciência e Tecnologia - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM/MG



Dr.ª Marli Terezinha Van Kan
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR



Prof. Dr. Fabiano Manoel de Andrade
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR

Ponta Grossa, 21 de fevereiro de 2017

Agradecimentos

Agradeço: à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação Araucária pelo suporte financeiro. À Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e a todos seus funcionários. Ao programa de Pós Graduação em Ciências/Física (UEPG). À Universidad Rey Juan Carlos (URJC), Madrid, Espanha e a todos seus funcionários. Ao Programa de Doutorado Sanduiche no Exterior (PDSE).

Agradeço: ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, processo 2011/19296-1), à *Financial support by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness under project number FIS2013-40653-P*.

Agradeço ao professor orientador Dr. Antonio Marcos Batista, líder do Grupo de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos da UEPG. Agradeço pela orientação e pela amizade. Ao professor Dr. José Danilo Szezech Júnior pelo companherismo, pelas discussões e sugestões na elaboração dos programas utilizados nas simulações desta tese. Ao Prof. Dr. Miguél Sanjuán pela orientação na Espanha, pelas sugestões e pela amizade.

Agradeço aos colaboradores externos, professores Dr. Ricardo Luiz Viana, Dr. Iberê Luiz Caldas, Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza, Dra. Kelly Cristiane Iarosz e Dr. Jesús Seoane Sepúlveda que contribuíram em discussões e em publicações de trabalhos.

Agradeço aos colegas de laboratório: Ewandson, Fernando, Marli, Michele, Moisés, Rafael, Robson, Paulo, Ronaldo e Vagner pelo companherismo.

Agradeço ao Grupo de la Universidad Rey Juan Carlos: Àlbar, Àlvaro, Alex, Anders, Inês, Javier, Juan, Mattia, Rúben, Sijo.

Agradeço à minha família. Meus pais Miguel e Teresa, pela vida. Minhas irmãs, Cristina e Tatiana e minha sobrinha Isabela, Gustavo e demais familiares.

Agradeço à minha esposa e companheira Rosana Follador. Obrigado pelo amor e pelo carinho.

Resumo

Neste estudo investigamos o transporte caótico de partículas em um plasma magnetizado com duas ondas de deriva eletrostáticas. Considerando a dissipação, verificamos o surgimento de atratores periódicos e mostramos que as propriedades das bacias dependem da dissipação. O tempo de escape médio das condições iniciais, em uma fronteira estabelecida, obedece um decaimento do tipo lei de potência com o aumento da dissipação. Encontramos também expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos, consequentemente, as trajetórias apresentam transiente caótico. Com o acréscimo de ruído no movimento de deriva dissipativo, notamos um aumento nos picos relativos ao tempo de escape médio. Estes valores máximos ocorrem para determinado valor crítico da intensidade do ruído. A otimização de uma característica do sistema é a situação em que ocorre a ressonância estocástica (RE). Observa-se que o ruído altera a distribuição no tempo de escape. Este trabalho é relevante no sentido de melhorar a compreensão do modelo de ondas de deriva na presença de dissipação e ruído.

Palavras chave: Ondas de Deriva, Sistemas Dissipativos, Ressonância Estocástica e Tempo de Escape.

Abstract

We investigated chaotic transport of particles in a magnetized plasma with two waves of electrostatic drift. Considering the dissipation, we verify the appearance of periodic attractors and show that the properties of the basin depend on the dissipation. The average escape time of the initial conditions of an established frontier obeys a power law decay type with increasing of the dissipation. We find positive finite time Lyapunov exponents in dissipative drift motion, consequently the trajectories exhibit transient chaotic transport. The increase in noise dissipative drift motion enhances escape peaks in the average time for a given critical value of the noise intensity. The optimization of a system feature is the situation that occurs stochastic resonance (SR). It is observed that the noise changes the distribution in the escape time. This work is important to improve the understanding of the drift wave model in the presence of dissipation and noise, a natural ingredient in the environment of this kind of physical problem.

Keywords: Drift Waves, Plasma Physics, Stochastic Resonance, Escape Time.

Lista de Símbolos

P_r	Número de Prandt no sistema de Lorenz.
r	Número de Rayleigh.
μ_L	Viscosidade no sistema de Lorenz.
κ	Condutividade térmica no sistema de Lorenz.
$H(x,y,t)$	Função Hamiltoniana.
K	Energia Cinética.
V	Energia Potencial.
P_k	Trajectoria inicial que cruza uma seção de Poincaré.
P_{k+1}	Mapa de Poincaré.
T	Intervalo de tempo do expoente de Lyapunov a tempo finito.
λ_i	I-ésimo expoente de Lyapunov.
$\mathcal{M}^T(x(0),y(0))$	Matriz Jacobiana nos pontos $(x(0),y(0))$.
$\mathcal{U}_T$	Autovetor.
$\vec{E}$	Campo elétrico.
$\vec{B}$	Campo magnético.
$\vec{v}_E$	Velocidade de deriva.
B_0	Intensidade do campo magnético toroidal de equilíbrio.
ϕ_0	Potencial do plasma em equilíbrio.
$\phi(x,y,t)$	Potencial elétrico.

A_i	Amplitude da onda de deriva.
ω_i	Frequência angular da i-ésima onda.
k_{x_i}	Números de onda na direção x.
k_{y_i}	Números de onda na direção y.
a	Potencial na forma linear.
U	Parâmetro de Confinamento para uma onda de deriva.
u	Velocidade de fase entre duas ondas.
μ	Termo dissipativo acrescentado ao modelo de ondas de deriva.
σ	Intensidade do ruído.
σ_m	Intensidade do ruído mínimo para ocorrer RE.
σ_c	Intensidade do ruído crítico onde ocorre RE.

Lista de Figuras

2.1	Esboço de duas placas paralelas com temperaturas $T_1 < T_2$ e um fluido no centro.	p. 22
2.2	Atrator de Lorenz para os parâmetros $P_r = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.	p. 24
2.3	Esboço de um pêndulo não linear. (b) Retrato de fase do sistema (2.10) quando $-4\pi \leq \theta \leq 4\pi$.	p. 27
2.4	Interseção de trajetórias com uma seção de Poincaré Ω .	p. 28
2.5	Ressonância estocástica em um potencial duplo simétrico.	p. 33
2.6	Mecanismo da ressonância estocástica	p. 34
3.1	Esquema dos principais componentes do tokamak.	p. 36
3.2	(a) Toro ou toróide é o sólido ou superfície gerada pela rotação de uma curva plana, de raio r_0 , fechada em torno de um eixo R que lhe é coplanar e não secante. (b) Direção poloidal e toroidal de um toróide em torno dos eixos menor r_0 e maior R , respectivamente.	p. 37
3.3	Representação da transformação de coordenada toroidal para cartesiana. (a) Cilindro com coordenadas θ , r e z . (b) Coordenadas cartesianas onde a direção radial r do cilindro é definida como o eixo x do sistema cartesiano, a direção poloidal θ é definida como eixo y e a direção toroidal z como eixo z .	p. 38
3.4	Representação do movimento espiralado da partícula ao longo do campo magnético $\vec{B}$.	p. 39
3.5	Esquema do movimento de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ no centro de guia de uma partícula para o modelo de ondas de deriva. A velocidade de deriva $\vec{v}_E$ é perpendicular aos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, onde neste modelo consideramos homogêneos.	p. 40

3.6	Espaço de fases para o sistema com uma onda de deriva. Para o parâmetro de confinamento $U = 0$ não existe transporte de partícula.	p. 45
3.7	Espaço de fases do sistema com uma onda de deriva para os parâmetros de confinamento (a) $U = 0,5$, onde encontramos trajetórias fechadas e abertas. (b) $U = 1,5$ existem somente trajetórias abertas.	p. 46
3.8	Simulação numérica para os parâmetros $a - u_1 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0,1$, $k_{y_1} = 1$, $k_{y_2} = 0,5$, $k_{x_1} = 1$, $k_{x_2} = \sqrt{3}$, (a) Para o valor do parâmetro $u = 0$, mesmo a perturbação da segunda onda as trajetórias são regulares. Ocorre transporte de partícula de uma ilha para outra. (b) $u = 0,5$ ilhas KAM estão submersas em um mar caótico.	p. 47
3.9	Simulação numérica para os parâmetros $a - u_1 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0,1$, $k_{y_1} = 1$, $k_{y_2} = 0,5$, $k_{x_1} = 1$, $k_{x_2} = \sqrt{3}$, (a) $u = 1,5$ (b) Ampliação com a $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$	p. 48
4.1	Seção de Poincaré do espaço de fases. Pontos pretos correspondem ao caso conservativo, $\mu = 0$, e símbolos coloridos correspondem ao caso com uma quantidade de dissipação $\mu = 10^{-3}$. (b) Bacia de atração para $\mu = 10^{-3}$. As cores preta e vermelha correspondem à bacia dos atratores de período 1 em (a) e a cor amarela corresponde às condições iniciais que escapam para fora da região do espaço de fases limitadas pela grade $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$	p. 51
4.2	Bacia de atração para (a) $\mu = 10^{-2}$ e (b) $\mu = 10^{-1}$. Cores preta e vermelha correspondem aos atratores de período 1 e a cor amarela às condições iniciais que escapam da grade de condições iniciais.	p. 52
4.3	Tempo de escape em função das condições iniciais para $\mu = 0$. Condições iniciais representadas em cores azul escura escapam mais rapidamente que as representadas nas cores vermelhas, conforme mostra a paleta de cores. Regiões em branco representam as condições iniciais que não escapam da grade. (b) respectiva distribuição do tempo de escape.	p. 53

4.4	Tempo de escape em escala de cores como função das condições iniciais para valores de dissipação. Regiões em azul representam condições iniciais que escapam rapidamente, enquanto regiões em vermelho representam partículas que demoram mais tempo para escaparem. (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 10^{-3}$, (c) $\mu = 10^{-2}$ e (d) $\mu = 10^{-1}$	p. 54
4.5	Distribuição assimétrica para a direita referentes à Figura 4.5(a),(b),(c) e (d) para valores de dissipação (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 10^{-3}$, (c) $\mu = 10^{-2}$ e (d) $\mu = 10^{-1}$, respectivamente. O tempo em que todas as partículas que escapam da grade é inversamente proporcional ao valor da dissipação μ	p. 55
4.6	Tempo de escape médio como função da dissipação. Linha sólida é o ajuste para uma lei de potência.	p. 56
4.7	Expoentes de Lyapunov a tempo finito em escala de cores em função das condições iniciais para $T = 100$, $\mu = 10^{-3}$ e valores da tabela 3.1.	p. 58
4.8	Trajetória de condições iniciais antes de alcançar um atrator.	p. 58
5.1	Trajetória de uma condição inicial para valores de ruído $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-2}$ e $\sigma = 0$ representados nas cores azul, verde, vermelha e preta, respectivamente. (a) $\mu = 0$ e (b) $\mu = 10^{-3}$	p. 60
5.2	Tempo de escape médio em função da dissipação para intensidade de ruído $\sigma = 0$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-3}$ e $\sigma = 6,625 \times 10^{-3}$, respectivamente. Observamos a diminuição do tempo de escape quando a dissipação torna-se maior. Para valores de dissipação maiores que $\mu = 10^{-3}$ as curvas se ajustam a uma lei de potência.	p. 61
5.3	Tempo de escape médio em função do parâmetro dissipativo para valores de ruído acima de $\sigma_m = 6,63 \times 10^{-3}$. As curvas em azul, verde, vermelho e preto representam valores de ruído $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-1}$ e $\sigma = 2 \times 10^{-2}$, respectivamente.	p. 62
5.4	Ruído em função da dissipação em que obtemos uma relação entre σ e μ na forma $\sigma = \sqrt{2\mu}$ (linha vermelha).	p. 63

- 5.5 Tempo de escape médio contra a intensidade do ruído para diferentes valores de dissipação. Observamos o fenômeno RE, onde o tempo de escape médio é otimizado para valores de dissipação e ruído. p. 64
- 5.6 Tempo de escape em barra de cores para valores de dissipação e ruído, onde consideramos (a) $\mu = 10^{-3}$ e $\sigma = 10^{-2}$, e (c) $\mu = 10^{-3}$ e $\sigma = 2,7 \times 10^{-2}$. As Figuras (b) e (d) correspondem à distribuição do tempo de escape para (a) e (c), respectivamente. p. 65
- 5.7 Tempo de escape em barra de cores para valores de dissipação e ruído, onde consideramos (a) $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 10^{-2}$, e (c) $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 9,6 \times 10^{-2}$. As Figuras (b) e (d) correspondem à distribuição do tempo de escape para (a) e (c), respectivamente. p. 66
- 5.8 Fração de partículas que escapam da grade de integração com a variação da intensidade do ruído. (a) Para dissipação $\mu = 10^{-3}$ encontramos $\sigma_c = 2,7 \times 10^{-2}$. (b) Para dissipação $\mu = 10^{-2}$ encontramos $\sigma_c = 9,6 \times 10^{-2}$. p. 68

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do modelo duas ondas de deriva.	p. 47
-----	--	-------

Sumário

1	Introdução	p. 16
2	Conceitos Básicos	p. 20
2.1	Sistemas Dinâmicos	p. 20
2.2	Dinâmica Não Linear	p. 21
2.2.1	Atrator de Lorenz	p. 22
2.3	Sistemas Hamiltonianos	p. 24
2.3.1	Pêndulo não linear	p. 26
2.3.2	Seções de Poincaré	p. 27
2.3.3	Toros KAM	p. 29
2.4	Expoentes de Lyapunov	p. 29
2.5	Sistemas dissipativos	p. 30
2.6	Ressonância estocástica (RE)	p. 32
3	Modelo de Ondas de Deriva	p. 35
3.1	Confinamento do plasma	p. 35
3.2	Coordenadas do Sistema	p. 37
3.3	Velocidade de Deriva	p. 39
3.4	Descrição Hamiltoniana das Ondas de Deriva	p. 40
3.5	Sistema Não Perturbado	p. 43

3.6	Duas Ondas de Deriva	p. 44
4	Dissipação no Modelo de Ondas de Deriva	p. 50
4.1	Atratores e bacias de atração	p. 50
4.2	Tempo de escape	p. 53
4.3	Transiente Caótico	p. 57
5	Efeito de Ruído do Modelo de Duas Ondas de Deriva	p. 59
5.1	Duas Ondas de Deriva com Ruído	p. 59
5.2	Ressonância Estocástica	p. 60
5.3	Bacia do Tempo de Escape	p. 64
6	Conclusões	p. 69
	Referências Bibliográficas	p. 71

1 *Introdução*

Fenômenos não lineares estão presentes em inúmeros contextos da matemática e da física. Como exemplo de sistemas dinâmicos não lineares e determinísticos podemos destacar o caótico, que possui como característica fundamental a sensibilidade às condições iniciais. Em geral, sistemas caóticos não têm solução analítica, por isso exigem computadores e métodos numéricos. A base da teoria do caos foi primeiramente estabelecida pelo matemático e físico francês Henri Poincaré. Em 1890 ele estudou o problema dos 3 corpos, onde mostrou que não existe uma solução fechada para este sistema (1). Todavia, o estudo das consequências do comportamento caótico não era viável naquela época, pois ainda não existiam computadores para calcular as soluções das equações de movimento. Anos mais tarde, em 1963, Edward Norton Lorenz publicou um artigo sobre fluxos determinísticos não periódicos (2). Lorenz trabalhava com previsão numérica do tempo através da solução de um conjunto de 12 equações diferenciais acopladas. Ele descobriu que em sistemas não lineares, condições iniciais muito próximas poderiam evoluir para dois estados completamente diferentes no futuro. Desta maneira, em sistemas caóticos determinísticos o comportamento futuro é determinado pelo conjunto de suas condições em seu estado presente, não obstante, mesmo que tenham a essência determinística, são sistemas imprevisíveis a longo prazo (3).

Em 1976, Robert May publicou o resultado de suas investigações na dinâmica do crescimento populacional, em que observou um modelo que exibiu uma conduta caótica ao estudar propriedades do mapa logístico (4). Contudo, o termo caos aparece pela primeira vez no artigo denominado *Period three implies chaos* de James Yorke (5). Além deste pesquisador, contribuíram na construção da teoria do caos Edward Ott e Celso Grebogi, por intermédio de suas investigações mostraram que através de pequenas perturbações

dependentes do tempo, de algum parâmetro do sistema, é possível chegar a uma variedade de atratores periódicos. Este método é conhecido como método OGY, devido aos seus nomes Ott, Grebogi e Yorke (6). Desde então, a teoria do caos vem sendo amplamente estudada e é aplicada em vários campos da ciência, tais como física, ciências ambientais, engenharia, biologia, meteorologia, ecologia, sociologia e filosofia (7).

Entre os modelos estudados na dinâmica não linear, podemos igualmente destacar os sistemas que consideram termos dissipativos e ruídos, uma vez que refletem melhor a realidade física e os fenômenos naturais (8). Em sistemas dissipativos é possível encontrar algumas características interessantes, tais como determinação de eventos de crise, surgimento de atratores, efeitos de transientes e a observação de variedades estáveis e instáveis de pontos de sela (9). Efeitos de ruído também podem ser de interesse no estudo de sistema dinâmicos. Um exemplo é o fenômeno conhecido como ressonância estocástica, onde propriedades do sistema podem ser otimizadas para valores críticos de ruído (10). Por este motivo, efeitos de dissipação e ruído também estimulam muitas pesquisas dentro da dinâmica não linear, por exemplo, em sistemas que envolvem estruturas fractais, espalhamento, redes neuronais e outros sistemas biológicos (11–14).

Atrelada aos fenômenos não lineares podemos juntamente destacar a física básica de plasma, que se preocupa em entender o comportamento de plasmas. O plasma apresenta comportamento coletivo, pois neste estado os átomos estão dissociados em íons positivos e elétrons (15,16). A física de plasma envolve a dinâmica de muitos corpos em um sistema que está fora do equilíbrio. De forma geral, podemos definir plasma como um gás quase neutro formado por partículas carregadas e neutras. Muitos fenômenos físicos ocorrem em um plasma o que é um campo vasto para inúmeras pesquisas nesta área (17,18). Na dinâmica do plasma é possível encontrar o surgimento de campos eletromagnéticos que influenciam todas as partículas em seu interior e as propriedades destes sistemas são marcadas por interações entre partículas que apresentam comportamento global (19).

Problemas energéticos também são motivo de muitas pesquisas na área de física de plasmas. Uma forma de produção de energia é através da fusão termonuclear controlada. A ideia fundamental é a construção de um reator que gere mais energia do que a utilizada para o confinamento e aquecimento. Para isto, o plasma tem que ser confinado com altos valores de temperatura e densidade, por um tempo consideravelmente extenso,

antes que as partículas escapem pela borda do reator. Diferentes modelos matemáticos são utilizados com o objetivo de estudar as propriedades do confinamento (15,18). Alguns dos problemas que afetam o confinamento do plasma dizem respeito à turbulência eletrostática e ao transporte anômalo nas paredes do tokamak (20–22). As ondas de deriva, que são responsáveis pelo transporte anômalo e são uma expressão da turbulência eletrostática no limite do confinamento. Como consequência do movimento de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ acontece o resfriamento do plasma, a perda de energia e o escape de partículas pela fronteira do sistema (23,24).

W. Horton elaborou a formulação Hamiltoniana do modelo de ondas de deriva que, por ser quase integrável, permite estudar características de transporte caótico de partículas em plasma confinado magneticamente (25). Desta forma, este trabalho tem como objetivo investigar o efeito da variação de parâmetros, dissipação e ruído aditivo, no modelo de ondas de deriva. Este estudo permite mostrar novas perspectivas sobre o transporte de partículas com respectiva otimização de propriedades do sistema (26–28). Como consequência do confinamento do plasma temos o escape de partículas pelas bordas. Mostramos que características do tempo de escape das partículas dependem da dissipação e do ruído.

A estrutura desta tese está dividida da seguinte forma: no Capítulo 2 introduzimos conceitos da dinâmica não linear, onde abordamos características de sistemas Hamiltonianos. Tratamos também sobre seções de Poincaré e ilhas KAM dispersas em mar caótico e expoente de Lyapunov. Apresentamos o mecanismo da ressonância estocástica, fenômeno que otimiza propriedades de um sistema dinâmico sob a ação de um ruído. No Capítulo 3 introduzimos o modelo de duas ondas de deriva, onde mostramos características do modelo tais como as órbitas no espaço de fases. O Capítulo 4 é resultado dos artigos (26,27). Primeiramente introduzimos um termo dissipativo ao modelo e encontramos atratores periódicos. Também mostramos a bacia de atração para diversos valores de dissipação. Estudamos o tempo de escape médio de partículas e sua respectiva distribuição. Para o modelo de duas ondas de deriva dissipativo mostramos que a relação entre o tempo de escape médio de partículas em uma grade possui um decaimento que obedece uma lei de potência. No Capítulo 5 mostramos os resultados do efeito de ruído (28). Mostramos que o ruído modifica a duração do tempo de escape médio das partículas limitadas em uma

fronteira. Encontramos uma relação em forma de cúspide, o que significa que para valores de dissipação e ruído, esta propriedade do sistema é otimizada, o que sugere o fenômeno ressonância estocástica (RE). Demonstramos também que valores críticos de ruído, onde ocorre RE, estão relacionados com o número total de partículas que escapam. Finalmente, no Capítulo 6 expomos as conclusões que chegamos com nossos estudos e apresentamos algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 *Conceitos Básicos*

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos referentes aos estudos desenvolvidos nesta tese. Primeiramente apresentamos um breve histórico sobre sistemas dinâmicos, em seguida apontamos algumas características que envolvem sistemas dinâmicos não lineares. Com o objetivo de estudar um modelo Hamiltoniano sob o efeito de dissipação e ruído, dissertamos também sobre sistemas Hamiltonianos, sistemas dissipativos e o fenômeno de ressonância estocástica.

2.1 Sistemas Dinâmicos

A dinâmica é um ramo da mecânica clássica em que se estuda o movimento dos corpos sob a influência de um sistema de forças. Os princípios da dinâmica foram introduzidos por Galileu Galilei (1564-1642), onde examinou de uma forma sistemática o movimento uniformemente acelerado e o movimento pendular, além de sentenciar as primeiras noções sobre inércia. Posteriormente, Isaac Newton (1642 - 1727), formulou as leis do movimento e da gravitação universal e é considerado o fundador da mecânica clássica. As leis de Newton foram expressas por derivada, que representa a taxa de variação temporal de uma determinada grandeza física, a qual ele chamou de *fluxion* (29). Após o conceito de derivada ter sido incorporado no mundo da ciência, seu desenvolvimento levou às equações diferenciais, ferramenta matemática útil no estudo de fenômenos físicos.

As equações diferenciais revelam como a variação de uma grandeza é capaz de influenciar a variação de outras grandezas envolvidas no sistema e são representadas como $\dot{x} = f(t, x)$, onde o tempo t é uma variável independente (30). Deste modo, descrições quantitativas de fenômenos que evoluem no tempo podem ser descritos através de equações

diferenciais, isto é, relatam o comportamento futuro através do cálculo de equações de trajetórias (31,32).

Em geral, existem dois principais tipos de equações diferenciais: equação diferencial ordinária (EDO), que contém funções de uma variável e as derivadas desta variável, e equação diferencial parcial (EDP), que possui funções com mais de uma variável e suas respectivas derivadas parciais (33). As equações diferenciais também podem ser subdivididas em lineares e não lineares. De modo geral, em sistemas dinâmicos lineares, representados por equações diferenciais lineares, o movimento se apresenta previsível, regular e matematicamente pode-se aplicar o princípio de superposição. Assim, duas soluções podem ser somadas para formarem uma terceira solução. Já sistemas dinâmicos não lineares, constituídos por equações diferenciais não lineares, não são simples de resolver analiticamente e, geralmente, são estudadas por meio de métodos numéricos (34).

2.2 Dinâmica Não Linear

Sistemas não lineares apresentam uma dinâmica que melhor condiz com a natureza e podem ser observados em inúmeros contextos da ciência, tais como em física, química, biologia, ecologia e economia (3). Estudos da dinâmica não linear tratam geralmente de sistemas dinâmicos descritos por modelos matemáticos simples, todavia exibem comportamento complexo (35). Os sistemas não lineares possuem como característica que seu comportamento ao longo do tempo não pode ser previsto e o princípio de superposição não se aplica para encontrar outras soluções, assim apresentam comportamento não periódico, irregular ou aleatório (34).

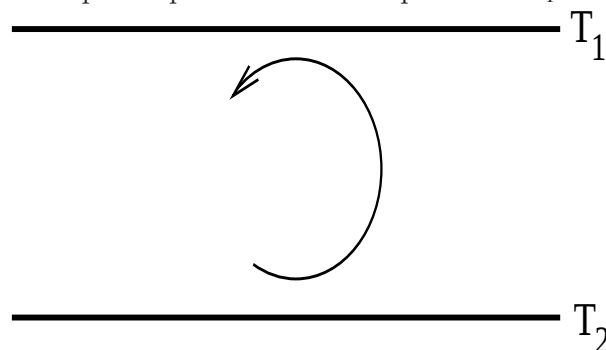
A dinâmica não linear estuda sistemas de equações de evolução onde, geralmente, não irão existir soluções exatas para as equações não lineares e o estado futuro é dependente do estado presente (36). É possível observar comportamentos complexos ao estudar a evolução temporal destes sistemas, como por exemplo: órbitas periódicas e quase periódicas, ciclos limite, transiente e caos (3). Devido à não linearidade, estes modelos podem apresentar características comuns, como pontos de equilíbrio instáveis e estáveis, bifurcações, comportamentos periódicos e caóticos (9,37).

Sistema caótico é um exemplo de sistema não linear. A teoria do caos se deve a Henry Poincaré e a Edward Lorenz. Poincaré, no final do século XIX, ao estudar a estabilidade do universo com o problema dos 3 corpos, constatou que não é possível fazer uma previsão a longo prazo sobre este sistema. Lorenz, em 1963, verificou que uma pequena alteração nas condições iniciais podem ocasionar diferenças na evolução do sistema (35). Desde então, a teoria do caos estuda o comportamento de sistemas dinâmicos e é um campo da matemática com aplicações em diversas disciplinas além da física, como meteorologia, engenharia entre outras (14, 36). Em um sistema caótico é possível encontrar comportamento irregular, também denominado de aperiódico, e uma dependência sensível das condições iniciais. Isto quer dizer que dois processos originados por condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente com o tempo (9).

2.2.1 Atrator de Lorenz

O movimento convectivo de um fluido, como o ar atmosférico, é um exemplo de sistema caótico. O modelo de convecção natural de Rayleigh-Bénard (38) consiste em duas placas paralelas com temperaturas $T_1 < T_2$ que são separadas por um fluido, conforme ilustra a Figura 2.1. Ao aquecer o fluido pela parte inferior, com temperatura T_2 , ocorre movimentos convectivos. Desta forma, o fluido da parte inferior tende a subir enquanto o da parte superior, pela ação da gravidade, tende a descer. Quando a diferença de temperatura ΔT ultrapassa um determinado valor crítico o fluido começa a girar e o calor também é transportado por convecção (38).

Figura 2.1: Esboço de duas placas paralelas com temperaturas $T_1 < T_2$ e um fluido no centro.



FONTE: Adaptado de (38).

Edward Lorenz trabalhou como meteorologista e utilizava 12 equações diferenciais acopladas que descreviam o ar se movimentando na atmosfera, uma versão simplificada do modelo de Rayleigh-Bénard. A solução numérica destas equações considerava velocidade do vento, temperatura, pressão entre outros parâmetros. Estas soluções eram estacionárias e periódicas. Em 1959 Lorenz encontrou uma combinação de parâmetros capazes de produzir uma solução aperiódica para este sistema. Certo dia, para ganhar tempo com seus cálculos numéricos, decide recalculá-los a partir de valores impressos no seu computador. Introduziu os valores obtidos e percebeu que os resultados finais não coincidiam. Os valores concordavam inicialmente, porém a diferença entre eles aumentava até o ponto de divergirem completamente (29). Como seu computador trabalhava com 6 algarismos significativos e ele alterou três algarismos, acabou introduzindo um erro que crescia exponencialmente durante o cálculo numérico. Com isto, verificou uma característica caótica que é a sensibilidade das condições iniciais. Deste modo, Lorenz confirma que o resultado final diverge mesmo com pequenas diferenças iniciais.

Posteriormente, Lorenz obteve um sistema formado por 3 equações com apenas 3 variáveis que possuía uma solução aperiódica. Assim, obteve o sistema de equações com três equações diferenciais ordinárias

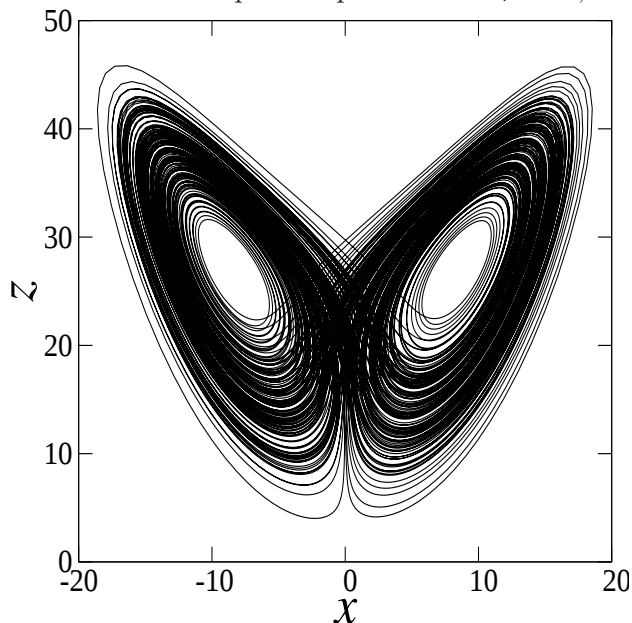
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -P_r x + P_r y \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde x é o fluxo convectivo, y é a diferença de temperatura, z é proporcional a distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao perfil linear, $P_r = \mu_L/\kappa$ é chamado de número de Prandtl, que é a relação entre a viscosidade e a condutividade térmica, r é o número de Rayleigh e b representa parâmetros do sistema. O sistema de equações (2.1) é não linear devido aos produtos cruzados das variáveis x , y e z (38).

A Figura 2.2 mostra o atrator do sistema de Lorenz para os valores de $P_r = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. O conjunto de pontos que formam esta curva tem uma estrutura matemática complicada. É um atrator caótico e sua geometria é similar à asa de uma borboleta. Por este motivo é chamado de atrator borboleta e representa o efeito borboleta, que é o efeito

que pequenas alterações nas condições iniciais podem causar sobre o comportamento futuro (3).

Figura 2.2: Atrator de Lorenz para os parâmetros $P_r = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.



FONTE: O autor.

2.3 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas Hamiltonianos são sistemas dinâmicos conservativos, ou seja, a energia mantém-se constante conforme o tempo evolui. O formalismo Hamiltoniano que auxilia na resolução e compreensão de inúmeros problemas matemáticos utilizados na física (39). Na formulação Lagrangiana, baseada nas equações de movimento de Euler-Lagrange, temos um sistema de equações diferenciais de segunda ordem composto por um conjunto de variáveis que representam a posição e a velocidade de um sistema físico(40). Já a formulação Hamiltoniana utiliza um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, onde as variáveis determinam a posição e a velocidade (41). A transformação, de Lagrangiana para Hamiltoniana, não modifica as características físicas do sistema, contudo a formulação de Hamilton exibe algumas vantagens práticas como: unicidade das soluções no espaço de fases, transformações canônicas e a teoria de perturbação (42). Assim, um sistema dinâmico

regido pelas equações de Hamilton (H) é dito sistema Hamiltoniano. Este combina equações diferenciais e princípios variacionais que podem ser escritos na forma de um sistema de equações (43).

Um sistema composto por N partículas de coordenadas $x_1, x_2 \dots x_N$ move-se sob o efeito de forças mútuas governadas pela equação

$$m\ddot{x}_i = \vec{F}_i(x, \dot{x}, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N)$ e $\vec{F}_i$ é a força sobre a i -ésima partícula. A representação do movimento deste conjunto de equações é obtido pela solução de N funções do tempo t e das posições e velocidades iniciais $x_i(0)$ e $\dot{x}_i(0)$, respectivamente (44, 45).

Consideramos que $\vec{F}_i = \vec{F}_i(x)$ sejam forças conservativas derivadas de uma função energia potencial $V(x)$. Desta forma podemos escrever a equação (2.2) da seguinte forma

$$m\ddot{x}_i = F_i(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}. \quad (2.3)$$

Substituímos os momentos lineares $p_i = m_i\dot{x}_i$ na equação 2.3 e obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{p_i}{m_i}, \\ \dot{p}_i = m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (2.4)$$

que para $i = 1, \dots, N$ simboliza um conjunto de $2N$ equações de primeira ordem no tempo, em vez de N equações de segunda ordem (equação 2.3). Assim, a função energia H em termo de x e p será

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x), \quad (2.5)$$

e é denominada Hamiltoniana (46).

A função H é dependente do tempo t e as variáveis x e p são as coordenadas canônicas. O conjunto de pontos em x e p que formam o espaço de fases revelam o estado do sistema (47). No plano, $H(x, p)$ é definido como um sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $H(x, p)$ é uma função contínua e diferenciável (48, 49).

Uma forma elementar de interpretar as equações de Hamilton é através do princípio de conservação de energia. Para isto, utilizamos as equações para uma partícula de massa m em um sistema unidimensional (50). A energia do sistema é retratada pela Hamiltoniana H , definida como

$$H(x, p) = K(x, p) + V(x, p), \quad (2.7)$$

onde K é a energia cinética e V é a energia potencial. A energia total $H(x, p)$ é uma constante do movimento de acordo com o princípio da conservação de energia (39). Do sistema (2.6) a derivada total ao longo da trajetória é

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} = 0, \quad (2.8)$$

onde $H(x, p)$ é constante ao longo de curvas que são soluções de (2.6) e suas trajetórias ficam em contornos definidos por $H(x, p) = C$, em que C é uma constante.

2.3.1 Pêndulo não linear

Como exemplo de um sistema Hamiltoniano consideremos um sistema mecânico simples, o pêndulo não linear. Um esquema para este modelo está representado na Figura 2.3(a). A equação diferencial que modela o movimento de um pêndulo no plano pode ser encontrada usando a lei do movimento de Newton

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \quad (2.9)$$

onde θ é o deslocamento angular a partir da vertical, l é o comprimento do braço do pêndulo, que oscila em um plano, e g é o módulo da aceleração da gravidade. Desconsideramos os efeitos de forças resistivas, isto é, uma vez que o pêndulo é colocado em movimento vai oscilar periodicamente para sempre, respeitando a conservação da energia (14, 51).

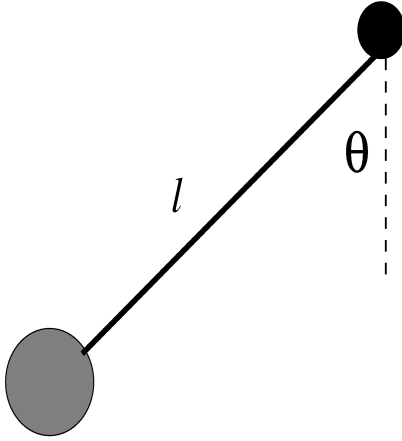
Seja $\dot{\theta} = \phi$. Escrevemos o sistema (2.3) em uma forma planar

$$\dot{\theta} = \phi, \quad \dot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \quad (2.10)$$

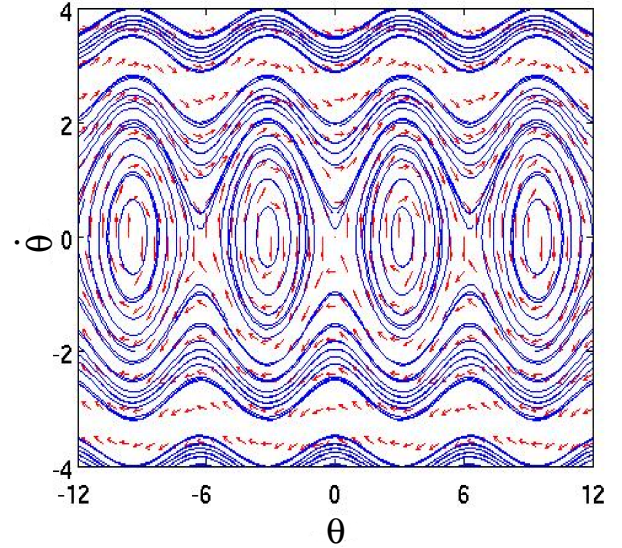
A Figura 2.3(b) mostra as trajetórias no espaço de fases para este sistema Hamiltoniano quando $-4\pi \leq \theta \leq 4\pi$. O eixo horizontal representa o ângulo θ enquanto o eixo vertical a velocidade angular $\dot{\theta}$. As curvas que começam desde um ponto de sela e terminam em outro fazem parte de uma órbita heteroclínica, que é uma curva no espaço de fase formada por vários segmentos. Como elas delimitam a região onde existe movimento oscilatório também são denominadas de separatrizes.

Figura 2.3: Esboço de um pêndulo não linear. (b) Retrato de fase do sistema (2.10) quando $-4\pi \leq \theta \leq 4\pi$.

(a)



(b)



FONTE: O autor.

2.3.2 Seções de Poincaré

Em sistemas com mais de dois graus de liberdade não é simples visualizar as trajetórias no espaço de fases (52). Poincaré apresentou um método conhecido como seções de Poincaré, que é uma forma de representar o espaço de fases observando seções transversais de trajetórias, reduzindo a dimensão do sistema em um grau (38). Esta técnica considera

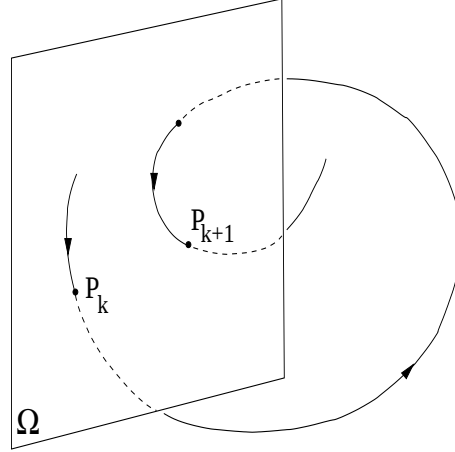
uma superfície Ω transversal ao fluxo de trajetórias apresentadas em um espaço de fases. Desta forma, um sistema de N dimensões passa a ser representado por um espaço de $N - 1$ dimensões (46).

Consideramos um sistema Hamiltoniano $H(x, p, t)$ dependente do tempo de dimensão N . A dinâmica deste sistema é retratada no espaço de fases com $2N$ dimensões, pois existem N momentos e N posições. Se aplicarmos uma seção de Poincaré a dimensão do sistema é reduzida para $2N - 1$. Chamamos de P_k uma trajetória inicial que cruza uma superfície de Poincaré Ω . A evolução desta trajetória, que atravessa inúmeras vezes a superfície Ω , é descrita por P_{k+1} . Assim, o mapa de Poincaré é

$$P_{k+1} = TP_k. \quad (2.11)$$

Se a dinâmica dada pelo conjunto de pontos P_{k+1} é quase periódica, terá representação na seção de Poincaré por uma curva ou toro invariante. Já a dinâmica caótica será definida por pontos densamente distribuídos (52). A Figura 2.4 mostra a interseção de trajetórias com uma seção de Poincaré Ω . Desta maneira, uma trajetória periódica do sistema corresponde a um conjunto de pontos periódicos em P_{k+1} .

Figura 2.4: Interseção de trajetórias com uma seção de Poincaré Ω .



FONTE: Adaptado de (52).

2.3.3 Toros KAM

Uma consequência de sistemas dinâmicos é o teorema Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM), que trata da persistência de movimentos quase periódicos mediante pequenas perturbações. Os sistemas Hamiltonianos com apenas um grau de liberdade são sempre integráveis e apresentam uma dinâmica regular, isto é, são formados por órbitas periódicas e quase periódicas. As órbitas chamadas de quase periódicas possuem um número finito (dois ou mais) de inumeráveis frequências. Em cada uma destas curvas todos os pontos se movem com a mesma velocidade de rotação, o chamado número de rotação (38). Estas regiões são conhecidas como ilhas KAM e ocorrem em um toro invariante, chamado toros KAM, determinados pelas constantes do movimento (52). Assim, diferentes condições iniciais caracterizam diferentes superfícies invariantes em sistemas integráveis perturbados e o movimento em toros pode ser generalizado como um toro no espaço de fases (38, 53).

Quando o sistema possui mais de um grau de liberdade, pode apresentar uma dinâmica regular e caótica. Conforme a perturbação é aumentada, os toros são deformados ou destruídos e substituídos por regiões caóticas (9). Os toros sobreviventes são os que possuem um quociente de frequências irracional. As ilhas KAM ficam submersas em um mar caótico, que é formado por órbitas irregulares. Assim, quando uma pequena perturbação não linear afeta um sistema Hamiltoniano integrável, gera-se uma órbita denominada quase periódica e tais movimentos estarão presente na dinâmica, mesmo sob a ação de uma pequena perturbação (38).

2.4 Expoentes de Lyapunov

Quando existe uma extrema sensibilidade às condições iniciais existe fortes indícios de uma dinâmica caótica no sistema. Duas condições iniciais muito próximas se afastam com o passar do tempo até perder uma correlação entre elas. Esse afastamento acontece a uma taxa exponencial, denominada expoente de Lyapunov. O termo número de Lyapunov é empregado para quantificar a taxa de separação de pontos x próximos de x_1 . O expoente de Lyapunov será o logaritmo natural do número de Lyapunov (38).

Uma ferramenta utilizada para analisar o movimento caótico é através de expo-

entes de Lyapunov a tempo finito (54, 55). O i -ésimo expoente de Lyapunov é definido em termos da taxa de crescimento do i -ésimo eixo principal da elipsóide $p_i(t)$ monitorada de uma esfera de condições iniciais infinitesimal

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{p_i(t)}{p_i(0)}. \quad (2.12)$$

O sistema é caótico quando se tem um ou mais expoentes de Lyapunov positivos. Obtemos os expoentes de Lyapunov de acordo com o algoritmo proposto por Wolf (56). Para analisar o transiente caótico, calculamos o expoente de Lyapunov para intervalos de tempo finitos (57). O i -ésimo expoente de Lyapunov associado como os pontos $(x(0), y(0))$ em um tempo T é dado por

$$\lambda_i(x(0), y(0), T) = \frac{1}{T} \ln (||\mathcal{M}^T(x(0), y(0))\mathcal{U}_T||), \quad (2.13)$$

onde $\mathcal{M}^T(x(0), y(0))$ é a matriz Jacobiana do intervalo de tempo T calculada nos pontos $(x(0), y(0))$, e $\mathcal{U}_T$ é o autovetor associado à matriz Jacobiana. Os expoentes de Lyapunov a tempo finito dependem das condições iniciais $(x(0), y(0))$, enquanto seus homólogos a tempo infinito

$$\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda_i(x(0), y(0), T), \quad (2.14)$$

apresentam o mesmo valor para quase todos os pontos $(x(0), y(0))$ (58).

2.5 Sistemas dissipativos

Os efeitos que um termo dissipativo causam em sistemas Hamiltonianos motivam inúmeras pesquisas e são encontrados em diversos contextos da física e da engenharia, por exemplo, estudos sobre a dispersão caótica e advecção de partículas em fluxos hidrodinâmicos (59–63). Uma fraca dissipação pode ter consequências relevantes sobre estruturas fractais no espaço de fase, igualmente podem ocasionar uma variação da dimensão fractal e na estrutura de bacias (64–67).

Em sistemas dissipativos, depois de um longo intervalo de tempo, existe a tendência de se simplificar a estrutura topológica da trajetória no espaço de fases. Isto significa que um sistema dinâmico complexo n -dimensional pode ter como solução final um compor-

tamento em um sub espaço com poucas dimensões (14). Deste modo, é típico de sistemas dissipativos os denominados atratores que possuem um comportamento assintótico para uma região do espaço de fases para onde as trajetórias convergem. Um atrator é um conjunto de valores no espaço de fases onde o sistema dinâmico eventualmente se estabiliza (38).

A presença de múltiplos atratores coexistentes, também denominado multistabilidade, é igualmente esperado em sistemas Hamiltonianos quando se acrescenta uma dissipação. Neste caso, análises numéricas podem demonstrar que existe um grande número de atratores periódicos coexistindo (68). Por exemplo, o centro de pontos fixos em sistemas conservativos (neutramente estáveis) tornam-se, com uma pequena quantidade de dissipação, focos estáveis. Se tais pontos pertencem a uma cadeia de m ilhas periódicas, estes podem tornarem-se focos de período m (53). Como regra geral, o número de atratores tende ao infinito quando a dissipação tende a zero (69). Para pequenos valores de dissipação, espera-se um número finito de atratores coexistindo. Isso ocorre porque muitas órbitas periódicas (particularmente aqueles com elevados períodos) perdem a sua estabilidade de forma muito rápida quando a amplitude da dissipação aumenta (70).

Deste modo, em sistemas dissipativos a dinâmica é dominada pelo surgimento de atratores de diferentes períodos (8, 53). Órbitas periódicas do *Mapa de Poincaré* se tornam atratores e as ilhas KAM desaparecem. No espaço de fases ocorre o aparecimento de bacias de atração (13). Estas bacias proporcionam o conjunto de condições iniciais que evoluem para determinados atratores após um transiente (71, 72). Os atratores podem ter uma ou várias dimensões dependendo do número de variáveis que atuam no sistema. Podem ser representados por um ponto fixo, ou um conjunto de pontos que são visitados constantemente, ou uma órbita complexa, ou mesmo um número infinito de pontos (38). Os atratores ditos estruturais são formados por órbitas periódicas estáveis e atratores caóticos, já os atratores pontuais são os pontos fixos estáveis (9, 38).

A bacia de atração é determinada por um conjunto de pontos que tendem de forma assintótica para um atrator. Este comportamento caracteriza regiões no espaço de fase, denominados atratores, para onde as trajetórias convergem (8, 73, 74). É interessante notar que a dissipação pode estar associada a efeitos de colisões de partículas em espaços confinados, como plasmas por exemplo (75) ou até mesmo a perda de energia através da

emissão de radiação.

2.6 Ressonância estocástica (RE)

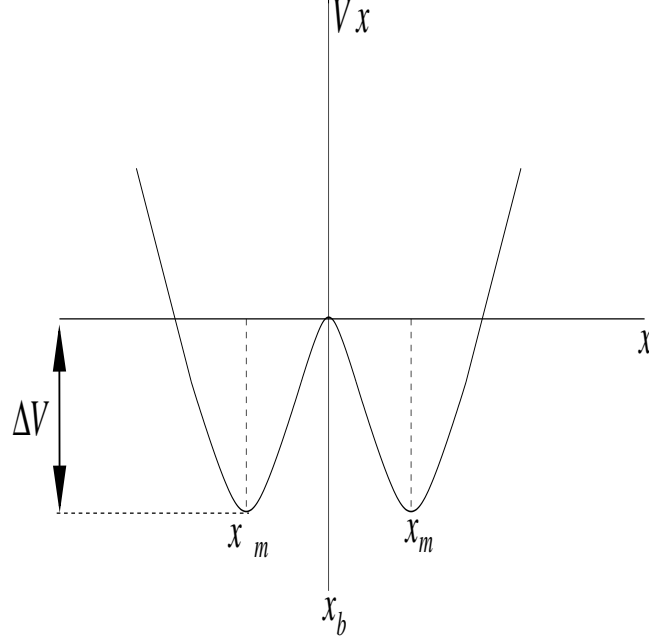
Efeitos de ruído também desempenham um papel relevante em inúmeros contextos da ciência (76). A perturbação por um ruído em sistemas dinâmicos não lineares pode gerar uma série de peculiaridades inusitadas. Um dos fenômenos induzidos pelo ruído é conhecido como ressonância estocástica (RE). Este fenômeno é capaz de produzir uma otimização na resposta de um sistema (10, 77). Uma característica comum da RE é a alta sensibilidade à variação do ruído, ou seja, existe um pico em torno de um valor crítico da amplitude do ruído (78).

RE tem sido estudada e observada em uma série de manifestações, levando a importantes resultados experimentais e teóricos (79). Por meio de experimentos foi demonstrada a existência de RE em redes neuronais no cérebro de mamíferos (80). O fenômeno RE também tem sido estudado em uma grande variedade de sistemas, tais como mudança climática (81), células biológicas (82), e mais recentemente em problemas de potenciais periódicos (83) e osciladores anarmônicos com atratores (84).

O mecanismo da RE é representado nas Figuras 2.5 e 2.6, onde consideramos uma partícula pesada de massa m que se move em um poço de duplo potencial $V(x)$ com atrito viscoso γ (85). Na Figura 2.5 temos o esboço do poço de duplo potencial $V(x) = (\frac{1}{4})bx^4 - (\frac{1}{2})ax^2$, com mínimos posicionados em $\pm x_m = (a/b)^{\frac{1}{2}}$. Estes são separados por uma barreira de potencial com altura dada por $\Delta V = a^2/(4b)$. A parte superior da barreira encontra-se em $x_b = 0$. Com a presença de uma perturbação periódica, o poço de potencial duplo $V(x, t) = V(x) - A_0 x \cos(\Omega t)$ é inclinado para trás e para frente, elevando e baixando sucessivamente as barreiras de potenciais do poço para a direita e para a esquerda, respectivamente, de forma assimétrica.

A partícula está sujeita à forças flutuacionais que podem ser induzidas por um acoplamento térmico, por exemplo (87). Assim, ocorre transições entre a vizinhança do

Figura 2.5: Ressonância estocástica em um potencial duplo simétrico.



FONTE: Adaptado de (85).

poço de potencial com uma razão chamada de taxa de Kramers (86)

$$r_K(D) = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\Gamma} e^{(-\frac{\Delta V}{D})}, \quad (2.15)$$

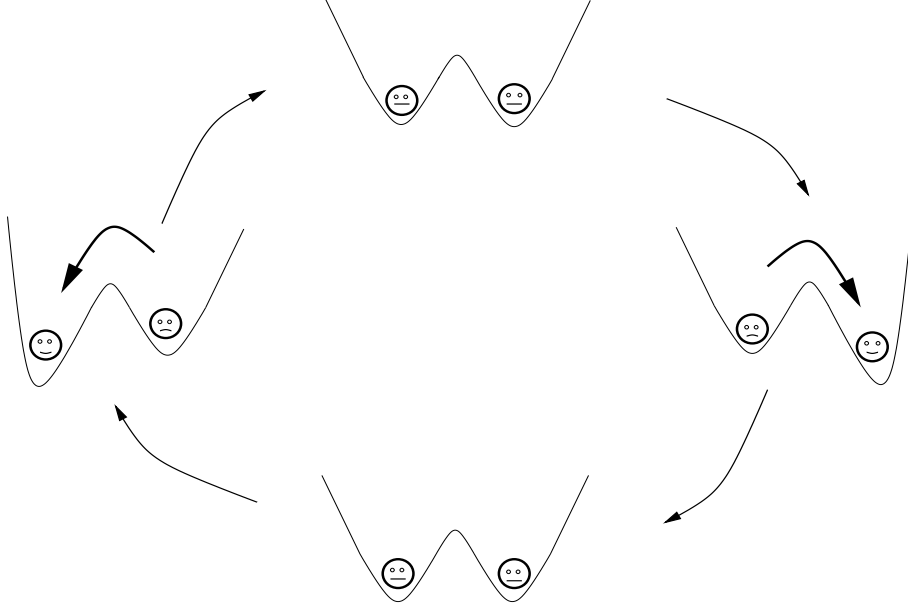
com ω_0^2 é a frequência angular quadrática no mínimo do potencial, ω_b^2 é a frequência angular quadrática no topo da barreira, ΔV é a altura da barreira separando os dois mínimos e D é a amplitude do ruído em relação à temperatura (85).

Se injetarmos uma pequena força periódica na partícula, o poço $V(x)$ penderá assimetricamente para cima e para baixo. Consequentemente ocorrerá a elevação e a diminuição da barreira de potencial, como mostra a Figura 2.6. Embora o forçamento periódico seja fraco demais para deixar a partícula rolar periodicamente a partir de um poço de potencial para o outro, este salto induzido por um ruído entre os poços pode se tornar sincronizado com um forçamento periódico fraco (85).

Como a amplitude desta perturbação é pequena em relação à barreira de potencial, a partícula poderá transpor entre um mínimo e outro estimulada pelo ruído. A frequência entre os saltos pode ser sincronizada com a frequência do sinal periódico, e só ocorre quando

a média temporal do tempo de salto entre os mínimos for igual a metade do período do sinal periódico. Quando a média temporal do tempo de salto entre mínimos $T_K(D) = 1/r_K$ se igualar à metade do período do sinal periódico $T_\Omega/2$, verifica-se uma sincronização da frequência entre os saltos (88, 89). A condição de ressonância é marcada pela escala de tempo $2T_K(D) = T_\Omega$, onde T_K é o período e Ω é a frequência do sinal periódico (85).

Figura 2.6: Mecanismo da ressonância estocástica



FONTE: Adaptado de (85).

3 *Modelo de Ondas de Deriva*

Neste capítulo abordamos as características do confinamento do plasma e também apresentamos a descrição Hamiltoniana do modelo de duas ondas de deriva, que descreve o transporte de partículas e energia pela borda do plasma.

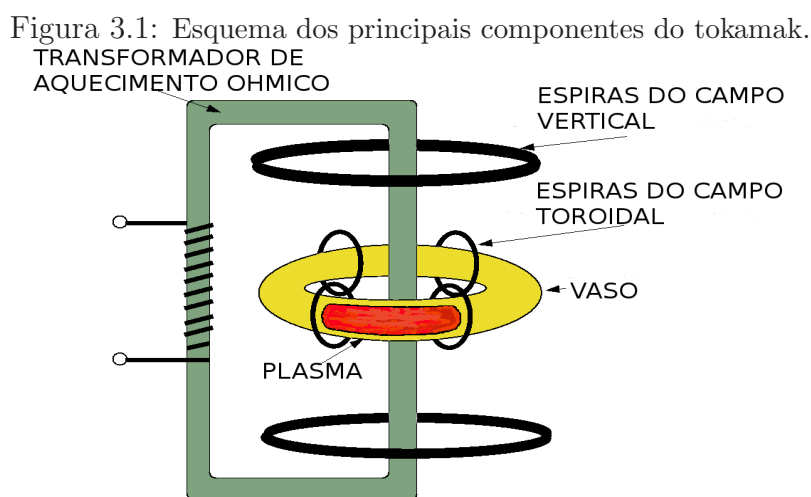
3.1 Confinamento do plasma

Três características definem o plasma. Em relação ao comportamento coletivo, as partículas carregadas devem estar suficientemente próximas para que assim possam influenciar as demais partículas carregadas da vizinhança. A esfera de Debye, com o raio definido como comprimento de Debye, estima esta distância de interação entre as partículas carregadas. Outra característica do plasma diz respeito ao comprimento de Debye, que deve ser pequeno quando comparado ao tamanho físico do plasma. Assim, o plasma é praticamente neutro. Como terceira característica temos que a frequência dos elétrons do plasma é alta se comparada com as frequências de colisões entre os elétrons e as partículas neutras (15). No plasma, o transporte de partículas através do campo magnético é controlado por ondas de deriva. Estas são flutuações de baixa frequência associadas com o transporte de energia e partículas confinadas magneticamente (25).

Existem muitas ferramentas teóricas e computacionais, bem como experimentos em laboratório, que objetivam investigar a energia de fusão termonuclear controlada (24). Para se obter estas reações, é necessário confinar o plasma a altas temperaturas e densidade em um campo magnético por um tempo relativamente longo (16). Muitos pesquisadores se interessam em estudar fenômenos que afetam o confinamento, tais como turbulência

eletrostática na borda do plasma e transporte anômalo nas paredes do tokamak ¹ (20–23, 25).

A Figura 3.1 mostra o esquema de um tokamak. A corrente no primário de um transformador ôhmico, a qual o plasma representa o secundário produz a variação do fluxo magnético. Essa, gera o campo elétrico na direção toroidal que cria a corrente de plasma. As espiras paralelas, localizadas na parte superior e inferior da câmara toroidal, geram os campos magnéticos verticais que são utilizados para controlar a posição e o formato da coluna de plasma.



FONTE: Adaptado de Oyarzabal, 2015 (26).

O transporte anômalo ocorre com o surgimento de ondas de deriva, relacionadas com a turbulência eletrostática na borda do plasma. Isto quer dizer que as partículas escapam do confinamento e encaminham-se para as paredes do tokamak, ocorrendo resfriamento e conseqüentemente a perda de energia (24). A aparição de flutuações eletrostáticas é resultado da não uniformidade do plasma e da existência de gradientes de densidade em sua borda, que dão origem à turbulência que podem explicar as taxas de transporte anômalo verificadas experimentalmente (25, 90).

O modelo de ondas de deriva utilizado neste estudo, obtido por W. Horton (25), é uma ferramenta útil para investigar o transporte radial de partículas confinadas no plasma.

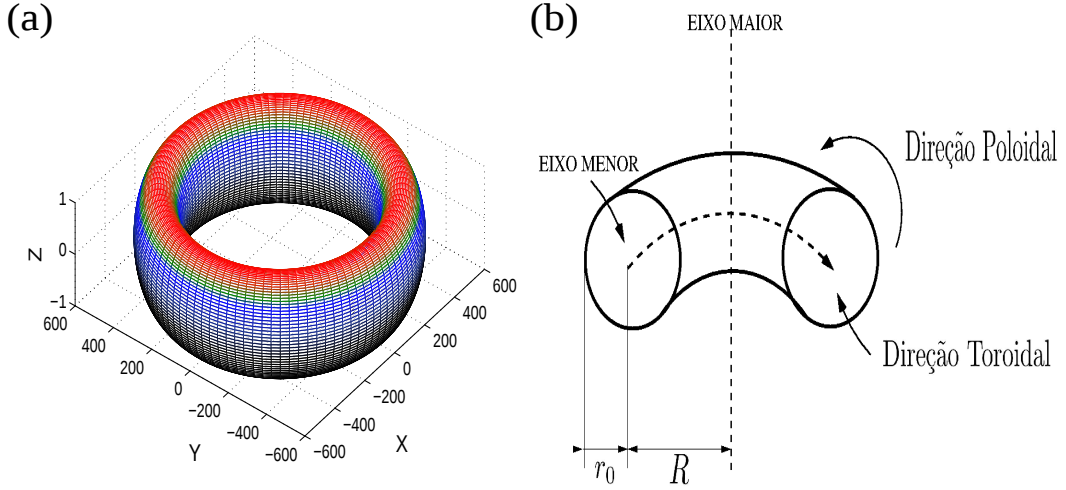
¹Tokamak: (*toridal'naya kamera magnitnymi katushkami*) máquina em forma de toróide utilizada para realizar experimentos com plasmas confinados magneticamente.

Quando consideramos duas ou mais ondas no modelo, o sistema pode exibir características não lineares, por exemplo comportamento caótico. Devido às trajetórias caóticas ocorre o transporte de partículas (91). Em suma, o aparecimento de ondas de deriva em plasmas magnetizados é o motivador do mecanismo dominante no transporte de partículas, de energia e na dinâmica que se verifica nas linhas do campo magnético (24). Desta forma, com a investigação de ondas de deriva torna-se praticável prever instabilidades que acometem o confinamento, assim como gradientes de densidade, gradientes de temperatura e efeitos de aprisionamento de partículas (94,95).

3.2 Coordenadas do Sistema

Neste estudo consideramos um plasma confinado em um tokamak, dispositivo em forma de toróide (20,25). Geometricamente o toro, ou toróide, é o espaço topológico homeomorfo ao produto de dois círculos que possui um formato similar ao de uma câmara de “pneu”, conforme é representado na Figura 3.2(a).

Figura 3.2: (a) Toro ou toróide é o sólido ou superfície gerada pela rotação de uma curva plana, de raio r_0 , fechada em torno de um eixo R que lhe é coplanar e não secante. (b) Direção poloidal e toroidal de um toróide em torno dos eixos menor r_0 e maior R , respectivamente.



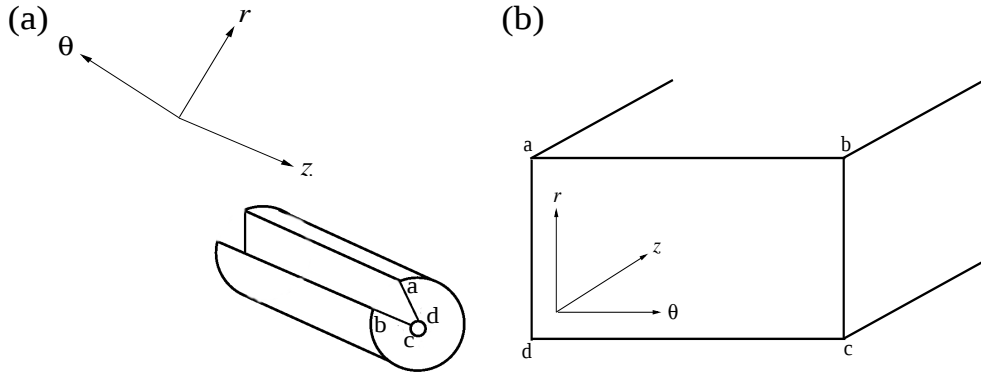
FONTE: Adaptado de Oyarzabal, 2015 (26).

Neste modelo podemos simplificar a geometria do sistema com uma aproximação de coordenadas toroidais para cartesianas. Isto é possível pois o raio do toróide é muito

menor que o raio do plasma. Primeiramente reduzimos o toróide para um cilindro sob as condições de que $r_0/R \ll 1$, onde r_0 é o raio em relação ao eixo menor e R é o raio em relação ao eixo maior. Na Figura 3.2(b) temos o esquema de um toróide, onde podemos observar a direção poloidal e toroidal em torno dos eixos menor r_0 e maior R , respectivamente.

Para realizar uma aproximação cilíndrica do sistema, consideramos a direção toroidal representada na Figura 3.2(b) como o eixo z do cilindro, cujas suas respectivas coordenadas θ , r e z podem ser observadas na Figura 3.3(a). Para ser possível a transformação do sistema de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas seccionamos o cilindro representado pela Figura 3.3(a) da lateral até o centro (92). Representamos este corte $abcd$ de forma ampliada na Figura 3.3(b). Consideramos as distâncias ad e bc muito menores que o comprimento ab e cd . Esta aproximação é válida somente para as bordas do plasma. A Figura 3.3(b) mostra a direção radial r do cilindro definida como o eixo x do sistema cartesiano, a direção poloidal θ definida como eixo y e a direção toroidal z como eixo z . Com estas aproximações, as equações têm validade somente para uma fina camada do plasma (20, 26).

Figura 3.3: Representação da transformação de coordenada toroidal para cartesiana. (a) Cilindro com coordenadas θ , r e z . (b) Coordenadas cartesianas onde a direção radial r do cilindro é definida como o eixo x do sistema cartesiano, a direção poloidal θ é definida como eixo y e a direção toroidal z como eixo z .



FONTE: Adaptado de Oyarzabal, 2015 (26).

3.3 Velocidade de Deriva

Em um plasma magnetizado e não uniforme, as trajetórias das partículas carregadas, sujeitas ao campo eletromagnético, são determinadas pela força de Lorentz

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.1)$$

onde m é a massa, $\vec{v}$ é a velocidade, q é a carga, $\vec{E}$ é o campo elétrico e $\vec{B}$ o campo magnético. Para um campo elétrico nulo e um campo magnético uniforme, a solução da equação (3.1) são trajetórias concêntricas em torno das linhas do campo magnético $\vec{B}$, com frequências ciclotrônicas dadas por

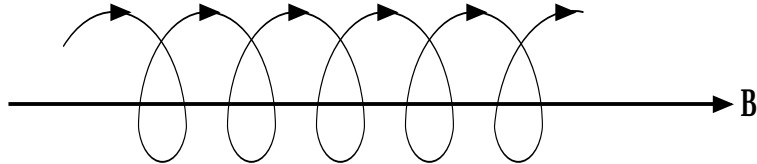
$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}. \quad (3.2)$$

A velocidade paralela ao campo magnético $\vec{B}$

$$v_{\parallel} \equiv \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B}, \quad (3.3)$$

será constante e a composição do movimento será uma espiral cilíndrica. Na Figura 3.4 podemos observar um esboço do movimento helicoidal de uma partícula através do campo magnético $\vec{B}$.

Figura 3.4: Representação do movimento espiralado da partícula ao longo do campo magnético $\vec{B}$.



FONTE: Adaptado de (15).

O modelo de ondas de deriva descreve trajetórias que ocorrem através do centro de guia, ou seja, no centro do movimento circular de partículas confinadas próximas à borda de um tokamak. Da equação (3.1), consideramos os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ perpendiculares e igualamos o termo $m d\vec{v}/dt$ a zero. Desta forma, o movimento circular da partícula com frequência ciclotrônica ω_c em torno do centro de guia é

$$\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (3.4)$$

Fazemos o produto vetorial com $\vec{B}$ e obtemos

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}B^2 - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}), \quad (3.5)$$

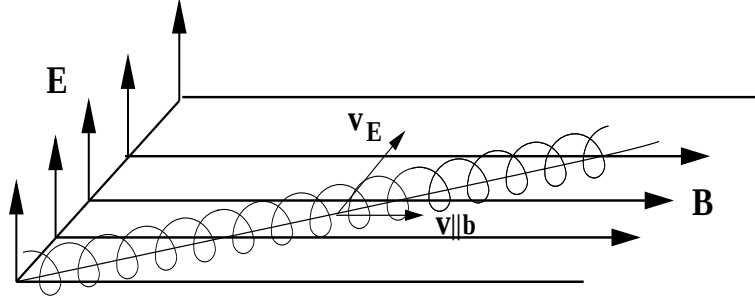
em que obtemos a componente transversal ao campo magnético da equação (3.5), que é a velocidade do movimento de deriva dada por

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (3.6)$$

onde $\vec{v}_E$ é a velocidade de deriva no centro de guia devido aos campos elétrico $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ambos homogêneos.

Neste trabalho consideramos apenas a velocidade de deriva $\vec{v}_E$, onde os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ são constantes. Na Figura 3.5 temos uma representação do movimento de deriva através do centro de guia de uma partícula confinada magneticamente. Podemos observar que o movimento de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ é perpendicular aos campos elétrico e magnético.

Figura 3.5: Esquema do movimento de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ no centro de guia de uma partícula para o modelo de ondas de deriva. A velocidade de deriva $\vec{v}_E$ é perpendicular aos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, onde neste modelo consideramos homogêneos.



FONTE: Adaptado de (15).

3.4 Descrição Hamiltoniana das Ondas de Deriva

O formalismo Hamiltoniano do modelo de ondas de deriva foi demonstrado por Horton (25). O objetivo desta seção é evidenciar o sistema de equações diferenciais que descrevem o modelo de duas ondas de deriva. Para isto, consideramos o campo elétrico

dado pelo gradiente do potencial

$$\vec{E} = -\nabla\phi, \quad (3.7)$$

e o campo magnético uniforme

$$\vec{B} = B_0\hat{e}_z, \quad (3.8)$$

onde B_0 é a intensidade do campo magnético toroidal de equilíbrio e $\hat{e}_z$ é o vetor unitário na direção de z (20, 25).

Escrevemos a velocidade de deriva como

$$\vec{v}_E = -\frac{1}{B_0}\nabla\phi \times \hat{e}_z, \quad (3.9)$$

$$\vec{v}_E = -\frac{1}{B_0}\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_x + \frac{1}{B_0}\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_y. \quad (3.10)$$

A Hamiltoniana é

$$H(x, y, t) = \frac{\phi(x, y, t)}{B_0}, \quad (3.11)$$

onde x representa o momento generalizado e y a coordenada generalizada. O sistema de equações (2.6) dispõe de um par canônico de coordenadas (x, y) com um grau de liberdade (20, 25).

Consideramos um plasma não uniforme, magnetizado e sujeito a um campo elétrico radial constante dado por $\vec{E} = E_0\hat{e}_x$. Descrevemos o potencial elétrico como (24)

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{x_i}x) \cos(k_{y_i}y - \omega_i t), \quad (3.12)$$

onde ϕ_0 é o potencial do plasma em equilíbrio, A é a amplitude de cada onda, ω_i é a frequência angular da i -ésima onda e k_{x_i} e k_{y_i} são os números de onda nas respectivas direções x e y . O potencial $\phi(x, y, t)$ é a superposição dos potenciais de equilíbrio $\phi_0(x)$ e de $\phi_1(x, y - \omega t)$ (92).

Para este estudo adotamos o potencial elétrico linear $\phi_0(x) = ax$, onde a é o campo elétrico constante na direção de x (92). Neste sistema a propagação ocorre na direção poloidal y e a modulação na direção radial x . Admitimos N ondas de deriva estacionárias

e escremos a Hamiltoniana como (25)

$$H(x, y, t) = \frac{1}{B_0} [\phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{x_i} x) \cos(k_{y_i} y - \omega_i t)]. \quad (3.13)$$

Para estudar a dinâmica do sistema podemos deixar a equação acima na forma adimensional. Para isto, consideramos as novas variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{r_0}, & y' &= \frac{y}{r_0}, & a' &= \frac{a}{E_0}, & t' &= \frac{t}{t_0}, \\ \omega' &= \omega_i t_0, & u' &= \frac{u}{v_0}, & A'_i &= \frac{A_i}{E_0 r_0}, & k'_i &= \frac{\omega'_i}{u'} = k_i r_0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

que substituímos na equação (3.13)

$$H(x, y, t) = \frac{a' E_0 x' r_0}{B_0} + \frac{1}{B_0} \left[\sum_{i=1}^N A'_i E_0 r_0 \sin\left(\frac{k_{x_i}}{r_0} x' r_0\right) \cos\left(\frac{k'_{y_i}}{r_0} y' r_0 - \frac{\omega'_i}{t_0} t' t_0\right) \right], \quad (3.15)$$

$$H(x, y, t) = \frac{E_0 r_0}{B_0} [a' x' + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(k_{x_i} x') \cos(k'_{y_i} y' - \omega'_i t')]. \quad (3.16)$$

Podemos definir

$$H(x, y, t) = \frac{E_0 r_0}{B_0} H'(x', y', t'), \quad (3.17)$$

onde

$$H(x', y', t') = a' x' + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(k_{x_i} x') \cos(k'_{y_i} y' - \omega'_i t'), \quad (3.18)$$

é a Hamiltoniana adimensional em termos das variáveis associadas x' e y' .

Para não carregar a notação, retiramos os sinais apóstrofes da equação (3.18) e escrevemos na forma adimensional

$$H(x, y, t) = ax + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{x_i} x) \cos(k_{y_i} y - \omega_i t). \quad (3.19)$$

Para $N = 1$ a Hamiltoniana (3.19) é integrável e apresenta soluções analíticas e trajetórias regulares. No caso de $N > 1$, o sistema é integrável se todas as N ondas possuírem a mesma velocidade de fase. Se pelo menos uma onda tiver velocidade de fase

diferente das demais, o sistema não será integrável e algumas trajetórias serão caóticas.

3.5 Sistema Não Perturbado

O sistema (3.18) é integrável para $N = 1$, ou seja, existe solução analítica e trajetórias regulares (25). A Hamiltoniana para $N = 1$ é

$$H(x, y, t) = \phi x + A \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega_t), \quad (3.20)$$

que tem um grau e meio de liberdade. A equação acima depende do par canônico momento-coordenada (x, y) e explicitamente do tempo t . É possível efetuar uma mudança de referencial para eliminar o tempo da equação. Definimos a variável

$$y' = y - u_1 t = \frac{\partial F(x', y, t)}{\partial x'}, \quad (3.21)$$

em que $u_1 = \omega_1/k_{y1}$ é a velocidade de fase da primeira onda (92). A função geratriz é $F(x', y, t) = x'(y - u_1 t)$ e a Hamiltoniana para x' e y' torna-se

$$H'(x', y') = \phi(x', y') + \frac{\partial F}{\partial t} = \phi(x', y') - u_1 x'. \quad (3.22)$$

Dado $x = \frac{\partial F}{\partial y} = x'$, obtemos

$$H'(x', y') = \phi(x') - u_1 x' + A \sin(k_x x') \cos(k_y y'). \quad (3.23)$$

Neste estudo adotamos o potencial linear na forma $\phi_0(x) = ax$. Para não carregar a notação, retiramos os sinais de apóstrofes da equação (3.23) e a Hamiltoniana adimensional para $N = 1$ é

$$H(x, y, t) = (a - u_1)x + A \sin(k_x x) \cos(k_y y), \quad (3.24)$$

onde $u_1 = \frac{\omega_1}{k_{y1}}$ é a velocidade de fase da onda (20). No sistema (3.24) não existe a dependência explícita de H com o referencial do movimento, assim a Hamiltoniana é uma constante de movimento. Para estudar as integrais de curva usamos as coordenadas de fase $X = k_x x$

e $Y = k_y y$ e encontramos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \text{sen}(X)\text{sen}(Y) \\ \frac{dy}{dt} = U + \cos(X)\cos(Y), \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $U = \frac{a-u_1}{A_1 k_{x_1}}$ é o parâmetro de confinamento, que depende do campo elétrico e demais parâmetros da onda de deriva (21,92). O sistema dado por (3.25) é integrável e as trajetórias das partículas no referencial da onda repousam sobre as curvas onde a Hamiltoniana é constante (92).

A Figura 3.6 mostra as soluções do sistema (3.25), onde utilizamos o parâmetro de confinamento $U = 0$. Integramos o sistema para um conjunto de condições iniciais delimitadas em uma grade de $0 \leq x \leq 4\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$. Podemos observar trajetórias fechadas, e as partículas confinadas nessas trajetórias movem-se em torno de pontos elípticos. As linhas são denominadas separatrizes e o retângulo formado por estas denomina-se célula. Notamos que não existe trajetória entre as células, ou seja, para o sistema não perturbado e com o parâmetro de confinamento $U = 0$, as partículas ficam confinadas e não ocorre transporte em nenhuma direção.

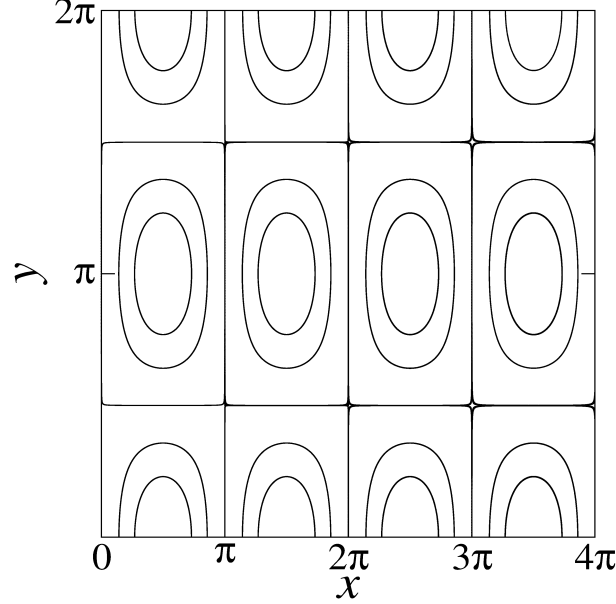
A fim de verificar o comportamento deste conjunto de equações em relação ao parâmetro de confinamento U , na Figura 3.7 integramos o sistema (3.25) para valores de $U = 0,5$ e $U = 1,5$. Para $U = 0,5$ a Figura 3.7(a) mostra o surgimento de trajetórias abertas, ou seja, não confinadas. Observamos órbitas livres na direção de y que agem como barreiras de transporte na direção de x . Isto é, as condições iniciais não migram ao longo da direção radial. Já para $U = 1,5$, representado na Figura 3.7(b), as curvas fechadas desaparecem e todas as linhas do fluxo são onduladas e abertas (25).

3.6 Duas Ondas de Deriva

Podemos reescrever a equação (3.19) para o caso de duas ondas de deriva como

$$H(x, y, t) = ax + A_1 \text{sen}(k_{x_1} x) \cos(k_{y_1} y - \omega_1 t) + A_2 \text{sen}(k_{x_2} x) \cos(k_{y_2} y - \omega_2 t). \quad (3.26)$$

Figura 3.6: Espaço de fases para o sistema com uma onda de deriva. Para o parâmetro de confinamento $U = 0$ não existe transporte de partícula.



FONTE: O autor.

Podemos usar a primeira onda como referencial, para isto realizamos a seguinte mudança de variável

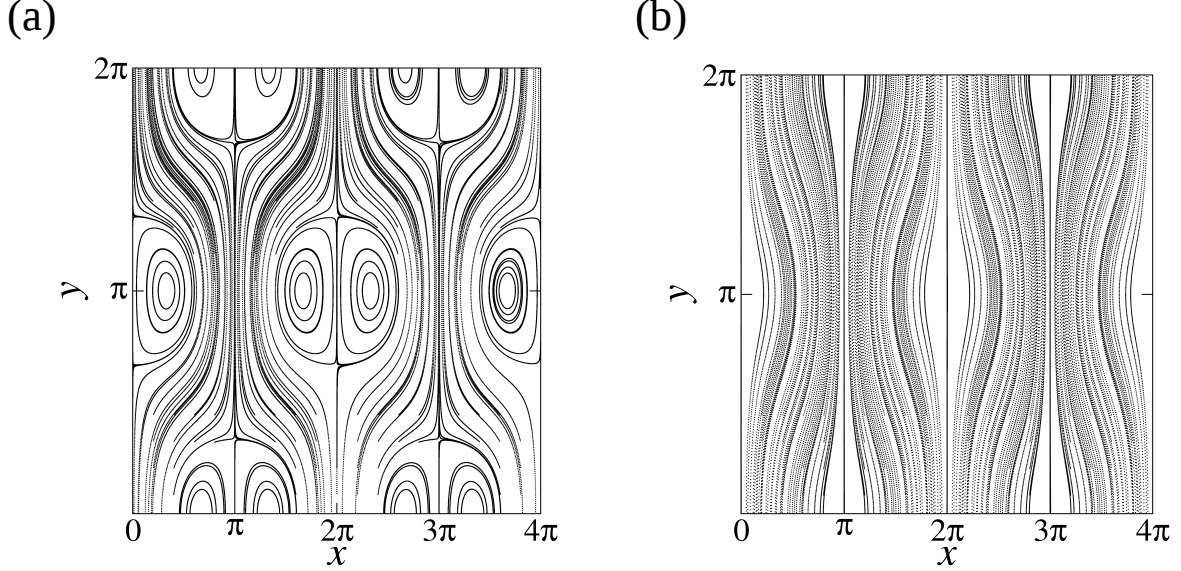
$$y' = y - \frac{\omega_1}{k_{y1}}t, \quad (3.27)$$

e obtemos a Hamiltoniana (20, 26)

$$\begin{aligned} H(x, y, t) = & (a - u_1)x + A_1 \text{sen}(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) \\ & + A_2 \text{sen}(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut)), \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $u = \left| \frac{\omega_2}{k_{y2}} - \frac{\omega_1}{k_{y1}} \right|$ é a diferença de fase entre as duas ondas. O sistema (3.28) é integrável se a velocidade de fase das ondas for igual à velocidade de deriva do campo elétrico, ou seja $u = 0$. A dinâmica no espaço de fases se dá por trajetórias não confinadas. Mesmo para o caso de $u = 0$ as partículas movem-se de uma ilha para outra (20, 21, 92). Expandindo a

Figura 3.7: Espaço de fases do sistema com uma onda de deriva para os parâmetros de confinamento (a) $U = 0,5$, onde encontramos trajetórias fechadas e abertas. (b) $U = 1,5$ existem somente trajetórias abertas.



FONTE: O autor.

Hamiltoniana obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= A_1 k_{y_1} \text{sen}(k_{x_1} x) \text{sen}(k_{y_1} y) \\
 &\quad + A_2 k_{y_2} \text{sen}(k_{x_2} x) \text{sen}(k_{y_2} (y - ut)) \\
 \frac{dy}{dt} &= (a - u_1) + A_1 k_{x_1} \cos(k_{x_1} x) \cos(k_{y_1} y) \\
 &\quad + A_2 k_{x_2} \cos(k_{x_2} x) \cos(k_{y_2} (y - ut)).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Investigamos a dinâmica da interação de duas ondas com a velocidade de fase igual à velocidade de deriva do campo elétrico, ou seja, $a - u_1 = 0$ (22). No caso em que $N > 1$, se as N ondas têm a mesma velocidade de fase u , o sistema é integrável. Caso a velocidade de fase u de uma das ondas for diferente das demais, o sistema não é integrável e apresenta trajetórias caóticas. As trajetórias periódicas do sistema (3.29) ocorrem no plano xy em *mapas de Poincaré*. A *seção de Poincaré* é construída em tempos múltiplos de $(2\pi/u)$, assim o conjunto de pontos com tempo múltiplo deste período formam o espaço de fases. A razão dos parâmetros k_{x_2}/k_{x_1} é irracional, por isto não existe barreira de transporte na

direção de x (20). Para integrarmos numericamente o sistema (3.29), utilizamos o método preditor-corretor com passo 0.01 e os parâmetros especificados na Tabela 3.1.

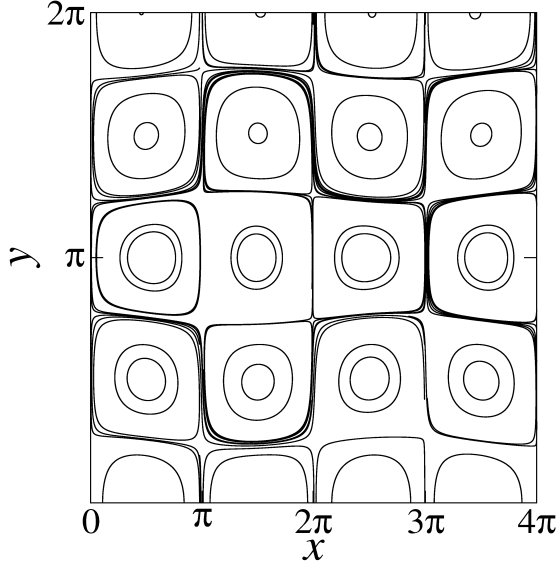
Tabela 3.1: Parâmetros do modelo duas ondas de deriva.

A_1	1	A_2	0,1
k_{y_1}	1	k_{y_2}	0,5
k_{x_1}	1	k_{x_2}	$\sqrt{3}$
u	1,5	$a - u_1$	0

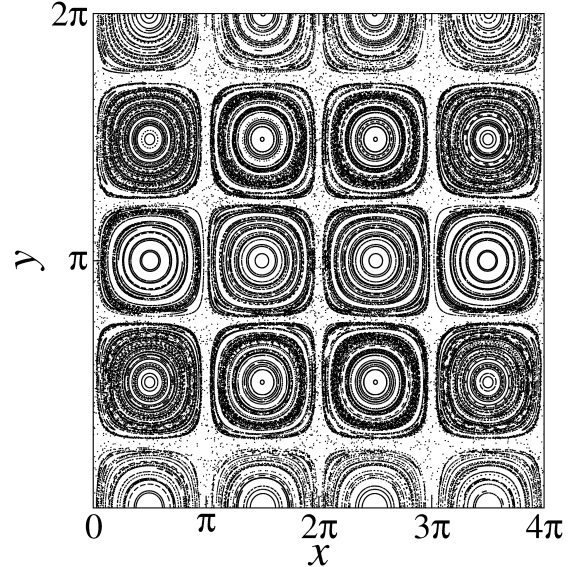
FONTE: Parâmetros obtidos de (20).

Figura 3.8: Simulação numérica para os parâmetros $a - u_1 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0,1$, $k_{y_1} = 1$, $k_{y_2} = 0,5$, $k_{x_1} = 1$, $k_{x_2} = \sqrt{3}$, (a) Para o valor do parâmetro $u = 0$, mesmo a perturbação da segunda onda as trajetórias são regulares. Ocorre transporte de partícula de uma ilha para outra. (b) $u = 0,5$ ilhas KAM estão submersas em um mar caótico.

(a)



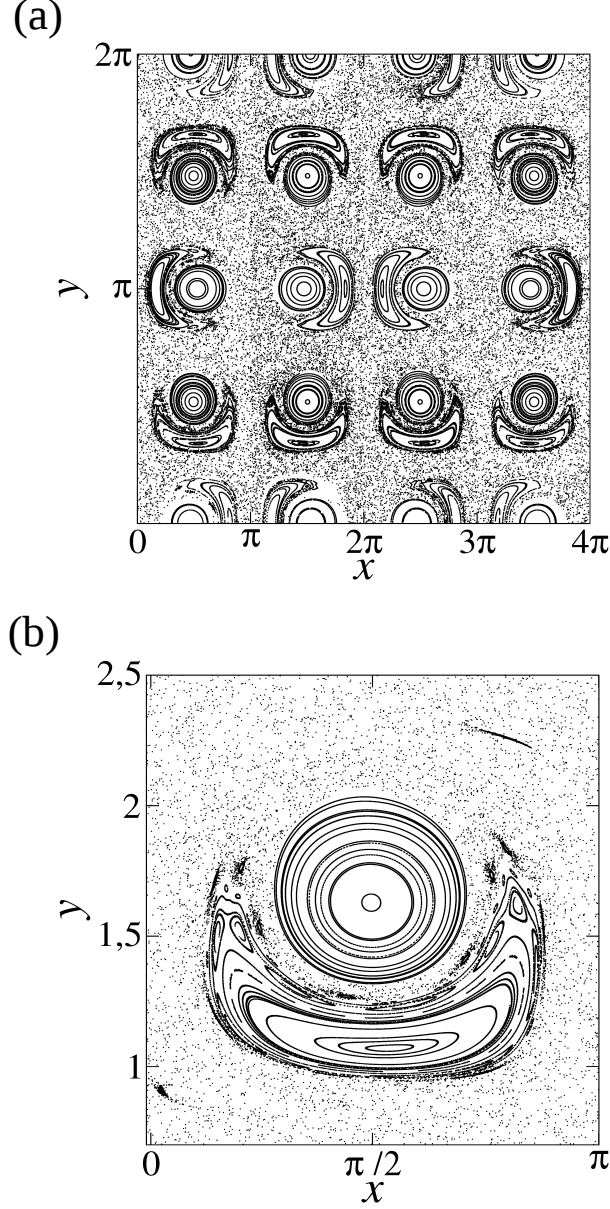
(b)



FONTE: O autor.

Para obtenção das Figuras 3.8 e 3.9 realizamos a simulação numérica do sistema (3.29) variando os valores do parâmetro u . A Figura 3.8 representa a trajetória no espaço de fases para $u = 0$. Como as duas ondas possuem a mesma velocidade de fase somente observamos trajetórias regulares. Na Figura 3.8(b) observamos o espaço de fases para $u = 0,5$. A Hamiltoniana é quase integrável pois coexistem regiões regulares e caóticas. A segunda onda tem amplitude pequena $A_2 = 0,1$, então somente trajetórias próximas à separatriz são caóticas.

Figura 3.9: Simulação numérica para os parâmetros $a - u_1 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0,1$, $k_{y_1} = 1$, $k_{y_2} = 0,5$, $k_{x_1} = 1$, $k_{x_2} = \sqrt{3}$, (a) $u = 1,5$ (b) Ampliação com a $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$.



FONTE: O autor.

A Figura 3.9 representa as trajetórias para o parâmetro $u = 1,5$, onde existe órbitas quase periódicas, ilhas KAM, e órbitas caóticas. Na Figura 3.9(a) integramos um conjunto de condições iniciais em uma grade $0 \leq x \leq 4\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$. Observamos que o padrão das órbitas quase periódicas se repetem. Com isto, delimitaremos nosso estudo

a partir de agora para a grade $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$ representado na Figura 3.9(b). Observamos com esta ampliação outras pequenas ilhas que estão fora das órbitas maiores.

4 *Dissipação no Modelo de Ondas de Deriva*

Um dos objetivos é estudar a dinâmica do modelo de duas ondas de deriva sob os efeitos de dissipação. Apresentamos neste capítulo os resultados obtidos nos artigos (26,27), onde acrescentamos um termo dissipativo ao sistema (3.29) e observamos o surgimento de atratores periódicos. Constatamos uma relação do tipo lei de potência entre o tempo de escape médio das partículas pela amplitude da dissipação. Também encontramos expoentes de Lyapunov a tempo finito e verificamos que as trajetórias apresentam um transiente caótico.

4.1 Atratores e bacias de atração

Acrescentamos um termo dissipativo ao sistema Hamiltoniano (3.29) e obtemos

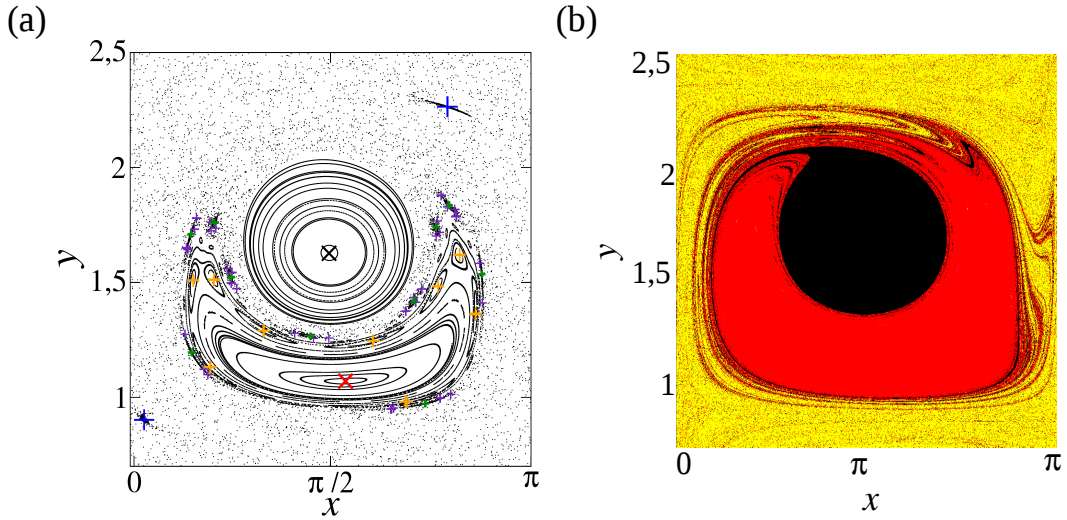
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_1 k_{y_1} \text{sen}(k_{x_1} x) \text{sen}(k_{y_1} y) \\ &\quad + A_2 k_{y_2} \text{sen}(k_{x_2} x) \text{sen}(k_{y_2} (y - ut)) - \mu x, \\ \frac{dy}{dt} &= A_1 k_{x_1} \cos(k_{x_1} x) \cos(k_{y_1} y) \\ &\quad + A_2 k_{x_2} \cos(k_{x_2} x) \cos(k_{y_2} (y - ut)) - \mu y.\end{aligned}\tag{4.1}$$

em que μx e μy são termos de dissipação. Delimitamos as condições iniciais na grade $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$ nos eixos x e y , respectivamente. Para as simulações numéricas consideramos os parâmetros utilizados na Tabela 3.1 (20,27).

A fim de verificar o surgimento de atratores no sistema (4.1), integramos um conjunto de condições iniciais posicionadas dentro das ilhas KAM e calculamos sua posição

depois de um transiente para o valor da dissipação $\mu = 10^{-3}$. A Figura 4.1(a) mostra, em pontos pretos as órbitas periódicas, quase periódicas e caóticas para o caso conservativo, $\mu = 0$. Com uma pequena quantidade de dissipação observamos que esta estrutura não se conserva. Órbitas periódicas tornam-se atratores periódicos com o valor de dissipação $\mu = 10^{-3}$, representados por símbolos coloridos. Constatamos dois atratores de período 1 representados por cruces de cor preta e vermelha. Os símbolos positivos em azul representam um atrator de período 2 e os de cor laranja, verde e violeta indicam atratores de período 9, 10 e 40, respectivamente.

Figura 4.1: Seção de Poincaré do espaço de fases. Pontos pretos correspondem ao caso conservativo, $\mu = 0$, e símbolos coloridos correspondem ao caso com uma quantidade de dissipação $\mu = 10^{-3}$. (b) Bacia de atração para $\mu = 10^{-3}$. As cores preta e vermelha correspondem à bacia dos atratores de período 1 em (a) e a cor amarela corresponde às condições iniciais que escapam para fora da região do espaço de fases limitada pela grade $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$.



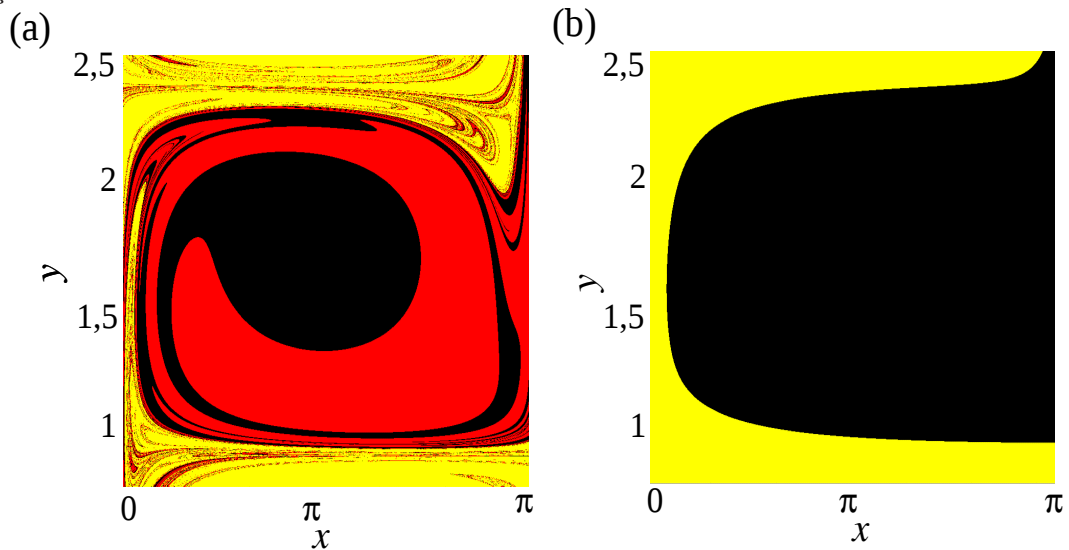
FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (27).

A Figura 4.1(b) representa a bacia de atração correspondente ao valor de dissipação $\mu = 10^{-3}$. O procedimento utilizado para obtenção da bacia de atração consiste de uma grade de condições iniciais iteradas no espaço de fases, onde observamos seu comportamento assintótico. Regiões em preto representam condições iniciais que irão para o atrator de período 1 representado na cor preta na Figura 4.1(a). Regiões em vermelho irão para o atrator de período 1 indicado na cor vermelha na Figura 4.1(a). As órbitas das duas bacias de atração, pontos pretos e vermelhos, eram órbitas quase periódicas no caso

conservativo. As regiões na cor amarela representam as condições iniciais que escapam para regiões fora desse espaço de fases.

Para uma dissipação fraca o sistema apresenta um elevado número de atratores coexistindo e suas bacias correspondentes possuem uma estrutura complexa. Com o acréscimo de uma pequena dissipação, as órbitas vizinhas localizadas no mar caótico podem ir para um atrator ou escapar pela região delimitada.

Figura 4.2: Bacia de atração para (a) $\mu = 10^{-2}$ e (b) $\mu = 10^{-1}$. Cores preta e vermelha correspondem aos atratores de período 1 e a cor amarela às condições iniciais que escapam da grade de condições iniciais.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (27).

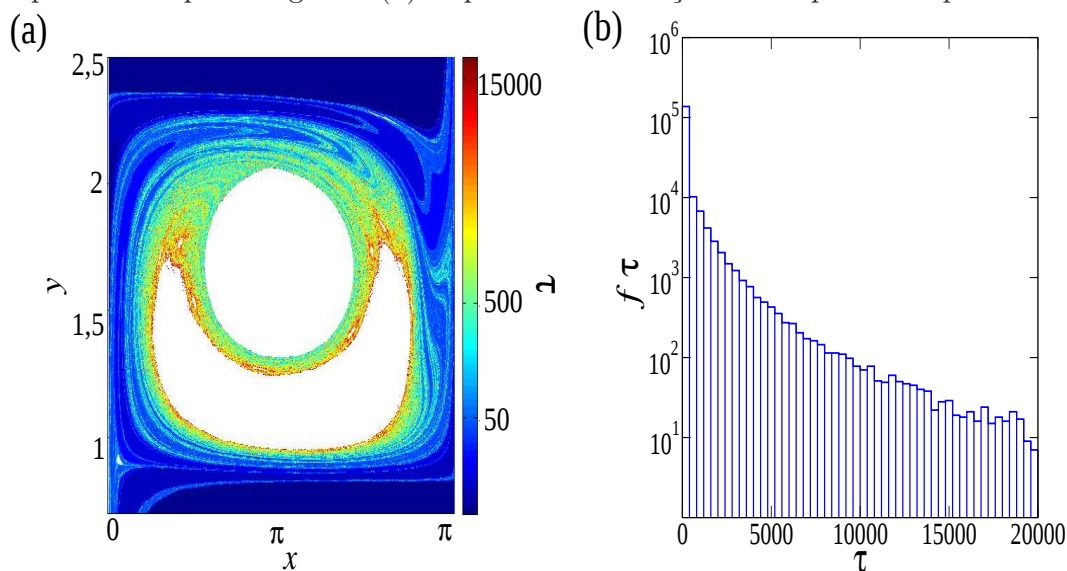
Nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b) observamos a bacia de atração para valores de dissipação $\mu = 10^{-2}$ e $\mu = 10^{-1}$, respectivamente. Com o aumento do valor da dissipação μ , é possível verificar a diminuição do número de atratores. Na Figura 4.2(a) aumentamos o valor da dissipação de $\mu = 10^{-3}$ da Figura 4.1(b) para $\mu = 10^{-2}$ e observamos que os limites das bacias em preto e vermelho começam a misturar-se. Ao mesmo tempo a região em amarelo fica mais definida. Na Figura 4.2(b) o cenário muda quando o valor da dissipação aumenta para $\mu = 10^{-1}$. O atrator de período 1 da bacia vermelha desaparece. Temos somente uma bacia de atração composta por pontos pretos e outra por amarelos. A bacia de atração representada na cor amarela é definida para partículas que irão para fora da grade de condições iniciais.

Desta forma, com o acréscimo de um termo dissipativo no sistema (4.1), observamos efeitos de aprisionamento e transporte após um transiente. Parte das condições iniciais são conduzidas ao atrator de período 1 e outra parte escapam da região delimitada. Assim, verificamos que propriedades de transporte são alteradas com o acréscimo de um termo dissipativo no modelo de ondas de deriva.

4.2 Tempo de escape

Estudamos o tempo de escape das partículas em relação ao parâmetro de dissipação μ . Consideramos que as partículas escapam quando cruzam a região limite do espaço de fases $0 < x \leq \pi$ e $0,7 < y \leq 2,5$ para um tempo contínuo $t = 20000$. A Figura 4.3(a) e (b) mostram o tempo de escape τ em escala de cor para um conjunto de condições iniciais para o caso conservativo, $\mu = 0$ e sua respectiva distribuição.

Figura 4.3: Tempo de escape em função das condições iniciais para $\mu = 0$. Condições iniciais representadas em cores azul escura escapam mais rapidamente que as representadas nas cores vermelhas, conforme mostra a paleta de cores. Regiões em branco representam as condições iniciais que não escapam da grade. (b) respectiva distribuição do tempo de escape.

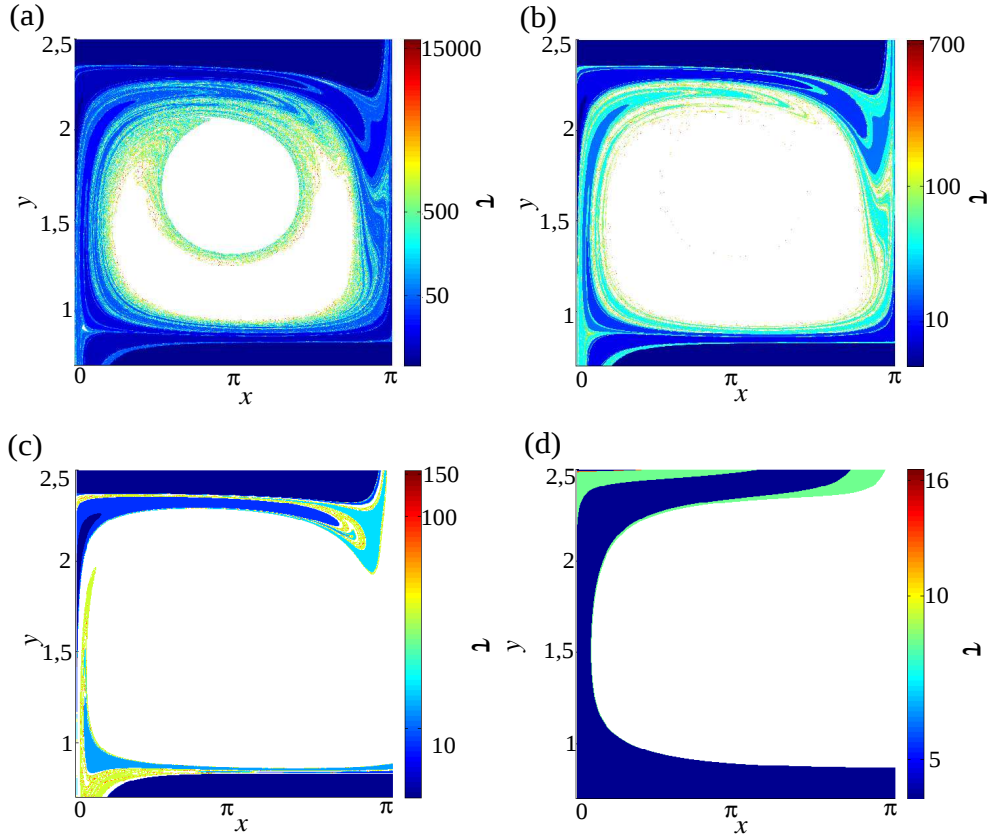


FONTE: O autor.

Na Figura 4.3(a) a região em branco representa as condições iniciais que não escapam da grade, ou seja, partículas que estão aprisionadas em algumas das órbitas apresentadas na Figura 3.9(b). Observamos na paleta de cores uma variação da cor azul escuro, que representa partículas que escapam mais rápido, para a cor vermelha, partículas que demoram mais tempo para escapar. Na Figura 4.3(b) temos o histograma da distribuição do tempo de escape referente à Figura 4.3(a), onde observamos uma distribuição assimétrica para a direita. Encontramos condições iniciais que demoram 20000 tempos para escapar.

A fim de verificar o comportamento do tempo de escape devido ao parâmetro de dissipação μ , calculamos o tempo de escape para valores de $\mu = 10^{-4}$, $\mu = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-2}$ e $\mu = 10^{-1}$ na Figura 4.4 (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

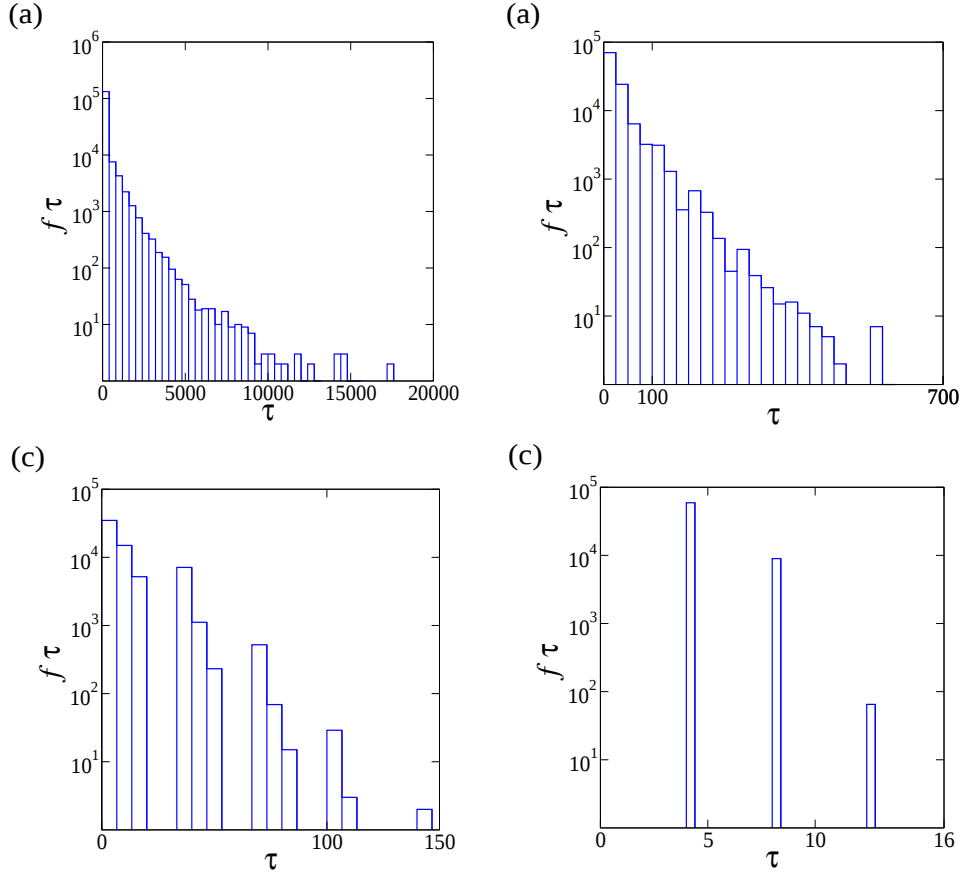
Figura 4.4: Tempo de escape em escala de cores como função das condições iniciais para valores de dissipação. Regiões em azul representam condições iniciais que escapam rapidamente, enquanto regiões em vermelho representam partículas que demoram mais tempo para escaparem. (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 10^{-3}$, (c) $\mu = 10^{-2}$ e (d) $\mu = 10^{-1}$.



FONTE: O autor.

A região em branco na Figura 4.4 representa condições iniciais que não escapam da grade, ou seja, partículas que irão para algum atrator dentro desta região. A paleta de cores revela uma variação da cor azul, partículas que escapam mais rápido, para a cor vermelha, partículas que retardam para escapar. Notamos que com o aumento do valor da dissipação, a região em branco aumenta. Isto quer dizer que mais partículas ficarão aprisionadas. No entanto, o tempo de escape diminui a medida que a dissipação aumenta. Para $\mu = 10^{-4}$ encontramos condições iniciais que demoram um tempo aproximado de até 15000 para escaparem, enquanto para $\mu = 10^{-3}$, $\mu = 10^{-2}$, $\mu = 10^{-1}$ tardam 700, 150 e 16, respectivamente.

Figura 4.5: Distribuição assimétrica para a direita referentes à Figura 4.5(a),(b),(c) e (d) para valores de dissipação (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 10^{-3}$, (c) $\mu = 10^{-2}$ e (d) $\mu = 10^{-1}$, respectivamente. O tempo em que todas as partículas que escapam da grade é inversamente proporcional ao valor da dissipação μ .



FONTE: O autor.

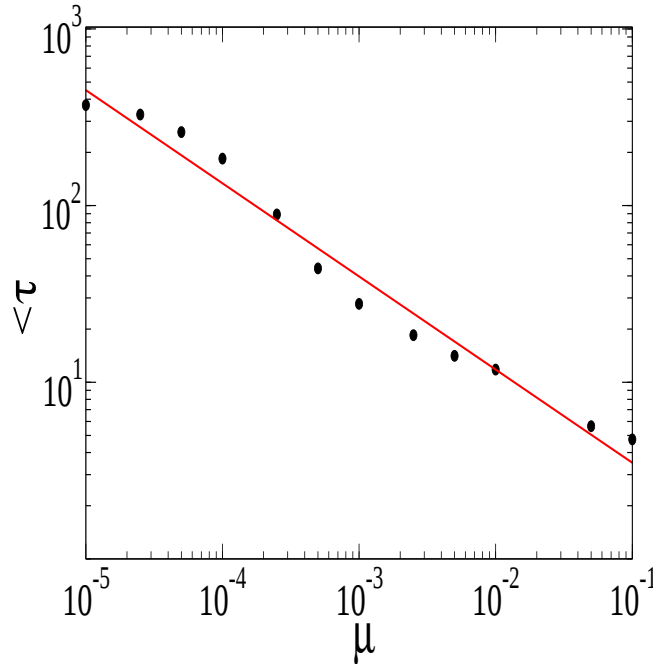
Na Figura 4.5(a),(b),(c) e (d) observamos a respectiva distribuição $f(\tau)$ referente à figura 4.4(a),(b),(c) e (d). É possível notar que trata-se de uma distribuição assimétrica para a direita, devido ao fato que uma grande quantidade de partículas têm um tempo de escape maior que 10^4 para $\mu = 10^{-4}$, maior que 10^2 para $\mu = 10^{-3}$ e $\mu = 10^{-2}$ e maior que 10^1 para $\mu = 10^{-1}$. Notamos que o tempo em que todas as condições iniciais que escapam é inversamente proporcional ao valor da dissipação μ .

Para cada valor de dissipação observamos que o tempo de escape das condições iniciais se altera, da mesma forma, a distribuição $f(\tau)$ também se altera. Desta forma, calculamos o tempo de escape médio

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tau_m, \quad (4.2)$$

em que M é o número de condições iniciais que escapam da região do espaço de fases.

Figura 4.6: Tempo de escape médio como função da dissipação. Linha sólida é o ajuste para uma lei de potência.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (27).

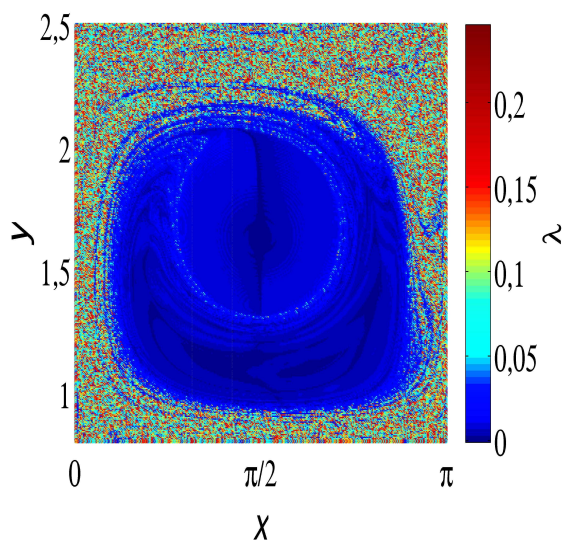
A dependência do tempo de escape médio com a dissipação é representada na Figura 4.6, onde o valor médio é calculado sobre $2,5 \times 10^5$ condições iniciais. Os mínimos quadrados ajustados na Figura 4.6 mostram uma dependência na forma de lei de potência $\langle \tau \rangle = 1,04\mu^{-0,53}$. Assim, o tempo de escape médio $\langle \tau \rangle$ diminui quando a amplitude da dissipação aumenta. O declínio das trajetórias transitórias pode ser associado às linhas de campo caóticas que escapam em tokamaks (93).

4.3 Transiente Caótico

Transporte caótico ocorre quando as trajetórias das partículas apresentam um comportamento caótico, porém quando introduzimos dissipação o mar caótico desaparece. Desta forma, analisamos as trajetórias das partículas por meio dos expoentes de Lyapunov no modelo de ondas de deriva com dissipação. Atratores aparecem quando introduzimos dissipação no movimento de deriva, consequentemente, não irão existir ilhas nem mar caótico no espaço de fases. Com isto em mente, usamos os expoentes de Lyapunov a tempo finito para verificar a existência de transporte durante um transiente caótico. Analisamos se transporte caótico ocorre antes das trajetórias de partículas irem para os atratores periódicos.

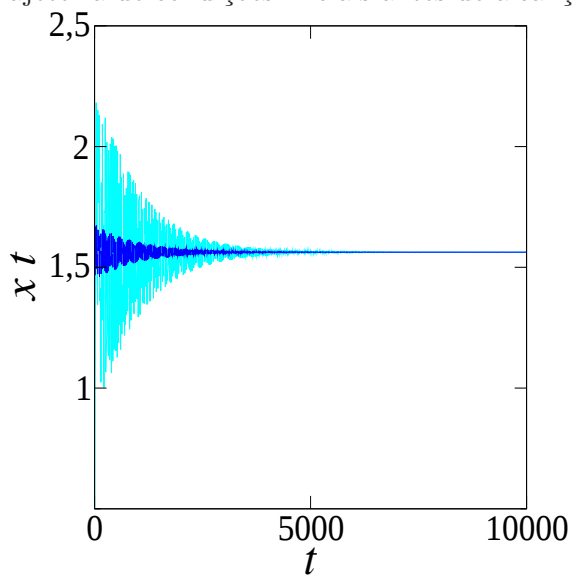
A Figura 4.7 mostra os expoentes de Lyapunov a tempo finito em escala de cores como função das condições iniciais. Regiões representadas em azul escuro correspondem as trajetórias das partículas que não escapam para atratores fora da grade $0 \leq x \leq \pi$ e $0,5 \leq y \leq 2,5$. As regiões representadas em cores diferentes de azul escuro são trajetórias que além de escapar da região também possuem expoentes de Lyapunov positivos. Como resultado, nestas regiões as trajetórias apresentam um transiente caótico durante o transporte. A Figura 4.8 representa duas trajetórias que apresentam expoentes de Lyapunov diferentes. Observamos que a trajetória em azul atinge o atrator antes que a região representada em azul celeste.

Figura 4.7: Expoentes de Lyapunov a tempo finito em escala de cores em função das condições iniciais para $T = 100$, $\mu = 10^{-3}$ e valores da tabela 3.1.



FONTE: Adaptado de (27).

Figura 4.8: Trajetória de condições iniciais antes de alcançar um atrator.



FONTE: O autor.

5 *Efeito de Ruído do Modelo de Duas Ondas de Deriva*

5.1 Duas Ondas de Deriva com Ruído

Neste capítulo estudamos o efeito de um ruído aditivo com distribuição uniforme no sistema de equações 4.1 (28). O novo sistema para duas ondas de deriva com dissipação e ruído é

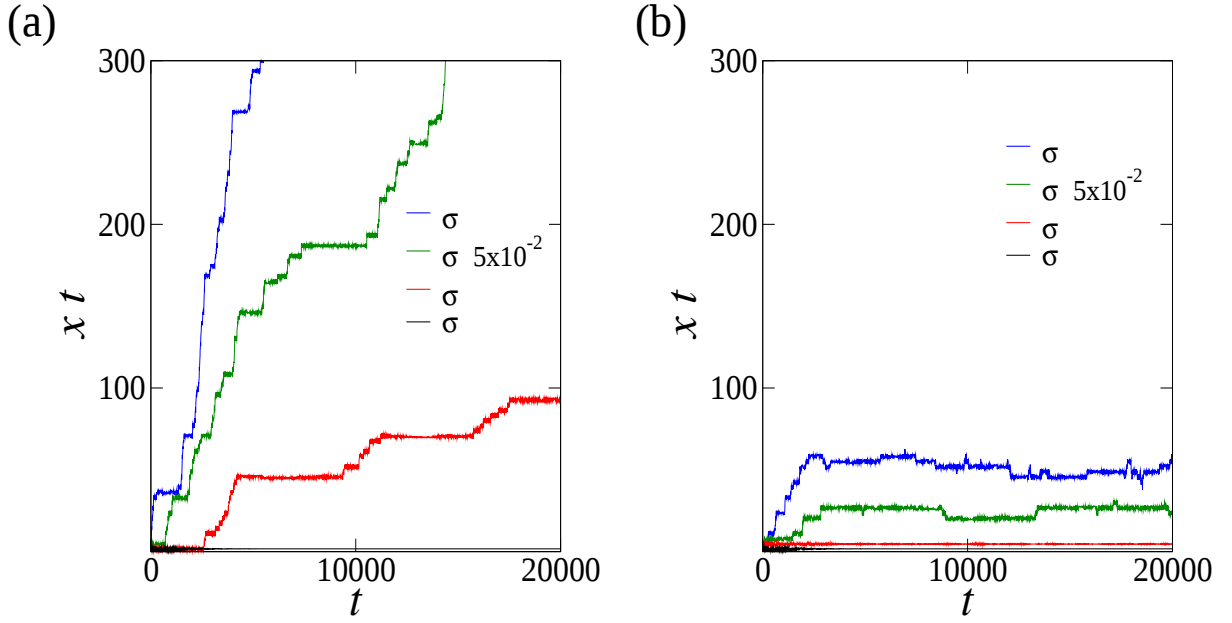
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_1 k_{y_1} \text{sen}(k_{x_1} x) \text{sen}(k_{y_1} y) \\ &\quad + A_2 k_{y_2} \text{sen}(k_{x_2} x) \text{sen}(k_{y_2} (y - ut)) - \mu x + \sigma \xi, \\ \frac{dy}{dt} &= A_1 k_{x_1} \cos(k_{x_1} x) \cos(k_{y_1} y) \\ &\quad + A_2 k_{x_2} \cos(k_{x_2} x) \cos(k_{y_2} (y - ut)) - \mu y + \sigma \xi,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde σ é a amplitude do ruído e ξ é uma flutuação randômica no intervalo $[0, 1]$. Para estudar o efeito de ruído neste modelo para nossas simulações consideramos um conjunto de $2,5 \times 10^5$ condições iniciais para $t = 2 \times 10^4$ em uma grade de $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$. Os valores dos parâmetros estão na Tabela 3.1.

Na Figura 5.1(a) e (b) apresentamos a trajetória de uma condição inicial para diferentes valores de intensidade de ruído σ , para os valores de dissipação $\mu = 0$ e $\mu = 10^{-3}$, respectivamente. Na Figura 5.1(a), observamos o efeito local do ruído no sentido que a intensidade do ruído ajuda as partículas a escaparem da região do confinamento. Percebemos que para o caso conservativo $\mu = 0$ e sem ruído $\sigma = 0$, a trajetória da condição inicial não escapa da região de confinamento, ou seja, permanece aprisionada em alguma órbita. Observamos que para amplitudes de ruído maiores, a trajetória escapa da grade em

um tempo menor. Na Figura 5.1(b) consideramos o caso dissipativo onde existem atratores no sistema. Para o caso sem ruído, a condição inicial é atraída para o atrator e não escapa. Quando o ruído é adicionado, verificamos que as trajetórias podem escapar dependendo da intensidade do ruído. Notamos também que existe uma relação entre a intensidade de ruído e o tempo de escape.

Figura 5.1: Trajetória de uma condição inicial para valores de ruído $\sigma = 10^{-1}$, $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-2}$ e $\sigma = 0$ representados nas cores azul, verde, vermelha e preta, respectivamente. (a) $\mu = 0$ e (b) $\mu = 10^{-3}$.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

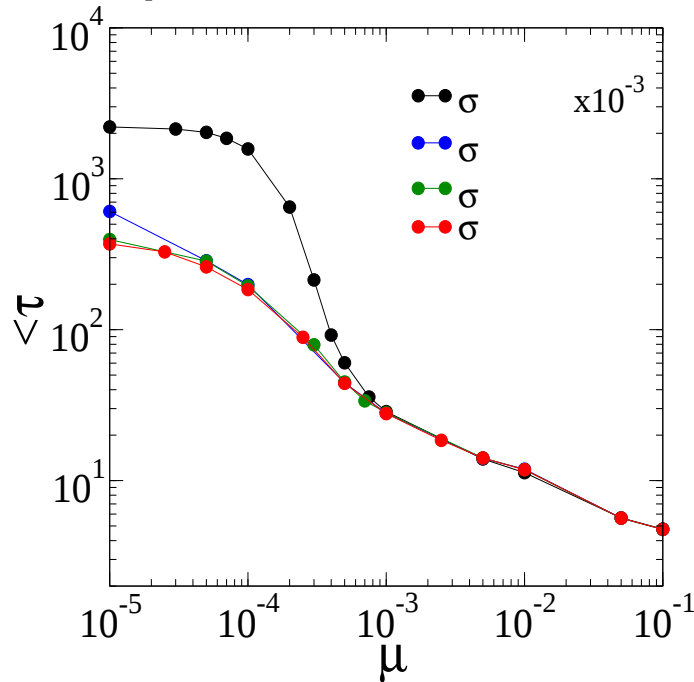
5.2 Ressonância Estocástica

Neste estudo damos ênfase ao confinamento visando encontrar ruído que otimize o tempo de confinamento, ou seja, as partículas permanecem aprisionadas por mais tempo. Vamos investigar a relação do tempo de escape médio das condições iniciais da grade em função da dissipação e do ruído.

A Figura 5.2(a) mostra a variação do tempo de escape médio com o parâmetro dissipativo μ para diferentes valores de σ , isto é, $\sigma = 0$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-3}$ e $\sigma = 6,625 \times$

10^{-3} , respectivamente. Observamos claramente o aumento do tempo de escape médio a medida que se aumenta o valor da intensidade do ruído. Por outro lado, na mesma figura podemos observar o efeito inverso em relação à dissipação. O tempo de escape diminui com o aumento da dissipação e alcança um efeito de saturação quando $\mu = 10^{-3}$. As curvas se aproximam uma da outra para valores maiores que $\mu = 10^{-3}$, onde seguem a lei de potência do caso sem ruído apresentada no capítulo anterior. Podemos dizer que há uma saturação no tempo de escape médio para grandes valores de dissipação. Para valores de ruído até $\sigma = 6,63 \times 10^{-3}$, o sistema responde com a diminuição do tempo de escape médio em função do parâmetro dissipativo. Para valores maiores que $\mu = 10^{-3}$ ocorre a saturação das curvas.

Figura 5.2: Tempo de escape médio em função da dissipação para intensidade de ruído $\sigma = 0$, $\sigma = 10^{-4}$, $\sigma = 10^{-3}$ e $\sigma = 6,625 \times 10^{-3}$, respectivamente. Observamos a diminuição do tempo de escape quando a dissipação torna-se maior. Para valores de dissipação maiores que $\mu = 10^{-3}$ as curvas se ajustam a uma lei de potência.

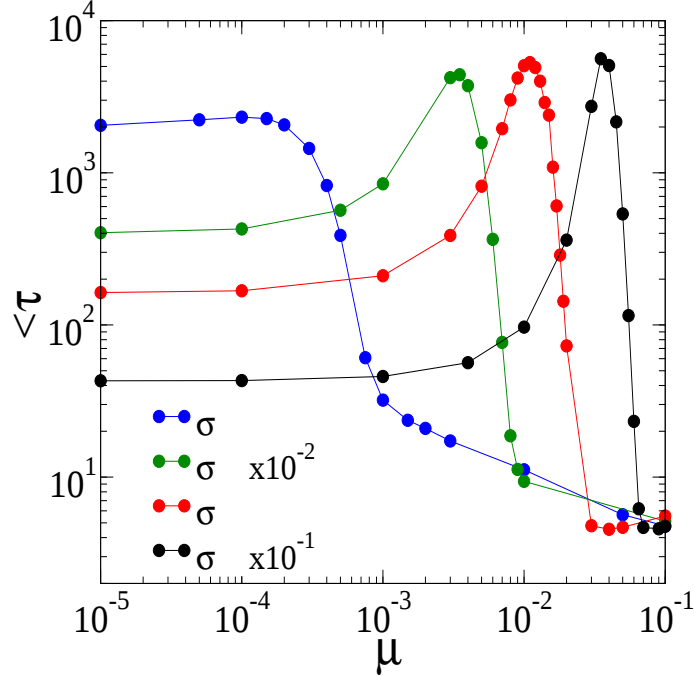


FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

Analisamos o que acontece quando a intensidade do ruído aumenta. Para este propósito calculamos na Figura 5.3 o tempo de escape médio $\langle \tau \rangle$ em função da dissipação μ para valores de ruído $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-1}$, e $\sigma = 2 \times 10^{-1}$. A Figura 5.3

mostra a mudança de comportamento das curva para valores de ruído maiores que o ruído mínimo $\sigma_m = 6,63 \times 10^{-3}$. Para valores de σ maiores que σ_m , verificamos a existência do fenômeno ressonância estocástica (RE), o qual as partículas aprisionadas tardam um tempo maior para escaparem da região de confinamento. Neste caso, podemos ver que para certos valores de dissipação e ruído é possível melhorar o confinamento de partículas. Em nossas simulações, observamos que o tempo de escape médio aumenta para estes valores ótimos de σ .

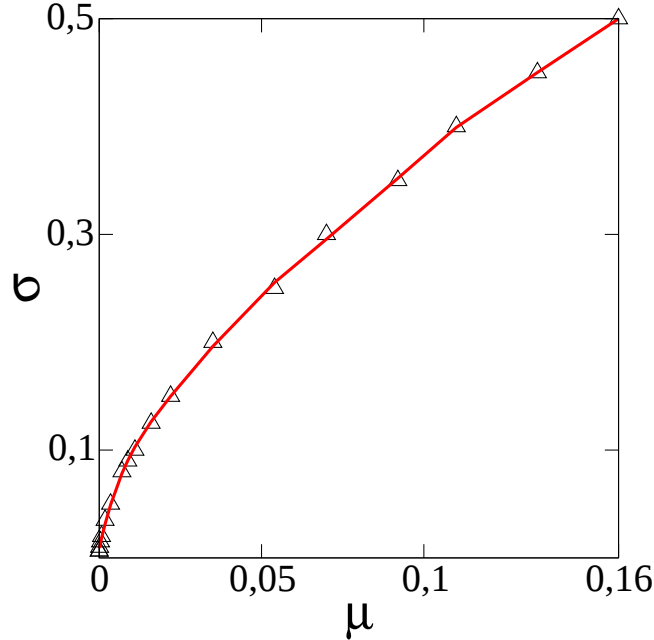
Figura 5.3: Tempo de escape médio em função do parâmetro dissipativo para valores de ruído acima de $\sigma_m = 6,63 \times 10^{-3}$. As curvas em azul, verde, vermelho e preto representam valores de ruído $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-1}$ e $\sigma = 2 \times 10^{-1}$, respectivamente.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

A fim de verificar a relação entre o ruído e a dissipação, consideramos valores onde encontramos picos de acordo com a Figura 5.3. O ruído em função do parâmetro de dissipação está representado na Figura 5.4. Como resultado, observamos que a curva apresenta um ajuste dado por $\sigma = \sqrt{2\mu}$. Com esta equação, é possível determinar a intensidade do ruído quando existe ressonância estocástica por meio do parâmetro de dissipação, ou seja, obter a situação para o maior tempo de escape médio de partículas.

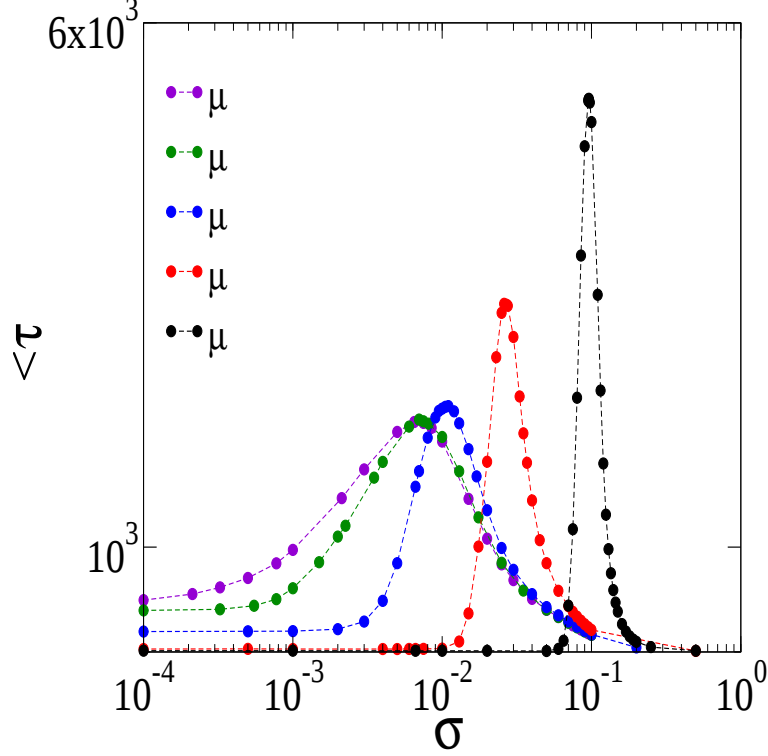
Figura 5.4: Ruído em função da dissipação em que obtemos uma relação entre σ e μ na forma $\sigma = \sqrt{2\mu}$ (linha vermelha).



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

A equação ajustada a partir dos pontos da Figura 5.4 nos fornece os valores de σ e μ quando $\langle \tau \rangle$ assume valores máximos. Com o objetivo de analisar o comportamento de $\langle \tau \rangle$ em torno do ponto máximo calculamos $\langle \tau \rangle$ em função de σ . A Figura 5.5 mostra esta relação para o parâmetro dissipação igual a 10^{-6} , 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} e 10^{-2} , em que o valor médio do tempo de escape é calculado a partir de um conjunto de $2,5 \times 10^{-5}$ condições iniciais em um tempo de 20000 em uma grade no plano xy igual a $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$. Observamos na Figura 5.5 que a curva do tempo de escape médio em função do ruído exibe um pico para diferentes valores de μ . Para $\mu = 10^{-6}$ (círculos violetas) a curva mostra um valor ótimo da amplitude de ruído perto de $\sigma = 6,6 \times 10^{-3}$. De acordo com nossos resultados, aumentando o valor de μ para $\mu = 10^{-5}$ (círculos verdes), $\mu = 10^{-4}$ (círculos azuis), $\mu = 10^{-3}$ (círculos vermelhos) e $\mu = 10^{-2}$ (círculos pretos), verifica-se que não somente o pico muda a posição, mas também a dispersão do pico diminui. Portanto, através das Figura 5.3 e 5.5 podemos encontrar valores de σ e μ em que ocorre o fenômeno ressonância estocástica, ou seja, ocorre um tempo de escape médio maior de partículas sujeitas ao modelo de duas ondas de deriva.

Figura 5.5: Tempo de escape médio contra a intensidade do ruído para diferentes valores de dissipação. Observamos o fenômeno RE, onde o tempo de escape médio é otimizado para valores de dissipação e ruído.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

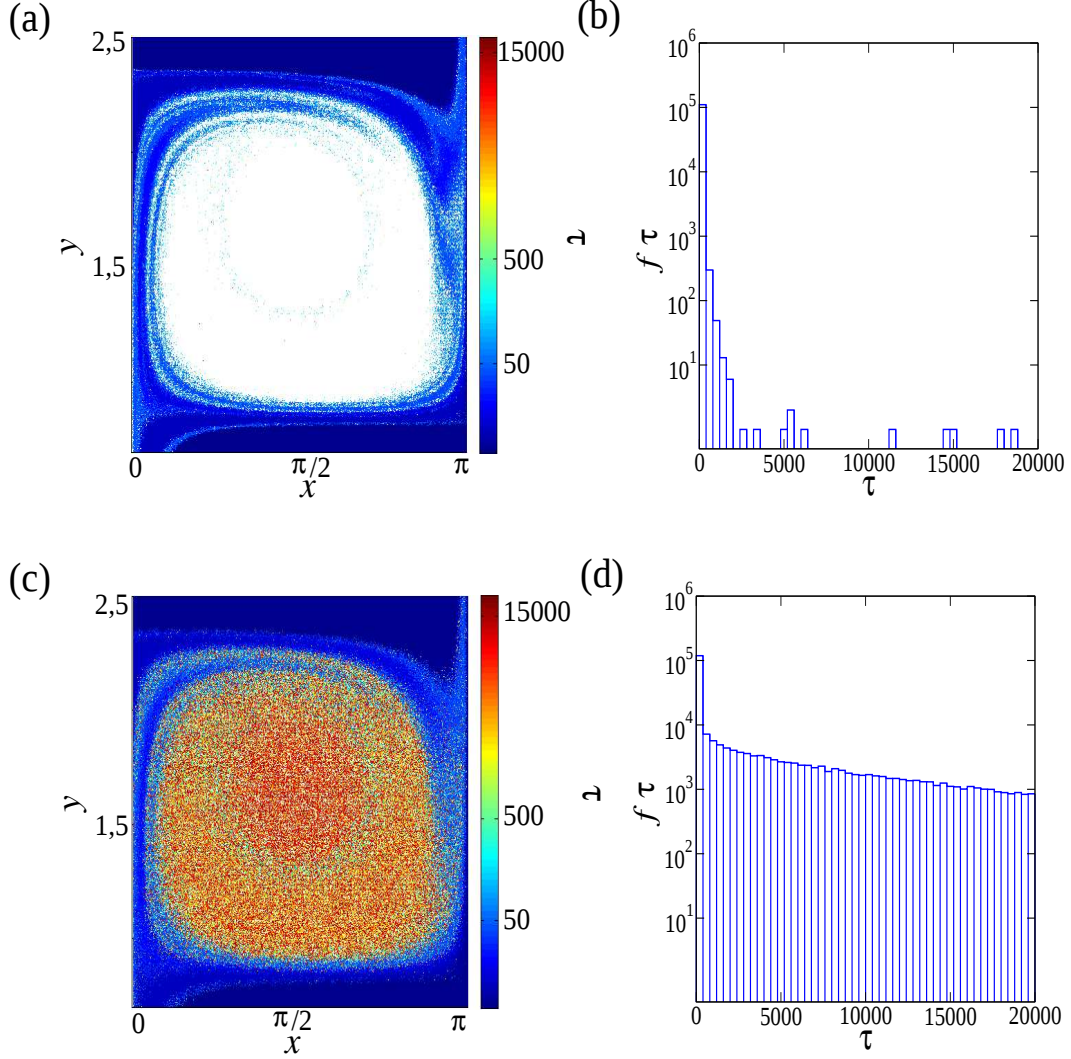
Desta forma, foi detectado o fenômeno RE devido ao fato de que o ruído adicionado ao movimento de deriva dissipativo produz alterações no comportamento do tempo de escape médio. Este estudo mostra a possibilidade de ressonância estocástica devido ao ruído na dinâmica de partículas de plasma confinado.

5.3 Bacia do Tempo de Escape

A fim de elucidar os resultados anteriores, marcamos a região do espaço de fases com o tempo de escape das partículas. Consideramos que uma trajetória escapa quando cruza a fronteira da região do espaço de fases, definido pelo intervalo $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$, para o exterior e não retorna. Chamamos de bacia do tempo de escape o conjunto de condições iniciais que escapam desta fronteira. As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam o espaço de

fases com o tempo de escape em barra de cores e respectiva distribuição assimétrica para a direita. Os parâmetros utilizados na integração do sistema (5.1) são dados na Tabela 3.1.

Figura 5.6: Tempo de escape em barra de cores para valores de dissipação e ruído, onde consideramos (a) $\mu = 10^{-3}$ e $\sigma = 10^{-2}$, e (c) $\mu = 10^{-3}$ e $\sigma = 2,7 \times 10^{-2}$. As Figuras (b) e (d) correspondem à distribuição do tempo de escape para (a) e (c), respectivamente.

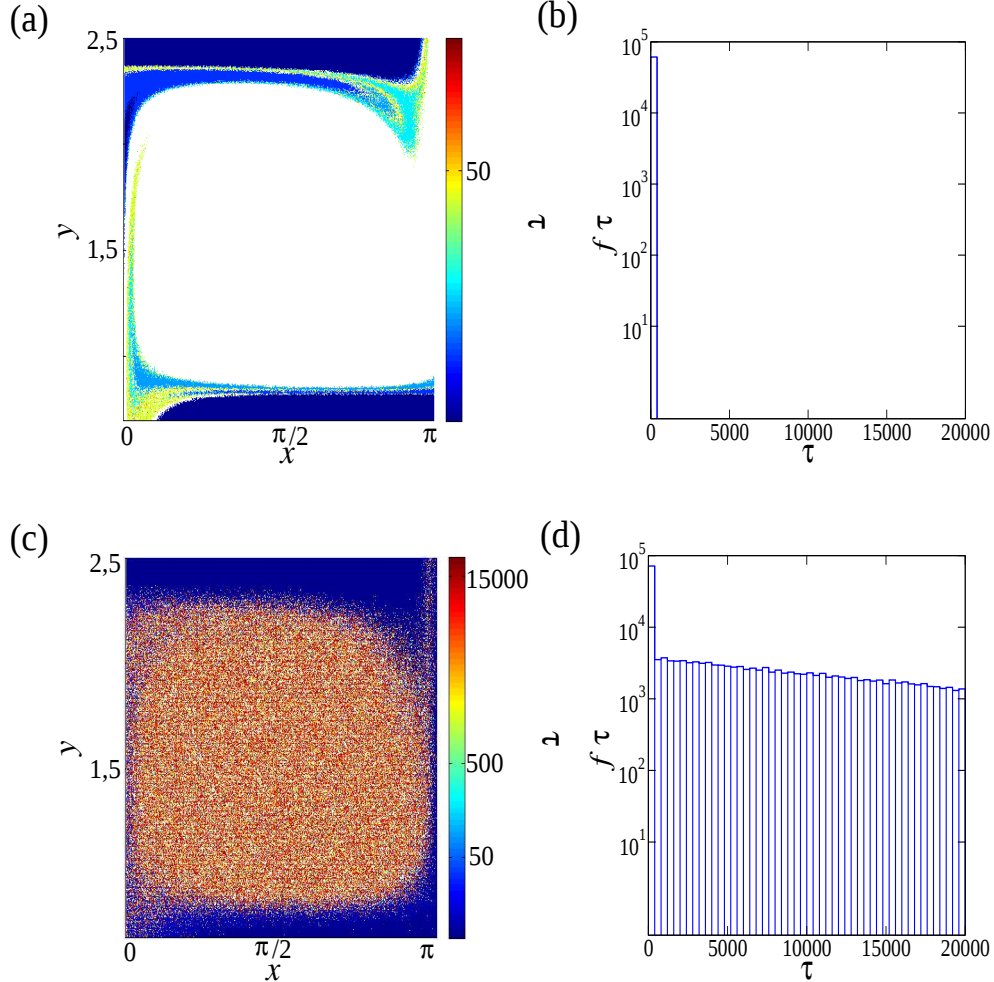


FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

Na Figura 5.6(a), calculamos o tempo de escape em uma grade de condições iniciais sob o modelo de ondas de deriva com dissipação $\mu = 10^{-3}$ e intensidade de ruído $\sigma = 10^{-2}$. Regiões em branco correspondem às condições iniciais que não escapam da região do espaço de fases, ou seja, as trajetórias irão para algum dos atratores que se

encontram dentro deste limite estabelecido. No caso onde não ocorre RE, as partículas que escapam da grade têm tempo de escape médio curto, como corrobora a Figura 5.6(b) por meio da distribuição de partículas que escapam, com $\langle \tau \rangle \approx 32$. Entretanto, quando o fenômeno RE é verificado, percebemos que todas as condições escapam e como pode ser visto o resultado da Figura 5.6(c), não possui regiões em branco. A distribuição do tempo de escape, demonstrado na Figura 5.6(d), é assimétrica para direita devido ao fato de que um elevado número de condições iniciais tem um tempo de escape maior que 10^3 , e o tempo de escape médio é igual a $3,3 \times 10^3$.

Figura 5.7: Tempo de escape em barra de cores para valores de dissipação e ruído, onde consideramos (a) $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 10^{-2}$, e (c) $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 9,6 \times 10^{-2}$. As Figuras (b) e (d) correspondem à distribuição do tempo de escape para (a) e (c), respectivamente.



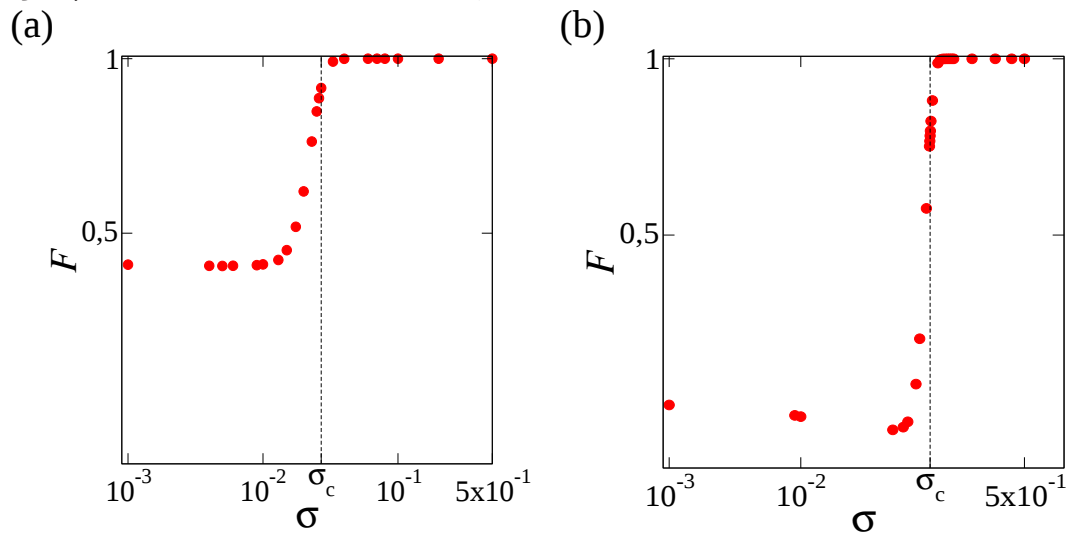
FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

Na Figura 5.5 notamos que a curva de maior pico corresponde ao valor de dissipação $\mu = 10^{-2}$. A intensidade de ruído atribuído a este pico é $\sigma = 9,6 \times 10^{-2}$. Com isto em mente, queremos verificar o comportamento do tempo de escape médio para esta curva. Primeiramente, na Figura 5.7(a) e (b), investigamos o caso onde não ocorre RE. Calculamos o espaço de fases com o tempo de escape em barra de cores e respectiva distribuição para os valores de dissipação e ruído $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 10^{-2}$, respectivamente. Observamos que para altos valores de dissipação μ , quando σ não assume um valor ótimo, o tempo de escape médio é $\langle \tau \rangle \approx 11,2$ é muito baixo, conforme mostra a Figura 5.7(a). A Figura 5.7(b) revela a respectiva distribuição das partículas que escapam referente à Figura 5.7(a). Agora investigamos os efeitos de ruído para os valores de $\mu = 10^{-2}$ e $\sigma = 9,6 \times 10^{-2}$ onde o fenômeno RE se manifesta. Neste caso, na Figura 5.7(c) observamos que todas as partículas escapam. Não existe regiões em branco, em contrapartida o tempo de escape médio $\langle \tau \rangle \approx 5280$ é alto. Na Figura 5.7(d) observamos a respectiva distribuição referente à Figura 5.7(c), com assimetria para direita.

Nas Figuras 5.6 e 5.7 observamos valores ótimos de ruído σ , que chamaremos de ruído crítico σ_c . Percebemos que, apesar do tempo de escape médio $\langle \tau \rangle$ ser maior para valores críticos σ_c , todas as partículas escapam da fronteira de integração. Calculamos a fração de partículas que escapam da grade, definida pelo intervalo $0 \leq x \leq \pi$ e $0,7 \leq y \leq 2,5$, em função da intensidade de ruído na Figura 5.8. Esta fração é dada por $F = N_{\text{esc}}/N$, onde N_{esc} e N são o número de partículas que escapam e o número total de partículas, respectivamente.

Na Figura 5.8(a) utilizamos o valor de dissipação $\mu = 10^{-3}$, onde verificamos que todas as trajetórias escapam ($F = 1$) quando σ é aproximadamente maior que o valor crítico de ruído ($\sigma_c = 2,7 \times 10^{-2}$), representado por linhas pontilhadas. Na Figura 5.8(b), utilizamos o termo dissipativo $\mu = 10^{-2}$, onde a intensidade de ruído encontrada é $\sigma_c = 9,6 \times 10^{-2}$. Também verificamos que todas as trajetórias escapam ($F = 1$) quando a intensidade de ruído σ é aproximadamente maior que o valor crítico σ_c , representado em linhas pontilhadas, onde o fenômeno ressonância estocástica ocorre.

Figura 5.8: Fração de partículas que escapam da grade de integração com a variação da intensidade do ruído. (a) Para dissipação $\mu = 10^{-3}$ encontramos $\sigma_c = 2,7 \times 10^{-2}$. (b) Para dissipação $\mu = 10^{-2}$ encontramos $\sigma_c = 9,6 \times 10^{-2}$.



FONTE: Adaptada de Oyarzabal, 2016 (28).

6 *Conclusões*

Neste estudo investigamos o modelo Hamiltoniano de duas ondas de deriva, que descreve o transporte caótico de partículas em um plasma confinado magneticamente. Ondas de deriva surgem como resposta à turbulência eletrostática nas bordas do plasma. O movimento de deriva também está tipicamente relacionado com a difusão anômala. Neste modelo encontramos a dinâmica caótica a partir de duas ondas de deriva. Consideramos a amplitude da segunda onda como 10% da amplitude da primeira onda, ou seja, equivalente a uma pequena perturbação do sistema. Com esta configuração, ainda que no caso conservativo, o conjunto de equações dada pela Hamiltoniana apresenta comportamento caótico e é quase integrável. Variamos o parâmetro responsável pela diferença de fase das duas ondas onde constatamos órbitas periódicas, quase periódicas e caóticas.

Incluímos um termo dissipativo no modelo de duas ondas de deriva. Com o termo dissipativo, observamos a destruição de ilhas KAM, ou torus KAM, bem como o desaparecimento da região caótica. Devido à dissipação, verificamos no sistema a existência de bacias de atração. Constatamos que o padrão da bacia de atração depende do parâmetro de dissipação. Além disso, para o modelo dissipativo de duas ondas de deriva, investigamos a dependência do tempo de escape em relação ao parâmetro de dissipação. Observamos que a quantidade de condições iniciais que apresentam um elevado tempo de escape diminui quando o parâmetro dissipativo aumenta. Verificamos, através de nossos resultados numéricos, que o tempo de escape médio segue uma lei de potência com o aumento da dissipação. Encontramos expoentes de Lyapunov a tempo finito positivo no modelo, consequentemente as trajetórias apresentam um transiente caótico. Estas características indicam como o transporte depende da dissipação.

O ruído é um parâmetro que desperta o interesse no estudo de muitos fenômenos

físicos, deste modo, introduzimos um ruído aditivo no sistema. Dissipação e ruído podem ser considerados efeitos de colisões entre as partículas confinadas. No movimento de deriva dissipativo com ruído observou-se que o tempo médio de escape pode ser maximizado quando a intensidade de ruído atinge um nível determinado. Este fenômeno é chamado de ressonância estocástica (RE). Encontramos que o tempo de escape médio é ajustado por uma raiz quadrada no espaço de parâmetros dada pelo ruído e dissipação. Além disso, verificamos que não apenas a distribuição do tempo de escape é assimétrica para direita, mas também que o pico RE ocorre antes de todas as partículas terem escapado da grade. Consequentemente, o tempo médio de confinamento é otimizado quando RE ocorre no movimento de deriva dissipativo com o ruído.

Por fim, foi possível ampliar a discussão do modelo de duas ondas de deriva, considerando dissipação e ruído. Com isto, novas análises qualitativas de transporte podem ser examinadas. Nossos resultados indicam como os efeitos de dissipação e ruído podem modificar o transporte caótico de partículas sujeitas ao confinamento magnético.

Após os resultados deste trabalho novas possibilidades de investigação, com modelos que estudam o transporte na física de plasma, poderão ser realizadas. Segue abaixo algumas sugestões para trabalhos futuros. Investigar o efeito do acréscimo de uma perturbação periódica ao modelo de duas ondas de deriva. Investigar com isto as relações entre os termos dissipativos, ruído e a perturbação. Verificar que influência este novo parâmetro exerce sobre as propriedades de transporte de partículas na borda do plasma.

Ainda com o sistema dado pelo movimento de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, pode ser investigado a relação entre a diferença de fase das duas ondas u em função do tempo de escape de partículas confinadas, bem como uma conexão com valores críticos de ruído σ_c . Com estes resultados, e considerando o fenômeno ressonância estocástica, é possível investigar estas propriedades de transporte para outros modelos da física de plasma.

Referências Bibliográficas

- 1 POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, **Acta Mathematica**, v. 13, p. 1-270, 1890.
- 2 LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p.130–141, 1963.
- 3 VIANA, R. L. **Introdução à dinâmica não-linear e caos**. Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba, 2011.
- 4 MAY, R. M. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, **Nature**, 261, p.459-467, 1976.
- 5 LI, Y., YORKE, J. A. Period Three Implies Chaos, **Amer. Math. Monthly**, v. 82, p. 985-992, 1975.
- 6 OTT, E. GREBOGI, C. YORKE, J. A. Controlling chaos, **Phys. Rev. Lett.** 64, 2837, 1990.
- 7 AGUIRRE, J., VIANA, R.L., SANJUÁN, M.A.F. Fractal structures in nonlinear dynamics, **Rev. Mod. Phys**, 81, p.333-386, 2009.
- 8 WILLEMS, J. C. **Dissipative dynamical systems, parts I. General theory. Archive for rational mechanics and analysis**, v.45, pp.321, 1972.
- 9 OTT, E., **Chaos in Dynamical Systems**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 10 BENZI R, SUTERA, A.; VULPIANI, A. The mechanism of stochastic resonance. **J Phys A**, p.453-457, 1981.
- 11 SEOANE, J. M. SANJUÁN, M. A. F. Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering, **Physics Letters A**, 372, 110, 2008.
- 12 OLIVEIRA, D. F. M. LEONEL, E. D. Some dynamical properties of a classical dissipative bouncing ball mode with two nonlinearities, **Physica A**, 392, p.1762-1769, 2013.

- 13 FREITAS, M. S. T. VIANA, R. L. GREBOGI, C. Multistability, Basin Boundary Structure, and Chaotic Behavior in a Suspension Bridge Model. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, 14, 3, p.927-950, 2004.
- 14 THOMPSON, J. M. T., STEWART, H. B. **Nonlinear Dynamics and Chaos**, Wiley, Chichester, 1986.
- 15 CHEN, F.F. **Introduction of Plasma Physics**. Plenum Press, New York, 1974.
- 16 BITTENCOURT, J.A. **Fundamentals of Plasma Physics** Springer, New York, 2004.
- 17 FRIDMAN, A. KENNEDY, L. A. **Plasma Physics and Engineering**, CRC press, 2004.
- 18 PIEL, A. **Plasma Physics: An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas**, Springer, 2010.
- 19 GOLDSTON, R.J. RUTHERFORD, P.H. **Introduction to Plasma Physics**, CRC Press, 2010.
- 20 MARCUS, F. A. CALDAS, I. L. GUIMARÃES-FILHO, Z. O. MORRISON, P. J. HORTON, W. *et al*, Reduction of Chaotic Particle Transport Driven by Drift Waves in Sheared Flows. **Physics of Plasmas**, v 15, 112304, 2008.
- 21 TOUFEN, D. L.; GUIMARÃES-FILHO, Z. O.; CALDAS, I. L.; MARCUS, F. A; GENTLE, W. Turbulence driven particle transport in Texas Helimak. **Physics of Plasmas**, v 19, 012307 (2012).
- 22 CALDAS, I.L. MARCUS, F.A. BATISTA, A.M. VIANA, R.L. LOPES, S.R. HELLER, M.V.A.P. GUIMARÃES FILHO, Z.O. MORRISON, P.J. HORTON, W. Turbulence Induced Transport in Tokamaks. **AIP Conference Proceedings** 875, 341, 2006.
- 23 KROETZ, T. MARCUS, F.A. ROBERTO, M. CALDAS, I.L. VIANA, R.L. SILVA, E.C. Turbulence Induced Transport Control in Fusion Plasmas by Changing Electric and Magnetic Field Spatial Profiles. **Computer Physics Communication**, 180, 642, 2008.
- 24 HORTON. W. Drift Waves and Transport. **Reviews of Modern Physics**, v. 71, p.735, 1999.
- 25 HORTON, W. Onset of Stochasticity and the Diffusion Approximation in Drift Waves. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, v. 27, p.937-956, 1985.
- 26 OYARZABAL, R.S. et al. Efeito de um termo dissipativo no sistema hamiltoniano de ondas de deriva. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.37, n.2, 2015.

- 27 OYARZABAL, R. S., SZEZECH J.D., BATISTA, A.M., de SOUZA S.L.T., CALDAS, I.L., VIANA, R.L., SANJUÁN, M.A.F. Transient chaotic transport in dissipative drift motion. **Phys Lett A** 380, p.1621-1626, 2016.
- 28 OYARZABAL, R. S., SZEZECH J.D., BATISTA, A.M., SEOANE, J.M., SANJUÁN, M.A.F. Stochastic resonance in dissipative drift motion. (Submetido à **CNSNS** 2016).
- 29 MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 2a edição. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- 30 VERHULST, F. **Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer, Berlim, 2000.
- 31 COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**. v. 1, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2004.
- 32 FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. **Journal of Statistical Physics**, v. 19, p. 25-52, 1978.
- 33 MACHADO, K, D. **Equações Diferenciais Aplicadas à Física** 2 ed, UEPG, Ponta Grossa, 2000.
- 34 STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering**, Perseus Books Publishing, New York, 2000.
- 35 SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**, Rio de Janeiro: E-Papers Serviços Editoriais, 304 p., 2006.
- 36 KAHANER, D.; CLEVER, M.; NASH, S. **Numerical Methods and Software, Mathematics of Computation**, Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- 37 WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. Springer-Verlag, New York, 2ed, 1990.
- 38 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos: An introduction to dynamical systems**, Springer, 1997.
- 39 DERIGLAZOV, A. A.; FILGUEIRAS, J.G. **Formalismo hamiltoniano e transformações canônicas em mecânica clássica**, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.
- 40 AGUIAR, M. A. M. **Tópicos de Mecânica Clássica**, Editora livraria da física, Campinas, 2010.
- 41 ALMEIDA, A. M. **Hamiltonian systems: chaos and quantization**. Cambridge Univ. Press, 1992.

- 42 WRESZINSKI, W. F. **Mecânica clássica moderna**. Edusp, pp.270, 1997.
- 43 ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. Springer, 1989.
- 44 SYMON, K. R. **Mecânica**, 5a ed, Editora Campus, 1982.
- 45 LANDAU, L., LIFCHITZ, E. **Mecânica**, Ed. MIR, 1978.
- 46 AGUIAR, M. A. M., Caos em sistemas clássicos conservativos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol 16, nº s(1-4), 1994.
- 47 THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles systems**, ed5a, Thomsom, Brooks/Cole, 2004.
- 48 AUDIN, M.; BABBITT, D. G. **Hamiltonian systems and their integrability**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2008.
- 49 DICKEY, L. A. **Soliton equations and Hamiltonian systems**. Advanced series in mathematical physics, v. 26. River Edge, NJ: World Scientific, 2003.
- 50 GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics** 3a ed, Addison-Wesley, ISBN 0-201-65702-3, 2001.
- 51 LYNCH, S. **Dynamical systems with applications using MATLAB** Library of Congress, 1964.
- 52 LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. A. **Regular and chaotic motion**, Springer, 1995.
- 53 FEUDEL, U.; GREBOGI, C.; HUNT, R.; YORKE, J. A. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors, **Phys. Rev. E**, v54 , 71, 1996.
- 54 VALLEJO, J.C.; VIANA, R.L.; SANJUÁN, M.A.F. Local predictability and nonhyperbolicity through finite Lyapunov exponent distributions in two-degrees-of-freedom Hamiltonian systems, **Phys. Rev. E** 78, 066204, 2008.
- 55 VALLEJO, J.C.; AGUIRRE, J.; SANJUÁN, M.A.F. Characterization of the local instability in the Hénon-Heiles Hamiltonian, **Phys. Lett. A** 311. 26-38, 2003.
- 56 WOLF, A.; SWIFT, J.B.; SWINNEY, H.L.; VASTANO, J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series, **Physica D**, 16, 285-317, 1985.
- 57 SZEZECH, J.D.; CALDAS, I.L.; LOPES, S.R.; MORRISON, P.J.; VIANA, R.L. Effective transport barriers in nontwist systems, **Phys. Rev. E**, 86, 036206, 2012.
- 58 SZEZECH, J.D.; LOPES, S.R.; VIANA, R.L. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems, **Phys. Lett. A**, 335, 394-401, 2005.

- 59 SEONE, J.M.; SANJUÁN, M.A.F. New developments in classical chaotic scattering, **Rep. Prog. Phys.** **76** 0116001, 2013.
- 60 SEONE, J.M.; AGUIRRE, J.; SANJUÁN, M.A.F. Basin topology in dissipative chaotic scattering, **Chaos** **16**, 023101, 2006.
- 61 BLEZA, F. SEONE, J.M.; BARRIO, R. SANJUÁN, M.A.F. To escape or not to escape, that is the question: Perturbing the Hénon-Heiles Hamiltonian, **Int. J. Bifurcation Chaos**, **22**, 1230010, 2012.
- 62 VIANA, R.L.; SILVA, E.C. KRIETZ, T.; CALDAS, I.L.; ROBERTO, M.; SANJUÁN, M.A.F.; Fractal structures in nonlinear plasma physics, **Phil. Trans. R. Soc. A** **369**, 371-395, 2011.
- 63 SEONE, J.M.; SANJUÁN, M.A.F.; LAI, Y.C. Fractal dimension in dissipative chaotic scattering, **Phys. Rev. E** **76**, 016208, 2007.
- 64 BERNAL J.D.; SEONE, J.M.; SANJUÁN, M.A.F. Weakly noisy chaotic scattering. **Phys Rev E.** **88**:032914, 2013.
- 65 SEONE, J.M.; HUANG, L.; SANJUÁN, M.A.F.; LAI, Y.C. Effect of noise on chaotic scattering, **Phys. Rev. E** **v. 79**, 047202, 2009.
- 66 BLEZA, F. SEONE, J.M.; BARRIO, R. SANJUÁN, M.A.F. Effects of periodic forcings in chaotic scattering, **Phys. Rev. E** **v 89**, 042909, 2014.
- 67 OLIVEIRA, D.F.M.; LEONEL, E.D. Some dynamical properties of a classical dissipative bouncing ball model with two nonlinearities, **Phys. A**, 1762-1769, 2013.
- 68 FEUDEL, U.; GREBOGI, C. Multistability and the control of complexity, **Chaos** **v.7**, 597-604, 1997.
- 69 CONICK, J.C.P.; LOPES, S.R.; VIANA, R.L. Multistability and phase-space structure of dissipative nonlinear parametric four-wave interactions, **Phys. Rev. E** **v.70**, 056403, 2004.
- 70 FEUDEL, U.; GREBOGI, C.; POON, L. Poon, YORKE, J.A. Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors, **Chaos Soliton Fract**, **v9**, 171-180, 1997.
- 71 MENCK, P. J.; HEITZIG, J.; MARWAN, N.; KURTHS, J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. **Nature Physics** **v. 9**, 89 2013.
- 72 WILLEMS, J. C. Dissipative Dynamical Systems, **European Journal of Control** **v13**, 134, 2007.
- 73 ARECCHI, F. T.; BADI, R.; POLITI, A. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system. **Physical Review A** **v32**, 1985.

- 74 MOTTER, A. E.; GRUIZ, M.; KAROLY, G.; TEL, T. Doubly Transient Chaos: Generic Form of Chaos in Autonomous Dissipative Systems. **Phys. Rev. Lett.** v 111, 194101 (2013).
- 75 SCHELIN, A.B.; CALDAS, I.L.; VIANA, R.L.; BENKADDA, S. Collisional effects in the tokamap, **Phys. Lett. A** p.24-30, 2011.
- 76 PLANAT, M. **Noise, oscillators and algebraic randomness: from noise in communication systems to number theory.** Springer, Berlin, 2014.
- 77 RAJASEKAR, S.; SANJUÁN, M. A. F. **Nonlinear Resonances.** Springer Series in Synergetics, Berlin, 2015.
- 78 PARK, K.; LAI, Y.C. Characterization of stochastic resonance. **Europhys Lett.** v.70, p.432-438, 2005.
- 79 MCDONNELL, M.D.; ABBOUT, D. **What is stochastic resonance?** Definitions, misconceptions, debates, and its relevance to biology. *P. Comput. Biol.*, 6:e1000348, 2009.
- 80 GLUCKMAN, B.J.; NETOFF, T.I.; NEEL, E.J.; DITTO, W. L.; SPANO, M.L.; SCHIFF, S.J. Stochastic resonance in a neuronal network from mammalian brain. **Phys Rev Lett** v77, p.4098-4101, 1996.
- 81 BENZI, R.; PARISI, G.; SUTERA, A.; VULPIANI, A. Stochastic resonance in climatic change. **Tellus**,v.34, p.10-16, 1982.
- 82 WIESENFELD, K.; PIERSON, D.; PANTAZELOU, E.; DAMES, C.; MOSS, F. Stochastic resonance on a circle. **Phys Rev Lett** v72, p2125-2129, 1994.
- 83 LIU, K.; JIM, Y. Stochastic resonance in periodic potentials driven by colored noise. **Phys A** v.392, p15283-5288, 2013.
- 84 ARATHI, S.; RAJASEKAR, S. Stochastic resonance in a single-well anharmonic oscillator with coexisting attractors. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat** v.19, p.4049-4056, 2014.
- 85 GAMMAITONI, L.; HÄNGGI, P.; JUNG, P.; MARCHESONI, F. Stochastic resonance. **Reviews of Modern Physics**, v.70, p.223-287, 1998.
- 86 KRAMERS, H. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. **Physica (Utrecht)**, 284, 1940.
- 87 HÄNGGI, P.; TALKNER, P.; BORKOVEC, M. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers. **Rev. Mod. Phys.** v. 62, p.251, 1990.
- 88 GAMMAITONI, L.; MARCHESONI, F.; MENICHELLA-SAETTA, E.; SANTUCCI, S. Stochastic Resonance in Bistable Systems. **Physical Review Letters**, v.6, 1989.

- 89 GAMMAITONI, L.; MENICHELLA-SAETTA, E.; SANTUCCI, S.; MARCHESONI, F. Periodically time-modulated bistable systems: Stochastic resonance **Phys. Rev. A**.v.40, p.59, 1989.
- 90 HORTON. W, **Handbook of Plasma Physics**, Elsevier, New York, 1984.
- 91 KLEVA, R. G. DRAKE, J. F. Stochastic $\vec{E} \times \vec{B}$ particle transport. **Physics of Fluids**, v.27, 1686, 1984.
- 92 MARCUS, F. A. **Transporte de Partículas Induzidas por Ondas de Deriva**.Tese. (Doutorado em Física). Instituto de Física da USP, 2007.
- 93 SILVA, E.C.,CALDAS, I.L., VIANA, R.L., SANJUÁN, M.A.F. Escape Patterns, Magnetic Footprints, and Homoclinic Tangles Due to Ergodic Magnetic Limiters, **Phys. Plasmas** v.9 p.4917-4928, 2002.
- 94 HORTON, W. Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma. **Physics Reports** v.192, 1990.
- 95 HORTON, W. Anomalous ion conduction from toroidal drift modes. **Plasma Physics** v.23, p.1107, 1981.