UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA-GROSSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS/FÍSICA

VAGNER DOS SANTOS

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS E EROSÃO NO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

PONTA GROSSA
2015

VAGNER DOS SANTOS

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS E EROSÃO NO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

PONTA GROSSA
2015

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Santos, Vagner dos
S231 Análise de estruturas periódicas e erosão no espaço de parâmetros de sistemas não-lineares/ Vagner dos Santos. Ponta Grossa, 2015.
63f.

Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr..

1.Caos. 2.Acoplamento. 3.Estruturas periódicas. 4.Espaço de parâmetros. 5.Expoente de Lyapunov. I.Szezech Jr., José Danilo. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado em Ciências. III. T.

CDD: 531

TERMO DE APROVAÇÃO

VAGNER DOS SANTOS

"ANÁLISE DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS E EROSÃO NO ESPAÇO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS NÃO-LINEARES"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

José Danilo Szezech Jr.

Prof. Dr. José Danilo Szezech Júnior
Departamento de Matemática e Estatística - UEPG/PR

Sérgio Roberto Lopes

Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes
Departamento de Física– UFPR/PR

Giuliano G. La Guardia.

Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática e Estatística – UEPG/PR

Ponta Grossa, 26 de março de 2015.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Gabriel e Lourdes, pois sem eles não seria nada.

Agradeço às minhas irmãs Gabrielle e Emanuelle por me incentivarem a perseverar.

Agradeço à minha esposa Bruna por ficar ao meu lado e me apoiar em todos os momentos dessa caminhada.

Agradeço aos meus amigos Silvio e Virgínia pela grande amizade com a qual sempre posso contar.

Agradeço ao meus colegas da sala 105 pelo companheirismo e pela amizade.

Agradeço ao Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr. por acreditar em minha capacidade e pela orientação nesse trabalho.

Agradeço à CAPES e à PROPESP/UEPG pelo auxílio financeiro.

Prediction is very difficult,
especially if it's about the future.
(Niels Bohr)

Resumo

Neste trabalho foi investigado o espaço de parâmetros de um sistema formado por dois osciladores acoplados em uma configuração mestre-escravo. Como ferramenta de análise utilizamos diagramas de expoente de Lyapunov no espaço de parâmetros, a distribuição a tempo finito do expoente de Lyapunov e sua fração positiva. Mostramos que quando o sistema escravo é acoplado ao mestre as estruturas periódicas em formato de camarão existentes anteriormente começam a ser erodidas de fora para dentro, e que essa erosão aumenta com o aumento da intensidade do acoplamento. Mostramos também que na região em que ocorre a erosão o segundo expoente de Lyapunov apresenta uma distribuição bimodal com um máximo próximo a zero e outro próximo a $0,1$. Plotando os pontos no espaço de fase pertencentes a cada um dos máximos encontramos dois tipos de atratores, um ciclo limite e um atrator caótico, nos quais o sistema escravo transita de forma intermitente.

Palavras-chave: Caos; Acoplamento; Estruturas Periódicas; Espaço de parâmetros; Expoente de Lyapunov.

Abstract

In this work we investigated the parameter space of a system consisting of two oscillators coupled in a master-slave configuration. In order to do so we employed Lyapunov exponent's diagrams in the parameter space, the distribution of the finite-time Lyapunov exponents and its positive fraction. We were able to show that, when the slave system is coupled to the master, the shrimp-shaped periodic structures that previously existed begins to be eroded from the outside, and that the erosion progresses with the increase in the intensity of the coupling. We also showed that in the region where the erosion takes place the second Lyapunov exponent exhibits a bimodal distribution with a maximum close to zero and the other close to 0.1. By plotting the points in the phase space that belong to each maximum we were able to identify two kinds of attractors, a limit cicle and a chaotic attractor, in which the slave system intermittently moves.

Keywords: Chaos; Coupling; Periodic Structures; Parameter Space; Lyapunov Exponent.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A área de sistemas dinâmicos trabalha com todos os tipos de sistemas que mudam com o passar do tempo. Pode-se dizer que ela teve seu início com a formulação das leis do movimento, por Isaac Newton, e do cálculo diferencial e integral, por Newton e Gottfried W. Leibniz[1], pois foi a partir daí que foi mostrado como obter modelos matemáticos para descrever processos e fenômenos físicos. Isso trouxe uma forma de pensar a natureza em que todos os corpos seguem leis matemáticas bem definidas e que, conhecendo-se essas leis, poderia-se determinar passado e futuro de qualquer objeto.

Essa forma determinista de pensar acabou dominando o pensamento científico durante muito tempo e é demonstrado na frase de Pierre Simon de Laplace em seu livro *Essai Philosophique sur les Probabiliteés*, de 1812:

> "Uma inteligência que, em um instante de tempo, conhecesse todas as forças pelas quais a natureza é animada, bem como a posição e a velocidade de cada uma de suas moléculas; se lhe é dada condição suficiente para analisar esses dados, englobaria na mesma fórmula, o movimento dos maiores corpos do universo e dos átomos mais leves. Para tal inteligência, nada seria irregular e a curva descrita por uma única molécula de ar ou vapor teria uma forma definida de maneira tão certa quanto é para nós a órbita do sol"[2](tradução nossa).

Laplace estava se utilizando da lei da dinâmica de Newton, segundo a qual a taxa de variação da velocidade de um objeto é igual à razão entre a soma de todas as forças que atuam sobre ele e a sua massa.

[1] Acredita-se que ambos tenham desenvolvido o cálculo de forma independente. Embora o livro de Newton sobre o assunto tenha sido escrito em 1671, a publicação ocorreu apenas em 1736, enquanto que o trabalho de Leibniz é o primeiro publicado na área, em 1684 [1].

[2] "Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la matiére est animée, ainsi que la position et la vîtesse de chacune de ses molécules; si d'ailleurs elle état assez vaste pour soumettre ces donnée à l'analyse, embrasserait dans la même formule, les mouvemens les plus grands corps de l'universe et ceux du plus léger atome. Pour une semblable intelligence, rien ne serait irrégulier et la courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs, paraitrait réglée d'une manière aussi certaine, que l'est pour nous l'orbe du soleil" [2].

O cenário só começaria a mudar anos depois, devido ao problema da estabilidade do sistema solar. Essa questão surgiu já na época de Newton, pois, segundo a sua lei de gravitação universal, todos os corpos que possuem massa se atraem com uma força que é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Isso significa que todos os corpos do sistema solar, que na época eram alguns planetas, o sol e a lua, atraem-se mutuamente, e desejava-se saber se as órbitas dos planetas permaneceriam com a mesma forma para qualquer tempo futuro.

O problema é facilmente solucionado tomando-se 2 corpos, porém para três ou mais corpos ele deixa de ser trivial. Ao longo dos anos algumas soluções parciais, utilizando séries de potência, foram encontradas por Laplace, em 1773, Joseph-Louis Lagrange, em 1776, e Simeón-Denis Poisson, em 1809. Contudo, em 1878, Spiru C. Haret provou que, tomando uma aproximação em terceira ordem, surgiam termos que podiam causar instabilidade [1], o que anulava os resultados anteriores. Apesar do fracasso em encontrar uma solução analítica, ainda acreditava-se fortemente na sua existência.

Em 1889, o rei Oscar II, da Suécia, decidiu premiar quem desse uma prova matemática rigorosa a respeito da estabilidade do sistema solar. A premiação foi oferecida pelo rei como comemoração de seu aniversário de 60 anos, e o vencedor foi Henri Poincaré. Embora tenha sido premiado, Poincaré não solucionou o problema da forma esperada. O trabalho dele considerou um sistema composto por três corpos coplanares em que a massa de dois deles são muito maiores que a do terceiro, nesse caso pode-se calcular analiticamente a órbita dos dois corpos de massa maior e, determinando o comportamento do campo gravitacional, encontrar o movimento do corpo de massa menor. O que Poincaré demonstrou é que era impossível encontrar uma fórmula analítica exata que descreva o movimento a partir de um ponto inicial qualquer, e que as soluções em séries, em geral, não convergiam [3]. Poincaré percebeu que o problema dos três corpos, ainda que simplificado, pode apresentar um comportamento extremamente complicado, onde pequenas diferenças nas condições iniciais podem produzir grandes diferenças no final e a previsão tornava-se impossível [1].

Apesar das descobertas de Poincaré, foi apenas após o trabalho de Edward Lorenz, no final dos anos 1950, que o movimento descoberto por ele se popularizou[3], e foi somente após o artigo de 1975 de James A. Yorke e Tien-Yen Li [4] que ficou provada matematicamente a existência de órbitas caóticas, que são órbitas aperiódicas que apresentam sensibilidade às condições iniciais [3].

Mesmo com toda a complexidade exibida por sistemas com dinâmica caótica, ainda assim existem algumas regularidades e padrões que ocorrem em tais sistemas. Uma dessas regularidades foi encontrada por Mitchell Feingenbaum no mapa logístico. Ele notou que o quociente entre distâncias sucessivas de parâmetros onde o sistema passa por

[3]Lorenz foi o responsável pela difusão do *Efeito Borboleta*, segundo o qual as pequenas perturbações causadas pelo bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia causar um tornado no Texas.

bifurcações tende para um valor determinado, hoje chamado de constante de Feigenbaum. Outra forma de regularidade foi notada por Jason Gallas no espaço de parâmetros do mapa de Hénon [5], essa regularidade está presente na forma com que as regiões periódicas organizam-se em meio às regiões caóticas, formando estruturas bem definidas que se repetem. Estruturas nesse formato foram encontradas nos mais diversos sistemas [6] [7] [8] [9], e a adição de mais uma variável ao sistema pode modificar sua forma [10].

Uma outra característica que vem sendo objeto de pesquisas é a ocorrência de sincronização em sistemas com dinâmica caótica. Esse fenômeno, a princípio inesperado devido à divergência exponencial existente entre trajetórias próximas nos sistemas caóticos, ocorre quando sistemas possuem uma interação via acoplamento [11]. Ainda que os sistemas sejam iniciados com valores diferentes para suas variáveis, após um certo tempo elas passam a apresentar os mesmos valores. Algumas vezes essa sincronização é perdida temporariamente devido à instabilidades existentes em regiões do espaço de fase do sistema, fenômeno chamado de borbulhamento, e outras vezes o sistema acoplado passa por uma bifurcação, chamada bifurcação *blowout*, a partir da qual a sincronização pode deixar de acontecer.

Neste trabalho investigamos as alterações nas estruturas presentes no espaço de parâmetros de um sistema ao ser acoplado com um outro similar, porém de parâmetros fixos. Utilizamos um sistema proposto por Gauthier e Bienfeng [12] cujas equações descrevem a evolução dinâmica da corrente elétrica e da queda de tensão ao longo de um circuito elétrico com componentes não-lineares. Esse sistema foi escolhido devido à ocorrência do efeito de borbulhamento em alguns esquemas de acoplamento feitos nesse sistema. Primeiramente consideramos um sistema desacoplado para localizar as estruturas periódicas, e então seguimos para o acoplamento com vários valores de intensidade.

O objetivo deste trabalho é analisar, no espaço de parâmetros, o efeito que o acoplamento com outro sistema produz nas estruturas periódicas, relacionar a possível destruição dessas estruturas com os fenômenos de borbulhamento e bifurcação *blowout*, calcular e analisar a distribuição do expoente de Lyapunov a tempo finito próximo às regiões de transição no espaço de parâmetros.

O trabalho está organizado da seguinte forma, no Capítulo 2 é feita uma introdução aos sistemas dinâmicos de tempo contínuo. Enfatizamos o sistema tridimensional de Lorenz e o utilizamos para explorar conceitos como pontos fixos, periódicos, órbitas caóticas e diagramas de bifurcação. No Capítulo 3 são apresentados conceitos da teoria de sistemas dinâmicos como pontos críticos e estabilidade de sistemas lineares, análise da estabilidade linear de sistemas não-lineares, definição e cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov, para ilustrar tais conceitos utilizamos como modelo o sistema do pêndulo amortecido com um forçamento periódico. Ainda no Capítulo 3 apresentamos as estruturas periódicas no espaço de parâmetros, No Capítulo 4 tratamos de sistemas acoplados, apresentamos dois arranjos de acoplamento e algumas definições pertinentes à análise da estabilidade da sincronização entre dois sistemas, bem como fenômenos relacionados com a perda da sincronização. Nos Capítulos 5 e 6, respectivamente, apresentamos os resultados obtidos da investigação do sistema escolhido e apontamos as conclusões a partir da análise dos resultados, bem como perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Um sistema dinâmico pode ser definido como um sistema que evolui com o tempo. A evolução desse sistema pode ser descrita por equações diferenciais ou por mapas. No primeiro caso considera-se o tempo como uma variável contínua, enquanto que no segundo caso considera-se o tempo como variável discreta.

Em se tratando de sistemas descritos por equações diferenciais, também conhecidos como fluxos, sua evolução pode ser obtida resolvendo um sistema de equações na forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

em que $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \ldots \quad \dot{x}_n]^T$ é uma matriz coluna cujos elementos são a taxa de variação das variáveis dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e a matriz $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \ldots \quad f_n(\mathbf{x})]^T$ é uma matriz coluna cujos elementos nos fornecem as funções que governam as taxas de variação.

A Equação 2.1 não apresenta termos derivados de ordem maior que um e a única variável independente é o tempo, por isso recebe o nome de equação diferencial ordinária de primeira ordem. De modo geral, $\mathbf{F}$ pode depender explicitamente do tempo, nesses casos o sistema é dito não autônomo. Embora uma grande variedade de sistemas possa apresentar termos de ordens superiores e ser do tipo não-autônomo, é possível, por meio de uma mudança de variáveis, reescrevê-los na forma da Equação 2.1.

Equações diferenciais podem ser classificadas como lineares e não-lineares. Equações diferenciais lineares são aquelas em que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ possui apenas termos lineares de $\mathbf{x}$ e t e possuem solução analítica. Equações não-lineares podem não apresentar solução analítica, nesses casos sua solução pode ser obtida apenas utilizando métodos de integração numérica e existe a possibilidade de ocorrência de caos.

Os mapas, por sua vez, descrevem a evolução das variáveis num tempo futuro com base em seus valores em tempos anteriores. O tempo possui apenas valores discretos

$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. De forma geral, um mapa N-dimensional pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} x_{1_{t+1}} &= f_1(x_{1_t}, x_{2_t}, ..., x_{N_t}), \\ &\vdots \\ x_{N_{t+1}} &= f_N(x_{1_t}, x_{2_t}, ..., x_{N_t}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, para conhecer o valor da variável x_1 em um instante de tempo $t+1$, precisamos conhecer o valor de todas as N variáveis no tempo anterior.

Mapas também podem ser classificados como lineares e não-lineares. No caso de mapas lineares os valores de x_i podem convergir para um ponto fixo, divergir para o infinito, ou estacionar num equilíbrio [13] enquanto que em mapas não-lineares a dinâmica do sistema pode apresentar comportamentos mais complicados tais como caos, intermitência, bifurcações, entre outros.

2.1.1 Fluxos

A formulação matemática de inúmeros fenômenos acabam por resultar em equações diferenciais não-lineares. Em muitos casos é possível utilizar uma equação linear cujo comportamento é próximo ao da equação não-linear para se obter alguns resultados [14]. Contudo, são perdidos certos comportamentos que são observados apenas no sistema não-linear.

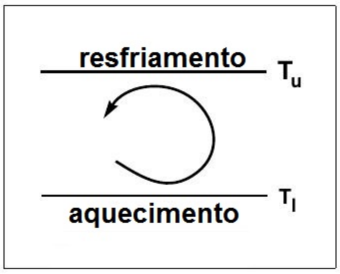
Em seu trabalho sobre a estabilidade das órbitas no problema dos três corpos, Henri Poincaré encontrou que não era possível se obter soluções analíticas para o sistema de equações diferenciais [3], e que esse sistema apresentava um comportamento estranho e incrivelmente complicado. Isso contrariava o paradigma da época, em que se acreditava que se as soluções estão em uma região limitada do espaço elas tendem ou para um ponto fixo, devido ao atrito por exemplo, ou para um movimento periódico como o dos planetas [3]. Esse tipo de movimento, limitado a uma região do espaço, aperiódico, e que é sensível às condições em que o sistema inicia, é o que atualmente denominamos como caos.

Embora Poincaré tenha sido o primeiro a vislumbrar a existência do que hoje conhecemos como caos, e muitas das técnicas que ele desenvolveu sejam utilizadas até os dias de hoje em uma grande variedade de sistemas, foi somente a partir do trabalho de Edward Lorenz [15] no final dos anos 50 que esse tipo de movimento passou a ser estudado mais a fundo.

Edward Lorenz possuía formação em matemática e serviu como metereologista durante a segunda guerra mundial. Após a guerra, ele deciciu continuar nessa área [1]. Lorenz queria saber o motivo de não se conseguir prever o clima com um grau de confiabilidade alto apesar de se conhecerem as equações da circulação atmosférica e as condições do clima em vários instantes de tempo.

Como o modelo utilizado na época era um modelo linear, Lorenz resolveu testar a

Figura 2.1 – Ilustração de um sistema convectivo.



Fonte: Adaptado de [3].

capacidade de previsão do modelo linear quando aplicado a um sistema não-linear. Para isso, ele começou a desenvolver um modelo não linear para o clima. Inicialmente ele trabalhou com um sistema de 12 equações diferenciais e, utilizando um computador para realizar os cálculos, encontrou valores para o conjunto de parâmetros do sistema para os quais as órbitas eram aperiódicas. Para esses parâmetros, ele descobriu que pequenas incertezas nas condições iniciais aumentavam exponencialmente com o passar do tempo, ou seja, ainda que duas órbitas iniciassem o movimento com uma diferença pequena, após um certo tempo seus movimentos estariam completamente descorrelacionados.

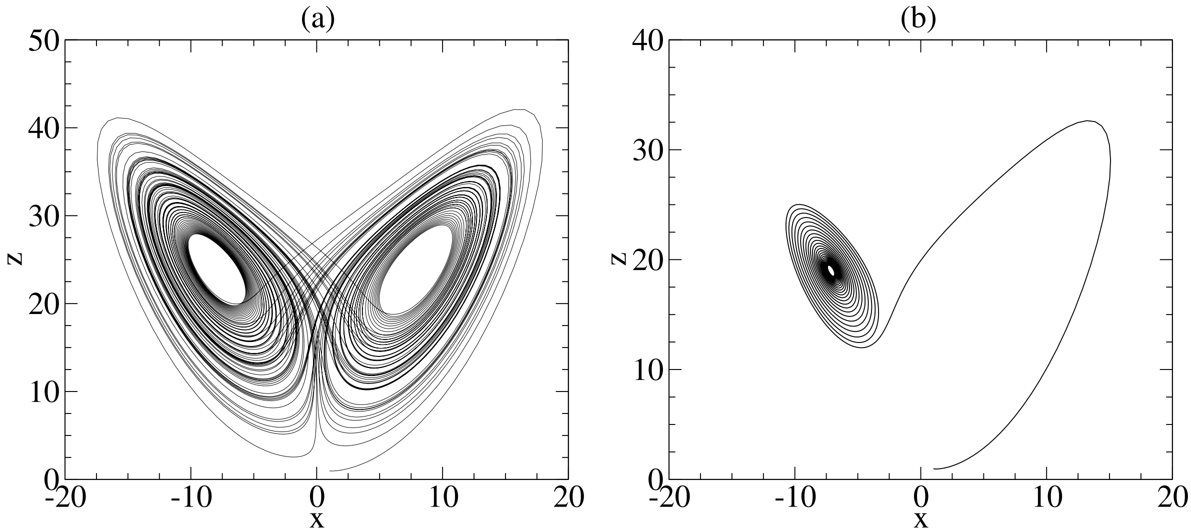
Para mostrar que as propriedades observadas não eram particularidades do modelo, Lorenz deciciu reduzir a complexidade do modelo e, após muitas simplificações, chegou no seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Esse sistema de equações, hoje conhecido como sistema de Lorenz, descreve o movimento convectivo de um fluido como o da Figura 2.1, em que ele é aquecido por uma placa inferior (temperatura T_l) e resfriado por uma placa superior (temperatura T_u). Nas Equações 2.3, se $x > 0$ ($x < 0$) o fluido circula no sentido horário (anti-horário), y é proporcional à diferença de temperatura entre elementos de volume ascendentes e descendentes, e z é proporcional à distorção do perfil vertical de temperatura em relação ao equilíbrio [1]. Os parâmetros do sistema são o número de Prandtl σ, o número de Rayleigh r, e b.

Para $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, o sistema apresenta diferentes comportamentos para valores de r, como pode ser visto na Figura 2.2. Na Figura 2.2(a) é possível ver o atrator caótico que o sistema exibe para $r = 25$, enquanto que na Figura 2.2(b) pode-se perceber a convergência da órbita para um ponto fixo quando $r = 20$. O termo atrator é utilizado porque condições iniciais próximas à essa região resultam em trajetórias que tendem para a órbita caótica.

Figura 2.2 – Atratores do sistema de Lorenz.(a) Atrator caótico presente para $r = 25$ e (b) convergência para um ponto fixo para $r = 20$.

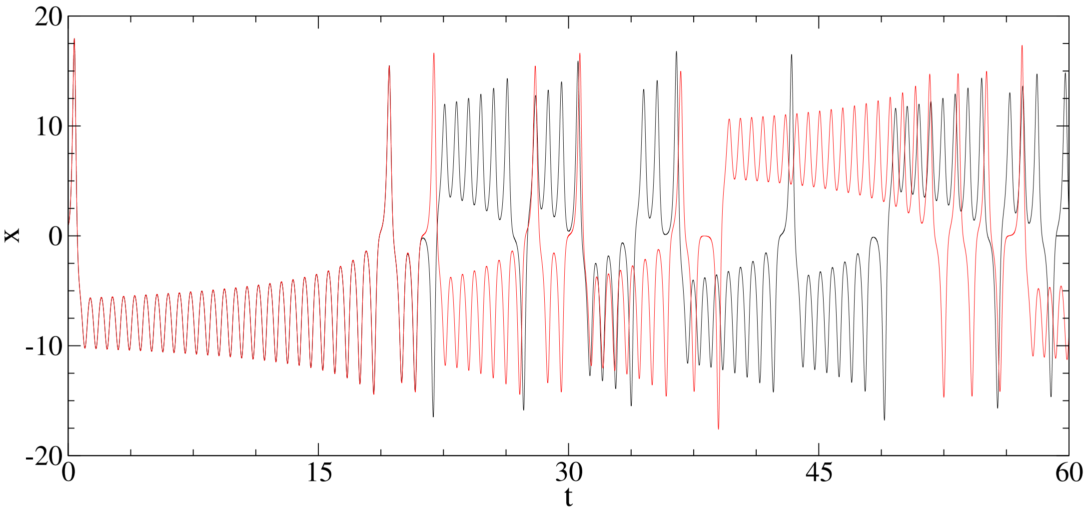


Fonte: O Autor.

Para verificar a sensibilidade às condições iniciais relatada por Lorenz, iniciamos o sistema com duas condições iniciais bastante próximas e observamos a série temporal de ambos os sistemas simultaneamente. Na Figura 2.3, tem-se a série temporal de duas condições iniciais com uma diferença de $0,1\%$. Os valores de parâmetros utilizados são os mesmos da Figura 2.2(a), e nota-se que após um certo tempo as trajetórias seguem caminhos diferentes no atrator.

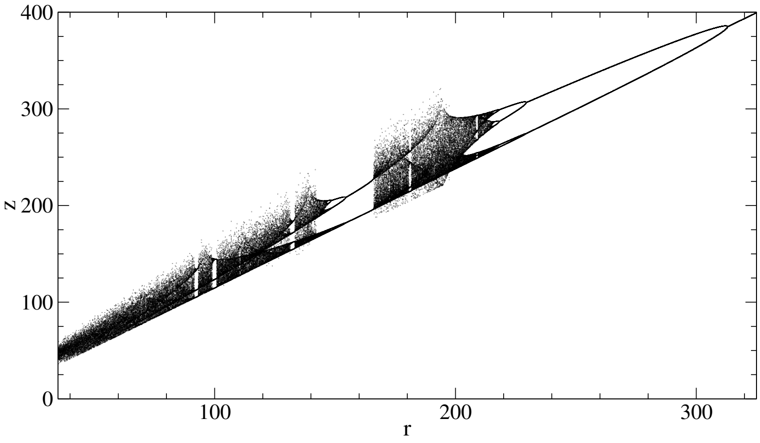
Um dos métodos que podem ser utilizados para investigar a mudança qualitativa no comportamento de um sistema com relação à variação de um parâmetro é a construção de um diagrama de bifurcação. Isso pode ser feito da seguinte forma, fixamos o valor dos

Figura 2.3 – Séries temporais da variável x do sistema de Lorenz com duas condições iniciais com uma diferença de $0,1\%$. O valor dos parâmetros são os mesmo da Figura 2.2(a).



Fonte: O Autor.

Figura 2.4 – Diagrama de bifurcação do sistema de Lorenz com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ fixos e $25 < r < 325$, ilustrando a ocorrência de órbitas periódicas e caóticas no sistema.

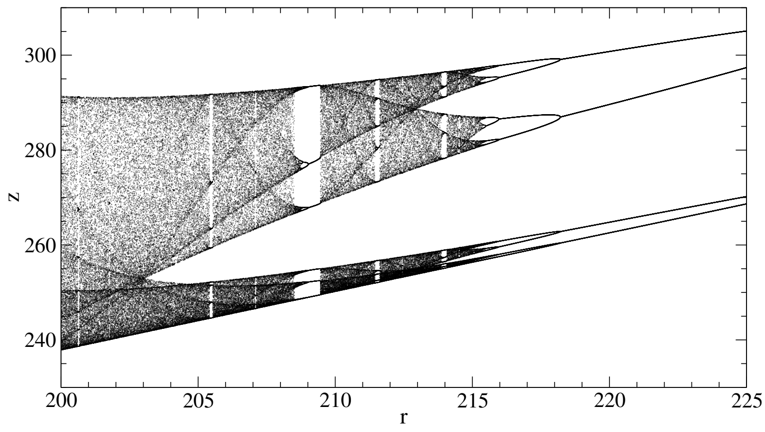


Fonte: O Autor.

parâmetros e iniciamos a evolução do sistema, após um intervalo de tempo transiente salvamos o valor de uma das variáveis do sistema quando ela apresenta máximos locais, a seguir adicionamos ao valor de um dos parâmetros um incremento e repetimos o processo. Procedendo dessa forma, obtemos o estado para o qual a órbita converge para um dado valor de parâmetro.

Na Figura 2.4 plotamos o diagrama de bifurcação do sistema de Lorenz utilizando o parâmetro r no eixo horizontal, com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ fixos, e no eixo vertical plotamos valores de máximos locais da variável z. Do diagrama podemos notar que para $r > 313$ o sistema apresenta apenas um máximo local, o que caracteriza uma órbita periódica de período igual à um. Quando diminuímos o valor de r o sistema passa por uma bifurcação e passa a exibir uma órbita de período 2, a partir de $r \approx 230$ o sistema sofre outra bifurcação e passa a convergir para uma órbita de período 4. Na Figura 2.5 podemos ver que conforme vamos diminuindo r o sistema vai sofrendo dobras de período sucessivas

Figura 2.5 – Ampliação de uma região da Figura 2.4 onde podemos identificar as dobras de período pelas quais o sistema passa na rota para o caos.



Fonte: O Autor.

até que as órbitas periódicas deixam de ser estáveis, a partir daí o sistema apresenta predominantemente comportamento caótico, com a ocorrência de algumas janelas onde o comportamento volta a ser periódico. A ocorrência dessas janelas deve-se ao fato de que, para conjuntos de parâmetros para os quais o sistema apresenta caos, ele possui também um número infinito de órbitas periódicas instáveis no espaço de fase, e uma pequena mudança em um dos parâmetros, por menor que seja, pode fazer com que uma dessas órbitas periódicas passe a ser estável, alterando o comportamento do sistema.

Capítulo 3

Caos

O estudo do caos em sistemas dinâmicos tem sido uma frutífera área de pesquisa desde a publicação do artigo *Period Three Implies Chaos* de James A. York e Tien-Yien Li em 1975 [4]. Foi nesse artigo que se demonstrou que se um mapa unidimensional apresenta uma órbita de período três, então ele apresenta órbitas de qualquer período, incluindo órbitas aperiódicas [16]. Atualmente, uma grande variedade de sistemas é conhecido por exibir comportamento caótico, além do sistema de Lorenz e dos n-corpos orbitando gravitacionalmente, temos também o circuito de Van der Pol[17], o pêndulo forçado-amortecido [3], o circuito de Chua [18], o sistema de Roessler [19], a Equação de Duffing[20], o modelo de predador-presa de Lotka-Volterra [21], dentre outros.

Como esses sistemas,em geral, não apresentam solução analítica, utilizam-se técnicas numéricas e qualitativas na análise do sistema para se obter o seu comportamento assintótico.

3.1 Caos em Fluxos

Considere um pêndulo composto por uma esfera de massa m e uma haste rígida de comprimento l e massa desprezível sob influência gravitacional. Desconsiderando a resistência com o ar, mas levando em conta o atrito no pivô, e aplicando a segunda lei de Newton, obtém-se:

$$ml\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\mu\frac{d\theta}{dt} - mg\sin(\theta), \tag{3.1}$$

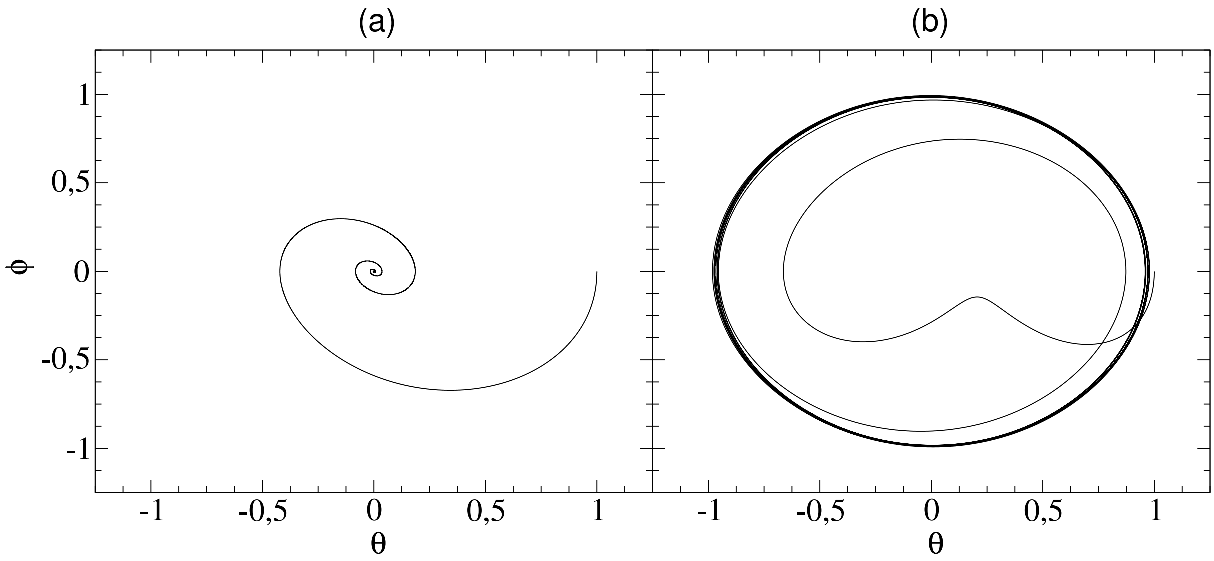
em que $\mu > 0$ é o coeficiente de atrito no pivô. Fazendo $m = 1$, $l = g$ e definindo $\mu/l = c$, segue que:

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -c\frac{d\theta}{dt} - \sin(\theta). \tag{3.2}$$

Definindo $\phi = \dot{\theta}$, podemos reescrever a Equação 3.2 como

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= -c\phi(t) - \sin(\theta(t)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Figura 3.1 – Plano de fase do pêndulo (a) amortecido e (b) forçado-amortecido para a mesma condição inicial. Em ambos os casos $c = 0,5$ e a intensidade do forçamento é $f_0 = 0,0$ no primeiro caso e $f_0 = 1,0$ no segundo.



Fonte: O Autor.

Se o sistema inicia nos pontos $(\theta_0, \phi_0) = (0, 0)$ ou $(\theta_0, \phi_0) = (\pi, 0)$, então $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ e o sistema permanece no respectivo estado inicial para qualquer tempo posterior. Esses pontos são denominados pontos críticos. Porém, se o sistema iniciar em um estado diferente ele sempre vai convergir para o ponto crítico em $(\theta_0, \phi_0) = (0, 0)$. Para ver isto, basta lembrar que o atrito no pivô dissipa a energia do sistema até ele cessar o movimento. O ponto crítico para o qual o sistema converge é dito estável. Condições iniciais próximas ao ponto crítico em $(\theta_0, \phi_0) = (\pi, 0)$ sempre se afastarão desse ponto, não importa o quão próximas elas estejam, esse ponto é dito ponto crítico instável.

Se adicionarmos a esse sistema um forçamento periódico de intensidade f_0, de forma a proporcionar ao sistema uma injeção de energia, a equação que rege o movimento do pêndulo será:

$$\ddot{\theta} = -c\dot{\theta} - \sin(\theta) + f_0 \sin(t). \tag{3.4}$$

Devido ao termo do forçamento, o pêndulo não mais convergirá para o ponto crítico na origem do plano de fase, ao invés disso ficará oscilando de forma periódica, dado que $c > 0$. Isto é, se $f_0 = 0$ o ponto fixo na origem é estável, e se $f_0 > 0$ ele é instável. Na Figura 3.1 pode-se ver a trajetória no plano de fase para dois conjuntos de parâmetros. Mesmo nesse exemplo relativamente simples é possível notar que a mudança de um parâmetro pode causar uma mudança significativa no comportamento do sistema devido a mudança na estabilidade das órbitas.

3.1.1 Pontos Críticos e Estabilidade Linear

Começamos o estudo do comportamento das soluções de um sistema de equações diferenciais não-lineares a partir de equações lineares autônomas no plano. Seja um sistema linear bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ax_1 + bx_2 = & f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x_2} &= cx_1 + dx_2 = & f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que a, b, c e d são números reais. Nos pontos onde $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ as taxas de variação de ambos x_1 e x_2 são nulas. Esses pontos recebem uma denominação especial.

Definição 1 *Dado um sistema autônomo na forma da Equação 3.5, um ponto* (x_1^*, x_2^*) *em que* $f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ *é denominado ponto crítico, ou ponto fixo, do sistema.*

Suponha que as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam soluções gerais do tipo:

$$x_1(t) = Ae^{\Lambda t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = Be^{\Lambda t}, \tag{3.6}$$

onde A e B dependem das condições iniciais do sistema. Substituindo na Equação 3.5, obtém-se:

$$\begin{aligned} (a - \Lambda)A + bB &= 0, \\ cA + (d - \Lambda)B &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para que esse sistema tenha solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero.

$$\begin{vmatrix} (a - \Lambda) & b \\ c & (d - \Lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Logo

$$\Lambda^2 - (a + d)\Lambda + (ad - bc) = 0.$$

A solução da equação acima é:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}. \tag{3.8}$$

Como o sistema é linear, se duas funções independentes são soluções então a solução geral é dada por uma combinação linear entre elas. Sendo assim, a solução geral do sistema linear 3.5 é:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} e^{\Lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} e^{\Lambda_2 t}. \tag{3.9}$$

Pode-se ver a partir da Equação 3.9 que a menos que ambos Λ_1 e Λ_2 (ou $Re(\Lambda_1)$ e $Re(\Lambda_2)$ no caso de serem complexos) sejam menores ou iguais a zero, a solução diverge quando $t \to +\infty$. No caso de serem números negativos, a solução tende para o ponto crítico na origem quando $t \to \infty$.

Definição 2 *Considere um sistema de equações diferenciais n-dimensional na forma:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{3.10}$$

em que $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dots \quad \dot{x}_n]^T$ *e* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_n(\mathbf{x})]^T$. *Define-se a matriz Jacobiana (ou simplesmente Jacobiana)* $\mathbf{J}$ *do sistema como sendo*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{pmatrix}.$$

A Jacobiana da Equação 3.5 é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Logo, Λ_1 e Λ_2 encontrados acima são os autovalores da matriz Jacobiana do sistema, e são eles que vão nos fornecer informações a respeito da estabilidade dos pontos críticos.

Se o determinante da Equação 3.11 é diferente de zero, então o único ponto crítico do sistema se encontra na origem. Da Equação 3.8, são quatro possibilidades que devemos considerar para os autovalores, em cada caso teremos um comportamento distinto para o ponto crítico.

1. Os autovalores são reais e de mesmo sinal;

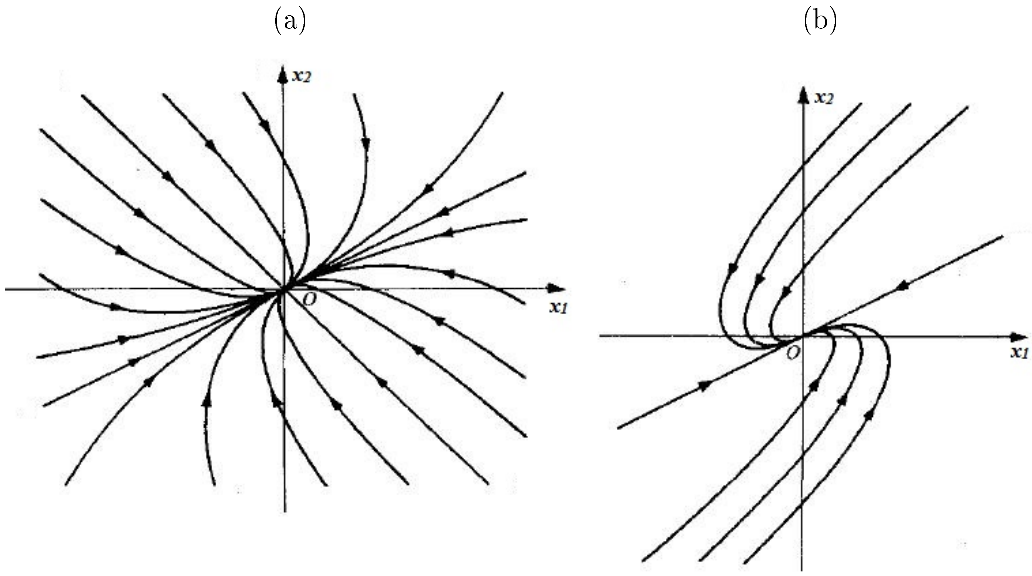
2. Os autovalores são reais, diferentes e de sinais diferentes;

3. Os autovalores são complexos conjugados mas não imaginários puros;

4. Os autovalores são imaginários puros.

Caso 1 Quando $\Lambda_1, \Lambda_2 < 0$, então, a partir da Equação 3.9, percebe-se que ambas as exponenciais se aproximam da origem para $t \to \infty$. Se $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ isso significa que

Figura 3.2 – Retrato de fase de 3.5 quando os autovalores da Jacobiana são reais e negativos. (a) $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ e (b) $\Lambda_1 = \Lambda_2$. Quando os autovalores são positivos a situação é análoga, exceto que os sentidos das flechas é invertido.



Fonte: Adaptado de [14].

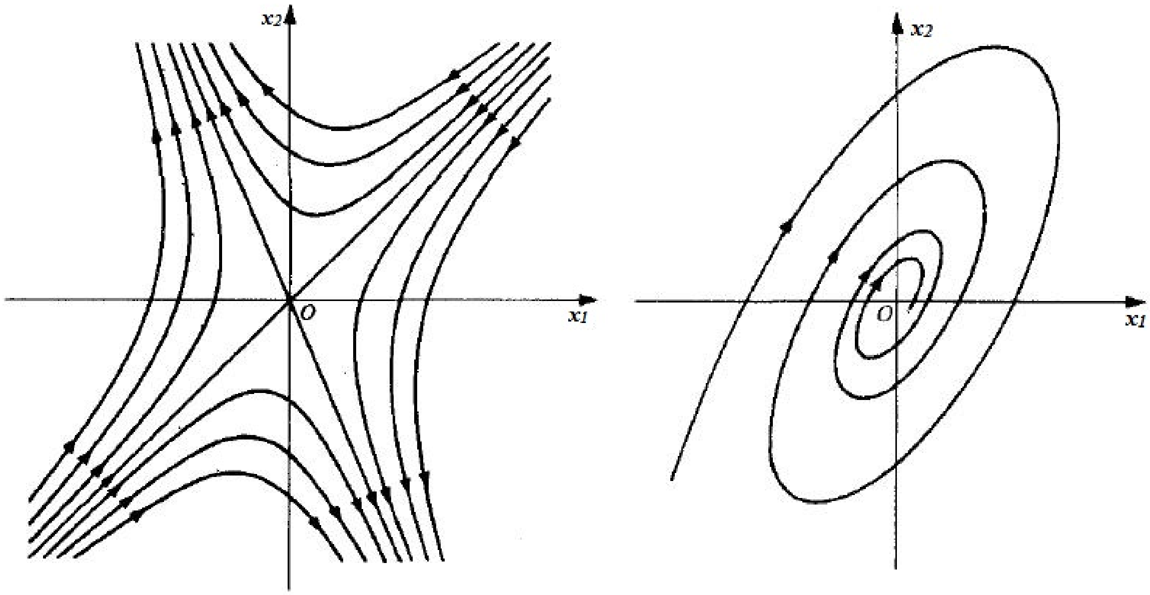
existem duas direções (dadas pelos autovetores) em que as órbitas se aproximam do ponto crítico, Figura 3.2(a), e se $\Lambda_1 = \Lambda_2$ então existe apenas uma direção de aproximação, Figura 3.2(b). Nesses casos o ponto crítico é do tipo *nó assintoticamente estável*. Quando $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$, o raciocínio é equivalente, exceto que as órbitas se afastam do ponto crítico. Ele passa a ser denominado *nó instável*.

Caso 2 Se os autovalores apresentam sinais diferentes, então uma das exponenciais tende para zero e a outra diverge quando $t \to \infty$. Nesse caso existe uma direção em que as órbitas se aproximam do ponto crítico (dada pelo autovetor correspondente ao autovalor negativo) e outra direção em que as órbitas se afastam (dada pelo autovetor correspondente ao autovalor positivo), Figura 3.3(a). Nesse caso o ponto crítico é chamado de *ponto de sela*.

Caso 3 Nesse caso as exponenciais podem ser separadas como o produto de uma exponencial simples com uma exponencial complexa. A existência da exponencial complexa vai fazer com que as órbitas apresentem um trajetória em espiral. Como os autovalores são complexos conjugados, suas partes reais são sempre iguais, então basta analisarmos o sinal. Se $Re(\Lambda_1), Re(\Lambda_2) < 0$, então as órbitas apresentam um movimento espiral convergindo para a origem com $t \to \infty$, e o ponto crítico é um *foco assintoticamente estável*, Figura 3.3(b). Se $Re(\Lambda_1), Re(\Lambda_2) > 0$ as trajetórias serão espirais que se afastam da origem, e o ponto crítico é um *foco instável*.

Figura 3.3 – Retrato de fase de 3.5. (a) O ponto crítico na origem é um ponto de sela, que ocorre quando Λ_1 e Λ_2 possuem sinais diferentes. (b) Quando os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa, a origem é um foco estável e as órbitas possuem uma trajetória espiral em direção a origem. Para um foco instável a situação é a mesma porém as flchas invertem o sentido.

(a) (b)



Fonte: Adaptado de [14].

Caso 4 Quando os autovalores são complexos conjugados imaginários puros (parte real igual à zero), os únicos termos da Equação 3.9 que irão evoluir com o tempo são exponenciais complexas. Como essas expenenciais são funções periódicas, as órbitas não se aproximam e nem se afastam da origem, mas permanecem sempre à mesma distância a cada ciclo, Figura 3.4. Nesse caso o ponto crítico é um *centro* e é um ponto não-hiperbólico. Embora não haja aproximação das órbitas quando $t \to \infty$ ele é *estável*, porém não *assintoticamente estável*.

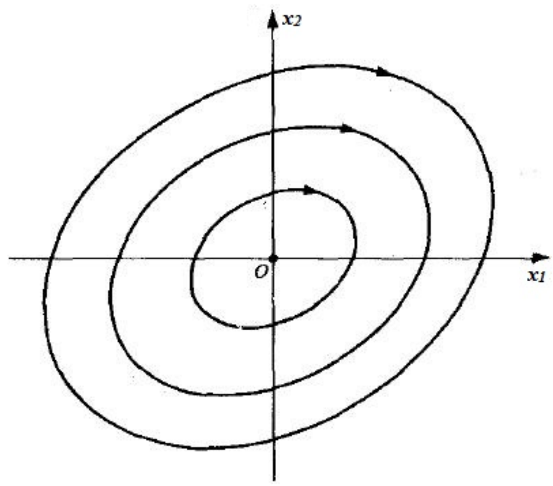
Definição 3 *Sejam Λ_1, ..., Λ_n autovalores da matriz Jacobiana do Sistema 3.10 com as derivadas tomadas em um ponto crítico. Então, se $\Lambda_i \neq 0$ (ou $Re(\Lambda_i) \neq 0$ caso Λ_i seja complexo) para todo i, o ponto é dito hiperbólico. Caso contrário ele é dito não-hiperbólico.*

Podemos reescrever a Equação 3.8 como:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{J}) \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}(\mathbf{J}))^2 - 4\det(\mathbf{J})}}{2}, \tag{3.12}$$

onde $\mathrm{Tr}(\mathbf{J})$ e $\det(\mathbf{J})$ são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz Jacobiana. Por meio da relação acima é possível fazer um gráfico para caracterizar o ponto crítico sem a necessidade de calcular os autovalores de forma explícita. O gráfico pode ser visto na Figura 3.5.

Figura 3.4 – Retrato de fase de 3.5 para quando os autovalores são complexos conjugados puramente imaginários. Nesse caso a origem é um centro estável e as órbitas não se aproximam nem se afastam da origem.

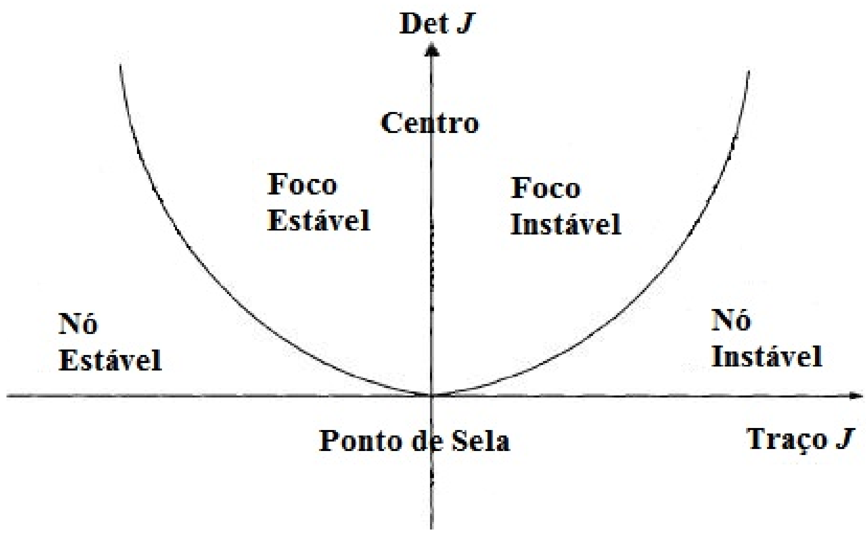


Fonte: Adaptado de [14].

A análise de estabilidade dos pontos críticos para sistemas não-lineares se assemelha à dos sistemas lineares. Considere o sistema não-linear:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = & F_2(x_1, x_2) \end{array} . \tag{3.13}$$

Figura 3.5 – Gráfico do determinante da Jacobiana pelo traço para um sistema bidimensional. A parábola é dada pela equação $(\mathrm{Tr}(\mathbf{J}))^2 - 4\det(\mathbf{J}) = 0$ e cada região gráfico corresponde a um tipo diferente de ponto crítico.



Fonte: Adaptado de [22].

Seja (x_1^*, x_2^*) um ponto crítico da Equação 3.13, pode-se determinar o comportamento de soluções próximas ao ponto crítico utilizando uma expansão em série de Taylor de $F_1(x_1, x_2)$ e $F_2(x_1, x_2)$ ao redor desse ponto. Fazendo a expansão obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & (x_1 - x_1^*)\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + (x_2 - x_2^*)\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + \dots \\ \dot{x}_2 & = & (x_1 - x_1^*)\left[\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + (x_2 - x_2^*)\left[\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + \dots \end{array} . \tag{3.14}$$

Os termos constantes não aparecem na Equação 3.14 porque, por definição, $F_1(x_1^*, x_2^*) = F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$.

Definindo novas variáveis $\tilde{x}_1 = x_1 - x_1^*$ e $\tilde{x}_2 = x_2 - x_2^*$, com $\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_1$ e $\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2$, e desprezando os termos de maior ordem, podemos reescrever a Equação 3.14 como:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x}}_1 & \approx & \tilde{x}_1\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + \tilde{x}_2\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} \\ \dot{\tilde{x}}_2 & \approx & \tilde{x}_1\left[\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} + \tilde{x}_2\left[\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right]_{(x_1^*, x_2^*)} \end{array} . \tag{3.15}$$

Esse processo é denominado linearização. Observe que a Equação 3.15 possui a mesma forma da Equação 3.5, que é linear, e que a matriz dos coeficientes é, novamente, a matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

em que as derivadas são calculadas no ponto crítico.

A aproximação feita acima é válida para pontos próximos ao ponto crítico e nos mostra a evolução do sistema quando ele sofre uma pequena perturbação do equilíbrio. Assim, a estabilidade de um ponto crítico de um sistema não-linear quase sempre pode ser determinada a partir de um sistema linear correspondente.

Teorema 1 *(Teorema de Hartman-Grobman) - Suponha que (x_1^*, x_2^*) seja um ponto crítico hiperbólico da Equação 3.13. Então existe uma vizinhança deste ponto em que o retrato de fase do sistema não-linear apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear equivalente [14].*

O Teorema de Hartman-Grobman mostra que um ponto crítico de um sistema não-linear possui localmente o mesmo comportamento de nó, sela ou foco do ponto crítico do sistema linearizado, a menos que ele seja um ponto não-hiperbólico. Nesse último caso o método de análise linear não nos permite identificá-lo.

Teorema 2 *(Teorema de Estabilidade) - Se ambos os autovalores Λ_1 e Λ_2 da matriz Jacobiana de 3.13 tomada em um ponto fixo (x_1^*, x_2^*) possuem parte real negativa, então esse ponto não é apenas um ponto fixo estável da equação linearizada, como também é um ponto fixo estável de 3.13 [14].*

No caso do pêndulo amortecido investigado no início do capítulo, a matriz Jacobiana e seus autovalores são:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & -c \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

e

$$\det \begin{vmatrix} -\Lambda & 1 \\ -\cos(\theta) & -c-\Lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \Lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\cos(\theta)}}{2}. \tag{3.18}$$

Para o ponto fixo $P_1 = (0,0)$, se $c < 2$ então P_1 é um foco estável, se $c > 2$, P_1 é um nó estável, e se $c = 0$ então P_1 é um centro não-hiperbólico. Enquanto que $P_2 = (\pm\pi, 0)$ é um ponto de sela independente do valor de c, visto que $|\sqrt{c^2+4}| > c$ e, portanto, a Jacobiana nesse ponto sempre apresentará um autovalor positivo e um negativo.

Quando adicionamos um forçamento periódico ao sistema, então ele passa a ser não-autônomo. Para transformá-lo novamente em um sistema autônomo definimos uma nova variável $\omega = t$, o que nos permite reescrever a Equação 3.4 como:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \quad &= \phi, \\ \dot{\phi} \quad &= -c\phi - \sin(\theta) + f_0 \sin(\omega), \\ \dot{\omega} \quad &= 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Quando $f_0 \neq 0$ o sistema não apresenta mais pontos críticos. As trajetórias passam, então, a convergir para uma órbita fechada. Essa órbita é chamada de *ciclo-limite.*

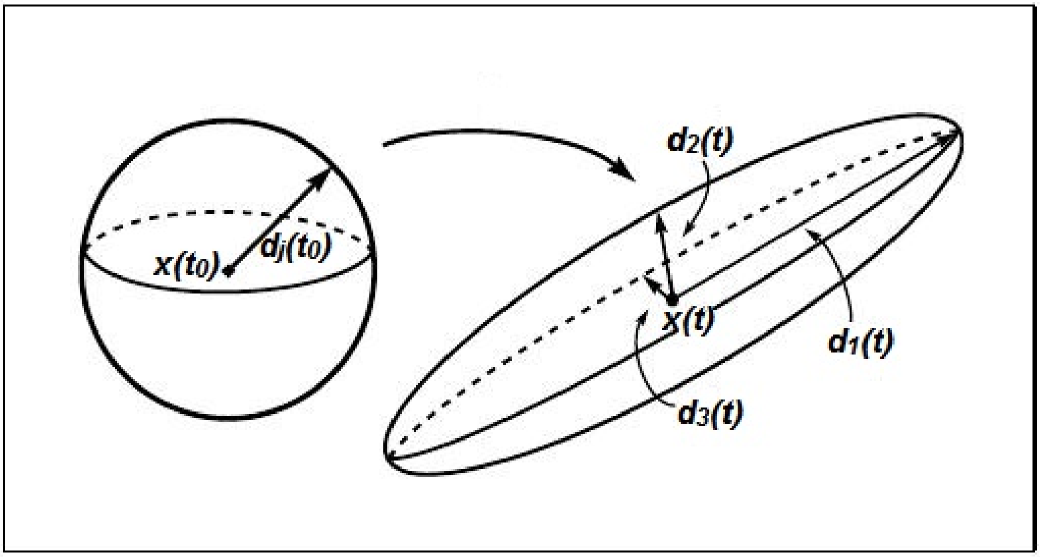
Definição 4 *Um caminho fechado C do Sistema 3.13 do qual as trajetórias se aproximam de forma espiral tanto de dentro quanto de fora quando $t \to \infty$ ou quando $t \to -\infty$ é chamado de ciclo limite.*

Da mesma forma que nos casos anteriores, se existe uma vizinhança de pontos que é atraída para o ciclo limite quando $t \to \infty$ ele é um *ciclo limite estável.* Caso se aproximem do ciclo limite quando $t \to -\infty$ (ou seja, se afastam dele quando $t \to \infty$), ele é um *ciclo limite instável.* A Figura 3.1(b) é um exemplo de ciclo limite estável.

3.1.2 Expoentes de Lyapunov

Para analisar a sensibilidade às condições iniciais em um sistema n-dimensional procedemos da seguinte forma. Considera-se uma hiper-esfera de condições iniciais de raio infinitesimal centrada em um ponto $\mathbf{x}(t_0)$. Conforme o tempo passa, essa esfera se deforma em um hiper-elipsóide, com n eixos principais, Figura 3.6. Chamando $d_j(t_0)$ o eixo principal do hiper-elipsóide em uma direção j, consideramos que após um tempo t o valor

Figura 3.6 – Esquema da evolução temporal de uma esfera de condições iniciais centradas em $\mathbf{x}(t_0)$. Após um tempo a esfera se contrai em algumas direções e se expande em outras, se deformando em um elipsóide.



Fonte: Adaptado de [3].

de d_j varia de forma exponencial [1]. Assim, em um tempo t qualquer, temos:

$$d_j(t) = d_j(t_0)\mathrm{e}^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad \text{com} \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{3.20}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$\lambda_j(t) = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}. \tag{3.21}$$

No limite $t \to \infty$ os números λ_j são chamados de *expoentes de Lyapunov* do sistema[1].

É possível relacionar os expoentes de Lyapunov de um sistema com o comportamento do volume da hiper-esfera de condições iniciais. Para isso, basta notar que o volume do hiper-elipsóide deve ser proporcional ao produto de todos os d_j's [1]. Então o volume após um tempo t é dado por:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^{n} d_j(t_0)\mathrm{e}^{\lambda_j(t-t_0)} = V(t_0)\mathrm{e}^{(t-t_0)\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}, \tag{3.22}$$

onde $V(t_0)$ é o volume inicial da hiper-esfera. Da Equação 3.22 temos que a soma dos expoentes de Lyapunov determina o futuro de $V(t)$. Quando $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0$, o volume é constante para qualquer tempo posterior e o sistema é *conservativo*, quando $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j < 0$ o volume da hiper-esfera tende para zero quando $t \to \infty$ e o sistema é *dissipativo* [3].

Como os expoentes de Lyapunov estão relacionados à expansões e contrações da

[1]Em homenagem ao matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918).

hiper-esfera de condições iniciais em determinadas direções, então na direção em que o expoente de Lyapunov é negativo pode-se concluir que as órbitas próximas se aproximam, e na direção em que o expoente é positivo as órbitas próximas se afastam.

Um sistema tridimensional apresenta três expoentes de Lyapunov e a evolução temporal da esfera de condições iniciais pode ser visualizada esquematicamente na Figura 3.6. Sistemas dessa forma podem apresentar quatro tipos de atratores [1], são eles:

- *Ponto de Equilíbrio* - Ocorre contração ao longo das três direções do espaço de fase. Tem-se λ_1, λ_2, $\lambda_3 < 0$.

- *Ciclo-Limite* - Ocorre contração em duas direções porém ao longo da trajetória fechada o valor de d_j não se altera. Nesse caso $\lambda_1 = 0$ e λ_2, $\lambda_3 < 0$.

- *Toro Bidimensional* - As trajetórias atratoras situam-se sobre uma superfície. Nesse caso o sistema é aperiódico porém não é caótico. Os expoentes de Lyapunov são λ_1, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$.

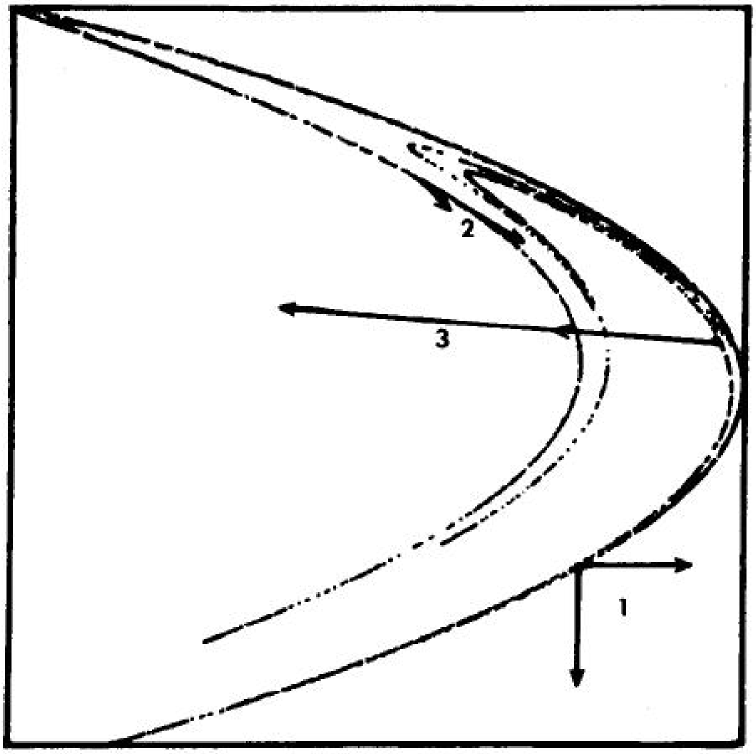
- *Atrator Caótico* - Apresenta uma direção de expansão, na qual as trajetórias se distanciam, uma direção de contração na qual elas se aproximam e a direção ao longo da trajetória em que o expoente é nulo, e essas direções mudam ao longo da órbita. Portanto tem-se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$.

Para que exista um atrator caótico em um sistema de tempo contínuo, deve sempre existir ao menos um expoente de Lyapunov positivo, e o sistema deve ter no mínimo três dimensões [3]. Para mostrar essa última condição toma-se um sistema bidimensional, nesse sistema deverá existir ao menos uma direção de expansão ($\lambda_1 > 0$) para que ele seja sensível às condições iniciais, porém na direção ao longo da trajetória o expoente associado é nulo, o que faria com que a soma dos dois seja sempre positiva e causaria a divergência do elemento de volume. Logo, o sistema não estaria mais restrito a uma região do espaço de fase[2], o que é um requisito para o caos.

Embora os expoentes de Lyapunov sejam um forte indicador do comportamento dinâmico de um sistema, encontrar analiticamente o valor dos expoentes é uma tarefa praticamente impossível (exceto eventualmente no caso de se dispor de uma solução analítica para o sistema). Para se obter de forma numérica o espectro de expoentes poderia-se a princípio acompanhar as trajetórias, calculadas numericamente, de duas condições iniciais distintas tão próximas quanto possível, e observar como elas divergiriam com o tempo. Contudo, esse procedimento é proibitivo [1], pois se está interessado no comportamento médio da taxa de expansão *local* dos eixos da hiper-esfera de condições iniciais centrada em $\mathbf{x}(t_0)$, e a integração numérica para encontrar a expansão, ou contração, dos eixos

[2]Uma prova mais rigorosa é dada pelo teorema de Poincaré-Bendixson, em que se demonstra que em um sistema planar uma solução que permanece restrita a uma região do espaço converge sempre para um ponto fixo ou para um ciclo-limite [14].

Figura 3.7 – Atrator do mapa de Hénon. No ponto 1 temos um conjunto de vetores de base ortonormais. Após uma iterada do mapa, no ponto 2, percebe-se que os vetores dexam de ser ortogonais. Após mais uma iterada, no ponto 3, os vetores estão alinhados e sua norma aumentou significativamente.



Fonte: adaptado de [24].

da hiper-esfera exigiria acompanhar a evolução dos pontos próximos por muitos períodos orbitais.

Um outro procedimento foi sugerido por Shimada e Nagashima [23]. Nessa abordagem a evolução temporal da dinâmica é tratada simultaneamente no espaço de fase e no espaço das equações linearizadas. Define-se uma trajetória de referência, chamada de trajetória *fiducial*, por meio da aplicação das equações não-lineares de movimento em uma dada condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$, essa trajetória será o centro da hiper-esfera centrada inicialmente em $\mathbf{x}(t_0)$. Então utiliza-se as equações linearizadas para obter o comportamento dos pontos da superfície da hiper-esfera [24], ou seja, a evolução dos eixos principais é definida pela evolução de uma base ortonormal cuja origem é dada pela trajetória fiducial.

Ao aplicar o método descrito acima nos deparamos com os seguintes problemas apontados por Wolf e colaboradores [24]: o módulo dos vetores ortonormais aumenta de forma muito rápida e, quando o sistema apresenta comportamento caótico, os vetores tendem a se alinhar ao longo da direção de maior expansão, como pode ser visto na Figura 3.7. Para evitar esses problemas os vetores da base devem ser constantemente ortonormalizados, um dos métodos para se fazer isso é o método de ortonormalização de *Gram-Schmidt*.

Uma sequência de passos para realizar o cálculo do expoente de Lyapunov em um sistema tridimensional é [24]:

1. Inicia-se o sistema com as condições iniciais $\mathbf{x}(t_0)$ e três vetores ortonormais, por exemplo $\hat{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\hat{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ e $\hat{v}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$;

2. Utilizando um integrador numérico, calcula-se o valor de $\mathbf{x}$ e da Jacobiana $\mathbf{J}$ com um determinado passo de integração;

3. Multiplica-se cada um dos vetores pela matriz Jacobiana. Ao fazer isso obtém-se novos vetores $\vec{u}_1 = \mathbf{J} \cdot \hat{v}_1$, $\vec{u}_2 = \mathbf{J} \cdot \hat{v}_2$ e $\vec{u}_3 = \mathbf{J} \cdot \hat{v}_3$;

4. Inicia-se o processo de ortonormalização fazendo $\vec{v}_1' = \vec{u}_1$. O segundo e o terceiro vetores da base são obtidos por meio de:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2' &= \vec{u}_2 - \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1')\,\vec{v}_1'}{|\vec{v}_1'|^2}, \\
\vec{v}_3' &= \vec{u}_3 - \frac{(\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2')\,\vec{v}_2'}{|\vec{v}_2'|^2} - \frac{(\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1')\,\vec{v}_1'}{|\vec{v}_1'|^2}.
\end{aligned}$$

   Em seguida calcula-se $\hat{v}_1' = \vec{v}_1'/|\vec{v}_1'|$, $\hat{v}_2' = \vec{v}_2'/|\vec{v}_2'|$ e $\hat{v}_3' = \vec{v}_3'/|\vec{v}_3'|$;

5. Armazena-se as quantidades $\log|\vec{v}_i'|$, com $i = 1, 2$ e 3;

6. Repete-se os passos de 2 a 5 várias vezes utilizando como base ortonormal inicial os vetores normalizados encontrados em 4;

7. Então, após um tempo suficientemente grande para que ocorra a convergência, o i-ésimo expoente de Lyapunov é dado pela razão entre a soma dos logaritmos dos módulos dos vetores e o tempo de integração. Ou seja:

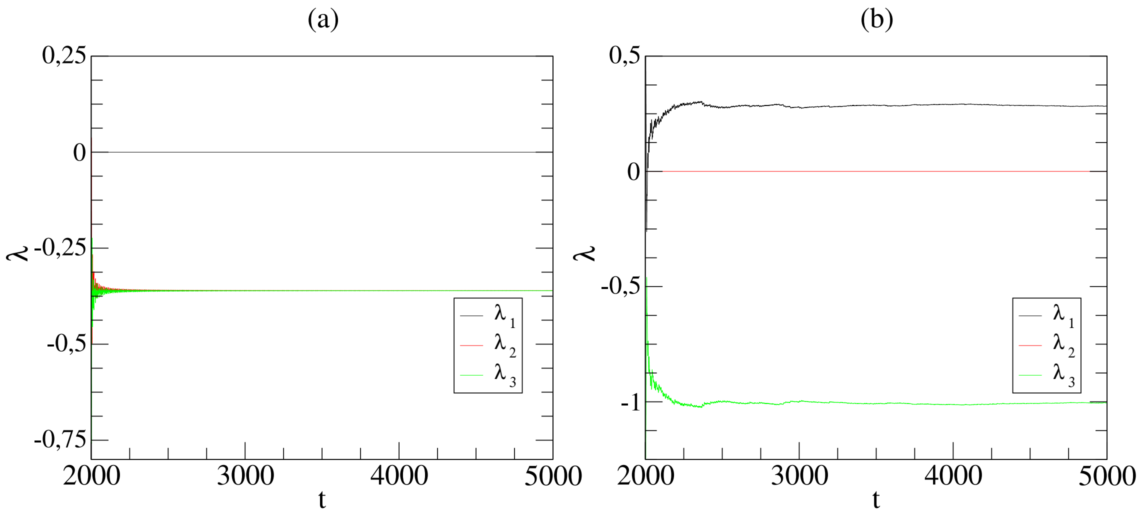
$$\lambda_i = \frac{1}{t}\left(\log|\vec{v}_i'| + \log|\vec{v}_i''| + \log|\vec{v}_i'''| + \ldots + \log|\vec{v}_i^k|\right). \tag{3.23}$$

Nas Figuras 3.8 (a) e (b) pode-se observar a série temporal do espectro dos expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado-amortecido para dois valores de f_0. Para construir os gráficos foram descartados 2000 tempos de integração para que ocorresse a convergência para o atrator. O sistema é dissipativo e quando $f_0 = 3,0$, apresenta comportamento caótico.

3.2 Estruturas Periódicas no Espaço de Parâmetros

Para encontrar mudanças qualitativas no comportamento de sistemas dinâmicos, em geral, fixamos todos os parâmetros do sistema exceto um, então variamos seu valor para observar

Figura 3.8 – Séries temporais do espectro de expoentes de Lyapunov para o pêndulo forçado-amortecido para dois valores de intensidade de forçamento.(a) Para $f_0 = 1.0$ o sistema converge para um ciclo-limite, os expoentes de Lyapunov calculados valem $\lambda_1 = 0,00$ e λ_2, $\lambda_3 = -0,36$. (b) Para $f_0 = 3,0$ os expoentes de Lyapunov calculados valem $\lambda_1 = 0,28$, $\lambda_2, = 0,00$ e $\lambda_3 = -1,01$, o que indica a presença de um atrator caótico.



Fonte: O Autor.

as mudanças. Em alguns casos, porém, sabemos que uma pequena mudança em um dos parâmetros que são mantidos fixos podem fazer com que o sistema comporte-se de forma diferente. O que se pode fazer então é utilizar a variação de dois parâmetros, obtendo-se então o espaço de parâmetros do sistema.

Gallas [5] analisou o espaço de parâmetros do mapa de Hénon utilizando isodiagramas. Isodiagramas são uma generalização de diagramas de bifurcação para quando dois parâmetros são varridos. Como isodiagramas são bidimensionais, o período de uma determinada órbita é representado utilizando uma cor.

O mapa de Hénon foi proposto por Michel Hénon como um exemplo de sistema dinâmico que possui um atrator fractal [3]. As equações do mapa são:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= a - x_t^2 + by_t, \\ y_{t+1} &= x_t, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde a e b são parâmetros reais. Na Figura 3.9 podemos perceber que as regiões periódicas se organizam em estruturas que,devido à sua forma, foram chamadas de camarões[3] [5]. Cada estrutura é composta por um corpo central de período k, mais uma sucessão infinita de domínios adjacentes de período $k \times 2^n$. Outra característica observada por Gallas é o alinhamento de estruturas ao longo de uma determinada reta.

Atualmente já se reconhece a presença dessas estruturas periódicas em vários sistemas de interesse, como o sistema de Chua [10] [6], osciladores de Duffing e Josephson [7], mapas bidimensionais [8] e unidimensionais [9], e algumas vezes se estuda o que

[3] *shrimp-shaped structures.*

Figura 3.9 – Isodiagrama do espaço de parâmetros do mapa de Hénon. No eixo horizontal temos o parâmetro $1,2 \leq a \leq 1,8$ e no vertical $0 \leq b \leq 0,32$. Cada cor caraceriza um período para a órbita e cores iguais significam períodos iguais. Períodos acima de 128 são considerados como caos e são as regiões brancas. As órbitas da região preta devergem para $-\infty$.

Fonte: Adaptado de [5].

acontece com elas quando o sistema sofre algum tipo de modificação.

3.2.1 Hipercaos no Espaço de Parâmetros

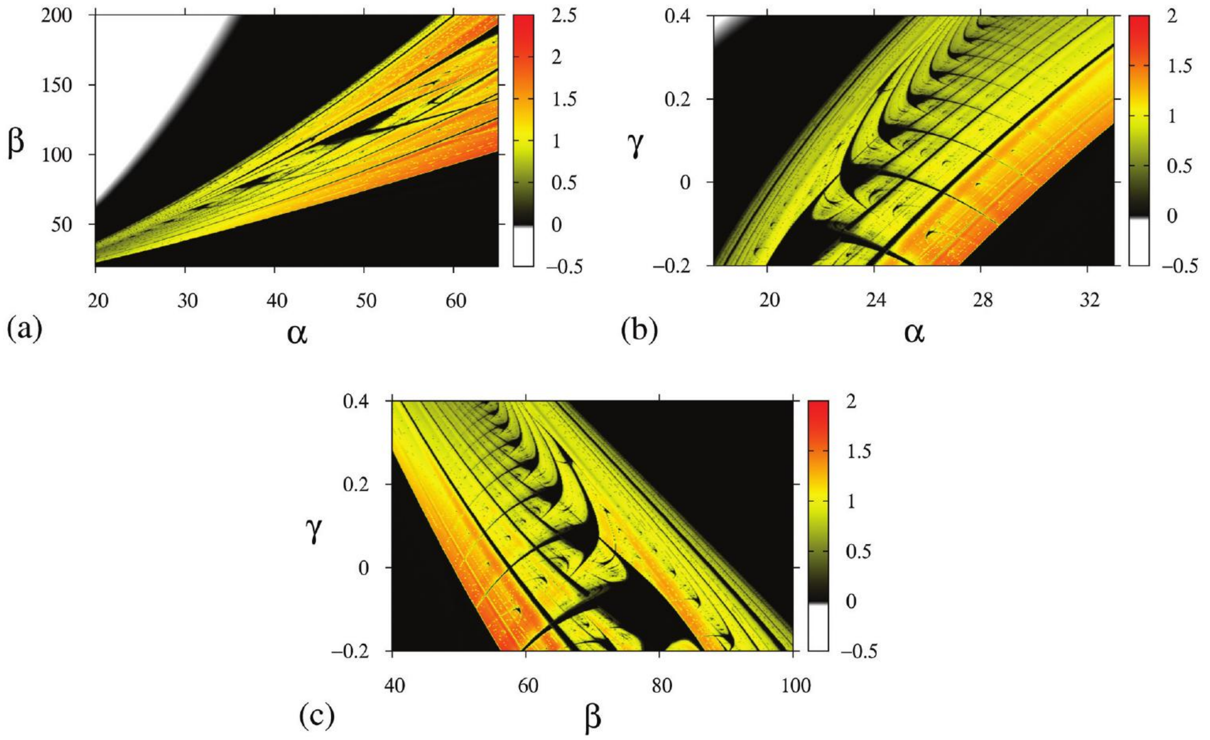
Stegemann e colaboradores investigam o espaço de parâmetros de um sistema de Chua[4] [10]. O sistema considerado inicialmente é tridimensional e é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - (1-c)x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \tag{3.25}$$

em que os parâmetros $a = 0,03$ e $c = -1,2$ são fixados e α, β e γ são utilizados para construir os diagramas. O indicador utilizado para identificar as regiões periódicas é o

[4]Baseado em um circuito elétrico RLC com um diodo não-linear desenvolvido e popularizado por Leon Ong Chua e Takashi Matsumoto nos anos 1980 [3].

Figura 3.10 – Diagramas de Lyapunov no espaço de parâmetros do sistema 3.25 mostrando regiões periódicas, em preto, imersas em regiões caóticas. A cor branca representa o menor valor do expoente, preto representa $\lambda_1 = 0$ e vermelho o maior valor. Em (a) γ é fixado em $0,32$, em (b) $\beta = 50$ e em (c) $\alpha = 30$.



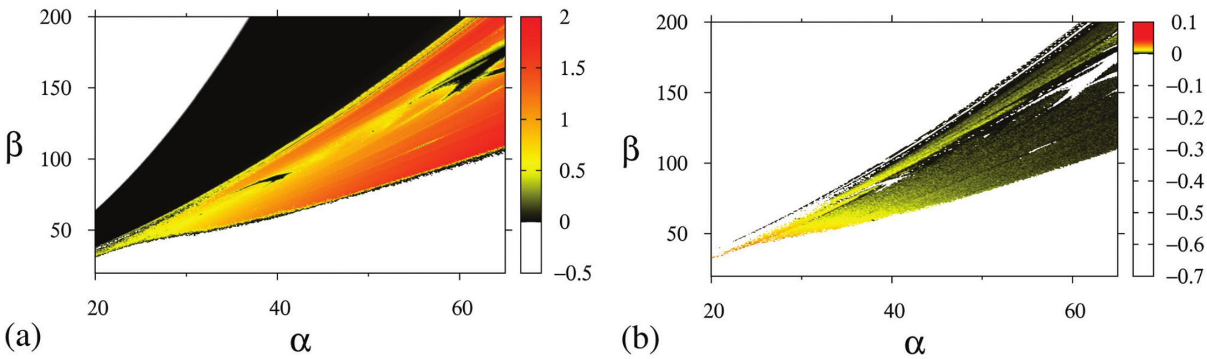
Fonte: Adaptado de [10].

maior expoente de Lyapunov.

Os diagramas da Figura 3.10 foram construídos dividindo o espaço em uma grade de 500×500 e para cada ponto na grade foi calculado o maior expoente de Lyapunov do sistema. Podemos ver nos diagramas uma grande quantidade de estruturas periódicas presentes, em preto, inseridas em meio às regiões caóticas, coloridas.

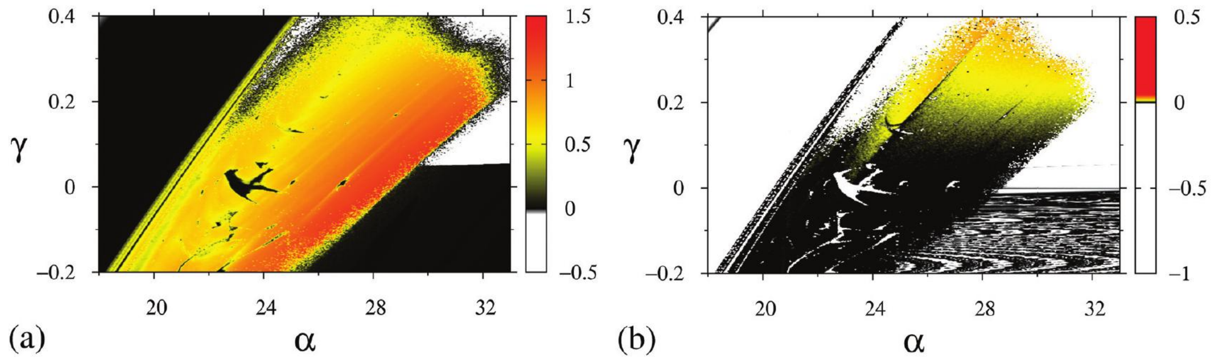
Em seguida é inserida uma quarta variável no sistema, que passa a ser:

Figura 3.11 – Diagramas de Lyapunov no espaço de parâmetros do sistema 3.26 com $s = 0,1$ e $\gamma = 0,32$.



Fonte: Adaptado de [10].

Figura 3.12 – Diagramas de Lyapunov no espaço de parâmetros do sistema 3.26 com $s = 0,1$ e $\beta = 50$.



Fonte: Adaptado de [10].

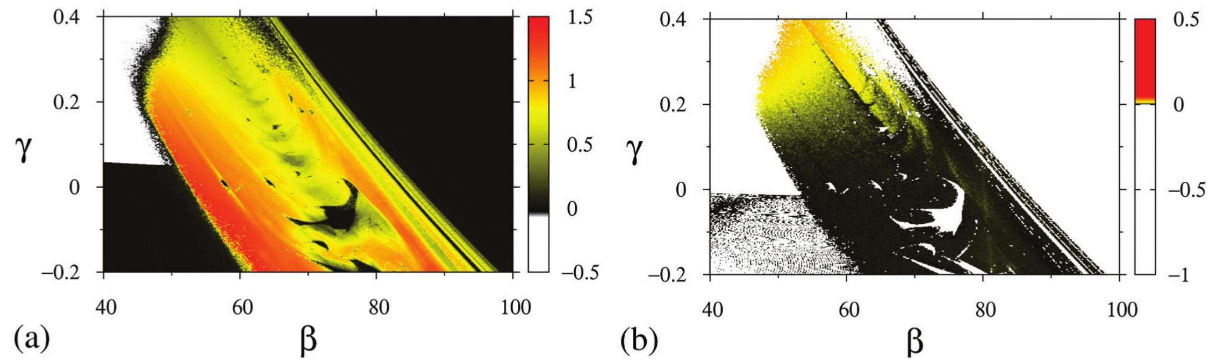
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - (1-c)x),\\
\dot{y} &= x - y + z,\\
\dot{z} &= -\beta y - \gamma z + w,\\
\dot{w} &= -sx - +yz,
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

onde foi também adicionado um novo parâmetro s.

Como a Equação 3.26 é quadridimensional, ela possui quatro expoentes de Lyapunov e permite a ocorrência de hipercaos, fenômeno caracterizado pela ocorrência de dois expoentes de Lyapunov positivos. Nesse caso são construídos diagramas para os dois maiores expoentes de Lyapunov.

Na Figura 3.11 podemos ver os diagramas dos dois maiores expoentes de Lyapunov no espaço de parâmetros variando (α, β) e mantendo $\gamma = 0,32$ fixo. A Figura 3.12 apresenta os diagramas dos dois maiores expoentes de Lyapunov variando (α, γ) e mantendo fixo $\beta = 50$. Na Figura 3.13 temos os diagramas dos dois maiores expoentes de Lyapunov variando (β, γ) e mantendo fixo $\alpha = 30$. Em todos os casos $s = 0,1$ e é possível identificar os valores de parâmetros para os quais o sistema apresenta hipercaos.

Figura 3.13 – Diagramas de Lyapunov no espaço de parâmetros do sistema 3.26 com $s = 0,1$ e $\alpha = 30$.



Fonte: Adaptado de [10].

Nota-se também que as estruturas em formato de camarão e a organização presente nos diagramas da Figura 3.10 não são observadas nos diagramas da Equação 3.26. Isso ocorre porque a variável adicionada perturba o comportamento dinâmico do sistema e os diagramas de Lyapunov [10]. Porém é possível observar algumas regiões periódicas e camarões *mal-formados* [10] nas Figuras 3.11, 3.12 e 3.13. Essas má-formações são causadas devido à proximidade da janela periódica a uma região de transição caos-hipercaos.

Capítulo 4

Sistemas Acoplados

Devido à sensibilidade às condições iniciais, a previsão para tempos futuros se torna impossível em sistemas caóticos. Apesar disso, duas condições iniciais diferentes são atraídas para o mesmo atrator caótico no espaço de fase do sistema, e acabam formando o mesmo padrão, embora suas trajetórias não apresentem qualquer ligação.

Pode-se perguntar então: É possível forçar os dois sistemas a seguirem a mesma trajetória no atrator? Por mais contraintuivo que possa parecer, a resposta para essa pergunta é positiva.

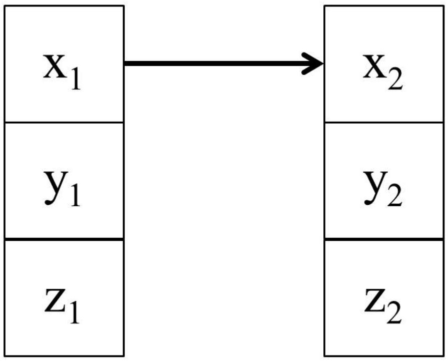
As motivações apontadas por Pecora e colaboradores para se tentar conseguir tal efeito são a utilização de sinais caóticos para a criação de uma forma de comunicação privada, utilização do caos na robótica e em implantes biológicos, e no estudo de sistemas com dinâmica espaço-temporal [11], onde pode acontecer de vários sítios espaciais estarem sincronizados ainda que temporalmente suas dinâmicas sejam caóticas. Existem várias formas de se fazer o acoplamento, aqui discutiremos duas: a substituição completa e o acoplamento unidirecional.

4.1 Substituição Completa e Hiperplano da Sincronização

Um exemplo simples de sincronozação proposto em [11] é utilizando dois sistemas de Lorenz, onde um sinal de um deles é transmitido para o outro segundo o esquema da Figura 4.1. Nesse caso as equações dos sistemas ficam:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, & \qquad & \dot{x}_2 = \dot{x}_1, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1, & \text{e} \qquad & \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + r x_2 - y_2, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1, & & \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Figura 4.1 – Esquema do acoplamento via substituição completa.



Fonte: Adaptado de [11].

onde os subscritos rotulam cada um dos sistemas. Nesse forma de acoplamento a variável x_2 do sistema 2 é substituída pela variável x_1. Então o sistema 1 atua como acionador[1] e ele irá influenciar a trajetória do sistema 2, que será o sistema de resposta. Se iniciaramos a evolução temporal do sistema 4.1 com condições iniciais arbitrárias, veremos que y_2 e z_2 tendem para y_1 e z_1 com o passar do tempo, até que após um longo intervalo de tempo $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$. Portanto, ambos os sistemas passam a ficar sincronizados, ainda que o comportamento temporal seja caótico, a essa situação dá-se o nome de *sincronização idêntica*.

Como, nesse caso, as variáveis do sistema 2 são iguais aos do sistema 1, então no espaço de fase o atrator estará restrito a um hiperplano dado por $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Uma projeção desse hiperplano é mostrado na Figura 4.2, ele é denominado variedade da sincronização.

A sincronização idêntica pode ocorrer em qualquer sistema, desde que a trajetória seja constantemente confinada a um hiperplano no espaço de fase. Para ver isso, basta notar que uma mudança linear de coordenadas mantém a geometria do hiperplano inalterada, ela modifica apenas as variáveis nas equações de movimento. Assim, podemos definir um espaço ortogonal à variedade da sincronização, que terá coordenadas iguais à zero quando os sistemas estiverem sincronizados. Esse espaço é chamado de *espaço transversal*.

Para sistemas acoplados podemos definir, de forma geral, as variáveis transversais como $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. A dinâmica transversal será, então, governada por $\dot{\mathbf{x}}_\perp = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$, onde $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ governam a evolução temporal dos sistemas 1 e 2, respectivamente.

Uma outra propriedade que deve ser notada é que a variedade da sincronização existe independentemente do sistema convergir para ela ou não, este fato está relacionado à estabilidade da variedade. Além disso, uma variedade é dita *invariante* se, dada uma

[1] em ingês, *drive*.

condição inicial contida na variedade de sincronização, a dinâmica do sistema permanece nela para qualquer tempo futuro [25].

4.1.1 Estabilidade

Quando a sincronização entre dois sistemas é estável, as variáveis transversais tendem a zero para tempos longos. No exemplo da substituição completa feita com os sistemas de Lorenz, podemos definir um novo sistema de coordenadas dado por x_1, $y_\parallel = y_1 + y_2$, $z_\parallel = z_1 + z_2$, $y_\perp = y_1 - y_2$ e $z_\perp = z_1 - z_2$. Assim, temos três coordenadas na variedade da sincronização (x_1, $y_\parallel$ e $z_\parallel$) e duas no espaço transversal ($y_\perp$ e $z_\perp$), e esperamos que $y_\perp \to 0$ e $z_\perp \to 0$ quando $t \to \infty$.

Para que que o sistema convirja para a sincronização, o ponto $(y_\perp^*, z_\perp^*) = (0,0)$ tem que ser um ponto crítico estável. A evolução dinâmica nesse espaço é dada pelo sistema:

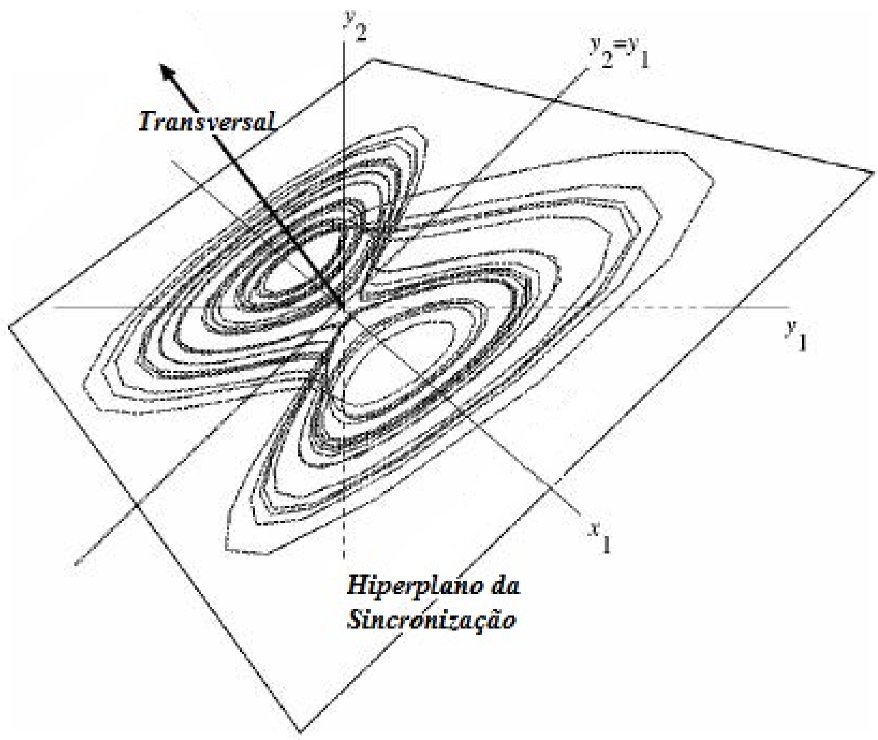
$$\begin{aligned} \dot{y}_\perp = & \; -x_1(z_1 - z_2) - (y_1 - y_2) & = -x_1 z_\perp - y_\perp, \\ \dot{z}_\perp = & \; x_1(y_1 - y_2) - b(z_1 - z_2) & = x_1 y_\perp - b z_\perp, \end{aligned} \tag{4.2}$$

cuja matriz Jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 \\ x_1 & -b \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

A mais geral e aparentemente mínima condição para a estabilidade é que os

Figura 4.2 – Projeção do hiperplano no qual a trajetória do sistema 4.1 fica restrita.



Fonte: Adaptado de [11].

expoentes de Lyapunov associados à Equação 4.2 sejam negativos [11]. Esses expoentes dependem do valor de x_1, e por essa razão, são chamados de expoentes de Lyapunov *condicionais*.

Utilizando a Equação 3.12, encontramos a expressão para os autovalores de 4.3 como sendo:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 - 4(b - x_1^2)}}{2}. \tag{4.4}$$

Logo os autovalores dependem de x_1 e não é possível dizer *a priori* se o ponto crítico $(y_\perp^*, z_\perp^*) = (0,0)$ do espaço transversal é sempre estável e se, consequentemente, a variedade da sincronização também o é.

4.2 Acoplamento Unidirecional

Uma outra forma de realizar o acoplamento entre dois sistemas é por meio de um acoplamento difusivo (também chamado *negative feedback control*). O que é feito nesse caso é a adição de um termo de amortecimento ao sistema que consiste na diferença entre as variáveis do *drive* e do sistema de resposta. Quando o termo é adicionado apenas em um dos sistemas, ele é chamado de acoplamento unidirecional, ou acoplamento mestre-escravo, e quando o termo é adicionado em ambos os sistemas o acoplamento é bidirecinal.

No acoplamento unidirecional, as equações de evolução do sistema são escritas na forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_2) + \alpha \mathbf{E}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde α é a intensidade do acoplamento e a matriz $\mathbf{E}$ define quais variáveis serão acopladas.

Em [11] Pecora e colaboradores utilizaram como exemplo dois sistemas Rössler acoplados[2]. O sistema de Rössler é dado pelas equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x-c). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Em [11] o acoplamento é feito na variável x do sistema resposta, nesse caso a matriz $\mathbf{E}$ é dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

[2]Esse sistema foi criado pelo cientista alemão Otto Röessler como sendo um sistema mais simples do que o de Lorenz, pois apresenta apenas um termo não-linear na terceira equação, e ainda assim apresenta dinâmica caótica para alguns valores dos parâmetros a, b e c

e os sistemas acionador e resposta são dados por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1), & \dot{x}_2 &= -(y_2 + z_2) + \alpha(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + ay_1, & \dot{y}_2 &= x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_1 &= b + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= b + z_2(x_2 - c). \end{aligned} \tag{4.8}$$

A dinâmica transversal do sistema será dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\perp &= -y_\perp - z_\perp - \alpha x_\perp, \\ \dot{y}_\perp &= x_\perp + ay_\perp, \\ \dot{z}_\perp &= z_1 x_1 - z_2 x_2 - cz_\perp. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pode ser verificado que o ponto $(x_\perp, y_\perp, z_\perp) = (0, 0, 0)$ é um ponto fixo da Equação 4.9. Os expoentes de Lyapunov da dinâmica transversal nos fornecem, então, informações a respeito da influência de perturbações que tiram o sistema da sincronização, se essas perturbações serão amortecidas ou não. Na realidade é necessário calcular apenas o maior expoente, pois se ele for negativo já garante que a origem é um ponto fixo estável desse sistema.

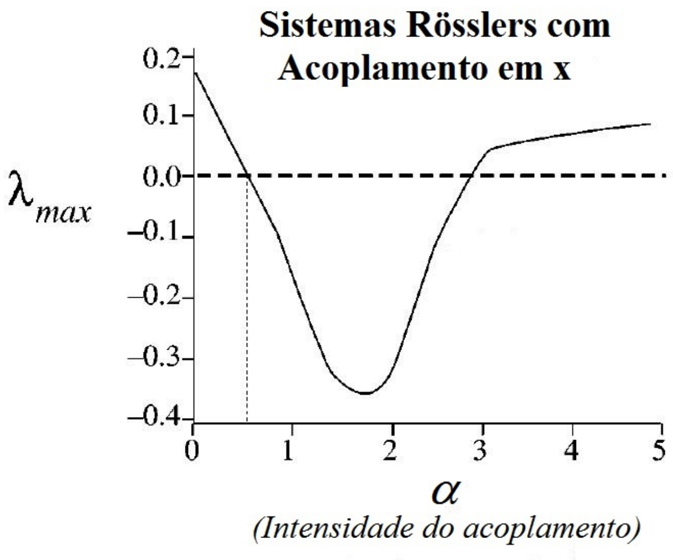
Na Figura 4.3 é possível notar a dependência do expoente de Lyapunov transversal em relação à intensidade do acoplamento. Os parâmetros utilizados são $a = 0,2$, $b = 0,2$ e $c = 9,0$ e pode-se notar que inicialmente a presença do acoplamento causa a diminuição de $\lambda_\perp$, e que, a partir de um dado valor, é obtida a sincronização dos dois sistemas. Entretanto, com o aumento de α a estabilidade da sincronização é perdida, o que mostra que o aumento da intensidade do acoplamento não necessariamente implica na sincronização.

4.3 Bifurcação Blowout e Borbulhamento do Atrator

Ott e Sommerer [25] analisaram a dinâmica transversal de um sistema dinâmico não-linear. O sistema utilizado por eles apresenta uma variedade invariante de dimensão menor que a do sistema, e nessa variedade está contido um conjunto caótico dado por uma partícula sujeita a um potencial de Duffing[3] unidimensional de poço duplo com um forçamento periódico e um amortecimento. Apesar de não se tratar de sistemas acoplados, os fenômenos observados são pertinentes à estabilidade da sincronização entre sistemas.

[3]Em homenagem a Georg Duffing (1861-1944), é aplicado na modelagem de vários processos físicos como circuitos eletrônicos não-lineares [20] e molas que não seguem a Lei de Hooke [3].

Figura 4.3 – Maior expoente de Lyapunov na direção transversal ao hiperplano de sincronização em função da intensidade do acoplamento.



Fonte: Adaptado de [11].

As equações do movimento desse sistema são:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x, \\
\dot{v}_x &= -\nu v_x + 4x(1-x^2) - y^2 + f_0 \sin \omega t, \\
\dot{y} &= v_y, \\
\dot{v}_y &= -\nu v_y - 2y(x-p) - 4ky^3, \\
\dot{t} &= 1,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

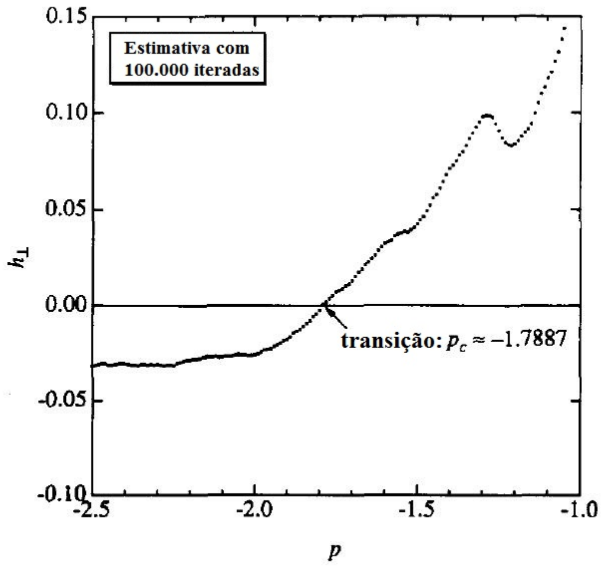
em que $\nu = 0,05$ é a constante de amortecimento, $f_0 = 2,3$ é a intensidade do forçamento, $\omega = 3,5$ é a frequência do forçamento, y e v_y definem a dinâmica tranversal, e p e k são parâmetros que controlam a dinâmica transversal.

Pode ser facilmente verificado que se $y(t_0) = 0$ e $v_y(t_0) = 0$, então $y(t) = 0$ e $v_y(t) = 0$ para qualquer tempo posterior. Portanto, a variedade no hiperplano tridimensional é invariante. Para analisar a estabilidade utilizamos a Jacobiana do sistema transversal à variedade invariante em $(y, v_y) = (0,0)$,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2(x-p) & -\nu \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Da Equação 4.11 podemos notar que a estabilidade não depende de k, apenas de p. Na Figura 4.4 está plotada a dependência do expoente de Lyapunov transversal à variedade invariante em relação à p, e é possível perceber a mudança na estabilidade por meio da mudança no sinal de $\lambda_\perp$ quando o parâmetro aumenta além de um valor crítico

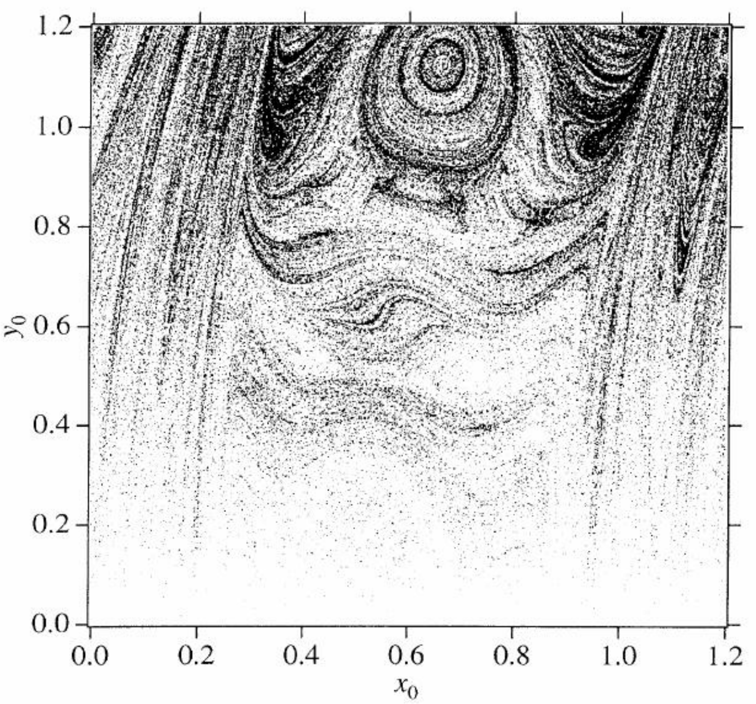
Figura 4.4 – Expoente de Lyapunov transversal à variedade invariante do sistema 4.10 em função de p.



Fonte: Adaptado de [25].

p_c. Nesse ponto o sistema passa por uma bifurcação do tipo *blowout*[4].

Figura 4.5 – Bacia de atração do atrator em $y = v_y = 0$ para $p = -1.9$, os pontos em branco convergem para o atrator contido na variedade invariante, equanto que os pontos em preto vão em direção à $|y| \to \infty$. Os valores iniciais das outras variáveis do sistema são $v_x = v_y = t = 0$.



Fonte: Adaptado de [26].

O caso em que $k = 0$ foi estudado em [26] e foi verificado que, quando $p > p_c$

[4]Utilizamos o termo em inglês pois é mais comum.

pontos próximos à $y = v_y = 0$ geram órbitas que inicialmente apresentam um transiente caótico e, em seguida, vão em direção à $|y| \to \infty$. Para $p < p_c$, o que se observa é o chamado *crivamento* da bacia de atração do atrator em $y = v_y = 0$. O crivamento da bacia de atração implica que cada ponto que é atraído para determinado atrator possui pontos arbitrariamente próximos que pertencem à bacia de outro atrator. A bifurcação *blowout* nesse caso é classificada como histerética.

Na Figura 4.5 podemos ver uma fatia da bacia de atração do atrator em $y = v_y = 0$ para diferentes valores de x_0 e y_0. Os pontos em preto são aqueles para os quais o $|y| \to \infty$ após um tempo transiente. O crivamento da bacia significa que qualquer ampliação que seja feita em qualquer região do gráfico sempre apresentará pontos que pertencem à bacia do atrator no infinito.

Quando o parâmetro $k > 0$, passa a existir um limite para o crescimento do valor de $|y|$, pois o termo $-ky^3$ se torna dominante para grandes valores de y. Conforme aumentamos o valor de k o atrator em $|y| \to \infty$ se aproxima de $|y| = 0$ e, para $k = 0,0075$, o sistema apresenta apenas um atrator [25]. Para $p < p_c$, esse atrator é o presente em $y = v_y = 0$, mas quando aumentamos o valor de p o sistema passa novamente por uma bifurcação *blowout* em p_c, classificada como não-histerética, e o atrator perde sua estabilidade transversal. Então ele passa a se expandir além da variedade invariante. Órbitas típicas permanecem longos intervalos de tempo próximas à variedade invariante, porém passam a exibir picos intermitentes de distância em relação à variedade. Esse comportamento, chamado intermitência *on-off*, pode ser visto na Figura 4.6, onde está plotada a série temporal de $y(t)$.

Apesar da estabilidade da sincronização entre dois sistemas implicar que o expoente de Lyapunov transversal será negativo, a recíproca não é necessariamente verdadeira. Em [27] Peter Ashwin e colaboradores introduziram o conceito de *borbulhamento* de um atrator, um novo tipo de intermitência que resulta da perda de estabilidade do estado sincronizado, e em [12] Gauthier e Bienfeng apresentam um sistema experimental composto por dois circuitos elétricos, representados na Figura 4.7, acoplados via acoplamento unidirecional em que se observa esse borbulhamento.

A evolução dinâmica dos circuitos elétricos é dada por:

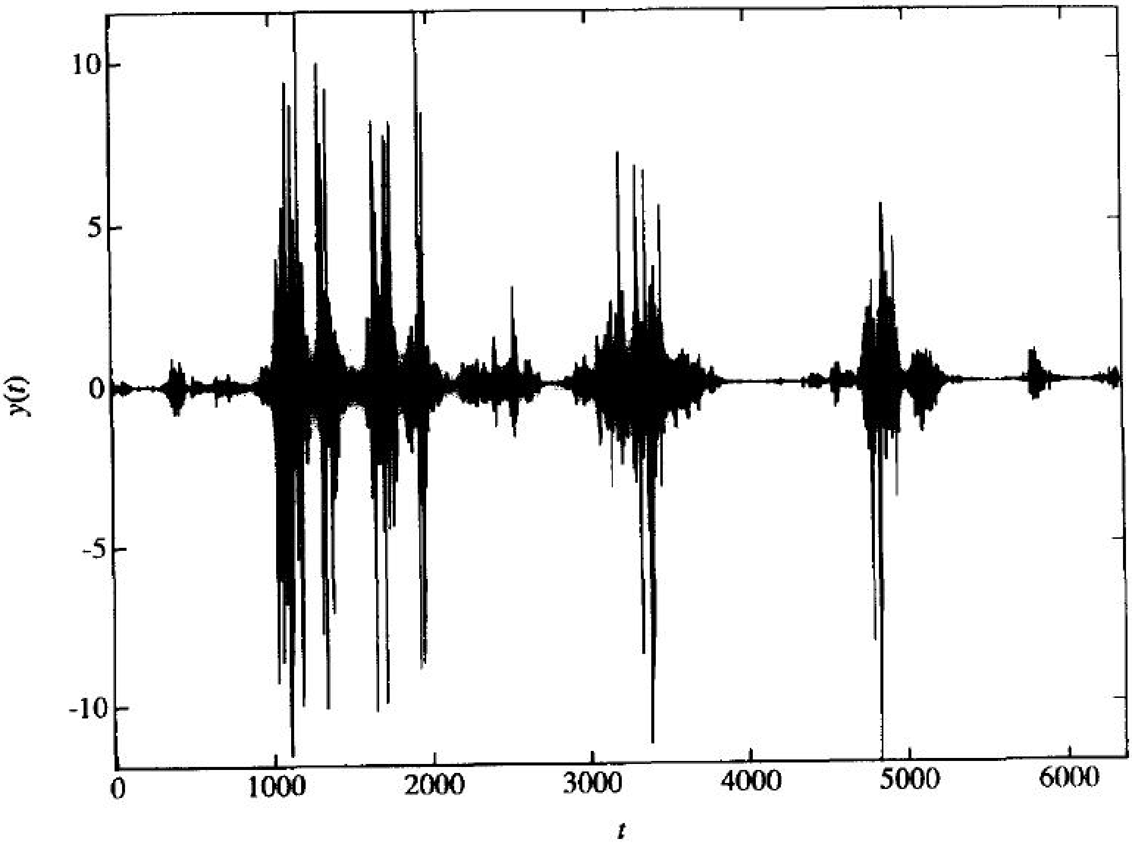
$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_1 & = & \frac{V_1}{R_1} - g[V_1 - V_2], \\ \dot{V}_2 & = & g[V_1 - V_2] - I, \\ \dot{I} & = & V_2 - R_4 I, \end{array} \tag{4.12}$$

em que

$$g[V] = \frac{V}{R_2} + I_r[\exp(\alpha V) - \exp(-\alpha V)]. \tag{4.13}$$

As resistências são todas normalizadas em relação à $R = \sqrt{L/C} = 2345\Omega$, as voltagens são normalizadas em relação à voltagem do diodo $V_d = 0,58$V, e as correntes são normalizadas

Figura 4.6 – Série temporal da variável y responsável pela dinâmica tranversal à variedade invariante do sistema 4.10 quando $k = 0,0075$ e $p = -1,75$. y passa longos intervalos de tempo próximo de $y = 0$ porém subitamente ocorrem picos de afastamento da origem.



Fonte: Adaptado de [25].

em relação à $I_d = V_d/R = 0,25$mA. As variáveis V_1 e V_2 representam a queda de tensão nos capacitores e I é a corrente que flui pela associação de resistores e diodos. O tempo é normalizado em relação à $\tau = \sqrt{LC} = 2,35 \times 10^{-5}$s, e $R_4 = R_3 + R_{dc}$, onde R_{dc} é a resistência do indutor [12].

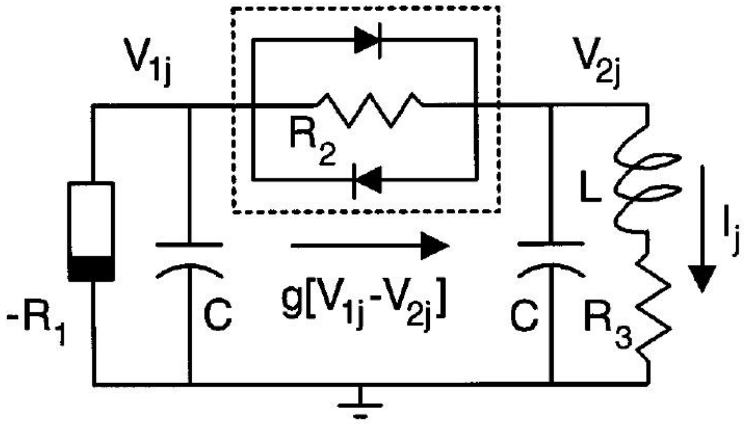
Os sistemas acoplados são dados por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_M &= \mathbf{F}[\mathbf{x}_M], \\ \dot{\mathbf{x}}_S &= \mathbf{F}[\mathbf{x}_S] + c\mathbf{K}(\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_S), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde os sub-índices M e S denotam os sistenas mestre e escravo, respectivamente.

Para verificar a estabilidade da sincronozação com diferentes valores de intensidade de acoplamento, calcula-se o expoente de Lyapunov transversal para cada valor de c. Para construir a Figura 4.8, o único elemento considerado não-nulo de $\mathbf{K}$ foi $K_{22} = 1$. Logo, o acoplamento foi feito na variável V_2 do sistema escravo. Da Figura 4.8 poderia-se concluir que quando $c > c_{crit} \approx 0,64$ a sincronização do sistema é estável. Entretanto, se observarmos a série temporal de $|\mathbf{x}_{\perp}(t)|$, Figura 4.9, notamos alguns picos de dessincronização aperiódicos. Esses picos caracterizam o chamado borbulhamento do atrator.

Figura 4.7 – Oscilador caótico eletrônico.

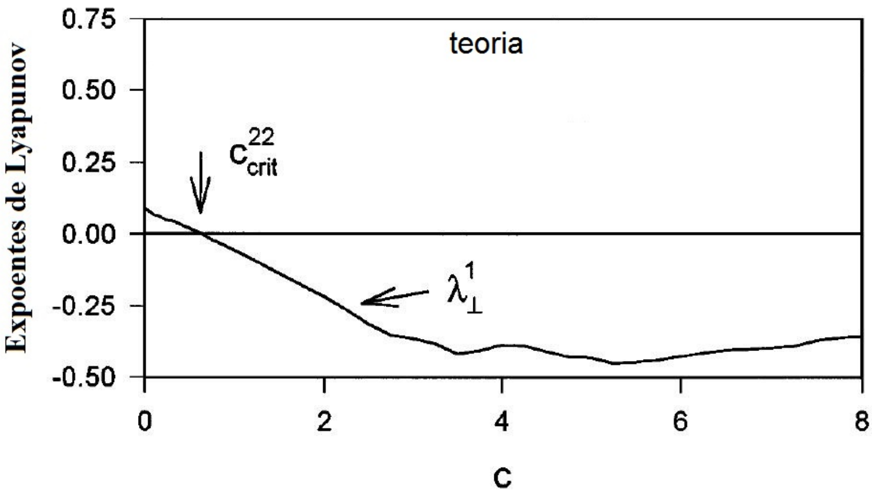


Fonte: Adaptado de [12].

O borbulhamento ocorre porque, embora globalmente o sistema apresente estabilidade transversal, existem instabilidades locais no atrator às quais as órbitas são sensíveis. Para ilustrar essa afirmação plotamos na Figura 4.10 a distância transversal média, $|\mathbf{x}_{\perp}|_{\mathrm{rms}}$, que depende da estabilidade global, e o valor máximo da distância transversal, $|\mathbf{x}_{\perp}|_{\mathrm{max}}$, que é sensível à instabilidades locais, para diferentes valores de c. Na Figura 4.10 pode-se ver que quando c aproxima-se de c_{crit} a média da distância transversal se aproxima de zero. Contudo, $|\mathbf{x}_{\perp}|_{\mathrm{max}}$ permanece relativamente grande devido à existência dos picos de dessincronização.

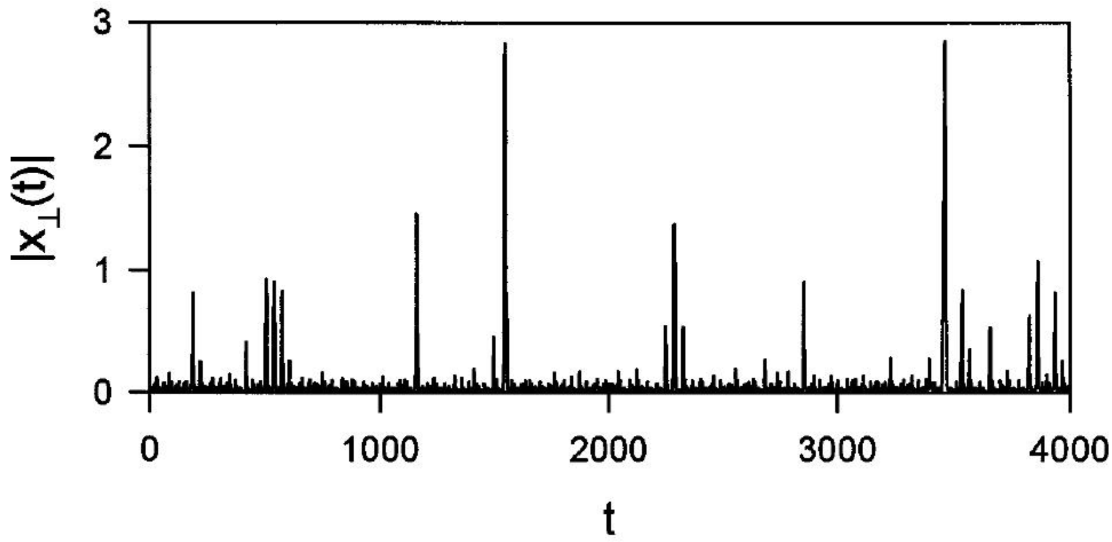
A ocorrência do borbulhamento é atribuída a uma mudança na estabilidade transversal de órbitas periódicas instáveis contidas no hiperplano da sincronização [28]. Essas órbitas possuem direção de atração e repulsão ao longo do hiperplano de sincronização e

Figura 4.8 – Expoente de Lyapunov transversal à sincronização do sistema 4.14 com acoplamento em V_{2S}. Pode-se ver a transição de sinal de $\lambda_{\perp}$ com o aumento de c.



FONTE: Adaptado de [12].

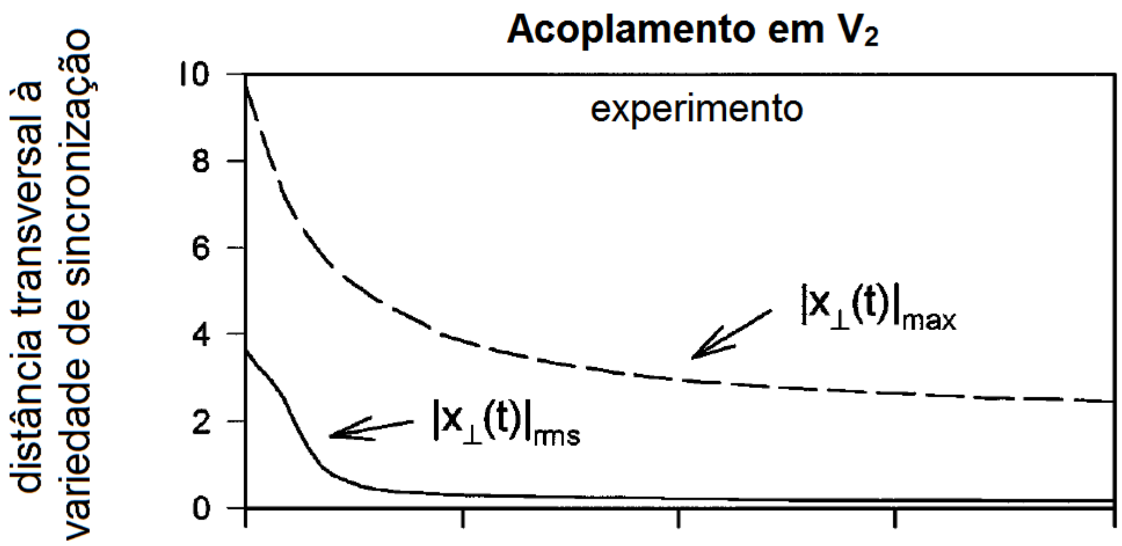
Figura 4.9 – Série temporal do módulo da distância transversal em relação ào hiperplano da sincronização para $c = 4,6$. Os picos que aparecem subitamente ocorrem devido ao borbulhamento do atrator da sincronização.



Fonte: Adaptado de [12].

transversais a ele. Então uma dada órbita tende a se aproximar da sincronização, mas em algum momento se aproxima de uma região onde há uma órbita periódica transversalmente instável contida no hiperplano, isso faz com que a órbita se afaste abruptamente devido à repulsão local. Em seguida se afasta dessa região de instabilidade e passa novamente a convergir para a sincronização, até que se aproxima de outra região de instabilidade e o fenômeno se repete indefinidamente.

Figura 4.10 – Distância transversal média $|\mathbf{x}_\perp|_{\mathrm{rms}}$ e valor máximo da distância transversal $|\mathbf{x}_\perp|_{\mathrm{max}}$ em função de c.



Fonte: Adaptado de [12].

Tanto os fenômenos de intermitência *on-off* e o de crivamento da bacia de atração quanto o de borbulhamento do atrator devem sua existência a flutuações de tempo finito no maior expoente de Lyapunov transversal [25]. Digamos que tomássemos várias condições iniciais no atrator caótico presente na variedade invariante e, para cada uma delas, evoluíssemos o sistema durante um intervalo de tempo T, calculando o expoente de Lyapunov transversal nesse intervalo. Então, para cada condição inicial, obteríamos um expoente de Lyapunov a tempo T, $\chi_\perp(T)$, que pode ser diferente para condições iniciais diferentes. A convergência de $\chi_\perp(T)$ para $\lambda_\perp$ ocorre apenas para $T \to \infty$.

Fazendo um histograma dos valores de $\chi_\perp(T)$ obtém-se a distribuição de probabilidades $P(\chi_\perp, T)$. Apesar de a média da distribuição ser próxima de $\lambda_\perp$, existem flutuações ao redor desse valor. Essas flutuações fazem com que exista uma fração positiva em $P(\chi_\perp, T)$, e é essa fração positiva que é responsável pelos picos súbitos. Somente após as tajetórias se afastarem é que elas 'aprendem' se serão atraídas para outro atrator, no caso da bacia crivada, ou se serão atraídas em direção à variedade invariante novamente causando as intermitências [25].

Capítulo 5

Resultados

Neste trabalho utilizamos o sistema proposto por Gauthier e Biefeng [12] para investigar o espaço de parâmetros e as mudanças nas estruturas periódicas causadas por influência do acoplamento. Esse circuito foi utilizado em [12] para discutir o fenômeno de borbulhamento de um atrator. O sistema consiste de dois circuitos acoplados em um acoplamento unidirecional e a evolução dinâmica de cada circuito individual é dado pela Equação 4.12.

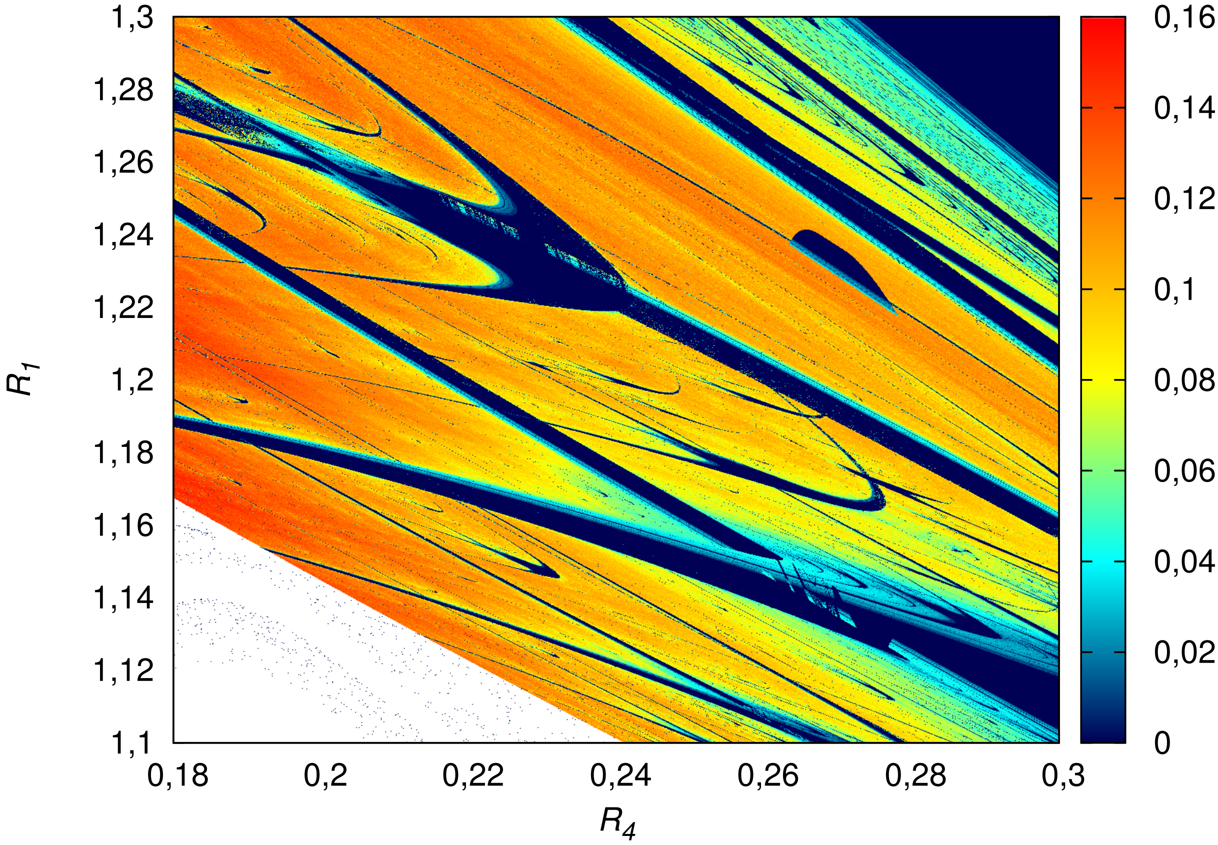
A escolha desse sistema se deu devido à persistência do fenômeno de borbulhamento para grandes valores da intensidade de acoplamento quando a variável utilizada para o acoplamento é V_{2S}, e à supressão do borbulhamento acima de um valor crítico de intensidade de acoplamento se ele for feito em V_{1S}.

Inicialmente foi construído o diagrama de Lyapunov no espaço de parâmetros de apenas um circuito, sem acoplamento. Para esse sistema foram mantidos constantes $R_2 = 3,44$, $I_r = 22,5 \cdot 10^{-6}$ e $\alpha = 11,6$, enquanto R_1 e R_4 foram varridos em uma grade 1000×1000. Em cada ponto da grade foi calculado o espectro dos expoentes de Lyapunov utilizando sempre as mesmas condições iniciais. Para realizar o cálculo do expoente foi utilizado o método de integração numérica de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo $0,01$, o tempo total de integração foi de 10000, sendo desprezados 2000 de tempo transiente.

O gráfico obtido plotando o maior expoente de Lyapunov pode ser observado na Figura 5.1, onde é possível identificar valores de parâmetros para os quais o sistema apresenta comportamento caótico, bem como as estruturas periódicas. Na Figura 5.1 as regiões coloridas são aquelas onde o expoente de Lyapunov é positivo, as regiões azul escuras são aquelas onde ele é zero e a região branca é onde o sistema diverge.

Na Figura 5.2 plotamos uma fatia do espaço de fase do sistema para valores de parâmetros de diferentes regiões da Figura 5.1. Na figura da esquerda os parâmetros são $R_1 = 1,865$ e $R_4 = 0,245$ e encontram-se no interior de uma das estruturas no espaço de parâmetros, no espaço de fase nota-se a existência de um ciclo-limite estável para o qual o sistema converge. Na figura da direita os parâmetros são $R_1 = 1,8$ e $R_4 = 0,245$ e podemos notar a existência de um atrator caótico no espaço de fase, o que era esperado

Figura 5.1 – Espaço de parâmetros do sistema 4.12 com $R_2 = 3,44$, $I_r = 22,5 \cdot 10^{-6}$ e $\alpha = 11,6$. As regiões com tonalidade azul escura possuem o maior expoente de Lyapunov igual à zero e, portanto, não apresentam dinâmica caótica, as regiões azul claro, amareladas e avermelhadas possuem o maior expoente de Lyapunov positivo e, portanto, apresentam caos. As regiões brancas indicam valores de parâmetros para os quais o sistema diverge.

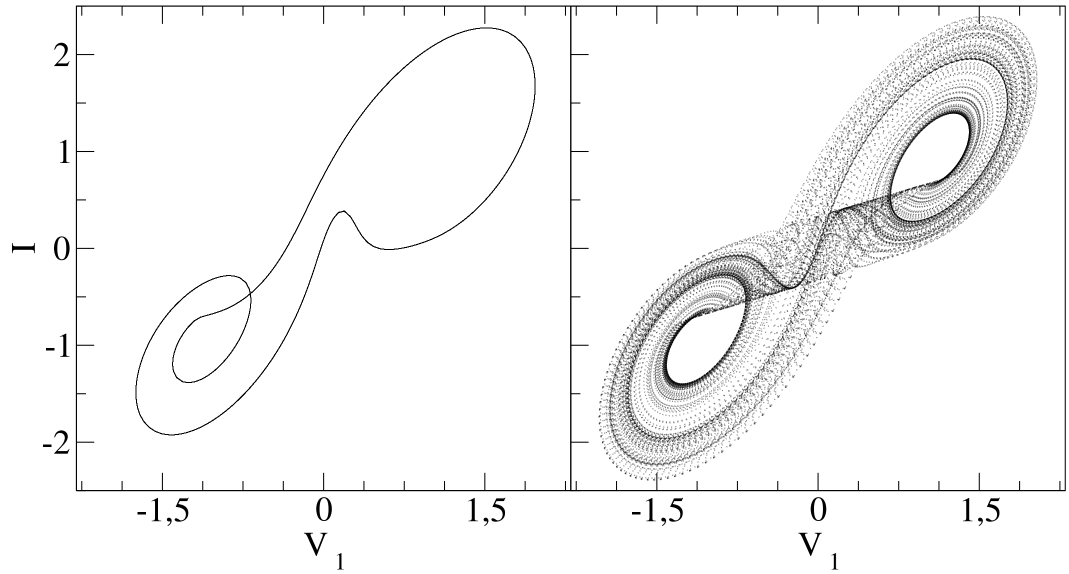


Fonte: O Autor.

visto que esses valores de parâmetros fazem parte do mar caótico da Figura 5.1.

Com a finalidade de investigar de que forma o sistema transiciona do regime regular para o caótico, construímos um diagrama de bifurcação a partir de uma linha do espaço de parâmetros. Para a construção do diagrama da Figura 5.3 superior foram tomados 1000 valores de R_1 no intervalo do gráfico, para cada um desses pontos o sistema foi integrado até o tempo total de 10000, sendo desprezados 2000 de tempo transiente, e foram salvos os pontos em que $r = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + I^2}$ apresenta um máximo. A Figura 5.3(b) é o diagrama de expoentes de Lyapunov respectivo à figura superior. Podemos ver o início de uma região periódica a partir de $R_1 \approx 1,1862$ que termina próximo de $R_1 = 1,1867$. Essa região pertence à antena de um camarão no espaço de parâmetros. Na Figura 5.3(c) plotamos uma ampliação do diagrama de bifurcação e é possível notar a existência de duas rotas para o caos, uma delas é por bifurcação de dobra de período, enquanto que a outra é por crise.

Figura 5.2 – Atratores do sistema 4.12 com $R_4 = 0,245$. Na figura da esquerda podemos ver o ciclo-limite para o qual o sistema converge quando $R_1 = 1,865$, e na direita o atrator caótico que existe quando $R_1 = 1,8$.

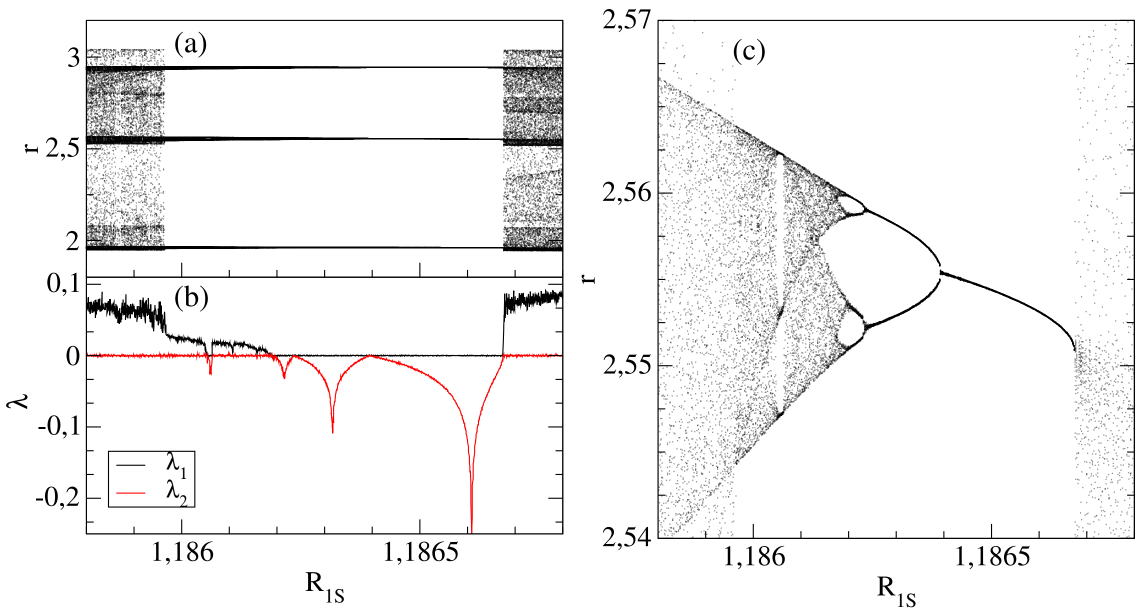


Fonte: O Autor.

5.1 Circuito com Acoplamento Unidirecional

A seguir foi feito um acoplamento com o outro sistema. O acoplamento utilizado é do tipo unidirecional e foi feito na variável V_1 do circuito escravo. O sistema acoplado é descrito

Figura 5.3 – Diagrama de bifurcação do sistema 4.12 com $R_4 = 0,245$. Em (a) temos valores de máximos locais de $r = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + I^2}$ e podemos identificar órbitas de período 3 e regiões caóticas. Em (b) vemos o diagrama de Lyapunov, o valor de $\lambda_3 \approx -20$ é omitido por conveniência. Em (c) fazemos uma ampliação da linha central do diagrama em (a) e podemos identificar as dobras de período que ocorrem no sistema.



Fonte: O Autor.

por:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{1M} &= \tfrac{V_{1M}}{R_{1M}} - g[V_{1M} - V_{2M}],\\
\dot{V}_{2M} &= g[V_{1M} - V_{2M}] - I_M,\\
\dot{I}_M &= V_{2M} - R_{4M} \cdot I_M,\\
\dot{V}_{1S} &= \tfrac{V_{1S}}{R_{1S}} - g[V_{1S} - V_{2S}] + c(V_{1M} - V_{1S}),\\
\dot{V}_{2S} &= g[V_{1S} - V_{2S}] - I_S,\\
\dot{I}_S &= V_{2S} - R_{4S} \cdot I_S,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde o sub-índice M indica o circuito mestre e S o escravo e $g[V]$ é dado na Equação 4.13.

Para investigar a influência do sinal do sistema mestre na dinâmica do sistema escravo mantivemos fixos $R_{1M} = 1,2$ e $R_{4M} = 0,193$, de forma que o mestre sempre apresenta dinâmica caótica, enquanto que os parâmetros do circuito escravo foram varridos no mesmo intervalo da Figura 5.1 com diferentes valores de acoplamentos. Novamente foi calculado o espectro de expoentes de Lyapunov, agora com um total de seis expoentes.

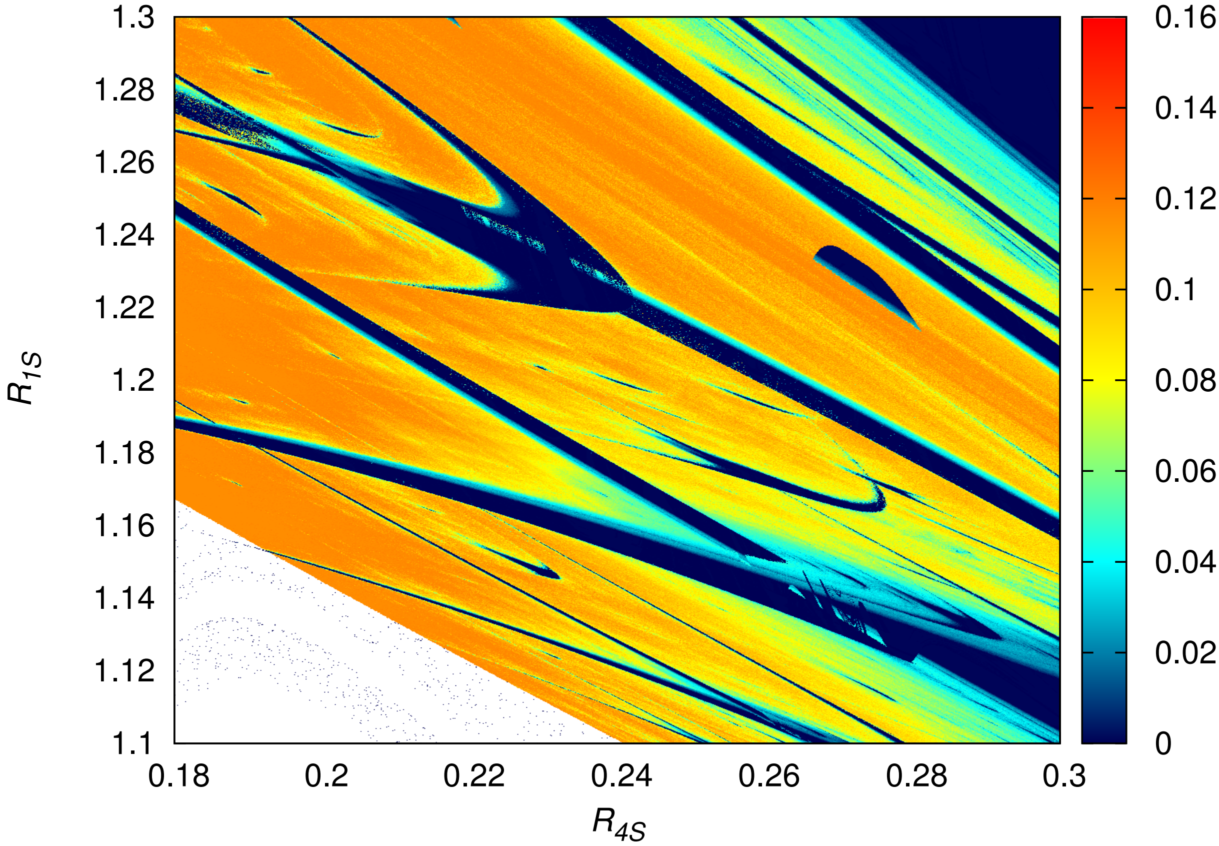
Uma das formas de se analisar a dinâmica transversal à sincronização é a determinação do maior expoente de Lyapunov transversal à variedade da sincronização, e foi mostrado em [29] que o expoente de Lyapunov transversal é parte do espectro de expoentes de Lyapunov do sistema geral. Sendo assim, realizamos a análise calculando o espectro de Lyapunov do sistema geral.

Como os parâmetros do circuito mestre são fixos, o sistema sempre apresenta um expoente positivo. Então, utilizamos o segundo maior expoente para construir os diagramas das Figuras 5.4 e 5.5, onde podemos ver o espaço de parâmetros do sistema (5.1) com três diferentes valores de intensidade de acoplamento c. O esquema de cores utilizado é o mesmo da Figura 5.1, mas aqui as regiões azul escura são onde o sistema acoplado apresenta caos, e as regiões amareladas e alaranjadas ocorre o hipercaos, pois existem dois expoentes de Lyapunov positivos. Na Figura 5.4 a intensidade do acoplamento é $c = 10^{-4}$, e é possível notar o início de uma erosão nas estruturas do espaço de parâmetros. Essa erosão aumenta com o aumento de c até que as estruturas sejam completamente destruídas, como pode ser visto nas Figuras 5.5a e 5.5b onde $c = 10^{-3}$ e 10^{-2}, respectivamente.

A seguir, foi tomada apenas uma linha do espaço de parâmetros, dada por $R_{4S} = 0,245$, e foram feitos diagramas utilizando-se o expoente de Lyapunov. Nas Figuras 5.5(a) e 5.5(b) podemos ver o comportamento dos quatro maiores expoentes de Lyapunov do sistema, os outros dois possuem valor muito menor e não fornecem informações relevantes. As regiões em que o segundo expoente de Lyapunov diminui na Figura 5.6(a) equivalem às antenas dos camarões no espaço de parâmetros, e na Figura 5.6(b) nota-se que essas quedas no valor de λ_2 não ocorrem. Em ambas as figuras ocorre a inversão do espectro, o que indica que os expoentes estão sempre ordenados.

Para analisar com mais detalhes a destruição das estruturas, e para que se pudesse aproximar o valor do acoplamento para o qual a estrutura é destruída, foi feita uma

Figura 5.4 – Espaço de parâmetros do sistema 5.1 com os parâmetros do mestre fixos em $R_{1M} = 1,2$ e $R_{4M} = 0,193$ e valor de acoplamento $c = 10^{-4}$.

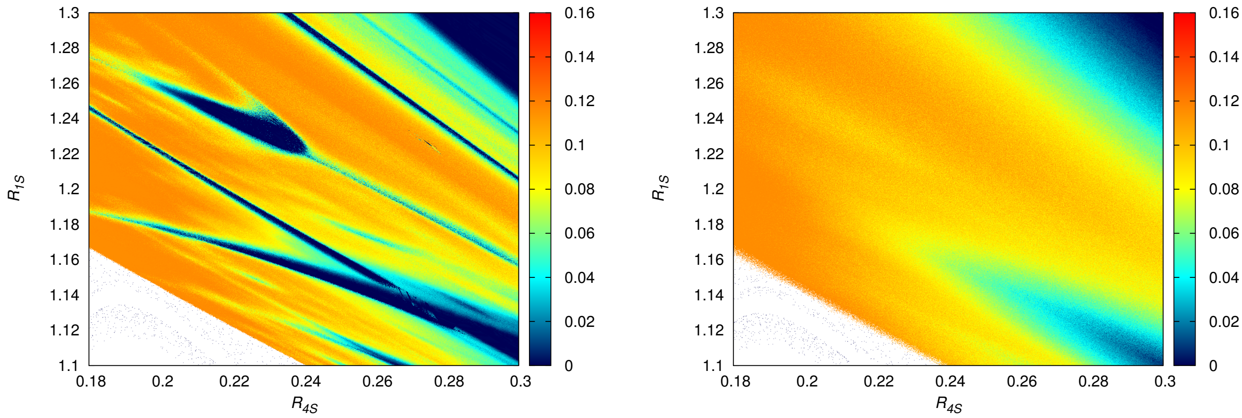


Fonte: O Autor.

ampliação em uma região da Figura 5.6(a). Essa ampliação pode ser vista na Figura 5.7, onde podemos identificar a região onde o segundo expoente de Lyapunov transiciona, e

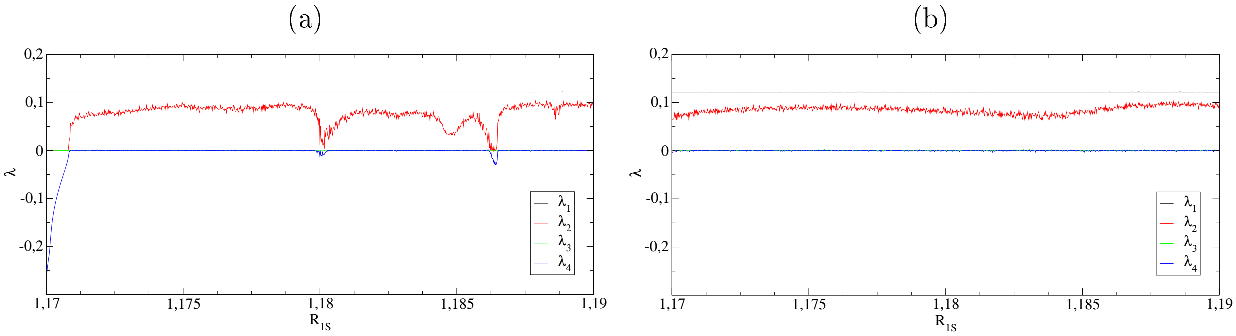
Figura 5.5 – Espaço de parâmetros do sistema 5.1 com os parâmetros do mestre fixos e valor de acoplamento (a) $c = 10^{-3}$ e (b) $c = 10^{-2}$.

(a) (b)



Fonte: O Autor.

Figura 5.6 – Gráfico de expoentes de Lyapunov com $R_{4S} = 0,245$ e (a) $c = 10^{-4}$ e (b) $c = 10^{-3}$.



Fonte: O Autor.

como essa região muda com a intensidade do acoplamento.

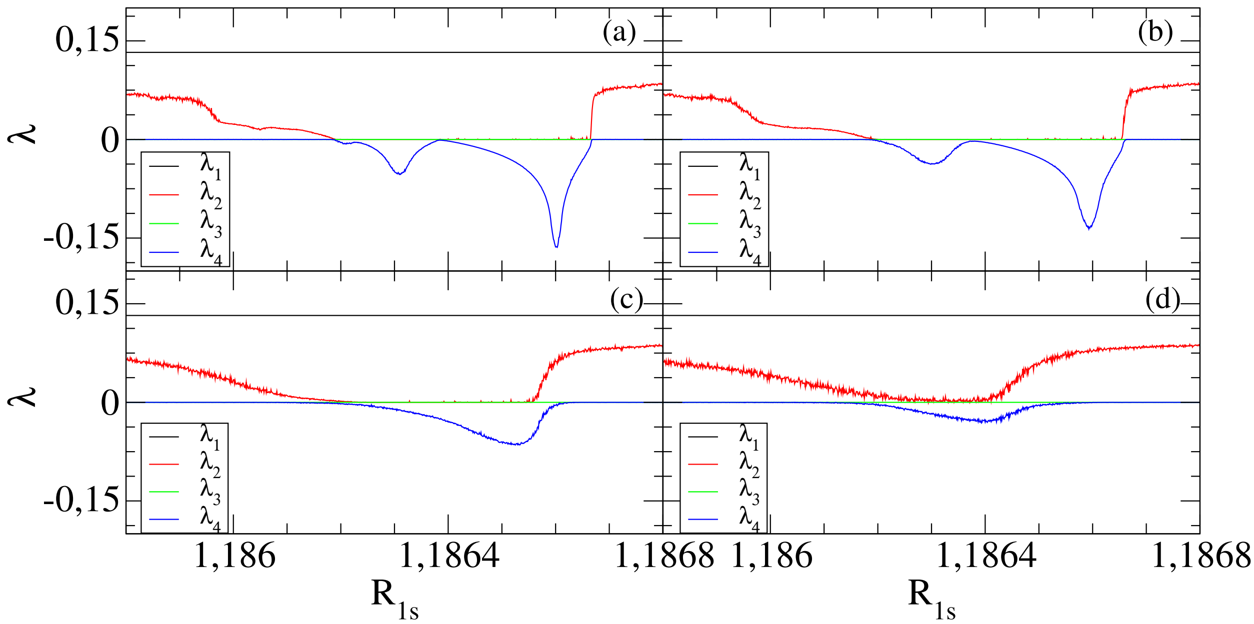
5.2 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Como o expoente de Lyapunov é uma quantidade que depende do comportamento global do sistema, convém utilizarmos conjuntamente a ele uma análise do expoente de Lyapunov a tempo finito. Definimos o k-ésimo expoente de Lyapunov a tempo-T a partir de uma condição inicial $\mathbf{x}_0$ como [30]:

$$\chi_k(\mathbf{x}_0, T) = \frac{1}{T - t_0} \log ||\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, T) u_k||, \tag{5.2}$$

onde u_k é o autovetor correspondente.

Figura 5.7 – Gráfico de expoentes de Lyapunov com $R_{4S} = 0,245$ e (a) $c = 5 \cdot 10^{-6}$, (b) $c = 10^{-5}$, (c) $c = 5 \cdot 10^{-5}$ e (d) $c = 10^{-4}$.



Fonte: O Autor.

Os expoentes de Lyapunov a tempo finito dependem da condição inicial $\mathbf{x}_0$, enquanto que os expoentes a tempo infinito,

$$\lambda_k = \lim_{T\to\infty} \chi_k(\mathbf{x}_0, T), \tag{5.3}$$

possuem o mesmo valor para qualquer condição inicial, desde que ela convirja para o mesmo atrator.

O comportamento irregular dos expoentes a tempo finito, alternando contrações e repulsões, conforme a órbita caminha pela região acessível do espaço de fase torna útil definir sua distribuição de probabilidade. Definimos $P(\chi_k(\mathbf{x}_0, T))$ como a densidade de probabilidade do k-ésimo expoente de Lyapunov a tempo-T a partir de uma condição inicial $\mathbf{x}_0$ escolhida ao acaso no atrator. Em outras palavras, $P(\chi_k(T), T)d\chi_k$ é a probabilidade de que o valor do expoente a tempo finito seja encontrado no intervalo entre χ_k e $\chi_k + d\chi_k$ [30].

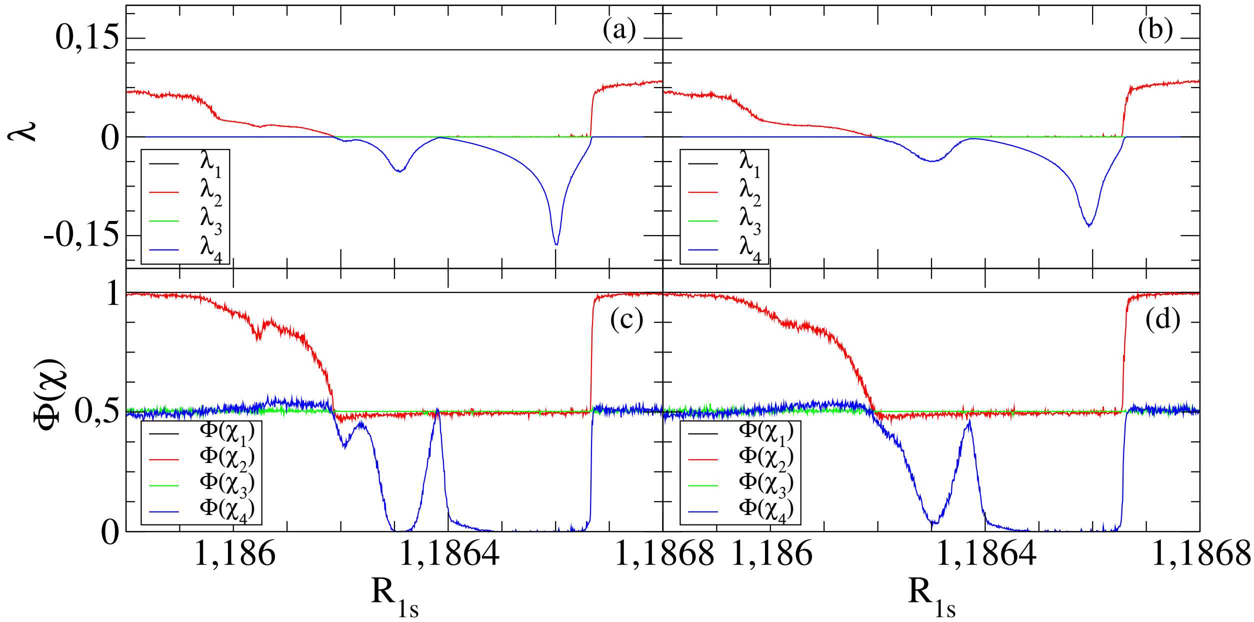
Para obter a distribuição de $P(\chi_k(T))$ numericamente, consideramos um grande número de condições iniciais distribuídas uniformemente no atrator e iteramos cada uma até o tempo T desejado, então calculamos o espectro de expoentes de Lyapunov para cada uma. O que fazemos, na realidade, é acompanhar uma única órbita caótica durante um tempo de integração maior [30]. Os expoentes são calculados, então, de seções da trajetória de comprimento dado pelo tempo T escolhido, e são plotados em um histograma de frequências.

A partir de $P(\chi_k, T)$ podemos determinar a fração do expoente de Lyapunov que é positiva, $\Phi(\chi_k)$, indicando a presença de regiões onde ocorre repulsão de trajetórias, ainda que λ_k seja negativo. Nas Figuras 5.8 e 5.9 podemos ver os diagramas com os quatro maiores expoentes de Lyapunov do sistema acoplado ((a) e (b) em ambas as figuras), bem como a fração positiva de cada um ((c) e (d) em ambas as figuras). Nota-se que o maior expoente possui sempre o mesmo valor, que é referente ao atrator do sistema mestre, e que sua fração positiva é igual a unidade. Na Figura 5.8 pode-se perceber que quando R_{1S} aumenta e λ_2 começa a se aproximar da região de transição entre caos e ciclo-limite ocorre uma queda em $\Phi(\chi_2)$ até chegar em $0,5$, e no ponto de transição de ciclo-limite para caos novamente o aumento em $\Phi(\chi_2)$ se dá de forma abrupta.

A seguir, tomando os parâmetros fixos $R_{1S} = 1,865$ e $R_{4S} = 0,245$, construímos histogramas para verificar a distribuição dos expoentes de Lyapunov calculados a tempo finito. O intervalo de tempo finito utilizado foi $T = 100$, e o tempo total de integração foi $t = 102000$ sendo que foram desprezados 2000 de transiente, logo cada histograma é feito com 100 valores de $\chi(100)$.

Utilizando a distribuição do Lyapunov a tempo finito, pode-se perceber que quando ocorre a erosão nas estruturas, o ponto onde o segundo expoente de Lyapunov está passando por uma transição (de zero para positivo) apresenta uma distribuição do

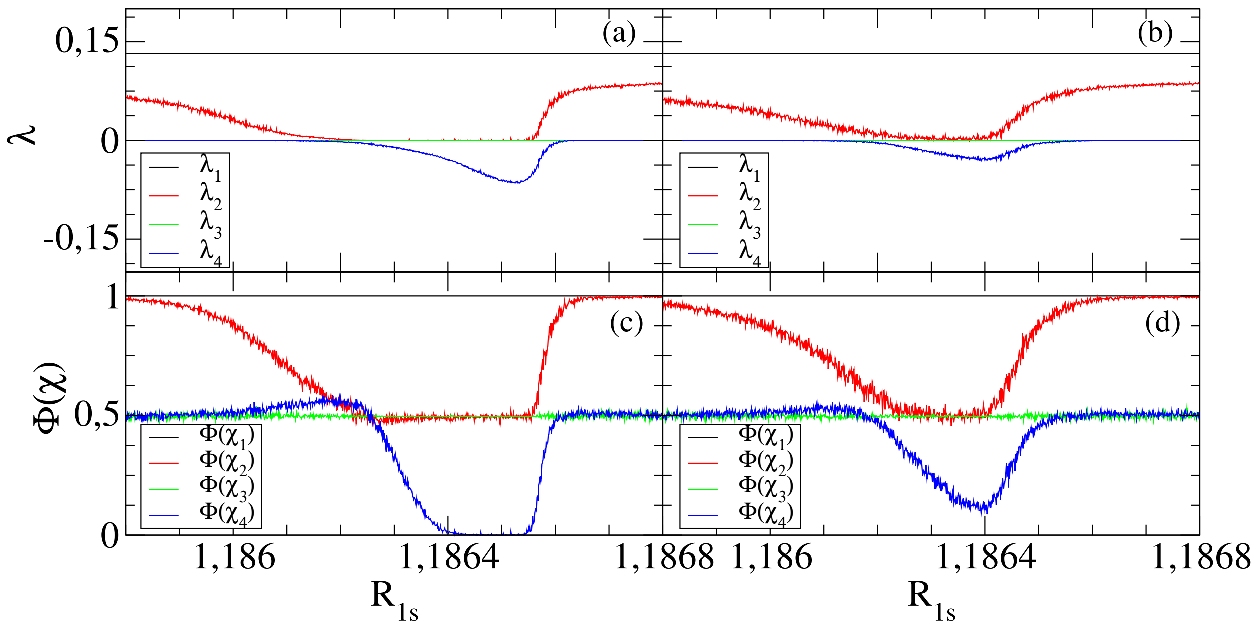
Figura 5.8 – Em (a) e (b) temos os gráficos dos expoentes Lyapunov para $R_{4S} = 0,245$ e intensidade de acoplamento $c = 5 \cdot 10^{-6}$ e 10^{-5}, respectivamente. Em (c) e (d) plotamos a fração positiva de cada expoente para os dois casos.



Fonte: O Autor.

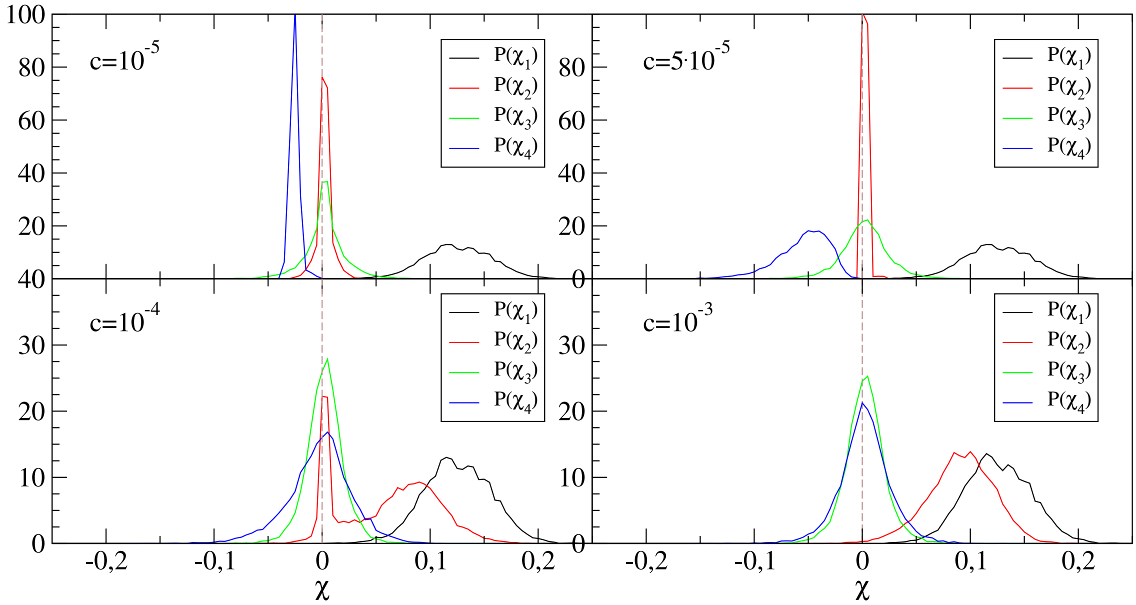
tipo bimodal. Para os valores de parâmetros da Figura 5.10 podemos ver, na distribuição inferior esquerda, que um máximo está próximo de $\chi(100) = 0$ e outro próximo de $\chi(100) = 0,1$. Após a transição, a distribuição volta a ser unimodal restando apenas o

Figura 5.9 – Em (a) e (b) temos os diagramas dos expoentes Lyapunov para $R_{4S} = 0,245$ e intensidade de acoplamento $c = 5 \cdot 10^{-5}$ e 10^{-4}, respectivamente. Em (c) e (d) plotamos a fração positiva de cada expoente para os dois casos.



Fonte: O Autor.

Figura 5.10 – Histograma do expoente de Lyapunov a tempo finito $T = 100$ para diferentes valores de acoplamento e $R_{1S} = 1,865$ e $R_{4S} = 0,245$.

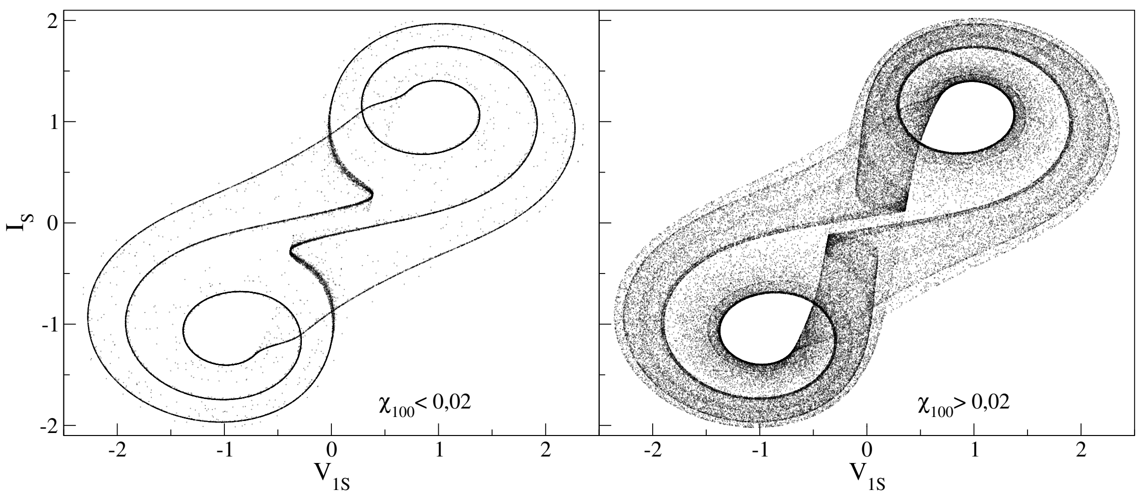


Fonte: O Autor.

máximo próximo a $\chi(100) = 0,1$.

Na Figura 5.11 plotamos os dois atratores da distribuição bimodal. Podemos notar que na figura à esquerda, $\chi(100) < 0,02$, os pontos tendem a pertencer a um ciclo-limite, enquanto na direita, $\chi(100) \geq 0,02$, o atrator é caótico. Portanto, para $c = 10^{-4}$, podemos dizer que a órbita do sistema escravo fica transitando entre uma órbita caótica e os dois ciclos-limites existentes no espaço de fase.

Figura 5.11 – Atratores do sistema escravo com parâmetros $R_{1S} = 1,865$ e $R_{4S} = 0,245$ e acoplamento $c = 10^{-4}$. Na figura da esquerda são plotados os pontos em que $\chi(100) < 0,02$, e na da direita os pontos em que $\chi(100) \geq 0,02$.



Fonte: O Autor.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho investigou-se a influência nas estruturas presentes no espaço de parâmetros causadas pelo acoplamento de um sistema com outro similar cuja dinâmica é caótica, bem como a influência causada nas órbitas, no espectro de expoentes de Lyapunov e na distribuição do expoente de Lyapunov a tempo finito.

Concluímos que o acoplamento unidirecional entre os dois sistemas utilizados afeta a extensão das estruturas presentes no espaço de parâmetros do sistema. Por meio dos diagramas de Lyapunov no espaço de parâmetros percebemos a erosão nas estruturas, que começa pelas antenas e progride com o aumento da intensidade do acoplamento. No artigo onde é relatada a ocorrência de camarões mal formados no circuito de Chua quadridimensional [10], Stegemann e colaboradores relacionam a destruição das estruturas periódicas com Conjectura da Janela[1], segundo a qual se o número de parâmetros acessíveis é igual ao número de expoentes de Lyapunov positivos, então as estruturas periódicas terão extensão limitada nas regiões de transição caos-hipercaos. Porém, em nosso sistema a própria estrutura representa uma região de transição caos-hipercaos e, portanto, não se encaixa nessa conjectura.

Utilizando a distribuição do expoente de Lyapunov a tempo $T = 100$ foi possível verificar que no ponto onde ocorre a erosão na estrutura existe uma distribuição bimodal, o que indica a coexistência de dois atratores entre os quais a órbita permanece transitando de forma intermitente. Acreditamos que esse comportamento intermitente se deve, assim como na bifurcação blowout e no borbulhamento do atrator, à flutuações locais no expoente de Lyapunov. Separando os pontos da órbita em que χ_{100} é menor do que $0,02$ pudemos identificar os dois atratores, sendo um deles um ciclo-limite e o outro um atrator caótico.

Como utilizamos apenas o caso em que o acoplamento é unidirecional e é feito na variável V_{1S}, futuramente pode-se explorar o acoplamento feito nas duas outras variáveis e o acoplamento bidirecional para verificar se são observados os mesmos resultados. Tam-

[1] *Windows Conjecture*

bém consideramos os parâmetros do sistema mestre fixos; é possível variar os parâmetros de ambos os sistemas de forma conjunta. Pode-se, ainda, utilizar o acoplamento de outros sistemas para verificar se os mesmos fenômenos ocorrem.

Capítulo 7

Referências

[1] MONTEIRO, L., **Sistemas Dinâmicos**. Editora Livraria da Física, 2006.

[2] LAPLACE, P. S., **Essai Philosophique sur les Probabiliteés**. 1812. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ga000645.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2015.

[3] ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A., **Chaos**. Springer, 1996.

[4] YORKE, J. A., LI, T.Y., Period three implies chaos. **The American Mathematical Monthly**, vol. 82, no. 10, pp. 985-992, 1975.

[5] GALLAS, J. A. C., Structure of the parameter space of the Hénon map. **Physical Review Letters**, vol. 70, pp. 2714-2717, Maio 1993.

[6] HOFF, A., SILVA, D. T., MANCHEIN, C., ALBUQUERQUE, H. A., Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional chua model. **Physics Letters A**, vol. 378, no. 3, pp. 171-177, 2014.

[7] MEDEIROS, E. S., SOUZA, S. L. T., MEDRANO, R. O., and CALDAS, I. L., Replicate periodic windows in the parameter space of driven oscillators. **Chaos, Solitons & Fractals**, vol. 44, no. 11, pp. 982-989, 2011.

[8] FAÇANHA, W., OLDEMAN, B., GLASS, L., Bifurcation structures in two-dimensional maps: The endoskeletons of shrimps. **Physics Letters A**, vol. 377, no. 18, pp. 1264-1268, 2013.

[9] GALLAS, J. A., Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, vol. 202, no. 1-2, pp. 196-223, 1994.

[10] STAGEMANN, C., ALBUQUERQUE, H. A., RUBINGER, R. M., RECH, P. C., Lyapunov exponent diagrams of a 4-dimensional Chua system. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, vol. 21, no. 3, 2011.

[11] PECORA, L. M., CARROL, T. L., JOHNSON, G. A., MAR, D. J., HEAGY, J. F., Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, vol. 7, no. 4, pp. 520-543, 1997.

[12] GAUTHIER, D. J., BIENFANG, J. C., Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. **Physical Review Letters**, vol. 77, pp. 1751-1754, Ago 1996.

[13] VIANA, R. L., **Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos**. 2011. Disponível em: <pt.scribd.com/doc/12727542/Introducao-a-Dinamica-Nao-Linear-e-Caos>. Acesso em: 25 nov. 2014.

[14] ROSS, S., **Differential Equations**, 3ªEd. Wiley India, 2007.

[15] LORENZ, E. N., Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, vol. 20, pp. 130-141, 1963.

[16] GULLICK, D., **Encounters with Chaos**. Mathematics and Statistics Series, McGraw-Hill, 1992.

[17] HEALEY, J., BROOMHEAD, D., CLIFFE, K., JONES, R., MULLIN, T., The origins of chaos in a modified Van der Pol oscillator. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, vol. 48, no. 2-3, pp. 322-339, 1991.

[18] MATSUMOTO, T., A chaotic attractor from Chua' s circuit. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, vol. 31, no. 12, pp. 39-47, 1984.

[19] RÖSSLER, O., An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, vol. 57, no. 5, pp. 397-398, 1976.

[20] UEDA, Y., Random phenomena resulting from non-linearity in the system described by Duffing' s equation. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 20, no. 5-6, pp. 481-491, 1985.

[21] GARDINI, L., LUPINI, R., MESSIA, M., Hopf bifurcation and transition to chaos in Lotka-Volterra equation. **Journal of Mathematical Biology**, vol. 27, no. 3, pp. 259-272, 1989.

[22] LYNCH, S., **Dynamical Systems with Applications using MATLAB®**. Birkhauser, 2nd ed., 2014.

[23] SHIMADA, I., NAGASHIMA, T., A numerial approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. **Progress of Theoretical Physics**, vol. 61, pp. 1605-1616, Jun 1979.

[24] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L., VASTANO, J. A., Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, vol. 16, no. 3, pp. 285-317, 1985.

[25] OTT, E., SOMMERER, J. C., Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. **Physics Letters A**, vol. 188, no. 1, pp. 39-47, 1994.

[26] OTT, E., SOMMERER, J. C., ALEXANDER, J. C., KAN, I., YORKE, J. A., Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins. **Physical Review Letters**, vol. 71, pp. 4134-4137, Dec 1993.

[27] ASHWIN, P., BUESCU, J., STEWART, I., Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators. **Physics Letters A**, vol. 193, no. 2, pp. 126-139, 1994.

[28] KAPITANIAK, T., MAINSTRENKO, Y., GREBOGI, C., Bubbling and riddling of higher- dimensional attractors. **Chaos, Solitons & Fractals**, vol. 17, no. 1, pp. 61-66, 2003.

[29] VIEIRA, M. S., LICHTENBERG, A. J., LIEBERMAN, M. A., Synchronization of regular and chaotic systems. **Physics Review A**, vol. 46, pp. R7359-R7362, Dec 1992.

[30] SZEZECH JR., J. D., LOPES, S. R., VIANA, R. L., Finite-time lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable hamiltonian systems. **Physics Letters A**, vol. 335, pp. 394-401, Dezembro 2005.