

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Área de Concentração Física

**ANÁLISE DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS
BROWNIANAS INTERAGENTES A PARTIR DE
REDES DE MAPAS ACOPLADOS**

ROMEU MIQUEIAS SZMOSKI

PONTA GROSSA

2009

ROMEU MIQUÉIAS SZMOSKI

**ANÁLISE DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS
BROWNIANAS INTERAGENTES A PARTIR DE
REDES DE MAPAS ACOPLADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

PONTA GROSSA

2009

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

S998a

Szmoski, Romeu Miquéias

Análise da dinâmica de partículas brownianas interagentes a partir de redes de mapas acoplados. / Romeu Miquéias Szmoski. Ponta Grossa, 2009.

130f.

Dissertação (Mestrado em Ciências – Área de Concentração : Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto

1. Movimento browniano. 2. Mapa de Kaplan – Yorke.
3. Redes. 4. Sincronização. I. Pinto, Sandro Ely de Souza
II. T.

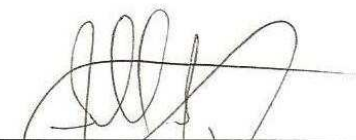
CDD: 530.13

TERMO DE APROVAÇÃO

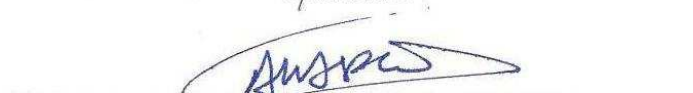
ROMEU MIQUÉIAS SZMOSKI

“ANÁLISE DA DINÂMICA DE PARTÍCULAS BROWNIANAS INTERAGENTES A PARTIR DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS”

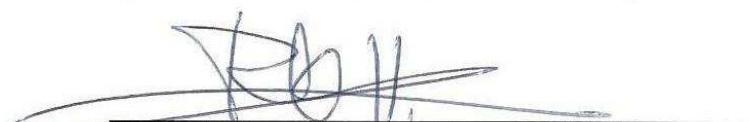
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências área de concentração Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:



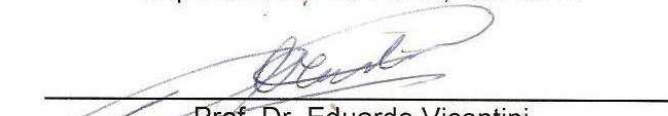
Prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto
Departamento de Física, UEPG/PR
Orientador



Prof. Antonio Marcos Batista
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR



Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
Departamento de Física, UFPR/PR



Prof. Dr. Eduardo Vicentini
Departamento de Física, UNICENTRO/PR

Ponta Grossa, 03 de março de 2009.

Resumo

O movimento browniano é um dos assuntos mais intrigantes da mecânica estatística de não-equilíbrio e explica uma série de fenômenos observados na natureza. As primeiras observações a respeito deste movimento e as teorias propostas para descrevê-lo foram fundamentais para entender o comportamento microscópico da natureza e a influência deste sobre observáveis macroscópicos. Nesta dissertação, estudamos a dinâmica de um sistema composto por várias partículas brownianas interagentes a partir de modelos de redes de mapas acoplados. Utilizamos um mapa que possui uma correspondência física direta com o movimento mencionado e empregamos quatro formas distintas de acoplamentos a fim de representar as várias formas de interação entre as partículas. Por meio de ferramentas da dinâmica não linear, observamos as situações em que as velocidades das partículas sincronizam ou tendem para o estado sincronizado. Também obtivemos expressões exatas para determinar os expoentes de Lyapunov das redes com acoplamentos regulares cujas interações decaem com a distância segundo uma lei de potência e levantamos duas hipóteses sobre os expoentes de Lyapunov de uma rede com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância, a saber: que os expoentes desta rede convergem para os expoentes da rede cujas interações decaem com a distância segundo uma lei de potência quando o número de partículas é muito grande; e que os expoentes de Lyapunov desta rede são dados pela soma dos produtos da probabilidade de ocorrer cada matriz de acoplamento pelos respectivos autovalores destas matrizes. Os valores obtidos para os expoentes de Lyapunov por meio das expressões deduzidas mostraram-se em acordo com aqueles obtidos por técnicas de aproximações numéricas. Em relação às distribuições das velocidades das partículas, observamos que elas se aproximam de uma gaussiana quando a intensidade do acoplamento tende a seu valor máximo.

Palavras-chave: movimento browniano, mapa de Kaplan-Yorke, redes, sincronização.

Abstract

The Brownian motion is one important topic of the non-equilibrium statistical mechanics and it is related to many natural phenomena. The first observations and theories on this motion were essential for understand the microscopic behavior of the nature and its influence on macroscopics observables. In this dissertation, we studied the dynamics of a system composed of several interacting Brownian particle from the point of view of coupled maps lattices. We use a map with a direct correlation to the abovementioned motion and we employ four different kinds of couplings in order to represent several ways of interaction among the particles. Using nonlinear dynamics tools, we observe the situations in which the particles velocities synchronize or show a tendency to the synchronized state. We also obtain algebrics expressions for the Lyapunov spectra of lattices with regular couplings whose interactions decays with distance as a power-law and we raise two hypotheses about Lyapunov exponents of a lattice with the coupling probability decreasing with the distance, as follows: the exponents of this lattice converge to the exponents of the lattice whose interactions decay with the distance in agreement to a power-law when the number of particles is very large; and the Lyapunov exponents of this lattice are given by the sum of the probabilities products of the each coupling matrix by eigenvalues of these matrixes. The values obtained for the Lyapunov exponents by means of the expressions deducted are in agreement with those obtained by numerical approximations techniques. Regarding distributions of the velocities of the particles, we observed that occur an aproximation to a Gaussian distribution when the intensity of the coupling tends to its maximum.

Keywords: brownian motion, Kaplan-Yorke map, lattices, synchronization.

Dedico este trabalho à minha esposa Cleisiara e aos meus pais Francisco e Amélia. À eles meu carinho e profundo reconhecimento pelo apoio recebido no tocante à realização deste sonho.

Agradecimentos

À Deus pela vida, família, amigos e por ter criado um mundo cognoscível.

Ao prof. Dr. Sandro Ely de Souza Pinto pela sabedoria e amizade compartilhada ao longo da orientação e pela confiança depositada em mim.

À minha esposa Cleisiara pela compreensão e participação em todos os momentos.

Aos meus pais e às minhas irmãs pelo apoio e incentivo constantes.

À todos os amigos e em especial aos amigos Rodrigo Frehse Pereira e Samyr Ariel Abdulack que muito me ajudaram ao longo deste.

Aos professores Dr Antônio Marcos Batista e Dr. Marcos Calçada por terem me esclarecido muitas dúvidas bem como apontado sugestões para o trabalho.

Ao prof. Dr Christian Beck por ter me enviado alguns de seus trabalhos para a realização deste.

À todos os professores do programa de Pós-Graduação em Ciências e do Departamento de Física da UEPG pela participação e colaboração nos conhecimentos adquiridos.

Aos membros da banca de qualificação e defesa, professores Dr. Diógenes B. Vasconcelos, Dra. Rosângela M. Costa, Dr. Ricardo L. Viana, Dr. Antônio M. Batista e Dr. Eduardo Vicentini pelas correções e sugestões.

À Andressa M. Jendreieck por ter ajudado na tradução do alemão para o português.

À todos do grupo de Dinâmica Não-linear da UEPG pelo convívio prazeroso.

À Josecler Lepinski, pela competência e boa vontade em relação aos procedimentos burocráticos.

À CAPES e à UEPG.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

‘ὁ δὲ ἀνεξέταστος βίος οὐ βιωτὸς ἀνθρώπῳ.’

“Uma vida sem investigação não é digna de ser vivida”. Platão, Apologia de Sócrates. 38a

Sumário

1	Introdução	11
2	O Movimento Browniano	15
2.1	As Observações Microscópicas de Robert Brown	15
2.2	As Investigações de Albert Einstein	18
2.3	A Equação Estocástica de Paul Langevin	23
2.4	O Mapa de Kaplan-Yorke e a Força Caótica	27
3	As Redes de Mapas Acoplados	35
3.1	Os Sistemas Dinâmicos de Tempo Discreto	35
3.2	A Representação Reticular dos Sistemas	37
3.3	As Redes de Mapas Acoplados	38
3.3.1	A Dinâmica Local	40
3.3.2	O Acoplamento	42
3.4	Algumas Formas de Acoplamentos	43
3.4.1	Acoplamentos Local e Global	43
3.4.2	Acoplamentos cujas Interações decaem com a Distância	45
3.4.2.1	A Forma Usual	46
3.4.2.2	A Forma Logarítmica	47
3.4.3	Acoplamentos Tipo <i>Small-World</i>	48
3.4.3.1	<i>Small-World</i> com Interação Decaindo com a Distância	49
3.4.3.2	<i>Small-World</i> com Probabilidade de Ligação Decaindo com a Distância	52

3.5	Redes de Mapas de Kaplan-Yorke Acoplados	54
4	Os Expoentes de Lyapunov	57
4.1	A Estabilidade dos Pontos Fixos e Periódicos	57
4.2	O Expoente de Lyapunov em Mapas Unidimensionais	59
4.3	Os Expoentes de Lyapunov em Mapas Multidimensionais	62
4.4	A Aproximação Numérica dos Expoentes de Lyapunov	65
4.4.1	O Método de Ortogonalização de Gram-Schmidt	66
4.4.2	Os Expoentes de Lyapunov <i>via</i> Gram-Schmidt	68
4.5	O Espectro de Lyapunov de Redes de Mapas de Kaplan-Yorke Acoplados .	69
4.5.1	Os Expoentes de Lyapunov nos Acoplamentos do Tipo Lei de Potência	70
4.5.2	Os Expoentes de Lyapunov nos Acoplamentos do Tipo <i>Small-World</i>	75
5	A Sincronização Completa nas Redes de Mapas de Kaplan-Yorke	80
5.1	A Sincronização Completa	80
5.2	Os Diagnósticos de Sincronização	82
5.2.1	O Parâmetro R	82
5.2.2	O Parâmetro d	84
5.2.2.1	A Dedução da Equação da Distância	85
5.3	O Expoente de Lyapunov Transversal e a Sincronização	90
5.4	A Sincronização nas Redes de Mapas de Kaplan-Yorke y-Acoplados	92
6	Resultados e Discussões	101
6.1	As Distribuições das Velocidades das Partículas	101
6.2	A Dispersão das Velocidades das Partículas	106
6.3	Os Espectros de Lyapunov	109
6.3.1	Acoplamentos do Tipo Lei de Potência	111
6.3.2	Acoplamentos do Tipo <i>Small-World</i>	112

6.4	A Diferença entre os Expoentes de Lyapunov	113
7	Conclusão	122
7.1	Considerações Finais	122
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	126
	Referências	127

1 *Introdução*

Ao suspendermos pequenas partículas em um fluido podemos observar que elas passam a realizar um movimento incessante e irregular. Este movimento peculiar das partículas suspensas é denominado movimento browniano e, hoje sabemos, deve-se à agitação térmica das moléculas do fluido. O movimento browniano tem sido investigado a aproximadamente dois séculos e ainda continua despertando grande interesse de pesquisas. Embora o avanço tecnológico tenha favorecido experimentos bastante precisos a nível microscópico, algumas questões pertinentes à dinâmica destas partículas ainda não puderam ser respondidas. Na última década, por exemplo, alguns pesquisadores afirmaram ter evidenciado a hipótese do caos molecular baseando-se em resultados experimentais acerca do movimento browniano e em elementos da Dinâmica Não-linear [1]. No entanto, outros pesquisadores têm alegado que os resultados e os argumentos apresentados pelos primeiros não são suficientes para tal afirmação [2].

Devido à grande quantidade de componentes envolvidos na dinâmica microscópica, a maioria das investigações neste sentido tem abordado o problema considerando poucos graus de liberdade e, representando os demais, por termos de ruído nas equações de movimento [3]. Tal procedimento, como veremos aqui, foi proposto e utilizado inicialmente por Paul Langevin, o qual introduziu uma força estocástica à equação do movimento da partícula suspensa e demonstrou que sua equação correspondia às expressões de Einstein para o movimento browniano [4]. Um tratamento semelhante ao de Langevin e oriundo da Dinâmica Não-linear consiste em substituir a força aleatória da equação de Langevin por uma força caótica [5]. O movimento browniano, neste caso, passa a ser descrito completamente por uma equação determinística ou, mais especificamente, por um mapa.

Um mapa é um sistema dinâmico estruturalmente mais simples do que as equações diferenciais e apresenta maiores vantagens do ponto de vista da implementação e processamento computacional. Especificamente o mapa de Kaplan-Yorke [6, 7], podemos dizer, constitui a versão discreta-determinística da equação diferencial estocástica de Langevin para o movimento de uma partícula browniana, subentendendo por partículas brownianas

pequenas partículas em estado de movimento, sendo este errático e irregular. O referido mapa tem sido utilizado em uma série de trabalhos [7–10] com objetivos, tanto do ponto de vista matemático, visando as propriedades dinâmicas das equações que regem o mapeamento, como do ponto de vista físico, procurando relações entre a dinâmica do modelo com os fenômenos observados na natureza. De um modo geral, o mapa de Kaplan-Yorke representa um sistema dissipativo bidimensional ao qual se associa a dinâmica dos impulsos recebidos pela partícula browniana das moléculas do meio e a dinâmica da própria partícula.

Neste trabalho consideramos um sistema de N partículas brownianas evoluindo, cada uma, de acordo com um mapa de Kaplan-Yorke. Estamos interessados especificamente no comportamento ou evolução temporal da variável dos mapas que corresponde às velocidades das partículas do sistema. Em nosso estudo, também consideramos que, a todo instante, as partículas brownianas estão colidindo e trocando *momentum* e energia umas com as outras. Representamos esta interação mútua pelo acoplamento das velocidades, uma vez que as velocidades das partículas estão diretamente relacionadas às grandezas mencionadas. Assim, estamos assumindo que a dinâmica das partículas brownianas é descrita por uma rede de mapas acoplados [11], a qual denominamos rede de mapas de Kaplan-Yorke acoplados.

As redes de mapas acoplados são sistemas dinâmicos que possuem variáveis espaciais e temporais discretas e variáveis de estado contínuas. Elas constituem modelos relativamente simples para se estudar a interação entre sistemas e investigar fenômenos não-lineares relacionados com o caos espaço-temporal. Dentre os fenômenos mais investigados por meio dessas redes encontram-se a sincronização de caos, a transição entre os estados completamente sincronizado e não-sincronizado e o controle de caos [12–15].

Com este trabalho objetivamos descrever a dinâmica de partículas brownianas por meio de redes de mapas acoplados e analisar a influência do acoplamento sobre a velocidade das partículas. Em relação a este último ponto, pretendemos verificar se as variáveis de estado das redes de mapas de Kaplan-Yorke sincronizam e sob quais condições tal fenômeno ocorre. Para isso utilizaremos, além de elementos estatísticos, algumas ferramentas da Dinâmica Não-linear como, por exemplo, os expoentes de Lyapunov [16, 17], o parâmetro de ordem [12] e a medida da distância ao subespaço de sincronização [13].

Utilizamos, ao longo deste trabalho, quatro formas distintas de acoplamentos, sendo duas regulares e as outras duas probabilísticas. Com elas pretendemos abarcar várias configurações do sistema e situações físicas distintas de colisão-interação entre as

partículas. Das quatro formas de acoplamentos propostas, duas delas são empregadas tais como se apresentam na literatura enquanto as outras duas, nós as consideramos, com algumas alterações. Em comum, todas elas levam em consideração a distância relativa entre as partículas sobre a interação, seja na intensidade ou na probabilidade da interação ocorrer.

Nossa proposta em estudar a dinâmica das partículas brownianas a partir de redes de mapas acoplados deve-se a alguns estudos isolados sobre ambos os assuntos. Neste sentido procuramos, aqui, relacionar fenômeno e modelo a fim de investigar possíveis correspondências e, ao mesmo tempo, definir um objeto e uma motivação física determinados. Sobre a origem desta idéia, destacamos, de um modo particular, o contato com o trabalho sobre a sincronização na presença de memórias de Morgado e colaboradores [18], no qual são analisadas a dinâmica de dois mapas com termos de memória e submetidos a um ruído comum e a trajetória de duas partículas regidas pela equação de Langevin generalizada e interagindo por um potencial.

As questões que pretendemos responder com este trabalho são: as redes de mapas acoplados constituem bons modelos para o estudo do movimento browniano? Qual a influência do acoplamento (colisão) sobre a dinâmica das partículas brownianas? Os parâmetros de acoplamento alteram a distribuição das velocidades? O comportamento assintótico do sistema depende do tipo de acoplamento utilizado? Ocorre sincronização nas redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados? Se ocorre a sincronização, quais os parâmetros que regem a transição entre os estados sincronizado e não-sincronizado?

Para melhor discutir e responder as questões acima, organizamos este trabalho da seguinte maneira:

No segundo capítulo apresentamos uma revisão de três teorias históricas acerca do movimento browniano e dos artigos pioneiros de Kaplan e Yorke nos quais eles estudaram o conjunto de equações a diferenças que, mais tarde, foi denominado mapa de Kaplan-Yorke. Também revisamos e discutimos outros trabalhos sobre o referido mapa e apresentamos a dedução deste a partir da equação diferencial de Langevin. Na sequência, Capítulo 3, descrevemos a idéia e os principais conceitos relacionados às redes de mapas acoplados e apresentamos as formas de acoplamento de interesse neste trabalho. No quarto capítulo realizamos um estudo sobre os expoentes de Lyapunov em sistemas dinâmicos discretos e, em particular, sobre os expoentes de Lyapunov das redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados. No capítulo seguinte, Capítulo 5, abordamos o fenômeno da sincronização em redes de mapas acoplados, estudamos algumas ferramentas de diagnósticos e investigamos

a sincronização nas redes propostas. No sexto capítulo apresentamos e discutimos os resultados obtidos e, no último capítulo, fazemos algumas considerações a respeito do trabalho desenvolvido e indicamos sugestões para trabalhos futuros.

2 *O Movimento Browniano*

O movimento irregular de pequenas partículas suspensas em um fluido, fenômeno conhecido como movimento browniano, é um dos tópicos mais intrigantes no estudo de sistemas fora do equilíbrio. Desde sua descoberta este fenômeno tem sido investigado por pesquisadores das mais diversas áreas, especialmente, por físicos, químicos e biólogos. O principal interesse no assunto reside na compreensão dos mecanismos que regem o mundo microscópico e a relação destes com as grandezas macroscópicas de um sistema. Dessa perspectiva diferentes teorias foram propostas ao longo dos anos, entre as quais destacamos as observações de Robert Brown, a explicação de Einstein e a teoria de Langevin. Baseando-se nos trabalhos destes autores apresentamos neste capítulo as respectivas teorias do movimento browniano assim como o mapa de Kaplan-Yorke, o qual constitui o principal objeto deste estudo.

2.1 As Observações Microscópicas de Robert Brown

O botânico inglês Robert Brown (1773-1858) é considerado o primeiro pesquisador a desenvolver um estudo detalhado sobre o movimento de minúsculas partículas imersas em um fluido aquoso. Seu artigo *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants* (Um breve relato das observações microscópicas feitas nos meses de Junho, Julho e Agosto, 1827, sobre as partículas contidas no pólen das plantas) marca o início da teoria do movimento browniano e abarca as primeiras tentativas de compreender o fenômeno. Embora o título mencione apenas os grãos de pólen como objeto de pesquisa, as observações nele descritas se estendem a partículas das mais variadas origens. Trata-se, de um modo geral, de análises microscópicas quanto à forma e movimento de pequenos fragmentos de matéria suspensas na água.

Ao contrário do que se apresenta em alguns textos e apesar do nome ser apropriado para tal afirmação Brown não descobriu o movimento browniano. Num trecho de seu

artigo ele comenta:

The facts ascertained respecting the motion of the particles of the pollen were never considered by me as wholly original; this motion having, as I knew, been obscurel seen by Needham, and distinctly by Gleichen.¹ [19]

Em seus dois trabalhos dedicados ao assunto [19, 20], Brown menciona vários pesquisadores além de Gleichen e Needham que, de alguma forma, observaram a existência do movimento de pequenas partículas em suspensão. Porém, de acordo com Brown [19], nenhum deles apresentou uma descrição precisa e satisfatória sobre o comportamento destas partículas. Analisando os trabalhos do botânico inglês vemos que ele também não conseguiu explicar as causas do movimento, no entanto, podemos concluir que a atribuição do seu nome ao fenômeno faz jus ao seu grande esforço neste sentido.

A questão do movimento não foi inicialmente um dos objetivos das investigações de Brown [19]. Ele estudava o processo de fertilização de algumas plantas e, utilizando-se de um microscópico, analisava a forma das partículas contidas nos grãos de pólen. Nestas observações ele verificou que, ao colocar as partículas na água, elas apresentavam um movimento peculiar. Sobre este fato, Brown escreveu:

While examining the form of these particles immersed in water, I observed many of them very evidently in motion (...). These motions were such as to satisfy me, after frequently repeated observation, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belong to the particle itself.² [19]

Entusiasmado com o fato, Brown realizou uma série de experimentos com plantas vivas e mortas. Ele pretendia observar possíveis mudanças no comportamento das partículas com a variação do material analisado, entretanto, seus resultados mostravam que o movimento não dependia do estado da fonte, mas apenas das propriedades geométricas das partículas.

Além dos elementos do reino vegetal, o botânico inglês analisou vários outros objetos, tanto de origem orgânica e inorgânica, tais como, a madeira fóssil, cacos de

¹Os fatos descritos a respeito do movimento das partículas de pólen nunca foram considerados por mim como totalmente originais; tendo este movimento, como eu conheço, sido obscuramente visto por Needham e distintamente por Gleichen [19](Tradução nossa)

²Enquanto examinava a forma destas partículas imersas na água, eu observei muitas delas evidentemente em movimento (...). Estes movimentos eram tais quanto à satisfazer-me, após freqüentes observações repetidas, que eles nunca surgiam das correntes no fluido, nem de sua evaporação gradual, mas pertenciam a própria partícula. [19](Tradução nossa)

vidro, terras, metais e partículas de rochas [19]. Em todos casos, porém, ele constatou a existência de movimentos desordenados no sistema partícula-água.

Um ponto característico das observações de Brown é o cuidado tanto na escolha quanto na preparação de suas amostras. Na análise dos minerais, por exemplo, ele utilizou rochas de várias idades, em especial, aquelas sem qualquer indício de vida orgânica. Brown procurava, com isso, privar suas observações de resultados distorcidos devido aos possíveis vestígios orgânicos no material. Quanto à preparação das rochas, ele moía os fragmentos deixando-os bem finos de modo que pudessem ser suspensos na água por tempo suficiente para observação microscópica.

Na teoria browniana, referindo-se especificamente aos trabalhos desenvolvidos por Brown, as partículas moventes em um fluido recebem o nome de moléculas ativas. O artigo de 1828, no entanto, não deixa muito claro o que significa de fato uma molécula ativa. Diante disso, Robert Brown publica um segundo trabalho [20] no qual presta esclarecimentos sobre esta e, ao mesmo tempo, apresenta algumas considerações sobre as causas que, na época, eram atribuídas ao movimento das partículas em um fluido.

No início deste artigo suplemento, ele afirma serem errôneas as asserções que consideram as moléculas ativas como partículas animadas, pois as primeiras, como ele já havia demonstrado, podem ser obtidas tanto de matéria orgânica quanto inorgânica. A molécula ativa, segundo Brown [20], consiste na menor partícula que, ao ser suspensa em qualquer fluido aquoso, adquire movimentos irregulares e difíceis de descrever.

Devido à natureza irregular do movimento realizado pela partícula microscópica, Brown se considerou incapaz de descrever a dinâmica da mesma. A característica errática da trajetória, resultado das mudanças abruptas na direção e sentido do movimento da partícula ao longo do tempo, fez com que ele dirigisse sua atenção principalmente à forma das partículas. Neste sentido suas análises o levaram a concluir que as moléculas ativas possuem uma forma esférica ou próxima disso [20].

Em relação à origem do movimento Brown não apresentou nenhuma explicação dinâmica, mas, ao contrário, considerou insuficientes as hipóteses de causa que haviam sido levantadas por alguns pesquisadores. Estas hipóteses referiam-se basicamente à força de atração e repulsão entre as partículas, ao equilíbrio instável em alguns pontos do fluido, à ação capilar, à evaporação, à presença de bolhas de ar e outras mais. As causas mencionadas não tinham sido observadas por Brown em suas análises e, segundo ele [20], não poderiam resistir a um experimento simples, o qual consiste em reduzir, em dimensões microscópicas, o tamanho da gota de água que contém a partícula e colocá-la para a

observação em um fluido transparente de menor densidade, não miscível e com baixa taxa de evaporação.

Em suma, a teoria de Brown afirma que a matéria é composta de pequenas partículas denominadas moléculas ativas, as quais, ao serem suspensas em um fluido, exibem um movimento rápido e irregular, sendo este uma característica da própria partícula e não do fluido envolvente.

2.2 As Investigações de Albert Einstein

No início do século XX a idéia de que a matéria seria constituída por átomos e moléculas ainda era motivo de muita polêmica entre os pesquisadores. Diversas pesquisas tencionavam corroborar a hipótese atômica, porém, mesmo existindo algumas propostas plausíveis de descrição da natureza neste nível, não havia consenso nem evidências suficientes quanto à realidade dos átomos. Somente a partir de 1908 o atomismo tornou-se de fato uma teoria “globalmente” aceita. Esta mudança de paradigma foi fortemente influenciada pelo desenvolvimento da teoria do movimento browniano ou, mais exatamente, pela descrição matemática do fenômeno apresentada por Einstein em 1905 e pela confirmação experimental de sua teoria realizada por Perrin três anos mais tarde.

Pouco antes de Einstein, entretanto, Delsaulx, Carbonelle, Goy [21] entre outros, tinham observado algumas características importantes sobre a dinâmica da partícula browniana, dentre as quais:

- que a trajetória era irregular mudando abruptamente de sentido e direção;
- que o movimento de duas partículas parecia ser independente;
- que o movimento tornava-se mais intenso utilizando partículas menores ou fluido menos viscoso;

Assim, a partir destas observações, tornavam-se evidentes alguns dos parâmetros a serem considerados em uma descrição física do fenômeno, como por exemplo, o raio e a massa da partícula e a viscosidade do meio. Além disso, como o movimento era semelhante a um passeio aleatório e a trajetória observada não apresentava tangentes, isto é, não formava curvas diferenciáveis, a utilização de elementos probabilísticos também se apresentava como uma alternativa razoável para o tratamento do problema.

Apesar destas importantes observações acerca do movimento das partículas num fluido, a maior contribuição à teoria browniana no final do século XIX e início do XX se refere às conjecturas de que o movimento seria causado por impactos sucessivos entre a partícula observável e as moléculas “invisíveis” do fluido. Esta asserção explicava tanto as irregularidades das trajetórias como a constância do movimento observadas experimentalmente, porém, assim como a idéia do átomo, tal entendimento não era geral.

O alemão Albert Einstein (1879-1955) pertencia à classe daqueles que consideravam a agitação térmica das moléculas do meio como a principal responsável pelo movimento irregular das partículas suspensas. Introduzindo seu artigo *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* (Sobre o movimento de pequenas partículas suspensas em um líquido estacionário demandada pela teoria cinético-molecular do calor), ele escreveu:

(...) suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können.³

[22]

A partir deste entendimento Einstein desenvolveu toda sua teoria do movimento browniano que corresponde à primeira descrição matemática do fenômeno. Suas investigações resultaram na famosa expressão para o deslocamento quadrático médio da partícula e, por meio desta, em uma estimativa bastante precisa para o número de Avogadro. O valor encontrado por ele, $N_A = 2,1 \times 10^{23}$, embora limitado aos dados da época, está na mesma ordem de grandeza que o atualmente aceito.

A abordagem einsteniana do movimento das partículas suspensas fundamenta-se basicamente em duas proposições [22]. Considera-se inicialmente que em um conjunto de partículas suspensas cada uma realiza um movimento próprio e independente das demais, neste sentido, a descrição do sistema como um todo se reduz à análise de uma única partícula. Além disso, a teoria de Einstein também estabelece que os movimentos de uma mesma partícula em intervalos de tempo distintos devem ser igualmente independentes, ou seja, considera-se que o estado de uma partícula em um tempo qualquer independe dos estados anteriores. Trata-se, portanto, de um processo markoviano.

Uma vez estabelecidas as proposições de independência, Einstein supôs que a

³“(...)corpos de tamanho visível ao microscópico e suspensos em um líquido realizam, em consequência do movimento molecular, um movimento de tal magnitude que pode ser facilmente observado no microscópico”. [22](Tradução nossa)

cada intervalo de tempo τ as partículas se deslocam uma mesma quantidade Δ positiva ou negativa na direção x . Este intervalo de tempo, segundo ele [22], deve ser mínimo comparado ao tempo de observação, porém, grande o suficiente para que o movimento da partícula em intervalos sucessivos seja, de fato, independente. Neste caso, após o intervalo τ , o número de partículas entre Δ e $\Delta + d\Delta$ é dado por

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta, \quad (2.1)$$

onde n é o número total de partículas e ϕ é uma função de distribuição simétrica e normalizada, ou seja,

$$\phi(\Delta) = \phi(-\Delta) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1. \quad (2.2)$$

Denotando por $f(x, t)$ a densidade de partículas em um tempo arbitrário t e considerando que a distribuição de partículas, em intervalos subsequentes, satisfaz a condição (2.2), Einstein obteve a famosa equação de difusão

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.3)$$

com coeficiente

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \phi(\Delta) d\Delta. \quad (2.4)$$

Embora a equação (2.3) fosse conhecida desde o início do século XIX ela era usualmente obtida a partir da conservação da massa. A dedução de Einstein por meio de argumentos probabilísticos representou um importante avanço nesse sentido e, ao mesmo tempo, possibilitou o desenvolvimento de algumas teorias modernas como as relações de Chapman-Kolmogorov e as cadeias markovianas [23].

Após deduzir a equação de difusão, Einstein verificou [22] que a hipótese de independência do movimento das partículas torna desnecessária a escolha de um único sistema de coordenadas. Prosseguindo seu trabalho, ele considerou que a origem do sistema em $t = 0$ coincide com a posição do centro de gravidade de cada partícula em análise. Dessa maneira, a expressão $f(x, t)dx$ denota o número de partículas cuja coordenada x variou uma quantidade dx durante um tempo t . Para um sistema composto por N partículas brownianas e sujeito as condições

$$f(x, t) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dx = N \quad , \quad \text{para } x \neq 0, \quad (2.5)$$

obtemos como solução da equação (2.3)

$$f(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) estabelece que as partículas brownianas se distribuem ao longo do tempo segundo uma curva gaussiana, isto é, a distribuição de probabilidade de encontrar as partículas em uma dada posição é sempre simétrica e centrada na origem. Para tempos pequenos ($t \rightarrow 0$) ela representa uma função delta, porém, à medida que o tempo passa, sua largura varia continuamente. A Figura (1) ilustra o comportamento de $f(x, t)$ em função de x para quatro instantes de tempo diferentes.

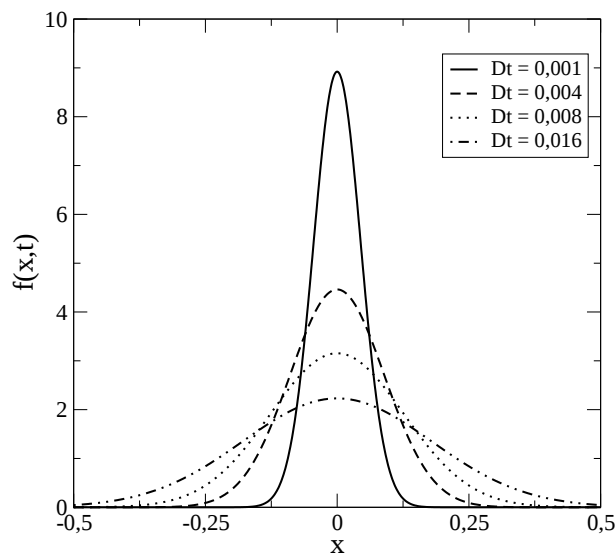


Figura 1: A distribuição dos deslocamentos em diferentes intervalos de tempo. Para tempos próximos de zero a curva representa uma função delta centrada na origem, porém à medida que o tempo aumenta verificamos um alargamento na distribuição.

Através da equação (2.6) podemos determinar a probabilidade de encontrar uma partícula em qualquer intervalo espacial. Entretanto, de acordo com Einstein [22], o resultado mais importante desta equação é a relação entre o coeficiente de difusão D e o deslocamento quadrático médio $\langle \Delta x^2 \rangle$ das partículas, a saber,

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt. \quad (2.7)$$

Esta dependência linear do deslocamento quadrático médio com o tempo implica um deslocamento característico crescendo com $\sqrt{t}$ de modo que o deslocamento resultante se distancia cada vez mais das formas balísticas. Tal comportamento está relacionado à aleatoriedade do movimento das partículas brownianas, isto é, aos movimentos ora para a direita, ora para a esquerda.

No artigo de 1905 Einstein também apresentou uma análise da situação de equilíbrio dinâmico de um sistema de esferas de raio P distribuídas irregularmente pela superfície de um líquido. Ele considerou as esferas sujeitas a um gradiente de pressão e a uma força viscosa k de acordo com a lei de Stokes. Assim, ao fazer o balanceamento das forças, encontrou uma expressão para o coeficiente de difusão D , a saber,

$$D = \frac{RT}{6\pi N_A P k}, \quad (2.8)$$

sendo R a constante universal dos gases, T a temperatura absoluta, N_A o número de Avogadro e k a viscosidade do meio.

Por conseguinte, considerando as partículas brownianas como esferas de raio a (isto é, fazendo $P = a$) e substituindo k por η , a equação (2.7) pode ser escrita como

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_A a \eta} t. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) constitui a base do famoso teorema da flutuação-dissipação e descreve a realidade de uma ampla classe de fenômenos físicos. Ela representa uma das primeiras relações encontradas entre a flutuação quadrática média de uma grandeza e propriedades dissipativas do sistema no equilíbrio ou, de modo equivalente, entre propriedades de processos reversíveis e irreversíveis.

Seguindo os mesmos procedimentos da abordagem unidimensional do problema, podemos obter uma equação equivalente na possibilidade de movimento em três dimensões. Neste caso, a equação (2.6) adquire a forma

$$f(\vec{r}, t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad (2.10)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle \Delta r^2 \rangle = 6Dt = \frac{RT}{\pi N_A a \eta} t. \quad (2.11)$$

Uma outra maneira mais direta de se obter esta equação consiste em considerar a isotropia do espaço,

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta y^2 \rangle = \langle \Delta z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \Delta r^2 \rangle, \quad (2.12)$$

e substituir o termo correspondente na equação unidimensional.

A equação do deslocamento quadrático médio da partícula é o principal legado de Einstein à teoria do movimento browniano. Além disso, como as quantidades $\langle \Delta r^2 \rangle$, T , a

e η são grandezas diretamente mensuráveis, a equação (2.11) foi fundamental para Jean Perrin determinar em 1908 a magnitude do número de Avogadro e, portanto, comprovar a conjectura einsteniana:

wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich.⁴ [22]

Ressaltamos ainda, que apesar de Einstein ter utilizado argumentos probabilísticos para analisar o problema, a abordagem do movimento via caminhada aleatória ou *random walk* foi proposta somente alguns anos depois. É interessante notar que em 1900 o francês Louis Bachelier, estudando as flutuações em uma bolsa de valores, obteve expressões semelhantes àsquelas encontradas por Einstein para a partícula browniana; porém, como os objetos eram distintos ambas as teorias não foram comparadas naquela época de modo que a idéia de Bachelier passou-se despercebida.

2.3 A Equação Estocástica de Paul Langevin

No mesmo ano em que Jean Perrin publica seus resultados confirmando a teoria de Einstein, o físico francês Paul Langevin (1872-1946) apresenta uma nova descrição matemática para o movimento das partículas suspensas. Enquanto o tratamento de Einstein envolvia aspectos probabilísticos e a resolução de uma equação diferencial parcial (EDP), a teoria de Langevin utiliza basicamente a segunda lei de Newton e o teorema da equipartição da energia. Esta teoria, aparentemente mais simples que a de Einstein, culmina na mesma expressão para o deslocamento quadrático médio da partícula e, como aquela, desenvolve ferramentas fundamentais para o estudo de processos estocásticos.

Em seu artigo [4], Langevin inicialmente confronta os resultados obtidos por Einstein e Marian Smoluchowski. Marian havia analisado o movimento das partículas suspensas por um método mais direto que o de Einstein e obteve uma expressão para o deslocamento quadrático médio da partícula que diferia da equação (2.9) somente por um

⁴ se o movimento discutido aqui puder ser realmente observado, então a termodinâmica clássica não pode mais ser vista como aplicável com precisão aos corpos mesmo de dimensões distinguíveis microscopicamente; uma determinação exata das dimensões atômicas é então possível. [22] (Tradução nossa)

fator de $64/27$. Porém, de acordo com Langevin [4], esta diferença desaparece completamente quando se aplica o método de Smoluchowski de maneira correta.

Langevin argumenta, no entanto, que há um modo “infinitamente mais simples” de se analisar matematicamente o movimento de uma partícula suspensa num fluido ou, em suas próprias palavras, “une démonstration infiniment plus simple” [4]. Introduzindo sua teoria, ele considera que, de acordo com o teorema da equipartição da energia, a partícula browniana deve possuir a mesma energia cinética de um gás molecular. Em uma análise unidimensional do problema, movimento apenas na direção x , esta energia será equivalente a $\frac{RT}{2N_A}$. Portanto, para um sistema de N de partículas de massa m , a energia cinética média será

$$m\langle v^2 \rangle = \frac{RT}{N_A}, \quad (2.13)$$

sendo $\langle v \rangle$ a velocidade média das partículas, R a constante universal dos gases e T a temperatura absoluta.

Além disso, de acordo com a lei de Stokes, cada partícula em movimento deve experimentar uma resistência do líquido ou força viscosa com magnitude igual a $6\pi\mu av$, sendo μ a viscosidade do meio a o raio da partícula e v a velocidade. Este valor, entretanto, consiste apenas em uma média, pois, devido à irregularidade dos impactos das moléculas, a ação do fluido sobre a partícula oscila continuamente.

Para considerar tais flutuações, Langevin propõe um termo estocástico à equação do movimento da partícula [4]. Este termo adicional ou “força complementar”, maneira como Langevin chama a variável estocástica acrescida à equação do movimento, representa os impulsos recebidos pela partícula browniana devido à agitação térmico-molecular do fluido e, como tal, possui magnitude equivalente à resultante das interações. Além disso, como as colisões são aleatórias e o movimento não possui direção preferencial, esta força possui valores indiferentemente positivos ou negativos. Portanto, o movimento da partícula browniana na direção x obedece a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a\frac{dx}{dt} + X, \quad (2.14)$$

sendo X a força estocástica de Langevin.

Multiplicando por x a equação do movimento (2.14), e rearranjando os termos, ela pode ser escrita como

$$\frac{m}{2}\frac{d^2x^2}{dt^2} - mv^2 = -3\pi\mu a\frac{dx^2}{dt} + Xx. \quad (2.15)$$

Por conseguinte, um sistema composto por N partículas brownianas não-interagentes pode ser representado por N equações de movimento da forma (2.15). Neste caso, supondo N suficientemente grande e partículas idênticas, a evolução do sistema pode ser analisada pela média das equações de movimento de cada componente. Contudo, esclarece Langevin [4], devido à irregularidade da força complementar, o valor médio do termo Xx torna-se identicamente nulo e, portanto, a equação resultante adquire a forma

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - m \langle v^2 \rangle = -3\pi\mu a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}. \quad (2.16)$$

Nota-se, no entanto, que o segundo termo da equação (2.16) representa a energia cinética média do sistema. Assim, substituindo tal termo por seu equivalente (2.13) e considerando $z = \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt}$, a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{m}{2} \frac{dz}{dt} + 3\pi\mu a z = \frac{RT}{N_A}, \quad (2.17)$$

cujas solução geral é

$$z = \frac{RT}{N_A} \frac{1}{3\pi\mu a} + C e^{-\frac{6\pi\mu a}{m}t}, \quad (2.18)$$

sendo C uma constante arbitrária.

De acordo com esta solução verificamos que z tende a um regime constante após um intervalo de tempo da ordem de $m/6\pi\mu a$. Para uma partícula browniana típica, este tempo “transiente” ou tempo de relaxação corresponde a aproximadamente 10^{-8} segundos [4]. Para tempos suficientemente longos, no entanto, a equação (2.18) se reduz a

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{RT}{3\pi N_A \mu a}, \quad (2.19)$$

e, integrando, obtemos

$$\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_A \mu a} t. \quad (2.20)$$

Porém, como a partícula pode se mover indiferentemente para direita ou para a esquerda, sua posição média coincide com a origem, ou seja, $\langle x \rangle = x_0$. Portanto, a equação (2.20) pode ser reescrita como

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_A \mu a} t, \quad (2.21)$$

que é idêntica a equação (2.9) obtida por Einstein.

A descrição do movimento browniano exposta até aqui corresponde exclusivamente a teoria apresentada por Langevin em seu artigo de 1908. Na versão moderna desta teoria [24] a equação de Langevin (2.14) é geralmente apresentada como

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t), \quad (2.22)$$

sendo α um parâmetro associado à viscosidade do meio e $F(t)$ uma variável aleatória de média nula e covariância delta correlacionada, ou seja,

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle F(t)F(t') \rangle = B\delta(t - t'), \quad (2.23)$$

com $B = 2\alpha k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann.

Dividindo por m ambos os membros da equação (2.22), ela pode ser escrita como

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t), \quad (2.24)$$

sendo $\gamma = \alpha/m$ e $\xi(t) = F(t)/m$. Neste caso, a variável aleatória $\xi(t)$ deve satisfazer as mesmas condições da força estocástica presente na equação (2.23), com $B \rightarrow \Gamma (= B/m)$.

Em uma terminologia moderna, a variável aleatória $\xi(t)$ representa um ruído branco⁵ enquanto que a equação de Langevin na forma (2.24), um processo de Ornstein-Uhlenbeck⁶. Tal equação diferencial estocástica apresenta solução

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \xi(t') dt', \quad (2.25)$$

sendo v_0 a velocidade da partícula no instante $t = 0$.

A solução (2.25) é geral e, por conseguinte, independe da função $\xi(t)$ representativa do ruído. Admitindo, no entanto, que $\xi(t)$ satisfaça as condições de média e variância imposta pela equação (2.23), a velocidade média e a velocidade quadrática média da

⁵Um ruído branco é uma variável estocástica $\xi(t)$ que possui as seguintes propriedades:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = C\delta(t - t').$$

A denominação ruído branco deve-se ao fato de que a transformada de Fourier de $\langle \xi(0)\xi(t) \rangle$, a qual é dada por $\int \exp(i\omega t) \langle \xi(0)\xi(t) \rangle dt = C$, independe da frequência ω [24].

⁶O processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo estocástico r_t dado pela equação diferencial estocástica

$$dr = \eta(\mu - r)dt + \sigma dW,$$

onde η é a taxa de reversão à média, μ a média, σ a volatilidade e W um processo de Wiener. Este processo representa um processo gaussiano com variância delimitada e distribuição de probabilidade estacionária [25].

partícula serão, respectivamente,

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t} \quad \text{e} \quad \langle v^2 \rangle = \langle v \rangle^2 + \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (2.26)$$

Por conseguinte, considerando tempos suficientemente longos os termos exponenciais tornam-se desprezíveis e tais equações tendem a um regime constante, isto é,

$$\langle v \rangle \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \langle v^2 \rangle \rightarrow \frac{\Gamma}{2\gamma} = \frac{k_B T}{m}. \quad (2.27)$$

Através da equação (2.25) também é possível obter a expressão do deslocamento médio e do deslocamento quadrático médio da partícula. Neste caso, considera-se inicialmente a forma diferencial da equação ($v(t) = dx/dt$) e, em seguida, efetua-se a integração necessária. Este procedimento resulta em

$$x(t) - x_0 = v_0 \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t (1 - e^{\gamma(t''-t)}) \xi(t'') dt''. \quad (2.28)$$

Conseqüentemente, considerando as propriedades do ruído dadas pela equação (2.23), os deslocamentos médio e quadrático médio da partícula em tempos suficientemente grandes, serão, respectivamente,

$$\langle \Delta x \rangle = v_0 \frac{1}{\gamma} \quad \text{e} \quad \langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^2} (\Gamma t + v_0^2). \quad (2.29)$$

Nota-se, então, em acordo com o resultado einsteniano, que o deslocamento quadrático médio da partícula evolui linearmente com o tempo. Além disso, fazendo algumas considerações nesta equação, recupera-se a mesma expressão demonstrada por Einstein na equação (2.9). Portanto, a abordagem do problema por um dos formalismo em particular constitui apenas uma questão de conveniência, isto é, enquanto na teoria de Einstein utiliza-se o espaço das configurações, na descrição de Langevin a análise do fenômeno é realizada principalmente no espaço das velocidades.

2.4 O Mapa de Kaplan-Yorke e a Força Caótica

Em 1979 J. L. Kaplan e J. A. Yorke publicaram um estudo [6] sobre o comportamento dinâmico de algumas equações a diferenças destacando, de modo particular, a família de equações da forma

$$F : \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \bmod(1) \\ y_{n+1} = \lambda y_n + p(x_n) \end{cases}, \quad (2.30)$$

sendo λ um parâmetro e $p(x)$ uma função periódica.

O termo $\text{mod}(1)$ na equação (2.30) assegura que o valor de x seja sempre menor que a unidade, diminuindo tal quantidade sempre que ele for maior que 1. Kaplan e Yorke investigaram algumas propriedades importantes deste sistema, entre elas, a estabilidade de pontos fixos, a duplicação de período e a transição para o caos [6]. Para entendermos melhor o estudo desenvolvido por eles vamos discutir brevemente o que representam tais comportamentos. Um ponto fixo de um sistema dinâmico discreto unidimensional $f(x)$ corresponde ao valor de x cuja a função de evolução aplicada neste ponto retorna o mesmo valor, isto é, $f(x^*) = x^*$. A estabilidade de tal ponto é geralmente verificada pelo módulo da derivada da função no próprio ponto, se o resultado for maior que a unidade o ponto é considerado instável, se menor ele é estável e se ele for igual a 1 o ponto é indiferentemente estável ou instável [26]. Quando, pela variação de algum parâmetro do sistema, um ponto fixo estável perde sua estabilidade dois pontos fixos novos podem aparecer e, sendo eles estáveis, dizemos que ocorreu uma duplicação de período uma vez que um ponto fixo é considerado igualmente um ponto de período 1. Se, por outro lado, todos os pontos possíveis forem instáveis e o sistema apresentar uma grande sensibilidade às condições iniciais o comportamento é denominado caótico [26]. Neste sentido, uma das maneiras para o sistema transitar para o caos consiste na própria duplicação de período. Na Figura (2) podemos visualizar estas três formas de comportamento para o sistema dinâmico denominado mapa logístico, cuja regra de evolução é $x_{n+1} \rightarrow f(x) = 1 - \mu x^2$.

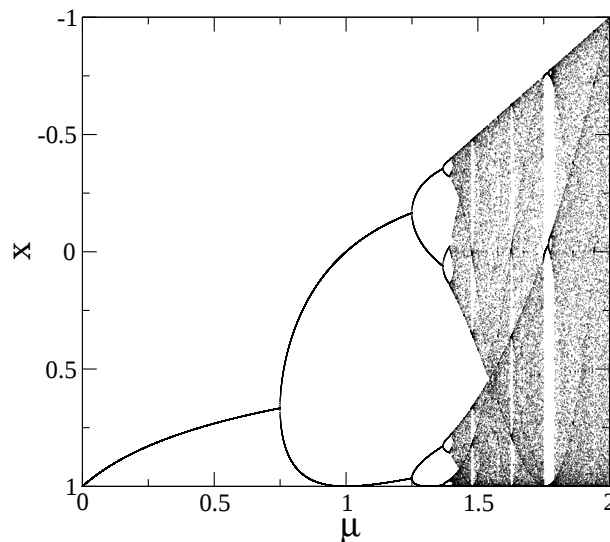


Figura 2: O diagrama de bifurcação do mapa logístico pela variação do parâmetro de controle μ . Para $\mu < 3/4$ vemos que o atrator é um ponto fixo estável e, neste ponto, ocorre uma bifurcação com duplicação de período. Para valores maiores de μ novas duplicações de período se sucedem e o mapa aproxima-se cada vez mais do regime caótico no qual não se verifica nenhuma órbita estável.

Para o sistema (2.30), em particular, Kaplan e Yorke verificaram que, dependendo do valor atribuído ao parâmetro λ , este passa a exibir um comportamento caótico em uma ou nas duas variáveis. Seus resultados foram baseados principalmente na magnitude do determinante de Jacobi, o qual é definido pela matriz das derivadas da função de evolução do sistema ($\text{Det } J \equiv \text{Det } DF$). Eles mostraram que, se λ for maior que $1/2$ e, portanto, $\text{Det } J > 1$, o conjunto torna-se bidimensionalmente caótico, enquanto que, se λ for menor ou igual a $1/2$ apenas x é caótica [6]. A Figura (3) representa o espaço de fases⁷ do sistema (2.30) para os dois casos mencionados, ela constitui o principal resultado do artigo pioneiro de J. Kaplan e J. Yorke.

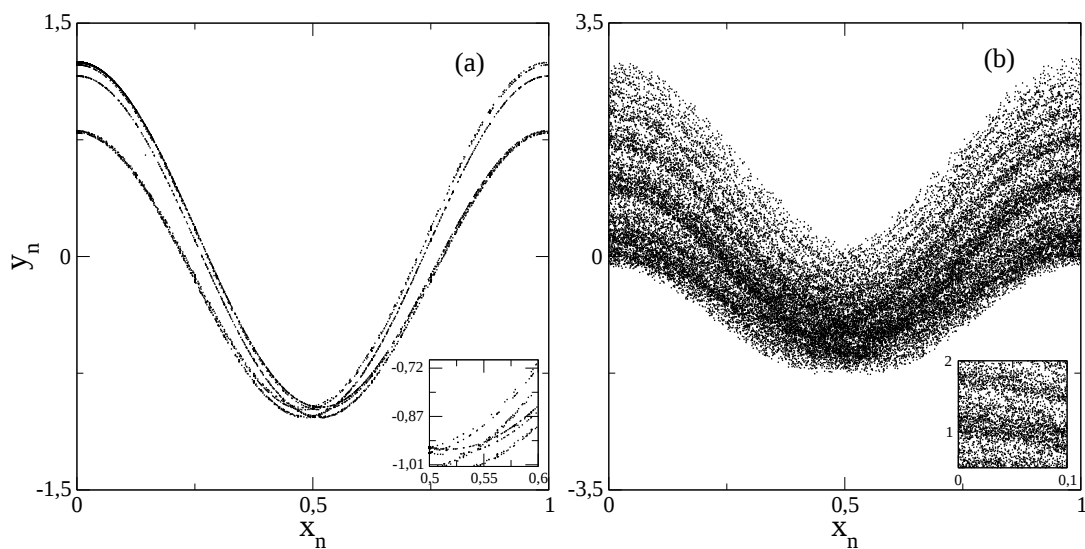


Figura 3: O espaço de fases do sistema de equações (2.30): (a) corresponde a $\lambda = 0,2$ ($DF = 0,4$) enquanto (b) corresponde a $\lambda = 2/3$ ($DF = 4/3$). Em ambos os casos foram consideradas 200.000 iterações, sendo descartadas 50.000 (transiente).

Em um outro trabalho, juntamente com J. Mallet-Paret, Kaplan e Yorke consideraram uma versão mais geral do modelo acima e, a partir deste, estimaram a dimensão de Lyapunov do sistema. Tal dimensão corresponde a quantidade de informação necessária para especificar, com uma determinada precisão, a localização de um ponto no espaço de fases. Eles observaram, dentre outras coisas [28], que esta dimensão era sempre menor ou igual à dimensão fractal do atrator do sistema.

A partir destes trabalhos, diferentes aspectos dinâmicos do sistema (2.30) passaram a ser investigados e o conjunto de equações nesta forma ficou conhecido como “mapa de Kaplan-Yorke”. Este mapa, além de interessante do ponto de vista matemático, passou a admitir também uma motivação física principalmente a partir de 1987. Neste ano, Beck

⁷O espaço de fases de um sistema dinâmico é um espaço matemático com eixos de coordenadas correspondentes às variáveis de estado do sistema, ou seja, cada direção ortogonal deste espaço representa uma variável de estado [27].

e Roepstorff [7] verificaram que a evolução de um mapa do tipo Kaplan-Yorke produzia um comportamento semelhante àquele da equação de Langevin (2.24). Em outras palavras, eles mostraram que um sistema dinâmico determinístico fortemente caótico pode exibir um comportamento semelhante a um processo estocástico.

Seguindo a idéia da teoria de Langevin, Beck considerou [5] que a partícula suspensa num fluido recebe, a cada intervalo de tempo $n\tau$ (com τ fixo e $n = 0, 1, 2, \dots$), impulsos de magnitude x_n . Deste modo, a intensidade de impulsos I acumulada em um intervalo de tempo t corresponde a

$$I_\tau(t) = \sum_{n=0}^{t/\tau} x_n. \quad (2.31)$$

Conseqüentemente, a força exercida sobre a partícula no instante t será

$$F_\tau(t) = \frac{dI_\tau(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n\tau), \quad (2.32)$$

sendo x_n a intensidade dos impulsos e τ o intervalo de tempo entre impulsos consecutivos.

Além disso, Beck supõe, em [5], que a intensidade dos impulsos em um tempo $(n+1)\tau$ é uma função determinística, porém caótica, de seu valor no tempo imediatamente anterior, isto é, em $t = n\tau$. A evolução temporal da intensidade dos impulsos, neste caso, é dada por

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad (2.33)$$

sendo $T(x_n)$ um mapa, não necessariamente invertível⁸, com parâmetros de regime caótico.

Assim, assumindo que a partícula browniana possui massa unitária, a equação do movimento da partícula será

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + F_\tau(t). \quad (2.34)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação pelo fator integrante $e^{\gamma t}$ e rearrajando os termos ficamos com

$$e^{\gamma t} \frac{dv}{dt} + e^{\gamma t} \gamma v = e^{\gamma t} F_\tau(t). \quad (2.35)$$

Então, considerando o inverso da regra da cadeia e utilizando a equação (2.32) a equação

⁸Um mapa T é considerado invertível se, dado um x_{n+1} , obtemos um único x_n a partir de $x_n = T^{-1}x_{n+1}$ [16].

diferencial adquire a forma

$$\frac{d}{dt} (e^{\gamma t} v) = e^{\gamma t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - n\tau) \right). \quad (2.36)$$

Finalmente, integrando (2.36) de $(\tau + \varepsilon)$ a $(\tau + \varepsilon + 1)$, com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtemos como solução

$$v([n+1]\tau + \varepsilon) = v(n\tau + \varepsilon) e^{-\gamma\tau} + x_{n+1}. \quad (2.37)$$

Comparando este resultado com a equação (2.25), podemos dizer que a solução (2.37) equivale a uma versão discreta daquela equação. Fazendo algumas manipulações, isto é, substituindo $v(n\tau + \varepsilon)$ por y_n e considerando $e^{-\gamma\tau} = \lambda$, esta equação pode ser reescrita como

$$y_{n+1} = \lambda y_n + x_{n+1}. \quad (2.38)$$

Verificamos, então, uma correspondência entre as equações (2.33) e (2.38) com o mapa de Kaplan-Yorke (2.30). Esta correspondência equivale às relações $p(x_n) = x_{n+1}$ e $T(x_n) = 2x(\text{mod}1)$. Entretanto, segundo Beck [5], uma expressão mais geral pode ser obtida quando se considera a força $F_\tau(t) = \sum_n h(x_{n-1})\delta(t - n\tau)$. Neste caso, o conjunto de equações resultante assume a forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= T(x_n), \\ y_{n+1} &= \lambda y_n + h(x_n), \end{aligned} \quad (2.39)$$

sendo $T(x)$ um mapa caótico, $\lambda \in (0, 1)$ um parâmetro e $h(x)$ uma função contínua cuja imagem $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

A equação (2.39) representa a forma geral de um mapa do tipo Kaplan-Yorke [5]. Como vimos, as funções que definem tal mapa podem ser obtidas da própria equação do movimento da partícula e, portanto, seus elementos possuem uma correspondência física direta. O parâmetro λ , por exemplo, está relacionado à viscosidade do meio e ao tempo de relaxação da partícula enquanto que a imagem da função $h(x)$ corresponde a possibilidade de movimento, em uma dada direção, tanto para a direita quanto para a esquerda.

O mapa de Kaplan-Yorke é um membro especial da classe de mapas bidimensionais dissipativos. Além de sua relação direta com o movimento irregular da partícula suspensa num líquido, ele possui diversas características importantes dos sistemas não-

lineares, tais como duplicação de período, ergodicidade e atrator estranho⁹ [5]. Exemplos típicos de funções utilizadas para $T(x)$ são o mapa logístico na forma $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ e o mapa $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$. No primeiro caso, geralmente é utilizado $\mu = 2$, pois como podemos observar na Figura (2) a variável x assume, neste caso, valores $[-1, 1]$ e, portanto, podemos considerar $h(x) = x$. No outro caso, $x \in [0, 1]$ e, por conseguinte, definimos $h(x)$ como uma função cosseno.

Em uma série de trabalhos [7–9, 29], Beck e colaboradores investigaram as propriedades dinâmicas de um mapa tipo Kaplan-Yorke da forma

$$F(x, y) = \begin{cases} x_{n+1} = 1 - 2x_n^2 \\ y_{n+1} = \lambda y_n + x_n \end{cases}. \quad (2.40)$$

Eles analisaram diferentes aspectos deste sistema, tais como, ergodicidade, dimensão do atrator, função de correlação e limites gaussianos. No primeiro trabalho, em particular, eles observaram que fazendo $\lambda \rightarrow 1$ a distribuição das velocidades da partícula, representada pela variável y da equação (2.40), aproxima-se de uma gaussiana como podemos observar na Figura (4). Este comportamento da distribuição foi estudado, recentemente, de forma analítica por Michael C. Mackey e Marta T-Kaminska [10], os quais demonstram matematicamente esta aproximação à curva gaussiana.

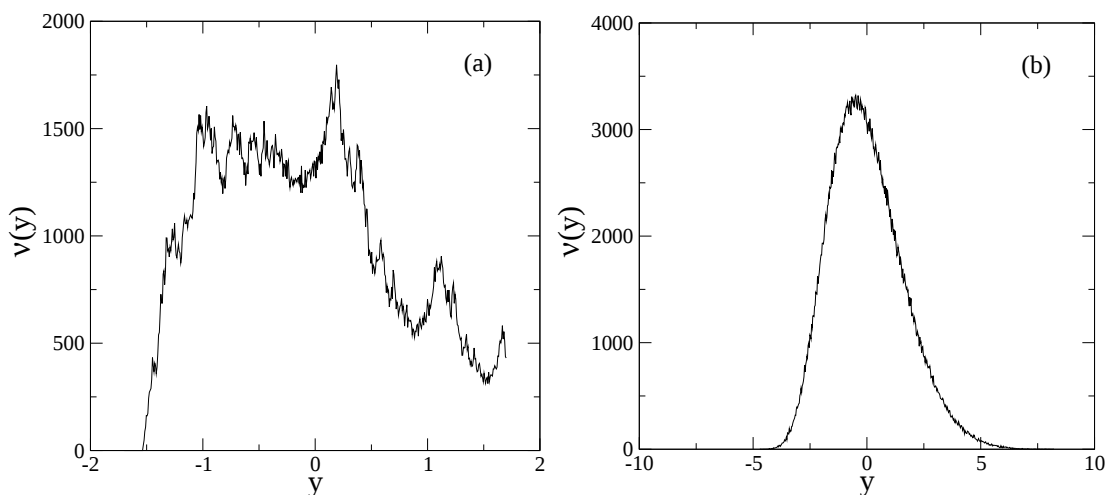


Figura 4: A distribuição dos valores da variável y do mapa (2.40) em 500.000 iteradas. (a) corresponde a $\lambda = 0,6$ e (b) a $\lambda = 0,9$.

Embora a distribuição das velocidades assemelhe-se à uma curva gaussiana, a distribuição das forças referente aos impactos entre a partícula e a molécula do fluido não representa, neste caso, uma função delta centrada na origem como ocorre com a força

⁹Atratores estranhos são conjuntos de pontos atratores que possuem dimensão fractal, ou seja, dimensões não inteiras [16].

de Langevin. Em outras palavras, $F(t)/m = T(x)$ não consiste em um ruído branco gaussiano, mas num complicado processo caótico. Por outro lado, observamos na Figura (5) que a distribuição desta força para $T(x) = 1 - 2x^2$ tem uma forma simétrica em torno da origem e, portanto, assim como a força estocástica de Langevin a força caótica também satisfaz a condição de média nula, ou seja,

$$\langle T(x) \rangle = 0. \quad (2.41)$$

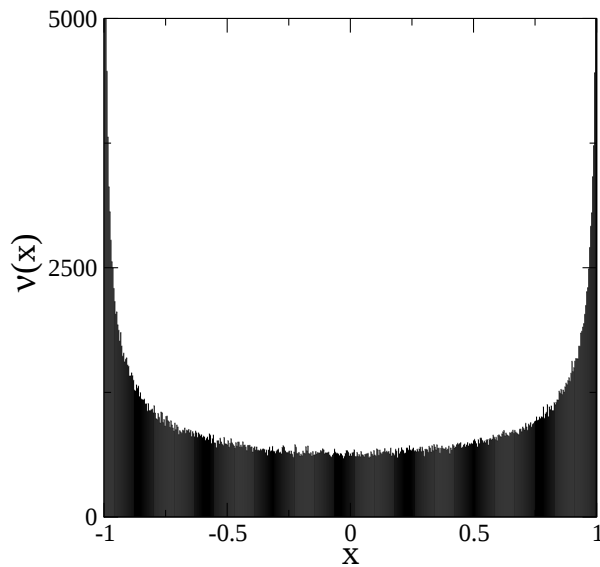


Figura 5: A distribuição dos valores de x para 200.000 iteradas do mapa logístico com $\mu = 2$ e $x_0 = 0,1$. Podemos notar uma grande concentração de pontos próximos aos extremos do intervalo do domínio.

No artigo de 1987, Beck e Roepstorff [7] também modelaram a trajetória de partículas brownianas sujeitas à força caótica. Eles consideraram como algoritmo o conjunto de equações

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= 1 - 2(x_n^{(i)})^2, \\ s_{n+1}^{(i)} &= s_n^{(i)} + x_n^{(i)}, \end{aligned}$$

sendo s a posição da partícula em um dado instante de tempo e $i(= 1, 2)$ um índice referente a direção do movimento. Baseando-se nesta idéia, modelamos a trajetória de três partículas brownianas utilizando o mapa de Kaplan-Yorke (2.40). Assumimos que as partículas encontram-se em uma caixa com paredes refletoras e que a posição $\vec{s}$ de cada uma delas varia em intervalos de tempo discretos ($n = t/\tau$) segundo a equação

$$\vec{s}_{n+1} = \vec{s}_n + \vec{v}_n. \quad (2.42)$$

Consideramos que cada componente da velocidade evolui de forma independente de acordo com o mapa (2.40) com parâmetro $\lambda = 0,9$ e definimos a posição inicial $\vec{s}_0 = s_0\hat{i} + s_0\hat{j}$ por um número aleatório $[0, 1]$ multiplicado pelo tamanho da caixa L . As configurações das trajetórias obtidas em 1.000 iteradas do mapa são apresentadas na Figura (6). Este resultado demonstra satisfatoriamente a característica irregular do movimento da partícula browniana.

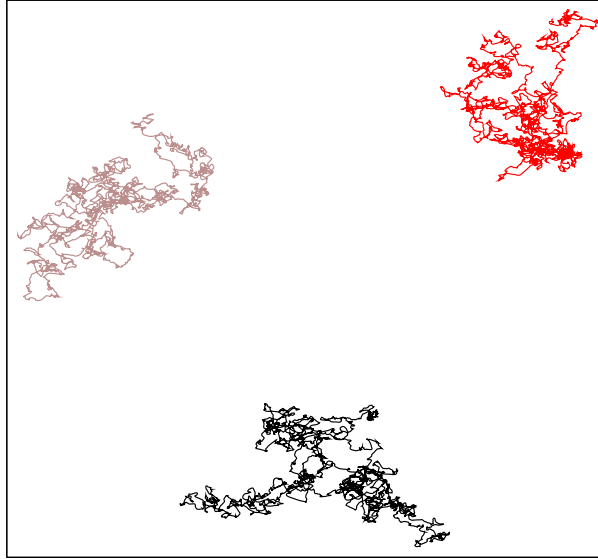


Figura 6: Trajetória de três partículas brownianas obtidas através da equação $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}t$ e do mapa (2.40). Nesta modelagem consideramos paredes refletoras e posições iniciais aleatórias. O tempo de observação corresponde a 1.000 iteradas do mapa.

Em 1994, Beck realizou ainda um estudo das diferenças de velocidade em fluxos turbulentos com mapas do tipo Kaplan-Yorke acoplados [9]. Os resultados obtidos pela iteração do mapa foram confrontados por ele com os dados experimentais acerca do fenômeno e ambos apresentaram concordância entre si.

Muitos outros sistemas físicos evoluem de modo semelhante à equação estocástica de Langevin. Dependendo da relevância das correlações entre as várias presentes, podemos investigar tais sistemas por meio de mapas do tipo Kaplan-Yorke. Motivados pela correspondência existente entre o mapa de Kaplan-Yorke e um sistema físico, mais especificamente, o movimento das partículas em um fluido, propomos nesta dissertação um estudo de redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados.

3 *As Redes de Mapas Acoplados*

Sistemas espacialmente extensos ou compostos por vários elementos podem ser estudados por meio de diferentes modelos matemáticos, tais como, as equações diferenciais, os autômatos celulares e as redes de mapas acoplados. Em cada um destes modelos, a dinâmica temporal, a configuração espacial e as variáveis de estado¹ são consideradas de um modo distinto entre os casos contínuo e o discreto. Especificamente as redes de mapas acoplados são sistemas dinâmicos cujo o tempo e o espaço são discretos e a variável de estado é contínua.

As redes de mapas acoplados constituem modelos bastante interessantes do ponto de vista matemático-computacional e têm sido utilizadas para descrever diversos sistemas e fenômenos naturais. Nesta dissertação, em particular, propomos um estudo acerca da dinâmica de um conjunto de partículas brownianas por meio de quatro modelos de redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados. Sendo assim, apresentamos neste capítulo os principais conceitos e características relacionados às redes de mapas acoplados, algumas formas de acoplamentos presentes na literatura e os modelos que utilizaremos.

3.1 Os Sistemas Dinâmicos de Tempo Discreto

Um sistema dinâmico consiste de uma prescrição matemática que possibilita descrever o estado de um conjunto amostral em instantes de tempos subsequentes dado um estado inicial bem determinado. Em outras palavras, trata-se de uma regra de evolução que relaciona o estado de um sistema em um instante de tempo arbitrário com o respectivo estado em um instante imediatamente posterior, entendendo por estado o conjunto de valores que caracterizam completamente o sistema. Neste sentido, se o intervalo de tempo entre dois estados subsequentes for desprezível, isto é, $\Delta t \rightarrow 0$, o sistema em questão é considerado de tempo contínuo, caso contrário ele é denominado de tempo discreto. Mais

¹As variáveis de estado de um sistema dinâmico representam as grandezas necessárias e suficientes à descrição completa do sistema.

precisamente, sistemas de tempo discreto são aqueles que apresentam variações (evoluem) apenas em instantes de tempo determinados.

A seqüência dos intervalos temporais em um sistema dinâmico de tempo discreto é, por definição [16], expressa pelos números inteiros, ou seja, $n = 0, 1, 2, \dots$, sendo $n = 0$ o instante correspondente ao estado inicial do sistema. Aplicando a regra de evolução nos valores iniciais obtemos o estado em $n = 1$, os valores neste intervalo definem um novo estado e, ao mesmo tempo, possibilitam obter o próximo e assim sucessivamente. Este processo de atualização das variáveis no qual os dados de saída são utilizados como novos dados de entrada é denominado iteração e os valores obtidos pelas iterações das variáveis de estado definem a trajetória dos estados no espaço de fase.

Muitos sistemas evoluem naturalmente de forma discreta e vários outros são convenientemente representados por equações desta forma. Um exemplo clássico de sistema com evolução temporal discreta é a aplicação financeira, uma vez que os rendimentos são creditados em intervalos mensais e incidem sobre o valor acumulado. Também podemos mencionar como exemplos de sistemas de tempo discreto o modelo probabilístico de Einstein para o movimento da partícula browniana e o mapa de Kaplan-Yorke, ambos discutidos no capítulo anterior.

Especificamente na apresentação do referido mapa derivamos sua lei de evolução temporal a partir de uma equação de tempo contínuo, isto é, transformamos a equação diferencial originária em uma equação a diferenças. A transformação ou aproximação de sistemas de tempo contínuo em sistemas de tempo discreto constitui a base dos métodos numéricos de resolução de equações diferenciais. Equações diferenciais discretizadas também podem ser expressas e analisadas na forma de um mapa. Como um exemplo vamos considerar o modelo de crescimento populacional de Verhulst [30], o qual é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r.P \left(1 - \frac{P}{k} \right), \quad (3.1)$$

sendo P a densidade de população, r um parâmetro relacionado a razão de crescimento e k um parâmetro que representa uma saturação para o crescimento. Cumpre destacar que, embora o número de habitantes seja uma quantidade inteira e, portanto, discreta, a densidade de população P é uma variável contínua.

A aproximação da equação (3.1) em uma equação de diferenças finitas resulta em

$$P(t + \Delta t) = P(t)(r.\Delta t + 1) - P^2(t) \left(\frac{r.\Delta t}{k} \right). \quad (3.2)$$

Neste caso, considerando $\Delta t = 1$ e substituindo $P(t) \rightarrow Cx(t)$, sendo C uma constante a definir, obtemos

$$Cx(t+1) = Cx(t)(r+1) - C^2x^2(t)(r/k). \quad (3.3)$$

Para simplificar (3.3) podemos assumir $C = k(r+1)/r$ e, deste modo, a equação adquire a forma

$$x(t+1) = \mu x(t)[1 - x(t)], \quad (3.4)$$

sendo $\mu = r + 1$.

A equação (3.4), com $t \in \mathbb{N}$, representa a forma usual do sistema dinâmico de tempo discreto denominado mapa logístico. Ela é equivalente a equação logística $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ mencionada no capítulo anterior e exibe o mesmo quadro de comportamentos dinâmicos, tais como, periodicidade, duplicação de período e caos. Em termos técnicos dizemos que ambas as equações são topologicamente conjugadas, isto é, existe uma função $\phi(x)$ que transforma uma na outra por meio de uma mudança de coordenadas [16]. Neste trabalho utilizaremos, sobretudo, o mapa logístico na forma $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$. Sendo assim, caso não especifiquemos, o termo “mapa logístico” será empregado referindo-se exclusivamente a esta forma.

3.2 A Representação Reticular dos Sistemas

Ao considerarmos o espaço como um elemento importante à descrição física de um sistema podemos utilizar basicamente duas representações, a contínua e a discreta. No caso discreto, o sistema é dividido em várias partes igualmente espaçadas, sendo estas partes geralmente representadas e analisadas como pontos geométricos. Com isso, a distribuição espacial do sistema pode ser vista como uma configuração de pontos interligados entre si, ou seja, uma rede.

Sistemas multicomponentes também costumam ser representados e investigados por meio de redes. Há modelos de redes associados à populações de neurônios, à cadeias moleculares, à relacionamentos sociais e até mesmo em trabalhos de especulações financeiras [31]. Na representação reticular de um sistema se estabelece uma correspondência de um para um entre os sítios (pontos) da rede e os componentes ou partes do sistema original. Da mesma forma, existindo alguma ligação ou interação entre os componentes, elas são comumente representadas por linhas de conexões entre os sítios da rede. Na

Figura (7) ilustramos uma rede unidimensional com L sítios conectados, cada um, com os vizinhos mais próximos. A fim de facilitar a visualização dos sítios, trocamos os pontos por discos.

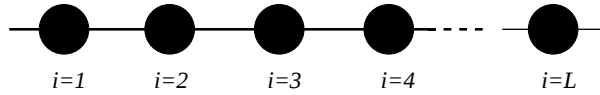


Figura 7: Modelo de rede unidimensional com L sítios acoplados localmente. As linhas entre os sítios representam a conexão existente entre eles.

A Figura (7) representa um modelo de rede com acoplamento local. Nesta configuração cada sítio da rede interage de forma direta apenas com os primeiros vizinhos, isto é, com o vizinho da direita e o da esquerda. Aos sítios das extremidades, os quais têm somente um vizinho, geralmente considera-se uma condição de contorno específica como, por exemplo, as condições periódicas. Em redes com condição de contorno periódica o primeiro e o último sítio são igualmente considerados e analisados como vizinhos.

Constituída por agrupamentos entre vários sistemas elementares, as redes formam um conjunto bem mais complexo e com maiores possibilidades de comportamento dinâmico que um sistema isolado. É, portanto, neste sentido que acoplamos mapas para estudar sistemas e fenômenos complexos.

3.3 As Redes de Mapas Acoplados

As redes de mapas acoplados são modelos matemáticos apropriados para descrever a evolução espaço-temporal de sistemas extensos ou compostos por vários elementos. Elas foram introduzidas na teoria dos sistemas dinâmicos em 1983-84 e, desde então, vários estudos têm utilizado o acoplamento entre mapas como objeto ou como ferramenta de pesquisa. Espalhamentos de doenças infecciosas, turbulência em fluidos e plasmas, comportamento coletivo em populações de neurônios e formação de padrões em sistemas biológicos são exemplos de fenômenos estudados por meio redes de mapas acoplados [14, 32, 33].

Os primeiros trabalhos com redes de mapas acoplados foram desenvolvidos simultânea e independentemente por Kaneko, Kuznetsov, Kapral, Fujisaka e Yamada [34–37]. Estes pesquisadores, embora tenham proposto o mesmo modelo, o fizeram com um interesse distinto. Kapral, por exemplo, utilizou as redes para modelar sistemas químicos, Kuznetsov estava interessado na aproximação de grupo de renormalização, Fujisaka e Ya-

mada investigaram a dinâmica de um conjunto de osciladores, e Kaneko, de forma mais geral, considerou as redes como ferramentas úteis para estudar a evolução temporal de qualquer sistema espacialmente estendido [11].

As principais características das redes de mapas acoplados são:

- uma dinâmica temporal discreta;
- uma configuração espacial discreta;
- e variáveis locais representadas por números ou vetores reais.

Portanto, as redes de mapas acoplados constituem sistemas dinâmicos com variáveis temporal e espacial discretas e variáveis de estado contínuas.

Na classificação dos sistemas dinâmicos, conforme apresentamos na Tabela (1), as redes de mapas acoplados (RMA) ocupam uma posição intermediária entre a descrição contínua das equações diferenciais parciais (EDP) e o tratamento discreto dos autômatos celulares (AC). Devido à natureza de suas variáveis, as redes de mapas acoplados apresentam algumas vantagens ou preferências em relação a estes modelos. A forma discreta da variável temporal e espacial, por exemplo, simplifica a implementação e processamento numérico das redes enquanto que a forma contínua da variável local descreve de modo bastante preciso as mudanças ocorridas no sistema.

Tabela 1: Classificação dos sistemas dinâmicos acoplados.

Modelo	Espaço	Tempo	Variável local
EDP	contínuo	contínuo	contínua
RMA	discreto	discreto	contínua
AC	discreto	discreto	discreta

Como um exemplo de rede de mapas acoplados podemos mencionar o modelo introduzido por Kaneko em sua tese de doutoramento [33]. Neste modelo as iterações ou atualizações dos estados de cada sítio (mapa) da rede são dadas por

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(u_n^{(i-1)}) + f(u_n^{(i+1)})] \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varepsilon \in [0, 1], \quad (3.5)$$

sendo $u^{(i)}$ a variável de estado do i -ésimo sítio da rede, n o instante de tempo, $f(u)$ um mapa caótico e ε um parâmetro de acoplamento.

O acoplamento entre os mapas na equação (3.5) é denominado laplaciano local e representa matematicamente o exposto na Figura (7). Além disso, neste e nos demais

acoplamentos que serão apresentados e estudados, estamos considerando condições de contorno periódicas de modo que $u^{(i)} = u^{(i \pm N)}$, sendo N o número de elementos (mapas) da rede. As variáveis de estado $u^{(i)}$ correspondem às grandezas físicas relevantes à descrição do sistema. Elas podem representar, por exemplo, a concentração de uma substância química, a densidade de uma população ou um campo de velocidades [38]. Para o problema proposto nesta dissertação, em particular, a variável u corresponde a velocidade das partículas brownianas.

Conforme mostra a equação (3.5) a dinâmica de uma rede de mapas acoplados é governada por dois mecanismos competidores, um de reação local, representado pelo mapa $f(u)$, e o outro de interação entre os constituintes, dado pela forma e intensidade (ε) do acoplamento. Estes mecanismos são denominados competidores devido à dinâmica que eles impõem, isto é, enquanto o mapa $f(u)$, geralmente caótico, tende a divergir os valores de cada variável $u^{(i)}$, o acoplamento tende à aproximá-los por meio da interação.

3.3.1 A Dinâmica Local

A dinâmica local de uma rede de mapas acoplados diz respeito à evolução individual de cada sítio da rede por um mapeamento dos estados correspondentes, isto é, ela representa uma transformação $u \rightarrow f(u)$, sendo $f(u)$ uma lei de evolução discreta (um mapa) e u a variável de estado. Podemos dizer que o mapa utilizado como dinâmica local de uma rede descreve a evolução temporal de cada sítio tal como a equação de movimento de um oscilador descreve a dinâmica de cada elemento de uma cadeia de osciladores de acordo com a frequência natural de cada um deles.

Uma rede de mapas acoplados pode ser construída com uma dinâmica local homogênea ou não-homogênea. Se o mesmo mapa, com um único parâmetro, evolui todos os sítios da rede, a dinâmica local é denominada homogênea, caso contrário, ela é dita não-homogênea. Um procedimento bastante comum no estudo de redes é a utilização de mapas idênticos, porém com um valor de parâmetro que possibilite a divergência exponencial dos pontos mapeados quando estados distintos forem evoluídos, ou seja, geralmente se emprega uma dinâmica local caótica.

Vários estudos com redes de mapas acoplados têm utilizado como dinâmica local o mapa logístico [18,32], tanto na forma $f(x) = \mu x(1-x)$, como na forma $f(x) = 1 - \mu x^2$. As duas representações do mapa, como mencionamos anteriormente, são topologicamente conjugadas, entretanto, a forma $f(x) = 1 - \mu x^2$ pode ser mais vantajosa em alguns casos como, por exemplo, para $\mu = 2$, uma vez que neste valor de parâmetro a equação torna-

se topologicamente conjugada ao mapa da tenda, o qual pode ser estudado de forma analítica [5, 16] e é definido como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde $x \in [0, 1]$.

Embora não exista restrição quanto à dimensão do mapa da dinâmica local, grande parte dos trabalhos com redes de mapas acoplados têm sido desenvolvidos com mapas de baixa dimensionalidade, pois mesmo neste caso é possível observar uma série de fenômenos interessantes [39]. Diferentemente de um sistema de equações diferenciais ordinárias no qual um comportamento caótico aparece apenas para $N \geq 3$, sendo N a dimensão do sistema, em mapas este comportamento pode ser observado também no caso unidimensional [16]. Além do mapa logístico, outros mapas unidimensionais bastante utilizados como dinâmica local de redes são o mapa de Bernoulli também denominado “shift map” e o mapa seno-círculo [14, 40, 41].

Nesta dissertação propomos como dinâmica local da rede o mapa de Kaplan-Yorke na forma

$$F : \begin{cases} x_{n+1} = 1 - 2x_n^2 \\ y_{n+1} = \lambda y_n + x_n \end{cases}, \quad (3.7)$$

sendo λ um parâmetro de controle.

O motivo desta escolha assim como algumas características e trabalhos com mapas tipo (3.7) foram elucidados no capítulo anterior. É importante lembrar, aqui, que este mapa possui uma correspondência física direta com o movimento de partículas num fluido, sendo a variável x associada à perturbação do meio ou impulsos recebidos pela partícula e y à velocidade das partículas em uma dada direção.

Na Figura (8) apresentamos o atrator do mapa (3.7) para dois valores distintos de λ . Podemos observar que os pontos mapeados a partir da mesma condição inicial resultam em configurações completamente distintas. Para valores pequenos de λ ($\lambda = 0, 3$) eles formam curvas definidas enquanto que para um valor maior ($\lambda = 0, 9$) os pontos tornam-se esparsos. Também podemos notar, em ambas ilustrações, que existe uma grande concentração de pontos nos extremos do intervalo em x , sendo esta mais intensa no segundo caso. Para os dois valores de λ expostos consideramos 10.000 iteradas do mapa após descartar 2.000 de tempo transiente. A quantidade de tempo transiente utilizada foi escolhida arbitrariamente e verificada, ser suficiente, comparando as configurações obtidas

em intervalos de tempo maiores.

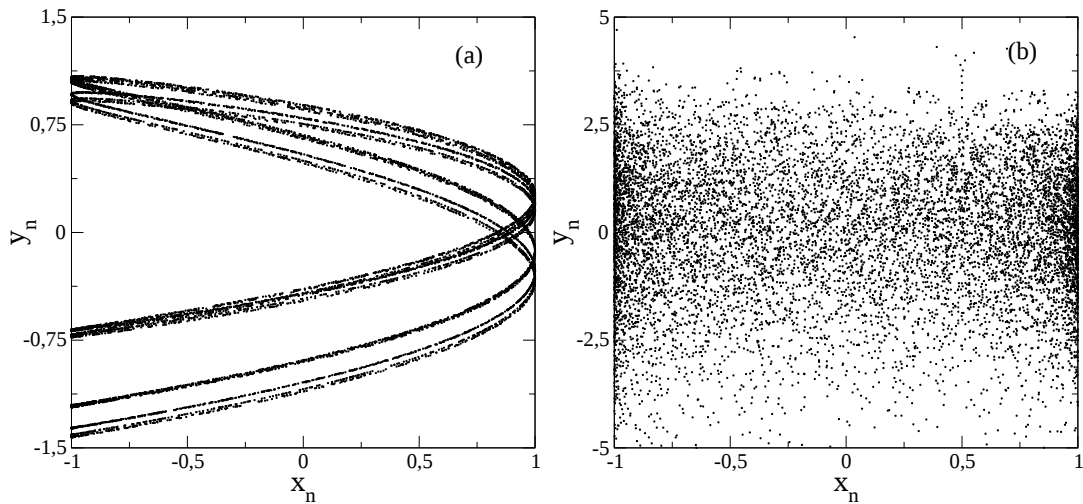


Figura 8: O atrator do mapa de Kaplan-Yorke (2.40). Em (a) utilizamos $\lambda = 0,3$ e em (b) $\lambda = 0,9$.

3.3.2 O Acoplamento

Por acoplamento subentende-se uma relação de interdependência entre dois ou mais sistemas. Em uma rede de mapas, o acoplamento faz com que o estado futuro de cada elemento (sítio) da rede seja definido conjuntamente por seu estado atual e os estados dos elementos acoplados. Neste sentido, uma rede de mapas acoplados representa uma dinâmica mais complexa e com maior possibilidades de comportamentos do que um mapa isolado.

O acoplamento dos sítios (mapas) em uma rede pode ser local ou não-local. Em um acoplamento local, como vimos anteriormente, cada sítio está conectado apenas com seus vizinhos mais próximos e, portanto, as interações ocorrem entre os primeiros vizinhos, ou seja, elas são de curto alcance. Acoplamentos não-locais, ao contrário, também estabelecem conexões entre sítios distantes e, conseqüentemente, aumentam o alcance das interações entre os sítios da rede. O caso extremo de um acoplamento não-local constitui o acoplamento global; nesta forma de acoplamento todos os sítios estão conectados entre si e interagem, direta e igualmente, com todos.

Além de local e não-local, os modelos de acoplamentos podem ser classificados de acordo com a direção e a conectividade. Quanto à direção, um acoplamento será unidirecional se, no caso de dois sítios acoplados, apenas um influencia a dinâmica do outro, ou bidirecional se ambas as dinâmicas são dependentes. Como um exemplo genérico

de acoplamento bidirecional entre dois mapas temos o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + h_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(y_n) + h_2(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Este acoplamento é dito bidirecional porque a dinâmica da variável x depende de y e o recíproco também ocorre. Retirando h_1 ou h_2 da equação (3.8) o acoplamento torna-se unidirecional, pois neste caso apenas uma variável influenciará a dinâmica da outra.

Em relação à conectividade, um acoplamento é considerado regular, se existir uma regra geral nas conexões entre os elementos da rede, ou irregular quando não houver nenhum padrão no acoplamento. Mais precisamente, o acoplamento é dito regular se a relação de conectividade de um sítio (mapa) é válida para todos os outros. Por exemplo, se um determinado sítio da rede está conectado com o vizinho da direita com uma intensidade ε e com o vizinho da esquerda com uma intensidade γ , o acoplamento será regular se o mesmo ocorrer com todos os outros sítios; caso contrário, o acoplamento é considerado irregular.

Devido à vastidão do assunto (acoplamento) consideramos uma seção separada para discutirmos as formas de conexão e interação em alguns modelos de acoplamentos que, fundamentalmente, são de interesse para este trabalho.

3.4 Algumas Formas de Acoplamentos

Há várias maneiras de se acoplar os sítios (mapas) de uma rede e estabelecer as interações entre eles. Na literatura encontramos uma grande quantidade de exemplos, tais como, acoplamentos cuja intensidade das interações decaem com a distância, acoplamentos do tipo *small-world*, acoplamentos aleatórios, acoplamentos com termos de memória e outros. Grande parte dos modelos de acoplamentos possuem a forma local e global como um caso especial. Assim, juntamente com estes acoplamentos, apresentamos nesta seção algumas formas de acoplamentos utilizadas em estudos com redes de mapas acoplados destacando aquelas que empregaremos aos mapas de Kaplan-Yorke.

3.4.1 Acoplamentos Local e Global

No modelo de acoplamento local, como mencionamos anteriormente, cada indivíduo ou sítio da rede está conectado apenas com os vizinhos mais próximos. Em uma rede unidimensional, este acoplamento representa uma conexão à direita e outra à es-

querda, isto é, do sítio i com o $i + 1$ e o $i - 1$. A forma matemática deste acoplamento foi exposta como exemplo de rede de mapas acoplados na seção anterior, equação (3.5), porém pensamos ser conveniente reapresentá-la aqui a fim de facilitar a visualização e comparação desta com aquelas referentes aos demais acoplamentos. Tal expressão é dada por

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(u_n^{(i-1)}) + f(u_n^{(i+1)})] \quad n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon \in [0, 1],$$

sendo $u^{(i)}$ a variável de estado do i -ésimo elemento da rede, $f(u)$ o mapa que descreve a dinâmica local e ε um parâmetro.

O parâmetro ε controla a intensidade da interação entre os sítios acoplados comunicando o estado de cada um deles aos demais. Assim, embora o acoplamento (3.5) se restrinja aos primeiros vizinhos, dependendo da magnitude do parâmetro ε ($\varepsilon \rightarrow 1$) o estado de um dado sítio pode influenciar, indireta e parcialmente, uma vizinhança maior à medida que o sistema evolui. Isto significa que existe uma relação de dependência entre o parâmetro ε e o coeficiente de difusão do sistema. Em [39, 42] podemos ver que tal relação aparece na própria dedução do acoplamento (3.5).

De acordo com o exposto na seção anterior, em um acoplamento global todos os sítios da rede estão conectados entre si e interagem de forma direta. Neste modelo de acoplamento cada variável de estado é evoluída de acordo com a equação

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{N - 1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(u_n^{(j)}), \quad (3.9)$$

sendo N o número de sítios da rede.

De maneira análoga ao acoplamento local, vemos que as interações em (3.9) dependem diretamente de ε , sendo a magnitude deste parâmetro igual para todos os sítios da rede. No acoplamento global, entretanto, o estado futuro de cada sítio não depende apenas dos estados dos sítios vizinhos, mas do comportamento médio da rede (média dos estados dos demais sítios). O acoplamento global constitui, portanto, uma aproximação de campo médio.

Na Figura (9) ilustramos as conexões entre os sítios em uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas segundo a forma local (à esquerda) e global (à direita) de acoplamentos. Para o caso global representamos apenas as ligações não-locais do sítio $i = 1$ uma vez que as ligações dos demais sítios seguem o mesmo padrão.

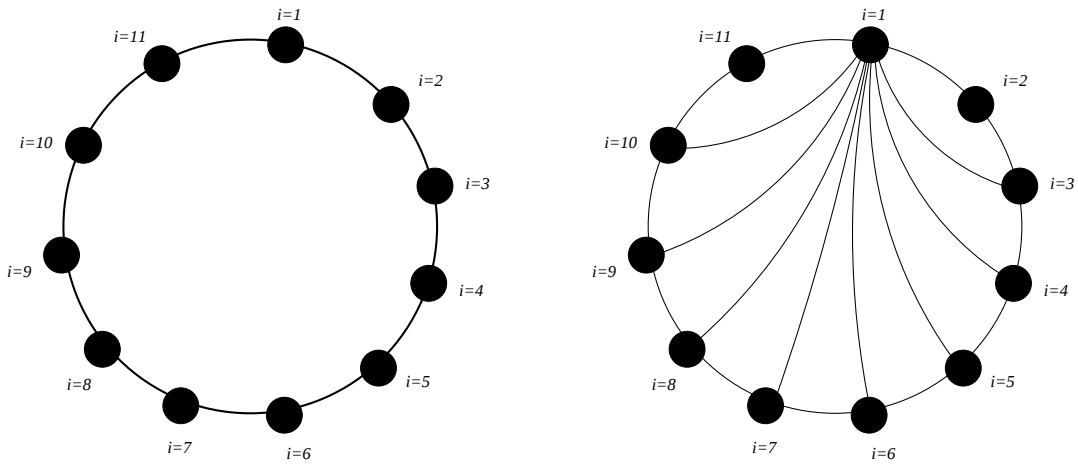


Figura 9: Representação dos acoplamentos local e global para uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas. As linhas que unem os sítios representam as conexões definidas por cada acoplamento, para o caso global (à direita) apenas as ligações não-locais do sítio 1 são ilustradas.

3.4.2 Acoplamentos cujas Interações decaem com a Distância

Em acoplamentos não-locais podemos considerar que a interação entre os sítios acoplados depende da distância existente entre eles. Acoplamentos cujas interações decaem como uma lei de potência têm sido bastante utilizados no estudo de redes de mapas acoplados [43]. Nesta forma de acoplamento considera-se que todos sítios da rede estão interligados entre si, porém, a intensidade da interação entre eles diminui com a distância relativa segundo uma lei de potência. A razão de decaimento na intensidade das interações entre os sítios da rede é controlada por um expoente α denominado parâmetro de alcance e a intensidade do acoplamento continua, como em (3.5) e (3.9), sendo regida pelo parâmetro ε . Portanto, neste acoplamento as interações entre os sítios da rede dependem tanto da magnitude de ε quanto de α . Por uma questão de conveniência mencionaremos os acoplamentos cujas interações decaem segundo uma lei de potência como acoplamentos do tipo lei de potência.

Duas formas de acoplamentos do tipo lei de potência são consideradas nesta dissertação, as quais denominaremos a usual e a logarítmica. A primeira delas constitui o modelo como acabamos de definir e aparece em diversos trabalhos sobre caos espaço-temporal e transições de fase em sistemas espacialmente extensos. A forma logarítmica, por outro lado, foi proposta recentemente por Tessone e colaboradores [14] e aplicada por eles ao estudo de duas réplicas de rede de mapas acoplados. Cumpre destacar que a denominação “acoplamento lei de potência logarítmico” foi atribuída por nós devido à forma como as conexões são estabelecidas pelo modelo. Nesta forma de acoplamento,

como veremos, tanto a intensidade quanto à distribuição das ligações entre os sítios segue uma lei de potência.

Uma diferença característica entre as duas formas de acoplamento do tipo lei de potência está relacionada ao número de sítios da rede. Para a forma usual a rede possui, por definição, um número ímpar de sítios enquanto que na forma logarítmica este número é sempre par. Na Figura (10) apresentamos um esquema ilustrativo das conexões do sítio $i = 1$ em ambas as formas de acoplamento do tipo lei de potência. O decaimento das interações entre os sítios com a distância relativa é representado pictoricamente pela espessura da linha que une os sítios.

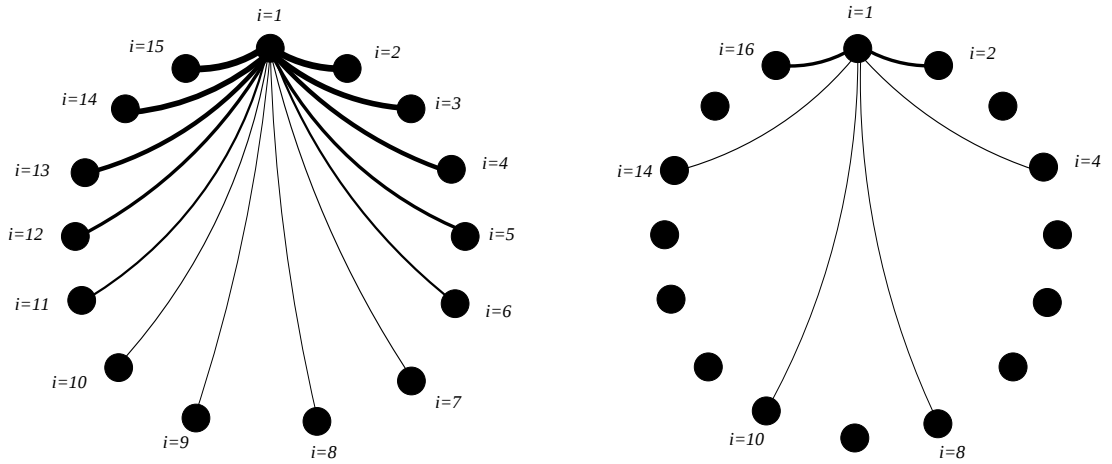


Figura 10: Representação das ligações do sítio 1 para o acoplamento lei de potencia usual (à esquerda) e lei de potência logarítmico (à direita) para uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas. A forma logarítmica ilustrada representa o caso específico em que $q = 2$ e $M = 3$, sendo q e M dois parâmetros deste acoplamento.

3.4.2.1 A Forma Usual

As variáveis de estado de uma rede unidimensional de mapas acoplados na forma usual do acoplamento do tipo lei de potência são evoluídas segundo a equação

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{f(u_n^{(i-j)}) + f(u_n^{(i+j)})}{j^\alpha}, \quad (3.10)$$

sendo $\eta(\alpha)$ um fator de normalização dado por

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{j^\alpha},$$

com $M = (N - 1)/2$, sendo N a quantidade de sítios da rede.

É fácil verificar que, para valores extremos de α , a equação (3.10) recupera a

forma global e local de acoplamentos. Considerando $\alpha = 0$, por exemplo, a variável de estado de cada sítio torna-se igualmente influenciada pela média dos estados dos demais sítios (forma global) enquanto que fazendo $\alpha \rightarrow \infty$ apenas os dois primeiros vizinhos contribuirão para a dinâmica do sítio em análise, isto é, o caso local é retomado. O acoplamento tipo lei de potência na forma usual tem sido aplicado a diversos sistemas naturais tais como em redes biológicas, modelos de spin, sistemas de muitas partículas e muitos outros [43].

3.4.2.2 A Forma Logarítmica

Embora possamos derivar o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico da forma usual, nele o tamanho da rede não é mais definido arbitrariamente, mas depende da escolha dos parâmetros q e M , os quais representam, respectivamente, a base de potência em que as conexões são efetuadas e o número de conexões à direita e à esquerda de cada sítio da rede, considerando a rede com condições de contorno periódicas, isto é, $u^{(i)} = u^{(i \pm N)}$. Nesta forma de acoplamento o tamanho da rede é dado por $N = 2q^M$, razão pela qual este número é sempre par.

Para se obter a forma logarítmica de acoplamento do tipo lei de potência basta realizar a substituição $j \rightarrow q^j - 1$ na equação (3.10). Desta maneira, o modelo usual adquire a forma

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{f(u_n^{(i-q^j+1)}) + f(u_n^{(i+q^j-1)})}{(q^j - 1)^\alpha}, \quad (3.11)$$

e o fator de normalização passa a ser dado por

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{(q^j - 1)^\alpha}, \quad (3.12)$$

sendo $M = \log_q(N/2)$.

A equação (3.11) descreve a evolução dos sítios em uma rede com acoplamento do tipo lei de potência logarítmico. Podemos notar que, semelhantemente a forma usual, este acoplamento também se reduz ao caso local se $\alpha \rightarrow \infty$, porém, diferentemente daquela, o caso global não é recuperado quando $\alpha = 0$ uma vez que, para $q > 1$, não há conexões de todos com todos.

As atualizações das variáveis de estado em uma rede com acoplamento logarítmico requer menos tempo computacional se comparado ao acoplamento usual. Enquanto na

forma logarítmica são necessárias $O(N \log_q N)$ operações para cada n , sendo n o instante de tempo, no caso usual a quantidade de operações é $O(N^2)$. Neste sentido, a forma logarítmica de acoplamento permite simular redes bem maiores que a usual em tempos equivalentes.

3.4.3 Acoplamentos Tipo *Small-World*

A idéia de redes do tipo *small-world* ou “mundo pequeno” deve-se sobretudo ao estudo das relações sociais e está ligada ao fato de que existem poucos intermediários entre, quaisquer, duas pessoas no mundo. Em 1967 o sociólogo Stanley Milgran propôs um estudo [44] sobre o número de pessoas necessárias para que uma determinada informação fosse transmitida de uma pessoa X para uma pessoa Y escolhidas aleatoriamente no mundo. Como experimento, ele entregou cartas à algumas pessoas e solicitou que elas a entregassem ao destinatário ou para alguém que pudesse fazê-lo. Milgran verificou que, em média, seis pessoas separavam o remetente do destinatário, concluindo assim que a distância média entre as pessoas é pequena.

Com base no trabalho de Milgran, vários modelos de rede foram propostos para o estudo do fenômeno *small-world*. Especificamente no modelo de Newman-Watts [45], a rede é constituída por conexões locais pré-estabelecidas e algumas ligações não-locais distribuídas de forma probabilística. Trata-se basicamente de uma rede regular com acoplamentos locais entre z vizinhos mais próximos na qual são inseridas ligações de longo alcance (não-locais). Uma ilustração das conexões neste modelo para o caso em que $z = 2$ é apresentada na Figura (11).

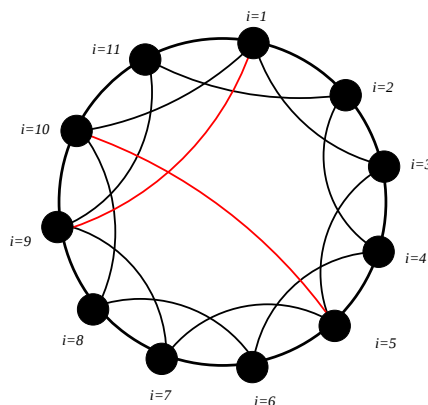


Figura 11: Modelo de rede Small-World. As linhas em vermelho representam as ligações não-locais.

Em modelos de rede *small-world* a distribuição das ligações de longo alcance é realizada por meio de um processo probabilístico. Cada sítio da rede possui uma probabi-

lidade P_i de conexões de longo alcance, a qual pode ser igual para todos (modelo usual) ou não. No primeiro caso, a probabilidade geralmente é definida pela razão entre o número de ligações permitidas para um sítio pelo número total de sítios da rede, ou seja,

$$P = \frac{n_l}{N} , \quad (3.13)$$

sendo n_l o número de ligações e N a quantidade de sítios na rede.

No caso em que probabilidade de ligação não é necessariamente a mesma para todos sítios, a distribuição das ligações pode depender, por exemplo, da posição dos sítios na rede. Um modelo de rede no qual se considera a distância de separação entre os sítios para o cálculo da probabilidade foi introduzido por Raghavachari e Glazier [32] em 1995. Neste modelo,

$$p_{ij} \propto |r_i - r_j|^{-\alpha} , \quad (3.14)$$

sendo r_i e r_j as posições do i -ésimo e j -ésimo sítios e α um parâmetro positivo.

Os acoplamentos tipo *small-world* têm sido bastante utilizados no estudo de conexões neurais e têm contribuído significativamente à compreensão de alguns comportamentos presentes em tais sistemas [46]. Sendo um fenômeno igualmente complexo e no qual a distância entre os componentes do sistema assume um papel importante, consideramos esta forma de acoplamento apropriada para representar as interações das partículas em movimento browniano. Neste sentido, propomos dois modelos de acoplamento tipo *small-world* modificados, um considerando a intensidade da interação decaindo com a distância segundo uma lei de potência e outro com a probabilidade de conexão dependendo da distância.

3.4.3.1 *Small-World* com Interação Decaindo com a Distância

Um modelo de rede de mapas acoplados cujo o acoplamento é do tipo *small-world* e a interação decai segundo uma lei de potência pode ser escrito como

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta_i(\alpha)} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{f(u_n^{(j)})}{|j - i|^\alpha} A , \quad (3.15)$$

sendo A uma matriz $N \times N$ com elementos (a_{ij}) nulos ou unitários e

$$\eta_i(\alpha) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{a_{ij}}{|j - i|^\alpha} \quad (3.16)$$

o fator de normalização referente ao i -ésimo sítio da rede.

A equação (3.15) representa, na realidade, a forma geral de um acoplamento do tipo lei de potência. Desse modo, para especificar o modelo torna-se necessário definir a matriz de acoplamento (matriz A) uma vez que são os elementos a_{ij} dessa matriz que descrevem as conexões existentes na rede, ou seja, um elemento unitário ($a_{ij} = 1$) denota ligação entre o i -ésimo e j -ésimo sítios correspondentes enquanto que um elemento nulo ($a_{ij} = 0$) significa que não há conexão entre estes sítios. Considerando o modelo de Newman-Watts com $z = 2$ a matriz A é constituída por elementos nulos na diagonal principal ($a_{ii} = 0$) e elementos unitários nas duas diagonais paralelas subseqüentes a ela, sendo os demais elementos, nulos ou unitários, de acordo com a probabilidade de ligação de longo-alcance dada pela equação (3.13). Embora as redes do tipo *small-world* tenham sido bastante utilizadas no estudo de redes de mapas acoplados, o decaimento da interação com distância apresentado aqui é, ao que sabemos, uma consideração particular deste trabalho.

Respeitando as regras de acoplamento que estabelece o modelo podemos definir uma matriz de acoplamento constante ou variável. No modelo de rede de Newman-Watts, por exemplo, apenas os elementos relacionados às ligações de longo alcance podem apresentar alguma alteração ($0 \rightleftharpoons 1$) à medida que o sistema evolui. Neste trabalho, especificamente, assumiremos que a matriz acoplamento é dinâmica ($A^{(n)}$) e seus elementos variáveis são atualizados a cada iterada da rede .

A probabilidade P de ligações de longo-alcance representa um parâmetro na construção da matriz de acoplamento de redes do tipo *small-world*. Dependendo do valor de P as conexões podem ser restritas aos primeiros vizinhos ou também abarcar sítios distantes. Para $P = 0$, por exemplo, apenas interações de curto alcance (locais) estão presentes enquanto que para $P = 1$ o acoplamento se torna global. Considerando que as interações na rede seguem a equação (3.15), o acoplamento resultante para $P = 1$ será do tipo lei de potência usual. Valores intermediários da probabilidade, $P \in (0, 1)$, resultam em ligações locais e algumas (possíveis) ligações não-locais para cada sítio da rede. Uma configuração possível da distribuição das ligações do sítio $i = 1$ e o respectivo decaimento das interações com a distância para o modelo (3.15) com $N = 11$ é ilustrada na Figura (12).

Considerando o exposto na Figura (12) e admitindo que os demais sítios possuam

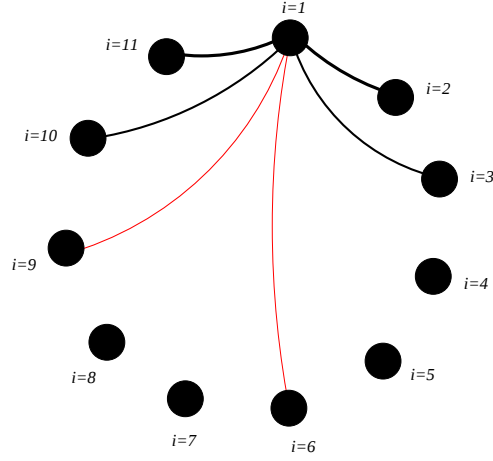


Figura 12: Exemplo da distribuição das ligações no modelo *small-world* com interação decaindo em uma lei de potência. A espessura das linhas é simbólica e conota a intensidade das interações da rede. As linhas vermelhas representam as ligações distribuídas (inseridas) segundo a probabilidade P .

apenas ligações locais com $z = 2$, a matriz acoplamento correspondente tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

onde os elementos em negrito referem-se aos acoplamentos ativados.

Podemos notar que a matriz (3.17) possui a forma simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$. As matrizes de acoplamento simétricas, tal como a exposta, estabelecem acoplamentos bidirecionais e, portanto, denotam interações mútuas entre os sítios acoplados. Embora em alguns modelos *small-world* não haja restrições quanto a forma da matriz A , em nosso estudo consideraremos apenas matrizes de acoplamento simétricas.

3.4.3.2 *Small-World* com Probabilidade de Ligação Decaindo com a Distância

Em uma rede as interações entre elementos distantes podem ser tão intensas quanto àsquelas entre elementos próximos, porém, a probabilidade de ocorrer uma interação entre vizinhos pode ser bem diferente (geralmente maior) daquela entre elementos distantes. Baseados nesta idéia, Raghavachari e Glazier [32] propuseram um modelo de rede no qual a probabilidade de ligação, entre cada par de sítio da rede, é calculada levando em consideração a distância relativa entre eles. Neste modelo, os sítios mais próximos têm maior probabilidade de conexão do que aqueles mais afastados.

Em conformidade com os trabalhos de Raghavachari e Glazier [32] e de Wagner e Stoop [46] podemos assumir que a probabilidade de ligação (acoplamento) entre o i -ésimo e o j -ésimo sítios da rede seja dada por

$$p_{ij} = |i - j|^{-\alpha} , \quad (3.18)$$

sendo α um parâmetro de escala positivo.

Em redes unidimensionais com condições de contorno periódicas, as ligações à esquerda e à direita são igualmente prováveis. Sendo assim, definimos uma variável $M = (N - 1)/2$ e reescrevemos a equação (3.18) como

$$p_{ij} = \begin{cases} |i - j|^{-\alpha} & \text{se } |i - j| \leq M \\ (N - |i - j|)^{-\alpha} & \text{se } |i - j| > M \end{cases} , \quad (3.19)$$

sendo N o número de sítios da rede.

A equação (3.19) nos permite construir uma matriz P com elementos p_{ij} . Esta matriz de probabilidades P constitui a base sobre a qual é determinada a matriz de acoplamento. Considerando, por exemplo, uma rede com 9 sítios e parâmetro $\alpha = 0,5$, a

matriz de probabilidades correspondente tem a forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 \\ 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 \\ 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 \\ 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 \\ 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 \\ 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 & 0,577 \\ 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 & 0,707 \\ 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 & 1,000 \\ 1,000 & 0,707 & 0,577 & 0,500 & 0,500 & 0,577 & 0,707 & 1,000 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como os elementos da matriz P dependem apenas de α e do tamanho da rede, a matriz de probabilidades é sempre constante. Além disso, ela também é simétrica, uma vez que na equação (3.18) considera-se o módulo da distância entre os pares de sítios. A partir desta matriz derivamos a matriz de acoplamento uma vez que cada elemento de P informa a probabilidade de ligação do par i - j de sítios na rede. Neste sentido, para construirmos a matriz A consideramos como condição

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho_j^{(n)} > p_{ij} \\ 1 & \text{se } \rho_j^{(n)} \leq p_{ij} \end{cases}, \quad (3.20)$$

sendo $\rho_j^{(n)}$ um número aleatório $[0, 1]$ e n um índice relacionado ao intervalo temporal.

A presença do índice n na condição (3.20) revela que a matriz de acoplamento não é constante, mas dinâmica, podendo mudar a cada iterada. Sendo assim, também inserimos o índice à matriz, isto é, escrevemos $A^{(n)}$. Para o exemplo em questão (rede com $N = 9$ e $\alpha = 0,5$), duas configurações possíveis da matriz de acoplamento são

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde os elementos em negrito referem-se aos sítios acoplados.

Definida a matriz de acoplamento, as variáveis de estado desta rede são atualizadas de acordo com a equação

$$u_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(u_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta_i} \sum_{j=1}^N f(u_n^{(j)})A^{(n)}, \quad (3.21)$$

sendo

$$\eta_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (3.22)$$

o fator de normalização referente ao i -ésimo sitio da rede.

Uma ilustração da forma de acoplamento *small-world* com probabilidade de ligação decaindo com a distância é exposta na Figura (13). Para uma melhor visualização representamos apenas as ligações referente ao sítio $i = 1$. As linhas contínuas indicam que as ligações locais estão sempre presentes enquanto que as linhas tracejadas informam que as tais conexões são apenas possíveis. Além disso, a espessura das linhas conota a magnitude da probabilidade de ligação entre os sítios conforme a distância que os separam.

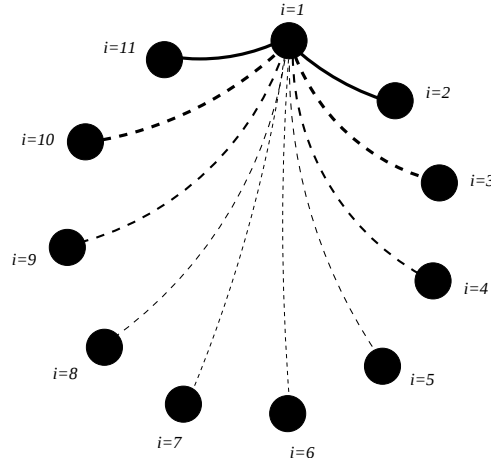


Figura 13: Representação das ligações no modelo small-world com probabilidade de ligação decaindo com a distância.

3.5 Redes de Mapas de Kaplan-Yorke Acoplados

Nosso propósito de acoplar mapas de Kaplan-Yorke fundamenta-se sobretudo na situação física de colisão entre as partículas em movimento num fluido. Embora tal interação seja desconsiderada ou bastante simplificada na maioria dos estudos sobre o

movimento de partículas brownianas, sabemos que durante uma colisão as partículas envolvidas acabam trocando energia e *momentum* entre si. Em nosso modelo cada partícula é representada por um mapa e evolui segundo as regras que definem o mesmo. Assim, para abarcar as várias possibilidades de interação presentes em um sistema composto por N partículas, vamos considerar as quatro formas de acoplamento-interação não-locais discutidas na seção anterior.

O mapa de Kaplan-Yorke, como vimos anteriormente, possui duas componentes ou variáveis de estado, sendo a variável x relacionada à evolução da perturbação do fluido (impulsos transmitidos) e y à velocidade das partículas envolventes. Como estamos interessados nas interações devido às colisões, propomos o acoplamento apenas entre as variáveis referentes à velocidade das partículas. Uma representação ilustrativa do modelo proposto é apresentada na Figura (14).

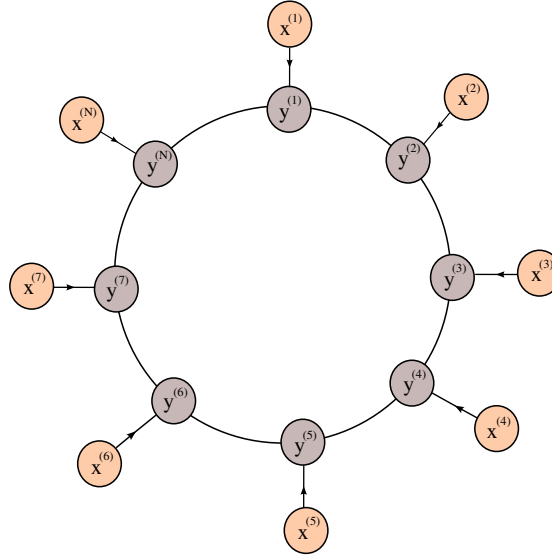


Figura 14: Representação do sistema de N mapas Kaplan-Yorke com variáveis $y^{(i)}$ acopladas localmente. As setas entre as variáveis $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$ indicam que apenas x influencia a dinâmica de y não ocorrendo o processo inverso.

Conforme mostramos na Figura (14) estamos assumindo que as variáveis $x^{(i)}$ evoluem de forma independente enquanto que as variáveis $y^{(i)}$ apresentam uma evolução interdependente. Admitindo uma representação genérica para o acoplamento das variáveis $y^{(i)}$ e considerando como dinâmica local o mapa (3.7), podemos expressar a regra de evolução do sistema proposto através da equação

$$F : \begin{cases} x_{n+1}^{(i)} = 1 - 2(x_n^{(i)})^2 \\ y_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon A^{(n)}(\alpha)}{\eta_i(\alpha)} f(x_n^{(j)}, y_n^{(j)}) \end{cases}, \quad (3.23)$$

sendo $f(x, y) = \lambda y + x$ a dinâmica local da variável y , ε e α os parâmetros dos acoplamentos, $\eta_i(\alpha)$ um fator de normalização e $A^{(n)}(\alpha)$ a matriz de acoplamento.

Na equação (3.23) procuramos abranger as quatro formas de acoplamento-interação estudadas, isto é, as duas formas do tipo lei de potência e as duas do tipo *small-world*. Ao utilizarmos o índice n em A , por exemplo, indicamos que a matriz acoplamento pode mudar com o tempo (acoplamento *small-world*) e considerando A dependente de α denotamos a variação nas interações em cada modelo, seja pelo decaimento da intensidade, seja pela distribuição da probabilidade de ligação. Para obtermos a forma de acoplamento específica de cada um dos modelos pretendidos podemos retomar a seção anterior e substituir u por y e $f(u)$ por $f(x, y)$ nas expressões que definem tais acoplamentos. Nos capítulos subsequentes realizaremos tal procedimento a fim de analisar a dinâmica dos modelos de forma individual.

Utilizando o modelo (3.23) com as formas de acoplamento específicas nós iremos considerar duas situações, dinâmica e física, distintas para o problema. Primeiramente atribuiremos a mesma condição inicial para todas as variáveis $x^{(i)}$ considerando, assim, uma perturbação homogênea para o sistema de partículas. Com esta consideração também reduzimos o número de equações necessárias à descrição do sistema de $2N$ para $(N + 1)$ equações, sendo N a quantidade de partículas do sistema. Num segundo momento as condições iniciais serão distribuídas de forma aleatória num intervalo $[-1, 1]$ e, neste caso, como a dinâmica em x é caótica e independente, teremos perturbações descorrelacionadas.

Para analisar o comportamento dinâmico do sistema (3.23) utilizaremos, sobretudo, ferramentas da Dinâmica não-linear, tais como, os expoentes de Lyapunov, a distância ao subespaço de sincronização e o parâmetro de ordem complexo. O significado destas ferramentas e as informações obtidas por meio delas serão abordadas nos próximos capítulos.

4 *Os Expoentes de Lyapunov*

Em alguns sistemas dinâmicos pequenas diferenças entre duas condições iniciais podem divergir com o tempo e proporcionar resultados completamente distintos um do outro. Quando este comportamento é evidenciado dizemos que o sistema é bastante sensível às condições iniciais e uma maneira de medirmos esta sensibilidade é pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Estes expoentes estão relacionados à razão de expansão ou contração de um pequeno volume do espaço de fases devido a dinâmica do sistema, ou seja, eles informam a taxa média de separação ou aproximação entre trajetórias iniciadas dentro deste volume.

Os expoentes de Lyapunov são geralmente utilizados para caracterizar a dinâmica de um sistema como caótica ou não-caótica. Além disso, eles também permitem determinar algumas propriedades interessantes dos sistemas como, por exemplo, a dimensão de Lyapunov e a entropia de Kolmogorov-Sinai [16, 26]. Neste capítulo apresentamos os principais conceitos concernentes aos expoentes de Lyapunov em sistemas dinâmicos de tempo discretos, o método de ortonormalização de Gram-Schmidt e as expressões matemáticas dos expoentes de Lyapunov das redes de mapas de Kaplan-Yorke discutidas anteriormente.

4.1 A Estabilidade dos Pontos Fixos e Periódicos

No segundo capítulo comentamos brevemente que a estabilidade de um ponto fixo x^* de um sistema dinâmico de tempo discreto $x_{n+1} \rightarrow f(x)$ pode ser investigada por meio da derivada da função de evolução do sistema naquele ponto. Dissemos, dentre outras coisas, que se o ponto é estável $|f'(x^*)| < 1$ e se ele é instável $|f'(x^*)| > 1$. Nesta seção vamos discutir mais detalhadamente o que isto significa, uma vez que a estabilidade dos pontos fixos nos dão informações importantes acerca da dinâmica do sistema. O comportamento assintótico das trajetórias do sistema no espaço de fases é influenciado pela presença e estabilidade dos pontos fixos [26].

Um ponto fixo instável de um sistema dinâmico pode ser imaginado como um pico de uma montanha e um ponto fixo estável como o vale subjacente. Abandonando uma esfera exatamente sobre o pico, ela tende a permanecer neste ponto até que algo a perturbe e a tire desta posição. Quando isto ocorre, a esfera inicia um movimento se afastando cada vez mais de sua posição inicial até atingir o vale. De fato, qualquer posição inicial na proximidade do pico resulta no afastamento da esfera em relação ao mesmo e, a cada variação, posições finais diferentes podem ser obtidas.

Os pontos fixos instáveis, tal como o pico da montanha, têm a propriedade de repelir qualquer ponto em sua vizinhança enquanto que os pontos fixos estáveis, semelhantemente ao vale, têm a propriedade de atrair todos os pontos vizinhos. Além disso, de maneira análoga ao comportamento da esfera, o estado de um sistema dinâmico também pode variar com a condição inicial ou alguma imprecisão (perturbação) dos dados. Cumpre destacar, no entanto, que a comparação entre a evolução de um sistema dinâmico com o movimento da esfera é apenas uma analogia, uma vez que os dois processos possuem naturezas distintas.

Atraindo ou repelindo, os pontos fixos de um sistema dinâmico determinam o comportamento das trajetórias próximas e, devido a estas características, eles são classificados como pontos fixos atratores ou pontos fixos repulsores. Mais precisamente, se f é um mapa em $\mathbb{R}$ e p é um ponto fixo de f (isto é, $f(p) = p$), o ponto p é denominado atrator se o mapeamento de pontos vizinhos, tal como $x = p + \delta$, resultar em pontos cada vez mais próximos de p . Se, ao contrário, a dinâmica do sistema afastar os pontos vizinhos, p é denominado ponto repulsor [26].

Para determinar se um ponto fixo é atrator ou repulsor dispomos basicamente de dois procedimentos: a análise gráfica das iteradas e a análise da estabilidade do ponto. A análise gráfica, no entanto, constitui mais uma demonstração do comportamento das trajetórias do que um procedimento criterioso, sendo utilizada sobretudo para provar a convergência ou a divergência ao ponto [47]. De forma geral, a caracterização de um ponto fixo como atrator ou repulsor é determinada pela estabilidade do ponto. Para um mapa f com um ponto fixo p , asseguramos que p é atrator se $|f'(p)| < 1$ e repulsor se $|f'(p)| > 1$. Por outro lado, se $|f'(p)| = 1$ o ponto pode ser ou atrator ou repulsor ou ambos. A demonstração matemática desta forma de classificação não será apresentada aqui, uma vez que ela pode ser vista em diversos livros elementares sobre sistemas dinâmicos [26, 47]. Contudo, um requisito necessário para utilizá-la é que o mapa seja contínuo naquele domínio.

Identificando os pontos fixos de um sistema e determinando sua natureza (atrator ou repulsor), obtemos informações sobre a dinâmica na proximidade destes pontos. Além disso, pela análise da estabilidade também é possível prever os estados mais prováveis ou característicos do sistema. Especificamente, um ponto fixo estável, sendo o estado final para a trajetória de muitas condições iniciais vizinhas, constitui um estado absorvente do sistema [26].

Por outro lado, dependendo do mapa e valores de parâmetro, a dinâmica pode não convergir para um único ponto, mas resultar em um comportamento oscilante entre dois ou vários pontos. Em outras palavras, o sucessivo mapeamento dos pontos pode formar uma órbita periódica no espaço de fases. Uma órbita periódica é basicamente um conjunto finito de pontos que se repetem após um número igual de iteradas, sendo o período da órbita definido pelo menor número de iteradas para um determinado ponto voltar a se repetir. Por exemplo, se $f(f(p)) = p$ mas $f(p) \neq p$, a órbita é dita de período 2, por outro lado, se também $f(p) = p$ a órbita é dita de período 1 (ponto fixo). De forma geral, uma órbita com um ponto periódico p é expressa como $f^k(p) = p$, sendo k um número inteiro que informa o período ou tamanho da órbita.

Semelhantemente à análise dos pontos fixos, a estabilidade de um ponto periódico pode ser determinada pela derivada do mapa, porém neste caso considera-se a função de mapeamento resultante de k iteradas, isto é, $f^k(p) = f(f(\dots(f(p))))$. Com isso, a análise da estabilidade de um ponto periódico diz respeito à estabilidade da órbita em geral. De fato, os k pontos de uma órbita k -periódica são, todos eles, pontos periódicos de f e um ponto fixo de f^k . Assim, para obter $f'^k(p)$, um procedimento bastante útil é a regra da cadeia. De acordo com esta regra $f'^k(p)$ pode ser escrita como o produto de k derivadas de f , por exemplo, supondo $k = 2$ temos, pela regra da cadeia, $f'^2(p) = f'(f(p))f'(p)$. Efetuada a derivada, se $f'^k(p) < 1$ a órbita é estável (atratora) enquanto que se $f'^k(p) > 1$ a órbita é instável (repulsora).

4.2 O Expoente de Lyapunov em Mapas Unidimensionais

Além de informações qualitativas a respeito da atração ou repulsão de pontos vizinhos, a análise da estabilidade por meio da derivada também fornece a razão de aproximação ou separação entre estes pontos à medida que o sistema evolui. Em estudos de sistemas dinâmicos discretos (mapas), uma informação essencial é a taxa média na

qual as trajetórias geradas pelo mapeamento se distanciam ou se aproximam quando as condições iniciais são variadas infinitesimalmente. Tal informação é dada pelo expoente de Lyapunov do sistema, o qual depende da estabilidade de todos os pontos da trajetória. Neste sentido como os pontos fixos e as órbitas periódicas representam trajetórias bem estabelecidas, a idéia do expoente de Lyapunov é melhor introduzida a partir destas dinâmicas.

Seja f um mapa unidimensional com um ponto fixo x^* e $f'(x^*) = a$. Se a for maior do que 1 qualquer ponto x na vizinhança de x^* será mapeado para pontos cada vez mais distantes de x^* em uma taxa de aproximadamente a por iterada do mapa, conseqüentemente após n iteradas do mapa a distância entre $f^n(x)$ e $f^n(x^*)$ terá aumentado em média a^n ou a por iteração. Se, ao invés de ponto fixo, x^* for um ponto k -periódico e $f'^k(x^*) = f'(x_k)f'(x_{k-1})\dots f'(x^*)$ for igual a A , sendo A um número maior do que 1, qualquer ponto próximo de x^* que não pertença a órbita se distanciará dele em uma razão de aproximadamente A em k iteradas do mapa, ou seja, $A^{1/k}$ por iterada. Esta razão de separação por iterada define o número de Lyapunov da órbita e o logaritmo natural desse valor é o expoente de Lyapunov correspondente.

Em órbitas não-periódicas o número e o expoente de Lyapunov também são obtidos pelo produto das derivadas em cada ponto da órbita. Porém, como neste caso não há repetição de pontos, para assegurar que a trajetória percorreu todo o atrator do mapa utiliza-se um grande número de iteradas, ou seja, assume-se $k = n \rightarrow \infty$. Podemos obter a expressão do expoente de Lyapunov considerando, como exemplo, um mapa $f(x)$ e um pequeno erro ou deslocamento $\varepsilon \ll 1$ a partir do ponto inicial x_0 . Para esta situação, após n iteradas do mapa, a distância entre o ponto x_0 e o ponto $x'_0 = x_0 + \varepsilon$ será

$$\begin{aligned} |x_1 - x'_1| &= |f(x_0) - f(x'_0)| = \frac{|f(x_0) - f(x'_0)|}{|x_0 - x'_0|} |x_0 - x'_0| \approx \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} \right| |x_0 - x'_0| \\ |x_2 - x'_2| &= |f(x_1) - f(x'_1)| = \frac{|f(x_1) - f(x'_1)|}{|x_1 - x'_1|} |x_1 - x'_1| \approx \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x_1} \right| \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} \right| |x_0 - x'_0| \\ &\vdots = \vdots \\ |x_n - x'_n| &= |f(x_n) - f(x'_n)| \approx \left| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{df}{dx} \Big|_{x_k} \right| |x_0 - x'_0|. \end{aligned}$$

Portanto, em cada iteração o coeficiente multiplicativo de separação entre as trajetórias ou número de Lyapunov L da órbita iniciada em x_0 será

$$L(x_0) = \left| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{df}{dx} \Big|_{x_k} \right|^{\frac{1}{n}},$$

ou independentemente do ponto inicial

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_0)| |f'(x_1)| \dots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.1)$$

Como o logaritmo natural do número de Lyapunov é o expoente de Lyapunov, tal expoente é dado por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(x_j)|, \quad (4.2)$$

caso o limite exista.

A equação (4.1) permite obter o número de Lyapunov de qualquer mapa unidimensional suave e a equação (4.2) define o expoente de Lyapunov do respectivo mapa. Se L for maior que a unidade e, portanto, $\lambda > 0$, qualquer ponto próximo à órbita se afastará dela em uma razão multiplicativa $L = e^\lambda$ a cada iterada do mapa. Por outro lado, se $L < 1$, o expoente λ será negativo e a trajetória dos pontos vizinhos se aproximará da órbita em questão, isto é, da órbita iniciada em x_0 . Portanto, o sinal do expoente de Lyapunov constitui um indicador da estabilidade da órbita e, como tal, serve para caracterizá-la como caótica ou não caótica [26]. Expoentes de Lyapunov positivos indicam divergência exponencial de trajetórias vizinhas e, portanto, denotam grande sensibilidade às condições iniciais (caos). Valores negativos, por outro lado, indicam um comportamento convergente seja para um ponto fixo estável seja para uma órbita periódica. Por fim, valores nulos podem denotar quase-periodicidade ou pontos de bifurcações na trajetória.

Na Figura (15) ilustramos o atrator e o expoente de Lyapunov do mapa logístico $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ pela variação do parâmetro de controle μ . A disposição das ilustrações visa demonstrar a relação entre os expoentes de Lyapunov e o comportamento dinâmico do sistema, isto é, a mudança do comportamento assintótico e a respectiva mudança de sinal do expoente. Para o valor de parâmetro de maior interesse nesta dissertação, isto é, para $\mu = 2$, observamos que $\lambda = 0,693$, o que significa um dobramento da distância entre pontos vizinhos a cada iterada do mapa.

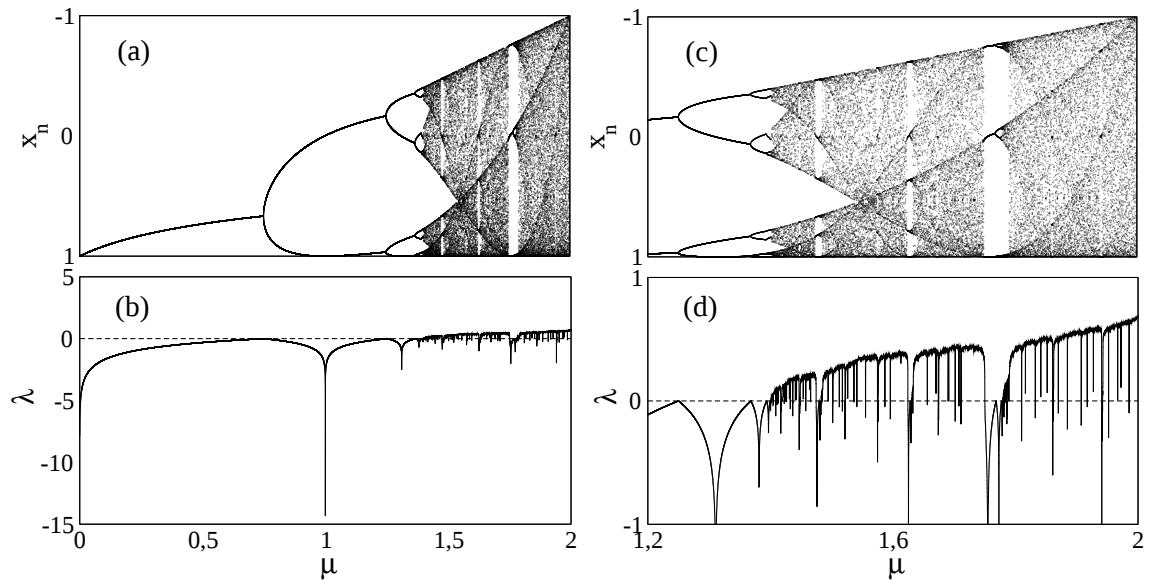


Figura 15: (a) Diagrama de bifurcação do mapa logístico; (b) Variação do expoente de Lyapunov com o parâmetro de controle do mapa; (c) ampliação do atrator para o intervalo para $\mu > 1,2$ e (d) variação do expoente no intervalo reduzido. Consideramos 500 iteradas do mapa e descartamos outras 1000 de transiente para cada valor do parâmetro de controle.

4.3 Os Expoentes de Lyapunov em Mapas Multidimensionais

Em mapas multidimensionais um conjunto de condições iniciais próximas pode evoluir de forma diferente em direções diferentes do espaço de fases. Por conseguinte, cada órbita gerada por um mapa em $\mathbb{R}^m$ suscita m expoentes de Lyapunov, os quais expressam a razão de separação de um ponto da órbita em relação a cada direção ortogonal definida pela dinâmica do mapa. Tais direções são estabelecidas e ordenadas conforme a magnitude da variação dos estados devido ao mapeamento dos pontos, a primeira delas corresponde a direção cuja a variação é maior, a segunda é a de maior variação após a primeira e ortogonal a ela, a terceira e todas as outras são determinadas, cada qual, respeitando a magnitude da variação das variáveis de estado e a ortogonalidade em relação às direções já definidas [26]. Assim, dado um pequeno volume de pontos no espaço de fase, os expoentes de Lyapunov informam a variação (contração ou expansão) deste volume em direções ortogonais específicas.

Na Figura (16) representamos a evolução de um disco de condições iniciais pela aplicação de um mapa bidimensional. A configuração dos pontos após n iteradas adquire a forma de uma elipse de raios $r_1 = e^{n\lambda_1} dr$ e $r_2 = e^{n\lambda_2} dr$, onde λ_1 e λ_2 correspondem aos expoentes de Lyapunov do mapa. Tais expoentes, como podemos observar, denotam o

fator de crescimento e encolhimento dos raios (eixos) do disco nas direções ortogonais com maior variação. Neste exemplo figurativo, como r_1 aumentou e r_2 diminuiu, inferimos que λ_1 é positivo e λ_2 é negativo. Além disso, como o volume total é preservado podemos dizer que o suposto mapa é conservativo.

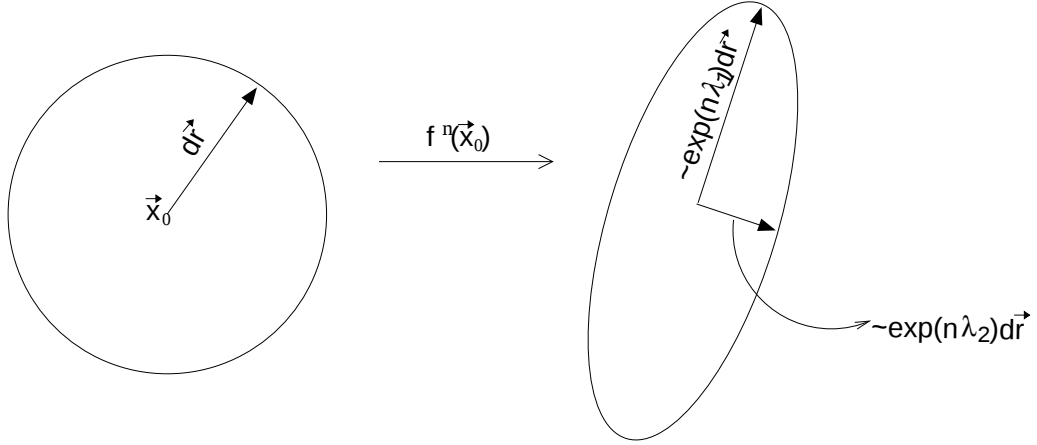


Figura 16: Representação da evolução de um disco infinitesimal do espaço de fase após n aplicações do mapa f , sendo x_0 o ponto inicial da órbita fiducial, dr o raio do disco ou deslocamento infinitesimal do ponto inicial e λ_i o i -ésimo expoente de Lyapunov.

Para mapas de dimensões $m \geq 3$ o disco da Figura (16) é convenientemente substituído por uma esfera (hiperesfera) de raio dr centrada em um ponto $\vec{r}_0$. Os eixos desta esfera assim como o eixos do disco ilustrado podem ser considerados como deslocamentos infinitesimais em relação ao ponto $\vec{r}_0$ segundo vetores tangentes $\vec{r}^{(i)}$ [16]. Assim, podemos descrever a evolução dos vetores tangentes (eixos da esfera) por meio da equação

$$\vec{r}_{n+1}^{(i)} = DF^n(\vec{r}_0) \vec{r}_n^{(i)}, \quad (4.3)$$

sendo $\vec{r}^{(i)}$ o vetor tangente associado ao i -ésimo eixo da esfera e DF^n a derivada do mapa F na n -ésima iterada.

A equação (4.3) estabelece a evolução do vetor $\vec{r}^{(i)}$ em relação ao ponto $\vec{r}_0$ de acordo com a dinâmica do mapa. Podemos expressar $DF^n(\vec{r}_0)$ como uma matriz (matriz Jacobiana), isto é,

$$DF^{(n)} \equiv J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n^{(N)}} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Escrevendo $DF^n(\vec{r}_0)$ em forma matricial a equação (4.3) pode ser analisada como um

problema de autovalores e autovetores. Com isso, vemos que a razão de variação da esfera em cada direção ortogonal está associada a um autovalor da matriz Jacobiana $J_n(\vec{r}_0)$. Portanto, podemos determinar os números e expoentes de Lyapunov a partir dos autovalores da Jacobiana $J_n(\vec{r}_0)$.

Como os expoentes de Lyapunov dependem de todos os pontos da órbita, os autovalores da Jacobiana devem ser calculados considerando o limite $n \rightarrow \infty$. Neste caso, para obter a matriz $J_n(\vec{r}_0)$ é conveniente a utilizar a regra da cadeia. De acordo com esta regra, $J_n(\vec{r}_0)$ corresponde ao produto de n matrizes Jacobianas, cada uma definida em um ponto da órbita, ou seja,

$$DF^n(\vec{r}_0) = DF(\vec{r}_{n-1})DF(\vec{r}_{n-2}) \dots DF(\vec{r}_0). \quad (4.5)$$

Desta maneira, podemos escrever a equação dos expoentes de Lyapunov para mapas em $\mathbb{R}^m$ como

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Gamma^{(k)}| \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m; \quad (4.6)$$

onde $\Gamma^{(k)}$ é o k -ésimo autovalor da matriz $M = \prod_{l=0}^{n-1} J(\vec{r}_l)$.

A equação (4.6) constitui a expressão geral dos expoentes de Lyapunov de um sistema e se reduz a equação (4.2) no caso de mapas unidimensionais. Como um exemplo de aplicação desta equação vamos calcular os expoentes de Lyapunov do mapa de Kaplan-Yorke

$$F : \begin{cases} x_{n+1} = 1 - 2(x_n^{(i)})^2 \\ y_{n+1} = \lambda y_n + x_n \end{cases}. \quad (4.7)$$

com $\lambda \in [0, 1)$.

Para evitar uma possível confusão quanto a letra λ , utilizada para denotar tanto os expoentes de Lyapunov como o parâmetro de controle do mapa (4.7), empregaremos daqui para a frente a letra Λ para representar os expoentes de Lyapunov. A matriz Jacobiana do referido mapa pode ser escrita como

$$J_n \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_n & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Embora esta matriz não seja constante, sua forma triangular nos permite obter um dos expoentes de forma direta, a saber, $\Lambda_2 = \ln \lambda$. Isto porque, de forma geral, uma

matriz triangular possui autovalores iguais aos elementos da diagonal principal [48] e, neste caso, o produto de n matrizes leva a um autovalor $\Gamma^{(2)} = \lambda^n$, o qual aplicado à equação (4.6) resulta no expoente mencionado. Por outro lado, como o primeiro elemento da matriz J_n evolui com a dinâmica do mapa, $\Gamma^{(1)}$ é calculado considerando cada valor de x , ou seja,

$$\Gamma^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{l=0}^{n-1} (-4x_l). \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.6) obtemos a expressão do expoente de Lyapunov do mapa logístico com um valor de parâmetro $\mu = 2$. O valor dos expoentes deste mapa para cada $\mu \in [0, 2]$ foi exposto na Figura (15). Especificamente, para $\mu = 2$ vimos que $\Lambda = \ln 2$ e, portanto, os dois expoentes de Lyapunov do mapa (4.7) são:

$$\Lambda_1 = \ln 2 > 0$$

$$\Lambda_2 = \ln \lambda \leq 0$$

para $0 < \lambda < 1$.

Com base nestes expoentes podemos inferir que a evolução de um disco de condições iniciais pela aplicação do mapa (4.7) assemelha-se ao exposto na Figura (16), isto é, com um alongamento do raio na direção instável (direção x) e um encolhimento na direção estável (direção y). A área total do disco será preservada se $\lambda = 0,5$, para valores menores ela irá diminuir enquanto que para valores maiores ela tende a aumentar com o tempo.

4.4 A Aproximação Numérica dos Expoentes de Lyapunov

Para a maioria dos mapas multidimensionais e redes de mapas acoplados a forma da matriz Jacobiana não possibilita a determinação dos autovalores de um modo direto. Em tais situações os expoentes de Lyapunov são obtidos sobretudo por meio de técnicas de aproximação numérica. Dois procedimentos bastante empregados com este intuito são: a redução da Jacobiana à forma superior de Hesenberg [39, 49] e o método de ortonormalização de Gram-Schmidt [26]. Nesta dissertação utilizamos basicamente o segundo método.

4.4.1 O Método de Ortogonalização de Gram-Schmidt

O procedimento de ortogonalização de vetores denominado método de Gram-Schmidt fundamenta-se sobretudo na definição de produto interno. Ele recebe como dados de entrada um conjunto finito de vetores linearmente independentes, subtrai as projeções de um vetor sobre o outro e retorna o conjunto de vetores ortogonais que gera aquele subespaço, ou seja, ele apresenta a base sobre a qual os vetores de entrada são formados.

Dispondo de um conjunto de vetores linearmente independentes o primeiro procedimento da ortogonalização consiste em determinar os coeficientes de projeção de cada par de vetores desse conjunto. Este coeficiente é obtido basicamente por meio de uma operação de produto interno. O produto interno em um espaço vetorial E é uma função $E.E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa um número real para cada par de vetores deste subespaço [48]. Na Figura (17) representamos dois vetores linearmente independentes e a projeção do vetor $\vec{y}$ sobre o vetor $\vec{x}$.

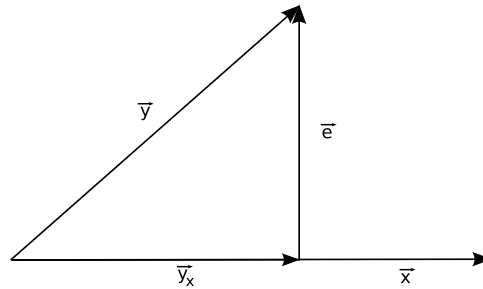


Figura 17: Representação da projeção de vetores

A componente do vetor $\vec{y}$ que se projeta o vetor $\vec{x}$ pode ser escrita como

$$\vec{y}_x = \alpha \vec{x}, \quad (4.10)$$

onde α é o coeficiente de projeção.

Para determinar α em termos dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ expressamos o vetor $\vec{e}$ como a soma dos vetores $\vec{y}$ e $\vec{y}_x$, a saber,

$$\vec{e} = \vec{y} + (-\vec{y}_x). \quad (4.11)$$

Além disso, como $\vec{e}$ e $\vec{x}$ são ortogonais entre si, temos

$$\vec{e} \cdot \vec{x} = 0. \quad (4.12)$$

Então, utilizando conjuntamente as equações (4.10), (4.11) e (4.12), obtemos

$$\alpha = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}, \quad (4.13)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma do vetor.

A equação (4.13) possibilita determinar as projeções entre quaisquer pares de vetores e constitui a base do método de Gram-Schmidt. Considerando um conjunto de N vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N\}$ a ortonormalização *via* Gram-Schmidt é realizada por meio dos seguintes passos:

1. Escolhe-se um vetor do conjunto como o primeiro vetor da base ortogonal, por exemplo,

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1;$$

2. Determina-se o segundo vetor da base tomando outro vetor do conjunto e subtraindo a projeção dele sobre o vetor $\vec{u}_1$, por exemplo,

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \alpha_{2,1} \vec{u}_1 \equiv \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1;$$

3. Calcula-se o terceiro e os demais vetores $\vec{u}_i$ escolhendo, a cada momento, um vetor do conjunto e subtraindo a projeção deste sobre os vetores já definidos, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{v}_i - \alpha_{i,1} \vec{u}_1 - \alpha_{i,2} \vec{u}_2 - \dots - \alpha_{i,N-1} \vec{u}_{N-1} \\ &= \vec{v}_i - \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 - \dots - \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{u}_{N-1}}{\|\vec{u}_{N-1}\|^2} \vec{u}_{N-1}; \end{aligned}$$

4. Após determinar todos os vetores $\vec{u}_i$, eles são normalizados:

$$\vec{w}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}. \quad (4.14)$$

O conjunto de vetores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N\}$ representa uma base ortogonal do conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N\}$ enquanto que os vetores $\vec{w}_i$, com $i = 1, 2, \dots, N$, constituem a base ortonormal do espaço vetorial correspondente. De fato, para qualquer espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno, podemos obter uma base ortonormal pelo método de Gram-Schmidt [48].

4.4.2 Os Expoentes de Lyapunov *via* Gram-Schmidt

A aproximação numérica dos expoentes de Lyapunov pelo método de Gram-Schmidt constitui um modo indireto de determinar a evolução dos eixos principais de uma esfera (hiperesfera) de estados iniciais [17, 26]. Como ponto de partida considera-se uma base ortonormal $\{\vec{w}_1^{(0)}, \vec{w}_2^{(0)}, \dots, \vec{w}_m^{(0)}\}$ em $\mathbb{R}^m$, sendo m a dimensão do sistema (mapa ou rede de mapas). Os vetores desta base podem ser definidos arbitrariamente, mas de forma geral utilizam-se os vetores

$$\begin{aligned}\vec{w}_1^{(0)} &= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{w}_2^{(0)} &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \vec{w}_m^{(0)} &= (0, \dots, 0, 1).\end{aligned}$$

Definida a base ortogonal inicial, o próximo passo é calcular os vetores $\vec{z}_i$, os quais estão relacionados à evolução da esfera de condições iniciais. Estes vetores são obtidos pela equação

$$\vec{z}_i = J(\vec{r}_0) \vec{w}_i^{(0)}, \quad (4.15)$$

onde $J(\vec{r}_0)$ é a matriz Jacobiana do sistema no ponto $\vec{r}_0$.

Podemos notar que a equação (4.15) é equivalente a equação (4.3) e que cada vetor $\vec{z}_i$ encontra-se em uma direção tangente ao ponto em que a Jacobiana é definida. Estes vetores estabelecem a distância entre a superfície e centro da esfera (elipsóide), entretanto, eles não são necessariamente ortogonais entre si e, deste modo, utiliza-se o método de Gram-Schmidt afim de obter os respectivos vetores da base ortogonal, os quais correspondem aos eixos principais da elipsóide gerada a partir da esfera.

O procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt não altera o volume do elipsóide estabelecido pelos vetores $\vec{z}_i$ [17, 26]. Além disso, como vimos anteriormente, ele não afeta a direção do primeiro vetor da base ($\vec{u}_1 = \vec{z}_1$), conseqüentemente este vetor representa a direção do espaço tangente com maior distanciamento entre o centro e a superfície do elipsóide. O vetor $\vec{u}_2$, por outro lado, sendo formado pelas componentes de $\vec{z}_2$ que são perpendiculares a $\vec{u}_1$, corresponde ao eixo com maior comprimento depois do primeiro. Da mesma forma, os demais vetores $\vec{u}_i$, mantendo apenas as componentes ortogonais aos eixos já definidos, apresentam comprimentos cada vez menores.

Obtido o conjunto de vetores ortogonais $\vec{u}_i$ os vetores da base são redefinidos fazendo $\vec{w}_i^{(1)} = \vec{u}_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Utilizando esta nova base calcula-se por meio da equação (4.15) o novo conjunto de vetores $\vec{z}_i$, porém considerando agora $J(\vec{r}_1)$, ou seja, a Jacobiana é definida no próximo ponto da órbita. Os novos vetores ($\vec{z}_i$) são novamente ortogonalizados via Gram-Schmidt resultando na base $\vec{w}_i^{(2)}$. Repetindo este procedimento para os n pontos da órbita obtemos $\{\vec{w}_1^{(n)}, \vec{w}_2^{(n)}, \dots, \vec{w}_m^{(n)}\}$, sendo a magnitude destes vetores equivalente aos eixos principais da elipsóide [26]. Logo, os números de Lyapunov do sistema são aproximados por $|\vec{w}_i^{(n)}|^{1/n}$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$, e os expoentes de Lyapunov correspondem ao logaritmo natural destes números.

A aproximação numérica dos expoentes de Lyapunov via Gram-Schmidt também pode ser realizada sem o conhecimento *a priori* dos números de Lyapunov. Neste caso, considera-se a mesma seqüência de procedimentos, porém com a normalização da base a cada atualização. De fato, fazendo $\vec{w}_i^{(n+1)} = \vec{u}_i^{(n)} / |\vec{u}_i^{(n)}|$ para cada n , o módulo do vetor $\vec{u}_i^{(n)}$ será equivalente às variações dos eixos principais da esfera por iterada do mapa. Logo, tomando a média do logaritmo natural destas variações obtemos os respectivos expoentes de Lyapunov, ou seja,

$$\Lambda_i = \frac{\ln |\vec{u}_i^{(n)}| + \dots + \ln |\vec{u}_i^{(1)}|}{n}. \quad (4.16)$$

Neste procedimento, para obter uma aproximação precisa e ao mesmo tempo em acordo com a definição dos expoentes de Lyapunov, é necessário considerar um número suficientemente grande de iteradas. De forma geral, os expoentes obtidos pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt apresentam excelente concordância com aqueles aproximados por outras técnicas numéricas e analíticas [17, 50].

4.5 O Espectro de Lyapunov de Redes de Mapas de Kaplan-Yorke Acoplados

Para uma rede de mapas acoplados a dimensão do espaço de fases depende igualmente do número de elementos da rede e da quantidade de variáveis de cada mapa. Assim, o estado de um sistema com N mapas acoplados é representado em um espaço de fases $(N \times m)$ dimensional, sendo m a dimensão do mapa isolado. A estabilidade do sistema (rede), neste caso, é caracterizada por um espectro de expoentes de Lyapunov, cada um deles associado a uma dimensão do espaço. Dependendo do acoplamento empregado, tais expoentes podem ser determinados de forma analítica e/ou por meio de técnicas de apro-

ximação numérica. Das quatro redes de mapas Kaplan-Yorke propostas, para três delas obtemos expressões analíticas para os expoentes de Lyapunov.

4.5.1 Os Expoentes de Lyapunov nos Acoplamentos do Tipo Lei de Potência

De acordo com a equação (3.10) a dinâmica de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke com as variáveis $y^{(i)}$ acopladas e variáveis $x^{(i)}$ livres é dada por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= 1 - 2(x_n^{(i)})^2, \\ y_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{f(x_n^{(i-j)}, y_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)}, y_n^{(i+j)})}{j^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde ε é a intensidade do acoplamento, α o parâmetro de alcance, $\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^M j^{-\alpha}$ um fator de normalização, $f(x, y) = \lambda y + x$ a dinâmica local e $M = (N - 1)/2$, sendo N o número de sítios da rede.

O espaço de fases de uma rede com N mapas de Kaplan-Yorke possui $2N$ dimensões, sendo N dimensões relacionadas à dinâmica em x e N à dinâmica em y . A estabilidade da rede, neste caso, é caracterizada por um espectro com $2N$ expoentes de Lyapunov, os quais informam a taxa de separação entre as trajetórias em relação às $2N$ direções ortogonais do espaço de fases. Entretanto, se considerarmos $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(N)} = x_0$, reduzimos o número de graus de liberdade do sistema e, conseqüentemente, o número de expoentes de Lyapunov. Neste caso particular teremos $N + 1$ expoentes e a matriz Jacobiana pode ser escrita como

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n^{(1)}} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n^{(N)}} \\ \frac{\partial y_{n+1}^{(1)}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}^{(1)}}{\partial y_n^{(1)}} & \frac{\partial y_{n+1}^{(1)}}{\partial y_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial y_{n+1}^{(1)}}{\partial y_n^{(N)}} \\ \frac{\partial y_{n+1}^{(2)}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}^{(2)}}{\partial y_n^{(1)}} & \frac{\partial y_{n+1}^{(2)}}{\partial y_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial y_{n+1}^{(2)}}{\partial y_n^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n+1}^{(N)}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}^{(N)}}{\partial y_n^{(1)}} & \frac{\partial y_{n+1}^{(N)}}{\partial y_n^{(2)}} & \dots & \frac{\partial y_{n+1}^{(N)}}{\partial y_n^{(N)}} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Assim, considerando a dinâmica definida pela equação (4.17) e condições de con-

torno periódicas para as variáveis y , a Jacobiana desta rede adquire a forma

$$J_n = \begin{pmatrix} -4x_n^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & \frac{\xi}{2^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{(M-1)^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{1^\alpha} \\ \vdots & \frac{\xi}{1^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\xi}{2^\alpha} \\ \vdots & \frac{\xi}{2^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\xi}{3^\alpha} \\ \vdots & \frac{\xi}{3^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \frac{\xi}{2^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{(M-1)^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

sendo $\xi = \frac{\varepsilon\lambda}{\eta(\alpha)}$ e $\zeta = (1 - \varepsilon)\lambda$.

Por uma questão de simplificação podemos representar a matriz J_n como uma combinação de 4 submatrizes ou blocos, isto é,

$$J_n = \begin{pmatrix} A_{11}^{(n)} & A_{12}^{(n)} \\ A_{21}^{(n)} & A_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

sendo

$$A_{11}^{(n)} = \begin{pmatrix} -4x_n^2 \end{pmatrix}, \quad A_{12}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$A_{22}^{(n)} = \begin{pmatrix} \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & \frac{\xi}{2^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{(M-1)^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{1^\alpha} \\ \frac{\xi}{1^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\xi}{2^\alpha} \\ \frac{\xi}{2^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\xi}{3^\alpha} \\ \frac{\xi}{3^\alpha} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\xi}{1^\alpha} & \frac{\xi}{2^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{M^\alpha} & \frac{\xi}{(M-1)^\alpha} & \cdots & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta \end{pmatrix}.$$

Como $A_{12}^{(n)}$ é uma matriz com elementos nulos, a Jacobiana na forma (4.20) cons-

titui uma matriz bloco triangular e, desta maneira, o cálculo dos autovalores é bastante simplificado, pois o determinante de uma matriz bloco triangular é dado pelo produto dos determinantes dos blocos da diagonal [48]. Neste caso, $\text{Det}(J_n - I\Gamma) = \text{Det}(A_{11}^{(n)} - I\Gamma)\text{Det}(A_{22}^{(n)} - I\Gamma)$, sendo I a matriz identidade e Γ os autovalores.

Uma vez que a matriz $A_{11}^{(n)}$ tem apenas um elemento, seu autovalor é o próprio elemento, porém como este elemento muda a cada iterada do mapa considera-se como em (4.9) o produto dos x_n para cada n . O bloco $A_{22}^{(n)}$, por outro lado, possui todos os elementos constantes e, além disso, apresenta a forma de uma matriz circulante. Uma matriz circulante é uma matriz cujos elementos de cada linha são iguais aos elementos da linha subsequente com o deslocamento cíclico de uma coluna, isto é,

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-3} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

As matrizes circulantes possuem uma singularidade em relação ao espectro de autovalores [51], a saber, os N autovalores de uma matriz circulante $N \times N$ são dados por

$$\Gamma_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \exp\left(\frac{-2\pi i m k}{N}\right), \quad (4.22)$$

sendo c_k o k -ésimo elemento da primeira linha, i um número complexo e $m = 1, 2, \dots, N$ o índice do autovalor correspondente.

Então, utilizando a propriedade (4.22) para a matriz bloco A_{22} , obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= \zeta + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{-2\pi i m}{N}\right) + \frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{-4\pi i m}{N}\right) + \cdots + \frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{-2\pi i m(N-2)}{N}\right) \\ &\quad + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{-2\pi i m(N-1)}{N}\right), \\ \Gamma_m &= \zeta + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{-2\pi i m}{N}\right) + \frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{-4\pi i m}{N}\right) + \cdots + \frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{4\pi i m}{N}\right) \exp(-2\pi i m) \\ &\quad + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{2\pi i m}{N}\right) \exp(-2\pi i m), \end{aligned}$$

e, considerando a relação de Euler $\exp(-i\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$, ficamos com

$$\begin{aligned}\Gamma_m &= \zeta + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{-2\pi im}{N}\right) + \frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{-4\pi im}{N}\right) + \cdots + [\cos(2\pi m) - i\sin(2\pi m)] \\ &\quad \times \left[\frac{\xi}{2^\alpha} \exp\left(\frac{4\pi im}{N}\right) + \frac{\xi}{1^\alpha} \exp\left(\frac{2\pi im}{N}\right) \right] \\ \Gamma_m &= \zeta + 2\xi \left[\frac{1}{1^\alpha} \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) + \frac{1}{2^\alpha} \cos\left(\frac{4\pi m}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{M^\alpha} \cos\left(\frac{2\pi M}{N}\right) \right],\end{aligned}$$

sendo $M = (N - 1)/2$.

Em termos dos parâmetros ε e λ os autovalores referentes à matriz bloco A_{22} serão

$$\Gamma_m = \lambda \left[(1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{j^\alpha} \cos\left(\frac{2\pi jm}{N}\right) \right], \quad (4.23)$$

com $m = 1, 2, \dots, N$.

Conseqüentemente os $N + 1$ expoentes de Lyapunov da rede (4.17) serão

$$\Lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{l=0}^n (-4x_l) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln |-4x_0| + \cdots + \ln |-4x_n|), \quad (4.24)$$

$$\Lambda_k = \ln |\Gamma_k| = \ln |\lambda| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(2\pi kj/N)}{j^\alpha} \right|, \quad (4.25)$$

para $k = 1, 2, \dots, N$. Em ordem de magnitude temos

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{l=0}^n (-4x_l) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln |-4x_0| + \cdots + \ln |-4x_n|), \\ \Lambda_1 &= \ln |\Gamma_N| = \ln |\lambda|, \\ \Lambda_2 = \Lambda_3 &= \ln \Gamma_1 = \ln \Gamma_{N-1} = \ln |\lambda| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(2\pi j/N)}{j^\alpha} \right|, \\ \vdots &= \vdots, \\ \Lambda_{N-2} = \Lambda_{N-1} &= \ln \Gamma_{M-1} = \ln \Gamma_{M+1} = \ln |\lambda| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(\pi j/N)}{j^\alpha} \right|, \\ \Lambda_N &= \ln \Gamma_M = \ln |\lambda| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(\pi j/2N)}{j^\alpha} \right|.\end{aligned}$$

Como o parâmetro λ é menor que a unidade, independentemente dos valores dos parâmetros ε e α , a rede terá N expoentes negativos e um expoente positivo. O expoente positivo é dado pela dinâmica em x do mapa, a qual é governada pelo mapa

logístico com parâmetro de controle $\mu = 2$. Os N expoentes negativos, por outro lado, estão relacionados à dinâmica em y e, como o maior expoente é $\ln \lambda$ e $\lambda \in (0, 1)$, todos eles serão negativos. No entanto, se considerarmos $x_0^{(1)} \neq x_0^{(2)} \neq \dots \neq x_0^{(N)}$ mantendo as variáveis x desacopladas, a matriz bloco A_{11} será diagonal e teremos N expoentes positivos e N expoentes negativos. Para demonstrar esta situação vamos considerar o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico às variáveis $y^{(i)}$ e condições iniciais distintas às variáveis $x^{(i)}$. Neste caso a dinâmica da rede de N mapas de Kaplan-Yorke adquire a forma

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= 1 - 2(x_n^{(i)})^2, \\ y_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{m=1}^M \frac{f(x_n^{(i \pm j_q(m))}, y_n^{(i \pm j_q(m))})}{[j_q(m)]^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$. Sendo $\eta(\alpha) = \sum_{m=1}^M [j_q(m)]^{-\alpha}$ e $j_q(m) = q^m - 1$.

A matriz Jacobiana deste sistema também pode ser expressa na forma bloco triangular e, com isso, obtemos os autovalores a partir dos blocos diagonais. Considerando, como exemplo, uma rede com 8 sítios ($q = 2, M = 2$), os blocos diagonais da Jacobiana serão

$$A_{11} = -4 \begin{pmatrix} x_n^{(1)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_n^{(2)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_n^{(3)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_n^{(4)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x_n^{(5)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x_n^{(6)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x_n^{(7)} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x_n^{(8)} \end{pmatrix}$$

e

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} \\ \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} \\ \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} \\ \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta & \frac{\xi}{1^\alpha} \\ \frac{\xi}{1^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{3^\alpha} & 0 & \frac{\xi}{1^\alpha} & \zeta \end{pmatrix},$$

sendo $\xi = \frac{\varepsilon \lambda}{\eta(\alpha)}$ e $\zeta = (1 - \varepsilon)\lambda$.

A forma diagonal da matriz A_{11} e a forma circulante da matriz A_{22} independem do tamanho da rede e, portanto, o espectro de expoentes de Lyapunov da rede (4.26) com N sítios e parâmetros q e M arbitrários será do por

$$\Lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{l=0}^n (-4x_l^{(i)}) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\ln |-4x_0^{(i)}| + \cdots + \ln |-4x_n^{(i)}| \right), \quad (4.27)$$

$$\Lambda_{N+i} = \ln |\lambda| + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(q^j - 1)^\alpha} \cos \left(\frac{\pi i (q^j - 1)}{q^M} \right) \right|, \quad (4.28)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Conforme podemos verificar nas equações (4.27) e (4.28) a rede possui, neste caso, N expoentes positivos e N expoentes negativos. Os expoentes positivos são todos iguais, enquanto que os expoentes negativos dependem dos parâmetros λ , ε , α e também do tamanho da rede. Diferentemente da forma usual do acoplamento do tipo lei de potência, nesta os expoentes relacionados à dinâmica em y não podem ser ordenados antes de definir o tamanho da rede. Na referência [50], por exemplo, mostramos como o segundo maior expoente varia com o tamanho da rede para um sistema com N mapas logísticos acoplados.

Observando a equação (4.28) verificamos que ela é semelhante à equação (4.25). Na realidade ambas as expressões estão relacionadas pela transformação $j \rightarrow q^j - 1$, a mesma utilizada para obter o acoplamento na forma logarítmica a partir da forma usual [14, 50]. A equação (4.25), em particular, é bastante conhecida, tendo sido derivada primeiramente por Anteneodo e colaboradores [43] considerando um procedimento diferente do exposto.

4.5.2 Os Expoentes de Lyapunov nos Acoplamentos do Tipo *Small-World*

Em redes do tipo *small-world* os expoentes de Lyapunov são geralmente obtidos por meio de técnicas de aproximações numéricas. De fato, a distribuição das conexões não-locais de acordo com uma regra de probabilidade torna difícil obter os autovalores da matriz Jacobiana destes sistemas. Além disso, para alguns modelos de redes as conexões não-locais são redistribuídas à medida que o sistema evolui, o que *a priori* dificulta ainda mais uma abordagem analítica. No entanto, observamos que para o acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão decaindo com a distância, a redistribuição das conexões sugere um tratamento estatístico para o cálculo dos expoentes de Lyapunov do

sistema.

A dinâmica da rede de mapas de Kaplan-Yorke com variáveis y acopladas segundo a equação (3.21) é dada por

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= 1 - 2(x_n^{(i)})^2 \\ y_{n+1}^{(i)} &= (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta_i} \sum_{j \neq i}^N f(x_n^{(j)}, y_n^{(j)}) A^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

sendo $x^{(i)}$ e $y^{(i)}$ as variáveis de estado, n o índice temporal, ε o parâmetro de acoplamento, $f(x, y)$ a dinâmica local, $\eta_i \sum_{j=1}^N a_{ij}$ o fator de normalização e $A^{(n)}$ a matriz de acoplamento.

A matriz Jacobiana desta rede apresenta a forma bloco triangular, sendo o bloco $A_{11}^{(n)}$ uma matriz diagonal e o bloco $A_{22}^{(n)}$ uma matriz estocástica. Os expoentes de Lyapunov relacionados aos autovalores do primeiro bloco são todos iguais ao expoente do mapa logístico (dinâmica em x) enquanto que os autovalores e os expoentes do bloco $A_{22}^{(n)}$ constituem uma incógnita, uma vez que os elementos deste bloco, com exceção da diagonal principal, são determinados apenas durante as iterações pois estão diretamente relacionados aos elementos da matriz de acoplamento.

Nesta rede, *small-world* com a probabilidade de conexão decaindo com a distância, os elementos da matriz de acoplamento são determinados a cada iteração tomando um número aleatório $\rho \in [0, 1]$ para cada par $i - j$ de sítios e comparando este número com a probabilidade $p_{ij} = |i - j|^{-\alpha}$. Neste sentido, podemos dizer que a probabilidade de ocorrer uma dada matriz será

$$P = \prod_{j>i}^N [a_{ij}p_{ij} + (1 - a_{ij})(1 - p_{ij})], \quad (4.30)$$

onde a_{ij} são os elementos da matriz de acoplamento, os quais são iguais a 1 se $\rho \leq p_{ij}$ ou 0 se $\rho > p_{ij}$.

A restrição $j > i$ na equação (4.30) deve-se à simetria da matriz de acoplamento, pois, em nosso estudo, estamos considerando que se o i -ésimo sítio está conectado com o sítio j ambos interagem entre si. Contudo, é importante destacar que tal simetria corresponde apenas às ligações, pois, dependendo do número de ligações de cada sítio, a influência de um sítio sobre o outro pode não ter a mesma intensidade.

Como as conexões neste modelo são redistribuídas a cada iteração da rede, con-

jecturamos que em um grande número de iteradas os autovalores da matriz $A_{22}^{(n)}$ sejam

$$\Gamma_m = \sum_{k=1}^L \Gamma_m'^{(k)} P(k) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, N; \quad (4.31)$$

onde L é o número de matrizes Jacobianas possíveis com a variação das ligações na rede, Γ_m' é o m -ésimo autovalor da k -ésima matriz e $P(k)$ a probabilidade de ocorrer esta matriz.

Então, por definição, os expoentes de Lyapunov da rede correspondem ao logaritmo natural de cada autovalor obtido pela equação (4.31). Nesta equação, o número de matrizes possíveis L está diretamente relacionado à quantidade de elementos variáveis em uma dada matriz. Considerando a regra de probabilidade p_{ij} do modelo, em uma rede com N elementos e condições de contorno periódicas, há $(N - 3)$ elementos variáveis dado que os primeiros vizinhos possuem probabilidade de acoplamento igual a 1. Sendo assim, a quantidade de elementos variáveis e o número de matrizes possíveis desta rede são, respectivamente,

$$N' = N(N - 3)/2 \quad \text{e} \quad L = 2^{N'}, \quad (4.32)$$

sendo N a quantidade de sítios da rede.

Para verificar nossa hipótese representada pela equação (4.31) consideramos uma rede com $N = 3$ e $p_{ij} = |2(i - j)|^{-\alpha}$. A inserção do número 2 na regra de probabilidade foi efetuada para assegurar uma possível variação no acoplamento entre os primeiros vizinhos de cada sítio, uma vez que na regra convencional a probabilidade de acoplamento entre os primeiros vizinhos é sempre 1. A modificação na regra faz com que a matriz de probabilidade do sistema seja

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2^\alpha} & \frac{1}{2^\alpha} \\ \frac{1}{2^\alpha} & 0 & \frac{1}{2^\alpha} \\ \frac{1}{2^\alpha} & \frac{1}{2^\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o número de elementos variáveis da matriz $A_{22}^{(n)}$ e a quantidade de matrizes possíveis são

$$N' = 3(3 - 1)/2 = 3 \quad \text{e} \quad L = 2^3 = 8. \quad (4.33)$$

A matriz bloco A_{22} correspondente pode ser escrita como

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \xi\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda \\ a_{21}\lambda & \xi\lambda & a_{23}\lambda \\ a_{31}\lambda & a_{32}\lambda & \xi\lambda \end{pmatrix}.$$

sendo $a_{ij} = 0, 1$ ou $1/2$ conforme a probabilidade p_{ij} e o número de elementos não nulos de cada linha.

De acordo com equação (4.30), neste exemplo, a probabilidade de ocorrer cada matriz é

$$\begin{aligned} P(A_{22}^{(1)}) &= \frac{(2^\alpha - 1)^3}{2^{3\alpha}}, \\ P(A_{22}^{(2)}) &= P(A_{22}^{(3)}) = P(A_{22}^{(4)}) = \frac{(2^\alpha - 1)^2}{2^{3\alpha}}, \\ P(A_{22}^{(5)}) &= P(A_{22}^{(6)}) = P(A_{22}^{(7)}) = \frac{(2^\alpha - 1)}{2^{3\alpha}}, \\ P(A_{22}^{(8)}) &= \frac{1}{2^{3\alpha}}. \end{aligned}$$

E, considerando as oito possibilidades de matrizes, os autovalores associados são

$$A_{22}^{(1)} : \begin{cases} \Gamma'_1 = \xi\lambda \\ \Gamma'_2 = \xi\lambda \\ \Gamma'_3 = \xi\lambda \end{cases}, \quad A_{22}^{(k)} : \begin{cases} \Gamma'_1 = \xi\lambda + \varepsilon\lambda \\ \Gamma'_2 = \xi\lambda \\ \Gamma'_3 = \xi\lambda - \varepsilon\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad A_{22}^{(8)} : \begin{cases} \Gamma'_1 = \xi\lambda + \varepsilon\lambda \\ \Gamma'_2 = \xi\lambda - \varepsilon\lambda/2 \\ \Gamma'_3 = \xi\lambda - \varepsilon\lambda/2 \end{cases}$$

para $k = 2, 3, \dots, 7$.

Então, utilizando a equação (4.31), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \xi\lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{2^\alpha} - \frac{3\varepsilon\lambda}{2^{2\alpha}} + \frac{\varepsilon\lambda}{2^{3\alpha}}, \\ \Gamma_2 &= \xi\lambda - \frac{\varepsilon\lambda}{2 \cdot 2^{3\alpha}}, \\ \Gamma_3 &= \xi\lambda - \frac{3\varepsilon\lambda}{2^\alpha} + \frac{3\varepsilon\lambda}{2^{2\alpha}} - \frac{\varepsilon\lambda}{2 \cdot 2^{3\alpha}}. \end{aligned}$$

Estes autovalores resultantes da equação (4.31) nós denominamos autovalores efetivos. Fazendo $\alpha = 0$ nas três expressões obtidas recuperamos os autovalores da matriz $A_{22}^{(8)}$, que corresponde ao acoplamento global. Por outro lado, tomando o limite $\alpha \rightarrow \infty$ obtemos os autovalores da matriz $A_{22}^{(1)}$ que representa o caso sem acoplamento. Para outros valores de α utilizamos técnicas de aproximação numérica e obtivemos um bom acordo entre os autovalores efetivos e os resultados numéricos. Também calculamos os expoentes de Lyapunov segundo à equação (4.31) para outros dois tamanhos de rede.

Na Tabela 2 apresentamos os expoentes de Lyapunov de uma rede com $N = 7$, $\varepsilon = 0,5$, $\alpha = 0,5$ e $\lambda = 0,9$ obtidos de três maneiras distintas, a saber, segundo a equação proposta e por duas técnicas numéricas.

Tabela 2: Expoentes de Lyapunov de uma Rede *Small-world*.

Λ	Equação	Gramm-Schmidt	Hessemberg
1	-0,105361	-0,105361	-0,105361
2	-0,619771	-0,619259	-0,619029
3	-0,783329	-0,786320	-0,783078
4	-0,936007	-0,935347	-0,936089
5	-1,056160	-1,054925	-1,056602
6	-1,245914	-1,243028	-1,246167
7	-1,535085	-1,540773	-1,536460

Embora os resultados obtidos tenham sido favoráveis à equação (4.31) para o cálculo dos expoentes de Lyapunov da rede, a utilização desta equação para redes grandes torna-se bastante difícil pois o número de matrizes possíveis L aumenta muito com tamanho da rede N , por exemplo, para $N = 5$ temos $L = 2^5$ enquanto que para $N = 7$, $L = 2^{14}$. Por outro lado, conforme observamos para $N = 3$ a probabilidade e os autovalores de algumas matrizes são equivalentes. Sendo assim, resta-nos encontrar a relação existente entre a disposição dos elementos da matriz e a correspondente variação ou não dos autovalores. Os espectros de Lyapunov deste modelo bem como dos demais acoplamentos propostos nesta dissertação serão apresentados no sexto capítulo (Resultados e Discussões).

5 *A Sincronização Completa nas Redes de Mapas de Kaplan-Yorke*

Sistemas dinâmicos acoplados ou sujeitos a um forçamento ou ruído comum podem apresentar um comportamento sincronizado após um determinado intervalo de tempo [18]. A sincronização entre os elementos de sistemas espacialmente estendidos tem sido bastante investigada nos últimos anos, com interesses tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista de aplicações tecnológicas [52]. Tal comportamento pode ser observado em diferentes âmbitos da natureza como, por exemplo, em domínios magnéticos ordenados, em impulsos nervosos de pessoas com ataques epilépticos, nas células reguladoras dos batimentos cardíacos, em propagação de doenças infecciosas e em algumas reações químicas [11, 53–55]. Neste capítulo apresentamos a idéia da sincronização em redes de mapas acoplados, expomos duas ferramentas para diagnosticar o estado sincronizado nestes sistemas e analisamos as condições de sincronização nas redes de mapas de Kaplan-Yorke com as variáveis y acopladas.

5.1 A Sincronização Completa

Em redes de mapas acoplados a sincronização constitui o processo no qual as variáveis de estado de mesma natureza passam a apresentar o mesmo valor numérico, ou seja, trata-se de um ajuste ou igualamento entre os estados dos sítios da rede. Assim, dada uma rede unidimensional com N sítios, a sincronização desta rede implica

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)} = s_n, \quad (5.1)$$

sendo x a variável de estado e n o índice temporal.

De forma geral, uma rede é considerada sincronizada quando todas as variáveis de

estado correspondentes entre si assumem exatamente o mesmo valor. No entanto, levando em consideração a precisão numérica e o fato de que a análise é feita em tempos finitos, muitas vezes admite-se uma margem de tolerância na caracterização do estado sincronizado. Neste sentido, a sincronização é considerada completa se, para todo $n > n'$, sendo n' um tempo de transiente, os estados permanecerem dentro da margem de tolerância. Um comportamento interessante que pode ocorrer na transição para a sincronização é a intermitência, isto é, um comportamento oscilante ou intermitente entre o estado sincronizado e o estado não-sincronizado. Quer dizer, em determinados intervalos de tempo as variáveis de estado apresentam valores muito próximo umas das outras (estado quase sincronizado) e, em seguida, ocorrem alguns picos ou estouros e as variáveis de estado assumem valores diferenciados. De acordo com Viana e colaboradores [56], a transição de alguns sistemas caóticos para o estado completamente sincronizado ocorre basicamente via intermitência.

Grande parte das pesquisas com redes de mapas acoplados têm sido desenvolvidas a partir de redes regulares e homogêneas. Nestas redes a sincronização reduz a dinâmica do sistema à dinâmica de um único mapa de modo que toda informação contida, *a priori*, em um espaço de fase $(N \times m)$ dimensional, sendo N o número de mapas e m a dimensão de um mapa, passa a residir em um subespaço de dimensão m , o subespaço de sincronização. Este subespaço, também denominado variedade de sincronização, é geralmente representado por um hiperplano a partir do qual se determina a estabilidade do estado sincronizado em relação a uma perturbação transversal.

Independentemente do tamanho da rede e dos valores dos parâmetros de acoplamento, no estado completamente sincronizado, uma rede de mapas acoplados evolui tal como um mapa isolado. Considerando, por exemplo, uma rede de mapas unidimensionais com acoplamento do tipo lei potência, a dinâmica desta rede no estado sincronizado é dada por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(s_n) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{2f(s_n)}{j^\alpha} = f(s_n), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.2)$$

Isto significa que o acoplamento não exerce nenhuma influência sobre a dinâmica da rede quando as variáveis de estado tornam-se idênticas. Entretanto, conforme podemos ver em [43], o processo de sincronização em si depende sobretudo da intensidade do acoplamento e da intensidade da interação entre os constituintes do sistema, ou seja, dos parâmetros ε e α . Os valores destes parâmetros a partir dos quais a sincronização ocorre, podem ser obtidos por meio de determinadas ferramentas de diagnósticos de sincronização

e/ou pela análise do expoente de Lyapunov transversal [43].

5.2 Os Diagnósticos de Sincronização

Para verificar a sincronização em redes de mapas acoplados podemos utilizar, dentre outras ferramentas de diagnósticos, o parâmetro de ordem complexo R e a distância ao subespaço de sincronização ou parâmetro d . Ambas as ferramentas indicam precisamente se a rede está sincronizada ou não-sincronizada. Assim, caso a transição entre estes estados dependa dos parâmetros do acoplamento entre os sítios da rede, elas permitem determinar o conjunto de parâmetros que possibilitam a sincronização [43, 49]. Além disso, a variação do parâmetro d também proporciona uma estimativa do expoente de Lyapunov transversal do sistema [57], o qual representa um diagnóstico da estabilidade do estado sincronizado.

5.2.1 O Parâmetro R

Baseando-se na transição de fase de sistemas termodinâmicos Kuramoto propôs em 1984 um parâmetro de ordem para descrever a sincronização de sistemas de osciladores acoplados [58]. Tal parâmetro, na forma adaptada às redes de mapas acoplados [13, 59], é definido como

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \phi) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_n^{(j)}), \quad (5.3)$$

sendo R_n e ϕ , respectivamente, a amplitude e o ângulo de um vetor de fase associado ao estado da rede, i a unidade imaginária e $x_n^{(j)}$ a variável de estado do j -ésimo sítio da rede.

A idéia do parâmetro de ordem consiste em distribuir as N variáveis de estado da rede sobre um círculo unitário representado no plano complexo e associar a cada uma delas um vetor $z_n^{(i)}$ de comprimento unitário. Assim, somando os N vetores e dividindo o vetor resultante pelo número de variáveis somadas, se obtém um vetor z_n cujo módulo corresponde ao estado da rede naquele instante de tempo [58]. Na Figura (18) representamos a distribuição dos vetores no círculo unitário para duas situações específicas da rede, a saber, quando todas as variáveis de estado possuem o mesmo valor, ilustração à esquerda, e quando elas apresentam valores totalmente aleatórios, ilustração à direita. No primeiro caso, estado sincronizado, temos todos os vetores apontando para o mesmo sentido, conseqüentemente o módulo do vetor resultante será igual a 1. No outro caso os

vetores estão apontando em sentidos contrários e, portanto, o parâmetro de ordem será identicamente nulo.

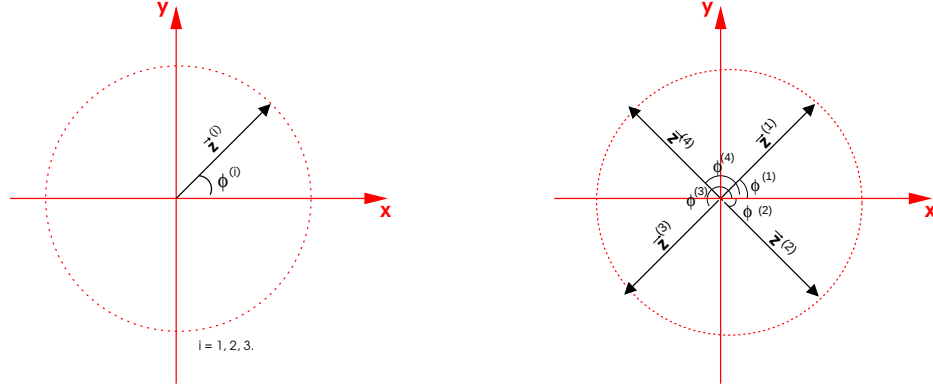


Figura 18: Representação das variáveis de estado ($x_n^{(i)} = \Phi^{(i)}$) distribuídas sobre o círculo no plano complexo e os respectivos vetores de estado $z^{(i)}$.

Podemos expressar a equação (5.3) de uma forma mais apropriada à implementação e à análise da magnitude do parâmetro de ordem. Utilizando, pois, a relação de Euler, $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, e tomando o módulo do vetor de estado em (5.3), obtemos

$$R_n = \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{j=1}^N \cos(2\pi x_n^{(j)}) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sin(2\pi x_n^{(j)}) \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.4)$$

onde $R_n \in [0, 1]$. Em uma situação onde todas as variáveis de estado apresentam o mesmo valor temos $R_n = 1$. Caso contrário, se as variáveis forem totalmente aleatórias, R_n será nulo e, em situações intermediárias, $0 < R_n < 1$.

No estado completamente sincronizado o parâmetro de ordem será sempre igual a unidade. Entretanto, na transição para a sincronização, as variáveis de estado podem apresentar valores muito próximos em um determinado intervalo de tempo e valores menos próximos nos instantes posteriores, conseqüentemente, R_n será aproximadamente 1 no primeiro caso e menor que 1 no segundo. Sendo assim, é conveniente considerar a média do parâmetro de ordem calculado em um determinado intervalo de tempo. Este parâmetro de ordem médio é expresso por

$$\langle R \rangle = \frac{1}{n - n'} \sum_{n'=1}^n R_n, \quad (5.5)$$

sendo n' um tempo de transiente.

Utilizando o parâmetro de ordem médio e variando os parâmetros da rede é possível determinar os valores críticos destes parâmetros a partir dos quais a rede sincro-

niza [49]. Estes parâmetros correspondem basicamente à intensidade do acoplamento ε , ao fator de interação α e ao tamanho da rede N .

No caso de redes com mapas multidimensionais considera-se um parâmetro de ordem e um parâmetro de ordem médio para cada variável distinta. Especificamente para a rede de mapas de Kaplan-Yorke temos $R_n(x)$ e $R_n(y)$. Neste caso, como a variável y do mapa corresponde à velocidade de uma partícula em um fluido, podemos dizer que $R_n(y)$ indica quão diferentemente encontra-se a intensidade das velocidades das partículas do sistema em cada instante de tempo.

5.2.2 O Parâmetro d

O parâmetro d_n é definido como a distância geométrica ortogonal entre um ponto no espaço de fases e o subespaço de sincronização [13]. Assim, o diagnóstico dado por d corresponde exatamente à distância entre o ponto do espaço de fases que caracteriza o estado do sistema em um determinado instante de tempo e o respectivo estado sincronizado. Considerando, por exemplo, um sistema composto por dois mapas unidimensionais, o valor de d corresponde à distância entre o ponto $P(x^{(1)}, x^{(2)})$, com $x^{(i)} \in \mathbb{R}^+$, e a bissetriz do espaço de fases representada por $x^{(1)} = x^{(2)}$. Uma ilustração da medida de d para o sistema mencionado é apresentada na Figura (19).

No caso de uma rede com N mapas de dimensão $m = 1$, o subespaço de sincronização será representado geometricamente pela diagonal de um hipercubo N dimensional e, como demonstraremos mais adiante, a magnitude do parâmetro d será dada por

$$d_n = \sigma\sqrt{N}, \quad (5.6)$$

sendo σ o desvio quadrático médio das variáveis de estado.

A equação (5.6) implica $d_n = 0$ se a rede estiver sincronizada e $d_n > 0$ se as variáveis de estado possuírem valores diferenciados. De fato, quando as variáveis de estado assumem o mesmo valor, o desvio quadrático médio torna-se nulo e, conseqüentemente, o parâmetro d_n será nulo. Por outro lado, se os estados de cada sítio forem distintos, teremos $\sigma > 0$ e, portanto, d_n será maior do que zero.

De forma análoga ao parâmetro de ordem, muitas vezes é conveniente tomar a média da distância calculada sobre um intervalo de tempo. Esta distância média pode

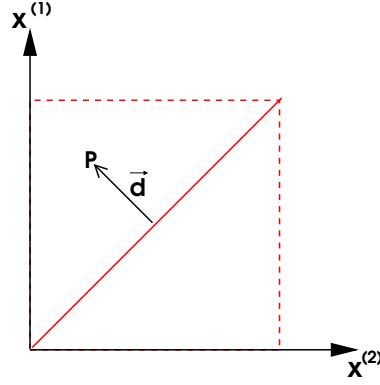


Figura 19: Espaço de fases do sistema composto por dois mapas acoplados e o respectivo subespaço de sincronização.

ser expressa por

$$\langle d \rangle = \frac{1}{n - n'} \sum_{n'+1}^n d_n, \quad (5.7)$$

sendo n' um tempo transiente. Utilizando tal distância podemos determinar, por exemplo, a região dos parâmetros da rede na qual ocorre a sincronização completa ($\langle d \rangle = 0$).

O parâmetro d_n está diretamente relacionado ao expoente de Lyapunov transversal do sistema [57], o qual corresponde ao $(m + 1)$ -ésimo maior expoente do espectro, sendo m a dimensão de um mapa. Na realidade, d_n equivale ao tamanho do eixo da elipsóide que é ortogonal aos eixos do subespaço de sincronização. Sendo assim, tomando o logaritmo natural da variação de d_n podemos determinar o valor do referido expoente.

A seguir apresentamos a dedução da equação (5.6) e a correspondente equação para uma rede de mapas bidimensionais.

5.2.2.1 A Dedução da Equação da Distância

Para obter a equação do parâmetro d_n consideraremos primeiramente uma rede de mapas unidimensionais composta por três sítios. O estado deste sistema em cada instante de tempo é caracterizado por um ponto P no espaço de fase cujas coordenadas são $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)})$ onde $x^{(i)} \in \mathbb{R}$. Como no estado sincronizado estas coordenadas são numericamente iguais, o subespaço de sincronização correspondente é definido pela diagonal de um cubo centrado na origem do espaço de fases e o parâmetro d_n é determinado considerando a distância entre o ponto P e a respectiva diagonal. No caso em que as variáveis $x^{(i)} \in \mathbb{R}^+$ o cubo encontra-se no primeiro quadrante do espaço de fases, no entanto, especificamente para a dedução da equação da distância a disposição do cubo não

é algo relevante.

Associando um vetor $\vec{r}$ à diagonal do cubo e um vetor $\vec{v}$ ao ponto P , ambos com origem no mesmo ponto $O = (x^{(0)}, x^{(0)}, x^{(0)})$, obtemos a distância entre P e a diagonal do cubo determinando a componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{r}$. De acordo com seu significado denotaremos esta componente por $\vec{d}$. Além disso, como o vetor $\vec{r}$ é definido arbitrariamente podemos considerar que sua extremidade coincide com a origem do vetor $\vec{d}$, a qual representamos pelas coordenadas $(x_n^{(d)}, x_n^{(d)}, x_n^{(d)})$. Na Figura (20) apresentamos a disposição destes vetores.

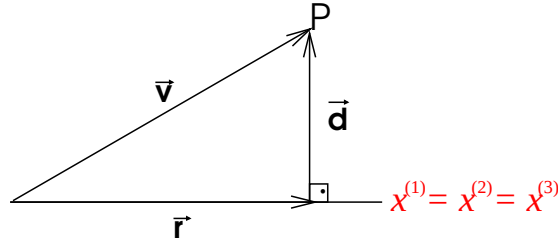


Figura 20: Representação gráfica dos vetores utilizados para determinar a distância do ponto P à diagonal do cubo dada pela reta $x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)}$.

Em relação às coordenadas, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{d}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (x_n^{(d)} - x^{(0)})\hat{i} + (x_n^{(d)} - x^{(0)})\hat{j} + (x_n^{(d)} - x^{(0)})\hat{k} \quad \text{e} \\ \vec{d} &= (x_n^{(1)} - x_n^{(d)})\hat{i} + (x_n^{(2)} - x_n^{(d)})\hat{j} + (x_n^{(3)} - x_n^{(d)})\hat{k}.\end{aligned}$$

Portanto, o módulo de $\vec{d}$ será

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(x_n^{(1)} - x_n^{(d)}\right)^2 + \left(x_n^{(2)} - x_n^{(d)}\right)^2 + \left(x_n^{(3)} - x_n^{(d)}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Para expressar a variável desconhecida $x_n^{(d)}$ em termos das variáveis $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ e $x_n^{(3)}$ utilizamos

$$\vec{d} \cdot \vec{r} = 0,$$

o que nos leva a

$$x_n^{(d)} = \frac{x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(3)}}{3}. \quad (5.9)$$

Então, substituindo (5.9) em (5.8), esta adquire a forma

$$|\vec{d}| = \sqrt{\left(x_n^{(1)}\right)^2 + \left(x_n^{(2)}\right)^2 + \left(x_n^{(3)}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(3)}\right)^2}. \quad (5.10)$$

Analisando a equação (5.10) vemos que a magnitude do parâmetro d equivale à raiz quadrada da soma das variáveis de estado ao quadrado menos a média da soma ao quadrado. Desta maneira, para uma rede com N mapas unidimensionais, podemos inferir que

$$d_n^2 = \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)})^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_n^{(i)} \right]^2. \quad (5.11)$$

A equação (5.11) também pode ser expressa em termos da variância das variáveis de estado. Multiplicando ambos os lados da equação por $1/N$, ela adquire a forma

$$\frac{d_n^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)})^2 - \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N x_n^{(i)} \right]^2 = \langle (x_n^{(i)})^2 \rangle - \langle x_n^{(i)} \rangle^2. \quad (5.12)$$

Assim, utilizando a relação $\sigma^2 = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$, sendo u uma variável qualquer, e expressando d_n como uma grandeza dependente do tempo, obtemos

$$d_n = \sigma \sqrt{N}. \quad (5.13)$$

Esta equação nos dá a “distância” entre o estado de uma rede de mapas unidimensionais e o estado completamente sincronizado ou subespaço de sincronização. Ela corresponde à distância geométrica ortogonal entre um ponto no espaço de fases e a diagonal de um hipercubo N dimensional representado neste espaço.

Para redes de mapas bidimensionais a equação do parâmetro d_n não representa a distância de um ponto a uma reta. Nestes sistemas o estado completamente sincronizado é definido por

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)} \quad \text{e} \quad y_n^{(1)} = y_n^{(2)} = \dots = y_n^{(N)}, \quad (5.14)$$

sendo N o número de mapas da rede. Deste modo, o subespaço de sincronização corresponde a um plano xy imerso em um espaço de fases $2N$ -dimensional e, portanto, o parâmetro d_n será equivalente à distância entre um ponto do espaço de fases e o respectivo plano.

Com o objetivo de derivar a expressão do parâmetro d_n para uma rede de mapas bidimensionais vamos considerar um sistema composto por dois mapas. O estado deste sistema em cada instante de tempo é caracterizado por um ponto $P = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(1)}, y_n^{(2)})$ no espaço de fases, onde $(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) \in \mathbb{R}$. Especificamente no plano ou subespaço de sincronização, as coordenadas do ponto serão $x_n^{(1)} = x_n^{(2)}$ e $y_n^{(1)} = y_n^{(2)}$. Diante disso, podemos

definir o plano a partir de quaisquer dois vetores ortogonais entre si que satisfaçam tal condição. Por motivo de simplificação, nós vamos assumir que as variáveis $(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) \in \mathbb{R}^+$ para todo $n = 1, 2, \dots, \infty$. Neste caso, uma boa escolha dos vetores do plano é

$$\vec{r}_x = (x_n^{(p)} - x^{(0)}, x_n^{(p)} - x^{(0)}, 0, 0) \quad \text{e} \quad (5.15)$$

$$\vec{r}_y = (0, 0, y_n^{(p)} - y^{(0)}, y_n^{(p)} - y^{(0)}) , \quad (5.16)$$

onde $x^{(p)}$ e $y^{(p)}$ são pontos arbitrários no plano.

Após definir os vetores $\vec{r}_x$ e $\vec{r}_y$, associamos um terceiro vetor $\vec{v}$ cuja origem coincide com a origem dos vetores mencionados e a extremidade encontra-se no ponto $P = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(1)}, y_n^{(2)})$, o qual corresponde ao estado atual do sistema. Em termos das componentes, este vetor será dado por

$$\vec{v} = (x_n^{(1)} - x^{(0)}, x_n^{(2)} - x^{(0)}, y_n^{(1)} - y^{(0)}, y_n^{(2)} - y^{(0)}) . \quad (5.17)$$

Na Figura (21) representamos o plano e os três vetores mencionados. Vemos a partir da figura que a distância entre o ponto $P = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, y_n^{(1)}, y_n^{(2)})$ corresponde exatamente à componente de $\vec{v}$ ortogonal ao plano. Neste caso, como os vetores $\vec{r}_x$ e $\vec{r}_y$ já são ortogonais entre si, podemos obter a distância subtraindo a projeção de $\vec{v}$ sobre ambos os vetores. Assim, denotando a componente de $\vec{v}$ ortogonal ao plano por $\vec{d}$ e considerando o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos que

$$\vec{d} = \vec{v} - \alpha_1 \vec{r}_x - \alpha_2 \vec{r}_y , \quad (5.18)$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_x}{|\vec{r}_x|^2} = \frac{x_n^{(1)} - 2x^{(0)} + x_n^{(2)}}{2(x_n^{(p)} - x^{(0)})} \quad \text{e} \quad (5.19)$$

$$\alpha_2 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_y}{|\vec{r}_y|^2} = \frac{y_n^{(1)} - 2y^{(0)} + y_n^{(2)}}{2(y_n^{(p)} - y^{(0)})} . \quad (5.20)$$

Então, substituindo (5.15), (5.16), (5.17), (5.19) e (5.20) em (5.18) e procedendo as operações necessárias, obtemos

$$|\vec{d}|^2 = (x_n^{(1)})^2 + (x_n^{(2)})^2 - \frac{1}{2} [x_n^{(1)} + x_n^{(2)}]^2 + (y_n^{(1)})^2 + (y_n^{(2)})^2 - \frac{1}{2} [y_n^{(1)} + y_n^{(2)}]^2 . \quad (5.21)$$

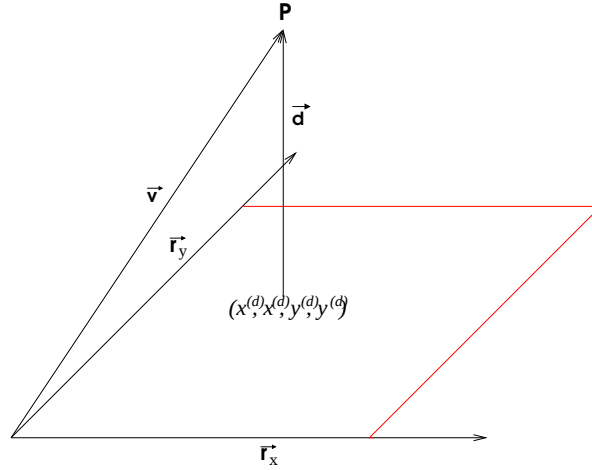


Figura 21: Representação do vetor associado ao parâmetro d e os vetores do subespaço de sincronização de uma rede composta por mapas bidimensionais.

Generalizando a equação (5.21) para um sistema com N mapas ficamos com

$$|\vec{d}|^2 = \sum_{i=1}^N (x_n^{(i)})^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_n^{(i)} \right]^2 + \sum_{i=1}^N (y_n^{(i)})^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N y_n^{(i)} \right]^2. \quad (5.22)$$

E, dividindo ambos os lados da equação por N e utilizando a expressão da variância, obtemos finalmente

$$d_n = \sqrt{N(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}, \quad (5.23)$$

sendo d_n o módulo do vetor $\vec{d}$ na n -ésima iterada da rede, σ_x^2 a variância das variáveis $x_n^{(i)}$ e σ_y^2 a variância das variáveis $y_n^{(i)}$.

Tendo em vista o procedimento utilizado para o cálculo da distância ao subespaço de sincronização e a idéia de aproximação dos expoentes de Lyapunov *via* Gram-Schmidt discutida no capítulo anterior, verificamos que o parâmetro d_n está diretamente relacionado ao expoente de Lyapunov transversal do sistema. Mais precisamente, d_n corresponde à magnitude do $(m+1)$ -ésimo maior eixo do elipsóide gerado pelo mapeamento dos pontos no espaço de fases. Sendo assim, podemos escrever a relação entre o parâmetro d_n e o expoente de Lyapunov transversal Λ_T como

$$\Lambda^{(T)} = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I \ln \left(\frac{d_{n+1}}{d_n} \right), \quad (5.24)$$

onde I é o número de iteradas. Neste caso, para ser coerente com a definição dos expoentes de Lyapunov e obter uma aproximação satisfatória devemos considerar $I \rightarrow \infty$.

Esta expressão nos permite obter o maior expoente de Lyapunov transversal a partir da obtenção do parâmetro d . Ela está de acordo com os resultados de Anteneodo e colaboradores [57] e mostra que há uma dependência entre tal expoente e a variância das variáveis de estado da rede.

5.3 O Expoente de Lyapunov Transversal e a Sincronização

A sincronização de uma rede de mapas acoplados também pode ser investigada por meio dos expoentes de Lyapunov calculados no estado sincronizado [43]. Conforme discutimos no capítulo anterior, os expoentes de Lyapunov estão relacionados à taxa média de convergência ou divergência entre trajetórias vizinhas e, neste sentido, podemos utilizá-los para determinar a estabilidade do estado sincronizado em relação à pequenas perturbações transversais. Assim, de acordo com o sinal dos expoentes obtidos, sabemos se as trajetórias convergem ou não para este estado à medida que o sistema evolui.

Com exceção do(s) expoente(s) relacionado(s) à(s) m -ésima(s) direções do subespaço de sincronização, os quais são os maiores do espectro e correspondem aos expoentes do mapa isolado, se todos os outros expoentes forem negativos a rede necessariamente sincronizará após um determinado intervalo de tempo. Na realidade, como o espectro é ordenado de acordo com a magnitude dos expoentes, para que a sincronização ocorra basta que o $(m + 1)$ -ésimo maior expoente de Lyapunov do espectro, o expoente transversal, seja negativo.

A negatividade do expoente de Lyapunov transversal é uma condição necessária e suficiente para ocorrer a sincronização. Assim, variando os parâmetros de acoplamento ε e α e analisando o expoente transversal é possível encontrar o conjunto (ou região) de parâmetros com os quais a rede sincroniza. Porém, ao invés de calcularmos uma infinidade de expoentes, podemos simplesmente definir os limites desta região de parâmetros (os parâmetros críticos) considerando o expoente de Lyapunov transversal igual a zero [43]. Retomando, por exemplo, as expressões dos espectros de Lyapunov das redes com acoplamentos do tipo lei de potência, equações (4.25) e (4.28), e estendendo estas para o caso de mapas genéricos temos

$$\Lambda_k = \Lambda_u + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{j^\alpha} \cos \left(\frac{2\pi k j}{N} \right) \right|, \quad (5.25)$$

para o acoplamento do tipo lei de potência usual, e

$$\Lambda_k = \Lambda_u + \ln \left| 1 - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(q^j - 1)^\alpha} \cos \left(\frac{\pi k (q^j - 1)}{q^M} \right) \right|, \quad (5.26)$$

para o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico, sendo Λ_u o expoente de Lyapunov do mapa isolado e $k = 1, 2, \dots, N$ um índice referente ao ordenamento do expoente no espectro.

Então, supondo que o expoente de Lyapunov transversal corresponda ao k -ésimo expoente para ambos os acoplamentos e considerando $\Lambda_k = 0$, obtemos

$$\varepsilon_c = (1 - e^{\Lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(2\pi j k / N)}{j^\alpha} \right]^{-1} \quad (5.27)$$

e

$$\varepsilon'_c = (1 + e^{\Lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^M \frac{\cos(\pi j k (N - 1) / N)}{j^\alpha} \right]^{-1}, \quad (5.28)$$

para o acoplamento do tipo lei de potência usual, e

$$\varepsilon_c = (1 - e^{\Lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{k(q^m - 1)^\alpha} \cos \left[\frac{\pi(q^m - 1)}{q^M} \right] \right]^{-1} \quad (5.29)$$

e

$$\varepsilon'_c = (1 + e^{\Lambda_u}) \left[1 - \frac{2}{\eta(\alpha)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(q^m - 1)^\alpha} \cos[\pi k (q^m - 1)] \right]^{-1}, \quad (5.30)$$

para o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico.

Nestas expressões os termos ε_c e ε'_c referem-se, respectivamente, ao mínimo e ao máximo valor da intensidade do acoplamento ε da região de sincronização no espaço dos parâmetros $\varepsilon \times \alpha$. Portanto, a sincronização na rede ocorrerá sempre que $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon'_c$. O fato de termos duas equações está relacionado a presença do módulo nas expressões dos espectros de Lyapunov.

5.4 A Sincronização nas Redes de Mapas de Kaplan-Yorke y-Acoplados

De acordo com a definição de sincronização em redes compostas por mapas bi-dimensionais, o estado completamente sincronizado nas redes de mapas de Kaplan-Yorke corresponde a

$$x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)} \quad \text{e} \quad y_n^{(1)} = y_n^{(2)} = \dots = y_n^{(N)}, \quad (5.31)$$

sendo N o número de mapas da rede. Neste sentido, podemos conjecturar que a sincronização completa nas redes de mapas de Kaplan-Yorke com variáveis $y^{(i)}$ acopladas e variáveis $x^{(i)}$ livres ocorrerá se, e somente se, as condições iniciais das variáveis $x^{(i)}$ forem todas idênticas; pois, como o mapa possui uma dinâmica caótica em x e esta não depende da dinâmica em y , mesmo utilizando condições iniciais próximas para as variáveis x , elas irão divergir exponencialmente à medida que o sistema evolui. Sendo assim, nós analisaremos sobretudo o comportamento coletivo das variáveis $y^{(i)}$, as quais correspondem à velocidade de uma partícula browniana movendo-se em uma dimensão do espaço.

As variáveis x e y do mapa de Kaplan-Yorke podem assumir tanto valores positivos como negativos, sendo o sinal destas variáveis associado ao sentido do impulso e do movimento da partícula, ora para a direita ora para a esquerda. Diante disso, podemos considerar a sincronização das variáveis y a partir de dois pontos de vista, os quais correspondem à sincronização do módulo das velocidades e à sincronização das velocidades. Nesta dissertação, ao utilizarmos o parâmetro R_n como diagnóstico estamos considerando o módulo das velocidades enquanto que a análise pelo parâmetro d_n será realizada considerando tanto o módulo como o sentido do vetor velocidade. Esta abordagem não é arbitrária, mas está diretamente relacionada à própria definição do parâmetro R_n .

Levando em consideração que o movimento pode ocorrer tanto para a direita quanto para a esquerda atribuímos condições iniciais no intervalo $[-1, 1]$ para ambas as variáveis. Utilizamos num primeiro momento o mesmo valor inicial para as variáveis x e números distribuídos aleatoriamente para as variáveis y . Na sequência, utilizamos condições iniciais aleatórias para as variáveis x e consideramos nulas as variáveis y .

Na Figura (22) apresentamos a variação temporal do parâmetro d_n , equação (5.23), para três tamanhos de redes de mapas de Kaplan-Yorke com variáveis $x_0^{(i)}$ idênticas e variáveis $y_0^{(i)}$ aleatórias, ambas desacopladas. Este caso representa uma situação na qual as partículas não interagem umas com as outras, porém compartilham da mesma per-

turbação. De acordo com a figura vemos que, independentemente do número de partículas, a distância decai exponencialmente com o tempo em uma razão igual a $\ln \lambda$, sendo λ o parâmetro de controle da dinâmica em y do mapa. Este resultado nos mostra que quando as partículas estão sujeitas à mesma perturbação suas velocidades sempre sincronizam após um determinado intervalo de tempo e que a razão de decaimento da distância é igual ao expoente de Lyapunov transversal do sistema.

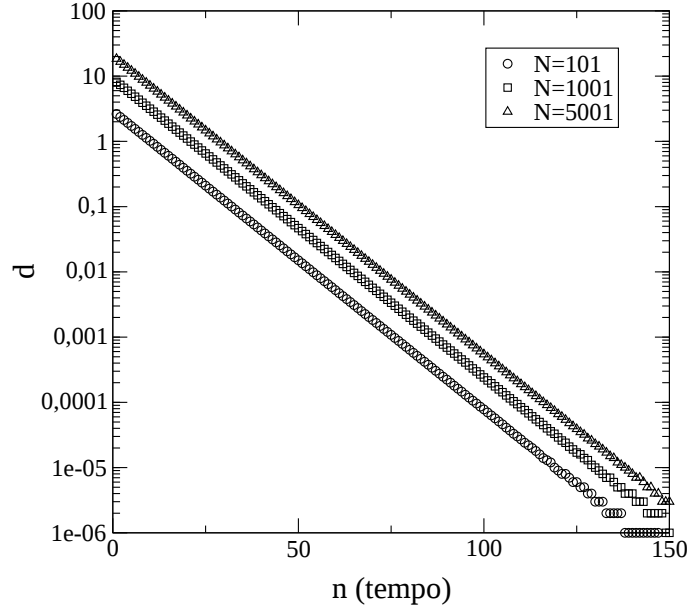


Figura 22: Distância ao subespaço de sincronização nas primeiras iteradas da rede de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamento nulo e condições iniciais idênticas às variáveis x .

Ainda com as partículas sujeitas à mesma perturbação analisamos o número de iteradas ou tempo de sincronização n_s pela intensidade do acoplamento ε para uma rede com 1001 partículas e parâmetro de alcance $\alpha = 0$ (acoplamento global). Como estamos utilizando variáveis com precisão limitada a dezesseis casas decimais, consideramos a rede sincronizada quando $d_n < 10^{-16}$. Verificamos, Figura (23), que à medida que aumentamos a interação entre as partículas (intensidade do acoplamento) o tempo de sincronização decai como uma exponencial.

O acoplamento das variáveis y da rede de mapas de Kaplan-Yorke representa a situação física de colisão entre as partículas com trocas de energia e *momentum* regidas pelos parâmetros ε e α . Neste sentido, considerando o acoplamento do tipo lei potência e utilizando $N = 1001$, $\lambda = 0,9$, $\varepsilon = 0,5$ e $\alpha = 0,5$ calculamos o parâmetro d_n à medida que a rede evolui. Na Figura (24) mostramos a variação deste parâmetro para as 100 primeiras iteradas da rede, consideramos tanto o caso em que as perturbações são idênticas, mesma

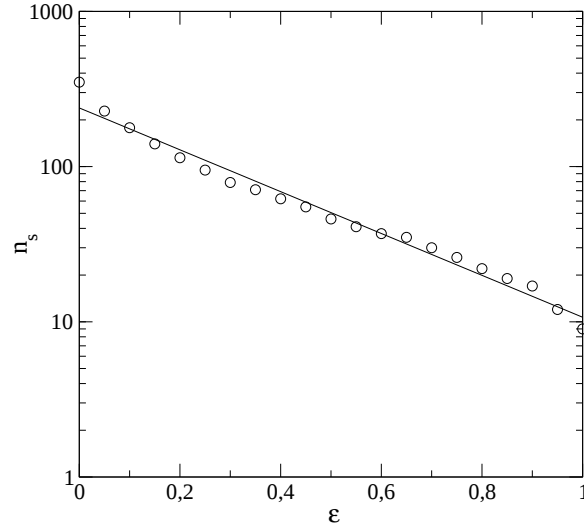


Figura 23: Tempo de sincronização pela intensidade do acoplamento para uma rede de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamento global ($\alpha = 0.0$) e condições iniciais idênticas às variáveis x .

condição inicial para as variáveis $x^{(i)}$, como o caso em que elas são distintas, condições iniciais aleatórias para as variáveis $x^{(i)}$.

Podemos observar na Figura (24) que a distância decai rapidamente à zero quando as variáveis $x^{(i)}$ possuem o mesmo valor enquanto que, para variáveis $x_0^{(i)}$ distintas, ela aumenta até um certo valor e passa a oscilar próximo a este. O comportamento sincronizado, no primeiro caso, e a oscilação da distância ao subespaço de sincronização, no segundo, permanecem ao longo do tempo e independem do tamanho da rede. Assim, utilizando os mesmos valores de parâmetros e considerando o acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de ligação decaindo com a distância às variáveis $y^{(i)}$, verificamos o comportamento coletivo das velocidades por meio do parâmetro de ordem $R_n(y)$, equação (5.4). Na Figura (25) apresentamos a variação temporal de $R_n(y)$ para as duas situações de condições iniciais. Podemos observar que o resultado é equivalente ao apresentado na figura anterior, ou seja, ocorre a sincronização em poucas iterações da rede quando as variáveis $x_0^{(i)}$ são idênticas enquanto que para $x_0^{(i)}$ distintas as velocidades não sincronizam.

Fazendo $\alpha = 0$ em ambas as formas de acoplamento obtemos a forma global de acoplamento, na qual todos os componentes da rede interagem com todos e com a mesma intensidade. Considerando tal situação e utilizando condições iniciais aleatórias para as variáveis $x^{(i)}$ verificamos a variação temporal do parâmetro $R_n(y)$ para uma rede com 501 partículas e parâmetros de acoplamento ε intensos. A Figura (26) mostra que a rede encontra-se muito próxima do estado sincronizado para $\varepsilon = 1,0$ e se afasta deste estado

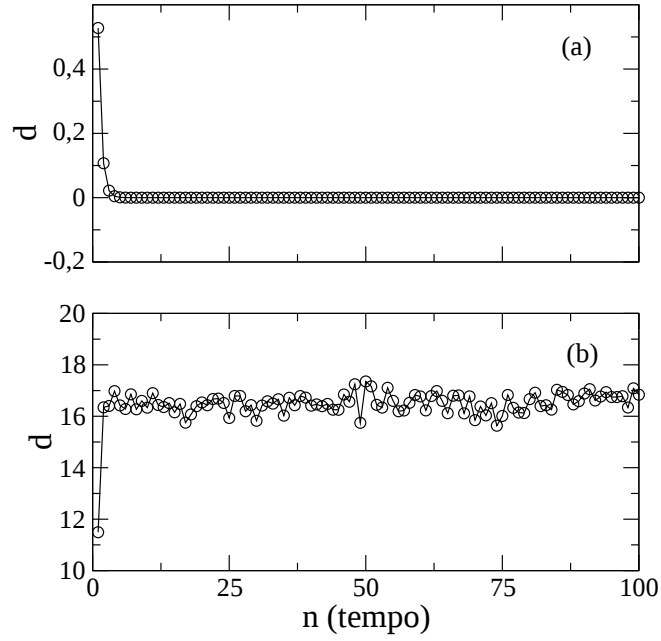


Figura 24: Distância ao subespaço de sincronização nas 100 primeiras iteradas da rede com acoplamento do tipo lei potência: (a) mesma condição inicial às variáveis x ; (b) condições iniciais aleatórias às variáveis x .

com pequenas variações de ε . Assim, utilizando $\varepsilon = 1,0$ verificamos o comportamento coletivo das variáveis $y^{(i)}$ em vários instantes de tempo. Na Figura (27) apresentamos os valores desta variável em três instantes de tempo arbitrários para uma rede com 301 partículas.

Podemos observar na Figura (27) que as velocidades não estão totalmente sincronizadas, porém a diferença entre elas é extremamente pequena. Em relação a esta diferença, verificamos que ela diminui à medida que aumentamos o número de partículas da rede. Para analisar este comportamento utilizamos, mais uma vez, o parâmetro de ordem $R_n(y)$. Na Figura (28) apresentamos a variação temporal deste parâmetro para dois tamanhos distintos de rede.

Conforme mostra a Figura (28), o parâmetro de ordem $R_n(y) \rightarrow 1$ com o aumento do tamanho da rede indicando, assim, que as velocidades tendem a sincronizar para redes suficientemente grandes. Também podemos observar que o parâmetro de ordem apresenta picos em alguns instante de tempo, os quais resultam da consideração do módulo das velocidades no cálculo deste parâmetro. Mais precisamente, os picos representam o instante ou situação em que as velocidades encontram-se distribuídas em torno do zero. Analisando o parâmetro $d_n(y)$ para a mesma configuração da rede e considerando o módulo das velocidades, obtemos, como mostra a Figura (29), a mesma distribuição de picos em

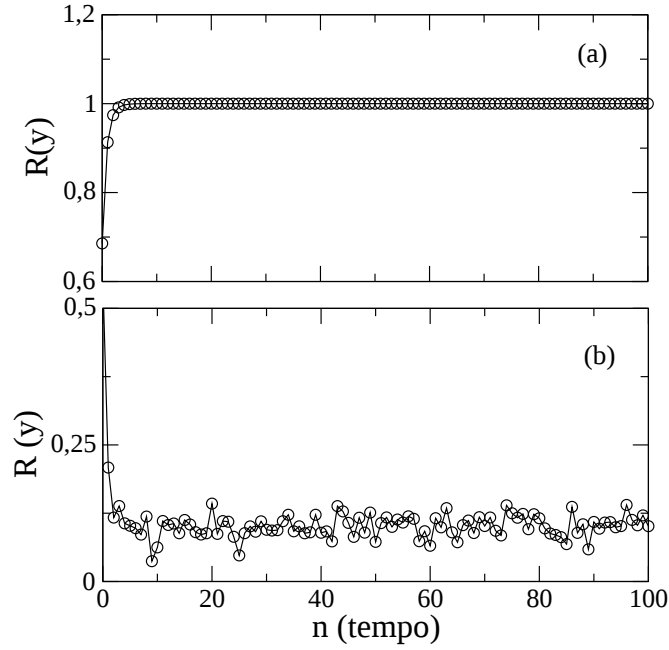


Figura 25: Parâmetro de ordem referente a dinâmica em y para a rede com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de ligação decaindo com a distância: (a) mesma condição inicial às variáveis $x^{(i)}$; (b) condições iniciais aleatórias às variáveis $x^{(i)}$.

um sentido contrário, indicando assim que a distância ao subespaço de sincronização diminui abruptamente nestes pontos.

Para obter um resultado mais quantitativo calculamos a distância média das variáveis y ao subespaço de sincronização, equação (5.7), para vários tamanhos de rede. Os valores obtidos estão representados na Figura (30), eles nos mostram que a distância média referente às velocidades diminui com o tamanho da rede segundo uma lei de potência. Mais precisamente encontramos que esta distância decai com $1/\sqrt{N}$, o que nos leva a inferir que a sincronização das variáveis $y^{(i)}$ de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke, com variáveis $x^{(i)}$ livres e aleatórias, e variáveis $y^{(i)}$ globalmente acopladas, ocorrerá apenas no limite $N \rightarrow \infty$. Além disso, considerando a equação (5.6) podemos escrever

$$\langle d \rangle = \langle \sigma \rangle \sqrt{N}. \quad (5.32)$$

Então, comparando esta equação com o resultado obtido:

$$\langle d(y) \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (5.33)$$

vemos que a média do desvio quadrático médio das velocidades decai com N , ou seja,

$$\langle \sigma_y \rangle \propto N^{-1}. \quad (5.34)$$

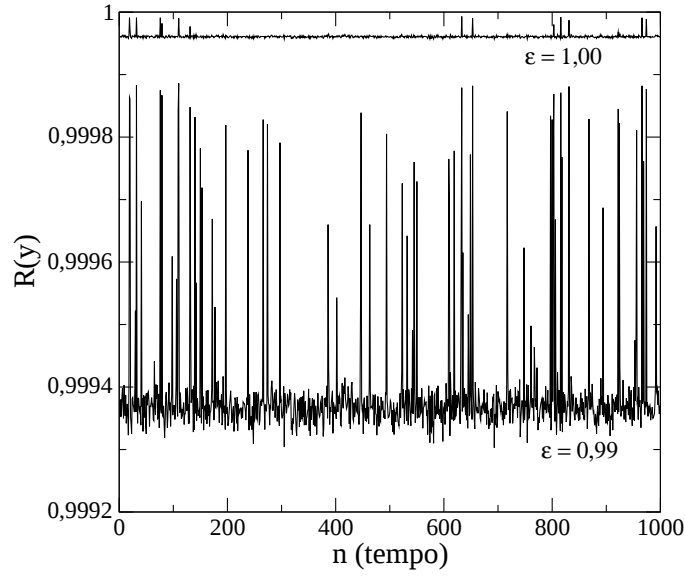


Figura 26: Parâmetro de ordem $R(y)$ para a rede com acoplamento global e variáveis $x_0^{(i)}$ aleatórias.

A partir deste resultado podemos inferir que a variância média decai com o quadrado do número de partículas. Em relação ao tempo de observação utilizado em nossas análises, verificamos que a aproximação à sincronização não depende de um grande número de iterações como ocorre em alguns sistemas. De fato, considerando a dinâmica da variável y com acoplamento global,

$$y_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1}^M [f(x_n^{(i-j)}, y_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)}, y_n^{(i+j)})], \quad (5.35)$$

e substituindo $f(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) = \lambda y_n^{(i)} + x_n^{(i)}$ sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(i)} &= (1 - \epsilon)(\lambda y_n^{(i)} + x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1}^M [\lambda y_n^{(i \pm j)} + x_n^{(i \pm j)}] \\ &= (1 - \epsilon)[\lambda(\lambda y_{n-1}^{(i)} + x_{n-1}^{(i)}) + x_n^{(i)}] + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1}^M [\lambda(\lambda y_{n-1}^{(i \pm j)} + x_{n-1}^{(i \pm j)}) + x_n^{(i \pm j)}] \\ &= (1 - \epsilon) \left[\lambda^n y_0^{(i)} + \sum_{k=0}^n \lambda^k x_{n-k}^{(i)} \right] + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1}^M \left[\lambda^n y_0^{(i \pm j)} + \sum_{k=0}^n \lambda^k x_{n-k}^{(i \pm j)} \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Então, como $\lambda \in (0, 1)$, podemos considerar que existe um inteiro L tal que, para $n \geq L$, o termo $\lambda^n \approx 0$ e a equação (5.36) pode ser escrita como

$$y_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon) \left[\sum_{k=0}^L \lambda^k x_{n-k}^{(i)} \right] + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=0}^L \lambda^k x_{n-k}^{(i \pm j)} \right]. \quad (5.37)$$

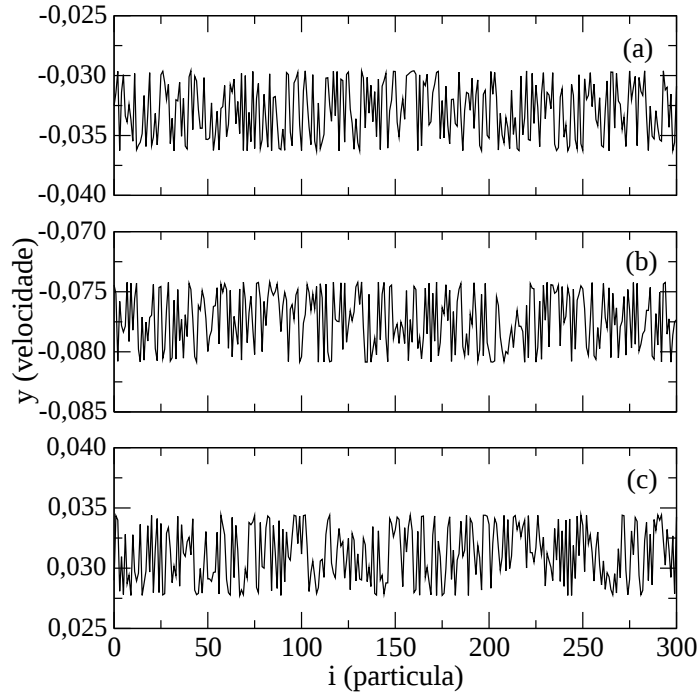


Figura 27: Velocidades das partículas da rede em determinados instantes de tempo: (a) $n = 1000$, (b) $n = 5000$ e (c) $n = 10000$ iteradas.

O número de iteradas L está diretamente relacionado ao valor do parâmetro λ . Considerando, pois, $\lambda^L = 10^{-\xi}$, sendo ξ o número de casas decimais significativas, podemos definir L como

$$L = \left\lfloor -\xi \frac{\ln 10}{\ln \lambda} \right\rfloor, \quad (5.38)$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ refere-se a parte inteira da operação.

A equação (5.37) significa que a variável $y^{(i)}$ depende sobretudo das L últimas iteradas das variáveis $x^{(i)}$, as quais possuem dinâmica caótica. Considerando, por exemplo, $\xi = 16$ e $\lambda = 0,9$, L será ≈ 350 e, portanto, o valor da variável y será determinado pelas 350 últimas iteradas das variáveis x de cada sítio da rede com uma precisão de aproximadamente 10^{-16} . Cumpre destacar, no entanto, que esta consideração sobre o número de iteradas significativas é válida apenas para os acoplamentos regulares.

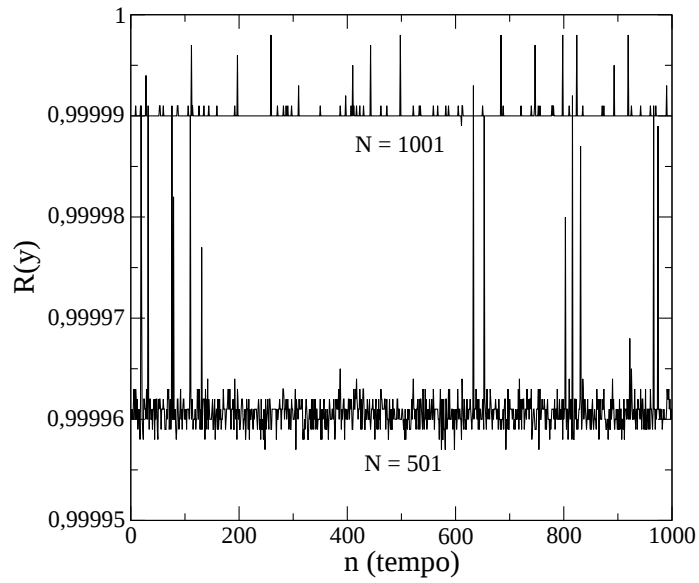


Figura 28: Parâmetro de ordem $R_n(y)$ para a rede com acoplamento global e $x_0^{(i)}$ aleatórias.

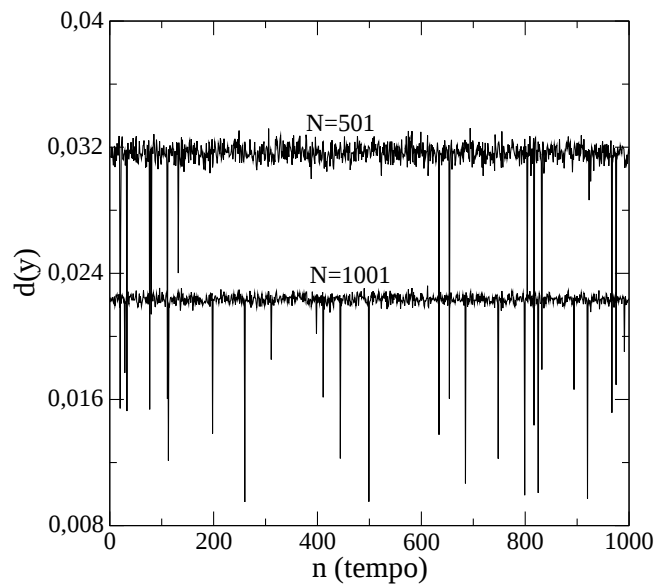


Figura 29: Distância da dinâmica em y ao subespaço de sincronização para a rede com acoplamento global e $x_0^{(i)}$ aleatórias.

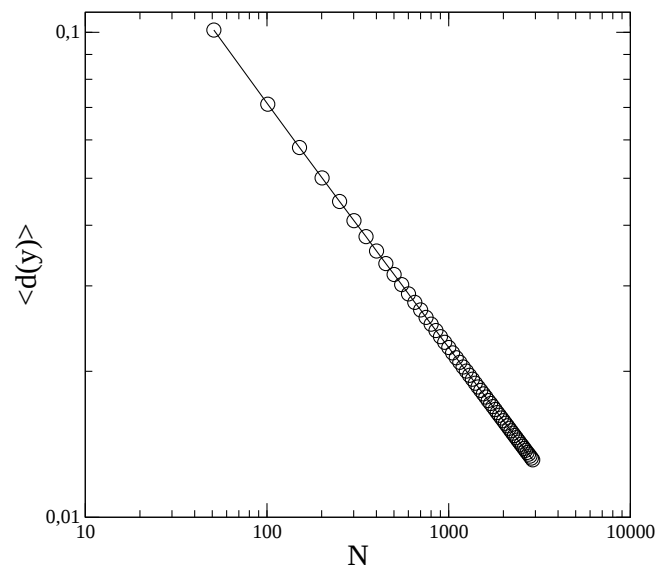


Figura 30: Distância média entre a dinâmica y da rede e o subespaço de sincronização pela variação do tamanho rede.

6 *Resultados e Discussões*

Neste capítulo apresentamos e discutimos os resultados mais relevantes de nosso trabalho. Embora tenhamos apresentado alguns resultados importantes ao longo dos capítulos anteriores, neles abarcamos sobretudo o problema, a motivação física, os modelos, os métodos e as ferramentas necessárias para tratar o problema proposto. Os resultados abordados neste capítulo correspondem às distribuições das velocidades das partículas, às relações entre a dispersão das velocidades e os parâmetros de acoplamento, aos espectros de Lyapunov das redes de mapas de Kaplan-Yorke e à diferença entre os expoentes de Lyapunov referentes à três tipos de acoplamento.

6.1 *As Distribuições das Velocidades das Partículas*

Antes de apresentar as distribuições das velocidades das partículas e demais resultados convém lembrar que, neste trabalho, a grandeza velocidade refere-se à variável y do mapa de Kaplan-Yorke e, desta maneira, não apresenta uma unidade de medida definida. A correspondência física entre a variável y do referido mapa e a velocidade de uma partícula browniana foi demonstrada no capítulo 2, onde deduzimos tal mapa a partir da equação de Langevin para o movimento de uma partícula em um fluido. Neste sentido, nossa descrição dinâmica das velocidades das partículas brownianas corresponde exclusivamente à evolução das redes de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados.

Analizamos o comportamento das velocidades das partículas brownianas sob diversas circunstâncias do modelo como, por exemplo, variando os intervalos de tempo de observação, tamanho da rede e valores dos parâmetros de acoplamento. Para considerar um grande número de partículas utilizamos principalmente o acoplamento do tipo de lei de potência logarítmico, equação (3.11). Tal escolha deve-se ao fato de que esta forma acoplamento permite simular redes bem maiores, e em menos tempo computacional comparativamente aos demais tipos de acoplamentos. Como discutimos anteriormente, enquanto neste acoplamento a rede é atualizada em $N \log N$ operações, na forma usual do

acoplamento do tipo lei de potência o número de operações correspondente é N^2 , sendo N o número de elementos do sistema.

Na Figura (31) apresentamos duas séries temporais da velocidade de uma partícula pertencente a um sistema (rede) composto por 200.000 partículas (mapas). A primeira delas corresponde ao caso em que perturbações são idênticas e, a outra, a perturbações distintas. A quantidade de partículas utilizada está relacionada aos parâmetros $q = 10$ e $M = 5$ do acoplamento do tipo lei de potência logarítmico. Nesta forma, considerando condições de contorno periódicas, estamos assumindo que cada partícula interage diretamente com apenas outras dez partículas, sendo cinco a sua direita e cinco a sua esquerda. Em relação aos parâmetros de acoplamento ε e α , os quais controlam a intensidade da interação entre as partículas, atribuímos o valor 0,5 para ambos.

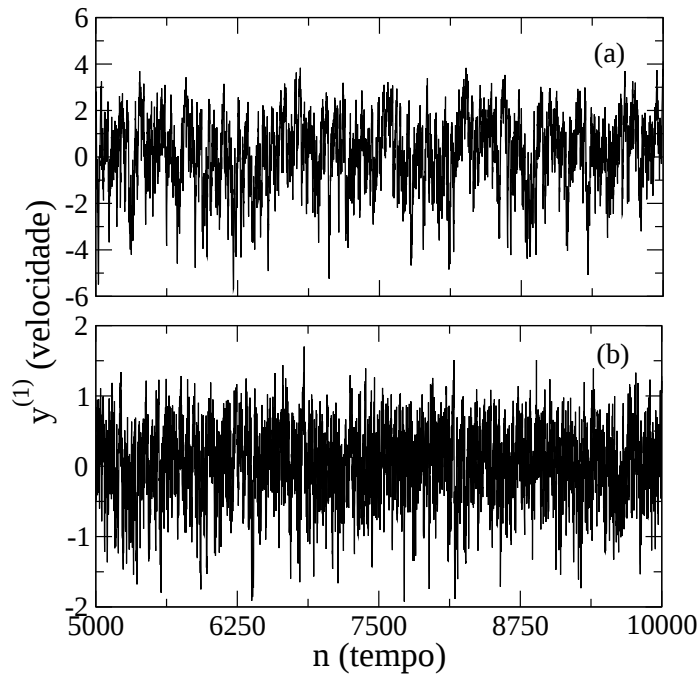


Figura 31: A série temporal da velocidade da i -ésima partícula de um sistema composto por 200.000 partículas regidas pelo mapa de Kaplan-Yorke. Em (a) utilizamos condições iniciais idênticas às variáveis $x^{(i)}$, e em (b) distribuimos as condições iniciais aleatoriamente.

Observamos na Figura (31) que a velocidade da partícula apresenta maior variação quando as perturbações são idênticas do que quando elas são distintas. Em outras palavras, o domínio da variável $y^{(i)}$ é mais restrito quando as condições iniciais das variáveis $x^{(i)}$ são distribuídas aleatoriamente do que quando estas variáveis são iguais. Este comportamento pode ser entendido considerando que, no primeiro caso, as veloci-

des sincronizam rapidamente e, portanto, todas as variáveis $y^{(i)}$ compartilham da mesma intensidade. No segundo caso, quando as condições iniciais das variáveis $x^{(i)}$ são aleatórias, a interação geralmente ocorre entre partículas com velocidades positivas e negativas, o que diminui a resultante da interação. Para verificar melhor este comportamento analisamos a média das velocidades das N partículas do sistema considerando as duas distribuições iniciais. A Figura (32) corresponde à distribuição da média das velocidades das partículas para o caso em que as perturbações são distintas e a Figura (33) para o caso em que elas são iguais.

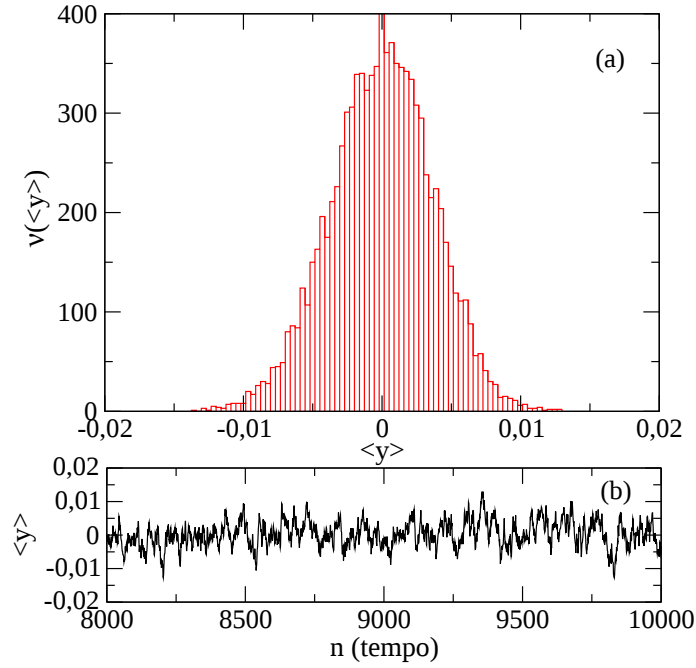


Figura 32: (a) A distribuição da média das velocidades das partículas de um sistema composto por 200.000 partículas. (b) Parte da série temporal correspondente para o caso em que as perturbações são distintas.

Vemos nas Figuras (32) e (33) que a largura da distribuição da média das velocidades para o caso em que as perturbações são distintas é mais curta do que a largura da distribuição para o caso em que as perturbações são iguais. Mais precisamente, enquanto na primeira $-0,014 \leq \langle y \rangle \leq 0,012$, na segunda $-6,2 \leq \langle y \rangle \leq 4,1$. Assim, a fim de obtermos informações mais quantitativas e comparativas das duas distribuições, calculamos os momentos das mesmas. Na Tabela (3) apresentamos os valores encontrados.

De acordo com a Tabela 3, a distribuição da média das velocidades no caso em que as perturbações são iguais está mais próxima da curva normal do que a outra distribuição, dado que sua curtose é mais próxima de zero. Além disso, os valores da assimetria indicam que a distribuição exposta na Figura (33) é mais simétrica do que a

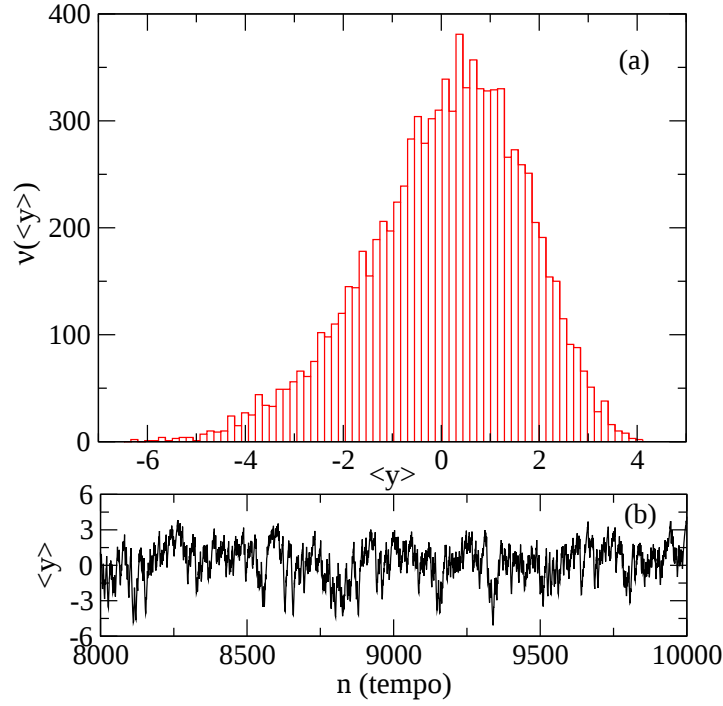


Figura 33: (a) A distribuição da média das velocidades das partículas de um sistema composto por 200.000 partículas. (b) Parte da série temporal correspondente para o caso em que perturbações são idênticas.

Tabela 3: Momentos das distribuições da média das velocidades.

	Média (10^{-4})	Desvio Padrão (10^{-2})	Variância (10^{-4})	Curtose	Assimetria
Figura (32)	3,73	1,02	1,05	692,61	23,39
Figura (33)	929,20	159,48	25.434	0,07	-0,48

distribuição apresentada na Figura (32). No entanto, em relação a média e a variância, esta última é, respectivamente, 10^{-3} e 10^{-2} vezes menor do que a primeira.

Ao compararmos a distribuição da média das velocidades das partículas do sistema, Figura (33), com a distribuição da velocidade de uma única partícula, Figura (34), para o caso em que as perturbações são idênticas, não observamos nenhuma diferença entre elas. As duas distribuições são iguais, possuem cauda larga e uma grande concentração de valores próximo ao zero. Porém, considerando apenas as distribuições da média das velocidades vemos que o caso em que perturbações são distintas se aproxima mais da teoria clássica, pois, de acordo com a teoria de Langevin [24], a velocidade média de um *ensemble* de partículas deve ser nula quando $N \rightarrow \infty$. Como a distribuição da Figura (32) está mais próxima deste comportamento do que a outra distribuição, restringimos nossa investigação, daqui em diante, ao comportamento das variáveis $y^{(i)}$ quando as variáveis $x^{(i)}$ são inicialmente distribuídas de forma aleatória.

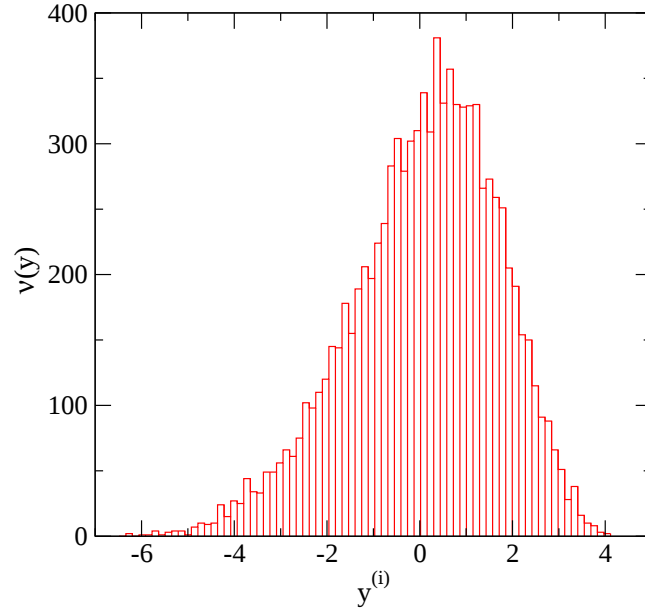


Figura 34: A distribuição das velocidades da i -ésima partícula de um sistema composto por 200.000 partículas sujeitas a perturbações idênticas.

A fim de verificar a distribuição das velocidades com a variação dos parâmetros de acoplamento, consideramos inicialmente $\alpha = 0,5$ e variamos a intensidade do acoplamento ε . A distribuição das velocidades da i -ésima partícula do sistema para cada valor de ε é apresentada na Figura (35), onde a escala de cores refere-se à frequência de cada intervalo de velocidade. Podemos observar nesta figura que aumentando a intensidade do acoplamento a largura das distribuições se afina e tende a uma gaussiana centrada na origem. Também podemos notar que há uma grande concentração de valores próximos a zero para todo os valores de ε . Especificamente para $\varepsilon > 0,6$, observamos que as distribuições não apresentam grandes alterações com a variação deste parâmetro.

De maneira análoga à análise das distribuições da velocidade pela variação da intensidade de acoplamento, verificamos também a variação das distribuições da velocidade em relação ao parâmetro de alcance α . A Figura (36) mostra as respectivas distribuições para $\varepsilon = 0,5$ e α variável. Podemos observar nesta figura que aumentando o valor de α as distribuições das velocidades se alargam, porém elas aparentemente se mantêm centradas na origem. Também podemos dizer a partir da figura que, para $\alpha > 2$, a maioria das distruibuições apresentam a mesma largura. Considerando o mesmo procedimento de análise com a média das velocidades das 200.000 partículas, não observamos mudanças significativas na forma das distribuições obtidas pela variação dos parâmetros de acoplamento.

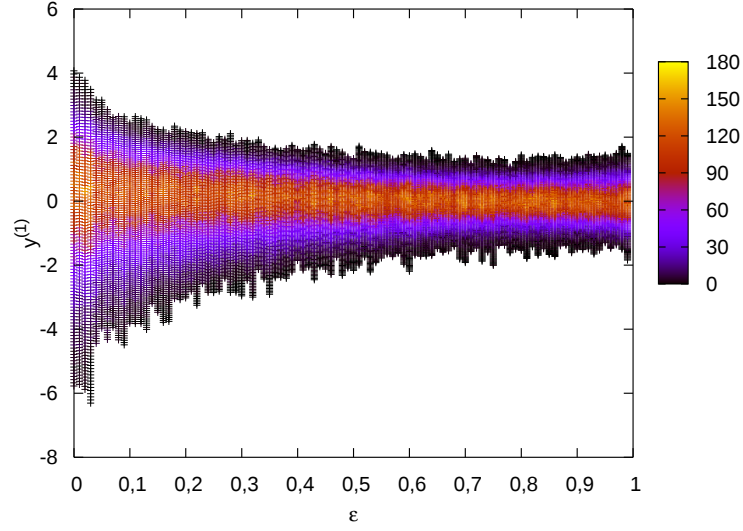


Figura 35: A distribuição das velocidades da i -ésima partícula do sistema pela variação da intensidade de acoplamento ε . A escala de cores representa a frequência com a qual cada intervalo de velocidade ocorre.

6.2 A Dispersão das Velocidades das Partículas

Para o sistema discutido na seção anterior, rede composta por 200.000 partículas submetidas ao acoplamento do tipo lei de potência logarítmico, também analisamos a dispersão das velocidades das partículas com a variação dos parâmetros de acoplamento da rede. Investigamos a dispersão das velocidades pela variância das variáveis $y^{(i)}$, a qual é dada por

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_n^{(i)} - \langle y_n \rangle)^2 = \langle (y_n^{(i)})^2 \rangle - \langle y_n \rangle^2. \quad (6.1)$$

Utilizamos a variância como uma medida da dispersão das velocidades por ela estar diretamente relacionada à magnitude do parâmetro $d(y)$, o qual foi discutido no capítulo anterior. A dispersão de uma grandeza, como sabemos, constitui uma informação estatística importante a respeito do comportamento ou estado do sistema como um todo.

Considerando $\alpha = 0,5$, analisamos primeiramente a dispersão das velocidades com a variação do parâmetro de acoplamento ε . Neste caso, devido às oscilações da variância ao longo do tempo, consideramos a média da variância em 1.000 de iteradas da rede para cada valor de ε . A Figura (37) nos mostra que a média temporal da dispersão

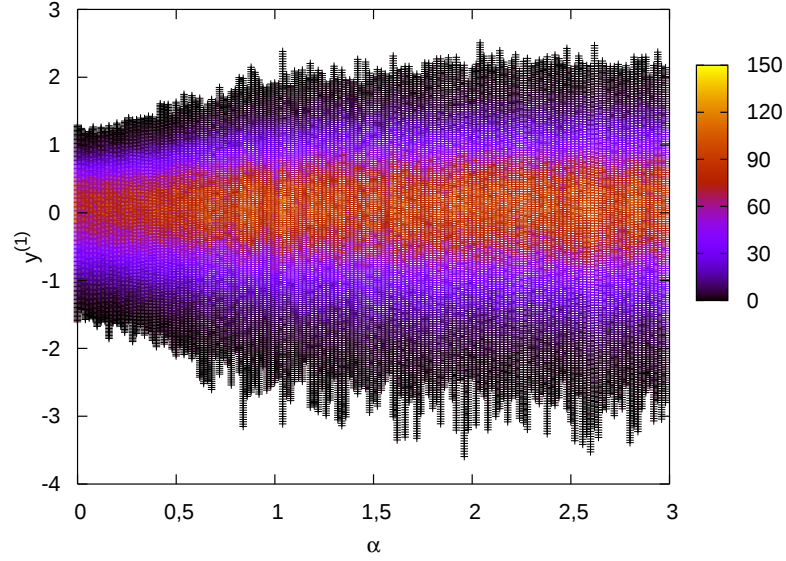


Figura 36: A distribuição das velocidades da i -ésima partícula do sistema pela variação do parâmetro de alcance α . A escala de cores representa a frequência com a qual cada intervalo de velocidade ocorre.

das velocidades decai monotonicamente com a intensidade do acoplamento até $\varepsilon \approx 0,8$ e, a partir desse valor, ela apresenta um pequeno crescimento. De acordo com as curvas de ajuste, vemos que o decaimento ocorre de forma logarítmica até $\varepsilon \approx 0,6$ enquanto que, para $\varepsilon > 0,6$, a média da dispersão varia segundo um polinômio de segunda ordem. As respectivas equações de ajuste para a rede utilizada foram

$$\langle \sigma^2 \rangle = \begin{cases} -0,061 - 0,383 \ln(\varepsilon) & \text{para } 0,0 < \varepsilon \leq 0,6 \\ 0,757 - 1,54\varepsilon + 0,940\varepsilon^2 & \text{para } 0,6 < \varepsilon \leq 1,0 \end{cases} . \quad (6.2)$$

Procedendo da mesma maneira com o parâmetro de alcance α , consideramos $\varepsilon = 0,5$ e analisamos a dispersão das velocidades para diferentes valores de α . Podemos observar na Figura (38) que à medida que aumentamos o valor do parâmetro de alcance a dispersão das velocidades também aumenta, sendo que a maior variação ocorre para $\alpha \leq 2,5$. Após este valor, notamos que a dispersão aumenta pouco e de modo oscilante. O aumento progressivo da dispersão com parâmetro de alcance significa que as velocidades tornam-se mais distribuídas à medida que o acoplamento adquire a forma local. Na Figura (38) destacamos, ainda, a variação da dispersão para $0 \leq \alpha \leq 1,5$. Verificamos que, neste intervalo, a dispersão média varia com α segundo um polinômio de terceira ordem cuja

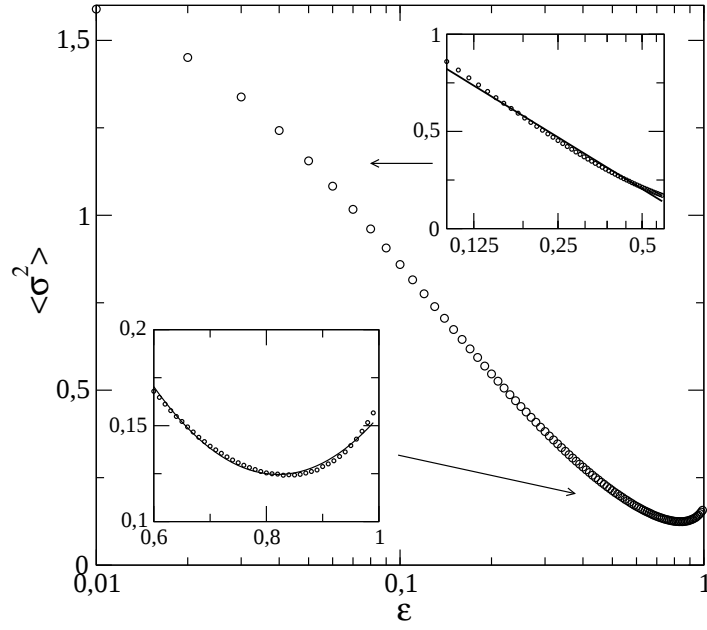


Figura 37: A dispersão média das velocidades em 1.000 iteradas de um sistema composto por 200.000 partículas regidas pelo mapa de Kaplan-Yorke e acopladas segundo o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico pela intensidade do acoplamento.

equação de ajuste é

$$\langle \sigma^2 \rangle = 0,143 + 0,071\alpha + 0,182\alpha^2 - 0,091\alpha^3. \quad (6.3)$$

Também analisamos a magnitude da dispersão das velocidades em relação ao número de partículas do sistema. Verificamos que, independentemente dos parâmetros de acoplamento, a dispersão das velocidades diminui quando aumentamos o número de partículas. Na Figura (39) apresentamos o comportamento do inverso da dispersão pelo parâmetro $M = \log_q(N/2)$ para uma rede com $q = 2$, $\varepsilon = 1,0$ e $\alpha = 0,0$. Vemos nesta figura que o inverso da dispersão aumenta linearmente com M e, deste modo, podemos dizer que a dispersão decai monotonicamente com o tamanho da rede. Para os valores de parâmetros utilizados, obtemos como equação de ajuste

$$\frac{1}{\langle \sigma^2 \rangle} = -7,14 + 4,05M. \quad (6.4)$$

Em relação ao decaimento da dispersão média com o número de partículas, vimos no final do capítulo anterior, equação (5.34), que em uma rede de mapas de Kaplan-Yorke com variáveis $y^{(i)}$ globalmente acopladas a média do desvio quadrático médio decai com o

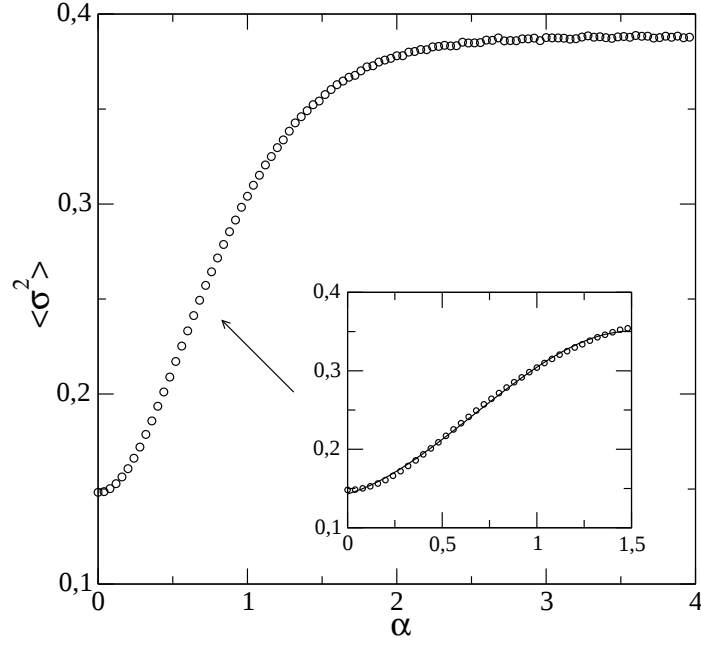


Figura 38: A dispersão média das velocidades em 1.000 iteradas de um sistema composto por 200.000 partículas regidas pelo mapa de Kaplan-Yorke e que interagem segundo o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico pelo parâmetro de alcance das interações.

número de partículas N . Desse resultado, obtemos para a dispersão média das velocidades

$$\langle \sigma_y^2 \rangle_n \propto N^{-2}, \quad (6.5)$$

onde o índice temporal n informa que a média é calculada em relação ao tempo.

Temos observado, no entanto, que a variação temporal da dispersão das velocidades é extremamente pequena comparada à variação com N . Assim, para N grande podemos supor que $\langle \sigma_y^2 \rangle_n \approx \sigma_y^2$ e, portanto, a relação (6.5) pode ser escrita como

$$\sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \propto N^{-2}. \quad (6.6)$$

Este resultado nos diz que, semelhante a um processo gaussiano difusivo, a variância das variáveis $y^{(i)}$ da rede de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamento global decresce com o quadrado do número de partículas do sistema.

6.3 Os Espectros de Lyapunov

Conforme discutimos anteriormente, um sistema dinâmico multidimensional tal como uma rede possui um espectro de expoentes de Lyapunov. Este espectro constitui uma informação importante a respeito do comportamento dinâmico do sistema. Dentre

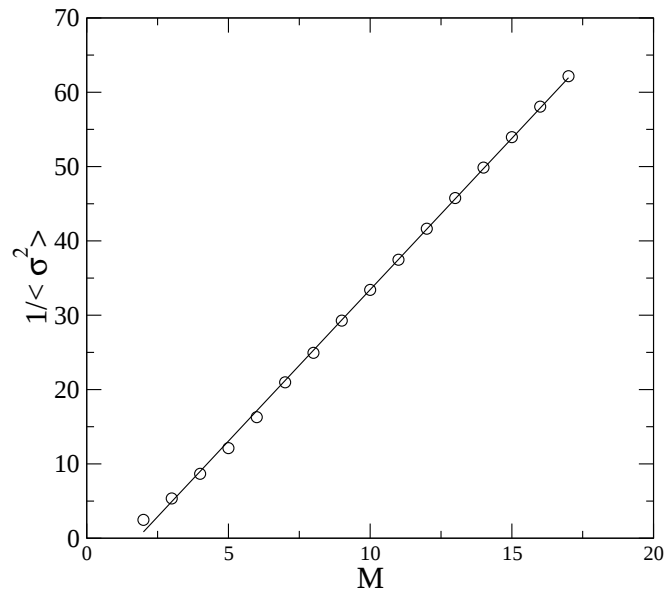


Figura 39: A dispersão média das velocidades em 1.000 iteradas de um sistema composto por 200.000 partículas regidas pelo mapa de Kaplan-Yorke e acopladas segundo o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico pelo número de partículas N , considerando $q = 2$ e $M = 5, 6, \dots, 16$.

outras coisas, ele caracteriza a caoticidade do sistema e permite dizer sobre a possibilidade de ocorrer a sincronização. A quantidade de expoentes de Lyapunov presente em um espectro é igual ao número de graus de liberdade do sistema e a quantidade de expoentes positivos e negativos está relacionada à estabilidade da trajetória em cada direção ortogonal do espaço de fases. Neste sentido, para ocorrer a sincronização em uma rede de mapas acoplados é necessário que, ao menos, $(N - 1)m$ expoentes sejam negativos, sendo m a dimensão de um único mapa.

Considerando as redes de mapas de Kaplan-Yorke y-acoplados com condições iniciais aleatórias distribuídas às variáveis $x^{(i)}$, calculamos os expoentes Lyapunov e analisamos os espectros para as quatro formas de acoplamento propostas nesta dissertação. Com exceção do acoplamento do tipo lei de potência logarítmico que estabelece uma rede com um número par de elementos, para os outros tipos de acoplamentos utilizamos o mesmo número de partículas. Para aquele, porém, consideramos uma combinação dos parâmetros q e M que resulta em um número de partículas bem próximo ao utilizado naqueles.

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov das quatro redes de mapas de Kaplan-Yorke utilizamos como parâmetros $\varepsilon = 0,5$, $\alpha = 0,5$ e $\lambda = 0,9$. Estes valores de parâmetros foram escolhidos arbitrariamente, porém, os empregamos pensando em uma

correspondência com o fenômeno modelado. Sabemos, por exemplo, que o valor de ε está relacionado ao percentual em que a velocidade de cada partícula é influenciada pela velocidade das partículas com as quais ela interage, sendo o complemento deste percentual a razão com a qual a velocidade da partícula é determinada pela própria dinâmica. Sobre o parâmetro α , podemos considerar que ele está relacionado à densidade de partículas do meio. Além disso, como este parâmetro associa a intensidade da interação entre as partículas à distância relativa entre elas, o valor 0,5 nos parece interessante ao considerarmos que, de acordo com a equação (2.9), o deslocamento médio de uma partícula browniana cresce com a raiz quadrada do tempo.

6.3.1 Acoplamentos do Tipo Lei de Potência

No capítulo 4 nós deduzimos expressões algébricas para determinar o espectro de expoentes de Lyapunov das redes de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamentos do tipo lei de potência, a saber: as equações (4.25 e (4.28). Utilizando tais expressões e a técnica de aproximação dos expoentes *via* Gram-Schmidt, calculamos os expoentes de Lyapunov referentes aos dois acoplamentos nesta forma. Para o acoplamento do tipo lei de potência usual nós consideramos uma rede com 201 partículas e para o acoplamento do tipo lei de potência logarítmico utilizamos uma rede com 200 partículas ($q = 10$, $M = 2$). Embora esta quantidade de partículas seja pequena, ela nos dá uma idéia da distribuição dos expoentes em cada um dos modelos.

Nas Figuras (40) e (41) representamos, respectivamente, o espectro de expoentes da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual e o espectro de expoentes da rede com acoplamento do tipo lei de potência logarítmico. A linha em vermelho refere-se aos dados obtidos analiticamente enquanto que os pontos correspondem aos valores aproximados pelo método de Gram-Schmidt. Podemos notar que há uma boa correspondência entre ambos. Em relação ao método de Gram-Schmidt, utilizamos 10.000 iteradas e descartamos 5.000 de tempo transiente.

Podemos observar nas Figuras (40) e (41) que as redes de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados possuem, independentemente do acoplamento, N expoentes positivos e N expoentes negativos. Além disso, vemos que os N expoentes positivos possuem o mesmo valor $\Lambda = \ln 2$, o qual corresponde ao expoente do mapa logístico isolado. Com isso, como a quantidade de expoentes positivos é maior do que $m = 2$, podemos inferir que as redes de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados não sincronizam completamente. No entanto, é interessante notar que considerando as mesmas condições iniciais às variáveis $x^{(i)}$ da

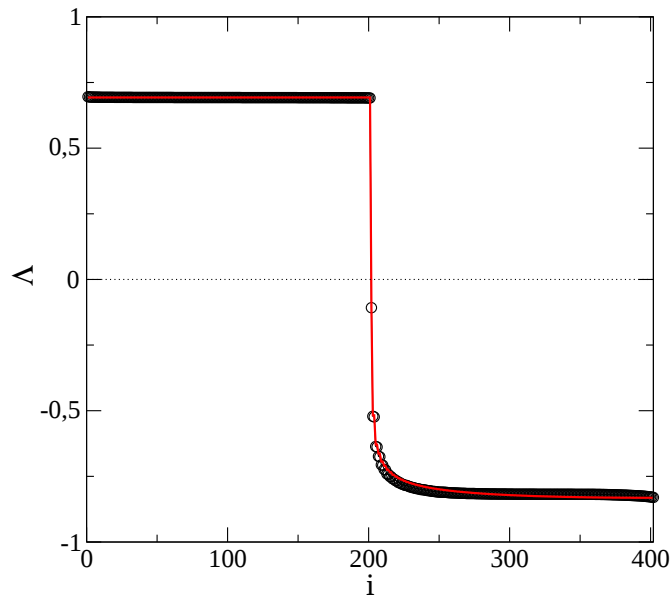


Figura 40: O espectro de Lyapunov de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados com acoplamento do tipo lei de potência usual.

rede o espectro permanece o mesmo, porém, neste caso ocorre a sincronização completa. Enfim, comparando os dois espectros obtidos, vemos que os últimos expoentes do espectro referente ao acoplamento do tipo lei de potência logarítmico são mais negativos do que os expoentes das redes com acoplamento do tipo lei de potência usual, o que significa que, em algumas direções do espaço de fases, a taxa média de aproximação das velocidades é maior no primeiro acoplamento.

6.3.2 Acoplamentos do Tipo *Small-World*

Para obter o espectro de expoentes de Lyapunov das redes de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamentos do tipo *small-world* utilizamos sobretudo o método de aproximação dos expoentes *via* Gram-Schmidt. Consideramos, tanto para o acoplamento com interações decaindo com a distância, equação (3.15), como para o acoplamento com probabilidade de ligação decaindo com a distância, equação (3.21), o mesmo número de partículas e a mesma semente de condições iniciais. Além disso, tal como procedemos com os acoplamentos anteriores, consideramos 10.000 iterações e descartamos outras 5.000 de tempo transiente. Em relação à probabilidade de ligações não-locais do acoplamento com interações entre os sítios (partículas) decaindo com a distância, utilizamos $P = 0,6$, sendo este valor escolhido arbitrariamente.

Os espectros de expoentes de Lyapunov obtidos para os dois acoplamentos do tipo

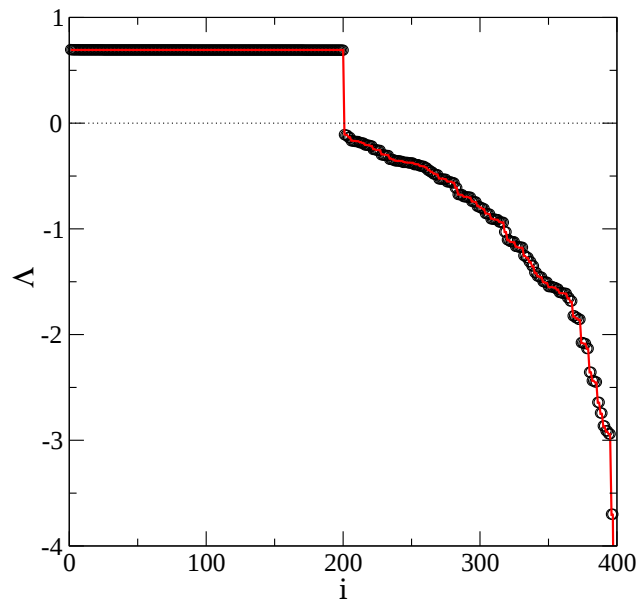


Figura 41: O espectro de Lyapunov de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados com acoplamento do tipo lei de potência logarítmico.

small-world são apresentados nas Figuras (42) e (43). Verificamos que, semelhantemente às redes com acoplamentos do tipo lei de potência, cada um destes acoplamentos possui N expoentes positivos degenerados igual a $\ln(2)$ e o primeiro expoente negativo igual a $\ln(0,9)$, sendo $0,9$ o valor utilizado para o parâmetro λ do mapa de Kaplan-Yorke. Podemos observar, ainda, que grande parte dos expoentes negativos destes espectros e os expoentes do espectro da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual encontram-se na mesma faixa de valores. Em relação à proximidade destes expoentes, vimos no capítulo 3 que os três tipos de acoplamento mencionados adquirem a mesma forma quando $\alpha = 0$ ou $\alpha \rightarrow \infty$ e $P = 1$. Nestes casos, portanto, os valores dos expoentes de Lyapunov de cada espectro devem necessariamente coincidir. No entanto, nos espectros expostos consideramos $\alpha = 0,5$, o que nos leva a acreditar que, como estamos redistribuindo as ligações entre os sítios a cada iterada da rede, em um número grande de iteradas os expoentes referentes aos três acoplamentos tornam-se muito próximos. Esta interpretação da proximidade dos expoentes de Lyapunov das redes constitui o assunto da próxima seção.

6.4 A Diferença entre os Expoentes de Lyapunov

Para comprovar nossa hipótese de que os expoentes de Lyapunov das redes com acoplamentos do tipo *small-world* se aproximam dos expoentes da rede com acoplamento

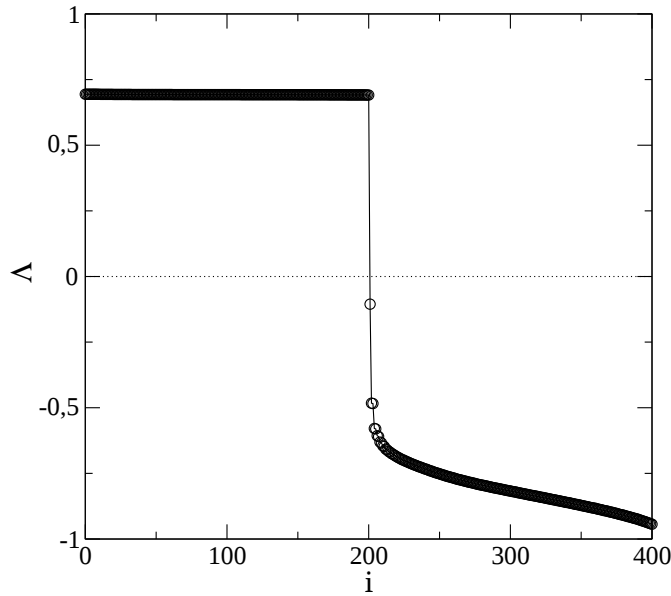


Figura 42: O espectro de Lyapunov de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados com acoplamento do tipo *small-world* com interações decaindo com a distância relativa entre os sítios.

do tipo lei de potência usual com o número de iteradas, analisamos a variação temporal da diferença entre os expoentes de cada espectro. Definimos esta diferença como

$$\Delta\Lambda_i = |\Lambda_i^s - \Lambda_i^p|, \quad (6.7)$$

sendo Λ_i^s o i -ésimo expoente do espectro referente ao acoplamento do tipo *small-world* e Λ_i^p o i -ésimo expoente referente ao acoplamento do tipo lei de potência.

Como os N expoentes relacionados à dinâmica em x do mapa de Kaplan-Yorke são todos iguais, consideramos para o cálculo da diferença apenas os N expoentes negativos oriundos da dinâmica em y . Neste caso, $\Delta\Lambda_1$ corresponde à diferença do primeiro expoente negativo, $\Delta\Lambda_2$ a diferença do segundo e assim por diante. Na Figura (44) apresentamos a variação temporal da diferença entre os 5 primeiros expoentes Lyapunov para o acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão decaindo com a distância. Utilizamos, nesta, uma rede com 301 sítios e parâmetros de acoplamento $\varepsilon = 0,8$ e $\alpha = 0,5$.

Podemos observar na Figura (44) que a diferença entre os expoentes de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão decaindo com a distância e da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual é aproximadamente constante, principalmente, após 1.000 iteradas. Além disso, conforme comentamos anteriormente, vemos que o primeiro expoente negativo é igual para ambas as redes, dado

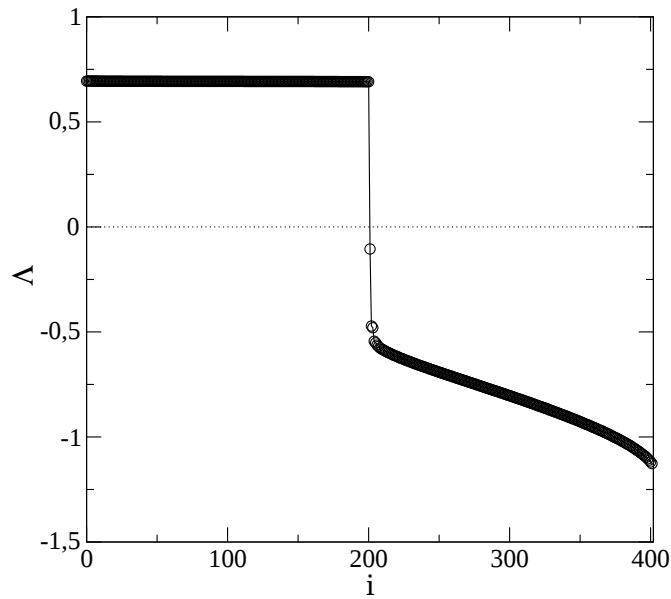


Figura 43: O espectro de Lyapunov de uma rede de mapas de Kaplan-Yorke y -acoplados com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de ligações entre os sítios decaindo com a distância.

que a diferença $\Delta\Lambda_1$ é sempre nula. Também podemos observar que a diferença entre os expoentes aumenta à medida que consideramos expoentes menores ou mais negativos e que a diferença entre expoentes subsequentes com índices pares é maior do que aqueles com índices ímpares. Portanto, embora não ocorra um decaimento da diferença entre os expoentes com o tempo, tal como esperávamos, a constância desta diferença se apresenta como algo bastante interessante.

Levando em consideração que a diferença permanece constante após um intervalo de tempo e que a diferença entre os expoentes das redes sob análise é nula para $\alpha = 0$ e $\alpha \rightarrow \infty$, podemos verificar qual o comportamento desta diferença em relação ao valor do parâmetro α . Com este intuito, calculamos a diferença $\Delta\Lambda_i$ na milésima iterada da rede para diferentes valores do parâmetro α , desde 0 até 3. Na Figura (45) mostramos a variação da diferença do segundo expoente Lyapunov para três tamanhos de redes.

Observamos na Figura (45) que a diferença $\Delta\Lambda_2$ apresenta um valor máximo para $0,6 < \alpha < 0,8$ e valores mínimos nas extremidades do intervalo. Além disso, vemos que a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov é menor para redes maiores e que ela decai de forma exponencial quando $\alpha \geq 1,5$. Para os três tamanhos de rede analisados

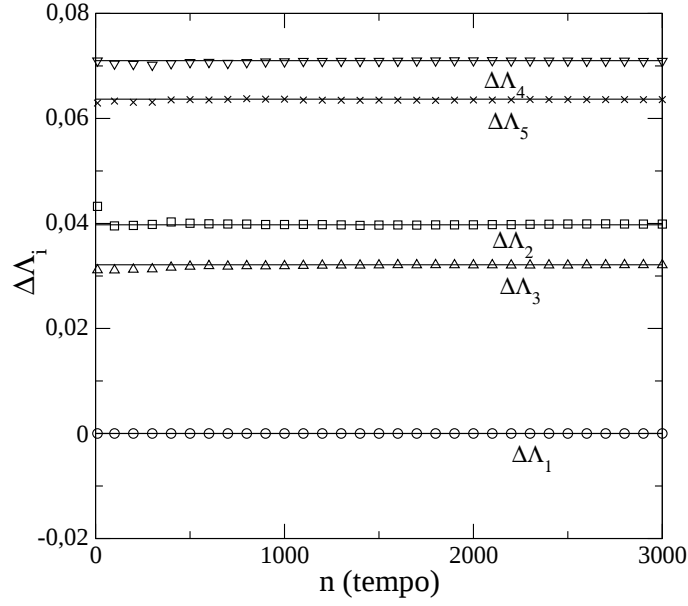


Figura 44: A diferença entre os 5 primeiros expoentes de Lyapunov dos acoplamentos do tipo *small-world* com probabilidade de conexão entre os sítios decaindo com a distância e do tipo lei de potência usual.

obtivemos pelo ajuste

$$\Delta\Lambda_2 = \begin{cases} 1,22 \exp(-2,55\alpha) & \text{para } N = 201 \\ 1,62 \exp(-2,90\alpha) & \text{para } N = 301 \\ 2,62 \exp(-3,40\alpha) & \text{para } N = 501 \end{cases}, \quad (6.8)$$

para $\alpha \geq 1,5$.

De acordo com estas equações, vemos que a taxa de decaimento da diferença do segundo expoente de Lyapunov é mais acentuada para redes maiores. Analisando igualmente as diferenças entre os demais expoentes da rede, verificamos que elas exibem o mesmo comportamento que o exposto na figura. Diante disso, achamos conveniente analisar a variação da diferença entre os expoentes em relação ao tamanho da rede. Nosso interesse em investigar a diferença dos expoentes deve-se ao fato de que, para o acoplamento do tipo lei de potência usual, temos uma expressão algébrica para determinar o espectro de expoentes de Lyapunov das redes, enquanto que para acoplamentos do tipo *small-world* há enormes dificuldades em se obter uma expressão semelhante. Neste sentido, uma relação entre os expoentes de ambos os modelos seria algo extremamente útil não apenas para este trabalho, mas para qualquer rede cujo acoplamento é desta forma.

Assim, considerando $\alpha = 0,6$ e $\varepsilon = 0,5$, calculamos a diferença entre os expoentes de Lyapunov para vários tamanhos das redes. Com exceção de $\Delta\Lambda_1$ que é sempre nula,

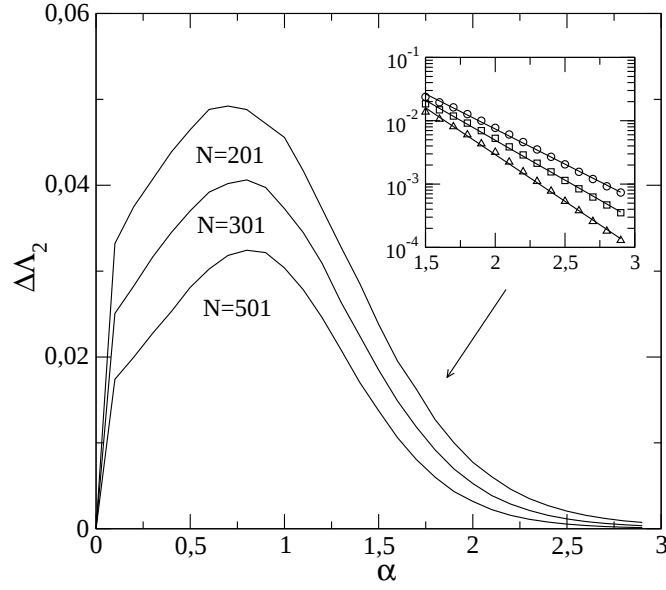


Figura 45: A diferença entre o segundo expoente de Lyapunov do espectro referente aos acoplamentos do tipo *small-world* com probabilidade de conexão entre os sítios decaindo com a distância e do tipo lei de potência usual, considerando $\varepsilon = 0,5$ e 1.000 iteradas para cada valor de α .

verificamos que a diferença entre os demais expoentes diminui à medida que aumentamos o tamanho das redes. Na Figura (46) apresentamos a variação da diferença entre os 4 maiores expoentes subsequentes ao primeiro. Nesta, consideramos 1.000 iteradas e descartamos outras 1.000 de tempo transiente. Em relação ao valor do parâmetro α , utilizamos 0,6 a fim de analisar a diferença $\Delta\Lambda_i$ próxima ao seu valor máximo.

A Figura (46) nos mostra que a diferença entre os expoentes de Lyapunov decai com o tamanho da rede segundo uma lei de potência. Além disso, podemos observar que a diferença entre pares de expoentes vizinhos decai conjuntamente a partir de um determinado tamanho de rede, o que, suspeitamos, está relacionado à degenerescência entre os expoentes de cada espectro. Com base nesta figura, podemos dizer que no limite termodinâmico, isto é, para N suficientemente grande, o espectro de expoentes de ambos os acoplamentos tornam-se iguais ou muito próximos um do outro.

Embora nossa análise tenha sido desenvolvida a partir das redes de mapas de Kaplan-Yorke, os resultados obtidos podem ser igualmente estendidos a redes com outros tipos mapas. Para redes compostas por mapas unidimensionais, por exemplo, há um grande interesse no comportamento do segundo expoente de Lyapunov que, neste caso, representa o expoente transversal. De acordo com a Figura (46), a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov de uma rede com acoplamento do tipo *small-world* com

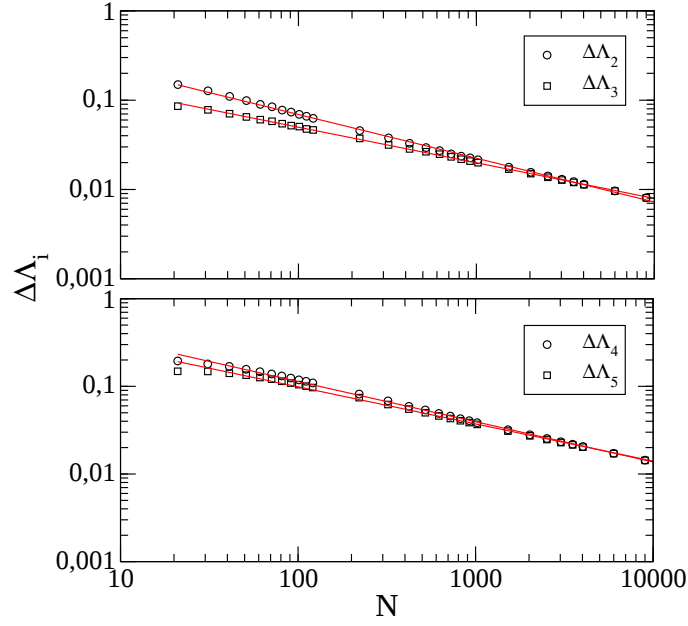


Figura 46: A diferença entre os primeiros expoentes de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão entre os sítios decaindo com a distância e da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual.

probabilidade de conexão entre os sítios decaindo com a distância e de uma rede com acoplamento do tipo lei de potência usual obedece a relação

$$\Delta\Lambda_2 \propto N^{-\beta}, \quad \text{com } \beta = 0,5. \quad (6.9)$$

Repetindo este procedimento variando os parâmetros de acoplamento ε e α no intervalo $(0, 1)$, verificamos que $\beta \approx 0,5$ para qualquer combinação destes parâmetros.

Para as redes de mapas de Kaplan-Yorke com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância também analisamos a diferença dos expoentes de Lyapunov em relação aos expoentes da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual. Neste caso consideramos α fixo e variamos a probabilidade de ligações não-locais P , pois, como comentamos anteriormente, para $P = 1$ este acoplamento torna-se do tipo lei de potência usual e as diferenças entre os expoentes se anulam independentemente do valor de α . Na Figura (47) apresentamos a diferença do segundo expoente de Lyapunov pela probabilidade P para três tamanhos de redes.

Podemos observar na Figura (47) que a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância e o segundo expoente da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual decai monotonicamente com o aumento da probabilidade de conexões não-

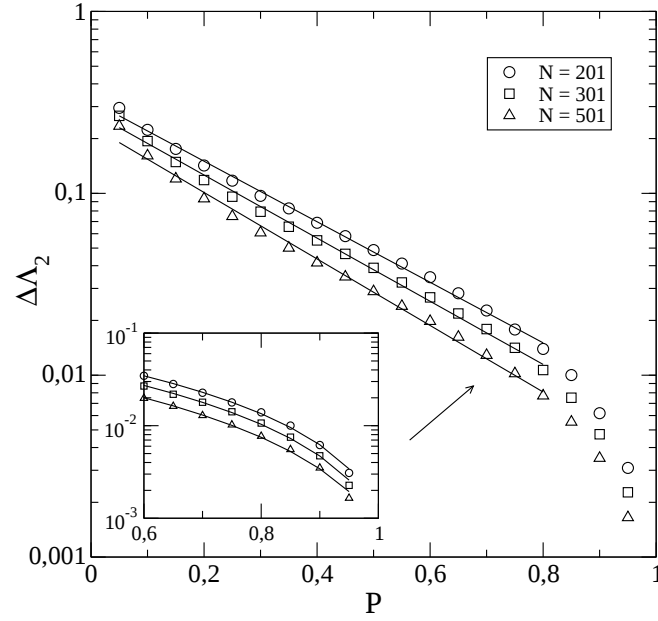


Figura 47: A diferença entre o segundo expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância e o segundo expoente da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual pela probabilidade de conexões não-locais.

locais. Analisando esta figura, verificamos que, para valores pequenos da probabilidade, a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov destas redes decai de forma exponencial com P enquanto que, para $P \geq 0,6$, o melhor ajuste dos pontos é dado por um polinômio de segunda ordem. Especificamente para $N = 501$, obtivemos como expressão de ajuste

$$\Delta\Lambda_2 = \begin{cases} 0,234 \exp(-4,21P) & \text{para } 0,0 < P \leq 0,8 \\ 0,093 - 0,166P + 0,074P^2 & \text{para } 0,6 < P \leq 1,0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Conforme observamos na Figura (47) a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância e da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual depende tanto da probabilidade como também do tamanho da rede. Diante disso, apresentamos na Figura (48) a variação da diferença do referido expoente em relação a ambos os parâmetros, sendo a magnitude da diferença dada em escala de cores.

Analisando a Figura (48) vemos que a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov das redes e, conseqüentemente, a diferença dos demais expoentes menores, tende a diminuir com a probabilidade e com o número de elementos (partículas) do sistema. Para verificar esta dependência mais precisamente, investigamos a variação de $\Delta\Lambda_2$ à medida que aumentamos N para alguns valores específicos de P . Na Figura (49) apresentamos

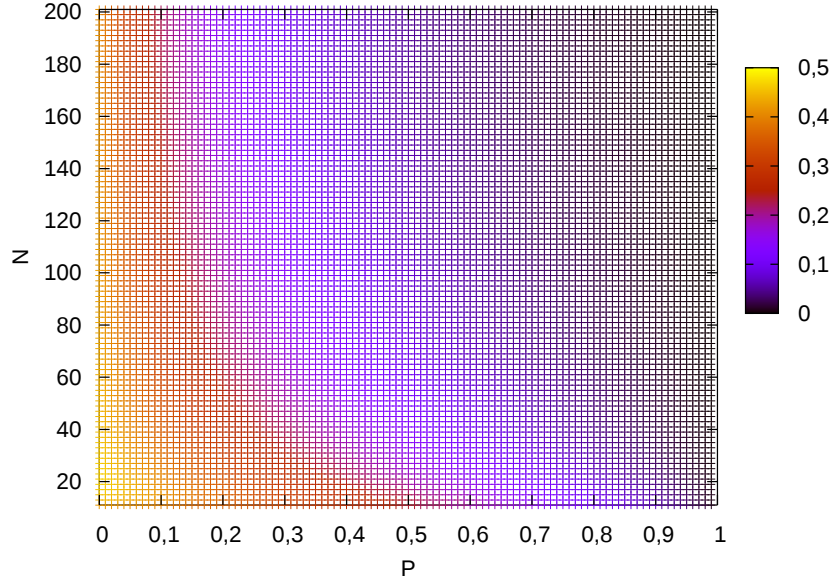


Figura 48: A diferença entre o segundo expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância e o segundo expoente da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual pela probabilidade de conexões não-locais e pelo tamanho da rede. A diferença entre o expoente é representada em escala de cores, quanto mais escuras forem as cores menor é a diferença.

as curvas obtidas para três valores da probabilidade P e parâmetros $\alpha = 0,5$ e $\varepsilon = 0,5$.

Como podemos observar na Figura (49), a diferença entre o segundo expoente de Lyapunov decai com N em uma lei de potência semelhantemente ao comportamento observado com a rede *small-world* com probabilidade de acoplamento decaindo com a distância. No entanto, neste caso, o expoente de decaimento β não é invariante, mas depende do valor da probabilidade. Por exemplo, para $P = 0,5$ verificamos que $\beta = 0,585$ enquanto que, para $P = 0,8$, $\beta = 0,452$. De acordo com estes resultados, podemos dizer que a diferença entre os expoentes de Lyapunov desta rede e os expoentes da rede com acoplamento do tipo lei de potência será nula quando $N \rightarrow \infty$.

Em suma, nossos resultados acerca da diferença entre os espectros de expoentes de Lyapunov indicam que expoentes das redes com acoplamentos probabilísticos e os expoentes das redes com acoplamentos determinísticos se aproximam no limite termodinâmico.

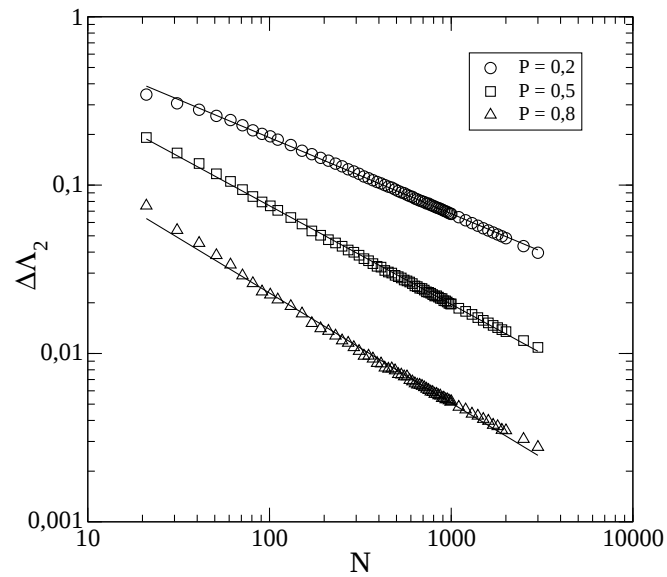


Figura 49: A diferença entre o segundo expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com interações entre os sítios decaindo com a distância e o segundo expoente da rede com acoplamento do tipo lei de potência usual pelo tamanho da rede.

7 *Conclusão*

Neste último capítulo apresentamos algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido bem como apontamos sugestões para trabalhos futuros. Nossas considerações a respeito deste trabalho envolvem desde a proposta da pesquisa e revisão bibliográfica até os resultados obtidos. As sugestões de trabalhos, por sua vez, constituem propostas de investigação e amadurecimento das idéias levantadas e resultados alcançados ao longo deste.

7.1 **Considerações Finais**

Este trabalho teve por objetivo analisar a dinâmica de partículas brownianas por meio de redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados. De acordo com nossa proposta, investigamos a evolução espaço-temporal do sistema sob diversas circunstâncias como, por exemplo, variando o número de partículas, as condições iniciais, as formas de acoplamento e os parâmetros envolvidos. Verificamos as variações na distribuição das velocidades das partículas, a dispersão das velocidades e a aproximação à sincronização pela variação dos parâmetros das redes. Neste sentido evidenciamos a dependência entre cada uma destas quantidades e, em acréscimo, obtivemos alguns resultados que se aplicam igualmente à uma ampla classe de mapas sujeitos aos acoplamentos utilizados aqui.

A questão do movimento de pequenas partículas imersas em um fluido tem sido investigada há quase dois séculos e ainda hoje constitui um importante tópico de pesquisa. Ao estudarmos as três principais teorias históricas do movimento browniano pudemos compreender vários aspectos acerca deste fenômeno que, de certa forma, nos motivaram à realização do trabalho. A possibilidade de entrar em contato com os trabalhos originais foi algo bastante positivo uma vez que pudemos analisar a construção de cada teoria segundo o próprio pesquisador. Com isso, pudemos perceber certos equívocos presentes em alguns livros como, por exemplo, considerar Brown o primeiro a observar o fenômeno e/ou expor a teoria de Einstein como uma abordagem de caminhante aleatório.

Vimos durante o estudo do movimento browniano, Capítulo 2, que embora o trabalho de Brown seja de cunho qualitativo, ele representa uma aplicação fiel do método científico, sendo composto por observações, hipóteses, verificações e generalizações. Em relação às investigações de Einstein, observamos que ela constitui uma descrição matemática rigorosa e, ao mesmo tempo, voltada ao fenômeno em si. Da mesma forma, vimos que a teoria desenvolvida por Langevin representa, igualmente, uma abordagem notável, uma vez que descreve um problema complexo como o movimento browniano a partir de um artifício matemático aparentemente simples.

No Capítulo 2 também estudamos e deduzimos o mapa de Kaplan-Yorke. Analisando os trabalhos de James Kaplan e James Yorke nos quais o mapa é proposto e investigado, não encontramos, nestes, nenhuma alusão acerca do movimento browniano. A correspondência entre o mapa e o fenômeno citados, nós encontramos sobretudo a partir dos trabalhos de Beck, onde o mapa é deduzido da equação estocástica de Langevin para o movimento de uma partícula em um fluido. Beck também investigou as propriedades dinâmicas deste mapa e, há pouco tempo, utilizou o acoplamento de mapas de Kaplan-Yorke como uma ferramenta para se estudar a turbulência em fluidos. No entanto, sobre o estudo de redes de mapas de Kaplan-Yorke acoplados tal como fizemos aqui, não encontramos nenhuma referência na literatura.

A idéia de acoplar os mapas de Kaplan-Yorke como um modelo para se estudar o movimento e a interação entre partículas pode ser considerada, a princípio, uma simplificação grosseira da realidade. No entanto, vemos que as redes de mapas acoplados têm sido utilizadas nas mais diversas áreas de pesquisa e têm contribuído significativamente para o entendimento de vários fenômenos, sendo estes tão complexos quanto o movimento browniano. Além disso, conforme comentamos no Capítulo 3, uma rede de mapas com acoplamento local, por exemplo, pode ser deduzida de uma equação de reação-difusão que, de certa forma, está diretamente relacionada ao deslocamento de partículas em um meio. No referido capítulo também observamos que as redes de mapas acoplados apresentam algumas vantagens em relação a outros modelos matemáticos associados à descrição dinâmica de sistemas espacialmente estendidos, tais como, as equações diferenciais parciais e os autômatos celulares.

Dentre as várias formas de acoplamentos existentes, utilizamos quatro, sendo duas implementadas tal como se apresentam na literatura e as outras duas com algumas modificações. As primeiras referem-se ao acoplamentos do tipo lei de potência e as outras aos acoplamentos do tipo *small-world*. A partir destas quatro formas de acoplamento

podemos analisar situações distintas de interação entre as partículas e, ao mesmo tempo, comparar a dinâmica resultante em cada uma delas. Destas comparações identificamos uma certa semelhança ou equivalência entre os expoentes de Lyapunov dos sistemas. Esta constatação se apresenta como um resultado importante deste trabalho, uma vez que as comparações são feitas entre sistemas determinísticos e probabilísticos e, além disso, as relações observadas podem ser estendidas a qualquer rede de mapas com os mesmos acoplamentos.

Em relação ao estudo dos expoentes de Lyapunov realizado no Capítulo 4, dois pontos merecem ser destacados aqui, a saber, os autovalores de matrizes circulantes e a aproximação dos expoentes *via* ortonormalização de Gram-Schmidt. No que se refere às matrizes circulantes, verificamos que independentemente do acoplamento utilizado, se a rede for homogênea, podemos obter expressões exatas para os expoentes de Lyapunov quando os coeficientes da matriz Jacobiana do sistema formarem uma matriz circulante, dado que as matrizes circulantes possuem um espectro de autovalores bem definido. Sobre a aproximação dos expoentes de Lyapunov pelo método de ortonormalização de Gram-Schmidt, observamos que esta técnica é bastante eficiente do ponto de vista numérico, ela resulta em aproximações satisfatórias e evita problemas de “overflow” que observamos em algumas técnicas de aproximação numéricas.

Ainda no quarto capítulo, também apresentamos e investigamos uma hipótese referente à obtenção dos expoentes de Lyapunov de uma rede com acoplamento probabilístico por meio de métodos de primeiros princípios. Submetendo nossa hipótese a testes com redes pequenas ($N \leq 7$), obtivemos resultados em concordância com os valores encontrados por meio de duas técnicas numéricas. No entanto, para redes grandes, há uma dificuldade prática para testar tal hipótese, uma vez que o número de matrizes (de acoplamento) possíveis aumenta muito rapidamente com o número de partículas.

Sobre o processo de sincronização nas redes de mapas de Kaplan-Yorke y-acoplados, verificamos que a sincronização completa desta rede ocorre apenas se utilizarmos a mesma condição inicial para as variáveis $x^{(i)}$. Atribuindo condições iniciais distintas, observamos que as variáveis $y^{(i)}$, as quais representam as velocidades das partículas, tendem a sincronizar-se somente no caso em que todas as partículas interagem com todas as outras com a mesma intensidade, ou seja, quando o acoplamento é global. Esta forma de acoplamento, segundo nossa interpretação, representa a situação física na qual a densidade de partículas é muito grande e, portanto, o livre caminho médio é muito pequeno.

Estudando as ferramentas de diagnósticos de sincronização, Capítulo 5, verifi-

camos que a distância ao subespaço de sincronização está relacionada à variância das variáveis de estado do sistema. Ao deduzirmos a equação da distância, tanto para redes unidimensionais como para redes bidimensionais, observamos que tal distância corresponde à magnitude do eixo do elipsóide gerado pelo mapeamento de uma pequena esfera de pontos no espaço de fases. Neste sentido, vimos que o parâmetro d_n está relacionado ao expoente de Lyapunov transversal e que podemos utilizar a idéia de aproximação dos expoentes *via* Gram-Schmidt para obter o expoente de Lyapunov transversal a partir do parâmetro d_n ou, de modo equivalente, a partir da variância das variáveis de estado.

Os resultados obtidos acerca das velocidades das partículas (variáveis y dos mapas) confirmaram nossa expectativa inicial, a saber, que o aumento do acoplamento diminui a velocidade relativa entre as partículas. Além disso, eles também nos mostraram que aumentando a intensidade do acoplamento a distribuição das velocidades de uma partícula do sistema se aproxima de uma gaussiana centrada na origem, tal como a distribuição das velocidades de uma partícula isolada apresentada no Capítulo 2. Também, observamos que a velocidade média do *ensemble* de partículas tende a zero quando aumentamos o número de partículas, o que está em conformidade com a teoria do movimento browniano.

A análise da diferença entre os espectros de Lyapunov dos acoplamentos também representou uma parte importante do trabalho e dos resultados obtidos. Verificamos que a diferença dos expoentes da rede com acoplamentos do tipo lei de potência e das redes com acoplamentos do tipo *small-world* decai segundo uma lei de potência à medida que aumentamos o número de elementos do sistema. A partir desta investigação inferimos que, no limite termodinâmico, a diferença entre os expoentes de Lyapunov referente aos três acoplamentos será nula, o que significa que, utilizando os mesmos parâmetros de acoplamento e condições iniciais, a evolução espaço-temporal de uma rede de mapas acoplados com qualquer um destes acoplamentos apresentará o mesmo comportamento assintótico quando o tamanho da rede for muito grande. Especificamente a diferença do segundo maior expoente de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo lei de potência e da rede com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão decaindo com a distância entre os sítios, nós encontramos um expoente de decaimento $\beta \approx 0,5$ para diferentes valores dos parâmetros das redes. No caso de redes com mapas unidimensionais, este expoente está associado à dinâmica transversal do sistema em relação ao subespaço de sincronização e, portanto, nosso resultado representa uma informação importante a respeito da dinâmica destes sistemas.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Em trabalhos futuros pretendemos investigar de modo mais aprofundado alguns fenômenos que foram observados ao longo deste trabalho e que ainda não encontramos uma explicação ou conclusão precisas. Tais fenômenos referem-se ao decaimento da variância das velocidades com o quadrado do número de partículas do sistema (mapas da rede) e ao decaimento, em uma lei de potência, da diferença dos expoentes de Lyapunov dos acoplamentos do tipo lei de potência e *small-world*.

Também almejamos investigar a correspondência entre os parâmetros das redes estudadas neste com as grandezas físicas do movimento modelado. Neste intuito um dos assuntos a ser pesquisado refere-se à relação entre a probabilidade de colisões entre partículas e a densidade de partículas em um recipiente, dado que esta informação pode ser contemplada nos parâmetros ε e α das redes. Também pretendemos estudar os autovalores de matrizes aleatórias objetivando, com isso, generalizar nossa hipótese acerca dos expoentes de Lyapunov da rede com acoplamento do tipo *small-world* com probabilidade de conexão decaindo com a distância entre os sítios.

Outra sugestão para pesquisas futuras é acoplar também as variáveis $x^{(i)}$ dos mapas de Kaplan-Yorke, o que representaria a interação entre as moléculas do fluido. Neste caso, podemos variar o parâmetro de controle do mapa logístico utilizado como dinâmica das variáveis mencionadas a fim de considerar outras situações físicas, tal como a presença de impurezas no meio. Por fim, acreditamos que a inserção de termos de memória nos acoplamentos pode ser algo bastante interessante do ponto de vista dinâmico além de equiparar o modelo com algumas pesquisas atuais.

Acrescentamos às nossas perspectivas de trabalhos futuros as sugestões da banca de qualificação, professores Dr. Diógenes Borges Vasconcelos e Dra. Rosângela Menegotto Costa, tais sugestões referem-se à investigação: a) da relação entre o parâmetro λ e os parâmetros da rede ε , α ou o parâmetro de não-linearidade do mapa logístico μ ; b) do comportamento das velocidades das partículas com a variação do coeficiente de arraste λ ; e c) da relação entre o número de partículas e o parâmetro α que, neste trabalho, está associado à densidade de partículas no meio.

Referências

- 1 GASPARD, P.; BRIGGS, M. E.; FRANCIS, M. K.; SENGERS, J. V.; GAMMON, R. W.; DORFMAN, J. R.; CALABRESE, R. V. Experimental evidence for microscopic chaos. *Nature*, v. 394, p. 865–867, 1998.
- 2 DETTMANN, C.; COHEN, E. G. D.; BEIJEREN, H. van. Microscopic chaos from brownian motion? *Nature*, v. 401, p. 875, 1999.
- 3 HINRICHSSEN, H. Nonequilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in Physics*, v. 49, n. 815, 2000.
- 4 LANGEVIN, P. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes Rendu Acad. Science*, v. 146, p. 530–533, 1908.
- 5 BECK, C.; SCHLÖGL, F. *Thermodynamics of chaotic systems*. Great Britain: Cambridge University Press, 1993.
- 6 KAPLAN, J. L.; YORKE, J. A. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In: PEITGEN, H. O.; WALTHER, H. O. (Ed.). *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1979. v. 730, p. 204–227.
- 7 BECK, C.; ROEPSTORFF, G. From dynamical systems to the Langevin equation. *Physica A*, v. 145, p. 1–14, 1987.
- 8 BECK, C. Higher correlation functions of chaotic dynamical systems - a graph theoretical approach. *Nonlinearity*, v. 4, p. 1131–1158, 1991.
- 9 BECK, C. Chaotic cascade model for turbulent velocity distributions. *Physical Review E*, v. 49, n. 5, p. 3641–3652, 1994.
- 10 MACKEY, M. M.; TYRAN-KAMINSKA, M. Deterministic brownian motion: the effects of perturbing a dynamical system by a chaotic semi-dynamical system. *Physics Reports*, v. 422, p. 167–222, 2006.
- 11 BUNIMOVICH, L. A. Coupled map lattices: at the age of maturity. *Lect. Notes Phys.*, v. 671, p. 9–32, 2005.
- 12 VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Synchronization of coupled kicked limit cycle systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 12, n. 9, p. 1931, 1998.
- 13 PINTO, S. E. de S.; LUNARDI, J. T.; SALEH, A. M.; BATISTA, A. M. Some aspects of the synchronization in coupled maps. *Physical Review E*, v. 72, p. 037206, 2005.

- 14 TESSONE, C. J.; CENCINI, M.; TORCINI, A. Synchronization of extended chaotic systems with long-range interactions: An analogy to Lévy-flight spreading of epidemics. *Physical Review Letters*, v. 97, n. 224101, 2006.
- 15 CHERATI, Z. R.; MOTLAGH, M. R. J. Control of spatiotemporal chaos in coupled map lattice by discrete-time variable structure control. *Physics Letters A*, v. 370, 2007.
- 16 OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 1993.
- 17 WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, v. 16, p. 285–317, 1985.
- 18 MORGADO, R.; CIEŚLA, M.; LONGA, L.; OLIVEIRA, F. A. Synchronization in the presence of memory. *EPL*, v. 79, n. 10002, 2007.
- 19 BROWN, R. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, v. 4, p. 161–173, 1828.
- 20 BROWN, R. Additional remarks on active molecules. *Philosophical Magazine*, v. 6, p. 161–166, 1829.
- 21 NELSON, E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. New York: Princeton University Press, 2001.
- 22 EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten Suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, v. 17, p. 549–560, 1905.
- 23 SALINAS, S. R. A. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005.
- 24 TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. São Paulo: Edusp, 2001.
- 25 POSTERNAK, D. *Interferência da Expressão Analítica de uma Fronteira de Investimento Ótimo para um Ativo que segue o Processo de Reversão à Média por Programação Genética*. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.
- 26 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- 27 BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. *Chaotic Dynamics: an introduction*. 2. ed. New York: Cambridge, 1996.
- 28 KAPLAN, J. L.; MALLET-PARET, J.; YORKE, J. A. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, v. 4, p. 261–281, 1984.
- 29 BECK, C.; ROEPSTORFF, G.; SCHOER, C. Driven chaotic motion in single-and double-well potentials. *Physica D*, v. 72, p. 211–229, 1994.

- 30 VERHULST, P. F. *Traité Élémentaire des Fonctions Elliptiques*. Bruxelles: M. Hayez, 1841.
- 31 OLIVEIRA, R. *Mapas Acoplados e Aplicações: Processamento de Imagens, Auto-Organização e Processamento Simbólico*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- 32 RAGHAVACHARI, S.; GLAZIER, J. A. Spatially coherent states in fractally coupled map lattices. *Physical Review Letters*, v. 74, n. 16, 1995.
- 33 KANEKO, K. *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. Great Britain: John Wiley e Sons, 1993.
- 34 KANEKO, K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice. *Progress of Theoretical Physics*, v. 72, n. 3, 1984.
- 35 WALLER, I.; KAPRAL, R. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, v. 30, n. 4, 1984.
- 36 KUZNETSOV, S. Critical behavior of one-dimensional chains. *Pis'ma Zh. Tekh. Fiz.*, v. 9, p. 94–98, 1983.
- 37 FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, v. 69, n. 1, p. 32–47, 1983.
- 38 CHAZOTTES, J.; FERNANDEZ, B. The cml2004 project. *Notes Phys.*, v. 671, p. 1–8, 2005.
- 39 BATISTA, A. M. *Memórias, Espectro de Lyapunov e Sincronização de Sistemas Acoplados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2001.
- 40 CHATTERJEE, N.; GUPTE, N. Synchronization in coupled sine circle-maps. *Physical Review E*, v. 53, p. 4457–4466, 1996.
- 41 PINTO, S. E. de S.; VIANA, R. L. Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps. *Physical Review E*, v. 61, n. 5, p. 5154–5161, 2000.
- 42 PINTO, S. E. de S. *Platôs de Sincronização em Redes de Sistemas Dinâmicos a Tempo Discreto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.
- 43 ANTENEODO, C.; PINTO, S. E. de S.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Physical Review E*, v. 68, p. 137–145, 2003.
- 44 MILGRAM, S. The small-world problem. *Psychology Today*, v. 2, p. 61–67, 1967.
- 45 NEWMAN, M. E.; WATTS, D. J. Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, v. 60, n. 6, p. 7332–7342, 1999.
- 46 WAGNER, C.; STOOP, R. Neocortex's small world of fractal coupling. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 2007.

- 47 GULLICK, D. *Encounters with Chaos*. USA: McGraw-Hill, 1992.
- 48 LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- 49 KAN, M. T. V. *Sincronização de Caos em uma Rede com Interação de Longo Alcance*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2008.
- 50 SZMOSKI, R. M.; PINTO, S. E. S.; KAN, M. T. V.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L.; LOPES, S. R. Synchronization and suppression of chaos in non-locally coupled maps lattice. *Submetido ao Pramana Journal Physics*, 2009.
- 51 GRAY, R. M. *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*. [S.l.]: Stanford University, 2006.
- 52 CENCINI, M.; TORCINI, A. Nonlinearly driven transverse synchronization in coupled chaotic systems. *Physica D*, v. 208, p. 191–208, 2005.
- 53 JANSSEN, H. K.; OERDING, K.; WIJLAND, F. van; HILHORST, H. J. Lévy-flight spreading of epidemic processes leading to percolating clusters. *European Physics Journal B*, v. 7, n. 045202, 1999.
- 54 DHAMALA, M.; JIRSA, V. K.; DING, M. Transitions to synchrony in coupled bursting neurons. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 2, 2004.
- 55 PIKOVSKI, A.; ROSEMBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. England: Cambridge University Press, 2001.
- 56 VIANA, R. L.; GREBOGI, C.; PINTO, S. E. de S.; LOPES, S. R.; BATISTA, A. M.; KURTHS, J. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems. *Physical Review E*, v. 68, n. 067204, 2003.
- 57 ANTENEODO, C.; BATISTA, A. M.; VIANA, R. L. Synchronization threshold in coupled logistic map lattices. *Physica D*, v. 223, p. 270–275, 2006.
- 58 KURAMOTO, Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- 59 VIANA, R. L.; BATISTA, A. M. Synchronization of coupled kicked limit cycle systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 9, n. 12, p. 1931, 1998.