

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE TECNOLOGIA/SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL/  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS  
NUMÉRICOS EM ENGENHARIA**

***“MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO CAMPO  
CONTÍNUO COM IRREGULARIDADES:***

***Aplicações em Mecânica da Fratura com Rugosidade”***

por

**Lucas Máximo Alves**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná - Campus III – Centro Politécnico, para o cumprimento parcial das exigências para obtenção do título de Doutor em Ciências

**Orientador:** D. Sc. Luiz Alkimin de Lacerda

**Co-Orientador:** D. Sc. Luiz Antonio de Souza e D. Sc. José Antonio Marques Carrer

**CURITIBA - PR**

**2011**

i

Ficha catalográfica preparada pela Secção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca - SIBI-UFPR

Alves, Lucas Máximo

“MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO CAMPO CONTÍNUO  
COM IRREGULARIDADES: Aplicações em Mecânica da Fratura  
com Rugosidade”

/Lucas Máximo Alves.--Curitiba, 2011

313p.

Tese (Doutorado)-- Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos  
em Engenharia - Universidade Federal do Paraná - Campus III – Centro  
Politécnico, 2011.

Orientador: Prof. D. Sc. Luiz Alkimin de Lacerda

Co-Orientador: Prof. D. Sc. Luiz Antonio de Sousa e

D. Sc. José Antonio Marques Carrer

1. Mecânica da fratura. 2. Trincas. 3. Teoria fractal. I.Título

## Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo seu imenso amor e misericórdia revelado nas oportunidades que a vida me trouxe. Quero também agradecer:

Ao meu orientador o Prof. D.Sc. Luiz Alkimin de Lacerda, ao meu Co-Orientador o Prof. Dr. Luiz Antonio de Souza e ao Prof. D.Sc. José Antonio Marques Carrer, ao prof. Dr. Roberto Dalledone Machado, à Prof<sup>a</sup> Mildred B. Hecke, à Prof<sup>a</sup> Liliane Cumin e ao prof. D.Sc. Sergio Scheer pelo apoio nas horas difíceis, ao prof. Dr. Maurício Gobbi, ao Prof. Dr. Nelson Dias, ao Prof. Dr. Adriano Scremin, ao Prof. Dr. Vargas, à Maristela Bandil pela amizade, dedicação com que nos atende.

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo apoio, moral emocional e financeiro nas horas difíceis. Agradeço à minha esposa Lair Gomes da Silva Máximo e nossa filha Lis Engedi Gomes Máximo, pelo apoio emocional e espiritual e pelo encorajamento para realizar este trabalho.

Agradeço à Rosane Vilarim pelas amostras de curva-*J*. Agradeço ao meu irmão Lauriberto pela ajuda com o software de simulação. Agradeço aos amigos Celso Ishida, Alexandre Santos, Fabio André, Fabiano Stange, Sandro, Luciana Barbosa, Maiko Buzzi, Josué, Luiz Antonio de Sousa, ao Rodrigo Neves, Rodrigo Dias, ao Raphael Scuciatto, Marco Argenta, Roberta Suero, ao colega Marcos Rebello, ao Engenheiro Roberto Wanzuit pelas sugestões gerais, agradeço também a turminha de Campo Mourão e toda a galera do CESEC e do PET Eng. Civil, e a todo mundo que pagou almoço para mim no RU.

Ao programa brasileiro de bolsas PICT/CAPES. Todos os autores agradecem a FAPESP e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Agradeço ao Laboratório LIMAC – CIPE-UEPG, Prof. Dr. Vicente Campitelli (Laboratório of Eng. Civil), PIBIC/CNPq/UEPG, , CESEC-PPGMNE-UFPR.

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	1
1. 1 – Apresentação do Trabalho.....	1
1. 2 – Desenvolvimento do Trabalho de Pesquisa - Uma breve revisão histórica .....	1
1.2.1 – A Modificação de Teorias e Modelos Utilizando-se a Geometria Fractal .....	2
1.2.2 – Modelagem Fractal das Superfícies de Fratura .....	3
1.2.3 – A Teoria Fractal aplicada à Mecânica da Fratura .....	4
1.2.4 – Surgimento de Métodos Numéricos Fractais .....	6
1. 3 – Motivação do Trabalho de Pesquisa.....	6
1.3.1 – Justificativa, Importância Científica, Tecnológica e Aplicações .....	6
1.3.2 – Perspectiva de Formulação e Desenvolvimento de uma Mecânica do Contínuo Irregular .....	7
1. 4 - O Problema Proposto .....	8
1. 5 – Metas, Objetivos e Metodologia do Trabalho de Pesquisa .....	8
1.5.1 – Objetivos Gerais .....	8
1.5.2 – Objetivos Específicos .....	9
1.5.3 – Metodologia para Desenvolvimento e Estrutura do Trabalho .....	10
1. 6 - Conteúdo nos capítulos seguintes .....	10
Capítulo II: Mecânica do Campo Contínuo de Potenciais Generalizados com Regularidades ..	12
Capítulo III: Fundamentos Matemáticos da Teoria Fractal de Medida .....	12
Capítulo IV: Modelamento Fractal da Superfície Rugosa de Fratura .....	12
Capítulo V: Fundamentos Teóricos da Mecânica da Fratura Clássica.....	13
Capítulo VI: Modelamento Fractal da Fratura Elástica Linear - Crescimento Estável (ou Quase-Estático) de Trinca .....	13
Capítulo VII: Aplicações, Validação dos Modelos, Resultados, Análises Experimentais e Discussões .....	14
Capítulo VIII: Considerações Finais, Conclusão e Perspectivas Futuras .....	14
MECÂNICA DO CAMPO CONTÍNUO DE POTENCIAIS GENERALIZADOS COM IRREGULARIDADES .....	15
2. 1 – Introdução aos Fenômenos de Natureza Dinâmica .....	15
2.1.1 - Campo Uniforme ao Redor de Superfícies Regulares .....	16
2.1.2 - Campo Uniforme ao Redor de Superfícies Irregulares.....	17
2.2 –Revisão Bibliográfica .....	18
2.2.1. O surgimento de teorias do campo contínuo com a inclusão de irregularidades .....	19
2.2.2. Importância da inclusão da rugosidade na teoria do campo contínuo clássica .....	21
2.3 - Fundamentação Teórica – Mecânica dos Meios Irregulares.....	21
2.3.1- Consideração sobre a Continuidade das Funções .....	22
2.3.2 – A Problemática da Modelagem da Rugosidade .....	22
2.3.3 - Problema proposto .....	23
2.3.4 – A Teoria Mecânica dos Meios Irregulares em Outras Áreas .....	24
2.3.5 – A microestrutura e as irregularidades de um meio.....	25
2.3.6 – Características básicas das estruturas irregulares .....	26
2.4 – Densidades e Potenciais Generalizadas em Termos de Geometrias irregulares (Rugosas ou Porosas) .....	26
2.4.1 – O Conceito escalar da fração volumétrica irregular efetiva .....	27
2.5 – A rugosidade geométrica de uma Linha ou Superfície Rugosa .....	29
2.5.1 – O Modelo Escalar da Rugosidade .....	29
2.5.2 – O Modelo Vetorial da Rugosidade.....	30
2.5.3 – Conceito Tensorial de Rugosidade.....	32
2.6 – Fluxos e Equações de Movimento generalizados em termos de geometrias rugosas .....	35
2.6.1 – O Fluxo Generalizado, $J_X$ , através de uma Superfície Rugosa .....	35

2.6.2 – “Fluxo de Porosidade” e Equação de Movimento da Fração Volumétrica Irregular Efetiva .....	37
2.6.3 - Relação entre fração volumétrica irregular efetiva e vazão de massa .....	39
2.6.4 – Conjugação do fluxo de fração volumétrica irregular efetiva com a Rugosidade .....	40
2.6.5 – Fluxo de Rugosidade e a Equação de Movimento da Rugosidade .....	40
2.6.6 - Relação da Rugosidade com o Fluxo de Área Rugosa .....	41
2.6.7 – A Equação de Movimento Generalizada.....	43
2. 7 – Equação Constitutiva de Potenciais Vetoriais em termos de geometrias rugosas .....	44
2.7.1 – Equações Constitutivas e Leis de Fluxos proveniente de Gradientes .....	44
2.7.2 - Relação entre Rugosidade e fração volumétrica irregular efetiva em Campos Vetoriais .....	45
2. 8 – A Equação do Campo Contínuo com Irregularidades.....	47
2.8.1 - Modificação da Equação Constitutiva de Potenciais Vetoriais – Caso Elástico .....	47
2.8.2 - Proposta de uma equação para o potencial vetorial com irregularidades para a teoria da elasticidade .....	48
2.8.3 - Equação do Potencial Vetorial para as Superfícies Rugosas .....	50
2.8.4 – Solução das Equações do Potencial Vetorial com Irregularidades .....	52
2.8.5 – Solução das Equações do Fluxo Vetorial com Irregularidades.....	53
2. 9 – Resultados Numéricos –Campo de Tensões em uma Análise de Fratura .....	55
2.9.1 – Campo ao redor de uma trinca com comprimento $L_0 = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ :Modo I de Carregamento .....	55
2.9.2 - Análise comparativa entre os campos liso e rugoso .....	59
2.9.3 - Aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca em um meio irregular .....	61
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA FRACTAL DE MEDIDA .....	64
3. 1 – Introdução.....	64
3. 2 – A natureza e a importância dos fractais .....	65
3. 3 – Os elementos da geometria euclidiana e as dimensões inteiras e não-inteiras, ou fractais..	66
3. 4 – A medida geométrica euclidiana .....	67
3. 5 - Condição de invariância de uma medida por transformação de escala do padrão de medida .....	70
3. 6 - Uma medida geométrica generalizada .....	71
3.7 – A definição de um fractal .....	73
3.7.1 - A definição matemática de um objeto fractal .....	73
3.7.2 - A dimensão de imersão de um objeto .....	75
3.7.3 - A dimensão de falta e de excesso de um objeto.....	75
3.8 – Paralelo entre a geometria euclidiana e fractal.....	75
3.8.1 - Fractais entre $0 \leq D \leq 1$ (análogos a pontos).....	76
3.8.2 - Fractais entre $1 \leq D \leq 2$ (análogos a retas) .....	76
3.8.3 - Fractais entre $2 \leq D \leq 3$ (análogos a superfícies ou volumes porosos).....	76
3. 9 - As diferentes dimensões fractais de um objeto e seus métodos de caracterização .....	77
3.9.1 - As Dimensões de Caixa (Box-Dimension, $D_B$ ) Local e Global: .....	79
3.9.2 - As Dimensões de Caixa e a Dimensão de Hausdorff-Besicovitch .....	80
3. 10 - Tipos de escalonamento .....	83
3.10.1 - Escalonamento estático e a medida da dimensão de uma estrutura fractal.....	84
3.10.2 - Escalonamento dinâmico e a medida da dimensão de uma estrutura fractal .....	84
3. 11 - Métodos de Compasso para determinação da dimensão fractal de um objeto ou estrutura auto-similar ou auto-afim .....	85
3.11.1 - Método de Richardson para o cálculo da dimensão auto-similar de um objeto fractal .....	85
3.11.2 - Análise pelo método das ilhas cortadas de Mandelbrot .....	89
3. 12 - Métodos de Contagem de Caixa para determinação da dimensão fractal de um objeto ou estrutura auto-similar ou auto-afim .....	92

3.12.1 - O método Box-Counting de contagem pelo escalonamento estático dos elementos de uma estrutura fractal.....	93
3.12.2 - O método Sand-Box de contagem pelo escalonamento estático dos elementos de uma estrutura fractal.....	95
3.12.3 - Equivalência entre o método de contagem Box-Counting e o método Sand-Box.....	97
<b>MODELOS FRACTAIS PARA PERFIS E SUPERFÍCIES RUGOSAS DE FRATURA.....</b>	<b>100</b>
4. 1 - Introdução .....	100
4.1.1 - Importância da Modelagem da Superfície de Fratura.....	101
4.1.2 - Revisão Bibliográfica - Modelos de Escalonamento Fractal de Superfícies de Fratura .....	103
4. 2 - Modelo analítico de uma superfície rugosa .....	104
4.2.1 - Definição de Superfícies .....	104
4. 3 - Superfícies Fractais .....	105
4. 4 - Propriedades das Superfícies Fractais.....	109
4.4.1 - Tortuosidade .....	109
4.4.2 - Rugosidade.....	109
4.4.3 - Fractalidade.....	110
4.4.4 - Lagunaridade.....	112
4.4.5 - Textura .....	112
4. 5 – Tipos de Superfícies Fractais .....	112
4.5.1 - Superfícies fractais auto-similares .....	112
Escalonamento fractal auto-similar de uma superfície rugosa de fratura .....	114
Escalonamento fractal auto-similar de um perfil rugoso de fratura .....	116
4.5.2 - Superfícies fractais auto-afins.....	117
4. 6 - A formação das superfícies de fratura .....	117
4.6.1 - Observações extraídas da fractografia quantitativa .....	119
4.6.2 - Aspectos geométricos das estruturas irregulares da superfície de fratura .....	119
4. 7 - A teoria fractal aplicada a descrição do relevo da superfície de fratura .....	120
4.7.1 - A descrição de padrões irregulares .....	120
4.7.2 - O padrão geométrico fractal de uma fratura e as suas escalas de medida .....	121
4. 8 - A descrição matemática de uma trinca ou uma superfície de fratura como sendo um fractal .....	124
4.8.1 – A fractalidade de uma trinca ou superfície de fratura .....	124
4.8.2 - O problema da identificação do nível de escalonamento, $k$ , de uma estrutura fractal de uma fratura. ....	126
4.8.3 – O problema da calibração de um do tamanho mínimo de fratura como sendo um “tamanho de régua” mínimo do seu fractal .....	128
4.8.4 – A relação de auto-similaridade de uma trinca fractal.....	129
4.8.5 – O problema da determinação da geometria da semente fractal de tamanho mínimo e suas consequências no modelamento fractal da fratura .....	131
4. 9 - O modelo fractal auto-afim de um perfil rugoso de fratura .....	135
4.9.1 – A condição matemática fractal auto-afim de um perfil rugoso de fratura .....	135
4.9.2 – Cálculo do comprimento rugoso de uma trinca em função do seu comprimento projetado.....	136
caso 1 : O limite auto-similar ou local da fractalidade.....	141
caso 2: O limite auto-afim ou global da fractalidade .....	142
4.9.3 - A rugosidade local de uma superfície de fratura .....	142
4. 10 – Considerações preliminares sobre o modelo proposto.....	144
<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA DA FRATURA CLÁSSICA .....</b>	<b>146</b>
5. 1 - Introdução .....	146
5. 2 - O que estuda a Mecânica da Fratura e a sua Importância Tecnológica na Engenharia dos Materiais.....	147

5.3 - Introdução a Teoria Clássica da Mecânica da Fratura .....	149
5.3.1 - A teoria de Inglis para a fratura e a sua abordagem dos concentradores de tensão .....	150
5.4 - A teoria termodinâmica para a fratura e o modelo de Griffith .....	150
5.4.1 - O balanço energético de Griffith para a fratura.....	151
5.4.2 - Cálculo da energias envolvidas no balanço de Griffith .....	152
5.4.3 - A abordagem variacional do balanço energético de Griffith para a fratura .....	154
5.4.4 - O tamanho crítico, e o critério energético de Griffith para a propagação de trinca. ....	159
5.5 - A Mecânica da Fratura Elástica Linear Clássica para os Materiais Frágeis .....	160
5.5.1 - A modificação de Irwin para a teoria do balanço energético de Griffith.....	161
5.5.2 - A taxa de energia elástica liberada, G .....	162
5.5.3 - A resistência à propagação da trinca, R, para o caminho liso.....	164
5.5.4 - O critério de fratura segundo Griffith-Irwin e a relação entre G e R, para o caminho liso .....	165
5.5.5 - O fator de intensidade de tensão, $K_I$ , e a flexibilidade ou módulo elástico, E, para o caminho liso .....	166
5.5.6 - O fator de intensidade de tensão crítico, ou tenacidade a fratura, $K_{IC}$ , para o caminho liso .....	167
5.5.7 - A propagação de trinca em regime de fratura estável ou quase-estática e o conceito de curva G-R de Irwin.....	168
5.6 - A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica Clássica para os materiais frágeis e dúcteis.....	171
5.6.1 - A teoria de Irwin-Orowan e a modificação do balanço energético da teoria de Griffith .....	172
5.6.2 - A taxa de energia elasto-plástica liberada, J, para o caminho liso .....	174
5.6.3 - O critério de Irwin-Orowan .....	175
5.6.4 - A integral de Eshelby-Rice para o caminho liso .....	176
5.6.5 - A propagação estável e o conceito de curva J-R, para o caminho liso .....	178
TEORIA DO CAMPO ELASTOSTÁTICO DA FRATURA COM IRREGULARIDADES .....	180
6. 1 - Introdução .....	180
6. 2 - Revisão Bibliográfica da Mecânica da Fratura Fractal Estável ou Quase-Estática.....	182
6.2.1 - Antecedentes da aplicação da teoria fractal no entendimento da fractografia .....	182
6.2.2 - Modelagem fractal das grandezas energéticas da Mecânica da fratura .....	185
6.2.3 - A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica .....	187
6.2.4 - Modelagem fractal do campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa.....	187
6. 3 - Aplicação da Mecânica dos Meios Irregulares à Mecânica da Fratura Estável ou Quase-Estática para o caminho rugoso.....	190
I) Postulado da admissibilidade da superfície de fratura.....	190
II) Postulado do limite de escalas para a equivalência fractal de uma trinca .....	190
III) Postulado da equivalência energética de Irwin .....	191
IV) Postulado da invariância das equações .....	192
V - Teorema das Transformações das Equações entre o Caminho Projetado e Rugoso.....	193
6. 4 - Relação de equivalência entre as grandezas das fraturas lisas e rugosas .....	193
6.4.1 - Cálculo da energia elástica e da energia de superfície para uma trinca lisa .....	193
6.4.2 - Cálculo da energia elástica e da energia de superfície para uma trinca rugosa .....	196
6.4.3 - Cálculo da taxa de energia elástica e da resistência a fratura para uma trinca lisa e rugosa .....	198
6. 5 - Cálculo da ordem da singularidade e da intensidade do campo de tensão na ponta de uma trinca rugosa .....	202
1ª maneira.....	202
2ª maneira.....	203
6. 6 - Equações de energia e taxas de energia da Mecânica da Fratura quase-estática para o caminho rugoso .....	205
6.6.1 - A taxa de energia elástica liberada para o caminho rugoso .....	205

6.6.2 - A propagação quase-estática, o critério de Griffith-Irwin e a curva G-R.....	207
6.6.3 – O tamanho crítico de Griffith e a tensão de fratura para o caminho rugoso .....	208
6.6.4 – A relação entre R e G para o caminho rugoso.....	208
6.6.5 - A tenacidade a fratura para o caminho rugoso.....	209
6. 7 - Relação entre as grandezas projetadas e rugosas .....	209
6.7.1 – Relação entre as taxas de energia elástica liberada, projetada e rugosa.....	210
6.7.2 – Relação entre as resistências a fratura, projetada $R_0$ e rugosa $R$ .....	211
6.7.3 – A relação entre o critério de Griffith-Irwin para o caminho projetado e rugoso .....	212
6.7.4 - Relação entre as tenacidades, tensões de fratura e módulos de rigidez elásticos projetado e rugoso .....	213
6.7.5 - Relação entre as tensões aplicadas e os comprimentos da trinca rugosa e projetada ...	215
6. 8 – Campo de Tensão na Ponta de uma Trinca Fractal para os Modos de Fratura I, II e III ...	217
6. 9 – A teoria fractal aplicada as equações de energia e taxas de energia ao fenômeno da fratura estável ou quase-estática .....	220
6.9.1 – A relação entre as energias de deformação rugosa, $U_L$ , e projetada, $U_{L0}$ , em termos da geometria fractal.....	220
6.9.2 – A energia de superfície, $U_{\gamma_0}$ , em termos da geometria fractal.....	222
6.9.3 – O balanço energético de Griffith em termos da geometria fractal .....	223
6.9.4 – A taxa de energia elástica liberada, $G_0$ , em termos da geometria fractal .....	224
6.9.5 – A curva G-R de resistência a propagação da trinca em termos da geometria fractal...	225
6.9.6 – A resistência e a tenacidade à fratura, a tensão de fratura em termos da geometria fractal.....	226
6.9.7 – A curva J-R de resistência ao crescimento da trinca em termos da geometria fractal .	228
6.9.8 – O efeito da fração volumétrica irregular efetiva e da rugosidade na equação de energia do campo de tensão elastostático .....	228
6.9.9 - A integral- $J_0$ de Eshelby-Rice para os caminhos de trinca rugoso e projetado no plano .....	233
6. 10 - A Teoria Fractal aplicada ao Modelo de curva J-R para material dúctil .....	238
6.10.1 - Influencia do Crescimento Estável (ou Quase-Estático) da Trinca Rugosa e a Relação entre a Curva G-R e J-R .....	240
6.10.2 – O limite auto-similar, ou local, da fratura e as grandezas críticas .....	242
6.10.3 – O limite auto-afim, ou global, da fratura e as grandezas críticas .....	245
6.10.4 – A tenacidade a fratura, a tensão de fratura e a rigidez em termos da geometria fractal .....	245
6.10.5 - As análises das curvas J-R usando o modelo fractal.....	246
6. 11 – Mecânica da Fratura Elasto-Plástica com Irregularidades .....	248
6.11.1 - Trincas fractais no endurecimento clássico por deformação plástica nos sólidos elásticos não-lineares.....	248
6.11.2 - Modelagem Fractal da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica .....	249
6. 12 – Resultados dos Métodos Analíticos de Fratura Fractal com variação do expoente de singularidade .....	250
6.12.1 – Aspecto geral do campo ao redor de uma trinca com singularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo I .....	250
6.12.2 – Campo ao redor de uma trinca com singularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo II.....	252
6.12.3 – Campo ao redor de uma trinca com singularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo III.....	254
6. 13 – Análise comparativa das grandezas da Mecânica da Fratura lisa, projetada e rugosa .....	255
6.13.1 – Relação entre as taxas de energia elástica liberada para uma trinca lisa, projetada e rugosa .....	256
6.13.2 - Generalização dos critérios de fratura para uma trinca rugosa .....	257



APLICAÇÕES, VALIDAÇÃO DOS MODELOS, RESULTADOS, ANÁLISES EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES.....	262
7. 1 – Introdução.....	262
7. 2 – Materiais Utilizados .....	263
7.2.1 – Os Corpos de Prova do Material Metálico do Processo de Soldagem .....	263
7.2.2 – Os Corpo de Prova do Material Polimérico .....	264
7. 3 – Métodos dos Ensaio, Procedimentos e Testes Experimentais para os Materiais utilizados .....	265
7.3.1 - Métodos para o Material Metálico .....	265
7.3.2 – O Ensaio de Tenacidade à Fratura.....	267
7.3.3- O Ensaio de Curva J - R.....	267
7.3.4 – Métodos para o Material Polimérico .....	268
7. 4 – Métodos de Análise Fractal das Superfícies de Fratura .....	269
7.4.1- Análise Fractal das Superfícies de Fratura.....	269
7.4.2 – Análise das superfícies de fratura pelo Método das “Ilhas de Contraste” .....	270
7.4.3 - Análise fractal auto-similar e auto-afim de superfícies .....	271
7. 5 – Resultados Experimentais dos Materiais Metálico e Polimérico .....	272
7.5.1- Análise das superfícies de fratura dos materiais metálicos.....	272
7.5.2 - Determinação do expoente Hurst, H.....	277
7.5.3 – Ensaio e ajustes de curva J-R .....	280
7.5.4 – Análise das superfícies de fratura dos materiais poliméricos .....	283
7.5.5 - Determinação do expoente Hurst, H.....	284
7.5.6 – Ensaio de curva J-R .....	285
7. 6 – Análise dos Resultados Experimentais .....	286
7.6.1 - As análises das curvas J-R usando o modelo fractal.....	287
7. 7 – Discussão dos Resultados Experimentais .....	293
7.7.1 – Discussão da Abordagem Fractal na Mecânica da Fratura .....	293
7.7.2 – Do modelo fractal para a curva J-R.....	294
7.7.3 - Do método de análise das superfícies de fratura.....	296
7.7.4 – Ensaio de curva J-R para metais, soldas metálicas, materiais poliméricos e outros ..	298
7.7.5 – Dos Ensaio de curva J-R para os materiais metálicos .....	299
CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E PERPECTIVAS FUTURAS.....	301
8. 1 - Considerações finais e objetivos alcançados por este trabalho.....	301
8. 2 – Conclusões do Resultados Analíticos da Mecânica dos Meios Irregulares .....	302
8.2.1 - A solução analítica para o modelo de fratura baseado na Mecânica dos Meios Irregulares.....	302
8. 3 - Conclusões dos Resultados Numéricos de Simulação.....	302
8. 4 – Conclusões do Resultados Analíticos dos Modelos Fractais da Fratura .....	303
8.4.1 - A Solução Analítica para o modelo do Campo de Tensão ao redor de uma trinca rugosa .....	303
8. 5 - Conclusões dos Resultados Experimentais .....	305
8.5.1 - Modelamento fractal da superfície de fratura .....	305
8.5.2 – Do modelo fractal da curva J-R e dos seus ensaios experimentais .....	306
8. 6 - Perspectivas resultantes deste trabalho e Propostas de Trabalhos futuros.....	310
8.6.1 – Para o Meios Irregulares e Simulações Numéricas .....	310
8.6.2 – Para a Mecânica da Fratura Fractal .....	313
Apêndices .....	1
A1 - O Modelo fractal de estruturas geométricas .....	1
A1.1- Estruturas e padrões geométricos invariantes por transformação de escala .....	1
A1.2 - Elemento geométrico fundamental da estrutura ou “semente fractal” .....	2
A1.3 - Limites hierárquicos de escalonamento .....	3

A1.4 – A relação de invariância por transformação de escala de uma estrutura fractal auto-similar.....	4
A1.5 - Diferença entre régua de medida e tamanho do elemento de estrutura .....	5
A2 - Classes e tipos de fractais.....	7
A2.1- Fractais Matemáticos ou Exatos (Uniformes e Não-uniformes).....	7
A2.2 - Fractais Físicos ou Reais ou Estatísticos (Uniformes e Não-uniformes).....	8
A3 - Propriedades dos objetos e estruturas geométricas fractais .....	9
A3.1- Dimensão Fractal (não-inteira) .....	9
A3.2- Invariância por transformação de escala .....	10
A3.3 - Auto-similaridade fractal e Fractais Auto-similares .....	11
A3.4 - Auto Afinidade fractal e Fractais Auto Afins .....	12
A3.5 - Auto-similaridade e a auto-afinidade exata e estatística .....	16
A4 – Análise do Módulo Secante e Tangente de um corpo material .....	18
A4.1 – A diferença entre o Módulo de Rigidez e o Módulo Elástico .....	18
A4.2 – A variação do módulo de rigidez de um material durante a fratura .....	19

## LISTA DE FIGURAS

Figura - 1. 1. Arcabouço geral do desenvolvimento do trabalho de pesquisa realizado. ....	11
Figura - 2. 1. Esquema de um campo em torno de um corpo esférico regular uniformemente carregado sujeito a um potencial eletrostático escalar $\vec{u} = cte$ , a) Linhas equipotenciais; b) Linhas de fluxo constante. ....	16
Figura - 2. 2. Esquema de um campo em torno de um corpo esférico irregular uniformemente carregado sujeito a um potencial eletrostático escalar $\vec{u} = cte$ , a) Linhas equipotenciais; b) Linhas de fluxo constante. ....	18
Figura - 2. 3. Vetores normais a uma quina suave e a um “bico” ou quina brusca. ....	22
Figura - 2. 4. Mudança do contorno rugoso $\Gamma$ para o contorno projetado $\Gamma_0$ . ....	23
Figura - 2. 5. Áreas abrangentes e interdisciplinares que podem envolver a Mecânica dos Meios Irregulares. ....	25
Figura - 2. 6. Campo de Irregularidades de diferentes tipos de defeitos e irregularidades presentes num material que age como concentradores de tensão e influenciam na formação da superfície de fratura (extraído do livro Ewalds, pág. 226, 1993). ....	26
Figura - 2. 7. Volume irregular $V$ encapsulado, ou inscrito, dentro de um volume euclidiano regular aparente $V_0$ . ....	27
Figura - 2. 8. Modelo de <i>rugosidade escalar</i> definido a partir de; a) um contorno rugoso em relação ao um contorno liso para o mesmo problema matemático; b) esquematização local de uma rugosidade. ....	29
Figura - 2. 9. Modelo de <i>rugosidade</i> vetorial $\hat{r} \neq \hat{r}_0 \neq \hat{n}_0$ . ....	31
Figura - 2. 10. <i>Rugosidade</i> de uma linha ou de uma superfície em relação a uma projeção média lisa de referência. ....	32
Figura - 2. 11. Fluxo através de uma superfície irregular $A$ contida em uma superfície euclidiana regular aparente projetada $A_0$ . ....	35
Figura - 2. 12. Fluxo da <i>fração volumétrica irregular efetiva</i> ou “fluxo de porosidade” deslocando-se com uma velocidade média $\vec{v}$ para uma direção enquanto a perda de massa se desloca na direção contrária. ....	37
Figura - 2. 13. Fluxo da <i>fração volumétrica deformada ou fluxo de rugosidade</i> deslocando-se com uma velocidade média $\vec{v}$ para uma direção. ....	40
Figura - 2. 14. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio. ....	50
Figura - 2. 15. Representação do campo de tensão $\sigma_{yy}$ a uma distância $\vec{r}$ da ponta da trinca. ....	54
Figura - 2. 16. Condições de contorno e carregamento aplicado a malha de simulação de uma placa com uma trinca de comprimento variável, válida tanto para o caso liso como rugoso. ....	55
Figura - 2. 17. Malha de simulação de uma placa com uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa. ....	56
Figura - 2. 18. Campo de Tensão $\sigma_{xx}$ ao redor de uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa. ....	57
Figura - 2. 19. Campo de Tensão $\sigma_{yy}$ ao redor de uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa. ....	58
Figura - 2. 20. Energia total de deformação $U_L$ em função do comprimento de uma trinca lisa e rugosa. ....	58
Figura - 2. 21. Campos de tensão $\sigma_{xx}$ para corpos com comprimento $L_0 = 12$ e raio de curvatura da trinca $\rho = 2$ ; a) liso; b) rugosidade 2 c) rugosidade 0,5. ....	59

Figura - 2. 22. Diferença da Intensidade do campo $\sigma_{xx}$ para uma linha inferior perpendicular à trinca.....	60
Figura - 2. 23. Diferença da Intensidade do campo $\sigma_{xx}$ para uma linha superior perpendicular à trinca.....	60
Figura - 2.24. Exemplo preliminar de pontas de <i>rugosidade</i> penetrando em regiões intensas da vizinhança de um campo escalar ou vetorial de tensão da ponta principal simulado com Diferenças Finitas para em um campo escalar. ....	61
Figura - 2.25. Campo de tensão ao redor de uma trinca, em uma placa de Griffith, calculado pela equação Bi-harmônica usando o Método de Diferenças Finitas a) Material regular sem defeitos concentradores de tensão; b) e c) material irregular com defeitos concentradores de tensão aleatoriamente distribuídos na frentes da trinca e c) aumentado-se o número de concentradores de tensão.....	62
Figura - 3. 1. Medida euclidiana da área de um quadrado igual a $A = L_o^2 = 64\delta^2$ . ....	68
Figura - 3. 2. Medida não-euclidiana da área de um quadrado igual a $A = (L_o/\delta)^D \delta^2 = 30\delta^2$ . ....	68
Figura - 3. 3. Medida, $M_D(\delta)$ , de uma área, $A$ , de dimensão $D = 2$ , feita com diversos padrões de medida $u_D$ com $D = 1, 2, 3$ . ....	72
Figura - 3. 4. Fractal imerso no espaço unidimensional onde $D \cong 0,631$ . ....	76
Figura - 3. 5. Fractal imerso numa dimensão $d = 2$ . linha fractal rugosa. ....	76
Figura - 3. 6. Superfície irregular ou rugosa que apresenta escalonamento fractal com dimensão $D$ entre: $2 \leq D \leq 3$ .....	77
Figura - 3. 7. Comparação entre a geometria euclidiana e a geometria fractal. $D$ , $d$ e $D_f$ representam as dimensões topológica, euclidiana e fractal, de um ponto, de um segmento, de uma superfície plana e de um cubo, respectivamente. ....	77
Figura - 3.8. Método Box-Counting aplicado sobre um fractal auto-afim.....	79
Figura - 3. 9. Construção matemática de um fractal, seguindo uma regra básica de preenchimento do espaço a) Coalescência: $l_{rk} = \text{variável}$ , $L_o = \text{cte}$ , b) Fragmentação: $l_{rk} = \text{variável}$ , $L_o = \text{cte}$ c) Crescimento: $l_o = \text{cte}$ , $L_{rk} = \text{variável}$ . ....	83
Figura - 3. 10. Método do compasso de Richardson usado no cálculo da dimensão fractal de uma linha costeira. ....	86
Figura - 3. 11. Diagrama de Richardson usado no cálculo da dimensão fractal de uma estrutura ou objeto.....	87
Figura - 3.12. Superfície irregular ou rugosa obtida por microscopia de força atômica e utilizada como exemplo para análise pelo método das ilhas cortadas, a qual apresenta escalonamento fractal com dimensão $D$ entre: $2 \leq D \leq 3$ . ....	89
Figura - 3.13. “Áreas cortadas” em superfícies de níveis da Figura - 3.12.....	90
Figura - 3. 14. a) Trinca radial num disco de espessura “ $e$ ” e raio $R_{máx}$ . b) fragmento fractal de raio $r$ e espessura “ $e$ ” análogo a uma ilha cortada. ....	91
Figura - 3. 15. Método de análise das ilhas cortadas, para medida da dimensão fractal da superfície de fratura. a) Corte em nível da superfície de fratura. b) Gráfico $\log A_{kr} \times \log P_{kr}$ destas ilhas. ....	92
Figura - 3. 16. Trecho de uma trinca sobre um corpo de prova, mostrando a variação da medida do comprimento, $L$ , da trinca com a escala de medida, $\varepsilon_k = \delta_k / L_o$ , para uma partição, $\delta_k = \text{variável}$ e $L_k = L_o$ ( <i>fixo</i> ), com seccionamento feito para contagem segundo o método de escalonamento Box-Counting unidimensional. ....	94
Figura - 3.17. Trecho de uma trinca sobre um corpo de prova, mostrando, a variação da medida do comprimento, $L$ , da trinca com a escala de medida $\varepsilon_k = l_o / L_k$ , para uma partição, $L_k = \text{variável}$ , $\delta_k = l_o$ ( <i>fixo</i> ), com seccionamento feito para contagem segundo o método de escalonamento Sand-Box unidimensional.....	96
Figura - 4. 1. Aplicação $(x,y) \rightarrow z = f(x,y)$ na forma de uma superfície rugosa genérica. ....	104

Figura - 4.2. a) Superfície rugosa genérica $z = f(x,y)$ ; b) Visão próxima da superfície rugosa limitada por $\delta L_0$ e $\delta E_0$ .....	106
Figura - 4. 3. Figura esquemática de uma janela $l_x, l_y$ de uma superfície de fratura fractal rugosa. ....	106
Figura - 4.4. Elemento mínimo de superfície de uma superfície rugosa genérica. ....	107
Figura - 4. 5. Fractal de contorno da ilha de Koch transformado em um fractal de superfície auto-similar pela sobreposição sobre uma superfície plana. ....	114
Figura - 4. 6. Superfície rugosa formada por uma função homogênea $A$ , de grau, $D$ , cuja projeção plana, $A_o$ , é uma função homogênea de grau, $d$ , mostrando a superfície unitária $A_u$ . ....	115
Figura - 4. 7. Escalonamento de um perfil rugoso de uma superfície de fratura ou de uma trinca, usando o tamanho mínimo de Mishnaevsky como “régua de medida”, a) caso de uma trinca retilínea não-fractal, $d = D = 1$ ; b) caso de uma trinca retilínea tortuosa fractal $d \leq D \leq d+1$ .....	116
Figura - 4. 8. Aspectos variados da superfície de fratura de diferentes materiais: (a) Material metálico, amostra B2CT2; (b) Material polimérico, amostra PU1.0, com detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca; (c) Material cerâmico [Dos Santos 1999].....	120
Figura - 4. 9. Superfícies de fratura de diferentes peças feitas do mesmo material, a) Lote A9; b) Lote A1 [Dos Santos 1999]. ....	121
Figura - 4. 10. Variação do padrão de irregularidades com a escala de ampliação em uma cerâmica de alumina, Lote A8 [Dos Santos 1999]. ....	122
Figura - 4. 11. Diferentes níveis hierárquicos estruturais de uma fratura em função da escala de observação a) nível atômico b) nível cristalino (degraus de clivagem) c) nível microestrutural (microsuperfícies de fratura) e d) nível macroestrutural da superfície de fratura. ....	123
Figura - 4. 12. Auto-similaridade presente em um pinheiro (fractal), com diferentes níveis de escalonamento, $k$ . ....	125
Figura - 4. 13. Elemento linear euclidiano e fractal em uma escala d corte mínima. ....	132
Figura - 4. 14. Curva triádica de Koch onde $D \cong 1.26186$ . Este fractal está imerso numa dimensão $d + 1 = 2$ e possui projeção retilínea em $d = 1$ de tal forma que $1 < D < 2$ .....	133
Figura - 4. 15. Fractal auto-afim, do movimento Browniano fracional, onde $\underline{\epsilon} = 1/4$ e $Dx = H = 1.0$ , para três níveis de escalonamento, utilizado para representar uma trinca. ....	134
Figura - 4. 16. Perfis estatisticamente equivalentes ao longo da espessura do material . ....	135
Figura - 4. 17. Fractal auto-afim, de Weierstrass-Mandelbrot, onde $\underline{\epsilon}_k = 1/4$ e $Dx = 1.5$ e $H = 0.5$ , utilizado para representar um perfil de fratura (Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific, Singapore, 1991, p.7). ....	137
Figura - 4. 18. Gráfico do comprimento rugoso $L$ em função do comprimento projetado $L_o$ , mostrando a influencia da altura, $H_o$ , das caixas no modelo fractal da superfície de fratura; a) na curva superior observa-se o efeito deste $H_o$ à medida que ele tende a unidade ( $H_o \rightarrow 1.0$ ); b) nas curvas inferiores, que aparecem quase sobrepostas, observa-se o efeito deste $H_o$ à medida que ele tende a zero ( $H_o \rightarrow 0$ ). ....	139
Figura - 4. 19. Caixas (ou trechos) de contagem de tamanho $L_o \times H_o$ retangulares onde as caixas que cobrem o perfil têm a extensões diferentes nas direções horizontal e vertical.....	140
Figura - 4. 20. Gráfico do comprimento rugoso, $L$ , em função do comprimento projetado, $L_o$ , mostrando a influencia do expoente Hurst, $H$ , no modelo fractal da superfície de fratura. ....	140
Figura - 4. 21. Esquematização de uma superfície rugosa, a qual se encontra inclinada em relação a sua projeção.....	143
Figura - 5. 1. Modelo de Griffith para a propagação de uma trinca. Corpo elástico na forma de uma fina placa plana de espessura unitária $e$ desprezível e largura $w$ , sujeita a uma tensão aplicada, $\sigma$ , com uma falha (ou trinca) central, que atravessa a espessura da placa, na forma de uma elipse de eixo maior, de comprimento $2L_f$ , na condição de placa infinita, onde $2L_f \ll w$ .....	151
Figura - 5. 2. Deslocamento do flanco de uma trinca de comprimento $2L_f$ em uma placa plana infinita, remotamente carregada com uma tensão constante, $\sigma$ . ....	153

Figura - 5. 3. Gráfico da energia total, $U_t$ , na placa em função do comprimento da trinca, $L_t$ .	155
Figura - 5. 4. Variação da energia elástica e da flexibilidade com o aumento no tamanho do defeito; a) grampos fixos, $F = F_0$ , constante ; b) Gráfico do carregamento de uma fratura a carga constante.	156
Figura - 5. 5. Balanço entre a energia volumétrica liberada, $U_L$ , e a energia das superfícies geradas, $U_\gamma$ , de uma trinca em uma fina placa, plana e infinita, sujeita a uma tensão externa, $\sigma_{ext}$ , onde $dS$ é a variação da entropia; a) quando nenhum trabalho é realizado por forças externas; b) para a condição de carga externa, $\sigma_{ext}$ é constante.	156
Figura - 5. 6. Corpo de prova com um entalhe, $L_t$ , carregado por forças, $X$ , com deslocamento total, $u$ , nos pontos de aplicação da carga.	161
Figura - 5. 7. Modos fundamentais de solitação de carga ou carregamento para a fratura.	169
Figura - 5. 8. Fratura Estável a) num material monocristalino b) num material policristalino.	170
Figura - 5. 9. Variação da carga ou tensão elástica com o deslocamento para a fratura estável.	170
Figura - 5. 10. Zona de processo com deformação plástica na ponta da trinca (ZPA – zona plasticamente afetada).	172
Figura - 5. 11. Variação da carga ou tensão elasto-plástica com o deslocamento para a fratura estável de um material dúctil, ASTM - E1737 [1996].	175
Figura - 5. 12. Triângulo de caracterização de um material quanto as suas propriedades mecânicas da fratura.	176
Figura - 5. 13. Contorno da integral – J na zona ponta da trinca, Atkins [1985].	177
Figura - 6. 1. Trinca rugosa com a sua trinca projetada no plano energeticamente equivalente.	190
Figura - 6. 2. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca lisa de comprimento inicial, $L_t$ introduzida na amostra para iniciar o crescimento da fratura, mostrando incrementos de tamanho $dL_t$ , onde $\sigma$ é a tensão aplicada à amostra.	194
Figura - 6. 3. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca rugosa de comprimento inicial, $L$ introduzida na amostra para iniciar o crescimento da fratura, mostrando incrementos de tamanho $dL$ , onde $\sigma$ é a tensão aplicada à amostra.	197
Figura - 6. 4. Diferença entre uma trinca plana e lisa e uma trinca rugosa com caminho plano projetado.	201
Figura - 6.5. Campo de tensão a uma distância $\bar{r}$ na frente de uma trinca; a) Trinca Lisa b) Trinca rugosa	204
Figura - 6. 6. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca, mostrando incrementos da trinca projetada $dL_o$ e incrementos “fractais” $dL$ . $\sigma$ é a tensão aplicada à amostra. $L_o$ é a trinca introduzida na amostra para iniciar o crescimento.	206
Figura - 6. 7 Gráfico da curva $U_o$ obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.	221
Figura - 6. 8. Gráfico da curva $U_{\gamma o}$ obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.	222
Figura - 6. 9. Balanço energético de Griffith na visão da geometria fractal da superfície rugosa de fratura.	223
Figura - 6. 10. Gráfico da curva $G$ ou $J$ obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.	224
Figura - 6.11. Contorno ao reor da ponta de uma trinca onde é definida a integral - J.	235
Figura - 6. 12. Gráfico da curva J-R obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.	239
Figura - 6. 13. Curvas J-R calculadas em função do comprimento projetado da trinca, $L_o$ . Onde $L_o$ é tomado em unidades de $l_o$ para uma fratura de espessura unitária, para diferentes perfis caracterizados por dimensões fractais $D = 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ , e $2.0$ , com $2\gamma_e = 10.0 \text{ Joules/m}^2$ .	243

Figura - 6. 14. Curvas $J-R$ calculadas em função do comprimento projetado da trinca. $L_o$ . com diferentes comprimentos de régua de medida $l_o = 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$ e $1,0$ mm, para uma fratura de espessura unitária com perfil de trinca de dimensão fractal $D = 1.3$ . $2\gamma = 10,0$ Joules/m <sup>2</sup> . .....	244
Figura - 6. 15. Campo de Tensão $\sigma_{xx}$ no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	251
Figura - 6. 16. Campo de Tensão $\sigma_{xy}$ no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	251
Figura - 6. 17. Campo de Tensão $\sigma_{yy}$ no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	252
Figura - 6. 18. Campo de Tensão $\sigma_{xx}$ no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	253
Figura - 6. 19. Campo de Tensão $\sigma_{xy}$ no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	253
Figura - 6. 20. Campo de Tensão $\sigma_{yy}$ no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	254
Figura - 6. 21. Campo de Tensão $\sigma_{xy}$ no modelo fractal para o Modo III de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	255
Figura - 6. 22. Campo de Tensão $\sigma_{yx}$ no modelo fractal para o Modo III de Fratura com singularidade $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$ na parte superior e $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$ na parte inferior. ....	255
Tabela - VII. 3: Propriedades mecânicas de tração, flexão e dureza, da resina poliuretana estudada (a margem de erro é dada a partir do desvio padrão da medida) .....	264
Figura - 7. 1. Desenho esquemático mostrando a posição de retirada dos corpos de prova em relação à junta soldada. ....	265
Figura - 7.2. Dimensões dos corpos de prova, (a) corpo de prova C(T) e (b) corpo de prova SE[B]. .....	266
Figura - 7. 3. Foto de uma superfície de fratura tratada para se obter ilhas de contraste da amostra A1CT2, com má definição do contorno dessas ilhas .....	269
Figura - 7. 4. Foto de uma superfície de fratura tratada para se obter ilhas de contraste da amostra B2CT2, com boa definição do contorno dessas ilhas. ....	270
Figura - 7. 5. Método de medida da dimensão fractal. a) Superfície de fratura b) Perfil de fratura c) Gráfico de $\log L \times \log \varepsilon$ , onde $d = 1$ . ....	271
Figura - 7. 6. Corpo de prova A1CT1. (a) aspecto geral da superfície de fratura mostrando a interface entre a pré-trinca por fadiga e a propagação estável da trinca, Escala: 8mm : 200 $\mu$ m (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 11mm : 50 $\mu$ m. ....	273

Figura - 7. 7. Corpo de prova A1CT2. (a) aspecto geral da superfície de fratura,. (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.....	274
Figura - 7. 8. Corpo de prova B1CT6. (a) Fotomicrografia mostrando região de clivagem Escala: 8mm : 20µm, (b) detalhe do sítio de início da fratura mostrando a inclusão nucleadora (seta) do processo de clivagem, Escala: 8mm : 5µm. ....	274
Figura - 7. 9. Corpo de prova B2CT2. (a) aspecto geral da superfície de fratura. (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.....	275
Figura - 7. 10. Corpo de prova B2CT7. (a) aspecto geral da superfície de fratura, Escala: 8mm : 50µm (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 8mm : 5µm. ....	275
Figura - 7. 11. Corpo de prova B1SE[B]6 (a) aspecto geral da superfície de fratura mostrando a interface entre a pré-trinca por fadiga e a propagação estável da trinca, Escala: 10mm : 20µm (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 13mm : 5µm. Imagem: 8,4 x 8,6.....	276
Figura - 7. 12. Corpo de prova B2SE[B]7 (a) exemplo de região de clivagem, presente durante o processo de extensão da trinca, Escala: 8mm : 10µm. (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 13mm : 10µm. Imagens: Ídem à anterior. ....	276
Figura - 7. 13. Gráfico do ajuste linear entre $\log \text{Área} \times \log \text{Perímetro}$ para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio. ....	278
Figura - 7. 14. Gráfico do ajuste linear entre $\log \text{Área} \times \log \text{Perímetro}$ para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade. ....	278
Figura - 7. 15. Gráfico do ajuste linear entre $\log \text{Área} \times \log \text{Perímetro}$ para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade. ....	279
Figura - 7. 16. Gráfico do ajuste linear entre $\log \text{Área} \times \log \text{Perímetro}$ para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade. ....	279
Figura - 7.17. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para os aços DCT1, DCT2 e DCT3.....	280
Figura - 7. 18. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra A1CT2).....	281
Figura - 7. 19. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra B1CT6).....	281
Figura - 7.20. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra A2SE(B)2).....	282
Figura - 7.21. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra B2CT2) acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade. ....	282
Figura - 7. 22 Corpo de prova PU0.5. (a) aspecto geral da superfície de fratura, (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.....	284
Figura - 7. 23 Corpo de prova PU1.0. (a) aspecto geral da superfície de fratura, (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.....	284
Figura - 7. 24. Gráfico do ajuste linear entre $\log \text{Área} \times \log \text{Perímetro}$ para o PMMA. ....	285
Figura - 7. 25. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o polímero PMMA (amostra PU(0,5)).....	285



Figura - 7. 26. Curva $J-R$ ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o polímero PMMA (amostra PU(1,0)).....	286
Figura - 7.27. Gráfico generalizado das curvas $J - R$ de diferentes materiais, modelada pela geometria fractal auto-afim, em função do fator de escala, $\varepsilon$ , do comprimento da trinca. ....	290
Figura - 7.28. Aspecto microestrutural da escala de observação com diferentes tamanhos de régua, $l_o$ , para o escalonamento fractal da fratura .....	291
Figura - 8. 1. Analogia entre o gráfico do campo de tensão, $K_I$ , em função do número de discordâncias, $n$ , antes da trinca se propagar e o gráfico da curva – J em função do comprimento projetado da trinca, $L_o$ . ....	307
Figura - 8. 2. Potencialidade da funções de campo na ponta de uma trinca antes e depois da deformação plástica.....	308
Figura - 8. 3. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio mostrando a dispersão deste campo ao redor de cada ponto concentrador.....	311
Figura - 8. 4. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio mostrando a dispersão deste campo ao redor de cada ponto concentrador, com outra escala de cores .....	312
Figura - A1. 1. Definição de uma estrutura geométrica. Arranjo Espacial x Padrão Geométrico Elementar = Estrutura para uma Rede Cúbica FCC x Base Química de Átomos de Carbono = Estrutura do Diamante.....	1
Figura - A1. 2. Estrutura geométrica fractal construída a partir de iterações entre uma semente padrão e um iniciador, em escalas sucessivas de ampliação, formando um padrão geométrico auto-similar.....	2
Figura - A1. 3. Exemplo de fractais ramificados, mostrando os elementos de estrutura, ou as unidades geométricas elementares, de dois fractais. a) Um fractal matemático auto-similar. b) Um fractal físico estatisticamente auto-similar. ....	3
Figura - A3. 1. Fractal com um padrão “periódico em escala” de redução ou ampliação, desde uma escala de corte $\varepsilon_{min}$ até uma escala de corte máxima $\varepsilon_{max}$ . Exemplo de construção de um fractal determinístico imerso em duas dimensões. a) demonstração de como gerar uma estrutura fractal usando um procedimento interativo de fragmentação pela subdivisão do quadrado original. b) Estrutura análoga construída pelo crescimento fractal em torno de uma semente. Ambos os procedimentos levam a fractais para $k \rightarrow \infty$ com uma dimensão $D \cong 1.465$ . ....	12
Figura - A3. 2. Diferentes Expoentes Hurst de uma de um ruído ou linha fractal rugosa. ....	15
Figura - A3. 3. Esquema mostrando uma estrutura fractal auto-afim. Dois estágios do processo de crescimento, $k = 1$ e $k = 2$ são apresentados: a) para $\varepsilon \ll 1$ e b) $\lambda \gg 1$ .....	16
Figura - A3. 4. Fractal estatisticamente auto-similar mostrando conhecido como figura de Lichtenberg foi produzido por uma desaceleração de uma carga elétrica (descarga elétrica corona) que foi injetada dentro de um plexiglas. ....	17
Figura - A4. 1. Gráfico do comportamento da deformação do corpo, $\varepsilon = \Delta l/l$ em função da tensão externa aplicada, $\sigma_{ext}$ , para um corpo sem trinca, com trinca lisa e com trinca rugosa.....	19
Figura - A4. 2. Corpos A, B e C de mesmo material e sujeitos as mesmas condições de carga. A) sem entalhe B) com entalhe liso e C) com entalhe rugoso.....	20
Figura - A4. 3. Comparação dos carregamentos entre os corpos A, B e C idênticos conforme a Figura - A4. 2. ....	20

## LISTA DE TABELAS

Tabela - V. 1: Tipos de estruturas e componentes comumente estudadas pela MFC (Ewalds, 1993)	147
Tabela - VI. 1. Transformação das Grandezas Planas ou Lisas em Irregulares (ou Rugosas)	192
Tabela - VII. 1: Composição química dos metais de solda (% em peso)	263
Tabela - VII. 2: Valores do limite de escoamento e de resistência, dos metais de solda estudados, obtidos por Bose Filho [1995]	264
Tabela - VII. 4: Grandezas fractais extraídas por regressão linear da “análise fractal das ilhas de contraste”	286
Tabela - VII. 5: Dados extraídos a partir dos ensaios experimentais de curva $J-R$ obtidas pelo método da flexibilidade	287
Tabela - VII. 6: Dados do ajuste das curvas $J - R$ para o modelo auto-similar	288
Tabela - VII. 7: Dados do ajuste das curvas $J - R$ para o modelo auto-afim	288
Tabela - VII. 8. Dados calculados a partir dos modelos auto-afim e auto-similar	289

# NOMENCLATURA E LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

## Letra Latinas:

$a_0$  : Parâmetro de rede

$a$  : Tamanho mínimo de Mishnaevsky para a fratura

$A$  : Área fraturada (rugosa)

$A_0$  : Área fraturada projetada (lisa)

$A_c$  : Área crítica de Griffith

$A_u$  : Área unitária de resolução da escala de observação de um crescimento ou fragmentação

A1 e A2 grupo de soldas,

$A_{pl}$ , area plástica definida pelo gráfico da tensão em função do deslocamento

$B_N$  : espessura líquida do corpo de prova

$b$  : Espessura do corpo de prova

$C$  : curva de contorno, ou Comprimento total de uma trinca ramificada

$c$  : Tamanho de uma caixa no método de contagem Box-Counting ou Sand-Box

$c^*$  : Tamanho crítico de Griffith para um monocristal

$D$  : Dimensão fractal

$d$  : dimensão euclidiana

DCT1, DCT2, Grupo de amostras,

$dV$  : volume infinitesimal encapsulado pela curva de contorno,  $C$ ,

$dL_0$  : comprimento incremental do crescimento de uma trinca,

$E$  : módulo elástico de Young ou módulo de Rigidez.

$F$  : Trabalho realizado pelas forças externas

$g$  : Tamanho médio do grão

$G$  : Taxa de energia elástica liberada para um material frágil ou integral de Eshelby-Rice para um material frágil sobre a superfície rugosa

$G_0$  : Taxa de energia elástica liberada para um material frágil ou integral de Eshelby-Rice para um material frágil sobre a superfície projetada

$G_c$  : valor crítico da taxa de energia elástica liberada no início do crescimento de uma trinca

$f, g$  : funções gerais,

$H$  : dimensão fractal de Hurst

$H_0$  : altura do corpo de prova

$\Delta H_0$  : amplitude vertical da trinca projetado em um plano vertical,

$I$  : dimensão euclidiana de imersão de um fractal

$J$  : Taxa de energia elástica liberada ou integral- $J$  de Eshelby-Rice para um caminho ou uma superfície rugosa da trinca em um material dúctil.

$J_0$  : Taxa de energia elástica e plástica liberada ou integral- $J$  de Eshelby-Rice, para um caminho ou uma superfície projetada em um plano, de um material dúctil.

$J_R$  : resistencia a extensão da trinca

$J_C$  , valor crítico da curva  $J$ - $R$ ,

$J_{IC}$  : valor crítico da curva  $J$ - $R$  para o Modo – I de fratura,

$k$  : Nivel de iteração ou de observação de um fractal

$K$  : Fator de intensidade de tensão

$K_{I,II,III}$  : Fator de intensidade de tensão para os modos de carregamento  $I$ ,  $II$ , ou  $III$

$K_{IC}$  : Tenacidade a fratura

$K_R$  : resistencia a extensão da trinca sobre o caminho rugoso da trinca

$K_e$  : fator de intensidade elástico de tensão,

$K_C$  : valor crítico da resistência a fratura sobre o caminho rugoso da trinca

$K_{IC0}$  : tenacidade a fratura no modelo clássico

$L$  : Comprimento rugoso da trinca

$L_0$  : Comprimento projetado da trinca sobre um plano, tamanho inicial da trinca ou do entalhe de um corpo de prova

$l_0$  : tamanho mínimo para a fratura ou comprimento mínimo de trinca, tamanho das células fractais

$L_{0C}$  : Tamanho crítico de Griffith uma trinca,

$L_{max}$  : Tamanho máximo da trinca projetada ou comprimento do corpo de prova

$\Delta L$  : comprimento rugoso da trinca a partir de um comprimento inicial prévio,

$\Delta L_0$  : distância entre dois pontos da trinca a partir de um comprimento inicial prévio (é o comprimento projetado da trinca),

$\Delta L_{0C}$  : comprimento crítico da trinca segundo o modelo clássico

$m$  : expoente de encruamento, ou constante (fator de forma)

$N$  : Número de elementos de estruturas ou de sementes de um fractal

$N_h$  : número de unidades de comprimento de trinca, na direção a qual a trinca cresce

$N_v$  : número de unidades de comprimento de trinca, na direção perpendicular a qual a trinca cresce,

$O$  : ou o índice “ $o$ ”, denota as medidas tomadas sobre o plano projetado da trinca,  
 $O$  : origem de um sistema de coordenadas  
 PU1, PU2, Grupo de amostras poliméricas  
 $Q$  : Rugosidade definida na Mecânica da Fratura  
 $q$  : Índice de multifractalidade  
 $r$  : raio vetor posição na frente de uma trinca  
 $R_q$  : Rugosidade quadrática média  
 $R$  : Resistência a fratura ou curva- $R$  sobre a superfície rugosa de fratura  
 $R_C$  : valor crítico de resistência a fratura no início do crescimento de uma trinca  
 $R_0$  : Resistência a fratura para uma espessura unitária ou curva- $R$  sobre a superfície projetada de fratura  
 $S$  : separação dos apoios em um arranjo experimental de um ensaio de três pontos  
 $s$  : distância ao longo do contorno  $C$ ,  
 $t$  : Tempo  
 $T$  : Temperatura  
 $T_0$  : Energia cinética de propagação da trinca  
 $\mathbf{T}$  : tensor das tensões,  
 $u$  : unidade de medida geométrica linear; deslocamento do ponto de aplicação da força  
 $U$  : Energia potencial  
 $U_i$  : energia inicial no corpo de prova  
 $U_L$  : Energia de deformação da fratura rugosa ou contribuição elástica à energia de deformação no material  
 $U_{L0}$  : Energia de deformação da fratura projetada, variação na energia elástica de deformação causada pela introdução de uma trinca de comprimento  $\Delta L_o$  no corpo de prova,  
 $U_{pl}$  : Energia de deformação plástica da fratura rugosa ou contribuição plástica para a energia de deformação no material,  
 $U_{pl0}$  : Energia de deformação plástica da fratura projetada  
 $U_\gamma$  : Energia de superfície de fratura ou energia para criar duas novas superfícies de fratura, dada pelo produto da energia de superfície específica elástica do material,  $\gamma_e$ , pela área superficial da trinca (duas superfícies de comprimento  $\Delta L_0$ ),  
 $U_T$  : Energia total armazenada no corpo de prova

$U_V$  : integral da densidade de energia de deformação da trinca rugosa,  
 $U_{V_0}$  : integral da densidade de energia de deformação da trinca projetada no plano,  
 $V$  : volume encapsulado pela curva de contorno,  $C$  ,  
 $x$  : coordenada-  $x$  horizontal fixa,  
 $x^*$  : coordenada- $x$  móvel sobre o caminho rugoso da trinca  
 $X$  : forças externas ou carregamento,  
 $y$  : coordenada-  $y$  vertical fixa,  
 $y^*$  : coordenada- $y$  móvel sobre o caminho rugoso da trinca  
 $Y_0$  : função de forma definida pela forma geométrica do corpo de prova,  
 $w$  : Largura do corpo de prova  
 $W$  : Densidade volumétrica de energia de deformação

## Letras Gregas:

$\alpha$  : Comprimento relativo do entalhe ( $L_0/W$ )  
 $\beta$  : Coeficiente de instabilidade dinâmico  
 $\gamma$  : Energia de fratura  
 $\gamma_e$  : energia de superfície específica elástica do material,  
 $\gamma_p$  : energia de superfície específica de deformação plástica do material,  
 $\Gamma$  : Resistência dinâmica a fratura  
 $\partial$  : Derivada parcial  
 $\delta$  : Comprimento ou tamanho da régua de medida  
 $\varepsilon$  : Resolução da escala de observação ( $l_0/L_0$ ), fator de redução, ou fator de fragmentação de um escalonamento fractal  
 $\varepsilon_h, \varepsilon_v$  : escala horizontal, vertical ( $l_0/L_0$ ) do escalonamento fractal  
 $\varepsilon_{ij}$  : campo de deformação ao redor da ponta da trinca,  
 $\phi$  : Fluxo de energia ou Função de Airy  
 $\Phi$  : Função Complexa de Airy  
 $\eta$  : Parâmetro de eficiência ou fator de rendimento  
 $\lambda$  : Resolução da escala de observação ou fator de ampliação ou crescimento de um fractal  
 $\mu$  : Microm ou unidade de energia mínima para uma microfratura  
 $\nu$  : Módulo de Poisson

$\Pi$  : energia potencial da trinca rugosa,

$\Pi_0$  : energia potencial da trinca projetada sobre o plano,

$\psi$  : Potencia dissipada na forma de superfície de fratura ou função dissipação, Função Complexa de Airy-Kosolov,

$\theta$  : Angulo de inclinação polar ou ângulo de ramificação da trinca

$\rho$  : Raio de curvatura da trinca

$\sigma$  : Intensidade do campo de tensão mecânica ou densidade de energia mecânica

$\sigma_f$  : tensão sob a qual o corpo fratura,

$\sigma_{ij}$  : campo de tensão ao redor da ponta da trinca,

$\tau$  : tempo de retardo

$\xi$  : Rugosidade infinitesimal local

$\infty$  : Limite infinito.

## **SIGLAS e Abreviaturas utilizadas:**

CT: Corpo de prova em forma compacta para ensaio de tração

HSLA: High Strength and Low Alloy (alta resistência e baixa liga)

MDF: Método das Diferenças Finitas

MDFF: Método das Diferenças Finitas Fractal

MEC: Método dos Elementos de Contorno

MECF: Método dos Elementos de Contorno Fractal

MEF: Método dos Elementos Finitos

MEFF: Método dos Elementos Finitos Fractal

MFC: Mecânica da Fratura Clássica

MFF: Mecânica da Fratura Fractal

MFEL: Mecânica da Fratura Elástica Linear

MFEP: Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

MFED: Mecânica da Fratura Elastodinâmica

MMI: Mecânica dos Meios Irregulares

PMDE: Principio da Máxima Dissipação de Energia

TC: Teoria do Caos

SE: Corpo de prova em forma de barra para ensaio de flexão

TF: Teoria Fractal

TFM: Teoria Fractal de Medida.

## ABSTRACT

A basic mathematical foundation for a Irregular Medium Mechanics (IMM) was developed, where one defined a *roughness tensor* and a *volume fraction irregular effectively deformed*, where a general equation of motion was obtained. The problem of irregularities on continuum medium was approached making a theoretical contextualization of Fractal Fracture Mechanics (FFM) inside of this new IMM. A modeling and simulation of the elastic stress/strain field for a crack with and without roughness was carried out to understand the effect of irregularities on the stress field in the fracture process. Using Fractal Theory was done a mathematical revision of the concepts of Classical Fracture Mechanics (CFM) which were historically established using Euclidean geometry. A generalized fracture surface was modeled for a dimension of local and global fractal roughness considering the fractured surface (or a crack profile) as a self-affine fractal with roughness average dimension  $H$  (Hurst exponent). Fractal analyses of fracture surfaces were performed. The mathematical relationships between the fractured areas, true and projected, were obtained and inserted, explicitly, in CFM to taken into account the roughness of fracture surface, making its mathematical description more realistic and authentic. The stress field at the fractal rough crack tip for the three kinds of loading modes was calculated. In addition, a complete modeling of the stable and unstable crack growth in brittle and ductile materials were accomplished, using concepts extracted from fractal theory. The mathematical relationships obtained appeared, explicitly, included into a Fractal Fracture Mechanics (FFM) along with the relationships of fracture toughness and fracture surface roughness, which were compared with experimental results. A generalized fracture criterion and mathematical fractal expressions for G-R and J-R curves, for linear elastic and non-linear elastic-plastic materials, which depends on the notch size and the Griffith critical, were obtained. Mathematical relationships between the FFM and CFM were established. Experimental standard tests of G-R and J-R curve according to ASTM 1737-96 method were performed and the experimental results for the fracture in metals and polymers were obtained and compared with the proposed model and also with the results of other authors. A generalized fractal J-R curve that depends on the geometric and energetic properties, valid for all kinds of materials, was obtained. Therefore, mathematical reformulations of the CFM using the fractal theory with their respective experimental validations were accomplished. It was concluded that a modification of Classical Fracture Mechanics turning it into a Fractal Fracture Mechanics, besides of necessary, has been proven experimentally.



## RESUMO

Desenvolveu-se a fundamentação matemática básica para uma Mecânica de Meios Irregulares (MMI), definindo-se um *tensor de rugosidade* e uma *fração volumétrica irregular efetivamente deformada*, de onde se obteve uma equação de movimento generalizada. O problema de irregularidades em meio contínuo foi abordado fazendo-se uma contextualização teórica da Mecânica da Fratura Fractal (MFF) dentro dessa nova MMI. A modelagem e a simulação do campo de tensão/deformação elástico para uma trinca com e sem rugosidade foi realizada para compreender o efeito dessa irregularidade sobre o campo de tensões no processo de fratura. Usando-se a Teoria Fractal foi feita uma revisão dos conceitos matemáticos da Mecânica da Fratura Clássica (MFC) os quais foram historicamente estabelecidos usando-se a geometria Euclidiana. Uma superfície de fratura generalizada foi modelada para uma dimensão de rugosidade fractal local e global, considerando-se essa superfície fraturada (ou um perfil de trinca) como sendo um fractal auto-afim, com dimensão média de rugosidade  $H$  (expoente de Hurst). Análise fractais das superfícies de fratura foram realizadas. As relações matemáticas entre as áreas fraturadas, reais e projetadas, foram obtidas e incluídas, explicitamente, na MFC junto com a rugosidade da superfície de fratura, tornando sua descrição matemática mais realista e autêntica. O campo de tensão na ponta de uma trinca rugosa fractal para os três modos de carregamento foi calculado. Além disso, um completo modelamento do crescimento estável e instável de trincas em materiais frágeis e dúcteis foi realizado, utilizando conceitos extraídos da teoria fractal. As relações matemáticas obtidas apareceram, explicitamente, incluídas dentro de um Mecânica da Fratura Fractal (MFF) junto com as relações de tenacidade à fratura e da rugosidade da superfície de fratura, as quais foram comparadas com resultados experimentais. Foi deduzido um critério de fratura generalizado e as expressões matemáticas fractais para as curvas  $G-R$  e  $J-R$  para materiais elásticos lineares e materiais elásto-plásticos, que dependem do tamanho do entalhe e do tamanho crítico do Griffith. Relações matemáticas entre a MFC e a MFF foram estabelecidas. Ensaio experimentais de curva G-R e J-R de acordo com a norma ASTM 1737-96 foram realizados e os resultados experimentais para a fratura em metais e polímeros foram obtidos e comparados com o modelo e também com o resultados de outros autores. Uma curva J-R fractal generalizada que depende das propriedades geométricas e energéticas, válida para todos os tipos de materiais, foi obtida. Portanto, uma reformulações matemáticas da MFC, utilizando a teoria fractal com suas respectivas validações experimentais, foram realizadas. Concluiu-se que uma modificação da Mecânica da Fratura Clássica, além de necessária, foi comprovada experimentalmente.

# Capítulo – I

## INTRODUÇÃO

*Nessas tábuas escreverei as palavras que estavam nas primeiras tábuas, que quebraste, e as porás na arca (Dt 10,2).*

### 1. 1 – Apresentação do Trabalho

Apresenta-se neste volume o estudo da influência das irregularidades geométricas (*porosidade* e *rugosidade*) no campo contínuo clássico, aplicado aos problemas da mecânica da fratura com rugosidade. Esse trabalho científico também trata da modelagem fractal da superfície de fratura, aplicada ao processo de crescimento de trinca estável de fratura em materiais frágeis e dúcteis.

### 1. 2 – Desenvolvimento do Trabalho de Pesquisa - Uma breve revisão histórica

A maioria dos casos de irregularidades geométricas presentes na microestrutura dos materiais pode ser modelada pela Teoria Fractal de Medida (TFM) (Hornbogen, 1989). Utilizando-se essa visão da modelagem das irregularidades da microestrutura propõe-se uma descrição matemática do contínuo de tal forma a levar em consideração, diretamente em suas equações essas irregularidades a fim de que a reformulação das equações básicas da Mecânica da Fratura Clássica (MFC) fosse conseqüente e naturalmente obtida. O motivo dessa reformulação tem por base o fato de que a MFC não leva em conta a descrição da *rugosidade* das superfícies de fratura e nem os defeitos geométricos (*porosidade*, por exemplo) no seu formalismo matemático. A abordagem descrita neste trabalho foi feita de forma a se obter uma visão mais autêntica, mais precisa e também mais abrangente do processo da fratura. A partir dessa abordagem moderna da Mecânica da

Fratura (MF), tornou-se possível também entender diversos aspectos na MFC (os quais só puderam ser explicados levando-se em conta a *rugosidade* das superfícies de fratura), tais como: (i) a influência da rugosidade na definição das grandezas energéticas da Mecânica da Fratura (ii) a influência da rugosidade de uma trinca no critério de fratura de Griffith-Irwin (iii) o crescimento da curva *J-R* (Ewalds e Wanhill, 1986) e (iv) o processo de instabilidade estática na propagação de trincas lentas. Todos os detalhes desses (e outros) resultados são abordados ao longo deste trabalho. Neste capítulo descreve-se, de uma forma qualitativa, as motivações fundamentais e as idéias básicas desse trabalho, enfatizando-se a importância de se introduzir uma teoria para os meios irregulares na Mecânica da Fratura. Apresentam-se, também, os objetivos gerais e específicos da pesquisa.

### *1.2.1 – A Modificação de Teorias e Modelos Utilizando-se a Geometria Fractal*

Até algumas décadas atrás, várias teorias e modelos matemáticos foram desenvolvidos e estabelecidos, com base na geometria Euclidiana. Considerou-se sempre formas Euclidianas regulares para a descrição de padrões geométricos associados aos fenômenos físicos ou químicos que se apresentam na natureza. Embora isso tenha acontecido em diversas áreas das ciências exatas, foi somente a partir da redescoberta da teoria fractal feita por Mandelbrot (1977), que iniciou-se a revisão dos conceitos matemáticos para uma nova descrição fenomenológica dessas teorias. Na realidade, o que acontece é que as geometrias de algumas estruturas presentes na natureza e em padrões de dissipação de energia que se apresentam em diversos fenômenos são irregulares e não podem ser satisfatoriamente descritos pela geometria Euclidiana. A geometria fractal trata com mais peculiaridade da descrição matemática desses padrões e estruturas fragmentadas. Ou seja, por meio da *geometria fractal* e da *teoria fractal de medida* é possível, a princípio, quantificar e descrever matematicamente, e de uma forma geral, quaisquer estruturas desordenadas, aparentemente irregulares presentes em diversos fenômenos (como uma superfície rugosa, por exemplo) (Mandelbrot, 1982). Assim a partir do surgimento da geometria fractal tornou-se necessário uma revisão dos conceitos matemáticos para uma nova descrição fenomenológica das teorias e modelos desenvolvidos com base na geometria euclidiana.

Assim que a teoria fractal chegou ao conhecimento da comunidade científica, começaram a surgir tentativas matemáticas de se incorporar os conceitos e as ferramentas matemáticas da geometria fractal no escopo da formulação teórica de diferentes teorias e modelos matemáticos da física e da engenharia. Assim, desde que surgiu a Teoria Fractal, ela tem contribuído para a modificação de várias áreas das Ciências Exatas como uma geometria capaz de evidenciar fatos até então obscuros pela utilização da simples geometria euclidiana. De lá para cá

muitos cientistas têm procurado evidenciar quais são os efeitos que essa nova visão das ciências pode trazer à interpretação de fenômenos clássicos e novos. Portanto, faz bem pouco tempo que a caracterização fractal de estruturas formadas em fenômenos físicos de dissipação de energia passou a ser incluída na descrição fenomenológica dos mesmos. A finalidade é incluir analiticamente nas equações a descrição de padrões irregulares como volumes porosos, superfícies de fraturas ou contornos irregulares junto com as fenomenologias associadas. Isto porque as vantagens de unificação destas duas áreas indicam resultados promissores para uma descrição mais realista dos processos de dissipação de energia.

### *1.2.2 – Modelagem Fractal das Superfícies de Fratura*

A modelagem fractal de superfícies rugosas teve seu início na mecânica da fratura. Mandelbrot (1977), foi o primeiro a apontar que as trincas e superfícies de fratura poderiam ser descritas por modelos fractais. Em particular, comprovou-se experimentalmente que as trincas e as superfícies de fratura seguem um escalonamento fracionário como era esperado pela geometria fractal.

Embora já houvesse diferentes métodos capazes de quantificar a área verdadeira da fratura (Dos Santos, 1999), inicialmente, o seu equacionamento dentro da mecânica da fratura não foi considerado, porque os valores resultantes das medidas experimentais dependiam da precisão da medida ou do "tamanho da régua" utilizada pelos diversos métodos. Nenhuma teoria matemática havia surgido até então, capaz de resolver o problema, até que há alguns anos surgiu a geometria fractal. Portanto, a modelagem fractal de uma superfície irregular se faz necessária, para se obter a correta quantificação da sua área verdadeira. Desta forma, a moderna geometria fractal pode contornar o problema da complicada descrição matemática da superfície de fratura, tornando-se útil na modelagem matemática da fratura. Com isto, é possível relacionar a caracterização geométrica fractal com as grandezas físicas que descrevem os fenômenos a ela associados, incluindo-se a área verdadeira da superfície irregular ao invés da superfície projetada. Pensando nessa idéia, foi que Mandelbrot *et al.* (1984), criaram o método de análise fractal das “*ilhas cortadas*”. Por meio deste método, eles procuraram relacionar a dimensão fractal com as grandezas já conhecidas da mecânica da fratura, apenas de uma forma empírica. Desde então, diversos autores (Mu e Lung, 1988; Mecholsky et al, 1989; Heping-Xie, 1989; Chelidze, 1990; Lin e Lai, 1993; Nagahama, 1994; Lei, 1995; Tanaka, 1996, Borodich, 1997) têm feito considerações teóricas ou geométricas no sentido de tentar relacionar os parâmetros geométricos das superfícies de fratura, com as grandezas da mecânica da fratura, tais como: energia de fratura, energia de superfície, tenacidade à fratura, etc.

Por ocasião da elaboração da proposta de correção fractal da Mecânica da Fratura (Alves,

2005), surgiu uma questão básica, sobre qual a melhor definição de *rugosidade* de uma trinca ou superfície de fratura que seria aplicável para a modificação das equações clássicas da Mecânica da Fratura. Em sua proposta inicial Alves (2005) sugeriu uma correção do tipo:

$$\xi \equiv \frac{dL}{dL_o} \quad (1. 1)$$

onde  $L_o$  e  $L$  são os comprimentos projetados e rugoso da trinca ou superfícies de fratura. Contudo essa proposta parece não funcionar para grandezas vetoriais e tensoriais, mas apenas para grandezas escalares. Desta forma, percebeu-se a necessidade de se realizar um estudo básico da influência das coordenadas, dos comprimentos, dos contornos e dos volumes irregulares em diferentes fenômenos de movimento, dissipação de energia e calor para que seja feita uma correta inclusão da geometria fractal nas fenomenologias associadas. Sugeriu-se, na época, que tais transformações fossem primeiro validadas em fenomenologias de campos escalares, como a Teoria do Calor, para depois passar gradativamente para os campos vetoriais e tensoriais, tais como a Teoria da Elasticidade, Plasticidade e Mecânica da Fratura. Mas porque alguns desenvolvimentos matemáticos em Mecânica da Fratura já haviam sido adiantados, este trabalho de tese se definiu na modificação da Mecânica da Fratura, embora a proposta de modificação fenomenológica feita neste trabalho seja ampla. Uma das propostas de revisão dos conceitos matemáticos para a Teoria do Calor pode ser verificada em Blyth e Pozrikidis (2003).

### *1.2.3 – A Teoria Fractal aplicada à Mecânica da Fratura*

A Mecânica dos Meios Contínuos e toda a teoria clássica da Mecânica dos Sólidos (Teoria da Elasticidade) e a Mecânica dos Fluidos levam em conta apenas as formas euclidianas regulares. Mas, segundo Panin (1992) devido ao desenvolvimento dessas áreas da ciência ao longo dos anos, elas passaram a exibir casos onde a geometria fractal poderia ser facilmente identificada e utilizada na descrição dos seus fenômenos. Neste contexto a teoria da elasticidade vem sendo reescrita (Carpinteri, 2004), utilizando-se a geometria fractal, através da proposta pioneira de Panagiotopoulos (1992); conseqüentemente, com a Mecânica da Fratura (MF), isto não tem sido diferente. Embora ela seja uma área relativamente nova da ciência e tenha recebido diferentes formulações ao longo das décadas (Kanninen e Popelar, 1985), especialmente sob o ponto de vista analítico, ela também está incluída no contexto acima entre as teorias matemáticas que precisam ser revisadas. Isto, basicamente, por causa da superfície de fratura que é tomada como sendo a superfície projetada ao invés da superfície rugosa.

Uma das modificações pioneiras na formulação analítica da mecânica da fratura foi feita por Mosolov (1993), o qual inseriu a geometria fractal com o intuito de descrever o processo de

fratura, levando em conta a formação da *rugosidade* das superfícies de fratura durante o processo de crescimento da trinca, coisa que não era possível utilizando-se apenas a geometria euclidiana .

Hoje em dia sabe-se que, por causa da inserção da Teoria Fractal nas diversas descrições fenomenológicas, os expoentes característicos desses modelos podem possuir valores não inteiros devido à fracionalidade da dimensão fractal. Por exemplo, na Mecânica da Fratura o campo elástico de Hutchinson-Rosengren e Rice – (HRR) (Anderson, 1995) passou ser descrito por expoentes não-inteiros que se relacionam com a dimensão fractal. Um exemplo dessa inserção foi fornecido pela reformulação do campo de tensão feita por Mosolov (1993), Borodich (1997). Seguindo o mesmo raciocínio Yavari (2002), tomou por base as equações de Irwin (1957) e Westergaard (1939) e propôs toda uma nova visão da Mecânica da Fratura, sugerindo, por exemplo, a existência de mais três novos modos de carregamento ou fratura, além dos três classicamente conhecidos como de tração, de cisalhamento e de rasgamento. Essa proposta segue em frente até ao ponto de modificar o conceito que define a integral-J de Eshelby-Rice (1968), para uma trinca fractal, onde considera-se a energia consumida para formar uma trinca ou a resistência ao crescimento da trinca em um material dúctil.

Novos modos de fratura surgiram devido à consideração da *rugosidade* no processo. Um dos principais responsáveis por essa nova formulação é certamente Yavari (2000, 2002) que tem fornecido fortes contribuições matemáticas para estas duas áreas. Na tentativa de acompanhar este rápido desenvolvimento matemático Alves *et al.* (2001) e Alves (2005) procuraram abordar o tema sob o ponto de vista termodinâmico, reformulando as equações de Griffith (1920) e Irwin (1957) para obter um resultado satisfatório tanto do ponto de vista teórico como experimental.

O crescimento estável de trinca para os materiais frágeis é caracterizado pela curva *G-R* (Ewalds e Wanhill, 1986; Kraff *et al.* 1962) e observa-se que essa curva cresce com o aumento no comprimento da fratura. Este crescimento tem sido analisado por argumentos qualitativos (Ewalds e Wanhill, 1986; Kraff *et al.*, 1962; Swanson *et al.*, 1987; Hübner e Jillek, 1977) mas nenhuma explicação definitiva e satisfatória em termos da MFEL tem sido apresentada.

Neste trabalho introduziu-se a geometria fractal no formalismo da MFEP para descrever os efeitos da *rugosidade* nas propriedades mecânicas. Para isso foi corrigida a expressão clássica da taxa de energia elasto-plástica liberada introduzindo a fractalidade (*rugosidade*) da superfície trincada. Este procedimento tornou a expressão clássica, linear com o comprimento da fratura, obtida pela MFEP, em uma equação não-linear, que reproduz precisamente o processo de propagação quase-estático de trincas nos materiais frágeis e dúcteis. Mostrou-se, portanto, de forma inambígua como diferentes morfologias (*rugosidades*) são correlacionadas com o crescimento da curva *J-R*. Ou seja, devido à equivalência energética de Irwin para o caminho projetado da fratura, a curva *J-R* apresenta um crescimento proveniente da influência da *rugosidade* que não era

computado anteriormente pelas equações clássicas da MFEP baseada na geometria Euclidiana.

#### 1.2.4 – Surgimento de Métodos Numéricos Fractais

A nova formulação da Mecânica da Fratura fornece às suas equações uma nova roupagem que precisa ser transferida para a formulação numérica. Alternativamente ao que se apresenta como proposta nesse trabalho, têm surgido na literatura propostas de formulação numérica de problemas do campo clássico com irregularidades, como no caso da fratura. Entre essas propostas está o Método dos Elementos Finitos Fractais desenvolvido por Leung e Su (1995). A proposta de Leung e Su (1995) se resume em um aumento no nível de refinamento das malhas baseado na auto-similaridade fractal, obtendo dessa forma uma equação de recorrência para a equação de força e deslocamento e para a matriz de rigidez que depende do níveis de escalonamento do refinamento da malha.

Outros autores têm usado essa alternativa para solução de problemas de contato com *rugosidade* (Hyun *et al.*, 2004; Sahoo, 2007; Kral e Komvopoulos, 1993; Kogut, 2003; Willner, 2008). Ainda outros têm usado métodos matemáticos e numéricos para a solução de problemas de múltipla escala em concreto (Achdou, 2004).

### 1.3 – Motivação do Trabalho de Pesquisa

#### 1.3.1 – Justificativa, Importância Científica, Tecnológica e Aplicações

A importância tecnológica do estudo da fratura pode ser melhor compreendida do ponto de vista das drásticas conseqüências das falhas nos materiais em serviço (Kanninen e Popelar, 1985). Particularmente, tanto para o mecanismo de crescimento de trinca estável como para a fratura dinâmica visa-se compreender o comportamento dos materiais em condições de cargas lentas, cíclicas e de extrema sollicitação, tais como: impactos (Benson *et al.*, 1997), colisões (Åström e Jussi, 1997; Hornig *et al.*, 1996), choques térmicos (Salvini *et al.*, 1996).

A vasta aplicação de novos materiais na indústria empresta ao estudo da fratura uma importância singular. Do ponto de vista da pesquisa, o estudo da fratura se divide em três segmentos básicos: o estudo do mecanismo de crescimento de fratura estável (sollicitação quase-estática), o estudo da fadiga (sollicitações cíclicas) e o estudo da fratura instável (sollicitações dinâmicas ou catastróficas).

O estudo de formas geométricas irregulares geradas em processos físicos, como as superfícies de fratura, que podem ser tratadas sob o ponto de vista da modelagem fractal, tem despertado o incessante interesse dos cientistas das áreas afins. Desta forma vários fenômenos

físicos têm sido revisados atualmente, sob a ótica da nova visão fractal. A introdução da Geometria Fractal nas fenomenologias de várias áreas da ciência física e engenharia como a Transmissão de Calor, Teoria da Elasticidade e na Mecânica da Fratura é algo que já vem sendo feito ao longo desta última década e existe a possibilidade de se proporcionar contribuições importantes na formulação matemática dessa nova ciência.

A motivação desse trabalho tem por base a evidente presença da geometria fractal na natureza e a necessidade de melhor compreensão dos fenômenos de dissipação que geram padrões irregulares como trincas, fraturas, descargas elétricas, entre outros. Outra idéia que motiva tal estudo são os fenômenos de dissipação e instabilidade em processos dinâmicos que introduzem naturalmente *rugosidades* e oscilações no campo de velocidades, como na fratura de trincas rápidas observadas por Fineberg *et al.* (1991, 1992).

Os resultados deste trabalho fornecerão resultados importantes na concepção, na análise, inspeção e projetos de materiais com propriedades termomecânicas modificadas.

### *1.3.2 – Perspectiva de Formulação e Desenvolvimento de uma Mecânica do Contínuo Irregular*

A primeira problemática levantada durante este trabalho de pesquisa foi a modelagem fractal de uma superfície de fratura para que na seqüência fosse feita a modificação das equações básicas da Mecânica da Fratura utilizando um conceito de *rugosidade* para correção dessas equações com a finalidade de retratar o efeito da interação da trinca com a microestrutura do material e descrever, entre outros, o efeito do crescimento da curva J-R (Su *et al.*, 2000; Weiss, 2001; Rupnowski, 2001; Alves *et al.*, 2001, Alves *et al.*, 2010). Para isso modelou-se o comprimento rugoso de uma trinca por meio da geometria fractal (Alves, 2005; Alves *et al.*, 2010).

Em termos práticos, percebeu-se ao longo dessa pesquisa que modificações matemáticas importantes que foram feitas na teoria da fratura possuíam seus antecedentes matemáticos na teoria dos campos escalares e vetoriais como o calor e a elasticidade, respectivamente. Neste sentido, retrocedeu-se aos estudos de campos mais simples como o campo térmico de forma a se elaborar uma intuição e uma conceituação mais abrangente, necessária a campos mais complexos como o campo elástico de tensão e deformação e o campo de crescimento de uma trinca.

Ao se introduzir irregularidades (poros e *rugosidades* superficiais) nas formulações dos problemas do Campo Contínuo Clássico, observou-se o aparecimento de um novo conceito de *rugosidade* e de *porosidade*, associado ao que já era conhecido, mas agora visto dentro do contexto das equações do contínuo, dando origem a uma possível *Mecânica dos Meios Irregulares*. Propostas semelhantes têm surgido na literatura ao longos das últimas décadas (Trovalusci, 1998; Dyskin,



2005; Tarasov, 2005; Carpinteri, 2009; Engelbrecht, 2009).

## 1.4 - O Problema Proposto

O problema proposto consiste na validação de um Modelo de Potenciais (Escalares e/ou Vetoriais) com Contornos Rugosos por métodos experimentais e numéricos. A proposta desse trabalho é envolver a geometria fractal na descrição do fenômeno elástico e plástico de fratura, como uma forma de descrever esses fenômenos em situações onde a *rugosidade* presente no contorno de superfícies é relevante.

Unir a potencialidade da geometria fractal em descrever sistemas que apresentam padrões geométricos desordenados ou rugosos com a praticidade de cálculo de métodos numéricos torna-se uma tarefa atraente, interessante e necessária para uma proposta moderna de simulação do fenômeno da fratura em materiais. Isto porque muitas das respostas sobre a influência da *rugosidade* no processo de dissipação de energia na fratura podem ser obtidas, de forma a validar os resultados analíticos recentes, que têm sido alcançados utilizando-se a geometria fractal (Yavari 2000, 2002; Wnuk e Yavari, 2005, Alves *et al.*, 2010).

A proposta de utilização de métodos numéricos para simular uma análise de fratura onde está presente a *rugosidade* da superfície de fratura é outro aspecto inovador deste trabalho. Basicamente são simulados problemas simples e fundamentais de corpos sob o ponto de vista da elasticidade e fratura, como o problema de uma placa plana, com mecanismo de crescimento estável de trinca, como o problema de Griffith, com a inclusão da *rugosidade* por meio da geometria fractal.

## 1.5 – Metas, Objetivos e Metodologia do Trabalho de Pesquisa

### 1.5.1 – Objetivos Gerais

De acordo com o problema proposto, o presente projeto de doutorado teve os seguintes objetivos gerais de trabalho e metas intermediárias a serem atingidas:

(i) Em primeiro lugar, propor uma formulação da teoria do contínuo que leve em conta a *rugosidade* da superfície de contorno e a *fração volumétrica irregular efetiva* do interior do volume do corpo ou do meio em estudo. De forma mais direta, as conseqüências dessa nova proposta de formulação teórica foram utilizadas no estudo da Mecânica da Fratura com rugosidade das trincas e superfícies de fratura.

(ii) Desenvolver uma teoria do contínuo que envolva a *rugosidade* da superfície de contorno e a *fração volumétrica irregular efetiva* ou *fração volumétrica deformada* do interior do

volume do corpo. ✓

(iii) Construir um modelo fenomenológico que contenha uma descrição matemática consistente dos fenômenos que exibem a influência de contornos irregulares presentes, ou formados, durante os processos de dissipação de energia como a fratura, por exemplo. ✓

(iv) Entender o efeito ou a influência da *rugosidade* em problemas de contorno e bordas rugosas em modelos de campo escalar, vetorial e tensorial,

(v) Extrair informações úteis sobre o efeito ou a influência da *rugosidade* em fenômenos da Mecânica do Contínuo, da Mecânica dos Sólidos, da Mecânica da Fratura e do Dano, etc., de tal forma que seja possível incluir analiticamente na descrição matemática desses campos a descrição fractal da *rugosidade* desses contornos. ✓

(vi) Conhecer e explicar o comportamento das propriedades dos materiais em função da microestrutura com a finalidade de ✓

(vii) Conferir, reformular, adequar e/ou aperfeiçoar os modelos propostos com base nos experimentos realizados ✓ para, em seguida verificá-los experimentalmente.

(viii) Gerar contribuições científicas, no sentido de se compreender melhor alguns dos mecanismos e processos estruturais e microestruturais envolvidos na dissipação da energia da fratura, tais como: defeitos, inclusões, contornos de grãos e fenômenos elasto-plásticos, estendendo os resultados para materiais policristalinos, etc; ✓

### 1.5.2 – *Objetivos Específicos*

De acordo com o problema proposto anteriormente, o presente projeto de doutorado teve as seguintes metas intermediárias e objetivos específicos de trabalho a serem atingidos:

(i) Fundamentar os conceitos geométricos, extraídos da teoria fractal, e aplicá-los à fratura ✓, visando-se;

(ii) Construir uma “linguagem” precisa, para a descrição matemática da MFC, dentro da nova visão da teoria fractal. ✓

(iii) Propor modificações e melhorias ou novos modelos de fratura com a descrição analítica da *rugosidade*. ✓

(iv) Modelar analítica e numericamente o processo de fratura inserindo a Geometria Fractal. ✓

(v) Reformular os modelos para a fratura já existentes na literatura, desenvolvidos com base na teoria fractal; ✓

(vi) Propor modelos para a propagação de trinca, em regime estável, usando-se a geometria fractal e a descrição elasto-plástica dos fenômenos existentes no carregamento quase-

estático;✓

(vii) Caracterizar a geometria descrita pela trinca, sob o aspecto fractal. ✓

com a finalidade de:

(viii) Relacionar a caracterização fractográfica e fractal da superfície de fratura com o processo quase-estático de crescimento de trinca e com o processo de dissipação de energia e instabilidade da trinca.

(ix) Medir a dimensão fractal e procurar relacioná-la com o comprimento da trinca (ou com a área da superfície de fratura) e com a taxa de liberação da energia elástica,  $G$ , ou  $J$ . ✓

(x) Explicar o crescimento da curva  $J$ - $R$  nos materiais através da descrição matemática fractal da rugosidade, ✓

### 1.5.3 – Metodologia para Desenvolvimento e Estrutura do Trabalho

Os modelos foram desenvolvidos generalizando-se o formalismo matemático da MFC, com base na geometria fractal. Essa generalização foi feita basicamente através da relação entre a área projetada e a área rugosa, que corresponde à área verdadeira do processo. Neste sentido, todas as equações clássicas contidas neste trabalho foram modificadas e melhoradas pela geometria fractal, para incluir, analiticamente, a rugosidade da superfície de fratura nessas equações.

Para comprovação dos modelos, utilizou-se resultados de ensaios experimentais realizados no Laboratório de Ensaios Mecânicos da EESC: ensaio pela técnica da flexibilidade elástica (método de carregamento/descarregamento) e de múltiplos corpos de prova, para obter a curva  $J$ - $R$  em amostras de metal e polímero (PMMA) e poliuretano (extraído do óleo da mamona).

Durante o ensaio de fratura, a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , ou  $J$ , pôde ser obtida indiretamente via software pelo sistema de aquisição de dados, acoplado à máquina de ensaios, através da curva *Carga x Deslocamento* da trinca. Após o ensaio, foram feitas as devidas caracterizações geométricas das superfícies de fratura, através da análise fractográfica por Microscopia Eletrônica de Varredura (MEV).

As análises fractais das superfícies de fratura foram feitas por meio de um método desenvolvido ao longo dessa pesquisa, o qual foi chamado de “análise das ilhas de contraste”. Este método é análogo ao método das ilhas cortadas (Mandelbrot *et al.* 1984; Mecholsky *et al.* 1989).

## 1. 6 - Conteúdo nos capítulos seguintes

A Figura - 1. 1 sintetiza a estrutura deste trabalho, que é compreendida pelos capítulos descritos a seguir:

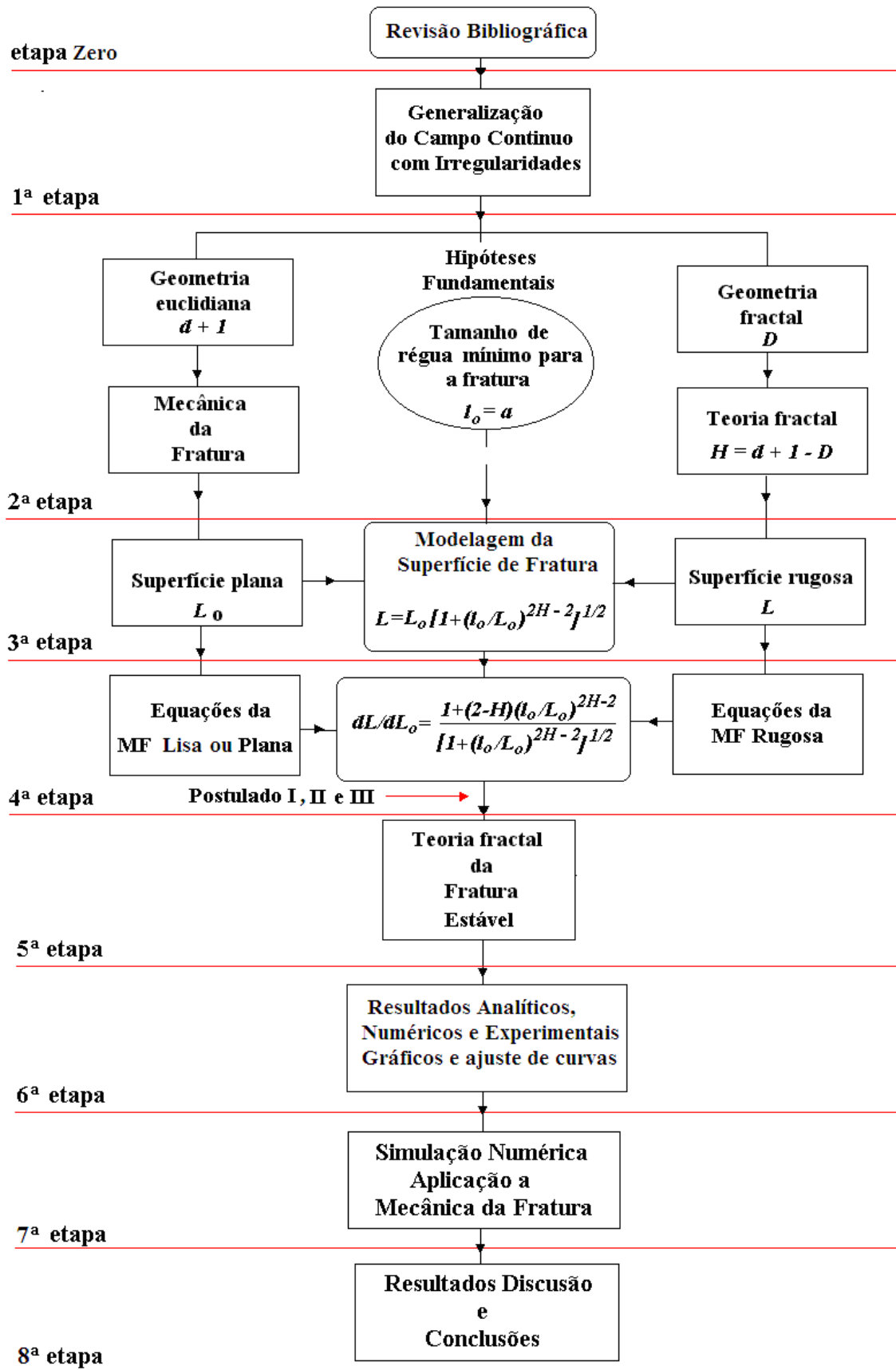


Figura - 1. 1. Arcabouço geral do desenvolvimento do trabalho de pesquisa realizado.

## Capítulo II: Mecânica do Campo Contínuo de Potenciais Generalizados com Regularidades

Neste capítulo, apresenta-se uma introdução ao problema de campos contínuos com e sem irregularidades. Mostra-se a necessidade de uma descrição matemática mais ampla que envolva analiticamente na solução do campo o conceito de potenciais generalizados com irregularidades. É vista também a fundamentação matemática básica da teoria do campo escalar, vetorial e tensorial em um meio irregular. Desenvolveu-se o cálculo analítico das equações dos fluxos nos volumes, nas superfícies e nos contornos, em termos da *fração volumétrica irregular efetiva*<sup>(1)</sup> e da *rugosidade* (fractalidades), com a presença da *rugosidade* no contorno e da *fração volumétrica irregular efetiva* no domínio geométrico do problema. Propõe um modelo escalar para a *fração volumétrica irregular efetiva* e um modelo escalar, vetorial e tensorial para a *rugosidade* de contornos irregulares e fractais. Alguns teoremas matemáticos são desenvolvidos, equações diferenciais e integrais para o campo com irregularidades. Desta forma, o campo contínuo clássico é ampliado para se descrever uma teoria onde as irregularidades estão presentes, basicamente, no contorno e no domínio (*rugosidade* e *porosidade*, respectivamente). Apresenta-se, portanto, uma possível Mecânica dos Meios Irregulares como uma evolução proveniente da Mecânica do Contínuo Clássica, de tal forma que a Mecânica dos Meios Irregulares se reduz à Mecânica do Campo Contínuo Clássico quando as *rugosidades* e as *porosidades* inexistem.

## Capítulo III: Fundamentos Matemáticos da Teoria Fractal de Medida

Nesse capítulo apresenta-se uma introdução aos fundamentos matemáticos da teoria fractal de medida. A geometria fractal foi utilizada como uma ferramenta para modelagem matemática de volumes porosos, superfícies e linhas rugosas. O conceito geral de *medida da extensão geométrica de um objeto*, é introduzido mostrando-se as principais dificuldades que existem em se estabelecer o valor de uma medida, dando-se uma introdução aos conceitos básicos, e às propriedades geométricas dos fractais em geral. Apresenta-se também os métodos de cálculo e algumas técnicas de medida para determinação das dimensões fractais de um objeto ou estrutura auto-similar ou auto-afim.

## Capítulo IV: Modelamento Fractal da Superfície Rugosa de Fratura

Nesse capítulo propõe-se um modelo fractal auto-afim, geral, para uma superfície irregular de fratura. O modelo é derivado de uma generalização da equação de Voss (1991). Modelos fractais de superfícies e linhas rugosas úteis para a descrição de contornos irregulares em

---

<sup>1</sup> ou *fração volumétrica deformada*

problemas do campo contínuo clássico são apresentados e discutidos. Por meio desses modelos fractais é possível relacionar a área (ou comprimento) da superfície rugosa ou irregular de fratura com a área (ou comprimento) da superfície projetada da mesma. O modelo linear empregado é sintetizado por uma expressão analítica que forneceu uma expressão matemática para o comprimento da trinca rugosa em função do comprimento projetado e de parâmetros fractais que caracterizam a morfologia da superfície de fratura. Com base neste modelo define-se uma expressão matemática analítica para a *rugosidade* de uma superfície de fratura genérica, a qual é diretamente inserida no formalismo das equações da Mecânica da Fratura Clássica.

### Capítulo V: Fundamentos Teóricos da Mecânica da Fratura Clássica

Nesse capítulo, apresenta-se uma breve revisão sobre os conceitos básicos da Teoria da Elasticidade e da Mecânica da Fratura Clássica (MFC), bem como uma breve abordagem sobre a formulação teórica da termodinâmica clássica da fratura, aplicada a materiais frágeis e dúcteis, a qual foi útil para formar a base conceitual e introduzir a descrição matemática da fratura rugosa pela geometria fractal.

### Capítulo VI: Modelamento Fractal da Fratura Elástica Linear - Crescimento Estável (ou Quase-Estático) de Trinca

Nesse capítulo, apresenta-se a aplicação do conceito de *rugosidade* na modificação das equações básicas do campo de tensão da Mecânica da Fratura Clássica dando origem a uma possível Mecânica da Fratura Irregular ou Fractal. Este procedimento permite descrever a fratura estável tornando a sua teoria mais próxima da descrição real do processo. Também mostram as consequências fundamentais da utilização de um caminho rugoso para a trinca na descrição matemática da fratura. Em seguida a geometria fractal da trinca é incluída na teoria da Mecânica da Fratura Clássica por meio do modelo fractal auto-afim. Utilizou-se esse modelo fractal de *rugosidade* para descrever o processo de crescimento da fratura estável ou quase-estática e modificar as equações básicas da teoria elástica linear aplicada a fratura frágil (MFEL) de forma a envolver em suas equações a descrição da superfície de fratura rugosa ao invés da superfície de fratura projetada. A descrição do crescimento fractal de uma trinca é aplicada a materiais frágeis e dúcteis, em um contexto termodinâmico, para modificar o clássico balanço de energia de Griffith-Irwin-Orowan e também a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP).

## Capítulo VII: Aplicações, Validação dos Modelos, Resultados, Análises Experimentais e Discussões

Nesse Capítulo mostram-se resultados experimentais de ensaios clássicos da mecânica da fratura, assim como uma discussão e validação dos modelos apresentados. Mostra-se que por meio da caracterização fractal da rugosidade das amostras ensaiadas, juntamente com a energia efetiva da superfície de fratura, foi possível ajustar o modelo proposto neste trabalho com as medidas experimentais da curva  $J-R$  de diferentes materiais, obtidas por meio dos ensaios feitos pelo método da flexibilidade.

## Capítulo VIII: Considerações Finais, Conclusão e Perspectivas Futuras

No último capítulo apresenta-se as considerações finais do trabalho a respeito dos objetivos alcançados e uma síntese sobre a experiência adquirida com a modelagem matemática e simulações computacionais efetuadas. Também são abordadas as implicações tecnológicas deste trabalho, além das perspectivas para continuidade do mesmo.

## Capítulo – II

# MECÂNICA DO CAMPO CONTÍNUO DE POTENCIAIS GENERALIZADOS COM IRREGULARIDADES

*...mas, tendo sido semeado, cresce e faz-se a maior de todas as hortaliças e cria grandes ramos, de tal modo que as aves do céu podem aninhar-se à sua sombra (Mc 4,32).*

### 2. 1 – Introdução aos Fenômenos de Natureza Dinâmica

Fenomenologias, como a Mecânica do Calor, a Mecânica dos Sólidos, a Mecânica dos Fluidos, etc., são análogas e podem ser descritas de forma geral pela chamada Mecânica e Termodinâmica do Contínuo, cujos conceitos de densidades e fluxos generalizados podem ser definidos a partir das equações de conservação da massa, do momento, e da energia provenientes das leis de Newton, da Mecânica das Partículas Discretas e das Leis da Termodinâmica Clássica transformadas no formalismo do contínuo. Ou seja, a descrição de fenômenos físicos que dão a idéia de movimento, como o fluxo de calor, o movimento de uma partícula, a deformação de um corpo, o escoar de um fluido, o crescimento de uma trinca, etc. podem ser unificados em um formalismo matemático cuja estrutura e conceitos gerais são análogos. Todos esses fenômenos podem ser estudados de forma comparativa para se obter um entendimento completo dos processos simultâneos complexos que podem ocorrer na natureza e em sistemas projetados pelo homem.

Quando a descrição de um dado fenômeno parte do conceito de posição, velocidade, quantidade de movimento, etc., diz-se que essa é uma descrição mecânica. E, quando a descrição de um dado fenômeno parte do estudo dos seus potenciais, diz-se que essa é uma descrição termodinâmica. Uma teoria geral de campo procura unificar os aspectos elementares e reducionistas da mecânica com os aspectos gerais da termodinâmica.

Esses potenciais contidos em partículas ou ao redor de corpos na forma de campos, como o campo elétrico, magnético, o campo gravitacional, o campo de temperatura, o campo de



velocidades, etc., todos eles produzem movimentos. Neste sentido sabe-se que todo “movimento” parte da diferença de algum tipo de “potencial” entre dois pontos. Essa grandeza pode ser chamada de “potencial generalizado”, por exemplo. No caso do fluxo de calor a diferença de potencial corresponde à diferença de temperatura entre dois pontos. No caso do movimento de uma partícula a diferença de potencial mecânica, elétrica ou magnética pode ser atribuída à aplicação de uma força, e assim por diante. Todos esses potenciais e forças estão presentes na lista dos fenômenos que podem ser unificados pela teoria dos campos escalares e vetoriais e tensoriais.

### 2.1.1 - Campo Uniforme ao Redor de Superfícies Regulares

No caso de campo eletrostático ao redor de uma partícula carregada, ou de um corpo com forma regular esférica uniformemente carregada, o campo externo em questão apresentará linhas de mesmo potencial (linhas equipotenciais circuncêntricas) que acompanharão as linhas de contorno do corpo, cujo centro corresponde ao centro geométrico desse corpo (Figura - 2. 1a), e as linhas de campo elétrico estarão dirigidas para fora, (Figura - 2. 1b). O campo elétrico ao redor deste corpo será dado pelo gradiente do seu potencial entre dois pontos, cujo vetor estará apontado na direção normal às linhas de mesmo potencial, ou seja, apontam na direção radial do corpo esférico, conforme mostra a Figura - 2. 1b.

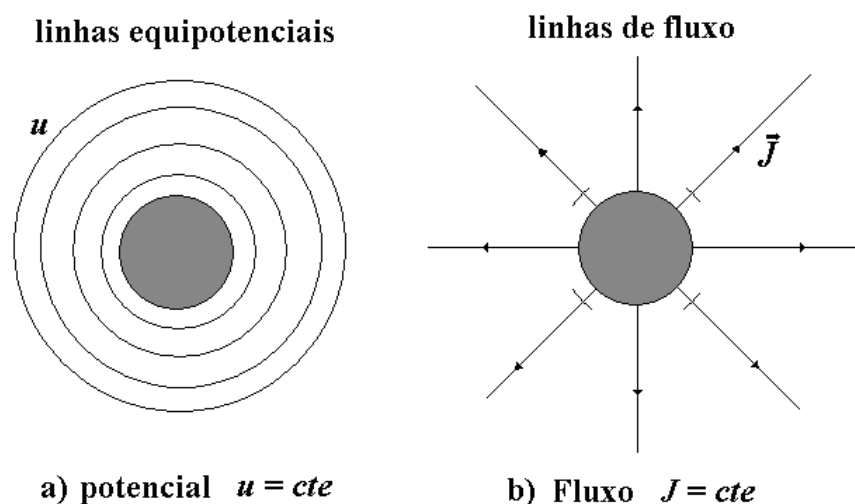


Figura - 2. 1. Esquema de um campo em torno de um corpo esférico regular uniformemente carregado sujeito a um potencial eletrostático escalar  $\vec{u} = cte$ , a) Linhas equipotenciais; b) Linhas de fluxo constante.

Esse exemplo, também, nos dá uma idéia de como pode ser o campo de temperatura ao redor de um corpo, também de forma esférica, cujo calor se distribui uniformemente em toda a sua extensão. O fluxo de calor se dará na direção perpendicular às linhas isotérmicas, de forma análoga ao campo elétrico, cujo valor será proporcional ao gradiente do campo térmico. Outro exemplo pode ser dado a partir do campo gravitacional ao redor de uma massa de forma esférica, cujas linhas

equipotenciais acompanham de certa forma o contorno da superfície do corpo, etc. Todos eles são exemplos de campos de potenciais escalares.

Quando os campos envolvidos são campos dinâmicos cuja descrição envolve diretamente o conceito de velocidade e de movimento de uma partícula, como no caso de deformações elásticas e/ou plásticas de um sólido, ou taxas de deformações de um fluido, novamente surge a idéia de campo potencial associado a diferenças de potenciais, as quais são responsáveis pela formação de gradientes de potencial e, por sua vez, responsáveis pelo movimento das partículas imersas nesses campos. Nesses casos os campos são de potenciais vetoriais ou tensoriais. Mesmo assim, para todas as situações descritas até agora, é possível generalizar o conceito de posição, velocidade, quantidade de movimento, força, potencial, diferença de potencial, etc. com a finalidade de descrever matematicamente o campo clássico de uma forma unificada.

### 2.1.2 - Campo Uniforme ao Redor de Superfícies Irregulares

Por outro lado, de forma análoga à situação de geometria regular, quando se trata de corpos com formas irregulares e se considera que o seu campo interno é uniforme, as linhas equipotenciais externas nos três tipos de fenômenos exemplificados acima acompanharão as formas irregulares do seu contorno, conforme mostra Figura - 2. 2. Até este ponto a complicação da irregularidade dos contornos pode ser trabalhada por soluções numéricas e as correções que surgem em relação ao caso regular são apenas geométricas.

Neste sentido pode-se sempre adotar que o fluxo deriva do potencial a partir do seu gradiente da seguinte forma:

$$\vec{J} = \begin{cases} -k\nabla T & (\text{prob. térmico}) \\ -\sigma\nabla\varphi & (\text{prob. elétrico}) \\ \text{etc,} \end{cases} \quad (2.1)$$

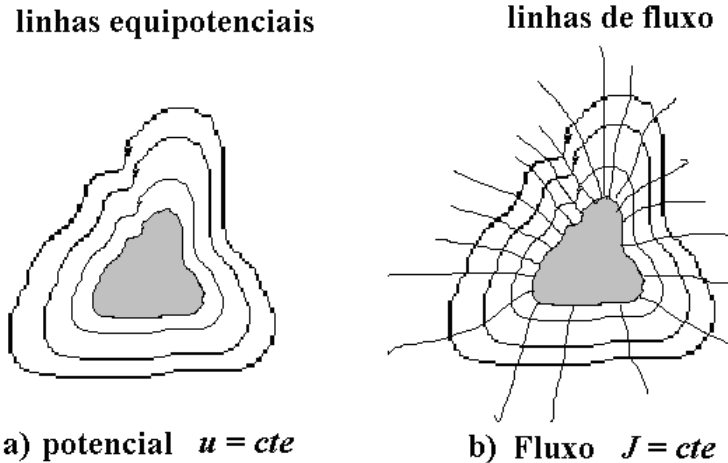


Figura - 2. 2. Esquema de um campo em torno de um corpo esférico irregular uniformemente carregado sujeito a um potencial eletrostático escalar  $\vec{u} = cte$ , a) Linhas equipotenciais; b) Linhas de fluxo constante.

onde  $k$ , e  $\sigma$  são as condutividades térmicas e elétricas e  $T$  e  $\varphi$  são os potenciais térmicos (temperatura) e elétrico, respectivamente. Ou seja, as linhas de fluxos são perpendiculares às linhas equipotenciais, sejam elas de potencial elétrico, térmico ou de outra natureza qualquer dentro dessa mesma classe de fenomenologia.

Contudo, quando as irregularidades de campo envolvem também a parte física do campo, no sentido de haver campos não uniformes, fontes de campo aleatoriamente dispersas no meio, volumes porosos, efeitos não lineares geométricos e físicos, etc., a solução das equações de campo pode se tornar muito trabalhosa ou analiticamente impraticável. Neste ponto, é preciso recorrer a algum tipo de geometria que possa tratar das discontinuidades geométricas e seus efeitos sobre o valor dos campos dos potenciais. Além do que, é necessário generalizar tanto a descrição geométrica da forma dos objetos e do contorno de suas superfícies, como a descrição geométrica dos campos envolvidos, junto com seus efeitos dinâmicos. Porque, além de uma generalização geométrica e fenomenológica, é preciso também fazer a inserção destas nos modelos praticáveis por uma teoria de campo generalizada. Portanto, é preciso formular uma teoria do contínuo que leve em conta a *rugosidade* da superfície de contorno e a *fração volumétrica irregular efetiva* do interior do volume do corpo ou do meio em estudo.

## 2.2 –Revisão Bibliográfica

A teoria do campo contínuo clássica utiliza a geometria euclidiana na descrição dos fenômenos de transferência de calor, massa, momentum, etc. Com essa geometria é possível descrever apenas os fenômenos que acontecem em formas regulares sem considerar os efeitos da *rugosidade* das superfícies, ou da *porosidade* do interior dos volumes. Mesmo quando as formas são cheias de detalhes geométricos, utilizam-se modelos numéricos e cálculos aproximados (Blyth

2003; Xie 2003; Hyun et al 2004). Na fratura, por exemplo, esta quase nunca acontece sem o surgimento de superfícies rugosas. Os casos de fratura com superfícies lisas aparecem normalmente em processos de clivagem de monocristais e no interior de alguns grãos do material. No caso de fratura de materiais policristalinos com considerável *rugosidade* (cuja ponta da trinca rugosa interage no processo de fratura) o uso da geometria euclidiana deixa a desejar, pois os resultados não são completos e os cálculos não são exatos, e ainda não se consegue explicar diversos fenômenos da fratura quase-estática e dinâmica em que a *rugosidade* está presente (Fineberg et al 1991, 1992; Xie, 1995; Boudet, 1995, 1996; Alves, 2005; Alves *et al.*, 2010). A descrição matemática do crescimento da curva J-R de resistência à fratura, por exemplo, só pode ser explicado se for levado em conta o aparecimento da *rugosidade* durante o processo de propagação ou crescimento de uma trinca (Carpinteri, 1996; Rupnowski 2001; Alves *et al.*, 2001, Alves *et al.*, 2010). Isto significa que o modelo geométrico da *rugosidade* precisa ser incluído no cálculo analítico da integral-J de Eshelby-Rice (Su *et al.*, 2000; Weiss, 2001; Rupnowski, 2001; Alves *et al.*, 2001, Alves *et al.*, 2010). Outro fenômeno na fratura que envolve o surgimento de *rugosidade* é a propagação de trincas rápidas, onde surgem instabilidades com ramificação de trincas e oscilações na velocidade de crescimento da trinca, a partir de uma velocidade crítica (Fineberg *et al.*, 1991, 1992; Boudet, 1996).

### 2.2.1. O surgimento de teorias do campo contínuo com a inclusão de irregularidades

A presença de irregularidades de forma e de microestrutura na superfície e no interior de materiais sujeitos a fenomenologias é uma realidade na natureza e também nos materiais desenvolvidos pelo homem. Não é recente a necessidade de se estudar as irregularidades e os defeitos presentes em um material. Para isso têm surgido, ao longo dos anos, tópicos específicos das ciências exatas que tratam de irregularidades geométricas e microestruturais nas superfícies e no interior dos materiais (Bammann, 1982; Forest, 1998; Trovalusci, 1998; Duda, 2007; Engelbrecht, 2009). Desde que surgiu a teoria fractal, grandes têm sido os esforços em descrever as formas irregulares da natureza como também o seu efeito sobre os fenômenos físicos e químicos nos materiais (Hornbogen 1989; Panin, 1992; Lazarev, 1993). Hornbogen (1989) enumerou diferentes aspectos da microestrutura de materiais que podem ser tratados pela geometria fractal. Panagiotopoulos (1992) propôs a utilização da geometria fractal na descrição da estrutura dos sólidos irregulares, Panin (1992) descreveu os fundamentos da meso-mecânica de um meio com estruturas. Tarasov (2005) descreveu uma mecânica do contínuo para meios fractais utilizando o cálculo fracional e Yavari (2006) descreveu as leis de equilíbrio covariantes espaciais e materiais na elasticidade. Outras abordagens estão sendo elaboradas por diversos cientistas e publicadas na

literatura especializada, e dizem respeito a uma teoria especificamente fractal envolvendo o cálculo fracional em múltipla escala (Dyskin, 2005; Carpinteri *et al.*, 2009). Dyskin (2005) tem publicado vários trabalhos no sentido de utilizar a teoria fractal e o cálculo fracional para descrever uma mecânica de múltipla escala. Carpinteri *et al.* (2009) utilizaram o cálculo fracional como uma forma de incluir a teoria fractal na descrição de fenômenos de elasticidade e fratura envolvendo a *rugosidade* e o efeito de escala. Todas estas são propostas de uma mecânica que possa tratar inclusivamente a irregularidade de forma e de microestrutura no seu contexto matemático.

Durante a evolução da proposta deste trabalho observou-se a necessidade de haver uma teoria matemática do contínuo com irregularidades (poros, *rugosidade*, etc.) que seguisse um método de solução do problema irregular diretamente a partir das equações diferenciais governantes do campo clássico com irregularidades. Desta forma, uma transição do meio contínuo regular clássico para o meio irregular se faz necessária, a qual é vista nesse capítulo.

Observa-se, então, que é necessário modificar a teoria do campo contínuo desde a teoria dos campos escalares até os campos tensoriais passando pela teoria do calor, teoria da elasticidade, fratura, por exemplo, para envolver na sua descrição matemática o efeito da *rugosidade* descrevendo-a e explicando o seu surgimento com seus efeitos e conseqüências. Portanto, agora neste capítulo são propostas as modificações desejadas na teoria do campo contínuo de forma a incluir a *rugosidade* das superfícies e a *fração volumétrica irregular efetiva* dos volumes, onde esses meios materiais serão designados com o nome de *Meios Irregulares*<sup>(2)</sup>.

Neste capítulo propõe-se uma modificação espacial e material das leis da mecânica do contínuo através de volumes porosos e superfícies rugosas, considerando que essas irregularidades geométricas introduzem uma “transformação covariante” na mecânica do contínuo clássica que pode ser fractal ou não. Neste sentido a transformação é introduzida por um tensor  $\xi \rightarrow \mathbf{F}$ <sup>(3)</sup> de *rugosidade* responsável por um certo tipo de “estiramento” ou variação da superfície rugosa em relação à superfície média aparente projetada no espaço euclidiano, onde:

$$\xi \equiv \frac{d\vec{A}}{dA_0} = \frac{dA}{dA_0} (\hat{n} \otimes \hat{n}_0). \quad (2.2)$$

onde  $\vec{A}$  é a área da superfície rugosa,  $\vec{A}_0$  é a área da superfície projetada e  $\hat{n}$  e  $\hat{n}_0$  são seus respectivos vetores normais.

A presente proposta não se limita a uma irregularidade fractal, podendo ser este apenas um dos modelos a serem utilizados.

<sup>2</sup> Existem na literatura diversas propostas, cada uma com um nome diferente, tais como: meios microestruturados, meios de multipla escala, etc., este nome foi escolhido por ser o que melhor se adapta para a presente proposta.

<sup>3</sup> O tensor de estiramento na mecânica do contínuo é comumente denotado pela letra  $\mathbf{F}$  em negrito.

### 2.2.2. Importância da inclusão da rugosidade na teoria do campo contínuo clássica

Análises geométricas de superfícies rugosas de fratura em materiais específicos, como madeira, vidro, cimento, argila, demonstram que as *rugosidades* nesses materiais são características de cada tipo de material (Morel 1998, Ponson 2006, Alves 2004). Os aspectos geométricos de superfícies rugosas de fratura em argamassa de cimento, por exemplo, apresentam semelhança entre si. Assim como as superfícies rugosas de fratura obtidas em argilas ou tijolos de argilas também possuem aspectos semelhantes entre si, diferindo, contudo, dos aspectos geométricos das superfícies de fratura do cimento. Ou seja, cada tipo de material define uma classe de superfícies de fratura, cujos aspectos geométricos são semelhantes para as superfícies de fratura da mesma classe de material. Isto ajuda a pensar que a *rugosidade* deve depender do tipo de material e deve ser incluída na equação constitutiva do mesmo para o estudo dos fenômenos do contínuo (calor, elasticidade, fratura, etc).

Portanto, foram feitas algumas modificações na equação de movimento e nas equações constitutivas básicas começando com a teoria do campo escalar (calor, eletrostática) depois passando para a teoria do campo vetorial (elasticidade, eletrodinâmica, fluidos, etc.) até a fratura de materiais frágeis elasticamente lineares. A idéia de se fazer estas modificações de forma evolutiva, em grau de complexidade do fenômeno (campos escalares primeiro e depois campos vetoriais) é para poder se aprender com os resultados que cada modificação pode fornecer. Isto permitiu obter a melhor consistência possível na descrição matemática dos fenômenos do contínuo, que envolve a participação da *rugosidade* no processo, tanto de transferência de calor como nos processos mecânicos de elasticidade e fratura.

## 2.3 - Fundamentação Teórica – Mecânica dos Meios Irregulares

Atualmente, várias formulações matemáticas feitas com base em geometrias regulares como a geometria euclidiana estão sendo revisitadas, na tentativa de se incluir analiticamente as irregularidades de padrões geométricos de volumes e de superfícies contidos ou formados durante o fenômeno. Normalmente, utiliza-se a geometria fractal para essa modelagem, como uma forma de descrever mais autenticamente tais fenômenos. Com base nessa idéia é que será descrita, a partir de agora, uma proposta de desenvolvimento de um modelo de aproximação onde um fenômeno de transporte acontece em um corpo cujo contorno é uma linha ou uma superfície rugosa que pode ser modelado pela geometria fractal. Mas, antes disso, o problema clássico (sem rugosidade) será abordado de forma a se utilizar da geometria euclidiana para descrever as superfícies irregulares corrigido-as por uma função de aproximação (fractal ou não) para se obter a descrição matemática

do problema rugoso.

### 2.3.1- Consideração sobre a Continuidade das Funções

A partir de agora, e nas secções que se seguirão, considera-se que as funções vetoriais e escalares que definem as superfícies  $\vec{A} = \vec{A}(x, y)$  e os volumes  $V = V(x, y, z)$  irregulares, respectivamente, são funções descritas por algum modelo (como o modelo fractal, por exemplo) capaz de fornecer funções analíticas e diferenciáveis nas vizinhanças dos pontos genéricos de coordenadas  $P = P(x, y, z)$ , a fim de que seja possível calcular a grandeza que se propõe, tais como, *rugosidade* e *porosidade*.

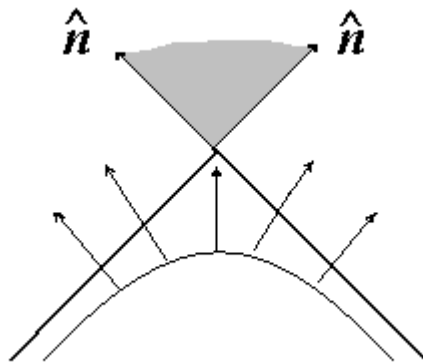


Figura - 2. 3. Vetores normais a uma quina suave e a um “bico” ou quina brusca.

Ao contrário de utilização das funções fractais não-diferenciáveis onde se utiliza o cálculo fracional e a teoria da renormalização para contornar o problema da não diferenciabilidade, o intento, nesse trabalho, é evitar a não-diferenciabilidade dessas funções fractais. Considera-se que sempre é possível definir um vetor normal em “bicos” e quinas e que as cúspides são consideradas inexistentes na escala natural dos fenômenos, conforme mostra a Figura - 2. 3. Do contrário uma teoria que envolvem sub-diferenciais para definir uma família de vetores normais em “bicos” e “quinas” torna-se necessária. Mas esta teoria é mais complexa e sai fora da proposta desse modelo.

### 2.3.2 – A Problemática da Modelagem da Rugosidade

A teoria fractal surgiu no cenário da ciência exata como uma ferramenta capaz de descrever padrões irregulares (na natureza) que apresentam alguma similaridade em diferentes escalas de ampliação (auto-similaridade ou auto-afinidade). Essa possibilidade tem motivado vários cientistas a descrever os fenômenos físicos levando-se em conta os aspectos irregulares ou a *rugosidade* das estruturas. Uma metodologia de transcrição dos fenômenos descritos na geometria

euclidiana para a geometria fractal também se torna necessária. Neste trabalho, houve a motivação para se escrever problemas de valor de contorno em termos da *rugosidade* fractal das estruturas aqui estudadas. A idéia básica consiste em trocar os comprimentos, áreas e volumes projetados, isto é, lisos (denotado neste trabalho pelo subscripto “0”) pelos comprimentos, áreas e volumes que apresentam *rugosidades* reais. Matematicamente, isto significa passar, simplesmente, o contorno liso ou projetado  $d\Gamma_o$  para o contorno rugoso,  $d\Gamma$ , da seguinte forma:

$$d\Gamma(x, y) = \frac{d\Gamma}{d\Gamma_o} d\Gamma_o, \quad (2.3)$$

conforme mostra a Figura - 2. 4, usando apenas uma simples transformação de coordenadas pela regra da cadeia.



Figura - 2. 4. Mudança do contorno rugoso  $\Gamma$  para o contorno projetado  $\Gamma_o$

Essa simples transformação matemática é a causa de grandes mudanças no paradigma das superfícies rugosas, introduzindo uma nova visão para os fenômenos da mecânica da fratura, como será visto posteriormente no Capítulo - VII.

### 2.3.3 - Problema proposto

A solução encontrada por alguns cientistas (Irwin 1948, Muskhelishvili 1954, Barenblatt 1962, Rice 1968) para se descrever alguns fenômenos que estão associados a geometrias irregulares (comprimentos, superfícies e volumes) foi utilizar uma relação energética entre a superfície irregular e a superfície de projeção euclidiana, a qual pode ser escrita como:

$$\frac{dU}{d\vec{A}_o} = \frac{dU}{d\vec{A}}, \quad (2.4)$$

onde  $U$  é a energia envolvida na superfície de área rugosa  $\vec{A}$  e na superfície projetada de geometria euclidiana de área  $\vec{A}_o$ . Relações deste tipo pressupõem que a superfície irregular não influencia no fenômeno. Isto pode ser visto se a equação acima for expressa da seguinte forma:

$$\frac{dU}{d\vec{A}_o} = \frac{dU}{d\vec{A}} \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_o}, \quad (2.5)$$

Comparando-se a expressão (2. 4) com a (2. 5) observa-se que a relação entre a área rugosa ou



irregular  $\vec{A}$  e a área de projeção  $\vec{A}_o$  é igual à unidade para o caso em que a equivalência energética é considerada. Contudo, quando a relação  $d\vec{A}/d\vec{A}_o$  é diferente da unidade, a equivalência energética (2. 4) não é válida. Nesta situação há duas alternativas; (i) ou se reescreve as relações diretamente em termos da geometria irregular  $\vec{A}$ , construindo-se uma nova fenomenologia, (ii) ou se mantém a equivalência energética na forma da relação (2. 5) com o termo  $d\vec{A}/d\vec{A}_o \neq 1$ . Dependendo da fenomenologia e de sua larga aplicabilidade, uma ou outra alternativa é necessária. Neste trabalho, optou-se por fazer as correções necessárias da teoria fenomenológica com base na geometria euclidiana, acrescentando-se nas derivadas o termo de correção  $d\vec{A}/d\vec{A}_o \neq 1$  em todas as equações. Neste sentido, desenvolveram-se os cálculos que serão úteis na descrição dos fenômenos que envolvem potenciais escalares e vetoriais para problemas de contorno rugoso, os quais serão descritos pela geometria fractal.

### 2.3.4 – A Teoria Mecânica dos Meios Irregulares em Outras Áreas

A fundamentação teórica das transformações matemáticas das equações de diversos fenômenos descritos em termos da geometria euclidiana, para uma geometria irregular (fractal ou não), passa por uma abordagem do entendimento das densidades e dos fluxos generalizados em termos dessa nova geometria. Com isso é preciso estabelecer quais transformações matemáticas são necessárias em termos das coordenadas, dos comprimentos, das áreas das superfícies e dos volumes irregulares. É importante elaborar um tratamento matemático da Transmissão de Calor, Distribuição de Temperatura, Elasticidade e Fratura em objetos com superfícies rugosas ou com múltiplos vazios no seu volume para aplicação em problemas de contato térmico, convecção, *porosidade*, deformações mecânicas e fratura.

Blyth e Pozrikidis (2003) estudaram os efeitos de uma superfície irregular na distribuição do fluxo de calor para um meio semi-infinito. Na elasticidade, P. D. Panagiotopoulos (1992) percebeu a necessidade de reformular a Mecânica dos Sólidos com base na teoria fractal. Paralelamente na Mecânica da Fratura, Arash Yavari (2000, 2002, 2006) reformulou o campo elástico ao redor de uma trinca usando o escalonamento fractal e descobriu novos modos de fratura e uma equação para a curva J-R fractal. Todos estes esforços vêm corroborar a idéia da existência de um novo campo a ser pesquisado e desenvolvido na ciência, que unirá em um único ramo os problemas do campo contínuo com as irregularidades físicas e geométricas.

Por outro lado, a Teoria Fractal se inseriu no contexto da Matemática dentro do que é chamado de Cálculo Fracional. Na área da Física ela está inserida no Campo dos Meios Desordenados, que inclui estruturas ramificadas, agregados, clusters de partículas, etc. (Meakin

1988, 1989). Dentro do contexto deste trabalho observou-se que todas as correções feitas ao campo clássico (escalar, vetorial ou tensorial) em problemas de fluxo de calor, de elasticidade e de fratura poderiam ser incluídas em um único contexto de uma Mecânica do Contínuo de Meios Irregulares.

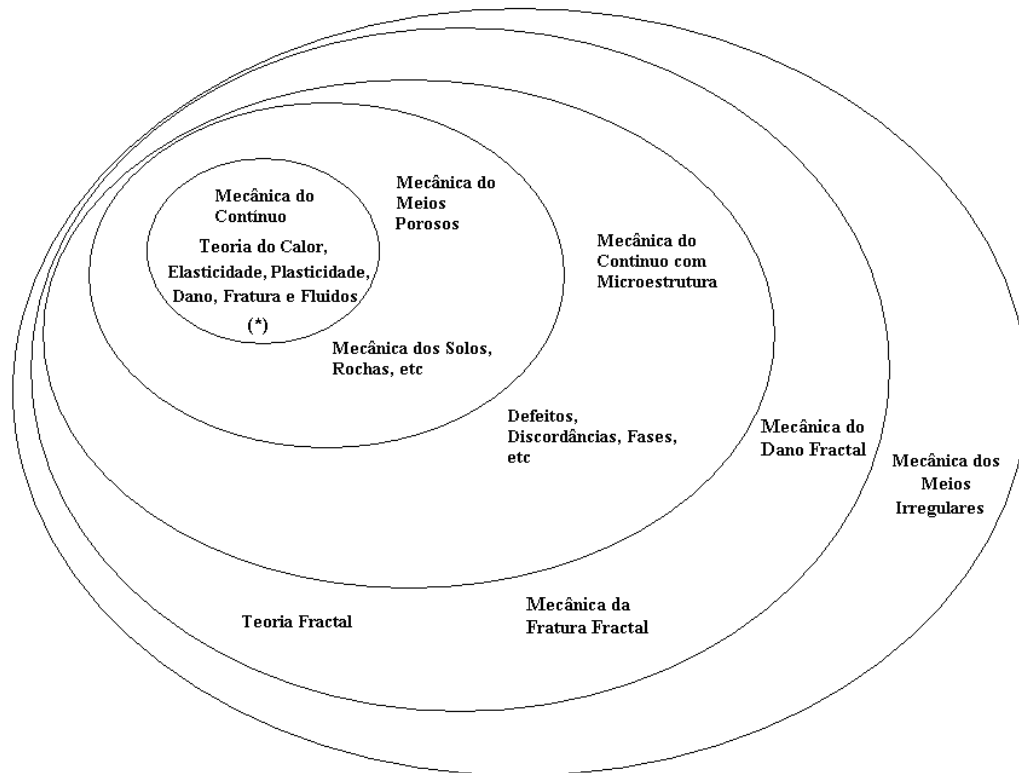


Figura - 2. 5. Áreas abrangentes e interdisciplinares que podem envolver a Mecânica dos Meios Irregulares

Sendo assim diferentes áreas das ciências exatas podem ser incluídas dentro de uma estrutura matemática abrangente que considere as mais variadas formas de irregularidades em um meio material, conforme ilustra a Figura - 2. 5.

### 2.3.5 – A microestrutura e as irregularidades de um meio

Neste trabalho, entende-se por irregularidades quaisquer acréscimos físicos ou geométricos feitos ao meio contínuo tais como: poros, rugosidades superficiais, inclusão de partículas, zonas plásticas, zonas fundidas, trincas internas, etc. Nessa nova roupagem a Mecânica dos Meios Irregulares se reduz à Mecânica do Contínuo quando as irregularidades não existem. Por outro lado, a teoria fractal se insere neste contexto quando a opção pela modelagem das irregularidades utilizar modelos fractais por causa da invariância por transformação de escalas dessas irregularidades. A Mecânica dos Meios Irregulares poderá, neste sentido, incluir a Mecânica dos Meios Desordenados quando as equações do contínuo irregular forem transformadas em equações discretas com irregularidades.

### 2.3.6 – Características básicas das estruturas irregulares

Na microestrutura de um material sólido, por exemplo, encontram-se diferentes tipos de defeitos; entre eles estão as inclusões, os precipitados, as discordâncias, microtrincas, fraturas, etc. conforme mostra a Figura - 2. 6.

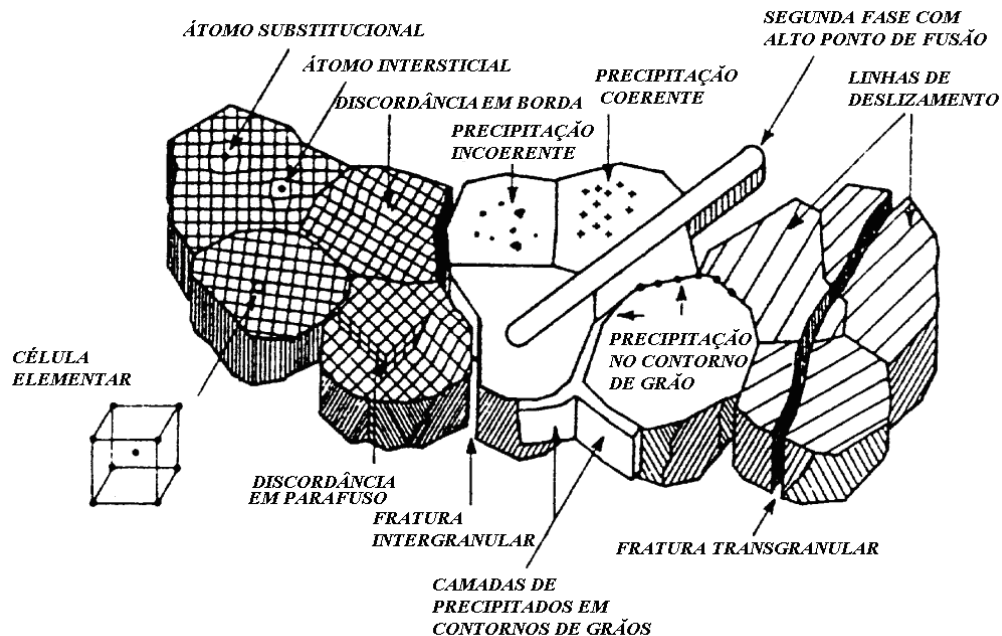


Figura - 2. 6. Campo de Irregularidades de diferentes tipos de defeitos e irregularidades presentes num material que agem como concentradores de tensão e influenciam na formação da superfície de fratura (extraído do livro Ewalds, pág. 226, 1993).

Todas essas irregularidades básicas e/ou geométricas podem ser devidamente incluídas na teoria do campo contínuo clássico, na forma de defeitos pontuais, lineares, superficiais e volumétricos, desde que uma representação matemática apropriada seja elaborada de forma a descrever a cinética ou a dinâmica destes defeitos. Para isso inicia-se a presente proposta incluindo-se na Mecânica do Contínuo apenas a influência geométrica dos defeitos. Propostas de modelagem de outros tipos de defeitos podem ser encontradas em Forest (1998), Trovalusci (1998), Tarasov (2005) Duda (2007), Engelbrecht (2009).

## 2.4 – Densidades e Potenciais Generalizadas em Termos de Geometrias irregulares (Rugosas ou Porosas)

Como conseqüência da hipótese do contínuo, deve-se transformar as grandezas da Mecânica Clássica e da Mecânica dos Sólidos em densidades generalizadas, fazendo as grandezas originais se tornarem grandezas por unidade de volume. Desta forma, uma grandeza  $\mathbf{X}$  qualquer,

que pode ser massa,  $m$ , momento linear,  $\vec{p}$ , Força,  $\vec{F}$ , Energia,  $U$ , etc., deverá ser transformada na sua respectiva densidade da seguinte forma:

$$\rho_X \equiv \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta X}{\delta V}. \quad (2.6)$$

onde  $\delta V$  é o elemento de volume de controle e  $X = m, \vec{p}, \vec{F}, U, etc$  (massa, momento, força, energia, etc) que podem ser grandezas escalares, vetoriais, tensoriais, etc; ou seja qualquer quantidade ou grandeza pode ser utilizada para definir uma densidade generalizada. Logo,

$$\rho_x \equiv \frac{dX}{dV} = \frac{dX}{dm} \frac{dm}{dV} \rightarrow \rho_x = \rho \frac{dX}{dm}. \quad (2.7)$$

Esta equação define a relação entre uma densidade generalizada e a densidade de massa.

#### 2.4.1 – O Conceito escalar da fração volumétrica irregular efetiva

Considere o seguinte volume irregular encapsulado, ou inscrito, dentro de um volume euclidiano regular aparente, conforme mostra a Figura - 2. 7.

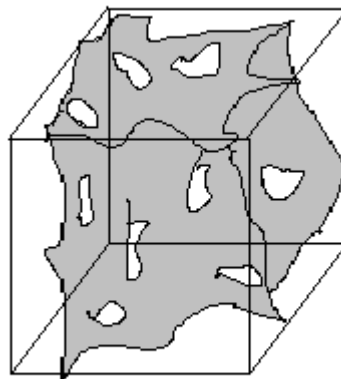


Figura - 2. 7. Volume irregular  $V$  encapsulado, ou inscrito, dentro de um volume euclidiano regular aparente  $V_0$ .

Este volume aparente pode ser qualquer sólido ou forma regular que apresente um volume definido.

Definindo-se as densidades generalizadas  $\rho$  e  $\rho_o$  em termos da geometria euclidiana e irregular (que pode ser fractal ou não), respectivamente, tem-se:

$$\rho_{x_o} = \frac{dX}{dV_o}. \quad (2.8)$$

e a densidade dentro do volume irregular (rugoso ou poroso) é dada por:

$$\rho_x = \frac{dX}{dV}. \quad (2.9)$$

Pela regra da cadeia pode-se escrever:

$$\rho_{x_o} = \frac{dX}{dV} \left( \frac{dV}{dV_o} \right). \quad (2.10)$$

Logo, a expressão da densidade euclidiana em termos da densidade no volume irregular (rugoso ou poroso) pode ser expressa como:

$$\rho_{x_o} = \rho_x \frac{dV}{dV_o}. \quad (2.11)$$

Observe que o seguinte termo é válido para a conservação da massa, quando a grandeza  $X \equiv m$  é dada por esta:

$$\rho_o dV_o = \rho dV = dm. \quad (2.12)$$

A *porosidade* global de um meio é definida como:

$$p_g = \frac{V_o - V}{V_o} \quad (2.13)$$

e a *porosidade* local é analogamente definida como:

$$p_l = \frac{d(V_o - V)}{dV_o}. \quad (2.14)$$

Definindo-se, neste trabalho, a *fração volumétrica irregular efetiva*  $\zeta$  ao seguinte termo:

$$\zeta \equiv \frac{dV}{dV_o} \quad (2.15)$$

tem-se que:

$$\rho_{x_o} = \rho_x \zeta \quad (2.16)$$

e as densidades reais e a aparente estão relacionadas uma com a outra pela *fração volumétrica irregular efetiva* local.

Esta última equação foi utilizada dentro de outras equações, que se seguem, para se fazer as modificações necessárias para os termos de *rugosidade* de superfícies e volumes.

Observe que globalmente tem-se:

$$p_g = 1 - \zeta_g = 1 - \frac{V}{V_o}. \quad (2.17)$$

e, localmente

$$p_l = 1 - \zeta_l = 1 - \frac{dV}{dV_o} \quad (2.18)$$

ou seja, de forma geral a relação da *porosidade* com a sua complementar é dada por:

$$p = 1 - \zeta \quad (2.19)$$

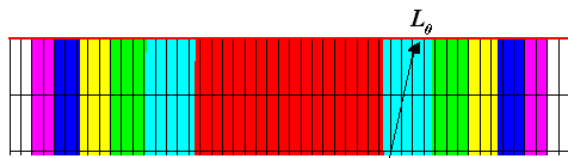
Esta é a relação entre a *porosidade* (definida classicamente) com a sua complementar, definida pela *fração volumétrica irregular efetiva* a qual será útil para os propósitos deste trabalho.

## 2.5 – A rugosidade geométrica de uma Linha ou Superfície Rugosa

### 2.5.1 – O Modelo Escalar da Rugosidade

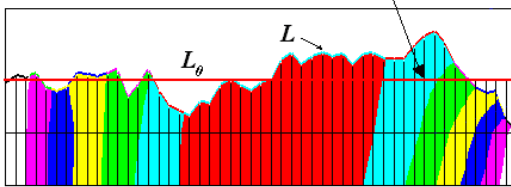
Considere a Figura - 2. 8, a qual mostra uma linha rugosa. Nesta figura vê-se o detalhe de um contorno rugoso em comparação com o mesmo problema de campo escalar em um contorno liso. A partir dos pontos do contorno rugoso, em detalhe a direita da Figura - 2. 8, pode-se definir a rugosidade escalar.

#### Problema Liso - P1

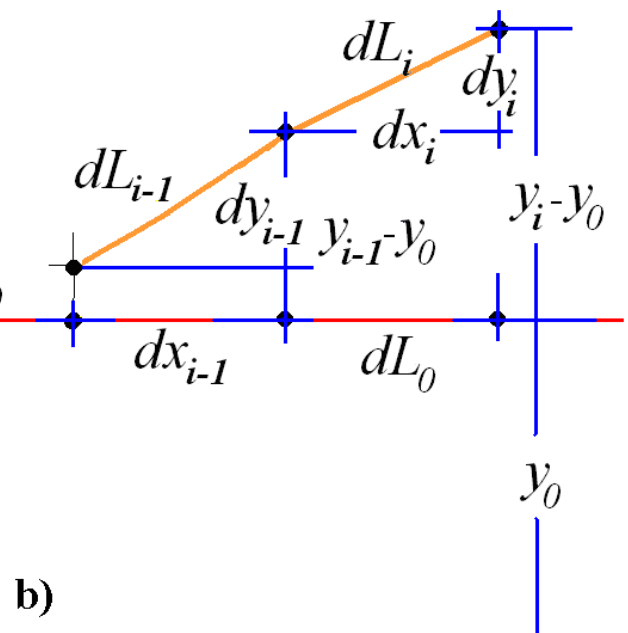


linha de referência euclidiana  $L_0$

#### Problema Rugoso - P2



a)



b)

Figura - 2. 8. Modelo de *rugosidade escalar* definido a partir de; a) um contorno rugoso em relação ao um contorno liso para o mesmo problema matemático; b) esquematização local de uma rugosidade.

Uma proposta de medida de *rugosidade* é dada pela razão entre os diferenciais  $dL$  e  $dL_0$ , onde se define

$$\frac{dL}{dL_o} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx_o^2 + dy_o^2}} . \quad (2.20)$$

Para um contorno discretizado em segmentos a equação (2.20) pode ser reescrita como:

$$\frac{dL_i}{dL_{o_i}} = \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{\sqrt{(x_{oi} - x_{oi-1})^2 + (y_{oi} - y_{oi-1})^2}} . \quad (2.21)$$

Este modelo escalar da *rugosidade* não aparece diretamente nas propostas futuras, mas em alguns casos particulares a equação (2.21) pode ser equivalente aos cossenos dos ângulos formados entre os segmentos sobre a superfície rugosa e sua projeção sobre uma linha lisa de referência euclidiana.

Considerando o caso particular onde  $dx_o = dx_i$ , têm-se as diferentes definições para a rugosidade escalar dadas por:

$$\frac{dL_i}{dL_{o_i}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_{oi} - y_{oi-1}}{x_{oi} - x_{oi-1}}\right)^2}} . \quad (2.22)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dL_{o_i}} &= \frac{\sqrt{dx_i^2 + dy_i^2}}{dx_{oi}} \\ \frac{dL_i}{dL_{o_i}} &= \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}{(x_{oi} - x_{oi-1})} \\ \frac{dL_i}{dL_{o_i}} &= \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_{oi} - x_{oi-1}}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nos capítulos VI e VII será vista a utilização dessa definição de *rugosidade* em um modelo de superfície de fratura e nas curvas G-R e J-R da Mecânica da Fratura Fractal.

### 2.5.2 – O Modelo Vetorial da Rugosidade

Por outro lado, considere a Figura - 2.9 onde se observa o vetor posição e o vetor normal sobre os pontos de um contorno rugoso. De acordo com a necessidade do problema do campo em estudo se este é vetorial, a partir dessa Figura - 2.9, pode-se definir um coeficiente de *rugosidade vetorial* da seguinte forma:

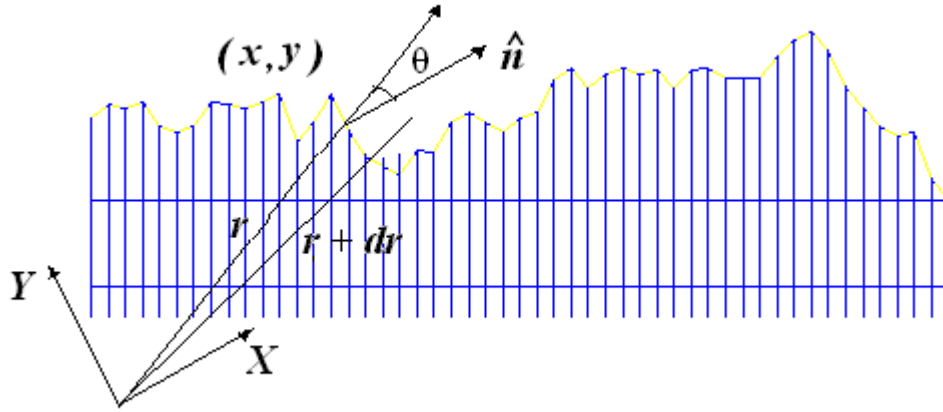


Figura - 2. 9. Modelo de rugosidade vetorial  $\hat{r} \neq \hat{r}_o \neq \hat{n}_o$

$$\nabla_o \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_o} \hat{i} & \frac{\partial x}{\partial y_o} \hat{j} \\ \frac{\partial y}{\partial x_o} \hat{i} & \frac{\partial y}{\partial y_o} \hat{j} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

considerando que a matriz é diagonal, ou seja  $\partial x / \partial y_o = 0$  e  $\partial y / \partial x_o = 0$ , tem-se

$$\nabla_o \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_o} \hat{i} & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial y_o} \hat{j} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

cujo módulo é dado por:

$$\|\nabla_o r\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_o}\right)^2}. \quad (2.26)$$

e

$$\frac{dr}{dn_o} = \|\nabla_o r\| \cdot (\vec{r} \cdot \hat{n}_o). \quad (2.27)$$

Para um contorno discretizado em segmentos pode-se tomar o diferencial das coordenadas sobre os elementos do contorno de uma placa rugosa de forma análoga à formulação anterior e obter:

$$\nabla_o r_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{oi}} \hat{i} + \frac{\partial y_i}{\partial y_{oi}} \hat{j}. \quad (2.28)$$

De acordo com as equações (2.26) e (2.27) este modelo representa a variação relativa das projeções de cada segmento da linha rugosa sobre uma linha lisa de referência euclidiana.

Portanto, para um contorno discretizado em segmentos tem-se:



$$\nabla_o \vec{r}_i = \begin{bmatrix} \frac{(x_i - x_{i-1})}{(x_{oi} - x_{oi-1})} \hat{i} & 0 \\ 0 & \frac{(y_i - y_{i-1})}{(y_{oi} - y_{oi-1})} \hat{j} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Para a rugosidade vetorial tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dr_{oi}} &= \frac{dx_i}{dx_{oi}} \hat{i} + \frac{dy_i}{dy_{oi}} \hat{j} \\ \frac{dr_i}{dr_{oi}} &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{oi} - x_{oi-1}} \hat{i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{oi} - y_{oi-1}} \hat{j} \\ \frac{dr_i}{dr_{oi}} &= \hat{i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{oi} - y_{oi-1}} \hat{j} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Observe que o módulo em (2.21) é dado de forma análoga ao modelo escalar de *rugosidade*, ou seja:

$$\|\nabla_o r_i\| = \sqrt{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{oi} - x_{oi-1}}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{oi} - y_{oi-1}}\right)^2}. \quad (2.31)$$

Considerando o caso particular onde  $dx_o = dx_i$ , tem-se:

$$\|\nabla_o r_i\| = \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{oi} - y_{oi-1}}\right)^2}. \quad (2.32)$$

Esta é a forma vetorial da *rugosidade* que poderá ser útil em problemas de campos vetoriais.

### 2.5.3 – Conceito Tensorial de Rugosidade

O conceito de *rugosidade*, descrito a seguir, permite o desenvolvimento de uma teoria de campo contínuo contendo irregularidades, onde os teoremas fundamentais (Teorema da Divergência, Teorema de Gauss, etc.) podem ser inseridos de forma análoga à teoria de campo contínuo clássico regular (escalar, vetorial ou tensorial).

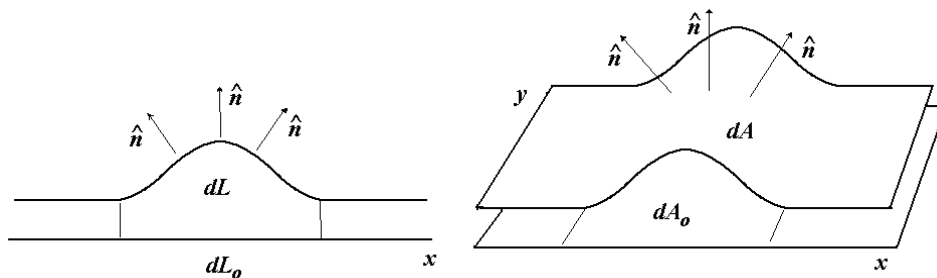


Figura - 2.10. *Rugosidade* de uma linha ou de uma superfície em relação a uma projeção média lisa de referência.

Considere uma linha ou superfície rugosa que apresenta um desvio ou “deformação” relativa a uma reta ou a um plano médio de projeção dito liso, conforme mostra a Figura - 2. 10.

Observe que a *rugosidade* pode ser localizada ou distribuída. Quando essa “*rugosidade*” for do tipo volumétrica, isto é, estiver no interior de um volume qualquer, ela será chamada de “*fração volumétrica irregular efetiva*”. Em termos de uma generalização dimensional essa idéia é consistente com a teoria fractal, por exemplo.

É necessário obter uma expressão matemática que defina a *rugosidade* de forma local, ou seja, dependente das coordenadas. Neste sentido, pode-se definir e equacionar a *rugosidade* de uma superfície irregular da seguinte forma:

$$[\xi] = \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_o} = \frac{dA}{dA_o} (\hat{n} \otimes \hat{n}_o). \quad (2.33)$$

O símbolo " $\otimes$ " denota o produto tensorial entre dois vetores, ou seja,  $\vec{a} \otimes \vec{b} = [a_i b_j] \equiv A_{ij}$  que é uma matriz correspondendo a um tensor de ordem 2, onde  $d\vec{A}$  é o elemento de área sobre a superfície rugosa e  $d\vec{A}_o$  é o elemento de área sobre a superfície lisa. Onde  $\hat{n}$  e  $\hat{n}_o$  são os vetores normais das superfícies rugosa e lisa, respectivamente.

Observe que o elemento de área rugosa  $d\vec{A}$  e o elemento de área sobre a superfície lisa  $d\vec{A}_o$  podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dA \hat{n} \\ d\vec{A}_o &= dA_o \hat{n}_o \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou seja, estes elementos de superfícies estão relacionados ao vetor normal em cada ponto das superfícies rugosa e projetada, respectivamente. Portanto, cada um destes elementos depende das coordenadas das superfícies:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}(x, y) \\ \vec{A}_o &= \vec{A}_o(x, y) \end{aligned} \quad (2.35)$$

A operação diferencial em (2.33), na verdade, dá origem a um “tensor de *rugosidade*” que pode ser chamado de “gradiente de superfície” e este, por sua vez, está relacionado ao *tensor de curvatura* ou à variação do vetor normal com a posição sobre a superfície rugosa (Mariano, 2003).

O tensor de *rugosidade* em 3D pode ser escrito explicitamente em coordenadas cartesianas como:

$$[\xi] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

A equação (2.33) pode ser reescrita como:

$$\vec{A} = \int_S [\xi] \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.37)$$

Tomando-se a derivada de  $\vec{A}$  em relação ao elemento de volume, para uma superfície qualquer inclusive no interior do volume, tem-se que a densidade volumétrica de superfície rugosa no interior do volume é:

$$\rho_A \equiv \frac{d\vec{A}}{dV} = \frac{d}{dV} \int_S [\xi] \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.38)$$

Como o lado direito de (2.38) é a própria definição do divergente de  $[\xi]$ , tem-se:

$$\nabla \cdot [\xi] = \frac{d}{dV} \int_S [\xi] \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.39)$$

Logo, igualando (2.39) com (2.38) observa-se que a densidade de superfície rugosa é dada por:

$$\rho_A \equiv \frac{d\vec{A}}{dV} = \nabla \cdot [\xi]. \quad (2.40)$$

ou ainda, pode-se reescrever (2.39) e obter:

$$\int_V \nabla \cdot [\xi] dV = \int_S [\xi] \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.41)$$

Sendo  $[\xi]$  dado pela integração de (2.33), tem-se:

$$[\xi] = \frac{d}{d\vec{A}_s} \int_S [\xi] \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.42)$$

ou, a partir de (2.41), tem-se:

$$[\xi] = \frac{d}{d\vec{A}_o} \int_V \nabla \cdot [\xi] dV. \quad (2.43)$$

Comparando (2.37) com (2.41) tem-se que:

$$\vec{A} = \int_V \nabla \cdot [\xi] dV. \quad (2.44)$$

Esta relação ajuda a obter valores de áreas rugosas em termos do divergente de *rugosidade*, interior

ao volume.

## 2.6 – Fluxos e Equações de Movimento generalizados em termos de geometrias rugosas

Considere a Figura - 2. 11. De forma geral o fluxo de uma grandeza generalizada  $\mathbf{X}$  que atravessa uma área infinitesimal,  $d\vec{A}_0$ , em um intervalo infinitesimal de tempo,  $dt$ , é definido como:

$$\mathbf{J}_{X_0} \equiv \frac{d\dot{\mathbf{X}}}{d\vec{A}_0} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right). \quad (2.45)$$

Esta grandeza,  $\mathbf{X}$ , é de natureza geral e pode ser um escalar (*massa M, carga elétrica q, calor Q, energia U entropia S, etc.*) ou um vetor (*momento  $\vec{p}$ , velocidade  $\vec{v}$ , etc.*) ou um tensor (*tensão  $\sigma$ , Polarização P, etc.*). O sobrescrito “0” indica que a geometria considerada é a geometria euclidiana regular.

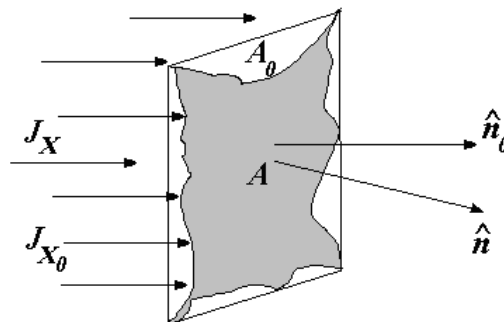


Figura - 2. 11. Fluxo através de uma superfície irregular A contida em uma superfície euclidiana regular aparente projetada  $A_0$ .

A maior motivação do uso da teoria fractal nos modelos matemáticos e fenomenológicos está na possibilidade de se descrever analiticamente as estruturas irregulares. Equações de potenciais e fluxos que atravessam superfícies rugosas podem ser reescritas em termos da geometria fractal, onde o efeito da *rugosidade* pode ou não influenciar o fenômeno.

### 2.6.1 – O Fluxo Generalizado, $J_X$ , através de uma Superfície Rugosa

Considere a superfície irregular  $\vec{A}$  e a sua respectiva projeção  $\vec{A}_0$  no plano euclidiano, pelas quais passam o fluxo de alguma grandeza  $X_0$ .

Seja  $\vec{J}_{X_0}$  o fluxo generalizado da grandeza  $X$

$$\vec{J}_{X_0} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{dX_0}{dt} \right), \quad (2.46)$$

onde  $\vec{A}_0$  é a área de projeção euclidiana de  $\vec{A}$ . Então, escreve-se o fluxo generalizado,  $J_{X_0}$ , das grandezas generalizadas,  $X_0$ , consideradas anteriormente, como sendo:

$$J_{X_0} = \frac{d}{dA} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{dA}{dA_0} \quad (2.47)$$

onde  $X_0 = m, \vec{p}_0, \vec{F}_0, \vec{U}_0, etc.$

Normalmente o fluxo  $\vec{J}_{X_0}$  está associado a uma densidade  $\rho_{X_0}$  e a uma velocidade  $\vec{v}_{X_0}$  do processo ou fenômeno em questão:

$$\vec{J}_{X_0} \equiv \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0} \rightarrow \vec{J}_{X_0} = \rho_{X_0} \vec{v}_{X_0}. \quad (2.48)$$

Logo, para o caso onde a grandeza  $X_0 \equiv \vec{p}_0$  corresponde ao momento linear da partícula, tem-se:

$$\vec{J}_{\vec{p}_0} \equiv \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{d\vec{p}_0}{dt} \right) \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0} \rightarrow \vec{J}_{\vec{p}_0} = \sigma_0. \quad (2.49)$$

que é o tensor das tensões, o qual será utilizado mais adiante, e o fluxo generalizado da grandeza  $X_0 \equiv \vec{p}_0$  corresponde à densidade de forças ou o gradiente do tensor das tensões.

$$\vec{f}_{X_0} \equiv \rho_{\vec{F}_0} = \nabla \vec{J}_{\vec{p}_0}. \quad (2.50)$$

Se a área  $\vec{A}_0$  que o fluxo  $\vec{J}_{X_0}$  atravessa é a área de projeção euclidiana, para passar essa equação para a descrição irregular (fractal ou não) basta incluir a derivada em relação à área de superfície rugosa da seguinte forma:

$$\vec{J}_{X_0} = \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right) \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0}, \quad (2.51)$$

Desta forma, o fluxo em termos da superfície de área rugosa é dado de forma análoga à (2.46), como:

$$\vec{J}_X = \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{dX_0}{dt} \right), \quad (2.52)$$

e pode-se escrever (2.51) da seguinte forma:

$$\vec{J}_{X_0} = \vec{J}_X \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0}, \quad (2.53)$$

ou

$$\vec{J}_{x_0} = \vec{J}_x [\xi], \quad (2.54)$$

Esta equação mostra que o fluxo sob uma área projetada está relacionado o fluxo sob uma área rugosa a menos do tensor de rugosidade.

### 2.6.2 – “Fluxo de Porosidade” e Equação de Movimento da Fração Volumétrica Irregular Efetiva

É possível imaginar processos ou fenômenos físicos em que a *fração volumétrica irregular efetiva* varie com o tempo e com as coordenadas de sua posição. Neste sentido pode-se definir um “*fluxo de porosidade*”, desde que o fenômeno ou processo envolvido seja o responsável pela sua geração, formação e transporte; por exemplo, o processo de corrosão, coalescência de microvazios no interior de um material, o processo de remodelação óssea e osteoporose.

Conforme a Figura - 2. 12, pode-se definir o fluxo da *fração volumétrica irregular efetiva* como sendo:

$$\vec{J}_{\zeta_0} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right). \quad (2.55)$$

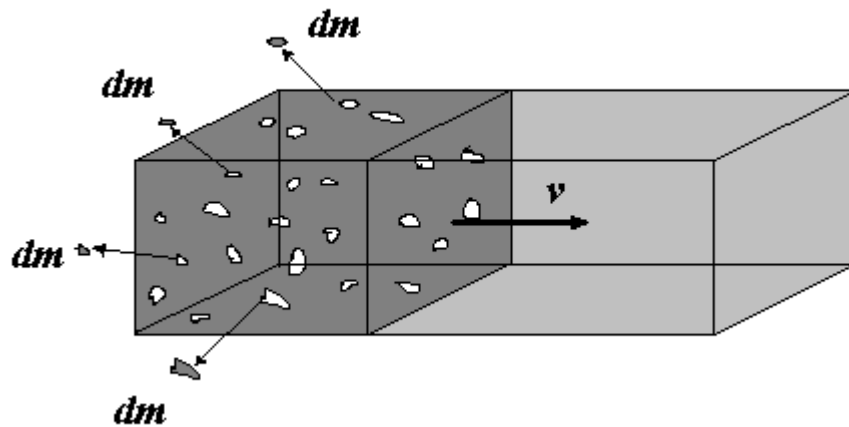


Figura - 2. 12. Fluxo da *fração volumétrica irregular efetiva* ou “*fluxo de porosidade*” deslocando-se com uma velocidade média  $\vec{V}$  para uma direção enquanto a perda de massa se desloca na direção contrária.

Observe que a *fração volumétrica irregular efetiva* na Figura - 2. 12 segue uma direção oposta a um fluxo de partículas que abandona um corpo material conforme mostra a Figura - 2. 12. Integrando-se a equação (2. 55) em termos da área projetada  $\vec{A}_0$  obtém-se:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \int \vec{J}_{\zeta_0} \cdot d\vec{A}_0. \quad (2.56)$$

Alternativamente a taxa temporal de variação do volume real pode ser expressa em termos da área

rugosa real da superfície, utilizando a transformação (2. 33) aplicada em (2. 56), como:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \int [\xi]^{-1} \vec{J}_\zeta \cdot d\vec{A}. \quad (2. 57)$$

Considerando-se válido o teorema da divergência para o fluxo de *fração volumétrica irregular efetiva* tem-se:

$$\frac{d}{dV_0} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) = \nabla \cdot \vec{J}_{\zeta_0} \equiv \frac{d}{dV_0} \int \vec{J}_{\zeta_0} \cdot d\vec{A}_0. \quad (2. 58)$$

ou

$$\frac{d}{dV} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) = \nabla \cdot \vec{J}_\zeta \equiv \frac{d}{dV} \int \vec{J}_\zeta \cdot d\vec{A}. \quad (2. 59)$$

logo

$$\int \vec{J}_{\zeta_0} \cdot d\vec{A}_0 = \int (\nabla \cdot \vec{J}_{\zeta_0}) \cdot dV_0. \quad (2. 60)$$

Alternativamente, usando-se a equação (2. 15) e integrando em termos do volume real tem-se:

$$\int \vec{J}_{\zeta_0} \cdot d\vec{A}_0 = \int \frac{1}{\zeta} (\nabla \cdot \vec{J}_\zeta) \cdot dV. \quad (2. 61)$$

Comparando-se (2. 60) com (2. 56) tem-se:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \int (\nabla \cdot \vec{J}_\zeta) \cdot dV_0. \quad (2. 62)$$

Também, alternativamente, comparando-se (2. 61) com (2. 57) tem-se:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \int \frac{1}{\zeta} (\nabla \cdot \vec{J}_\zeta) \cdot dV. \quad (2. 63)$$

Logo, derivando (2. 62) em relação ao volume tem-se:

$$\frac{d\dot{\zeta}}{dV_0} = \frac{d}{dV_0} \int (\nabla \cdot \vec{J}_\zeta) \cdot dV_0. \quad (2. 64)$$

Como o lado direito de (2. 64) é a própria definição de divergente tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_\zeta = \frac{d\dot{\zeta}}{dV_0}. \quad (2. 65)$$

Trocando a ordem das derivadas de (2. 65) tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_\zeta = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\zeta}{dV_0} \right). \quad (2. 66)$$

Observa-se que a *fração volumétrica irregular efetiva* dentro do parêntesis em (2. 66) é a própria densidade de volume poroso. Portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J}_\zeta = \frac{d\rho_\zeta}{dt}. \quad (2.67)$$

Esta equação representa uma fenomenologia geral de como varia a *fração volumétrica irregular efetiva* com a posição em um meio irregular, sujeito a campos de forças que deslocam sua massa e movimentam suas irregularidades no interior do seu volume aparente.

### 2.6.3 - Relação entre fração volumétrica irregular efetiva e vazão de massa

Também a partir da Figura - 2.12 pode-se definir o fluxo associado à vazão de massa como sendo:

$$\vec{J}_V = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{dV}{dt} \right). \quad (2.68)$$

Logo, integrando a equação (2.68) em termos da área projetada  $\vec{A}_0$  obtém-se a vazão:

$$\frac{dV}{dt} = \int \vec{J}_V \cdot d\vec{A}_0. \quad (2.69)$$

Alternativamente a taxa temporal de variação do volume real pode ser expressa em termos da área rugosa real da superfície, utilizando a transformação (2.33) em (2.69), como:

$$\frac{dV}{dt} = \int [\xi]^{-1} \vec{J}_V \cdot d\vec{A}. \quad (2.70)$$

Seguindo manipulações algébricas análogas às aquelas apresentadas nas equações (2.58) a (2.66), chega-se a:

$$\nabla \cdot \vec{J}_V = \frac{d}{dt} \left( \frac{dV}{dV_o} \right). \quad (2.71)$$

Observe que a *fração volumétrica irregular efetiva* dentro do parêntesis em (2.71), a menos da massa contida no volume real, é a própria densidade aparente do volume irregular efetivo dada em (2.15). Portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J}_V = \frac{d\zeta}{dt}. \quad (2.72)$$

Esta equação representa uma fenomenologia geral de como varia o fluxo de volume com a posição em um meio irregular, sujeito a campos de forças que deslocam sua massa e movimentam suas irregularidades no interior do seu volume aparente. Ainda, mostra que a variação espacial do volume irregular é igual a taxa de variação da *fração volumétrica irregular efetiva*.



### 2.6.4 – Conjugação do fluxo de fração volumétrica irregular efetiva com a Rugosidade

A equação (2. 55) pode ser reescrita como:

$$\vec{J}_{\zeta_0} = \frac{d}{d\vec{A}} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_0}. \quad (2. 73)$$

ou

$$\vec{J}_{\zeta_0} = \vec{J}_{\zeta} [\xi]. \quad (2. 74)$$

Esta equação mostra que o fluxo de *fração volumétrica irregular efetiva* projetada está relacionado o fluxo *fração volumétrica irregular efetiva* rugosa a menos do tensor de rugosidade.

### 2.6.5 – Fluxo de Rugosidade e a Equação de Movimento da Rugosidade

De forma análoga à *fração volumétrica irregular efetiva*, é possível imaginar processos, ou fenômenos físicos, em que a *rugosidade* varie com o tempo e com as coordenadas de sua posição. Neste sentido, pode-se definir o fluxo de *rugosidade*, desde que o fenômeno, ou processo, envolvido seja o responsável pela sua geração, formação e transporte, como por exemplo, o processo de amassamento de um material, o processo de fratura, etc. Conforme a Figura - 2. 13, pode-se definir o fluxo de *rugosidade* como sendo:

$$\vec{J}_{\xi} = \frac{d}{d\vec{A}_0} \left( \frac{d[\xi]}{dt} \right). \quad (2. 75)$$

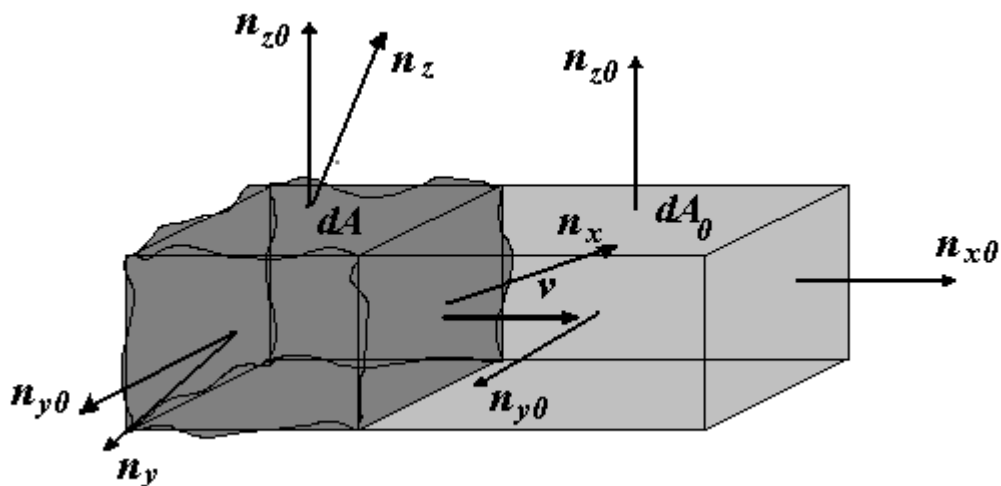


Figura - 2. 13. Fluxo da *fração volumétrica deformada* ou fluxo de *rugosidade* deslocando-se com uma velocidade média  $\vec{v}$  para uma direção.

Trocando a ordem das derivadas tem-se:

$$\vec{J}_\xi = \frac{d}{dt} \left( \frac{d[\xi]}{d\vec{A}_o} \right). \quad (2.76)$$

Usando (2.33) em (2.75), tem-se:

$$\vec{J}_\xi = \frac{d}{dt} [\xi]. \quad (2.77)$$

Por outro lado, integrando-se a equação (2.75) em termos da área projetada  $\vec{A}_o$  obtém-se:

$$\frac{d[\xi]}{dt} = \int \vec{J}_\xi \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.78)$$

Alternativamente, usando a equação (2.33) em (2.78) e integrando em termos da área rugosa real tem-se:

$$\frac{d[\xi]}{dt} = \int [\xi]^{-1} \vec{J}_\xi \cdot d\vec{A}. \quad (2.79)$$

Seguindo manipulações algébricas análogas àquelas apresentadas nas equações (2.58) a (2.66), chega-se a:

$$\nabla \cdot \vec{J}_\xi = \frac{d}{dt} \left( \frac{d[\xi]}{dV_o} \right). \quad (2.80)$$

Observe que o termo dentro do parêntesis em (2.80) é a própria densidade de superfície rugosa. Portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J}_{[\xi]} = \frac{d\rho_{[\xi]}}{dt}. \quad (2.81)$$

Substituindo (2.33) em (2.80) tem-se a equação de movimento do fluxo de *rugosidade*:

$$\nabla \cdot \vec{J}_\xi = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dV_o} \int [\xi] d\vec{A}_o \right). \quad (2.82)$$

Como o lado direito de (2.91) é a própria definição de divergente tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_\xi = \nabla \cdot [\xi]. \quad (2.83)$$

Esta equação representa uma fenomenologia geral de como varia a *rugosidade* com a posição em um meio irregular, sujeito a campos de forças que deslocam sua massa e movimentam suas irregularidades na superfície do seu volume aparente.

### 2.6.6 - Relação da Rugosidade com o Fluxo de Área Rugosa

Ainda, de acordo a Figura - 2.13 pode-se definir o fluxo de área rugosa como:

$$\vec{J}_A = \frac{d}{d\vec{A}_o} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right). \quad (2.84)$$

Trocando a ordem das derivadas tem-se:

$$\vec{J}_A = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{A}}{d\vec{A}_o} \right). \quad (2.85)$$

e usando (2.33) em (2.85) tem-se:

$$\vec{J}_A = \frac{d}{dt} [\xi]. \quad (2.86)$$

Por outro lado, integrando-se a equação (2.84) em termos da área projetada  $\vec{A}_o$  obtém-se:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \int \vec{J}_A \cdot d\vec{A}_o. \quad (2.87)$$

Alternativamente, usando a equação (2.33) em (2.87) e integrando em termos da área rugosa real tem-se:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \int [\xi]^{-1} \vec{J}_A \cdot d\vec{A}. \quad (2.88)$$

Seguindo manipulações algébricas análogas às aquelas apresentadas nas equações (2.58) a (2.66), chega-se a:

$$\nabla \cdot \vec{J}_A = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{A}}{dV_o} \right). \quad (2.89)$$

Observe que o termo dentro do parêntesis em (2.89) é a própria densidade de superfície rugosa. Portanto,

$$\nabla \cdot \vec{J}_A = \frac{d\rho_A}{dt}. \quad (2.90)$$

Substituindo (2.33) em (2.89) tem-se a equação de movimento do fluxo de rugosidade:

$$\nabla \cdot \vec{J}_A = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dV_o} \int [\xi] d\vec{A}_o \right). \quad (2.91)$$

e, como o lado direito de (2.91) é a própria definição de divergente tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_A = \frac{d}{dt} \nabla \cdot [\xi]. \quad (2.92)$$

Ainda a partir de (2.87) tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_A = \nabla \cdot [\dot{\xi}]. \quad (2.93)$$

que corrobora a equação (2.86).

### 2.6.7 – A Equação de Movimento Generalizada

Mantendo-se a relação entre as taxas temporais da grandeza  $X$  inalterada, tem-se:

$$\frac{dX}{dt} = \int \vec{J}_{x_o} d\vec{A}_o = \int \vec{J}_x \cdot d\vec{A}. \quad (2.94)$$

Escreve-se o divergente de uma grandeza  $X$  como sendo:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_o} \equiv \frac{d}{dV_o} \left( \frac{dX}{dt} \right) \quad (2.95)$$

e para um volume irregular como:

$$\nabla \cdot \vec{J}_x \equiv \frac{d}{dV} \left( \frac{dX}{dt} \right). \quad (2.96)$$

Aqui é importante observar como o teorema da divergência pode ser escrito a partir de (2.46) e (2.94) em termos de volumes que envolvem ou não *rugosidades* ou irregularidades fractais, obtendo-se:

$$\int \vec{J}_{x_o} d\vec{A}_o = \int \nabla \cdot \vec{J}_{x_o} dV_o. \quad (2.97)$$

e

$$\int \vec{J}_x \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{J}_x dV. \quad (2.98)$$

Substituindo (2.97) e (2.98) em (2.46) ou (2.94), tem-se:

$$\frac{dX}{dt} = \int \nabla \cdot \vec{J}_{x_o} dV_o = \int \nabla \cdot \vec{J}_x dV. \quad (2.99)$$

Trocando a ordem das derivadas (2.95) e (2.96) pela regra de Schwartz para funções com derivadas contínuas, escreve-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_o} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dV_o} \right). \quad (2.100)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{J}_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dV} \right). \quad (2.101)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) nas equações (2.100) e (2.101), respectivamente, tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{x_o} = \frac{d}{dt} \rho_{x_o}. \quad (2.102)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{J}_x = \frac{d}{dt} \rho_x. \quad (2.103)$$

Escrevendo a equação (2.100) ou (2.102) da continuidade em termos da relação (2.53) e (2.11):

$$\nabla \cdot \left[ \vec{J}_x \frac{dA}{dA_o} (\hat{n} \otimes \hat{n}_o) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right]. \quad (2.104)$$

ou em termos do tensor *rugosidade*  $[\xi]$  dado em (2.33) e da *fração volumétrica irregular efetiva*  $\varsigma$  dada em (2.15) tem-se:

$$\nabla \cdot (\vec{J}_x [\xi]) = \frac{d}{dt} (\rho_x \varsigma). \quad (2.105)$$

Define-se a equação da continuidade na nova roupagem geométrica para várias fenomenologias que dependem de geometrias irregulares. Neste conjunto de fenomenologias estão os fenômenos: da difusão, transferência de calor, escoamento viscoso, deformação de sólidos, mecânica da fratura, eletromagnetismo, etc.

A equação de movimento (2.105) pode ser ainda generalizada, porque as forças de superfície sempre podem ser escritas como divergentes de fluxos, da seguinte forma:

$$\sum \vec{f}_s = \nabla \cdot (\vec{J}_x [\xi]) \quad (2.106)$$

Logo tem-se:

$$\sum \vec{f}_v + \sum \vec{f}_s = \frac{d}{dt} (\rho_x \varsigma) \quad (2.107)$$

onde  $\sum \vec{f}_v$  é a somatória da densidade de forças de volume,  $\sum \vec{f}_s$  é a somatória da densidade das forças de superfície.

Portanto,

$$\sum \vec{f}_v + \nabla \cdot (\vec{J}_x [\xi]) = \frac{d}{dt} (\rho_x \varsigma) \quad (2.108)$$

Esta é uma equação geral para um meio irregular que possui rugosidade e porosidade.

## 2.7 – Equação Constitutiva de Potenciais Vetoriais em termos de geometrias rugosas

### 2.7.1 – Equações Constitutivas e Leis de Fluxos proveniente de Gradientes

Vários fenômenos de transporte em meios contínuos podem ser unificados em equações de potenciais (escalares ou vetoriais) e de fluxos. Entre eles se encontram a Mecânica dos Sólidos,

dos Fluidos e do Calor, Mecânica da Fratura, etc. Essa generalização é devida a J. W. Gibbs, que identificou que vários problemas de transporte podem ser escritos em termos do gradiente de grandezas escalares ou vetoriais juntos com a equação da continuidade. Essa unificação deu avanço à chamada Mecânica do Contínuo e a Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.

Para os propósitos deste trabalho estudou-se como a *rugosidade* influencia nos fenômenos de potencial vetorial como a teoria da elasticidade e a mecânica da fratura, considerando para o problema da elasticidade, de forma geral, a tensão aplicada como um fluxo de momento dado pela Lei de Hooke modificada:

$$\bar{\mathbf{J}}_x = \lambda(\nabla \cdot \rho_x) \mathbf{I} + \frac{\mu}{2}(\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x). \quad (2.109)$$

para a elasticidade e fratura frágil.

No contorno, de forma geral, tem-se:

$$\bar{\mathbf{J}}_x = \frac{d}{d\bar{A}} \left( \frac{dX}{dt} \right). \quad (2.110)$$

### 2.7.2 - Relação entre Rugosidade e fração volumétrica irregular efetiva em Campos Vetoriais

Sabendo-se que o fluxo de uma grandeza que atravessa uma superfície euclidiana pode ser escrito em termos do fluxo dessa mesma grandeza que atravessa uma superfície rugosa da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_{x_o} = \mathbf{J}_x [\xi]. \quad (2.111)$$

então, pela relação de Gibbs para a Lei de Hooke Generalizada tem-se que:

$$\mathbf{J}_{x_o} = \lambda[\nabla \cdot \rho_{x_o}] \mathbf{I} + \frac{\mu}{2}[\nabla \rho_{x_o} + \nabla^T \rho_{x_o}]. \quad (2.112)$$

e, conseqüentemente

$$\mathbf{J}_x = \lambda[\nabla \cdot \rho_x] \mathbf{I} + \frac{\mu}{2}[\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x]. \quad (2.113)$$

Como as densidades são dadas por

$$\rho_o = \rho \xi. \quad (2.114)$$

logo, substituindo (2.112) e (2.113) em (2.111), tem-se:

$$\lambda[\nabla \cdot \rho_{x_o}] \mathbf{I} + \frac{\mu}{2}[\nabla \rho_{x_o} + \nabla^T \rho_{x_o}] = \lambda[\nabla \cdot \rho_x] \mathbf{I} [\xi] + \frac{\mu}{2}[\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x] [\xi]. \quad (2.115)$$

o que resulta que:

$$\nabla \rho_{x_0} = \nabla \rho_x [\xi]. \quad (2.116)$$

e

$$\nabla \cdot \rho_{x_0} \mathbf{I} = \nabla \cdot \rho_x [\xi]. \quad (2.117)$$

Usando-se (2.114) em (2.116) tem-se:

$$\nabla(\rho_x \zeta) = \nabla \rho_x [\xi]. \quad (2.118)$$

e usando-se (2.114) em (2.117)

$$\nabla \cdot (\rho_x \zeta) \mathbf{I} = \nabla \cdot \rho_x [\xi]. \quad (2.119)$$

Logo, desenvolvendo-se o operador diferencial em (2.118) tem-se:

$$\zeta \nabla \rho_x + \rho_x \nabla \zeta \mathbf{I} = \nabla \rho_x [\xi]. \quad (2.120)$$

e desenvolvendo (2.119) obtém-se:

$$\zeta \nabla \cdot \rho_x + \rho_x \nabla \zeta = \nabla \cdot \rho_x [\xi]. \quad (2.121)$$

ou, reescrevendo (2.120), tem-se:

$$(\zeta \mathbf{I} - [\xi]) \nabla \rho_x = \rho_x \cdot \nabla \zeta \quad (2.122)$$

Considerando-se em (2.122) o caso em que:

$$\rho_x \cdot \nabla \zeta = 0. \quad (2.123)$$

então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \rho_x &= 0 \\ \text{ou} & \quad . \\ \zeta \mathbf{I} &= [\xi] \end{aligned} \quad (2.124)$$

Portanto, deve-se considerar apenas uma das situações em (2.124). Seguindo, então, com a escolha de  $\nabla \cdot \rho_x = 0$ , tem-se:

$$\frac{\nabla \rho_x}{\rho_x} = (\zeta \mathbf{I} - [\xi])^{-1} \nabla \zeta. \quad (2.125)$$

e sabendo-se que:

$$\begin{aligned} d\rho_x &= \nabla \rho_x \cdot \hat{s} ds \\ &= \|\nabla \rho_x\| (\hat{n} \cdot \hat{s}) ds \end{aligned} \quad (2.126)$$

vem

$$\frac{d\rho_x}{\rho_x} = (\zeta \mathbf{I} - [\xi])^{-1} \nabla_{\zeta} \cdot \hat{s} ds. \quad (2.127)$$

Integrando, tem-se:

$$\ln\left(\frac{\rho_x}{\rho_x^*}\right) = \int (\zeta \mathbf{I} - [\xi])^{-1} \nabla_{\zeta} \cdot \hat{s} ds. \quad (2.128)$$

onde  $\rho_x^*$  é uma densidade de referência da grandeza  $X$ .

Portanto, exponenciando (2.128) tem-se:

$$\rho_x = \rho_x^* \exp\left[\int (\zeta \mathbf{I} - [\xi])^{-1} \nabla_{\zeta} \cdot \hat{s} ds\right]. \quad (2.129)$$

Este resultado mostra uma relação entre a densidade real e a aparente em termos dos parâmetros de *porosidade* e do tensor de *rugosidade*. Esta relação não depende do sistema de coordenadas. Observa-se que se não houver *rugosidade* na superfície do sistema considerado mas *porosidade* no volume, tem-se que:

$$\rho_x = \rho_x^* \exp\left[\int \frac{\nabla_{\zeta} \cdot \hat{s}}{\zeta} ds\right]. \quad (2.130)$$

ou

$$\rho_x = \rho_x^* \exp\left[\int \frac{d\zeta}{\zeta}\right]. \quad (2.131)$$

e

$$\rho_x = \rho_x^* \exp\left[\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta^*}\right)\right]. \quad (2.132)$$

Logo:

$$\rho_x = \rho_x^* \left(\frac{\zeta}{\zeta^*}\right). \quad (2.133)$$

Este é um resultado conhecido, que define a relação entre *porosidade* e densidade real e aparente.

## 2.8 – A Equação do Campo Contínuo com Irregularidades

### 2.8.1 - Modificação da Equação Constitutiva de Potenciais Vetoriais – Caso Elástico

Robert Hooke descobriu a relação entre tensão e deformação de um material elástico. Na versão generalizada de sua lei para o campo de tensão-deformação para meios irregulares na perspectiva da projeção euclidiana plana deve-se ter:



$$\vec{J}_{x_0} = \lambda (\nabla \cdot \rho_{x_0}) \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_{x_0} + \nabla^T \rho_{x_0}). \quad (2.134)$$

Com a adição da rugosidade, tem-se:

$$\vec{J}_{x_0} = \lambda \nabla \cdot \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) + \nabla^T \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) \right]. \quad (2.135)$$

Explicitando a operação do gradiente sobre os termos entre parêntesis, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{x_0} = & \lambda \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \cdot \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right] \mathbf{I} + \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.136)$$

ou seja, a equação do fluxo de campo escalar com irregularidades atuante no volume poroso:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{x_0} = & \lambda [\zeta \nabla \cdot \rho_x + \rho_x \cdot \nabla \zeta] \mathbf{I} + \\ & + \frac{\mu}{2} [\zeta \nabla \rho_x + \rho_x \nabla \zeta + \zeta \nabla^T \rho_x + \rho_x \nabla^T \zeta]. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Reorganizando os termos dessa equação, tem-se:

$$\vec{J}_{x_0} = \zeta \underbrace{\left[ \lambda (\nabla \cdot \rho_x) \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right]}_{\text{Energética}} + \rho_x \underbrace{\left[ \lambda (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} (\nabla \zeta + \nabla^T \zeta) \right]}_{\text{Geométrica}}. \quad (2.138)$$

ou, para superfícies rugosas:

$$\vec{J}_{x_0} = \left( \lambda \nabla \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) [\xi]. \quad (2.139)$$

Neste conjunto de fenomenologias que seguem a equação da continuidade estão os fenômenos do escoamento viscoso, a deformação de sólidos, mecânica da fratura, eletromagnetismo, etc.

### 2.8.2 - Proposta de uma equação para o potencial vetorial com irregularidades para a teoria da elasticidade

Para se escrever uma equação de movimento para o campo elástico com irregularidades, pode-se partir da equação (2.16) em (2.134) ou (2.137) e (2.16) em (2.102) e (2.105) e obter:

$$\nabla \cdot \left[ \left( \lambda \nabla \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) [\xi] \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta). \quad (2.140)$$

Alternativamente substituindo (2.134) e (2.11) em (2.102) tem-se:

$$\nabla \cdot \left\{ \lambda \nabla \cdot \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) + \nabla^T \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right). \quad (2.141)$$

Desenvolvendo os operadores internos a partir de da equação (2.141), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left\{ \lambda \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right] \right\} + \\ & + \nabla \cdot \left\{ \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Para  $\lambda, \mu = cte$  tem-se:

$$\begin{aligned} & \lambda \nabla \cdot \left[ \nabla \cdot \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right] + \\ & + \frac{\mu}{2} \nabla \cdot \left[ \nabla \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \nabla^T \rho_x \left( \frac{dV}{dV_o} \right) + \rho_x \nabla^T \left( \frac{dV}{dV_o} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left( \rho_x \frac{dV}{dV_o} \right) \end{aligned} \quad (2.143)$$

Executando o cálculo do gradiente e do Laplaciano com irregularidades no domínio tem-se:

$$\begin{aligned} & \lambda \left[ \nabla^2 \rho_x \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) \right] + \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) \zeta + 2 \nabla \rho_x \nabla \zeta + \nabla^{2T} \rho_x \zeta + 2 \nabla^T \rho_x \nabla^T \zeta + \rho_x \nabla^{2T} \zeta \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \end{aligned} \quad (2.144)$$

ou

$$\begin{aligned} & \lambda \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) \right] + \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ \zeta \nabla \cdot (\nabla \rho_x) + 2 \nabla \rho_x \nabla \zeta + \rho_x \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \zeta \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x) + \right. \\ & \left. \nabla^T \rho_x \nabla \zeta + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta + \rho_x \nabla \cdot \nabla^T \zeta \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \end{aligned} \quad (2.145)$$

Agrupando em termos semelhantes tem-se:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\{ \lambda \nabla^2 \rho_x + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x) \right] \right\}}_{\text{Energética}} \zeta + \underbrace{\left\{ \lambda \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} \left[ \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \nabla \cdot (\nabla^T \zeta) \right] \right\}}_{\text{Geométrica}} \rho_x + \\ & + \underbrace{2 \lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \mu \left( \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta \right)}_{\text{Termos de Interação}} = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta) \end{aligned} \quad (2.146)$$

Esta é uma proposta de equação de movimento para um meio elástico com irregularidades na qual foi utilizada a equivalência entre a rugosidade e a *fração volumétrica irregular efetiva* dada em (2.15) para descrever o potencial vetorial  $\rho_x$  na superfície do material.

Observe que a parte energética possui forma análoga à parte geométrica, ou seja, isoladamente as soluções são análogas, a menos do termo de interação. É certo que a solução de

uma equação do tipo mostrada em (2. 146) é muito complexa, por isso torna-se necessário recorrer a métodos alternativos ou aproximados. Uma das alternativas é acrescentar correções do termo de porosidade ponto a ponto no domínio a partir da solução primitiva sem irregularidades (problema euclidiano), ou seja, corrige-se a solução do problema elástico sem irregularidades acrescentando-se termos de correções ponto a ponto no domínio para se obter a solução com irregularidades. Outra alternativa é corrigir a solução sem irregularidades com modelos geométricos fractais desde que a geometria do problema seja fractal para que possa aceitar tais correções.

Para o caso estático tem-se  $d(\rho_x \zeta) / dt = 0$ , logo:

$$\left\{ \lambda \nabla^2 \rho_x + \frac{\mu}{2} [\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)] \right\} \zeta + \left\{ \lambda \nabla \cdot (\nabla \zeta) + \frac{\mu}{2} [\nabla \cdot (\nabla \zeta) + \nabla \cdot (\nabla^T \zeta)] \right\} \rho_x + 2\lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \mu (\nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta + \nabla \cdot \rho_x \nabla^T \zeta) = 0 \quad (2. 147)$$

A título de exemplo de solução numérica de problemas com irregularidades apresenta-se na Figura - 2. 14 abaixo a solução numérica de um problema de potencial escalar com irregularidades definidas aleatoriamente no domínio, através da “equação de Laplace” com irregularidades:

$$\nabla^2 \rho_x \zeta + \nabla \cdot (\nabla \zeta) + 2 \nabla \cdot \rho_x \nabla \zeta = 0. \quad (2. 148)$$

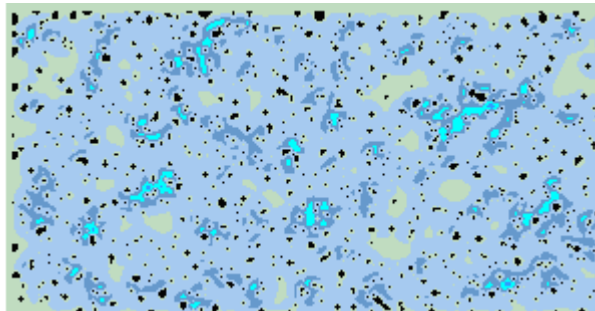


Figura - 2. 14. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio

### 2.8.3 - Equação do Potencial Vetorial para as Superfícies Rugosas

Para se escrever uma equação de movimento para o campo elástico com irregularidades, pode-se substituir a equação (2. 139) em (2. 105) e obter:

$$\nabla \cdot \left[ \left( \lambda \nabla \cdot \rho_x + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) [\xi] \right] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta). \quad (2. 149)$$

Logo

$$\begin{aligned}
& [\xi] \nabla (\lambda \nabla \cdot \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \nabla \cdot [\xi] + [\xi] \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) \\
& + \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \nabla \cdot [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Ou reescrevendo (2.150) tem-se:

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \nabla (\lambda \nabla \cdot \rho_x) + \nabla \cdot \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) \right) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla \cdot [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{2.151}$$

E finalmente

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \lambda \nabla (\nabla \cdot \rho_x) + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla \cdot [\xi] = \frac{d}{dt} (\rho_x \zeta)
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Esta é uma proposta de equação de movimento para um meio elástico com rugosidades na superfície.

Para o caso estático tem-se  $d(\rho_x \zeta) / dt = 0$ , logo:

$$\begin{aligned}
& [\xi] \left[ \lambda \nabla (\nabla \cdot \rho_x) + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) \right] + \\
& + \left[ \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right] \nabla \cdot [\xi] = 0
\end{aligned} \tag{2.153}$$

Reescrevendo essa equação tem-se:

$$\frac{\lambda \nabla (\nabla \cdot \rho_x) + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x))}{\frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x} + \frac{\nabla \cdot [\xi]}{[\xi]} = 0. \tag{2.154}$$

O que resulta em duas equações separadas:

Uma para problema elástico sem rugosidade

$$\lambda \nabla (\nabla \cdot \rho_x) + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot (\nabla \rho_x) + \nabla \cdot (\nabla^T \rho_x)) - \left( \frac{\mu}{2} (\nabla \rho_x + \nabla^T \rho_x) + \lambda \nabla \cdot \rho_x \right) \vec{k} = 0. \tag{2.155}$$

e outra apenas para a rugosidade:

$$\nabla \cdot [\xi] + [\xi] \vec{k} = 0. \tag{2.156}$$

É possível que de uma forma geral o termo  $\vec{k}$  seja uma função da densidade generalizada  $\rho_x$ ; assim, tem-se:

$$\vec{k} = f(\vec{\rho}_x). \quad (2.157)$$

Pode-se mostrar, matematicamente, que problemas que apresentam apenas rugosidade na superfície com interior do domínio sólido podem ser resolvidos apenas com funções de correção geométrica, como no caso de uma trinca rugosa como será mostrado mais adiante nos resultados.

A solução da equação (2.156) é do tipo:

$$[\xi] = [\xi]_0 \exp(-k \cdot \vec{r}_n). \quad (2.158)$$

Isto significa que o efeito da rugosidade sobre o campo do potencial em questão é atenuado exponencialmente à medida que um observador se afasta da borda rugosa ( $\vec{r}_n = 0$ ) para o interior do domínio do campo ( $\vec{r}_n \rightarrow \infty$ ), onde  $\vec{r}_n$  é o raio vetor tomado na direção normal a cada ponto sobre a superfície rugosa.

Como solução pode-se ter uma combinação linear de soluções linearmente independentes dadas por uma transformada (tipo Fourier ou Laplace), gerando soluções do tipo de auto-funções L.I, dadas por:

$$[\xi] = \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot \vec{r}_n). \quad (2.159)$$

#### 2.8.4 – Solução das Equações do Potencial Vetorial com Irregularidades

Para solucionar parte dessa equação, deve-se considerar a equivalência entre a rugosidade superficial e a *fração volumétrica irregular efetiva* mostrada na equação (2.125) representada a seguir:

$$\frac{\nabla \rho_x}{\rho_x} = (\varsigma \mathbf{I} - [\xi])^{-1} \nabla \varsigma. \quad (2.160)$$

Considerando que a rugosidade possui uma dependência dada por (2.156) pode-se utilizar essa dependência da seguinte forma:

$$\frac{\nabla \cdot [\xi]}{[\xi]} \rightarrow \vec{k} = -[\xi]^{-1} \nabla \cdot [\xi]. \quad (2.161)$$

Supõe-se que de forma análoga à rugosidade, a densidade do potencial  $\rho_{x0}$  também se comporta da seguinte forma:

$$\frac{\nabla \rho_x}{\rho_x} \rightarrow \vec{k} = -\rho_x^{-1} \nabla \rho_x. \quad (2.162)$$

Logo, substituindo (2.160) em (2.162) tem-se:

$$\nabla_{\zeta} + (\zeta \mathbf{I} - [\xi]) \vec{k} = 0. \quad (2.163)$$

ou

$$\nabla_{\zeta} + \zeta \mathbf{I} \vec{k} = [\xi] \vec{k}. \quad (2.164)$$

Usando o resultado (2.158) tem-se:

$$\nabla_{\zeta} + \zeta \mathbf{I} \vec{k} = \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot \vec{r}_n) \vec{k}. \quad (2.165)$$

Aplicando a técnica do fator integrante tem-se:

$$\exp(\vec{k} \cdot \vec{r}) \nabla_{\zeta} + \exp(\vec{k} \cdot \vec{r}) \zeta \mathbf{I} \vec{k} = \exp(\vec{k} \cdot \vec{r}) \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot \vec{r}_n) \vec{k} \triangleright. \quad (2.166)$$

onde pode-se reescrever o lado esquerdo e o lado direito como:

$$\nabla \left[ \exp(\vec{k} \cdot \vec{r}) \zeta \right] = \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot (\vec{r}_n - \vec{r})) \vec{k}. \quad (2.167)$$

ou ainda integrando-se dos dois lados tem-se:

$$\exp(\vec{k} \cdot \vec{r}) \zeta = \int \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot (\vec{r}_n - \vec{r})) \vec{k} \cdot d\vec{r}. \quad (2.168)$$

Logo o efeito da *fração volumétrica irregular efetiva* sobre o campo pode ser expressa como:

$$\zeta = \exp(-\vec{k} \cdot \vec{r}) \int \sum_k [\xi]_k \exp(-\vec{k}(\vec{\rho}_x) \cdot (\vec{r}_n - \vec{r})) \vec{k} \cdot d\vec{r}. \quad (2.169)$$

Observe que a integral no lado direito corresponde a uma das representações da função delta de Dirac, se os limites de integração envolvem um domínio que vai desde  $[-\infty, +\infty]$ . Integrando-se a equação (2.169) de uma forma geral a solução da equação será:

$$\zeta = \sum_k \zeta_k \exp(-\vec{k} \cdot \vec{r}_n). \quad (2.170)$$

Este resultado mostra que, assim como a rugosidade, o efeito da *fração volumétrica irregular efetiva* sobre o campo se evanesce exponencialmente à medida que se afasta da periferia da irregularidade de domínio (poro) na direção de regiões regulares.

### 2.8.5 – Solução das Equações do Fluxo Vetorial com Irregularidades

Reescrevendo (2.155) em função de (2.113) ou de (2.134) tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{J}_x + \vec{k} \cdot \vec{J}_x = 0. \quad (2.171)$$

De forma análoga a (2.156) e (2.158) tem-se:

$$\frac{\nabla \cdot \vec{J}_x}{\vec{J}_x} = -\vec{k}. \quad (2.172)$$

logo

$$\vec{J}_x = \sum_k \vec{J}_k \exp(-\vec{k} \cdot \vec{r}_n). \quad (2.173)$$

Pode-se reescrever o produto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  na superfície como sendo:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_n = -([\xi]^{-1} \nabla \cdot [\xi]) \cdot \vec{r}_n. \quad (2.174)$$

Observe que o inverso do tensor de rugosidade  $[\xi]^{-1}$  aparece no expoente operando sobre um vetor  $\nabla \cdot [\xi]$  o qual seleciona na operação do divergente apenas as componentes nas direções normais ou puras, evitando as direções “cisalhantes” (fora da diagonal do tensor de 2ª ordem) onde se mistura a influência das componentes normais do tensor de rugosidade  $[\xi]$ . Com isso, observa-se que, se o vetor  $\vec{k}$  for nulo obtém-se de volta o problema euclidiano de superfície lisa.

Pode-se prever a partir dos resultados obtidos aqui que a rugosidade não irá influenciar o campo se este acontecer na direção perpendicular à direção normal da superfície rugosa; por exemplo, na elasticidade, o campo  $\sigma_{yy}$  não é afetado pela rugosidade na direção normal ao raio de curvatura da ponta da trinca, conforme ilustra a Figura - 2. 15.

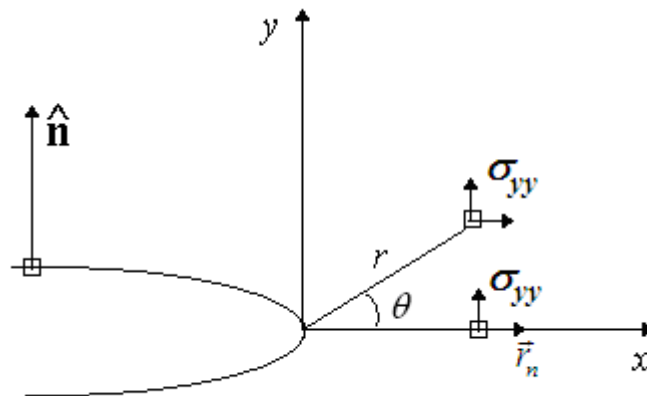


Figura - 2. 15. Representação do campo de tensão  $\sigma_{yy}$  a uma distância  $\vec{r}$  da ponta da trinca.

## 2. 9 – Resultados Numéricos – Campo de Tensões em uma Análise de Fratura

Apresenta-se nesta secção a simulação do campo de tensão estático na ponta de uma trinca rugosa utilizando-se o código MEF denominado FRANC2D (Cornell University). Analisou-se o efeito da *rugosidade* sobre esse campo variando-se parâmetros como o comprimento da trinca, a rugosidade e o raio de curvatura para verificar a validade das soluções analíticas obtidas nas secções 2.8.3, 2.8.4 e 2.8.5. As condições de restrição foram aplicadas de tal forma que a borda direita de cada corpo simulado foi fixada nas direções (X,Y), conforme mostra Figura - 2. 16. O carregamento foi aplicado sobre a borda superior e inferior do lado esquerdo do corpo proporcionalmente ao comprimento da trinca, mantendo-se a mesma tensão), conforme mostra Figura - 2. 16.

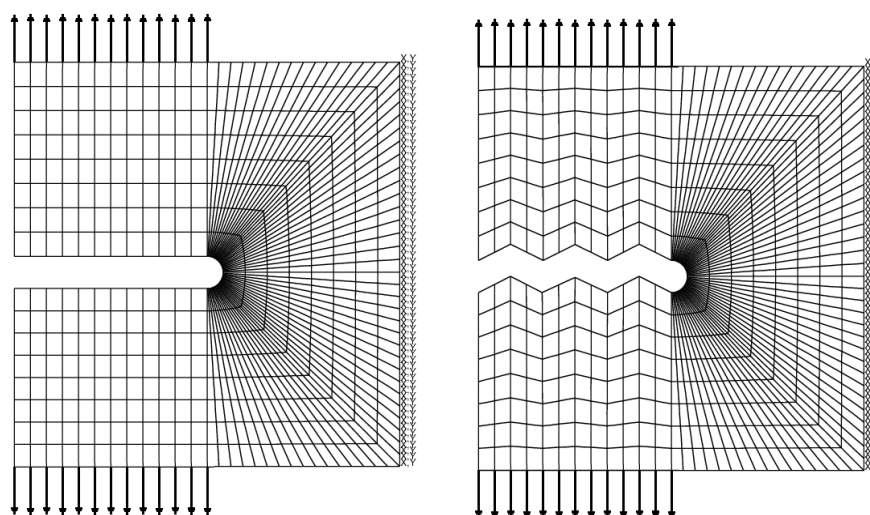


Figura - 2. 16. Condições de contorno e carregamento aplicado a malha de simulação de uma placa com uma trinca de comprimento variável, válida tanto para o caso liso como rugoso.

### 2.9.1 – Campo ao redor de uma trinca com comprimento $L_0 = 2,4,6,8,10,12$ : Modo I de Carregamento

A Figura - 2. 17 mostra o aspecto das malhas utilizadas na solução do problema do campo de tensão elástico linear em um corpo com geometria CT. O aspecto de montagem das malhas foi mantido dentro de um mesmo padrão para que pudesse ser feita uma comparação tanto visual quanto numérica dos resultados. Observa-se que os elementos ao redor da ponta do entalhe são mais concentrados para retratar melhor as sensíveis variações do campo nessa região. O comprimento projetado do entalhe rugoso foi feito propositalmente igual ao comprimento do



entalhe liso para que o efeito da rugosidade do entalhe fosse evidente de forma comparativa com o entalhe liso.

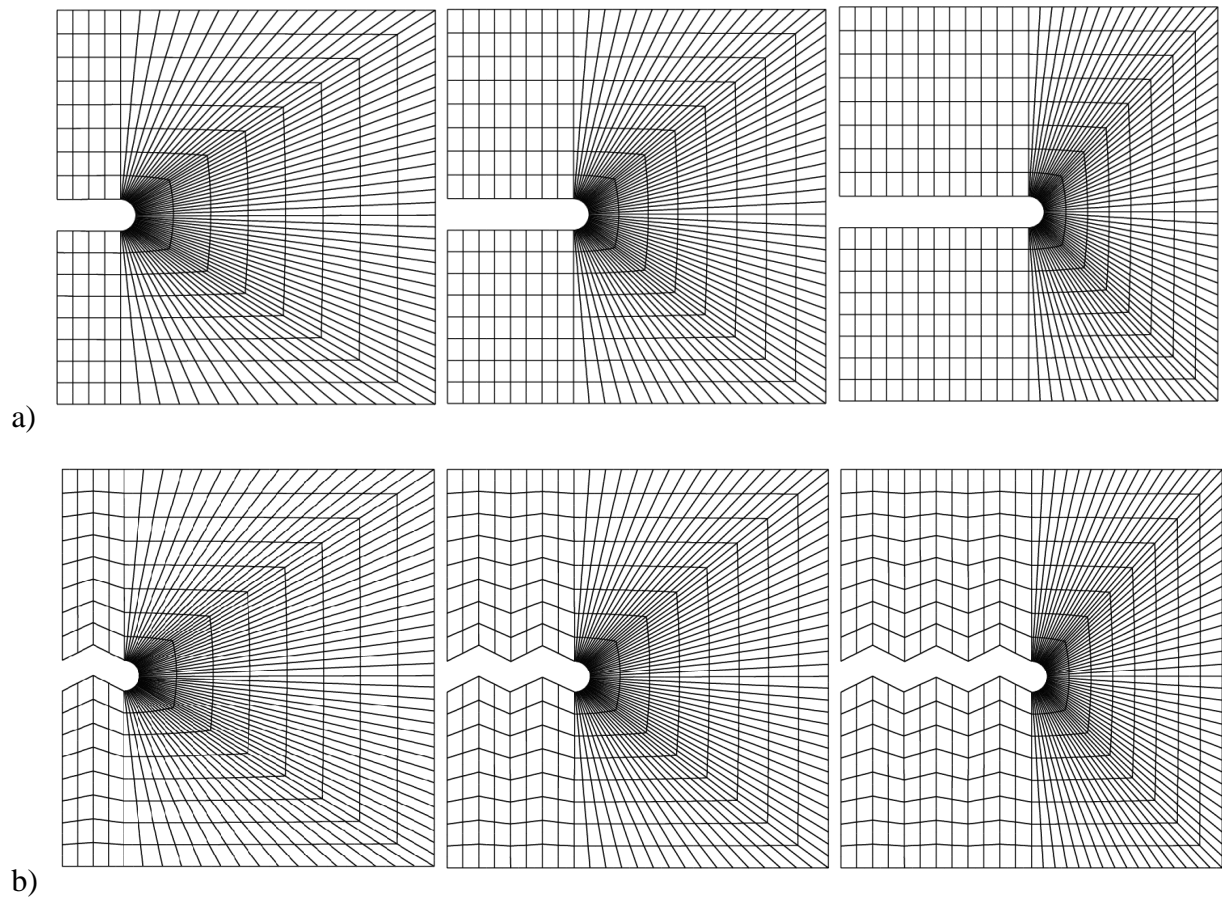


Figura - 2. 17. Malha de simulação de uma placa com uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa.

Observa-se na Figura - 2. 18 o avanço da componente  $\sigma_{xx}$  do campo de tensão ao redor de um entalhe com o seu comprimento, para uma geometria de entalhe liso e rugoso. À medida que o comprimento do entalhe aumenta, observa-se que o tamanho da região de concentração de tensão ao redor do entalhe diminui, tanto para a situação de geometria lisa como rugosa. Os aspectos da componente do campo de tensão  $\sigma_{xx}$  nas situações de entalhe liso e rugoso são muito parecidos. Contudo, observam-se pequenas deformações no aspecto desse campo quando se compara com a situação de entalhe rugoso com a situação de entalhe liso, conforme mostra o detalhe da Figura - 2. 18.

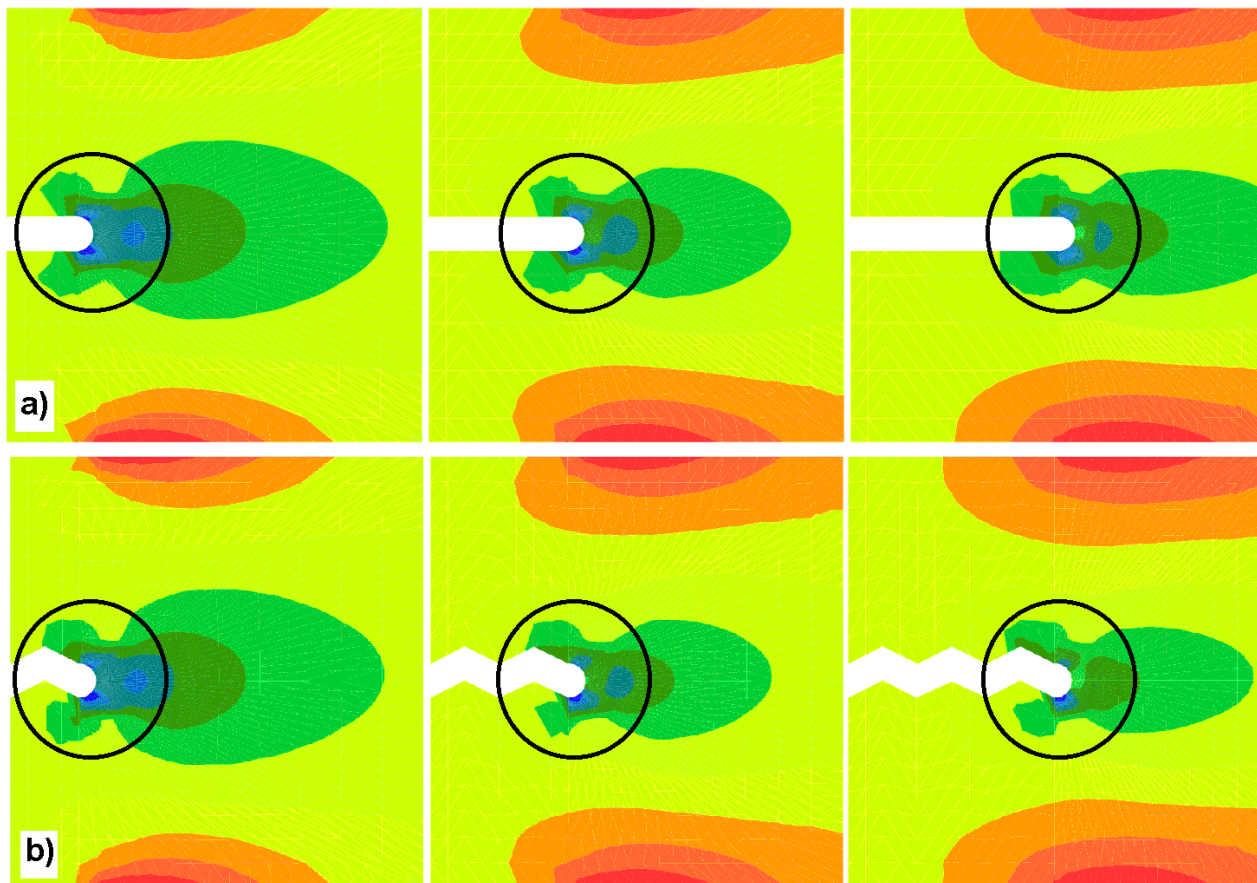


Figura - 2. 18. Campo de Tensão  $\sigma_{xx}$  ao redor de uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa.

Observa-se a partir da Figura - 2. 18 que o campo de tensão em torno da trinca rugosa não é simétrico, ou seja, campos paralelos à propagação da trinca, como as tensões  $\sigma_{xx}$ , são mais afetados pela rugosidade da trinca. O carregamento simétrico produz campo simétrico. Contudo, como a rugosidade de uma face da trinca é a complementar da outra, observa-se uma ligeira assimetria do campo em relação a uma linha horizontal passando pelo meio da placa. Observações semelhantes foram verificadas com a componente de tensão

Na Figura - 2. 19 mostra-se o aspecto geral da componente  $\sigma_{yy}$  do campo de tensão ao redor de um entalhe liso e rugoso à medida que aumenta o seu comprimento. Essa componente do campo de tensão é responsável pelo crescimento da trinca para essa configuração de ensaio (geometria do corpo e carregamento) simulado nessa figura. Contudo, a rugosidade da trinca que fica atrás da região de concentração do campo de tensão parece ter pouca ou quase nenhuma influência sobre essa componente do campo que está à frente do entalhe, conforme era esperado segundo a análise efetuada na secção 2.8.5.

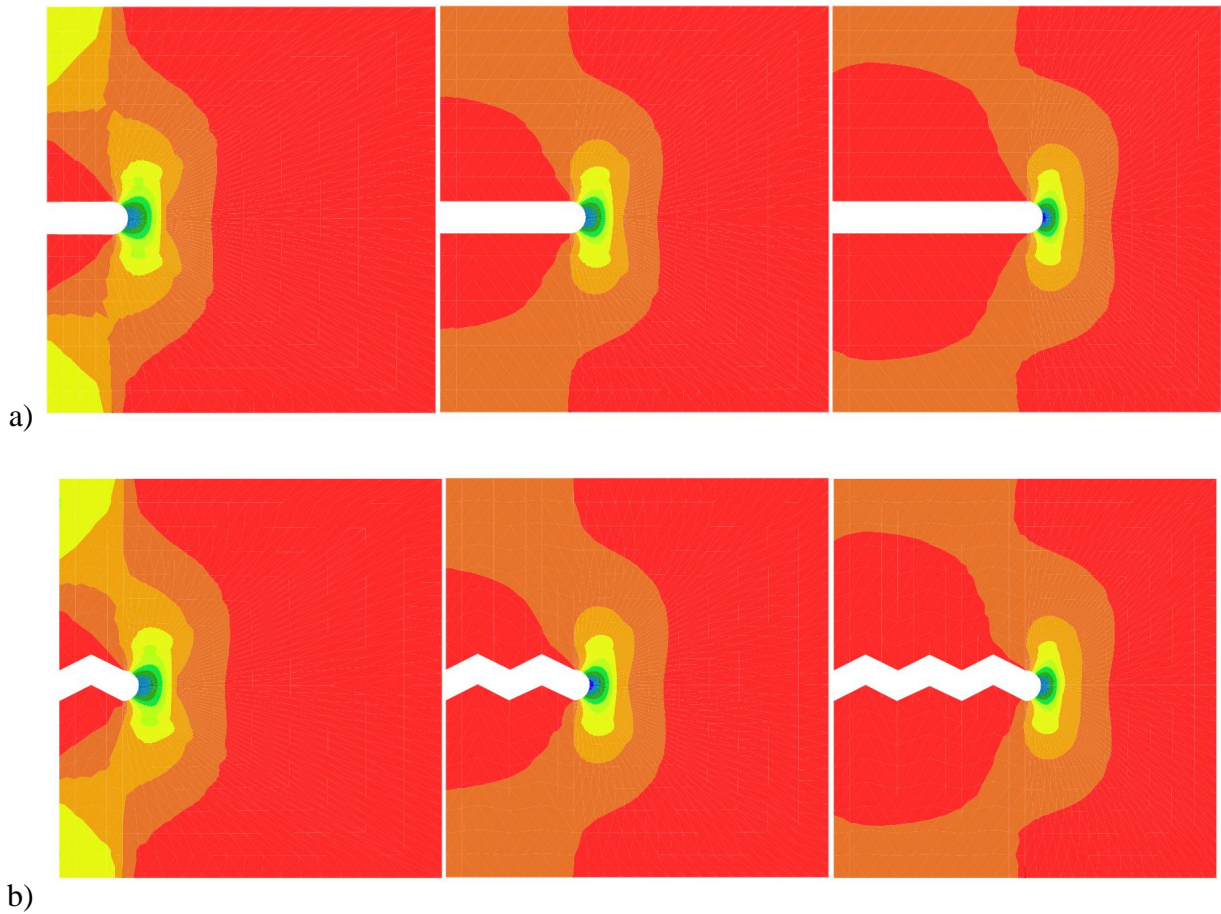


Figura - 2. 19. Campo de Tensão  $\sigma_{yy}$  ao redor de uma trinca de comprimento 4,8,12; a) trinca lisa b) trinca rugosa.

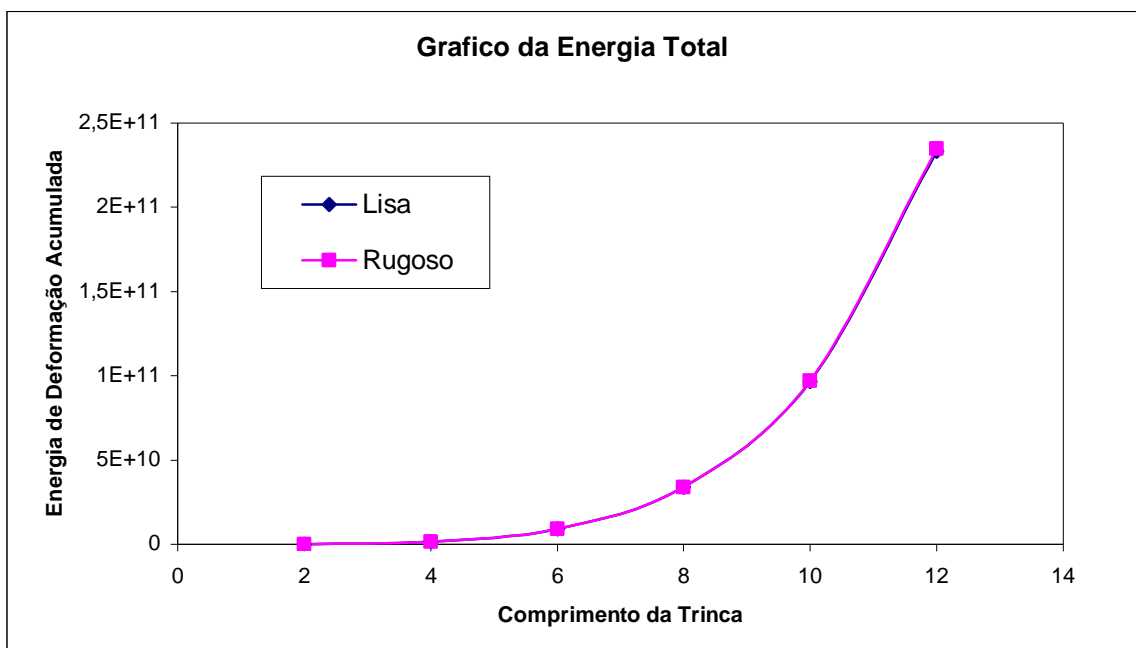


Figura - 2. 20. Energia total de deformação  $U_L$  em função do comprimento de uma trinca lisa e rugosa.

Os dados obtidos da energia total de deformação em função do comprimento da trinca

foram lançados no gráfico mostrado na Figura - 2. 20.

Simulou-se o campo de tensão estático ao redor de uma trinca lisa e rugosa. O gráfico da Figura - 2. 20 mostra que houve nenhuma diferença entre os valores da energia total de deformação em função do comprimento de uma trinca para uma placa contendo uma trinca lisa ou rugosa. Este resultado mostra que a rugosidade precisa ser considerada no processo de propagação para poder se evidenciar o seu efeito no campo de tensão na frente da trinca e, conseqüentemente, na energia de fratura.

Conclusões semelhantes foram obtidas ao se variar a rugosidade ou o raio de curvatura da ponta da trinca.

### 2.9.2 - Análise comparativa entre os campos liso e rugoso

Nesta secção apresenta-se uma análise comparativa entre os aspectos gerais do campo de tensão ao redor de uma trinca lisa e rugosa.

Para se fazer uma comparação quantitativa entre os campos de tensão liso e rugoso nas mesmas condições de carregamento e material analisou-se os valores desse campo ao longo de uma linha perpendicular ao comprimento da trinca próxima à ponta da trinca na região inferior e superior na Figura - 2. 21. Os resultados da análise de intensidade do campo ao longo dessas linhas são mostrados nas Figura - 2. 22 e Figura - 2. 23.

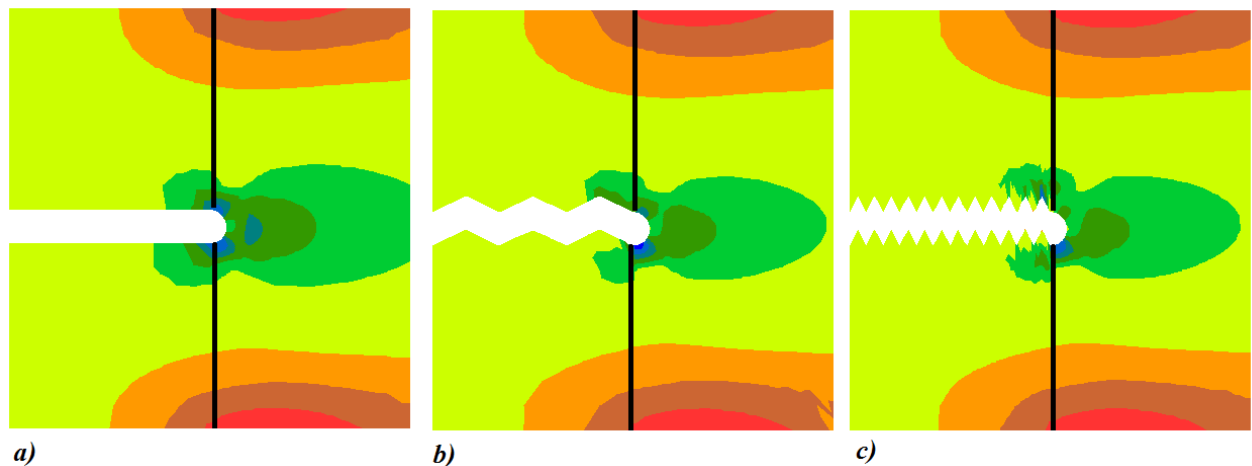


Figura - 2. 21. Campos de tensão  $\sigma_{xx}$  para corpos com comprimento  $L_0 = 12$  e raio de curvatura da trinca  $\rho = 2$ ; a) liso; b) rugosidade 2 c) rugosidade 0,5.

A Figura - 2. 21 mostra que quanto mais rugosa é a trinca mais perturbado será o campo de tensão. Contudo, deve-se observar que, além da perturbação proveniente da rugosidade da trinca, há também uma flutuação nos valores de intensidade do campo em função das coordenadas próximas à rugosidade devida a erros numéricos de aproximação. Pois os elementos nas regiões próximas à trinca rugosa são mais deformados e, por isso, as funções de interpolação dentro desses

elementos apresentam maiores erros de aproximação.

Na Figura - 2. 22 e na Figura - 2. 23 mostra-se que a rugosidade de uma trinca insere na componente  $\sigma_{xx}$  do campo de tensão uma perturbação do tipo oscilação amortecida. Isto já havia sido previsto nas soluções analíticas do campo de tensão elástica com rugosidade apresentadas nas secções 2.8.3, 2.8.4 e 2.8.5.

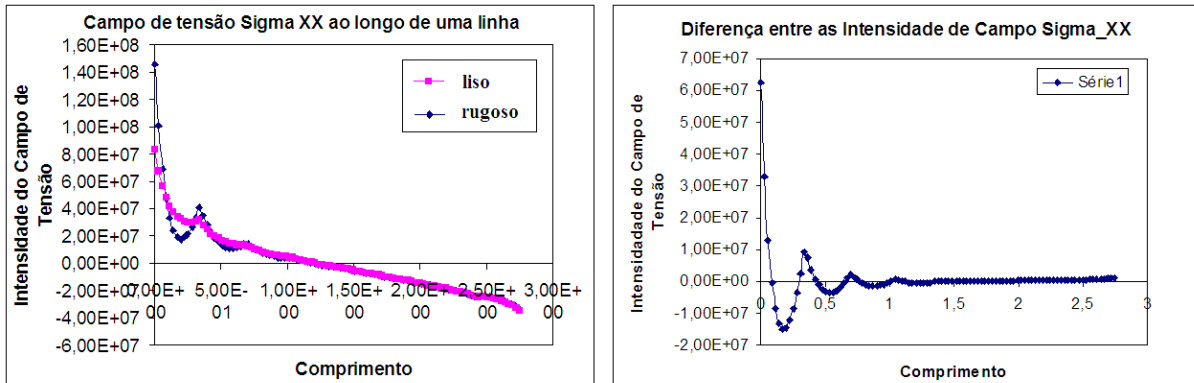


Figura - 2. 22. Diferença da Intensidade do campo  $\sigma_{xx}$  para uma linha inferior perpendicular à trinca.

A solução analítica apresentada nas secções 2.8.3, 2.8.4 e 2.8.5 previa que a rugosidade perturbaria o campo de tensão de forma exponencial por meio de um “vetor de onda”  $\vec{k}$  cuja natureza era desconhecida. Nesse capítulo observa-se por meios dos resultados mostrados na Figura - 2. 22 e na Figura - 2. 23 que esse vetor de onda  $\vec{k}$  pode ser até mesmo complexo, para poder dar origem a um resultado “oscilatório amortecido” como este. Isto porque a solução desses campos carrega as informações de um mapeamento conforme oscilatório na região da rugosidade quando comparado com o campo do entalhe liso.

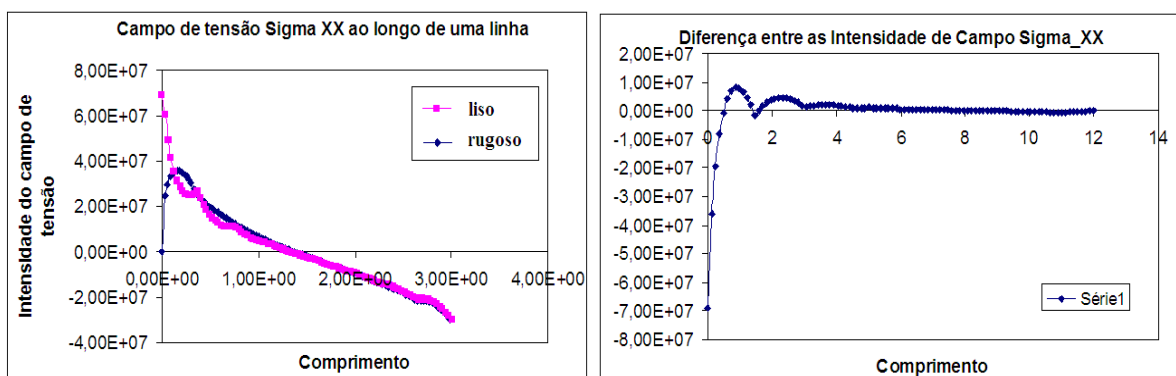


Figura - 2. 23. Diferença da Intensidade do campo  $\sigma_{xx}$  para uma linha superior perpendicular à trinca.

Uma vez que as rugosidades simuladas estão atrás da ponta da trinca longe da região onde ocorre o campo de tensão mais intenso, essa rugosidade só pode influenciar o campo de tensão  $\sigma_{xx}$  se esta acontecer na direção paralela ao comprimento da trinca e para a tensão  $\sigma_{yy}$  a

rugosidade só vai influenciar eficientemente o campo se ela acontecer na ponta de uma trinca. A solução, portanto, é inserir irregularidades numa região muito próxima da ponta da trinca.

### 2.9.3 - Aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca em um meio irregular

Simulações preliminares, realizadas por Chiquito (2010) utilizando-se Elementos Finitos pelo código do programa ANSYS® com uma trinca elíptica com rugosidade senoidal em toda a trinca incluindo a região da ponta, mostraram uma modificação no aspecto do campo de tensões. Resultados preliminares desse estudo numérico, para o problema elástico sem propagação de trinca, mostraram que o campo de tensão na ponta do entalhe possui uma dependência assintótica com a posição  $r$  na frente da trinca que varia desde um valor  $\alpha$  máximo que depende do material até um valor  $\alpha$  mínimo igual a  $1/2$ , que corresponde ao valor clássico. Ou seja, esse estudo preliminar mostra que a singularidade do campo de tensão na ponta da trinca varia como se fosse um multifractal, no qual não há um único expoente fractal na ponta da trinca, mas este expoente varia com a posição  $r$ .

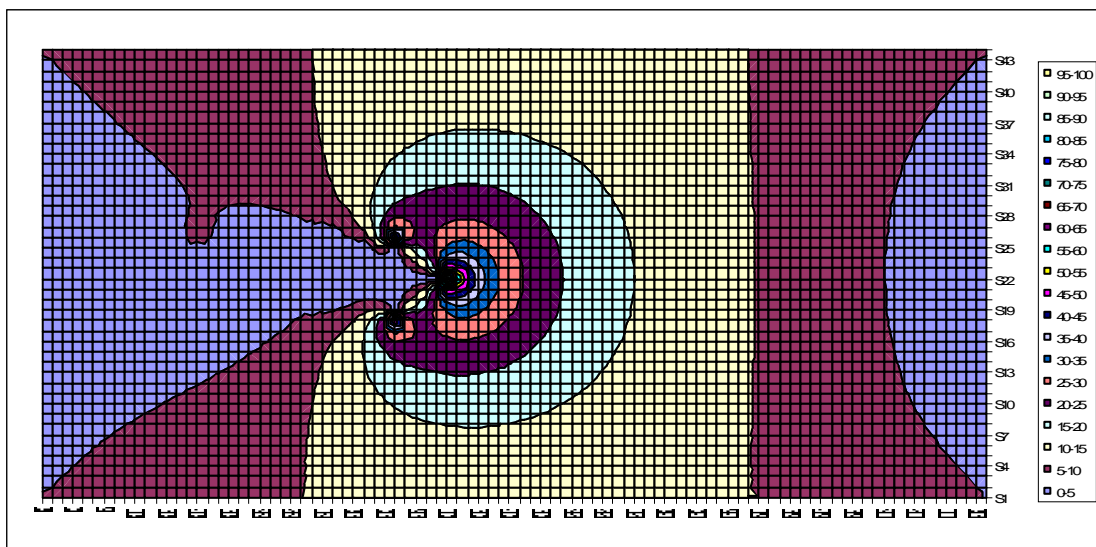


Figura - 2.24. Exemplo preliminar de pontas de *rugosidade* penetrando em regiões intensas da vizinhança de um campo escalar ou vetorial de tensão da ponta principal simulado com Diferenças Finitas para em um campo escalar.

Como um estudo preliminar dos campos com geometrias irregulares, simulou-se uma trinca rugosa não complementar por Diferenças Finitas, conforme é mostrado na Figura - 2.24. Nesta figura mostra-se um outro resultado onde concluiu-se que pontas de *rugosidade* que penetram regiões intensas da vizinhança dos campos escalares (térmicos), vetoriais ou tensoriais (tensão ou fratura), ou seja, campos de tensão da ponta principal da trinca podem gerar outras zonas térmicas ou plásticas (cardióide para tensão plana e leminiscata para deformação plana).

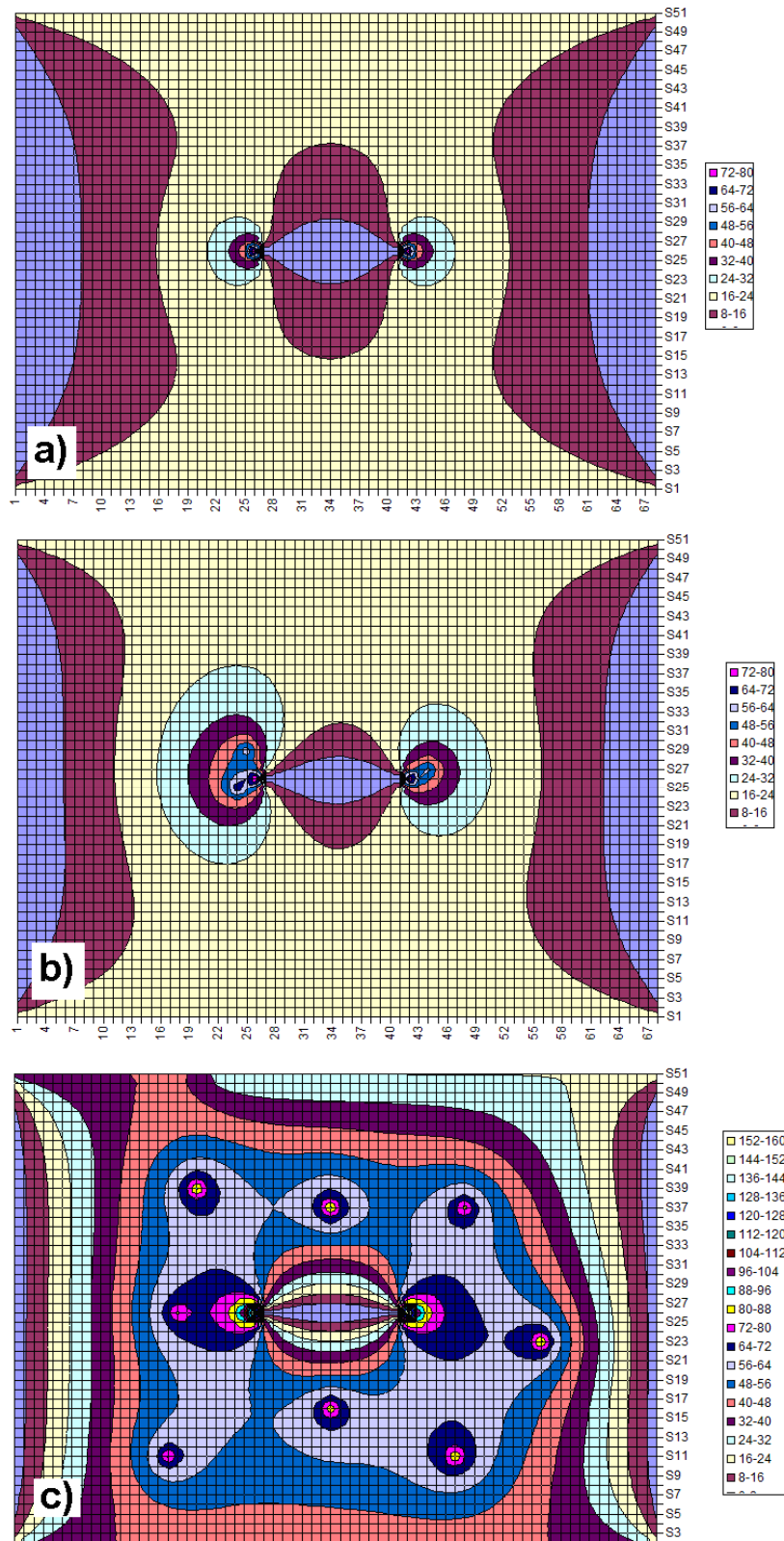


Figura - 2.25. Campo de tensão ao redor de uma trinca, em uma placa de Griffith, calculado pela equação Bi-harmônica usando o Método de Diferenças Finitas a) Material regular sem defeitos concentradores de tensão; b) e c) material irregular com defeitos concentradores de tensão aleatoriamente distribuídos na frentes da trinca e c) aumentado-se o número de concentradores de tensão.

Nos estudos realizados neste trabalho, observou-se que a rugosidade atrás da trinca possui pouca influência no campo de tensões na ponta da trinca e, conseqüentemente, não afeta o

processo instantâneo de crescimento. Contudo, para uma trinca se propagar em um meio irregular ela precisa interagir com a microestrutura do material e pontos concentradores de tensão a sua frente que contribuem para o aspecto rugoso final da trinca. Uma outra opção de surgimento de trinca rugosa acontece em uma fratura ultra-rápida onde efeitos de instabilidade geram superfícies rugosas com bifurcação de trinca (Fineberg, 1991, 1992).

Na Figura - 2.25 mostra-se uma simulação feita por Diferenças Finitas usando-se o software Microsoft EXCEL<sup>®</sup> para a criação do gráfico de tipo Superfície de Cores. O formato de cada célula dessa planilha foi alterado para ter a mesma altura e largura para representar um ponto de coordenada  $(x, y)$  no mapa de cores. A localização dos concentradores de tensão na superfície de cores foi definida aleatoriamente próxima à ponta da trinca e a intensidade do campo na coordenada que representa o valor de concentração de tensão foi também definida aleatoriamente. Em pontos fora da posição dos concentradores de tensão o campo foi calculado recursivamente (solução auto-iterada) utilizando-se as equações discretas do campo elástico na forma do Laplaciano das tensões.

Na Figura - 2.25 mostra-se o aspecto (exagerado) de um campo irregular com concentradores de tensões em locais próximos à ponta da trinca, mostrando que é a rugosidade que vai se formar que causa grande influência no surgimento de um campo de tensão irregular e conseqüentemente o surgimento de uma trinca rugosa.

A relação que os concentradores de tensão simulados numericamente na Figura - 2.25 com a porosidade proposta no modelo analítico é feita baseando-se na idéia de que também poros internos ao material podem concentrar tensões e desviar a trinca, apesar de não possuir um valor concentrado de tensão no interior do poro.

O modelo analítico proposto neste capítulo possui evidências que apontam para sua validade quando se constatou o decaimento exponencial das perturbações do campo, conforme mostram a Figura - 2. 22 e a Figura - 2. 23. Uma validação completa aplicada a algum método numérico de simulação não foi feita nesse trabalho. Mas a decorrente aplicação do formalismo matemático da Mecânica dos Meios Irregulares, desenvolvido nesse capítulo, na Mecânica da Fratura com rugosidade é apresentada no Capítulo – VI e as devidas comprovações experimentais são mostradas no capítulo – VII, indicando que as correções de rugosidade feitas na Mecânica da Fratura se contextualizam dentro de uma teoria matemática mais abrangente, como a que foi desenvolvida nesse capítulo.



# Capítulo III

## FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA TEORIA FRACTAL DE MEDIDA

*Quem abriu canais para o aguaceiro, e um caminho para o relâmpago do trovão (Jó 38,25);*

### 3. 1 – Introdução

Euclides foi o responsável pela sistematização do conhecimento das formas regulares, construídas ou idealizadas pelo homem. Porém, as formas aparentemente irregulares, encontradas na natureza, só a bem pouco tempo é que tem recebido uma sistematização mais precisa. Benoit Mandelbrot e outros cientistas são os principais responsáveis por este trabalho.

Há alguns anos, Mandelbrot (1977), juntamente com outros cientistas, observaram que muitos outros objetos, estruturas e padrões de crescimento na natureza, tais como, nuvens, orla marítima, formação de cristais de gelo, fraturas, etc., apresentam um tipo irregular de geometria, com propriedades de invariância por transformação de escala. Mandelbrot (1977), foi o primeiro a apontar em seu livro a idéia de que essas figuras irregulares, encontradas na natureza, poderiam ser descritas por um novo tipo de geometria (não-euclidiana), cuja dimensão seria fracionária. Ele estabeleceu as principais propriedades dessa nova descrição geométrica para esses objetos, e os chamou de “fractais”, por causa da sua dimensão não-inteira. A palavra “fractal” foi sugerida por Benoit Mandelbrot em seu ensaio fundamental (Mandelbrot, 1983), por ser derivada do latim *fractus* que significa, fração, ou fragmento, ou ainda, significa irregular, quebrado ou fragmentado, relativo ao verbo *frangere*, que significa quebrar. Esta palavra é usada para descrever a geometria dos objetos que são demasiadamente irregulares para serem modelados pela geometria euclidiana.

Mandelbrot também foi o responsável pela criação de vários métodos de medida da dimensão fracionária, estabelecida por essa nova geometria. Sendo assim, a sistematização do conhecimento geométrico de figuras regulares e da geometria, capaz de descrever os sistemas

simples na natureza e que fazem parte do senso de observação das pessoas hoje em dia, foram feitas inicialmente por Euclides. Enquanto que, a sistematização do conhecimento geométrico de figuras irregulares e da geometria, que descreve os padrões de crescimento e fenômenos complexos, foi feita por Benoit Mandelbrot.

### **3. 2 – A natureza e a importância dos fractais**

Uma grande variedade de objetos naturais pode ser descritas matematicamente como fractais, por exemplo, contorno de nuvens, linhas costeiras, turbulência em fluidos, superfícies de fratura, ou as superfícies ásperas em contato, rochas, e assim por diante. Nenhum deles é um fractal real; características fractais desaparecem se um objeto é visto a uma escala suficientemente pequena. No entanto, para uma ampla gama de escalas dos objetos naturais parecem muito com fractais, e nesse caso, eles podem ser considerados fractais. Não há verdadeiros fractais na natureza e não existem verdadeiras linhas retas ou círculos também. Claramente, os fractais são melhores aproximações dos objetos reais que são linhas retas ou círculos. Se a geometria clássica é considerada como uma primeira aproximação para os objetos naturais, a geometria fractal é o próximo nível de aproximação. A geometria fractal oferece uma nova maneira científica de pensar sobre os fenômenos naturais. Segundo Mandelbrot (1983), um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch é estritamente maior do que sua dimensão topológica.

Os conceitos básicos da teoria fractal, desenvolvidos por Mandelbrot (1982) e outros cientistas, têm sido utilizados na descrição de estruturas irregulares, como superfícies de fratura e trincas (Herrmann 1989), com o intuito de se relacionar a descrição geométrica desses objetos com as propriedades dos materiais (De Arcangelis 1989).

A teoria fractal, do ponto de vista da física, diz respeito ao estudo de estruturas irregulares que apresentam a propriedade de invariância por transformação de escala (auto-similaridade, ou auto-afinidade), propriedade esta em que as partes são similares ao todo, em escalas sucessivas de ampliação ou redução em uma ou em todas as direções, Mandelbrot (1977). A natureza intrigante destas propriedades existentes em estruturas, que se estendem desde o microcosmo<sup>(4)</sup> até o macrocosmo<sup>(5)</sup> é motivo de muitas investigações na física (Herrmann 1986, Tsallis 1997 e outros). Sendo assim, a teoria fractal possui diversos contextos, tanto na física como na matemática, tais como: na teoria do caos (Mccaulley 1993), no estudo das transições de fase e fenômenos críticos (Stanley 1973; Uzunov 1993; Beck 1993), no estudo de aglomeração de partículas (Meakin 1995), etc. O contexto que está mais diretamente relacionado à Mecânica da

---

<sup>4</sup> microcosmo = aglomerado de partículas, átomos e moléculas

<sup>5</sup> macrocosmo = aglomerado de estrelas, galaxias, quasars, etc.

Fratura, por causa da natureza física do processo, é a que diz respeito ao crescimento fractal (Vicsék 1992; Sander 1984; Meakin 1993 e Pietronero 1988). Nesta subárea são estudados os mecanismos de crescimento de estruturas, que surgem em processos de instabilidade e dissipação de energia, tais como as trincas (Herrmann & Roux 1990; Charmet 1990) e padrões ramificados (Meakin 1989). Neste sentido, é que será procurado abordar o problema da propagação das trincas.

A teoria fractal torna-se cada vez mais presente na descrição de fenômenos que possuem uma desordem mensurável, chamado de caos determinístico (Mccauley 1993; Herrmann & Roux 1990; Charmet 1990). O fenômeno da fratura e propagação de trincas, embora sendo estatístico, mostra que algumas regras ou leis são obedecidas, e a cada dia tornam-se mais claras ou evidentes, através do entendimento das propriedades dos fractais (Herrmann & Roux 1990; Charmet 1990).

### **3. 3 – Os elementos da geometria euclidiana e as dimensões inteiras e não-inteiras, ou fractais**

Na geometria euclidiana, sabe-se que um ponto tem dimensão zero ( $d = 0$ ), uma reta possui dimensão unitária, ( $d = 1$ ) e um plano possui dimensão dois ( $d = 2$ ), e assim sucessivamente. Contudo, hoje em dia tem-se se divulgado cada vez mais a existência de objetos com dimensões fracionárias, chamados “fractais”. Mas como provar por meios métricos ou analíticos a dimensão fracionária ou inteira destes elementos?

A questão da determinação da dimensão fractal de objetos como, trincas, nuvens, relâmpagos, queijo suíço, etc., está intimamente relacionada com a questão da métrica usada na determinação do tamanho desses objetos. Intuitivamente, é possível entender as dimensões da geometria euclidiana e de seus objetos, baseado nas construções fundamentais de, ponto, reta, plano e espaço dessa geometria, sem se preocupar muito em como é possível medir a dimensão desses elementos ou objetos. Contudo, no caso de objetos fractais, isto não é possível, porque não se encontra uma construção elementar única, assim como na geometria euclidiana, com uma dimensão compatível com o objeto fractal estudado. Isto porque, no caso de fractais, o tamanho do objeto depende do tamanho da régua utilizada na medida, ou da dimensão da unidade de medida utilizada. Portanto, na geometria fractal, a premissa básica é: Como medir a dimensão de determinadas figuras, a partir das idéias intuitivas fornecidas pela geometria euclidiana? Em específico, como medir a dimensão fractal e a extensão geométrica de superfícies rugosas como as trincas? A resposta a esta pergunta foi dada ao longo do desenvolvimento deste capítulo.

### 3. 4 – A medida geométrica euclidiana

Uma medida da extensão geométrica de um objeto regular de dimensão euclidiana,  $d_o$ , inteira, é feita somando-se as unidades geométricas,  $u_d$ , necessárias, para recobrir totalmente o objeto, onde o índice  $d$  representa a dimensão da unidade de medida. É possível expressar algebricamente esta medida como uma série da seguinte forma:

$$M_d = \sum u_d, \quad (3. 1)$$

Observe que ainda não está sendo considerada a qualidade da medida, com refino desta em submúltiplos da unidade.

Esta medida,  $M_d$ , pode ser o comprimento,  $L$ , de um segmento de reta, de dimensão  $d_o = 1$ , ou a área,  $A$ , de um trecho retangular, de dimensão  $d_o = 2$ , ou o volume,  $V$ , de um paralelepípedo, de dimensão  $d_o = 3$ . Escolhendo-se as unidades de medidas,  $u_d$ , compatíveis com a dimensão do objeto,  $d = d_o$ , a ser medido, isto é:

$$u_d(\delta) = \delta^d. \quad (3. 2)$$

onde  $\delta$  é a extensão linear da unidade utilizada ou o tamanho de régua de medida. A equação (3. 1) fica então expressa como:

$$M_d = \sum u_d(\delta) = \sum \delta^d, \quad (3. 3)$$

Para o caso de uma medida regular com uma unidade de medida,  $\delta$ , fixa, ou seja,  $u_d = \delta^d = cte$ , tem-se:

$$M_d(\delta) = N_{d_o}(\delta) \delta^d \quad (3. 4)$$

onde  $N_{d_o}(\delta)$  é o número de unidades encontradas na extensão do objeto.

Tomando-se como exemplo, a medida euclidiana regular da área de um quadrado, cuja dimensão é  $d = 2$ . Para se escrever a área deste objeto, a partir da medida dos seus lados, conforme mostra a Figura - 3. 1, para  $L_0 = 8\delta$ , a partir de (3. 4) tem-se:

$$A(\delta) = 64\delta^2 \quad (3. 5)$$

Supondo-se agora que o quadrado em questão não está completamente preenchido, ou seja, possui falhas (Figura - 3. 2). Como é possível escrever a medida deste novo quadrado de forma idêntica a anterior, ou seja, de forma a manter a mesma funcionalidade da expressão (3. 4) em

função do comprimento, largura ou lado,  $L_0 = 8\delta$  ?

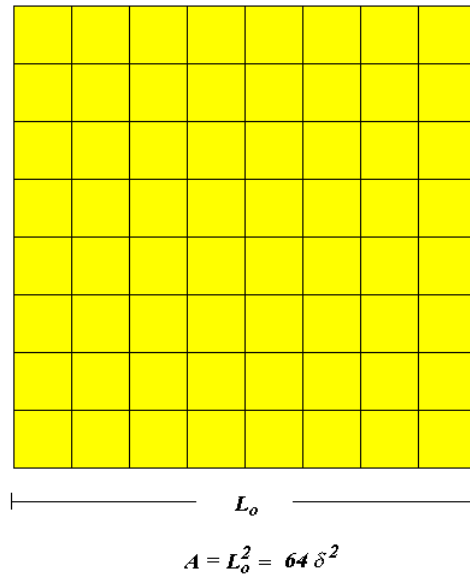


Figura - 3. 1. Medida euclidiana da área de um quadrado igual a  $A = L_0^2 = 64\delta^2$ .

De acordo com a expressão (3. 4) tem-se:

$$A(\delta) = 30\delta^2 \quad (3. 6)$$

A partir de (3. 5) observa-se que a relação

$$N(\delta) = \left(\frac{L_0}{\delta}\right)^2 = 8^2 = 64, \quad (3. 7)$$

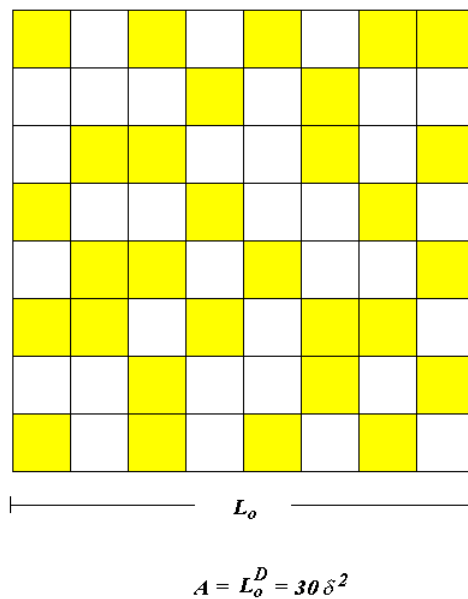


Figura - 3. 2. Medida não-euclidiana da área de um quadrado igual a  $A = (L_0/\delta)^D \delta^2 = 30\delta^2$ .

é óbvia. Contudo, é sempre possível encontrar um expoente  $D$ , pertencente ao intervalo  $1 \leq D \leq 2$ , capaz de descrever uma “medida irregular”, isto é, com falhas, como sendo uma potência do fator de escala,  $L_0/\delta$ , utilizado na medida, de forma a satisfazer a relação funcional:

$$N(\delta) = \left(\frac{L_0}{\delta}\right)^D = 8^D = 30, \quad (3.8)$$

de tal forma que, no caso da Figura - 3. 2, obtém-se:

$$D = \ln 30 / \ln 8 \cong 1,6356302. \quad (3.9)$$

Logo, substituindo-se (3. 8) em (3. 4) para  $d = 2$  tem-se:

$$A(\delta) = \left(\frac{L_0}{\delta}\right)^D \delta^2 \quad (3.10)$$

Esta expressão generaliza a medida euclidiana de área feita anteriormente.

Sabe-se que, uma medida é tanto mais precisa quanto menor for o valor da régua de medida,  $\delta$ . Observe, contudo, que este valor particular de  $D$  só vale para o caso da Figura - 3. 2. Caso o tamanho da régua,  $\delta$ , ou o tamanho do lado do quadrado,  $L_0$ , seja diferente em relação a unidade de medida,  $\delta$ , o valor de  $D$  também mudará. Para que o expoente  $D$  se mantenha independentemente das possíveis variações da régua,  $\delta$ , e do tamanho do lado,  $L_0$ , é preciso que a mesma regra de falhas, ou de preenchimento, se mantenha em qualquer escala, dando origem ao que se pode chamar de “homogeneidade em escala” ou *invariância por transformação de escala*. Nesse caso, é importante considerar, além do limite de réguas cada vez menores, o comportamento de  $D$ , nas diferentes escalas. Pois o comportamento de  $D$  é que vai determinar a forma de preenchimento da figura nessas escalas, desde uma escala inferior mínima, até uma escala máxima. Se os limites de escala inferior e superior não forem precisamente definidos, isto é, se o objeto geométrico é resultado de uma operação matemática iterativa infinita, é preciso elaborar o processo de medida, conforme será feito na secção - 3. 5.

Contudo, nesta secção foi visto como se processa uma medida euclidiana qualquer. Por outro lado, existem alguns objetos, cuja medida da sua extensão geométrica depende do comprimento da régua de medida. Isto porque, não é possível precisar um limite inferior para uma unidade padrão de medida, com dimensão compatível com o objeto a ser medido. Estes objetos são os fractais, ou multifractais, quando além da régua de medida a sua dimensão varia com a extensão do objeto. Mas antes, veja a seguir qual é a condição de invariância de uma medida geométrica qualquer.

### 3. 5 - Condição de invariância de uma medida por transformação de escala do padrão de medida

Foi visto anteriormente que, objetos geométricos euclidianos seguem uma função de extensão generalizada do tipo:

$$M_d(\delta) = N_{do}(\delta)\delta^d \quad (3. 11)$$

onde  $M_d(\delta) = L(\delta), A(\delta), V(\delta)$ , são as medidas de comprimento, área e volume respectivamente

Imaginando-se agora uma quantidade unitária,  $u$ , múltipla, ou sub-múltipla de  $\delta$ , produzida por uma transformação de escala,  $\varepsilon \neq 1$ , do tamanho de régua,  $\delta$ , onde,  $M_d$  passa a ser escrita de forma idêntica a (3. 4), ou seja:

$$M_d(u) = N_{do}(u)u^d \quad (3. 12)$$

para apresentar as condições de invariância de uma medida geométrica.

Considerando-se que a função,  $N(u)$ , é homogênea e que segue, também, uma lei de potência do tipo:

$$N_{do}(u) = N_0u^{-do}, \quad (3. 13)$$

logo

$$N_{do}(\delta) = N_0\delta^{-do} \quad (3. 14)$$

retornando (3. 13) em (3. 12) tem-se:

$$M_{do}(u) = N_0u^{-do}u^d = N_0u^{d-do} \quad (3. 15)$$

retornando (3. 14) em (3. 11) tem-se:

$$M_{do}(\delta) = N_0\delta^{-do}\delta^d = N_0\delta^{d-do} \quad (3. 16)$$

considerando que  $u = \varepsilon\delta$ , com  $\varepsilon \neq 1$ , pode-se escrever (3. 15) como sendo:

$$M_{do}(u) = N_0\varepsilon^{d-do}\delta^{d-do}. \quad (3. 17)$$

Logo, usando-se (3. 16) em (3. 17) fica-se finalmente com:

$$M_{do}(u) = M_{do}(\delta)\varepsilon^{d-do} \quad (3. 18)$$

ou seja, a medida passa a não depender do tamanho,  $u$ , ou  $\delta$ , mas apenas da geometria dos padrões de recobrimento,  $u_d$ .

Comparando-se (3. 15) e (3. 16) com (3. 18), tem-se que a medida  $M_{d_o}(u)$  só será invariante por uma transformação de escala,  $\varepsilon$ , qualquer, isto é,  $M_{d_o}(u) = M_{d_o}(\delta) = M$ , se a dimensão do padrão unitário de medida,  $d$ , for igual a dimensão do objeto “ $d_o$ ”, isto é,  $d = d_o$ .

$$\underbrace{d}_{\text{dimensão do espaço}} \sim \underbrace{d_u}_{\text{dimensão da unidade}} \sim \underbrace{d_o}_{\text{dimensão do objeto}} \quad (3. 19)$$

Observe que uma escolha adequada do padrão unitário de medida implica em saber previamente a dimensão do objeto a ser medido a fim de se obter a medida de sua extensão geométrica. Já foi mencionado que a dimensão “ $d$ ” dos padrões dos exemplos de medidas mostrados nos itens 3. 4, foram propositalmente escolhidos com dimensão igual a dos seus respectivos objetos ( $d = d_o$ ). Mas, isto não é necessariamente assim, como foi mostrado no cálculo acima. Pois, se a dimensão do objeto não é conhecida, então não é possível saber escolher adequadamente a dimensão da unidade padrão de recobrimento para realizar a medida. Portanto, ocorre um problema: como medir a extensão de um objeto sem conhecer previamente a sua dimensão. Supondo-se que o objeto possua uma dimensão diferente da dimensão da unidade padrão escolhida, como fica então afetado o resultado da medida?

Para se resolver este problema de medidas com padrões de recobrimento de dimensões  $d$  diferente da dimensão,  $d_o$ , do objeto foi que surgiu a idéia da criação de uma padrão de medida genérico ou de “unidades de recobrimento”, conforme será mostrado a seguir. O texto que segue é baseado em Yamaguti [1992], porém com as modificações necessárias para o contexto desse trabalho.

### 3. 6 - Uma medida geométrica generalizada

De forma análoga ao caso da medida euclidiana o processo de medida é generalizado, utilizando-se o conceito de dimensão de Hausdorff-Besicovitch, da seguinte forma.

Suponha que cobre-se um objeto geométrico com unidades geométricas,  $u_D$ ,  $\alpha$ -dimensionais de extensão,  $\delta_k$ , com  $\delta_k \leq \delta$ , onde  $\delta$  é o máximo tamanho da unidade  $\alpha$ -dimensional e  $\alpha$  é um número real positivo. Definindo-se a quantidade:

$$M_D(\alpha, \delta, \{\delta_k\}) = \sum_k \delta_k^\alpha \quad (3. 20)$$

Escolhendo-se entre todos os conjuntos  $\{\delta_k\}$ , aquele que reduz essa soma, tal que:

$$M_D(\alpha, \delta) = \inf_{\{\delta_k\}} \sum_k \delta_k^\alpha \quad (3. 21)$$



O menor valor possível da somatória de (3. 21) é calculado, para se obter o ajuste de melhor precisão da medida realizada. Finalmente tomando-se o limite de  $\delta$  tendendo a zero ( $\delta \rightarrow 0$ ), tem-se:

$$M_D(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_D(\alpha, \delta) \quad (3. 22)$$

A interpretação da função  $M_D(\alpha)$  é análoga a função anteriormente designada por  $M_{do}$  para uma medida euclidiana de um objeto, ou seja, ela corresponde a extensão geométrica (comprimento, área, volume, etc.) do conjunto medido por unidades de dimensão,  $\alpha$ . Os casos de dimensão inteira são iguais à definição usual, e são mais simples de visualizar. Por exemplo, no cálculo de  $M_D$  em uma superfície finita de dimensão,  $D = 2$ , têm-se os casos:

- Para  $\alpha = 1 < D = 2$ , medindo “o comprimento” do plano com pequenos segmentos de reta, obtendo  $M_D = \infty$ , porque o plano tem um “comprimento” infinito.
- Para  $\alpha = 2 = D = 2$ , medindo-se a área da superfície com pequenos quadrados, obteria-se  $M_D = A_{d=2} = A_0$ . O qual é o único valor de  $\alpha$  onde  $M_D$  não é nulo e nem infinito (veja a Figura - 3. 3 )
- Para  $\alpha = 3 > D = 2$ , medindo o “volume” do plano com pequenos cubos, obtendo  $M_D = 0$ , porque o “volume” do plano é nulo.

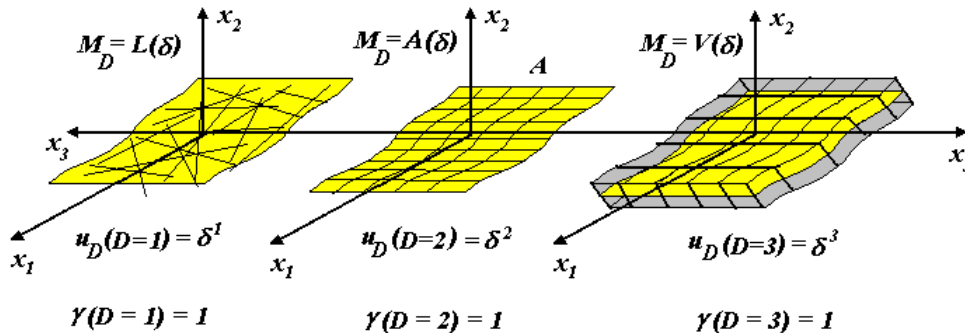


Figura - 3. 3. Medida,  $M_D(\delta)$ , de uma área,  $A$ , de dimensão  $D = 2$ , feita com diversos padrões de medida  $u_D$  com  $D = 1, 2, 3$ .

Portanto, a função,  $M_D$ , possuirá a seguinte forma:

$$M_D(\alpha) \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha > D \\ M & \text{para } \alpha = D. \\ \infty & \text{para } \alpha < D \end{cases} \quad (3. 23)$$

Isto é, a função  $M_D$  só possuirá um valor diferente de 0 e  $\infty$  em um ponto crítico  $\alpha = D$ , que define a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Portanto a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é aquela dimensão da unidade padrão de medida que converge o valor da série de medida em um único valor,  $M$ , á medida que a extensão da unidade de medida tende a zero, conforme mostram as equações (3. 22) e (3. 23).

Pode-se rotular cada uma das etapas da construção da função  $M_D(\delta)$  da seguinte forma:

- i) a primeira é a *medida em sí*. Porque é a etapa que realmente avalia a extensão do conjunto, somando o tamanho das unidades geométricas que o recobrem. Dessa forma, a extensão do conjunto está sendo superestimada, pois ele é sempre menor ou igual ao tamanho da sua cobertura.
- ii) A etapa seguinte é a *otimização*, que escolhe o arranjo de unidades que fornecem o menor valor medido anteriormente, ou seja, o valor que melhor se aproxima da extensão real do conjunto.
- iii) A última etapa é o *limite*. Repetem-se as etapas anteriores com unidades cada vez menores para levar em consideração todos os detalhes, por menores que sejam, da estrutura do conjunto.

Como o valor da dimensão de Hausdorff é definido como sendo um ponto crítico da função  $M_{\alpha=D}(\delta)$ , pode-se concluir, erradamente, que a etapa de otimização não é muito importante, pois o fato do conjunto não ter sua extensão medida exatamente não deve afetar o valor do ponto crítico. A etapa de otimização, nesta definição, tem como função tornar o limite na etapa seguinte mais rápido, o que do ponto de vista matemático é uma propriedade muito desejável, quando se trata de algoritmos de cálculo numérico.

### 3.7 – A definição de um fractal

As propriedades básicas de objetos com dimensões “anômalas” (diferente da euclidiana) foram observados e pesquisados já no início deste século, principalmente por Hausdorff [1919] e Besicovitch [1935]. A importância dos fractais para a Física e muitos outros campos de conhecimento foi apontada por Mandelbrot [1982]. Ele demonstrou a riqueza da geometria fractal e apresentou também importantes resultados em seus livros sobre o assunto [Mandelbrot 1975, 1977, 1982].

#### 3.7.1 - A definição matemática de um objeto fractal

Uma sequência geométrica,  $S$ , dada por:

$$S = \sum_k S_k \quad \text{onde } k = 0,1,2,\dots \quad (3.24)$$

representada no espaço euclidiano, é um fractal, quando a medida da sua extensão geométrica, dada pela série,  $M_\alpha(\delta_k)$ , satisfaz a seguinte condição de Hausdorff-Besicovitch:

$$M_\alpha(\delta_k) = \sum_k \gamma(d) \delta_k^\alpha = N_D(\delta_k) \gamma(d) \delta_k^\alpha \begin{cases} 0; & \alpha > D \\ M_D; & \alpha = D, \\ \infty; & \alpha < D \end{cases} \quad (3.25)$$

onde:

$\gamma(d)$ : é o fator geométrico dos elementos unitários (ou semente) da sequência representada geometricamente.

$\delta$ : é o tamanho dos elementos unitários (ou semente), usados como unidade padrão de medida da extensão geométrica da representação espacial da sequência.

$N(\delta)$ : é o numero de unidades elementares (ou sementes) que formam a representação espacial da sequência em uma determinada escala

$\alpha$ : é a dimensão dos elementos unitários

$D$ : é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

Portanto, fractal é todo objeto que possui uma dimensão não inteira, que excede a dimensão topológica ( $D < I$ , onde  $I$  é a dimensão do espaço Euclidiano o qual está imerso) com alguma invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade), onde para qualquer contorno contínuo que se tome o mais próximo possível do objeto o número de pontos,  $N_D$ , que forma o fractal não preenche completamente o espaço delimitado pelo contorno, ou seja, existe sempre regiões vazias, ou excedentes, e ainda existe sempre uma figura de dimensão,  $I$ , (inteira) no qual o fractal pode ser inscrito que não superpõe exatamente o fractal mesmo no limite de escala infinitesimal. Logo, a fração de pontos que preenche o fractal em relação a sua cobertura euclidiana, é diferente de inteiro. Conforme foi visto na secção - 3.7 em linguagem algébrica, um fractal é uma sequência invariante por transformação de escala que possui uma dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

De acordo com a secção anterior, diz-se que um objeto é fractal, quando as respectivas funções que caracterizam as grandezas como: perímetro, área ou volume, possuem homogeneidade não-inteira. Neste caso, a propriedade de invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade), é decorrente de uma transformação de escala, de pelo menos uma destas funções.

O conceito fractal está intimamente associado ao conceito da Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, tanto que uma das primeiras definições de fractal criada por Mandelbrot (1977) foi:

*Fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica”.*

Pode-se dizer, portanto que, os fractais são objetos geométricos que possuem estruturas em todas as suas escalas de ampliação, comumente com alguma similaridade entre elas. Eles são objetos cuja definição usual de dimensão euclidiana é incompleta, necessitando de outra mais adequada ao seu contexto conforme o que se acabou de ver. Esta é exatamente a dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

### *3.7.2 - A dimensão de imersão de um objeto*

Um objeto de dimensão,  $D$ , sempre estará imerso em um espaço de dimensão mínima  $I = d + 1$ , podendo apresentar um excesso de extensão sobre a dimensão,  $d$ , ou uma falta de extensão ou falhas em uma dimensão  $d + 1$ . Por exemplo, para uma trinca cuja dimensão fractal está no intervalo  $1 \leq D \leq 2$  a dimensão de imersão é a dimensão  $I = 2$ , no caso de uma superfície de fratura cuja dimensão fractal está no intervalo  $2 \leq D \leq 3$  a dimensão de imersão é  $I = 3$ .

### *3.7.3 - A dimensão de falta e de excesso de um objeto*

Quando um objeto possui uma extensão geométrica tal que preenche totalmente uma dimensão euclidiana de dimensão regular,  $d$ , e ainda possui um excesso que preenche parcialmente uma outra dimensão,  $I = d + 1$ , além da anterior, dize-se que o objeto possui uma dimensão em excesso  $d_e$ , dada por  $d_e = D - d$ , onde  $D$  é a dimensão do objeto. Por exemplo, para uma trinca cuja dimensão fractal está no intervalo  $1 \leq D \leq 2$  a dimensão de excesso é a dimensão  $d_e = D - 1$ , no caso de uma superfície de fratura cuja dimensão fractal está no intervalo  $2 \leq D \leq 3$  a dimensão de excesso é  $d_e = D - 2$ .

Se por outro lado o objeto preenche parcialmente uma dimensão euclidiana regular  $I = d + 1$ , certamente que este objeto preenche totalmente uma dimensão euclidiana regular,  $d$ , de tal forma que, diz-se que este objeto possui uma dimensão de falta  $d_f = I - D = d + 1 - D$ , onde,  $d_e = 1 - d_f$ . Por exemplo, para uma trinca cuja dimensão fractal está no intervalo  $1 \leq D \leq 2$  a dimensão de falta é a dimensão  $d_f = 2 - D$ , no caso de uma superfície de fratura cuja dimensão fractal está no intervalo  $2 \leq D \leq 3$  a dimensão de falta é  $d_f = 3 - D$ .

## **3.8 – Paralelo entre a geometria euclidiana e fractal**

Pode-se fazer um paralelo, entre a geometria euclidiana e a geometria fractal

mostrando-se alguns exemplos de fractais auto-similares projetados sobre dimensões euclidianas e alguns fractais auto-afins. Pois, assim como na geometria euclidiana, tem-se os elementos de construção geométrica, na geometria fractal pode-se encontrar objetos análogos a estes elementos. Os diversos tipos de fractais que existem estão esquematizado na Figura - 3. 7.

### 3.8.1 - Fractais entre $0 \leq D \leq 1$ (análogos a pontos)

Um exemplo de um fractal imerso numa dimensão euclidiana  $I = d + 1 = 1$ , com projeção em  $d = 0$ , análogo a geometria puntiforme, pode ser exemplificado pela Figura - 3. 4.

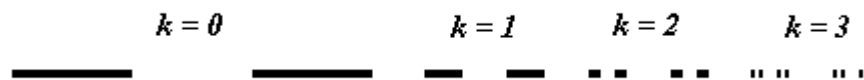


Figura - 3. 4. Fractal imerso no espaço unidimensional onde  $D \cong 0,631$ .

Este fractal possui dimensão  $D \cong 0,631$ . Este é um fractal do tipo “manchas sobre o assoalho”. Outros fractais deste tipo podem ser observados, quando se pulveriza um material sobre uma superfície. Neste caso a dimensão global das manchas, pode ser algum valor entre  $0 \leq D \leq 1$ .

### 3.8.2 - Fractais entre $1 \leq D \leq 2$ (análogos a retas)

Para um fractal imerso numa dimensão euclidiana  $I = d + 1 = 2$ , com projeção em  $d = 1$ , análogo a geometria linear é um fractal do tipo picos e vales ( Figura - 3. 5). Trincas, também podem ser descritas a partir desta figura conforme mostra [Alves 2011]. Gráficos de ruídos, também são exemplos de estruturas fractais lineares, cuja dimensão está entre  $1 \leq D \leq 2$ .

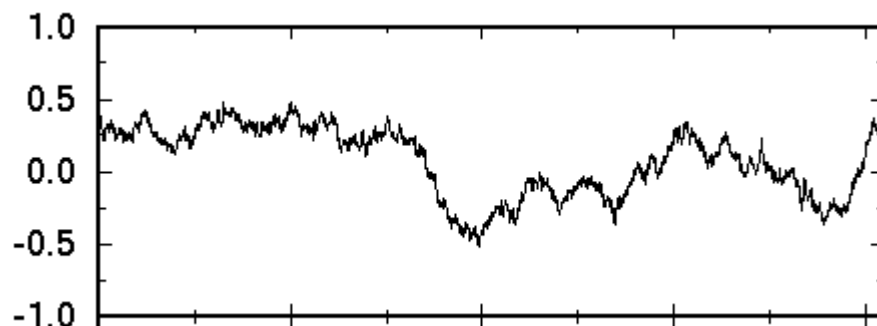


Figura - 3. 5. Fractal imerso numa dimensão  $d = 2$ . linha fractal rugosa.

### 3.8.3 - Fractais entre $2 \leq D \leq 3$ (análogos a superfícies ou volumes porosos)

Para um fractal imerso numa dimensão euclidiana  $I = d + 1 = 3$ , com projeção em

$d = 2$ , análogo a geometria superficial é um fractal do tipo “montanhas” ou “superfícies rugosas” ( Figura - 3. 6). As superfícies de fraturas podem ser incluídas nesta classe de fractais.

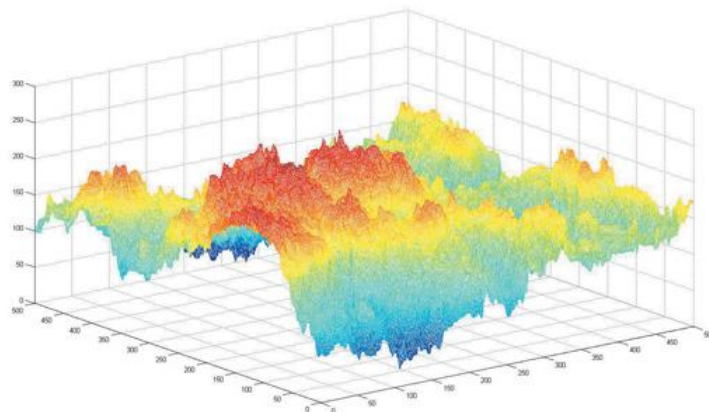


Figura - 3. 6. Superfície irregular ou rugosa que apresenta escalonamento fractal com dimensão  $D$  entre:  $2 \leq D \leq 3$ .

Fazendo-se uma comparação paralela das diferentes situações descritas anteriormente tem-se:

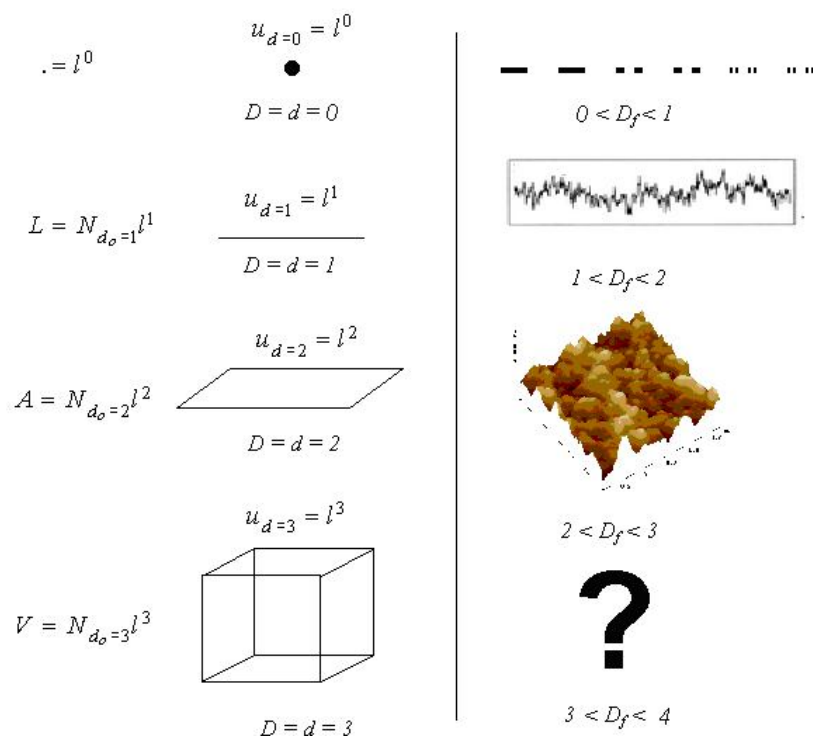


Figura - 3. 7. Comparação entre a geometria euclidiana e a geometria fractal.  $D$ ,  $d$  e  $D_f$  representam as dimensões topológica, euclidiana e fractal, de um ponto, de um segmento, de uma superfície plana e de um cubo, respectivamente.

### 3. 9 - As diferentes dimensões fractais de um objeto e seus métodos de caracterização

Uma dimensão fractal  $D_f$  de uma forma geral é definida com sendo a dimensão resultante da medida de um objeto ou estrutura que possui irregularidades que se repetem em escalas (invariância por transformação de escala). Seus valores são geralmente não inteiros e situados entre duas dimensões euclidianas consecutivas denominadas dimensão de projeção,  $d$  do objeto e dimensão de imersão,  $d + 1$ , ou seja,  $d \leq D_f \leq d + 1$ .

Na literatura especializada, existem controvérsias sobre as relações entre as diferentes dimensões fractais e os expoentes de *rugosidade*. O termo “dimensão fractal” é utilizado genericamente para designar as diferentes dimensões fracionárias encontradas nas mais diferentes fenomenologias, que tem como resultado padrões geométricos de formação ou de dissipação de energia, os quais são comumente chamados de fractais [Mandelbrot, 1982]. Entre estes padrões está o crescimento de agregados por difusão (DLA - Diffusion Limited Aggregation), o crescimento de filmes por deposição balística (DB), as superfícies de fratura (SF), etc. As dimensões fractais encontradas nesses fenômenos, certamente não são as mesmas e dependem tanto da fenomenologia estudada como do método de caracterização fractal utilizado. Portanto, ao se caracterizar tais fenômenos, utilizando a geometria fractal, uma distinção entre as diferentes dimensões encontradas é necessária.

Entre as diversas dimensões fractais pode-se destacar a dimensão de Hausdorff-Besicovitch,  $D_{HB}$ , que procede da definição matemática geral de um fractal [Hausdorff, 1919; Besicovitch, 1929, 1937]. Outras dimensões são a dimensão de caixa,  $D_B$ , a dimensão de *rugosidade* ou expoente Hurst,  $H$  a dimensão de Lipshitz-Hölder,  $\alpha$ , etc. Portanto, uma relação matemática entre elas precisa ser estabelecida de forma clara para cada fenômeno envolvido. Contudo, observa-se, então que essa relação não é única e depende não só da fenomenologia, mas também do método de caracterização utilizado.

Portanto, o equacionamento fenomenológico do fenômeno da fratura também pode, em tese, fornecer uma relação entre as dimensões fractais e o expoente de *rugosidade* da superfície de fratura, assim como acontece para outras fenomenologias. Neste trabalho, obteve-se um modelo fractal para uma superfície de fratura, a partir de uma generalização do Método Box-Counting. Sendo assim, será discutido a relação entre a dimensão de caixa local e global e a dimensão de *rugosidade*, as quais estão envolvidas na caracterização de uma superfície de fratura, além de alguma outra que se fizer necessária na descrição fractal de uma superfície de fratura.

Na análise fractal de um objeto ou estrutura obtém-se diferentes tipos de dimensão fractal, todas relacionadas com o tipo de fenômeno quem apresenta fractalidade e com o método de medida empregado na obtenção da medida fractal. Essas dimensões fractais podem ser definidas da seguinte forma:

### 3.9.1 - As Dimensões de Caixa (Box-Dimension, $D_B$ ) Local e Global:

A dimensão de caixa  $D_B$  é definida a partir da medida do comprimento de uma linha fractal rugosa, por exemplo, quando se utiliza uma grade de espaçamento  $\delta$  para recobrir uma linha rugosa e conta-se quantas caixas de tamanho  $\delta$  recobrem a linha. (vide Figura - 3.8). Diferentes valores do comprimento da linha rugosa são obtidos variando-se o espaçamento  $\delta$  da grade e contando-se o número de caixas que recobrem a linha fractal. Esse método de contagem de caixas define diferentes comprimentos da linha rugosa em função do espaçamento  $\delta$  da grade e determina a dimensão de caixa  $D_B$ .

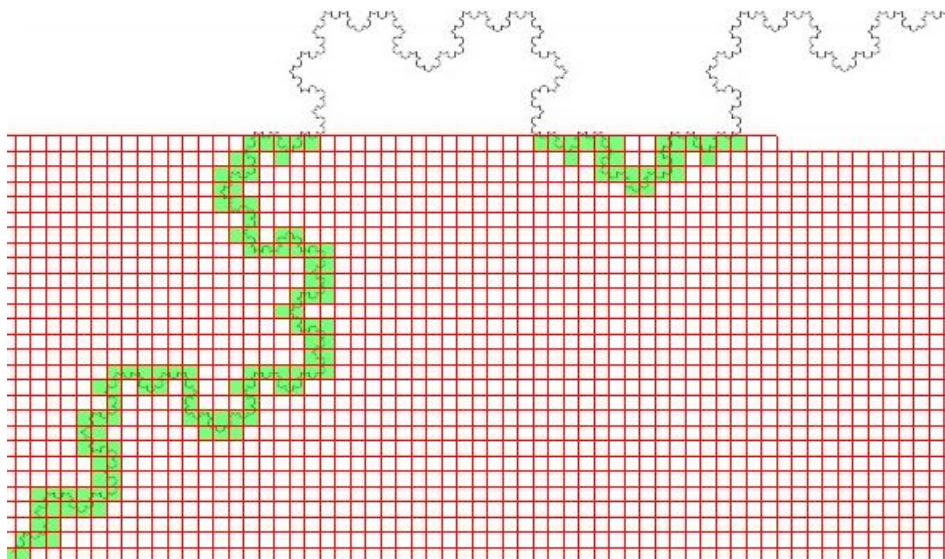


Figura - 3.8. Método Box-Counting aplicado sobre um fractal auto-afim.

Para uma linha fractal rugosa a dimensão de caixa pode ser definida como:

$$D_B \equiv - \frac{\ln\left(\frac{L}{\delta}\right)}{\ln\left(\frac{\delta}{L_0}\right)}. \quad (3.26)$$

Por outro lado, fractais auto-afins que requerem diferentes variações no comprimento da escala em diferentes direções podem utilizar o método Box-Counting com algum cuidado a ser tomado, no sentido de que a dimensão de caixa,  $D_B$  a ser obtida possui uma região de cruzamento entre uma medida local e outra global. De onde segue que para cada região utiliza-se as seguintes relações:

$$\lim_{l_0 \rightarrow 0} N(L_0) = \left(\frac{L_0}{l_0}\right)^{D_{Bg}} \quad p/ \quad L_0 \ll L_{0s} \quad (3.27)$$



para a medida global e

$$\lim_{l_0 \rightarrow 0} N(L_0) = \left( \frac{L_0}{l_0} \right)^{D_{Bl}} \quad p / L_0 \gg L_{0s} \quad (3.28)$$

Para a medida local, a relação da dimensão divisor  $D_B$  com o expoente Hurst  $H$  é dada por:

$$D_{Bl} = d + 1 - H_{q=1} \quad (3.29)$$

Para uma linha fractal rugosa imersa em duas dimensões  $d + 1 = 2$  e cuja projeção é sobre uma reta  $d = 1$  e para uma superfície fractal rugosa imersa em três dimensões  $d + 1 = 3$  e cuja projeção é sobre um plano  $d = 2$ .

Neste ponto, observa-se que para um perfil a relação  $D_{Bl} = 2 - H$ , comumente utilizada, só serve para medidas locais do método de contagem de caixa. Enquanto que, para medidas globais não se pode estabelecer uma relação entre  $D_{Bg}$  e  $H$ . Alguns livros textos sobre o assunto apresentam um exemplo de calculo de dimensão fractal local e global de fractais auto-afins, obtidos por um algoritmo específico.

Em geral, para qualquer estrutura fractal auto-afim, a dimensão fractal local é relacionada com o parâmetro  $H$  como segue,

$$D_{Bl} = d + 1 - H, \quad (3.30)$$

e para a dimensão fractal global  $D_g = d$ , sendo  $I = d + 1$  a dimensão euclidiana onde o fractal está imerso.

Na passagem do limite da dimensão fractal local,  $D_l$ , para a global,  $D_g$ , existe uma zona de transição chamada de “crossover”, mas os resultados obtidos nesta região são um tanto ambíguos e de difícil interpretação [Family 1991]. Contudo, na região de dimensão fractal global, a estrutura é considerada não fractal [Feder1989]. [

### 3.9.2 - As Dimensões de Caixa e a Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

A definição matemática de dimensão generalizada de Hausdorff-Besicovitch necessita de um método capaz de medi-la de forma apropriada ao fenômeno fractal em estudo. Alguns autores [Feder 1989; Vicsék 1992; Allen 1995; Yamaguti, 1996] têm discutido a possibilidade de se utilizar o método Box-Counting como sendo um dos métodos gráficos que obtém uma dimensão de caixa,  $D_B$ , muito próxima dimensão generalizada de Hausdorff-Besicovitch,  $D_{HB}$ , ou seja [Yamaguti, 1996]:

$$D_B \cong D_{HB} \quad (3.31)$$

Neste sentido, a dimensão de caixa,  $D_B$  é obtida para fractais auto-similares que podem ser reescalados pela mesma variação de comprimento das escalas em todas as direções, por meio da relação:

$$N(L_0) = \left( \frac{L_0}{l_0} \right)^{D_B} \quad (3.32)$$

onde  $l_0$  é o tamanho da grade utilizada e  $L_0$  é o tamanho do fractal a ser caracterizado.

O cálculo analítico da dimensão de Hausdorff é possível em apenas alguns casos e é de difícil implementação numérica. No cálculo numérico, utiliza-se outra definição mais apropriada, chamada dimensão de caixa,  $D_B$ , que nos casos de sistemas dinâmicos, possui o mesmo valor da dimensão de Hausdorff,  $D$ , [Yamaguti 1992]. Dessa forma, é comum denominá-las indistintamente de *dimensão fractal*,  $D$ , conforme será mostrado a seguir.

Para definir a dimensão de caixa,  $D_B$ , suponha que se cubra todo o espaço que contém o fractal com uma grade (conjunto de unidades  $\alpha$ -dimensionais justapostos de igual formato e tamanho,  $\delta$ ) de tamanho total,  $\delta_{\max}$ , a qual inscreve o objeto fractal. Definindo-se a escala,  $\varepsilon$ , relativa ao tamanho da grade,  $\delta_{\max}$ , como sendo dada por:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\delta_{\max}}. \quad (3.33)$$

Conta-se o número  $N(\varepsilon)$  de caixas que possuem pelo menos um ponto do fractal. Define-se então:

$$D_B = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (3.34)$$

Neste ponto, há dois caminhos a seguir para se obter o valor real da medida, ou toma-se o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e permite-se que a dimensão  $D$  se ajuste ao valor de  $N(\varepsilon)$  final, ou considera-se uma correlação linear no valor de  $\ln N(\varepsilon) \times \ln \varepsilon$ , onde  $D$  é o coeficiente angular da reta, e com isso define-se a medida independentemente da escala.

No caso de uma estimativa numérica, não se consegue resolver o limite indicado na equação (3.34). Então, obtém-se  $D_B$  como uma inclinação da reta  $\ln N(\varepsilon) \times \ln \varepsilon$ , quando  $\varepsilon$  é pequeno. O valor de  $N(\varepsilon)$  é obtido através de um algoritmo conhecido como *contagem de caixa* (Box-Counting).

Todas as definições relacionadas aos fractais mostradas aqui são expoentes, e em toda avaliação numérica destes, sempre se calcula a inclinação de alguma quantidade contra  $\varepsilon$  em escala

logarítmica.

As duas definições de, *Dimensão de Hausdorff-Besicovitch*,  $D_H$ , e *Dimensão de Caixa*,  $D_B$ , são atribuídas à mesma quantidade, mas de uma forma um pouco diferente uma da outra. De maneira não rigorosa, pode-se pensar que a conexão entre as duas é feita considerando-se que:

$$M_D(\alpha = D) \sim N(\varepsilon) \varepsilon^d, \quad (3.35)$$

de forma análoga a equação (3.4), ou seja, aproximando-se a extensão geométrica do objeto pelo número de caixas (de mesmo tamanho) necessárias para cobri-lo. Mas, uma vez que na definição da dimensão de caixa não há nenhuma etapa de otimização, e seu valor depende diretamente de  $N(\varepsilon)$  (o que não é o caso na dimensão de Hausdorff), na prática, tem-se que muitas vezes a extensão geométrica é superestimada, principalmente para  $\varepsilon$  grande ( $\varepsilon \rightarrow 1$ ), e assim,  $D_B \leq D$ . Contudo, no limite para  $\varepsilon$  pequeno, isto é,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as dimensões de Hausdorff-Besicovitch,  $D_H$ , e a dimensão de caixa,  $D_B$ , são iguais, tornando válido o processo de medida da extensão geométrica,  $M_D(\delta)$ , pelo algoritmo de contagem de caixas.

Considerando-se a partir de (3.35) que:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D} \quad (d \leq D \leq d+1), \quad (3.36)$$

e que

$$N(\varepsilon_{\max}) \sim \varepsilon_{\max}^{-D} \quad (d \leq D \leq d+1) \quad (3.37)$$

Logo dividindo-se (3.36) por (3.37) tem-se:

$$\frac{N(\varepsilon)}{N(\varepsilon_{\max})} \sim \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}} \right)^{-D} \quad (d \leq D \leq d+1) \quad (3.38)$$

tomando  $\varepsilon_{\max}$  a extensão total da grade que cobre o objeto tem-se que:

$$\varepsilon_{\max} = 1 \quad (3.39)$$

Logo a partir de (3.38)

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D} \quad (d \leq D \leq d+1) \quad (3.40)$$

Substituindo-se (3.40) em (3.35) tem-se:

$$M_D(\alpha = D) \sim \varepsilon^{\alpha-D}, \quad (3.41)$$

Esta equação é análoga a relação fundamental de Richardson para um comprimento fractal que será visto posteriormente.

### 3. 10 - Tipos de escalonamento

Os fractais podem aparecer na natureza, sob a forma de contornos ou perímetros, superfícies, e/ou volumes. A construção do ponto de vista matemático, se dá por iteração a partir de uma “semente”, seguindo-se uma regra básica de preenchimento do espaço, que pode ser de *coalescência* (Figura - 3. 9a), *fragmentação* ( Figura - 3. 9b) ou *crescimento* ( Figura - 3. 9c).

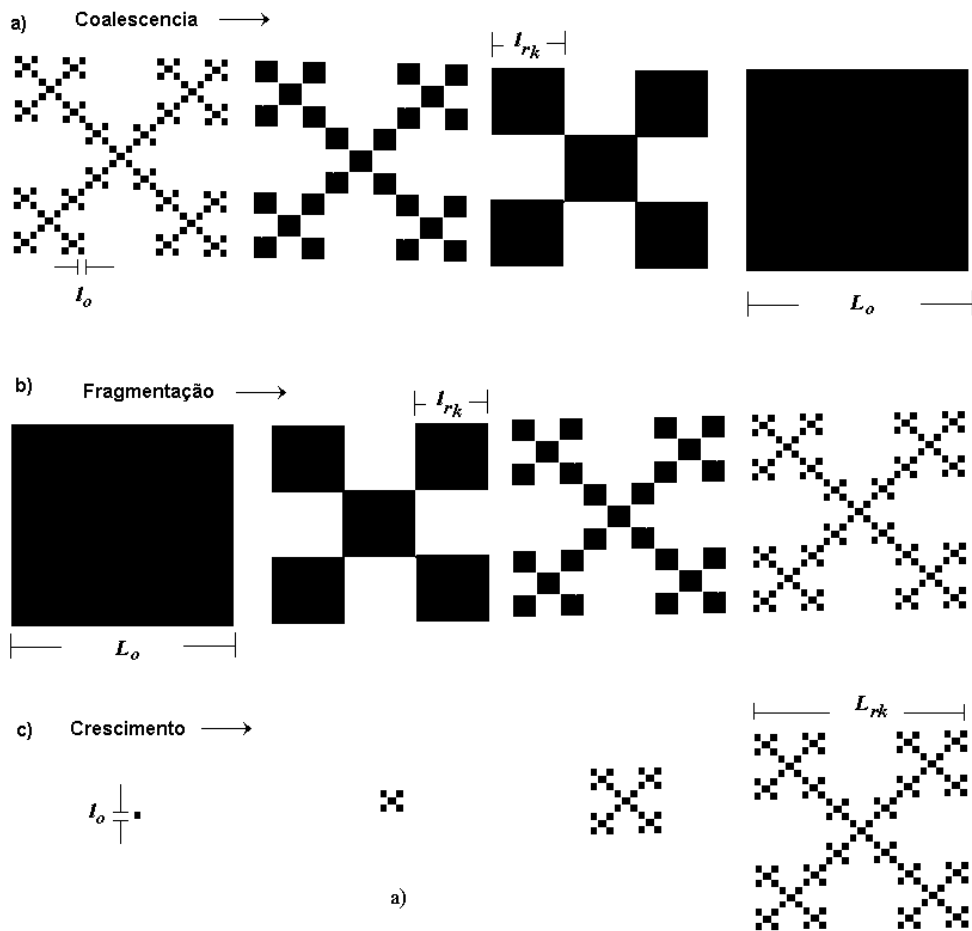


Figura - 3. 9. Construção matemática de um fractal, seguindo uma regra básica de preenchimento do espaço a) Coalescência:  $l_{rk} = \text{variável}$ ,  $L_o = \text{cte}$ , b) Fragmentação:  $l_{rk} = \text{variável}$ ,  $L_o = \text{cte}$  c) Crescimento:  $l_o = \text{cte}$ ,  $L_{rk} = \text{variável}$ .

O número de estruturas,  $N$ , e o fator de escalonamento,  $\varepsilon$ , da equação (3. 40), pode ser escrito de duas formas distintas, conforme mostra a Figura - 3. 9. O que dá lugar a duas formas de se interpretar a relação de auto-similaridade, (A1. 5), um sob a forma de crescimento e outra sob a forma de fragmentação ou coalescência. O *processo de crescimento fractal*, pode ser melhor aproveitado na descrição da *propagação de uma trinca* enquanto que o *processo de fragmentação fractal*, pode ser melhor aproveitado na descrição de processos de cominuição de um material. É certo, que se uma estrutura de dimensão,  $D$ , imersa em um espaço de dimensão euclidiana,  $d$ , é

fractal, a estrutura complementar formada pelos vazios do fractal com dimensão,  $\alpha = d - D$ , também é fractal. Porém, como os fractais têm uma lei de crescimento própria, onde cada parte é substituída pelo todo em escala reduzida, esta dinâmica de crescimento estabelece uma auto-similaridade ou auto-afinidade, que não acontece com os objetos euclidianos comuns. Desta forma a análise de uma situação ou de outra depende do que é considerada estrutura e do que são considerados vazios.

### 3.10.1 - Escalonamento estático e a medida da dimensão de uma estrutura fractal

O escalonamento estático tem origem nos trabalhos de Richardson e Mandelbrot. Ele trata da determinação da extensão e da dimensão de um objeto utilizando-se réguas ou unidades padrões de medida com diferentes tamanhos, ao contrário de uma simples medida em que se utiliza apenas um único tamanho de régua. O fato de ele ser estático significa dizer que durante a medida não há ocorrência de nenhum fenômeno de crescimento no qual a medida da extensão do objeto possa mudar com o tempo.

Figuras fractais já formadas podem ser escalonadas a partir de trechos de tamanhos,  $u$ , de forma a se obter analiticamente a expressão que mais se aproxima do escalonamento real do objeto em consideração. Para fractais estatisticamente auto-similares, o escalonamento fractal com uma única dimensão,  $D$ , representa uma medida média do processo global de escalonamento. Por outro lado, pode ser que o objeto em consideração seja um multifractal, ou seja, fractais contidos dentro de fractais, cuja dimensão varia continuamente a medida que o escalonamento é feito desde de escalas inferiores,  $\varepsilon_{min}$ , até escalas superiores,  $\varepsilon_{max}$ , ou ainda, fractais não-uniformes, cuja dimensão varia de região para região.

### 3.10.2 - Escalonamento dinâmico e a medida da dimensão de uma estrutura fractal

Aristóteles, Pascal, Richardson, Hausdorff, Besicovitch, Mandelbrot ao longos dos séculos foram os responsáveis pelos métodos de determinação das dimensões de uma figura geométrica estática. Contudo, para uma medida,  $M_{do}(\delta)$ , que a acompanha um crescimento fractal, é necessário que a extensão da régua,  $\delta$ , coincida exatamente com o tamanho do elemento de estrutura,  $l_r$ . Desta forma, poderá se descrever a velocidade de seu crescimento,  $v \sim dl_r/dt$ . No caso das trincas, sua estrutura é contínua, portanto um tamanho da régua,  $\delta$ , não necessita coincidir com o tamanho do elemento de estrutura. Mesmo porque a identificação deste sobre a trinca é de difícil visualização. A trinca é um fractal estatístico o seu elemento de estrutura,  $l_r^{-D}$ , possui um aspecto geométrico que pode modificar estatisticamente ao longo do seu crescimento, ou seja tanto o tamanho,  $l_r$ , pode mudar quanto a sua dimensão,  $D$ , formando o que chama-se de um multifractal.

Isto dificulta a sua visualização localizada, apenas é possível abstrair, a partir da mecânica da fratura, que tal elemento exista. para que sejam feitas as considerações necessárias ao modelo fractal da trinca.

Tanto para o escalonamento estático ou dinâmico existem várias técnicas para o cálculo da dimensão fractal “ $D$ ” de estruturas estatisticamente auto-similares ou auto-afins. Estas podem ser teóricas, por exemplo usando a densidade de correlação; experimentais; por exemplo, espalhamento de raios-X ou NMR e numéricas como por exemplo, o método de “box-counting”, “sand-box”, “compass-dimension” e outros. Neste capítulo, será descrito brevemente o método de “box-counting” e “sand-box”, que são as técnicas que serão empregadas na caracterização do fenômeno de fratura em materiais. Para um estudo detalhado das diferentes técnicas para o cálculo de “ $D$ ”, são recomendadas as leituras das referências [Barabási 1995; Bunde 1994; Vicsék 1992].

### **3. 11 - Métodos de Compasso para determinação da dimensão fractal de um objeto ou estrutura auto-similar ou auto-afim**

Nesta secção será feito uma descrição dos principais métodos de determinação da dimensão fractal e dos processos de escalonamento estático e dinâmico.

Na geometria euclidiana, sabe-se que um ponto não tem dimensão ( $d = 0$ ), uma reta possui dimensão unitária, ( $d = 1$ ) e um plano possui dimensão ( $d = 2$ ), e assim sucessivamente. Mas como provar por meios métricos ou analíticos a dimensão destes elementos? Aristóteles e outros elaboraram os métodos fundamentais, que foram úteis para se afirmar hoje em dia com precisão, a dimensão deles, conforme será visto a seguir:

Existem vários métodos de determinação da dimensão fractal baseado no método do compasso, entre eles destacam-se os seguintes métodos:

#### *3.11.1 - Método de Richardson para o cálculo da dimensão auto-similar de um objeto fractal*

Richardson (1920) criou um método geométrico de medida da extensão de costas marítimas baseado no escalonamento de uma função  $M(\delta)$  em termos do comprimento da régua de medida utilizada,  $\delta$ .

Na prática o diagrama de Richardson, mostrado na Figura - 3. 11, é obtido cobrindo-se a linha costeira com passos de tamanho  $\delta$  e contando-se quantos destes passos são obtidos para cada tamanho de régua  $\delta$ , conforme mostra a Figura - 3. 10.

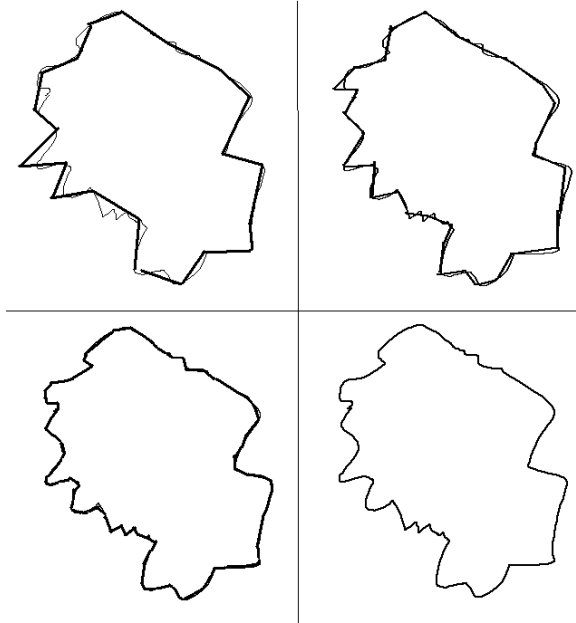


Figura - 3. 10. Método do compasso de Richardson usado no cálculo da dimensão fractal de uma linha costeira.

Richardson mostrou experimentalmente que o número deste passos  $N_D(\delta)$  é do tipo:

$$N_D(\delta) \sim \delta^{-D} \quad (3.42)$$

onde  $D$  é um número real.

Portanto a medida  $M_D(\delta)$  é dada por:

$$M_D(\delta) \sim N_D(\delta)\delta^d \quad (3.43)$$

Sendo a dimensão da unidade padrão de medida igual a dimensão da régua utilizada, isto é,  $d = 1$  a relação de Richardson de acordo com (3.41) fica sendo:

$$M_D(\delta) \sim \delta^{1-D} \quad (3.44)$$

Construindo-se um gráfico de  $M_D(\delta)$  em função de  $\delta$ , Richardson mostrou que os diferentes valores obtidos para  $M_D(\delta)$  cresce com uma lei de potência, conforme o tamanho da régua,  $\delta$ , diminui, isto é:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} M_D(\delta) = M_0 \delta^{d-D}, \quad (3.45)$$

onde  $d \leq D \leq d+1$ .

Segundo Richardson o valor mais preciso da medida  $M_D(\delta)$  é obtido conforme o tamanho da régua  $\delta$  tende a zero, ou seja:

$$\text{Para } \delta \rightarrow 0 \Rightarrow M_D(\delta) = M \quad (3.46)$$

lançando em um gráfico o logaritmo de  $M(\delta)$  em função do logaritmo de  $\delta$ , Richardson mostrou que os diferentes valores obtidos para de  $M(\delta)$  cresce com uma lei de potência conforme o tamanho da régua  $\delta$  diminui, isto é:

$$M_D(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_0 \delta^{d-D} = M, \quad (3.47)$$

Ao aplicar-se o logaritmo na expressão (3.45), obtém-se a equação de uma reta cuja inclinação fornece a dimensão fractal do perímetro da costa, ou do objeto geométrico em questão, ou seja, para  $d = 1$  tem-se:

$$D = 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_D(\delta)}{\ln \delta}. \quad (3.48)$$

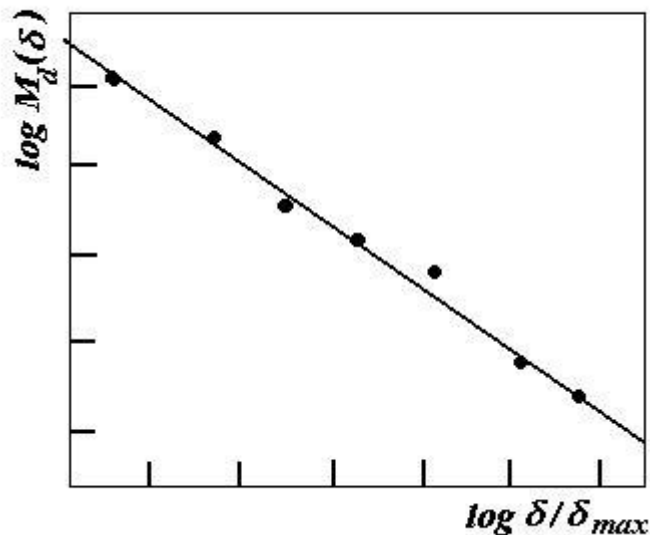


Figura - 3. 11. Diagrama de Richardson usado no cálculo da dimensão fractal de uma estrutura ou objeto.

Construindo-se um gráfico em escala logarítmica para relacionar o valor da medida  $M_d(\delta)$  da extensão de um objeto em função da régua de medida,  $\delta$ , obtém-se uma linha reta cuja inclinação corresponde ao expoente da expressão (3.45), conforme mostra a Figura - 3. 11. Este gráfico é chamado de “Diagrama de Richardson”. Ele corresponde a um procedimento de medida da extensão do objeto e também da determinação da dimensão deste objeto. No caso do objeto ser auto-similar ou auto-afim diz-se que o objeto possui um comportamento fractal.

Diagramas desta natureza podem ser obtidos a partir de medidas de diferentes objetos na natureza as quais apresentam um comportamento fractal entre um tamanho de régua mínimo e máximo ( $\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}$ ). Estes tamanhos de régua determinam escalas de corte mínima e máxima



( $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ ) onde  $\varepsilon = \delta / \delta_{\max}$ , conforme será demonstrado a seguir.

No diagrama de Richardson, os pontos de coordenada  $x$  e  $y$ , correspondem à medidas de régua tomadas arbitrariamente sobre a extensão do fractal. Contudo, se o tamanho da régua,  $\delta$ , foi escolhido exatamente igual ao tamanho do elemento de estrutura,  $l_r$ , em cada escala, então, haverá apenas pontos discretos sobre este diagrama por causa dos níveis discretos de escalonamento de uma estrutura fractal.

O método de Richardson proporciona uma medida do perímetro de objetos geométricos que possuam uma dimensão do tipo Hausdorff-Besicovitch, porém ele não pode ser utilizado para medida de objetos auto-similares. Neste caso é preciso estender o padrão de medida usado no método de Richardson de forma compatível com a dimensão da massa do objeto com um todo, ou seja, utilizando caixas de dimensão superior ao tamanho de régua de Richardson. Se bem que uma “régua de Richardson” também pode ser entendida geometricamente como uma caixa de dimensão unitária, mas que não se aplica quando a dimensão do objeto a ser medido é superior ( $d_o > 1$ ). Neste caso as “caixas” passam a ter dimensão,  $d = 2, 3, \dots$  conforme auto-similaridade do objeto a ser medido. A medida da dimensão auto-similar de um objeto pode ser feita por dois métodos básicos conforme será visto em seguida.

As linhas costeiras de Richardson estão ligadas a figuras planas que possuem um perímetro rugoso, formando continentes ou ilhas. Se for imaginado que estas ilhas são decorrentes do corte em nível de um relevo, isto é, de uma superfície de dimensão superior, pode-se procurar entender como está relacionada uma medida feita em um dado plano com a medida feita em outro plano, ou seja, o plano dos perfis destas superfícies.

Outra análise que pode ser feita a partir de uma superfície se forem feitos cortes verticais de forma a se obter o perfil destas superfícies. Nesta outro tipo de análise, realiza-se cortes verticais (ao invés de horizontais) em uma superfície rugosa, de forma a se obter os seus perfis. Vê-se claramente da Figura - 3.12 que uma superfície possui diferentes extensões nas direções paralelas aos planos de projeção e conseqüentemente diferentes perfis podem ser obtidos. Neste caso a análise da dimensão  $D$  usando caixas de tamanho,  $\delta$ , deve respeitar a direção sobre a qual as caixas se estendem. Vê-se claramente que um perfil possui diferentes extensões nas suas diferentes direções perpendiculares. Portanto de forma a compatibilizar o método de análise com o aspecto da figura, utiliza-se tamanho de caixas diferentes,  $\delta_x$  e  $\delta_y$  nas direções vertical e horizontal da figura respectivamente.

### 3.11.2 - Análise pelo método das ilhas cortadas de Mandelbrot

O Método das Ilhas Cortadas (MIC), elaborado por Mandelbrot, baseia-se na análise das superfícies de nível da topografia apresentado pela superfície rugosa ( Figura - 3.12). Ele utiliza a relação entre perímetro,  $P$ , e área,  $A$ , [Mecholsky 1989] dada pela seguinte expressão:

$$A^{1/2} \sim P^{1/D} \quad (3.49)$$

onde  $D$  corresponde a dimensão auto-similar encontrada pelo método de Richardson.

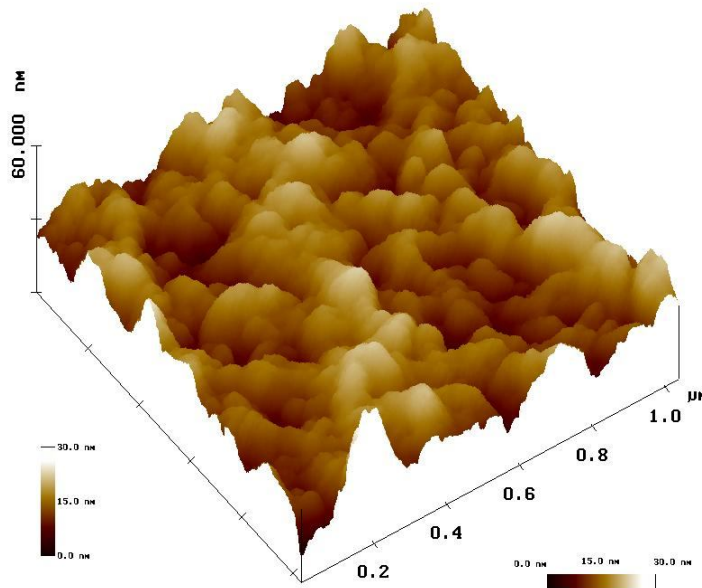


Figura - 3.12. Superfície irregular ou rugosa obtida por microscopia de força atômica e utilizada como exemplo para análise pelo método das ilhas cortadas, a qual apresenta escalonamento fractal com dimensão  $D$  entre:  $2 \leq D \leq 3$ .

Este método procede da geometria euclidiana. Figuras geométricas regulares, da geometria euclidiana, possuem relações matemáticas com expoentes inteiros, quando se expressa grandezas tais como: perímetro, área, volume, em função de um comprimento unitário  $u$ . Normalmente, uma figura geométrica deste tipo, possui expressões analíticas capazes de definir estas grandezas como sendo:

Perímetro:

$$P = C_1 u^d \quad (3.50)$$

Área:

$$A = C_2 u^{d+1} \quad (3.51)$$

Volume:

$$V = C_3 u^{d+2} \quad (3.52)$$

Escrevendo-se duas delas, isto é, uma em função da outra, tem-se:

Área em função do Perímetro:

$$A = C_2 \left( \frac{P}{C_1} \right) u^{\frac{d+1}{d}} \quad (3.53)$$

Volume em função da Área:

$$V = C_3 \left( \frac{A}{C_2} \right) u^{\frac{d+2}{d+1}} \quad (3.54)$$

Volume em função do Perímetro:

$$V = C_3 \left( \frac{P}{C_1} \right) u^{\frac{d+2}{d}} \quad (3.55)$$

Observe que, ao se tomar o logaritmo de qualquer uma das expressões acima, para se obter o valor do expoente,  $d$ , num gráfico  $\log x \log$ , variando-se o tamanho da escala,  $u$ , ter-se-á necessariamente que este  $d$  será inteiro. Porém, para uma fractal isto não acontece. O que Mandelbrot fez foi usar este fato, generalizando-o agora para figuras fractais, cuja dimensão  $D$  não é inteira. Seu método consiste em lançar em um gráfico  $\log x \log$  o valor de duas destas grandezas, área e perímetro, por exemplo, variando-se o tamanho da sua escala de medida  $u$ . Ele percebeu que superfícies irregulares, como as de fratura, por exemplo, possuem curvas de níveis que determinam verdadeiras ilhas, ( Figura - 3.13), com linhas costeiras que seguem um escalonamento fractal, análogo as ilhas normalmente encontradas no *mapa mundi*, as quais ele chamou de “ilhas cortadas”.

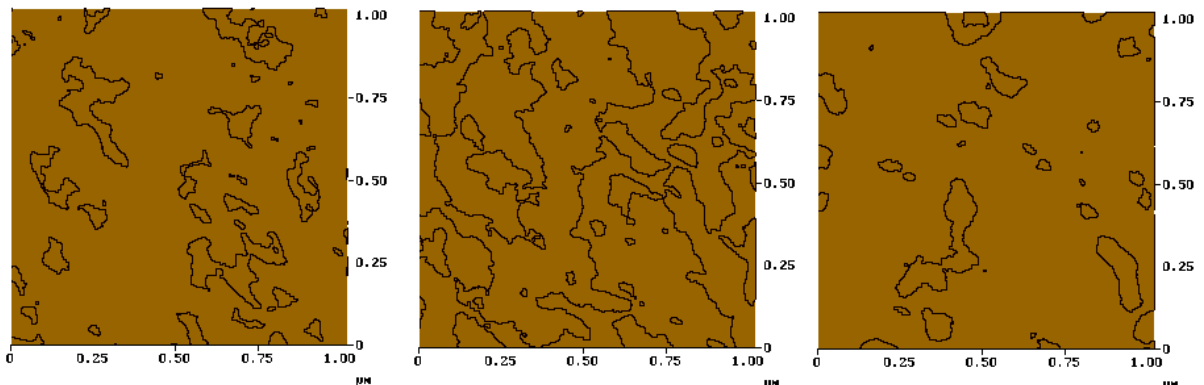


Figura - 3.13. “Áreas cortadas” em superfícies de níveis da Figura - 3.12.

Observa-se, portanto, através deste método, que uma ilha qualquer, encontrada no corte em nível de uma superfície de fratura, pode ser caracterizada de forma analítica por uma relação do tipo:

$$A = Cr^D \quad (3.56)$$

onde:

$C$  : é uma constante de proporcionalidade que depende da forma geométrica da ilha

$D$  : é a dimensão fractal da ilha cortada

$r$  : é o raio médio da ilha determinado pelo valor médio do tamanho dos segmentos que atravessam o centro geométrico da ilha. Observe que esta relação é válida para o conjunto de ilhas cortadas encontradas nos vários cortes em níveis da superfície de fratura.

De forma análoga, uma trinca radial sobre uma superfície plana, também pode gerar fragmentos similares a “ilhas cortadas” que também podem ser caracterizados por uma relação do tipo (3.56) conforme mostra a Figura - 3.14.

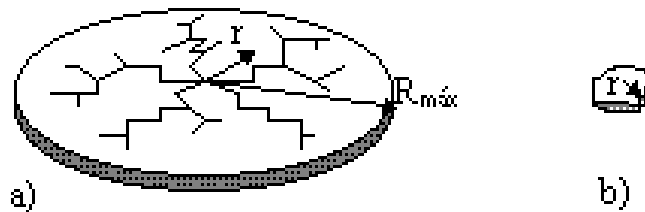


Figura - 3.14. a) Trinca radial num disco de espessura "e" e raio  $R_{máx}$ . b) fragmento fractal de raio  $r$  e espessura "e" análogo a uma ilha cortada.

Portanto, a análise de ilhas provenientes de cortes de superfícies em diferentes níveis recebeu o nome de método das ilhas cortadas. O MIC recebe um tratamento análogo ao método de Richardson. Porém, como as superfícies possuem dimensão superior a uma costa, pode-se pensar em cobrir a superfície das ilhas com caixas quadradas de tamanho,  $\delta$ , ao invés de passos sobre a costa destas ilhas, conforme mostra a Figura - 3.16. No MIC procura-se estabelecer uma relação entre a área e o perímetro destas ilhas, através de uma relação matemática do tipo

$$A_{kr}^{1/2} \sim P_{kr}^{1/D} \quad (3.57)$$

onde  $A_{kr}$  é a área destas ilhas e  $P_{kr}$  é o seu perímetro, o índice,  $k$ , diz respeito ao nível de profundidade do corte e o índice,  $r$ , diz respeito a ilha sob análise.  $D$  é a dimensão fractal da superfície que corresponde a dimensão auto-similar encontrada pelo método de Richardson, mostrado na [secção – 3.11.1](#).

Cortes em nível da superfície rugosa de fratura são feitos em várias profundidades,  $k$ , por meio do polimento da superfície. Após estes cortes, secções planas da fratura em forma de ilhas

aparecem sobre a secção transversal do corpo de prova, conforme mostra a Figura - 3.13 e Figura - 3.15a.

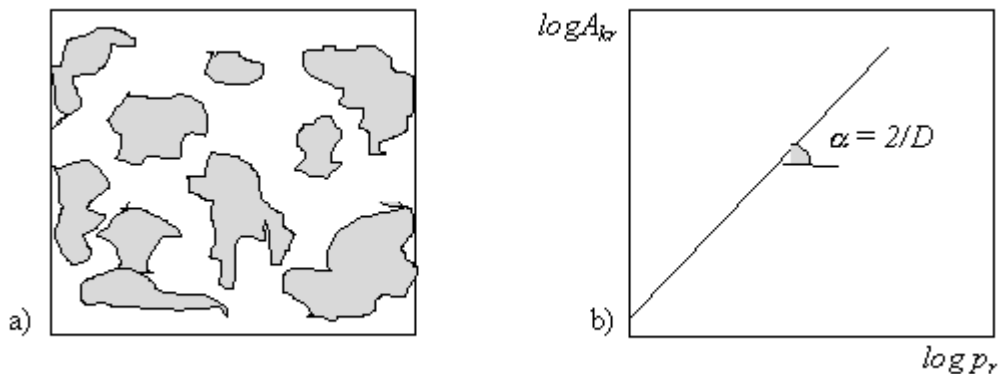


Figura - 3. 15. Método de análise das ilhas cortadas, para medida da dimensão fractal da superfície de fratura. a) Corte em nível da superfície de fratura. b) Gráfico  $\log A_{kr} \times \log P_{kr}$  destas ilhas.

A relação (3. 57) significa que as medidas das áreas graficadas em função das medidas dos perímetros correspondentes de várias ilhas, para um mesmo nível,  $k$ , de seccionamento em profundidade de uma superfície fractal, dão como resultado o valor da dimensão fractal, calculada pela inclinação da reta obtida num gráfico do tipo  $\log A_{kr} \times \log P_{kr}$  ( Figura - 3. 15b), ou seja:

$$\log A_{kr} \sim \frac{2}{D} \log P_{kr} \quad (3. 58)$$

Esta é uma fórmula aproximada que depende de vários fatores, os quais serão discutidos no Capítulo – VII: Resultados Experimentais, na secção 7.7.3.

### 3. 12 - Métodos de Contagem de Caixa para determinação da dimensão fractal de um objeto ou estrutura auto-similar ou auto-afim

Há basicamente duas formas de se recobrir um objeto com caixas. Na primeira toma-se caixas de tamanhos diferentes que se prolongam desde um tamanho mínimo,  $\delta_{\min}$ , até um tamanho máximo,  $\delta_{\max}$  a partir de uma origem fixa recobrimdo todo o objeto de uma só vez. Na segunda maneira, um dos lados do recobrimento é mantido fixo, e com um valor mínimo de tamanho de régua recobre-se a figura movendo-se a fronteira desse recobrimento desde o tamanho mínimo até o tamanho máximo do objeto. O primeiro método é conhecido como método Box-Counting exemplificado na Figura - 3. 16 e o segundo é conhecido como método Sand-Box, exemplificado na Figura - 3.17. A vantagem do segundo sobre o primeiro é que este detecta a variação da dimensão,  $D$ , com a extensão do objeto. Se o objeto sob análise possui uma dimensão

local para caixas com tamanho,  $\delta \rightarrow 0$ , diferente da dimensão global,  $\delta \rightarrow \infty$ , diz-se que o objeto fractal é auto-afim. Caso contrário o objeto é dito auto-similar. Esses dois métodos principais de contagens de estruturas que podem levar a determinação da dimensão fractal de um objeto Bunde (1994).

### 3.12.1 - O método Box-Counting de contagem pelo escalonamento estático dos elementos de uma estrutura fractal

O método Box-Counting, procede da teoria dos fenômenos críticos da mecânica estatística. Em mecânica estatística, existe um método matemático, análogo a este, para se descrever fenômenos que apresentam propriedades de auto-similaridade, o qual permite realizar transformações de escala, sem perda de generalidades na descrição das informações físicas do fenômeno, que vão desde grandezas como volume até energia. Porém, no caso descrito aqui, o método Box-Counting consiste em preencher o espaço ocupado por um objeto fractal com caixas de tamanho  $u$  arbitrário, e contar o seu número em função do tamanho  $u$  dessas caixas, ( Figura - 3.16 e Figura - 3.17). Este número  $N(u)$  de caixas, é dado da seguinte forma:

$$N(u) = Cu^D \quad (3.59)$$

Lançando-se os dados num gráfico  $\log x \log$ , obtém-se, a partir da inclinação da curva obtida, a dimensão fractal do objeto.

No método Box-Counting ( Figura - 3.16), subdivide-se o objeto em  $n_k = L_0 / \delta_k$  caixas iguais de lado  $\delta_k$  e conta-se quantas destas caixas cobrem o objeto. Em seguida, varia-se o tamanho das caixas e refaz-se a contagem. Fazendo-se o gráfico do logaritmo do número  $N_k$  de caixas que cobrem o objeto pela escala de cada subdivisão ( $\varepsilon_k = \delta_k / L_0$ ), obtém-se a partir da inclinação deste gráfico a dimensão fractal. Observe que neste caso a partição máxima é alcançada quando  $N_\infty = L_0 / \delta_k (k \rightarrow \infty) = L_0 / l_0$ , onde  $L_{\max} = L_0$  é o comprimento projetado da trinca e  $\delta_\infty = l_0$  é o comprimento da menor régua de medida possível na prática.

Portanto, o número  $N_k(\delta_k)$  em função do tamanho,  $\delta_k$ , dessas caixas é dado da seguinte forma:

$$N_k(\delta_k) = \left( \frac{\delta_k}{\delta_{\max}} \right)^{-D} \quad (3.60)$$

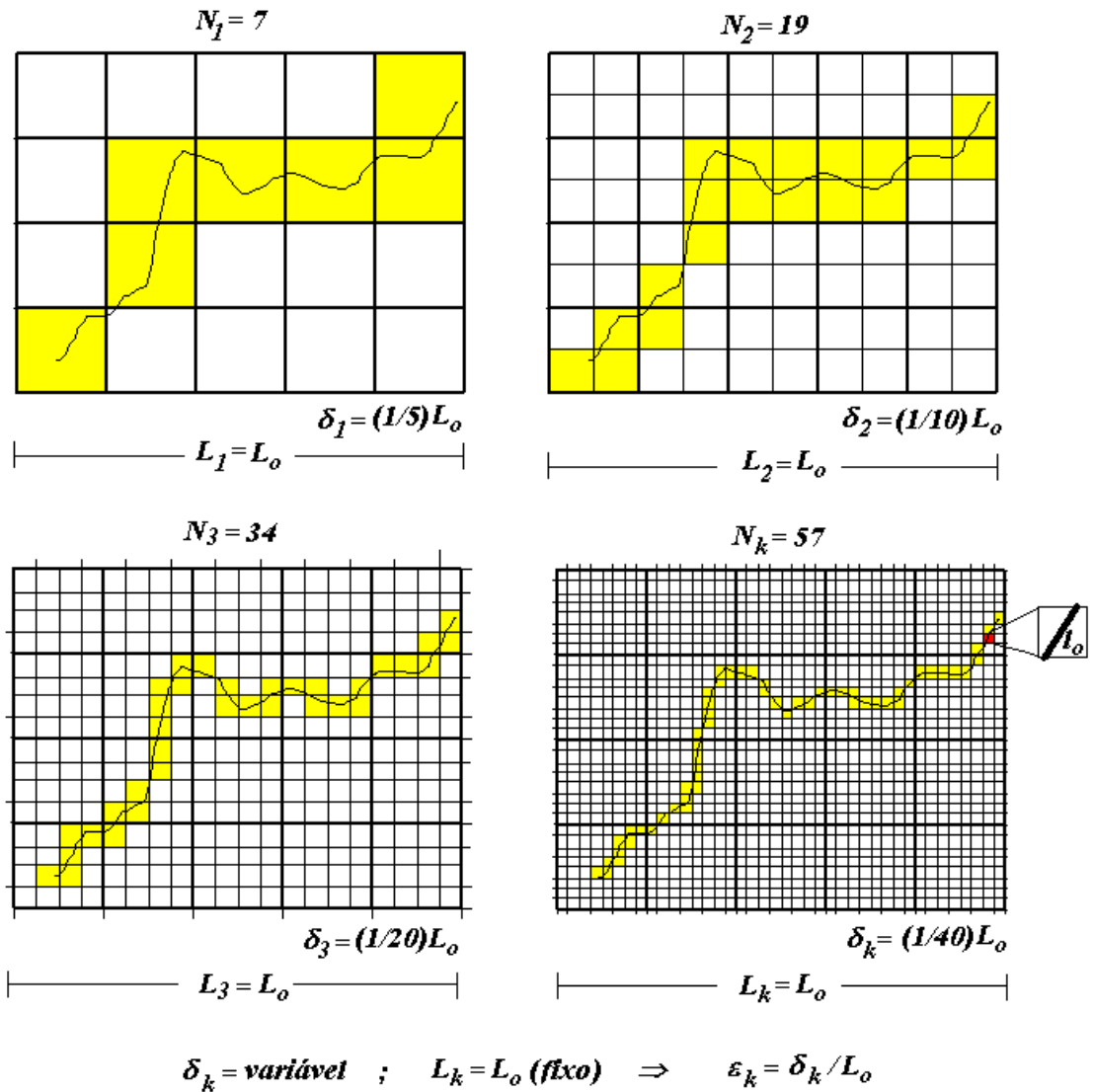


Figura - 3. 16. Trecho de uma trinca sobre um corpo de prova, mostrando a variação da medida do comprimento,  $L$ , da trinca com a escala de medida,  $\varepsilon_k = \delta_k / L_0$ , para uma partição,  $\delta_k = \text{variável}$  e  $L_k = L_0$  (fixo), com seccionamento feito para contagem segundo o método de escalonamento Box-Counting unidimensional.

Na Figura - 3. 16 ilustra-se o uso deste método em um objeto fractal. São apresentadas diferentes grades, ou malhas, construídas de forma a cobrir toda a estrutura, cuja dimensão fractal se deseja conhecer. As malhas são desenhadas a partir de um quadrado original, envolvendo todo o espaço ocupado pela estrutura. Em cada estágio de refinamento da malha ( $L_0$ ) (o número de partes iguais em que o lado do quadrado é dividido) são contados o número de quadrados,  $N(L_0)$ , que contêm parte da estrutura. Repetidamente, a partir dos dados encontrados, constrói-se o gráfico de  $\log L_0 \times \log N(L_0)$ . Se o gráfico, assim obtido, for uma reta, então o comportamento da estrutura tem auto-similaridade ou auto-afinidade estatística ou fractal, cuja dimensão,  $D$ , é obtida pelo cálculo do coeficiente angular da reta. Para estruturas mais compactas, é recomendável fazer uma estatística, isto é, repetir a contagem dos  $N(L_0)$  para diferentes

quadrados construídos a partir do centro de gravidade da estrutura (quadrados com lados diferentes). Desta forma, obtém-se um conjunto de valores de  $N(L_0)$  para outro conjunto de valores de  $L_0$ . Estes dados são tratados estatisticamente para obter o valor da dimensão fractal, "D".

Do ponto de vista da medida experimental, pode-se pensar em usar diferentes métodos de visualização da trinca para a obtenção da dimensão fractal, tais como: microscópio ótico, microscópio eletrônico, microscópio de força atômica, etc., os quais apresentam naturalmente diferentes régua  $\delta_k$  e conseqüentemente diferentes escalas de medida,  $\epsilon_k$ .

A dimensão fractal é normalmente calculada usando o método Box-Counting representado na Figura - 3. 16, ou seja, variando-se o tamanho  $\delta_k$  da régua de medida e, contando-se o número de caixas,  $N_k$ , que cobrem a estrutura, no caso uma trinca, obtém-se a dimensão fractal pela relação

$$D = -\frac{\ln N}{\ln(l_o / L_o)} \quad (3. 61)$$

A descrição de uma trinca segundo o método Box-Counting segue a idéia mostrada na Figura - 3. 16, cujo resultado é:

$$D = -\frac{\ln 57}{\ln(1/40)} = 1.096 \quad (3. 62)$$

O mesmo resultado pode ser obtido usando o método Sand-Box, conforme mostra a Figura - 3.17.

### *3.12.2 - O método Sand-Box de contagem pelo escalonamento estático dos elementos de uma estrutura fractal*

O método Sand-Box consiste, da mesma forma que o método Box-Counting, em contar o número de caixas,  $N(u)$ , porém, com tamanho fixo,  $u$ , o menor possível, estendendo-se gradativamente a fronteira da contagem até atingir-se a fronteira do objeto em consideração. Isto é feito fixando-se inicialmente, a origem da contagem a partir de um ponto fixo sobre o objeto, conforme mostra a Figura - 3.17. Este método parece ser o mais vantajoso, pois além de se estabelecer um sistema de coordenadas, ou uma origem, para o cálculo da dimensão fractal, ele também permite, em certos casos, inferir dados dinâmicos a partir do escalonamento estático, conforme demonstra Alves (1998).



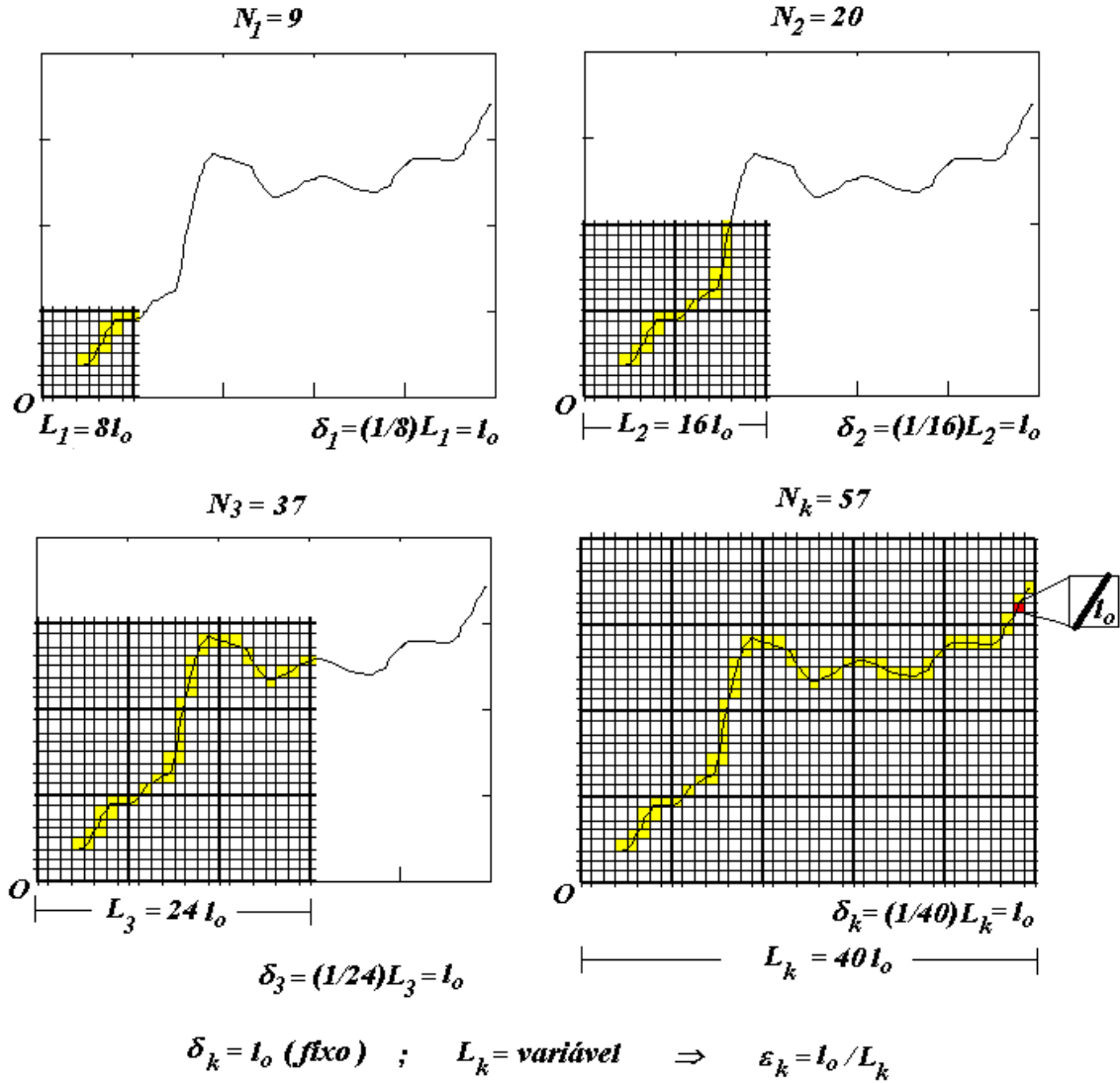


Figura - 3.17. Trecho de uma trinca sobre um corpo de prova, mostrando, a variação da medida do comprimento,  $L$ , da trinca com a escala de medida  $\varepsilon_k = l_0 / L_k$ , para uma partição,  $L_k = \text{variável}$ ,  $\delta_k = l_0$  (fixo), com seccionamento feito para contagem segundo o método de escalonamento Sand-Box unidimensional.

No método Sand-Box (Figura - 3.17), cobre-se a figura com caixas de tamanhos  $L_k$  diferentes, não importando a forma, que podem ser retangulares ou esféricas, porém, fixadas em um ponto “O” qualquer sobre a figura, denominado origem, a partir do qual as caixas são ampliadas. Conta-se o número  $N_k$  de estruturas elementares, ou sementes, que cabem dentro de cada caixa. Fazendo-se o gráfico de  $\log N_k \times \log(\varepsilon_k = \delta_{min} / L_k)$  obtém-se, da mesma forma que no método anterior a dimensão fractal. Observe que neste caso a partição máxima é alcançada quando  $N_\infty = L_k$  ( $k \rightarrow \infty$ ) /  $\delta_{min} = L_0 / l_0$ , onde  $L_\infty = L_0$  é o comprimento projetado da trinca e  $\delta_{min} = l_0$  é o comprimento da menor régua de medida possível na prática.

Este método é o mais recomendável a ser usado, quando se deseja calcular a dimensão fractal de estruturas em crescimento. A partir de um ponto (escolhido arbitrariamente) que pertence à estrutura fractal, cuja dimensão se quer calcular, constrói-se um quadrado imaginário

$L_k \times L_k (k=1)$ . O número de pontos,  $N_1(L_1)$ , que pertencem à estrutura, contidos dentro deste quadrado, é contabilizado. Então o quadrado é deslocado para outro ponto, dentro da estrutura, e novamente o número de pontos,  $N_2(L_2)$ , que ficam dentro do quadrado, é contabilizado. E assim por diante, até que toda a estrutura é varrida, deslocando-se o quadrado de lados  $L_k \times L_k (k=1)$  e contabilizando-se os  $N_1(L_k)$  em cada estágio. Em seguida, é mudado o tamanho do quadrado  $L_k \times L_k (k=2)$  e repetido todo o processo anterior. Finalmente tem-se um conjunto de valores  $N_i(L_k)$ , para diferentes valores dos quadrados  $L_k \times L_k (k=1,2,3,\dots)$  construídos imaginariamente. A partir destes dados, é feito um tratamento estatístico para o cálculo da dimensão fractal.

Do ponto de vista experimental, é preciso escolher um único método de medida, no qual são tomados diferentes extensões da trinca, para a variação da escala de medida  $\varepsilon$ , uma vez que o tamanho da régua ou partição  $\delta_{\min} = l_0$  se mantém fixa.

### 3.12.3 - Equivalência entre o método de contagem Box-Counting e o método Sand-Box

O escalonamento fractal admite uma auto-similaridade escalonável por uma lei de potência não inteira do tipo:

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D} \quad (3.63)$$

para fractais auto-afins esta relação é modificada e escreve-se:

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{2-H} \quad (3.64)$$

onde:

$d$  : é a dimensão da projeção sobre a qual o fractal de crescimento está apoiado.

$D$  é a dimensão fractal global do objeto.

$H$  : é o expoente de Hurst, dado por:  $H = 2 - D$ .

No método Box-Counting conta-se o número de estruturas elementares,  $N(\varepsilon)$ , de tamanho,  $\delta_k = l_k$ , depositada sobre um objeto fractal, variando-se a régua de medida,  $\varepsilon_k = \delta_k / L_{\max} = l_k / L_0$ , isto é, variando-se apenas o tamanho,  $\delta_k$ , das “caixas” para cada série de contagem, ao longo de todo o objeto, onde  $L_{\max} = L_0$  é o tamanho objeto já formado. Neste método admite-se um tamanho final fixo, igual ao tamanho do fractal em consideração,  $L_{\max} = L_0$ , e recobre-se toda a extensão do objeto com “caixas” de tamanho  $\delta_k$  variáveis, que podem ser: segmentos, para objetos imersos em  $1D$ ; quadrados, para objetos imersos em  $2D$  e cubos para

objetos imersos em  $3D$ . Variando-se o tamanho,  $\delta_k$ , das caixas, obtém-se diferentes escalas,  $\varepsilon_k = \delta_k / L_{\max}$ , de recobrimento. A varredura das escalas,  $\varepsilon_k$ , ocorre, variando-se  $\delta_k$  desde a escala,  $\varepsilon_{\max} = \delta_{\max} / L_{\max} = 1$ , onde  $\delta_{\max} = L_0$  (o tamanho do objeto) até a escala,  $\varepsilon_{\min} = \delta_{\min} / L_{\max}$  onde  $\delta_{\min} = l_0$  (o tamanho da semente do fractal), ou vice-versa, onde  $\varepsilon$  é dado de forma genérica por:

$$\varepsilon_k = \frac{\delta_k}{L_0} \quad (3.65)$$

e  $l_0 \leq \delta_k \leq L_0$

Portanto a relação (3.64) para fractais auto-afins, fica sendo:

$$N(\delta_k) = \left( \frac{\delta_k}{L_0} \right)^{2-H} \quad (3.66)$$

A medida da fronteira é feita a partir de uma origem,  $O$ , onde se fixa um sistema de coordenadas para o recobrimento e a partir deste, estende-se arbitrariamente a fronteira de recobrimento, até o limite final do tamanho do objeto onde  $L = L_{\max}$ .

Contando-se o número de “caixas”,  $N(\varepsilon)$ , que recobrem o objeto a cada escala de recobrimento,  $\varepsilon$ , e lançando-se em gráfico *log-log*, as quantidades  $N(\varepsilon) \times \varepsilon$ , obtém-se pela inclinação da reta a dimensão fractal,  $D$ , ou  $2 - H$  para o fractal auto-afim.

Enquanto que no método Sand-Box fixa-se uma origem,  $O$ , de um sistema de coordenadas e toma-se o número,  $N(\varepsilon)$ , de estruturas elementares de tamanho  $\delta_{\min} = l_0$ , a partir de “caixas” centradas nesta origem e estendendo-se a escala  $\varepsilon_k$ , correspondente ao tamanho das “caixas”, de forma que  $\varepsilon_k = \delta_{\min} / L_k = l_0 / L_k$ , onde  $\delta_{\min}$  é o tamanho fixo unitário de uma “caixa” menor, por exemplo, e  $L_k$  é a fronteira de outra “caixa” maior, de tamanho variável. Neste método considera-se o tamanho das “caixas” fixo igual ao tamanho da semente ou do elemento de estrutura fractal,  $\delta_{\min} = l_0$ , e recobre-se parte do objeto, variando-se a fronteira do recobrimento,  $L_k$ . A varredura em escalas,  $\varepsilon_k$ , é feita, variando-se o tamanho da fronteira,  $L_k$ , do recobrimento, desde a escala  $\varepsilon_{\max} = \delta_{\min} / L_{\min} = 1$ , onde  $L_{\min} = l_0$  (o tamanho da semente do fractal), até a escala  $\varepsilon_{\min} = \delta_{\min} / L_{\max}$ , onde  $L_{\max} = L_0$  (o tamanho do objeto), onde as diferentes escalas de recobrimento,  $\varepsilon$ , são dadas de forma genérica por:

$$\varepsilon_k = \frac{\delta_{\min}}{L_k} \quad (3.67)$$

onde  $l_0 \leq L_k \leq L_0$

Portanto a relação (3. 64) para fractais auto-afins, fica sendo:

$$N(\delta) = \left( \frac{\delta_{\min}}{L_k} \right)^{2-H} \quad (3. 68)$$

A medida da fronteira é feita a partir de uma origem,  $O$ , onde se fixa um sistema de coordenadas para o recobrimento e a partir deste, estende-se arbitrariamente a fronteira de recobrimento, até o limite final do tamanho do objeto onde  $L = L_{\max}$ .

Contando-se o número de “caixas”,  $N(\varepsilon)$ , que recobrem o objeto a cada extensão da fronteira de recobrimento,  $L$ , e lançando-se em gráfico *log-log*, as quantidades  $N(\varepsilon) \times \varepsilon$  obtém-se pela inclinação da reta a dimensão fractal  $D$  ou  $2 - H$  para o fractal auto-afim.

Observe que, quer por um método ou por outro, as relações acima (3. 66) e (3. 68). não dependem do método de contagem e garantem a equivalência entre o método de contagem Box-Counting com o método Sand-Box, pois elas não dependem da forma como é feito o escalonamento espacial.

Quando o objeto geométrico a ser analisado é do tipo auto-afim, diferentes dimensões são encontradas para cada método citado acima. Um exemplo de fractais auto-afim são por exemplo o relevo formado pelas ilhas ou continentes.

Observe que a medida exata nos dois casos é obtida quando  $\delta_k \rightarrow l_0$  no primeiro caso ou quando  $L_k \rightarrow L_0$ , o que equivale a relação  $\varepsilon_k (k \rightarrow \infty) = \delta_k / L_k = l_0 / L_0 \rightarrow 0$ , nos dois casos. A vantagem do segundo método em relação ao primeiro é que, no segundo, é possível acompanhar a propagação da trinca instantaneamente a medida que ela surge no material. Portanto um escalonamento dinâmico, como pode ser chamado, é possível a partir da relação:

$$N = \varepsilon^{-D} = \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{-D} \quad (3. 69)$$

Como será visto na discussão dos resultados no Capítulo – V esta é uma fórmula aproximada que depende de vários fatores.

# Capítulo IV

## MODELOS FRACTAIS PARA PERFIS E SUPERFÍCIES RUGOSAS DE FRATURA

*Eu irei adiante de ti, e tornarei planos os lugares escabrosos; quebrarei as portas de bronze, e despedaçarei os ferrolhos de ferro (Is 45,2).*

### 4.1 - Introdução

As duas principais problemáticas da descrição matemática da Mecânica da Fratura têm como base os seguintes aspectos: a rugosidade das superfícies geradas e o campo de tensão/deformação aplicados ao corpo de prova. Este capítulo trata da descrição matemática fractal do primeiro aspecto, isto é, da rugosidade de trincas na Mecânica da Fratura, usando a geometria fractal para modelar seus perfis irregulares. Nele serão apresentadas as premissas matemáticas básicas para se modelar e descrever as estruturas geométricas irregular das trincas e superfícies de fratura genéricas utilizando-se a geometria fractal. Na sequência, apresenta-se, também, a proposta de um modelo fractal auto-afim para superfícies rugosas de fratura. O modelo foi derivado de uma generalização da equação de Voss [1991]<sup>(6)</sup> e do modelo de Morel [2000] para superfícies de fratura fractais auto-fins. Uma expressão analítica geral para o comprimento rugoso da trinca como função do comprimento projetado e das dimensões fractais é obtida. Também é derivada a expressão da rugosidade, a qual pode ser diretamente inserida no contexto analítico da Mecânica Fratura Clássica.

Portanto, os objetivos deste capítulo são: (i) fundamentar os conceitos geométricos, extraídos da teoria fractal e aplicá-los à MFC, visando-se (ii) construir uma linguagem precisa, para a sua descrição matemática da MFC, dentro da nova visão da teoria fractal. (iii) sanar algumas das

---

<sup>6</sup> Voss apresentou uma descrição fractal para o ruído no movimento Browniano

dúvidas, que surgem quando se utiliza o escalonamento fractal na formulação de grandezas físicas que dependem da área rugosa de fratura, ao invés da área projetada, da forma como é comumente usada na mecânica da fratura. (iv) outro objetivo, é estudar a maneira com que o conceito de fractal pode enriquecer e elucidar vários aspectos mecânicos da fratura. Para isso, será feito inicialmente, neste capítulo, uma breve revisão bibliográfica dos principais avanços obtidos pela teoria fractal, no entendimento da fractografia e da formação das superfícies de fratura e suas propriedades. Em seguida, será feito, também, uma descrição matemática da nossa abordagem, visando-se unificar e esclarecer aspectos ainda desconexos entre a teoria clássica e a visão moderna, proporcionada pela geometria fractal. Desta forma, será possível ao leitor compreender quais foram as principais modificações conceituais introduzidas neste trabalho, bem como, o ponto a partir do qual os modelos propostos avançaram se desdobrando em novos conceitos, novas equações e novas interpretações do fenômeno.

#### *4.1.1 - Importância da Modelagem da Superfície de Fratura*

Uma superfície de fratura é um registro da informação deixada pelo processo de fratura. Mas a Mecânica da Fratura Clássica (MFC) foi desenvolvida idealizando-se uma superfície de fratura regular lisa e plana. Assim as bases Matemáticas da MFC consideram uma equivalência energética entre as superfícies de fratura rugosa (real) e a superfície projetada (idealizada) [Anderson, 1995]. Além da complexidade matemática, parte deste fundamento está associado às dificuldades de uma medida acurada da área real de fratura. De fato, a geometria das superfícies das trincas é geralmente rugosa e não pode ser descrita de forma matematicamente simples pela geometria euclidiana [Underwood e Banerji, 1986]. Embora existam vários métodos capazes de quantificar a área de fratura, os resultados são dependentes do tamanho da régua de medida utilizada [Dos Santos, 1999]. Desde o século passado todos os métodos de medida da superfície rugosa existentes não contribuíram para sua inserção no formalismo matemático analítico da MFC, até que surgiu a geometria fractal. Geralmente, a rugosidade de uma superfície de fratura possui geometria fractal. Portanto, é possível estabelecer uma relação entre sua topologia e as quantidades físicas da mecânica da fratura usando técnicas de caracterização fractal. Assim, com o surgimento da teoria fractal, tornou-se possível descrever e quantificar qualquer estrutura aparentemente irregular na natureza [Mandelbrot, 1982]. De fato, muitas teorias baseadas na geometria euclidiana estão sendo revistas. E foi experimentalmente provado que as superfícies de fratura possuem um escalonamento fractal, assim a Mecânica da Fratura é uma das áreas científicas incluídas neste contexto.

O formalismo matemático da MFC foi elaborado imaginando-se uma superfície de

fratura plana, lisa e regular. Porém, esta é uma idealização matemática, porque, na verdade, do ponto de vista microscópico e, em alguns casos até macroscópico, uma superfície de fratura constitui-se geralmente em uma estrutura irregular rugosa e de difícil descrição geométrica. Este tipo de simplificação matemática, mencionada acima, existe em muitas outras áreas das ciências exatas. Contudo, para tornar útil o formalismo matemático desenvolvido ao longo dos anos, Irwin passou a considerar a área projetada da superfície de fratura [Anderson 1995] como sendo energeticamente equivalente a área da superfície rugosa. Esta medida foi adotada, devido as dificuldades experimentais de se medir com precisão a área verdadeira da fratura, além da sua elevada complexidade matemática. Embora existam diferentes métodos capazes de quantificar a área verdadeira da fratura [Dos Santos 1999], o seu equacionamento dentro da mecânica da fratura não foi considerado, porque os valores resultantes das medidas experimentais dependiam do "tamanho da régua" utilizada pelos diversos métodos. Nenhuma teoria matemática havia surgido até então, capaz de resolver o problema, até que à algumas décadas surgiu a geometria fractal. Desta forma, a moderna geometria fractal pode contornar o problema da complicada descrição matemática da superfície de fratura, tornando-se útil no modelamento matemático da fratura.

Em particular, comprovou-se experimentalmente que as trincas e as superfícies de fratura seguem um escalonamento fracionário como era esperado pela geometria fractal. Logo, o modelamento fractal da superfície irregular de fratura se faz necessário, para se obter a correta quantificação da sua área verdadeira. Portanto, a mecânica da fratura está incluída no contexto acima e toda a sua teoria clássica, leva em conta apenas a superfície projetada. Porém, com o advento da geometria fractal, é necessário também revê-la modificando suas equações, para que a sua descrição matemática se torne mais autêntica e precisa. Com isto, é possível relacionar a caracterização geométrica fractal com as grandezas físicas que descrevem a fratura, incluindo-se a área verdadeira da superfície irregular da fratura ao invés da superfície projetada. Pensado nesta idéia, foi que Mandelbrot e Passoja [1984], desenvolveram o método de análise fractal das “*ilhas cortadas*”. Por meio deste método, eles procuraram correlacionar a dimensão fractal com as grandezas físicas já bem conhecidas da mecânica da fratura, apenas de uma forma empírica. Seguindo esse trabalho pioneiro, outros autores (Mu e Lung, 1988; Mecholsky *et al.*, 1989; Heping, 1989; Chelidze e Gueguen, 1990; Lin e Lai, 1993; Nagahama, 1994; Lei e Chen, 1995; Tanaka, 1996, Borodich, 1997), também fizeram considerações teóricas e geométricas com o objetivo de tentar relacionar os parâmetros geométricos das superfícies de fratura com as grandezas da mecânica da fratura, tais como: energia de fratura, energia de superfície, tenacidade a fratura, etc. No entanto, alguns equívocos foram cometidos em relação a aplicação da geometria fractal na mecânica da fratura

Vários autores tem sugerido diferentes modelos para as superfícies de fratura ( Bouchaud, 1977, 1990, 1994, 1997). Todos sabem que no momento em que for possível modelar

genericamente uma superfície de fratura, independentemente do tipo de material fraturado, isto permitirá uma descrição analítica dos fenômenos decorrentes da rugosidade destas superfícies dentro da Mecânica da Fratura. Desta forma a Mecânica da Fratura poderá incorporar os aspectos fractais das superfícies de fratura explicando de forma mais apropriada as propriedades dos materiais de uma forma geral. Neste trabalho propõem-se um modelo genérico, que se deriva em diferentes casos de superfícies de fratura, procurando retratar a variedades de aspectos geométricos encontrados nestas superfícies para diferentes materiais. Para tanto uma conceituação matemática básica será necessária a qual passa-se a descrever a seguir. Por esta razão faz-se na secção seguinte uma rápida revisão bibliográfica dos avanços obtidos pelos pesquisadores da teoria fractal e da Mecânica da Fratura no sentido de se obter uma descrição matemática de uma superfície de fratura suficientemente completa para ser incluída no arcabouço analítico da Mecânica da Fratura.

#### *4.1.2 - Revisão Bibliográfica - Modelos de Escalonamento Fractal de Superfícies de Fratura*

Mosolov (1993) e Borodich (1997) foram os primeiros a associar as energias de deformação e de superfície envolvidas na fratura com os expoentes de rugosidade das superfícies geradas durante o processo de quebra das ligações químicas, separação das superfícies e conseqüentemente a dissipação de energia. Eles fizeram esta relação usando o campo de tensão. Mosolov (1993) e Borodich (1997) utilizaram a dependência fracionária dos expoentes de singularidade desse campo na ponta da trinca e a dependência fracionária dos expoentes escalonamento fractal das superfícies de fratura, postulando a equivalência entre as variações nas energias de deformação e de superfície. Bouchaud (1994) discordou do modelo de Mosolov (1993) e o reescreveu em termos das flutuações nas alturas das superfícies de fratura rugosa na direção perpendicular a linha de crescimento da trinca, obtendo uma relação entre os parâmetros críticos de fratura como  $K_{IC}$  e a variação relativa das flutuações da altura da superfície rugosa. Neste cenário foi conjecturada a universalidade do expoente de rugosidade de superfícies de fratura porque esse não dependia do material em estudo (Bouchaud, 1997). Esta suposição gerou controvérsias (Bouchaud, 1990) que levaram os cientistas a descobrir anomalias nos expoentes de escalonamento entre escalas locais e globais em superfícies de fratura de materiais frágeis. Family e Vicsék (1991) e Barabási (1995) apresentam modelos de escalonamento fractal para superfícies rugosas formadas em filmes por deposição balística. Baseados neste escalonamento dinâmico Lopez e Schmittbuhl (1998) propuseram um modelo análogo para superfícies de fratura, onde eles observaram anomalias no escalonamento fractal, com dimensões críticas de transição para o comportamento da rugosidade dessas superfícies em materiais frágeis. Neste sentido Lopez *et al.* (1997) emprestaram do modelo



de Family e Vicsék (1991) analogias que poderiam ser aplicadas à superfícies de fratura rugosa.

## 4.2 - Modelo analítico de uma superfície rugosa

### 4.2.1 - Definição de Superfícies

Uma superfície é uma aplicação  $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$ . Considere uma superfície rugosa cuja aplicação corresponde aos pontos sobre essa superfície, conforme mostra a Figura - 4. 1.

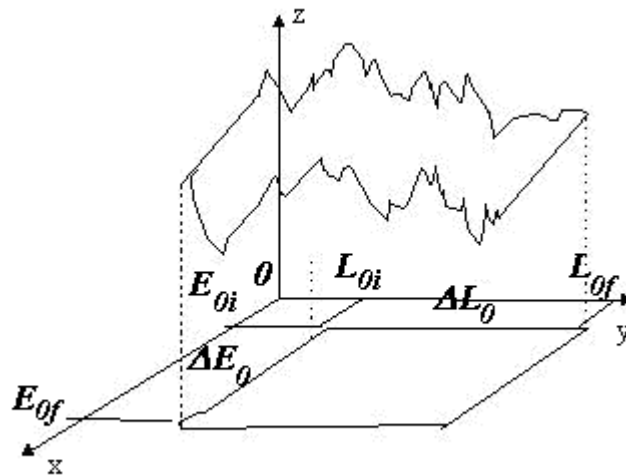


Figura - 4. 1. Aplicação  $(x, y) \rightarrow z = f(x, y)$  na forma de uma superfície rugosa genérica.

A área desta superfície pode ser escrita facilmente (Greenberg, 1998) como

$$dA = \left\| \vec{R}_x \times \vec{R}_y \right\| dx dy. \quad (4.1)$$

onde  $\vec{R}_x, \vec{R}_y$  são as derivadas parciais do vetor posição  $\vec{R}$  sobre a superfície e correspondem aos vetores tangentes a essa superfície, dados por:

$$\vec{R}_x = u_x \hat{i} + v_x \hat{j} + w_x \hat{k}. \quad (4.2)$$

e

$$\vec{R}_y = u_y \hat{i} + v_y \hat{j} + w_y \hat{k}. \quad (4.3)$$

logo a norma do vetor resultante é a raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes.

Executando o produto vetorial e calculado a sua norma, obtemos:

$$\left\| \vec{R}_x \times \vec{R}_y \right\| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
E &= u_x^2 + v_x^2 + w_x^2 \\
F &= u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y . \\
G &= u_y^2 + v_y^2 + w_y^2
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

no caso em que  $z = f(x, y)$  a superfície pode ser parametrizada de tal forma que:

$$\begin{aligned}
E &= 1 + f_x^2 \\
F &= f_x f_y . \\
G &= 1 + f_y^2
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

logo o elemento de área  $dA$

$$dA = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy . \tag{4.7}$$

A área rugosa  $\Delta A$  desta superfície no caso em que a superfície  $z = f(x, y)$  pode ser parametrizada e calculada de tal forma que (Greenberg, 1998):

$$A = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy . \tag{4.8}$$

Explicitamente, para um pequeno trecho de área  $\Delta A$ , resultante de fatias nos planos  $xz$  e  $yz$  (Figura - 4. 3), tem-se:

$$\Delta A = \int_{\Delta E_0}^{\Delta E_0 + \delta E_0} \int_{\Delta L_0}^{\Delta L_0 + \delta L_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy . \tag{4.9}$$

### 4. 3 - Superfícies Fractais

Considere uma superfície rugosa cuja aplicação corresponde aos pontos sobre essa superfície, conforme mostra a Figura - 4.2:

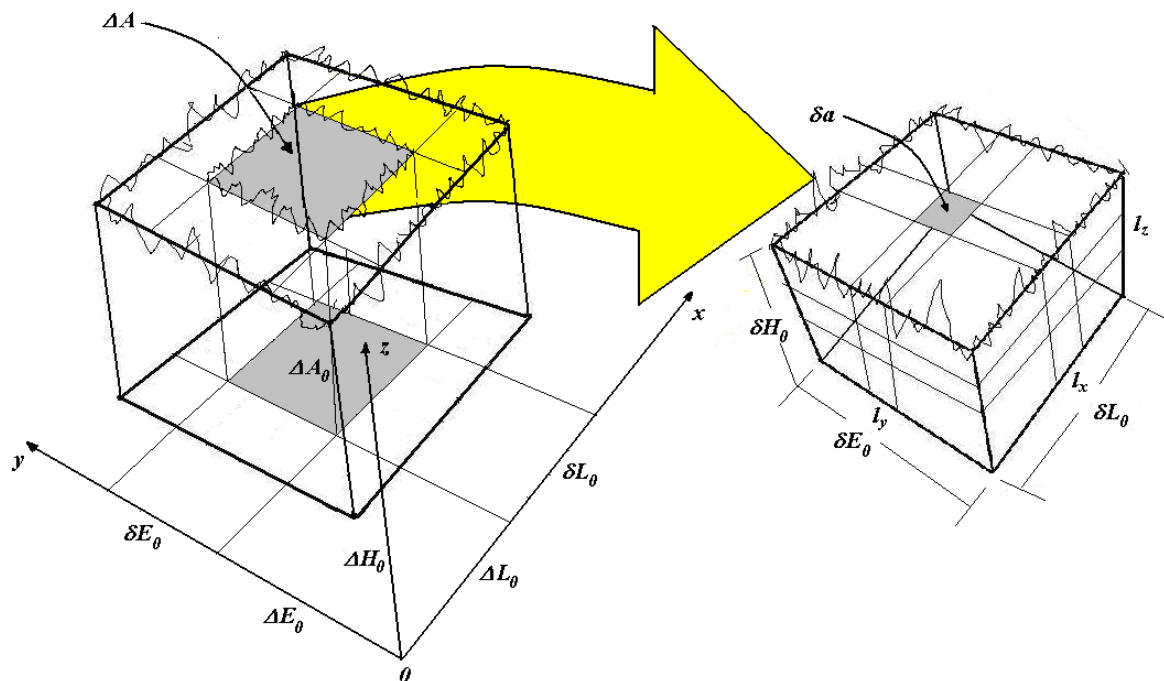


Figura - 4.2. a) Superfície rugosa genérica  $z = f(x,y)$ ; b) Visão próxima da superfície rugosa limitada por  $\delta L_0$  e  $\delta E_0$ .

Considere também que uma superfície de fratura foi seccionada em fatias nos planos  $xz$  e  $yz$ , conforme mostra a Figura - 4. 3:

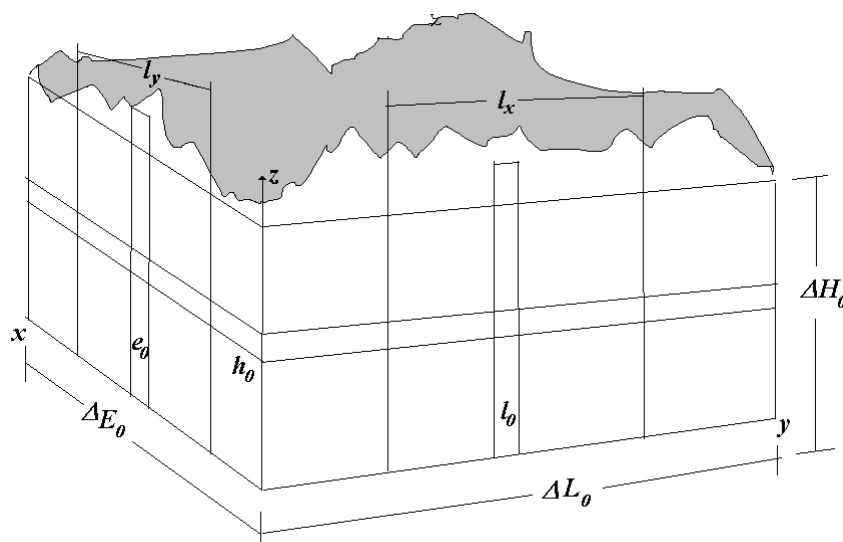


Figura - 4. 3. Figura esquemática de uma janela  $l_x, l_y$  de uma superfície de fratura fractal rugosa.

Para uma situação onde a superfície rugosa é discretizada por uma malha de tamanhos  $(l_x, l_y)$ , (com  $l_0 \leq l_x \leq \delta L_0$ ;  $e_0 \leq l_y \leq \delta E_0$ ) uma contagem de caixa é necessária para se estabelecer as relações entre as flutuações na altura da superfície e a área compreendida entre os

limites estabelecidos  $\delta L_0$  e  $\delta E_0$  de cada elemento da superfície rugosa, conforme mostra a Figura - 4. 3.

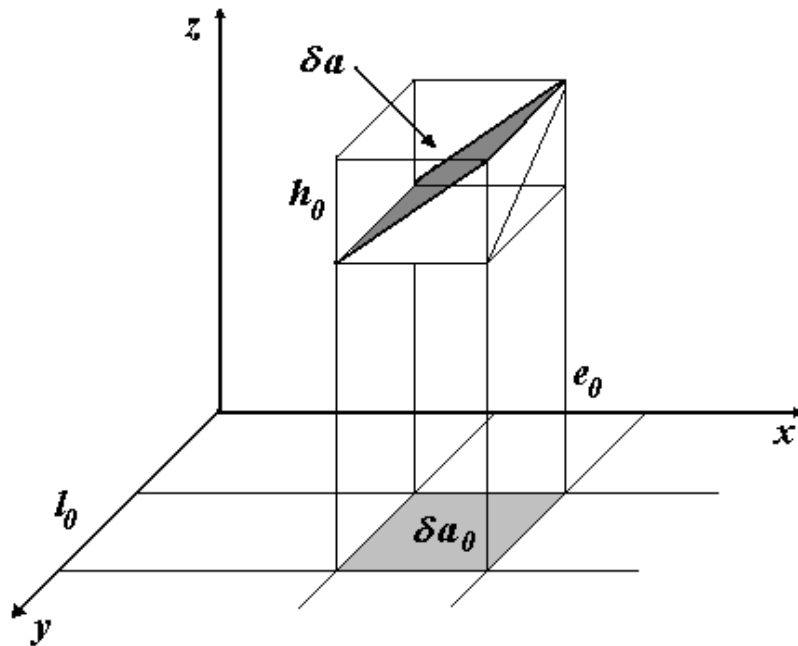


Figura - 4.4. Elemento mínimo de superfície de uma superfície rugosa genérica.

Desta forma, a área rugosa pode ser aproximadamente calculada por:

$$\Delta A = \int_{\Delta E_0}^{\Delta E_0 + \delta E_0} \int_{\Delta L_0}^{\Delta L_0 + \delta L_0} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta z_x(x, y)}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z_y(x, y)}{l_y} \right)^2} dx dy. \quad (4.10)$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{\Delta z_x}{\Delta x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} \cong \frac{\Delta z_y}{\Delta y}$ .

No caso de uma superfície de fratura real tem-se uma escala de corte inferior e outra superior. Logo, para superfícies com escalas inferiores de corte  $e_0, l_0$  e superiores  $E_0, L_0$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, a área  $\delta a$  de cada elemento projetado  $l_x$  by  $l_y$  conforme mostra a Figura - 4.4, é dado por:

$$\delta a \approx \lim_{\substack{l_x \rightarrow l_0 \\ l_y \rightarrow e_0}} l_x l_y \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta z_x}{l_x} \right]^2 + \left[ \frac{\Delta z_y}{l_y} \right]^2} = e_0 l_0 \xi \quad (4.11)$$

observe que o termo  $\xi = \delta a / e_0 l_0$  no limite mínimo, em (4.11), pode representar localmente a rugosidade da superfície de fratura

Para cada um dos planos  $xz$  e  $yz$  têm-se projeções da superfície de fratura na forma de perfis. Para se realizar a contagem das células que constituem toda a superfície deve-se

considerar para cada fatia o número de células nas direções longitudinal e transversal que interceptam o perfil. Observe que neste contexto a área superficial rugosa de uma superfície fractal pode se calculada considerando-se o número de elementos de área distribuídos nas direções  $x$  e  $y$  os quais são dados por:

$$N_x = \lim_{l_x \rightarrow l_0} \frac{\Delta L_0}{l_x} \cdot \quad (4.12)$$

e

$$N_y = \lim_{l_y \rightarrow e_0} \frac{\Delta E_0}{l_y} \cdot \quad (4.13)$$

onde  $l_0, e_0$  são os comprimentos da escala de corte mínima na direção longitudinal e transversal  $x$  e  $y$ , respectivamente. E toda a area  $\Delta A$  é dada por,

$$\Delta A \approx \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \delta a_{ij} = \delta L_0 \delta E_0 \left[ \frac{1}{N_x N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \xi_{ij} \right] \quad (4.14)$$

com  $N_x = \frac{\delta L_0}{l_x}$  e  $N_y = \frac{\delta E_0}{l_y}$ . e  $\Delta A = N_x N_y \delta a$  são os comprimentos da escala de corte mínima na direção transversal e longitudinal  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Para  $\Delta A = N_x N_y \delta a$ , tem-se que:

$$\Delta A = \delta E_0 \delta L_0 \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta z_x}{l_0} \right]^2 + \left[ \frac{\Delta z_y}{e_0} \right]^2} \cdot \quad (4.15)$$

Analogamente, o comprimento de um perfil rugoso pode ser calculado com

$$\Delta L \approx \sum_{i=1}^{N_x} \delta l_i = \delta L_0 \left[ \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \xi_i \right] \quad (4.16)$$

o qual é uma função do comprimento projetado  $\delta L_0$  no espaço euclidiano.

Para superfícies nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, tem-se discretizado com  $l_0$  e  $e_0$ :

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \lim_{\substack{l_x \rightarrow l_0 \\ l_y \rightarrow e_0}} \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta z_x}{l_x} \right]^2 + \left[ \frac{\Delta z_y}{l_y} \right]^2} \cdot \quad (4.17)$$

Considerando-se o problema de crescimento de trincas análogo ao descrito por Morel (1998, 2000), a direção de propagação adotada nesse trabalho será a direção  $y$ . Para um perfil na direção de propagação  $y$ , elimina-se a coordenada  $x$ , conforme mostra a Figura - 4. 17 e obtém-se:

$$\Delta L = \Delta L_0 \sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta z_y}{l_0} \right]^2}. \quad (4.18)$$

Esta é a expressão do perfil rugoso em função da sua projeção média sobre o plano euclidiano,  $\Delta L_0$ , na direção de propagação da trinca. De forma prática este comprimento do perfil de fratura  $\Delta L$  pode ser obtido pela aplicação do método Box-Counting (Figura - 3. 16) e o Método do Compasso (Figura - 3. 10) conforme será mostrado mais adiante na secção 4.9.2.

## 4. 4 - Propriedades das Superfícies Fractais

Uma superfície pode apresentar as propriedades de tortuosidade, rugosidade, fractalidade, lagunaridade e textura.

### 4.4.1 - Tortuosidade

A tortuosidade é uma propriedade que está relacionada com a variação da curvatura da superfície. O que significa que  $h = h(x,y)$  varia suavemente. Portanto, a superfície não deve possuir necessariamente um escalonamento fractal.

### 4.4.2 - Rugosidade

Uma superfície pode ser lisa ou rugosa. Contudo, existem diferentes definições de rugosidade. Cada uma delas é utilizada conforme a necessidade. Uma definição simples que satisfaz os propósitos da mecânica da fratura foi adotada neste trabalho.

A rugosidade é a propriedade que uma superfície apresenta em possuir diferentes aspectos geométricos,  $h = z - z_0$ , em função da posição  $(x, y)$ , ou seja, a variável  $z$  é uma função da posição  $(x, y)$ , isto é,  $z = z(x, y)$ , e  $z_0$  é uma coordenada espacial fixa, perpendicular ao plano de projeção da superfície. Portanto uma superfície será dita rugosa se  $z$  for diferente de  $z_0$  para qualquer ponto  $(x, y)$ . Neste sentido qualquer superfície plana que estiver apenas inclinada em relação a sua projeção apresentará  $z(x, y) \neq z_0$ . Mas para corrigir esta dificuldade em distinguir se uma superfície é rugosa, ou se esta se encontra apenas inclinada em relação a sua projeção plana, deve-se comparar a variação da extensão  $A(x, y)$  em relação a  $A_0(x, y)$  conforme a variação da coordenada espacial  $z(x, y)$  sobre a superfície, em relação as coordenadas planares  $(x, y)$ . Onde  $A$  é a extensão da superfície em questão e  $A_0$  é a extensão sua projeção

plana, medidas desde uma origem,  $O$ , de coordenada  $(0,0)$ , previamente fixada, até um ponto qualquer de coordenadas  $(x, y)$  sobre as superfícies, definidas a partir da origem,  $O$ . Portanto, uma superfície é dita rugosa, quando a sua área superficial,  $A(x, y)$ , varia localmente com a sua projeção plana,  $A_0(x, y)$ . Esta definição de rugosidade pode ser matematicamente expressa como:

$$\xi(x, y) = \frac{dA(x, y)}{dA_0} \quad (4.19)$$

portanto se  $\xi(x, y)$  for diferente de uma constante para dois pontos de coordenadas  $(x, y)$  diferentes, então diz-se que a superfície sob consideração é rugosa.

Por exemplo, para o caso de uma linha quebrada tem-se:

$$\frac{dA}{dA_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dA_0}\right)^2} \quad (4.20)$$

ou

$$dz = dA \operatorname{sen} \theta \quad (4.21)$$

e

$$dA = \frac{dA_0}{\cos \theta} \quad (4.22)$$

logo

$$dz = \frac{dA_0}{\cos \theta} \operatorname{sen} \theta \quad (4.23)$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dA_0} = \sqrt{1 + (\tan \theta)^2} \quad (4.24)$$

ou seja a rugosidade a cada ponto depende da tangente do ângulo de inclinação da linha rugosa em relação a sua projeção.

#### 4.4.3 - Fractalidade

A fractalidade é a propriedade que um objeto possui de apresentar<sup>(7)</sup> estruturas similares em um intervalo de escalas de ampliação, ou redução, com alguma similaridade entre elas . Para se identificar se um objeto possui algum tipo de fractalidade é preciso realizar a análise da dimensão do objeto, ou de partes dele. Esta análise pode ser feita por meio de uma operação de

---

<sup>7</sup> invariância por transformação de escala em partes ou no todo de sua extensão, com pelo menos uma dimensão fractal.

escalonamento, onde se compara a dimensão das diferentes partes do objeto com a dimensão de suas projeções euclidianas. Se esta for achada não-inteira diz-se que o objeto é um fractal.

É preciso cuidado, pois nem tudo que apresenta características fractais, ou fractalidade, são fractais. O aspecto fractal, ou a fractalidade, por exemplo, pode estar presente apenas no contorno do objeto, e não no corpo do objeto como um todo, como por exemplo os fractais chamados “gordos”. Por isso ele pode não ser genuinamente um fractal. Existe uma confusão conceitual em se admitir que todo fractal possua dimensão não-inteira. Isto não é verdade, pois existem fractais que possuem dimensão inteira igual a dimensão euclidiana de projeção do objeto. Contudo, as suas dimensões superiores são não-inteiras.

Considerando a fractalidade de uma superfície, uma superfície é dita rugosa quando em uma transformação de escala  $(\varepsilon_x x, \varepsilon_y y)$  das coordenadas  $(x, y)$  resulta em:

$$A(\varepsilon_x x, \varepsilon_y y) = \varepsilon_x^{1+d_{ey}} \varepsilon_y^{1+d_{ex}} A(x, y) \quad p / (d_{ex}, d_{ey} \neq 0) \quad (4.25)$$

onde  $d_{ex} = (D_x - d)$  e  $d_{ey} = (D_y - d)$  são as dimensões de excesso definidas no intervalo  $[0;1]$  e  $D_x$  e  $D_y$  são as dimensões fractais definidas no intervalo  $[1;2]$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente.

Chamando de dimensão de falta  $d_{fl}$  a dimensão dada por:

$$d_{fl} = 3 - (D_x + D_y) \quad (4.26)$$

Quando  $d_{ex} = d_{ey} = 0$  e conseqüentemente  $D_x = D_y = 1$ , tem-se que:

$$A(\varepsilon_x x, \varepsilon_y y) = \varepsilon_x^1 \varepsilon_y^1 A(x, y) \quad (4.27)$$

Considerando uma transformação de escala isotrópica,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ , da função  $z(x,y)$  resulta em:

$$A(\varepsilon x, \varepsilon y) = \varepsilon^2 A(x, y) \quad (4.28)$$

e a dimensão de falta é:

$$d_{fl} = 3 - (D_x + D_y) = 3 - 2 = 1 \quad (4.29)$$

Observe que como as dimensões de excesso  $d_{ex}$  e  $d_{ey}$  são nulas e a dimensão de falta é unitária a superfície situa-se em um plano logo a superfície é dita lisa, ou seja:

$$A(\varepsilon x, \varepsilon y) = \varepsilon^{1+D_f} A(x, y) = \varepsilon^2 A(x, y) \quad (4.30)$$



Uma superfície é dita lisa quando uma transformação de coordenadas  $(x, y)$  da função  $z(x, y)$  resulta em um valor constante para  $z(x, y)$ ,  $\forall (x, y)$ .

#### 4.4.4 - Lagunaridade

A lagunaridade é uma propriedade que define a variância da fractalidade  $M(L)$ :

$$L(L) = (\langle M^2(L) \rangle - \langle M(L) \rangle^2) / \langle M(L) \rangle^2 \quad (4.31)$$

onde  $M(L)$  é a massa do fractal, que corresponde a medida geométrica de sua extensão medido com o tamanho de régua,  $L$ .

#### 4.4.5 - Textura

A textura é uma propriedade que está relacionada com os diferentes aspectos microestruturais da rugosidade. Isto significa que as formas microestruturais presentes em uma superfície rugosa é que determina a sua textura.

### 4.5 – Tipos de Superfícies Fractais

Mandelbrot [1984] mostrou que as trincas e as superfícies de fratura são estruturas geométricas fractais. Portanto, elas que satisfazem o teorema de Euler para funções homogêneas. A partir desta constatação pode-se escrever as relações de escalonamento das superfícies de fratura rugosa e projetada em termos da definição das funções homogêneas de Euler, conforme será mostrado a seguir.

Em relação a fractalidade existe basicamente dois tipos de superfícies, as superfícies fractais auto-similares e as superfícies fractais auto-afins.

#### 4.5.1 - Superfícies fractais auto-similares

São superfícies invariantes por transformação de escala, ou seja, suas partes são semelhantes ao todo em qualquer escala geométrica de observação. Estas superfícies podem ser encontradas no contorno de objetos fractais, ou sobrepostas sobre uma superfície plana de projeção. Uma superfície deste tipo é dita auto-similar, quando ela pode ser escalonada homogeneamente e isotropicamente por uma relação de potência do tipo:

$$A(\varepsilon_x x, \varepsilon_y y) = \varepsilon_x^{1+d_{ey}} \varepsilon_y^{1+d_{ex}} A(x, y) \quad (4.32)$$

onde  $\varepsilon$  é um fator de transformação de escala. Para  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$  e  $d_{ex} = d_{ey} = (D - 2)/2$  tem-se:

$$A(\varepsilon x, \varepsilon y) = \varepsilon^D A(x, y) \quad (4.33)$$

onde  $D$  é o expoente de homogeneidade da superfície, também chamado de dimensão auto-similar, ou dimensão fractal de caixa, para o caso em que  $D \notin \mathbb{Z}$  (conjunto dos números inteiros)

Como a medida de uma superfície  $A(\delta)$  é dada por;

$$A(\delta) = \gamma(d) N(\delta) \delta^d, \quad (4.34)$$

onde  $d$ : é o expoente de homogeneidade da superfície de projeção sobre a qual a superfície em questão está apoiada. Este expoente corresponde também a dimensão euclidiana dos padrões unitários de recobrimento da superfície,  $\delta$ : é a extensão linear de um trecho unitário usada como padrão unitário de superfície, ou régua de medida, também chamado de régua do escalonamento fractal da superfície.

A partir de (4.34) tem-se que:

$$A(\varepsilon\delta) = \gamma(d) N(\varepsilon\delta) \varepsilon^d \delta^d \quad (4.35)$$

usando (4.34) em (4.35) e a propriedade dada em (4.33) tem-se que:

$$\gamma(d) N(\varepsilon\delta) \varepsilon^d \delta^d = \varepsilon^D \gamma(d) N(\delta) \delta^d \quad (4.36)$$

portanto

$$N(\varepsilon\delta) \varepsilon^d = \varepsilon^D N(\delta) \quad (4.37)$$

retornando a (4.34) para  $\gamma(d) = 1$  tem-se:

$$A(\delta) = \varepsilon^D \delta^d \quad (4.38)$$

Observe que se  $D = d$  tem-se uma superfície lisa ou plana, ou se  $D \neq d$  tem-se uma superfície fractal rugosa ou áspera.

No caso de uma superfície plana (lisa) tem-se que:  $D = d$ , logo:

$$A_0(\delta) = \varepsilon^d \delta^d. \quad (4.39)$$

O fator de transformação de escala,  $\varepsilon$ , pode ser expresso em termos da razão entre duas extensões lineares da superfície, como por exemplo:

$$\varepsilon = \delta / \delta_{\max} \quad (4.40)$$

No caso de uma superfície rugosa (ou áspera) tem-se que  $D \neq d$  logo

$$A(\delta) = \varepsilon^D \delta^d. \quad (4.41)$$

Como foi dito anteriormente, uma superfície auto-similar pode ser encontrada como

sendo o contorno de um objeto ou apoiada sobre uma superfície plana de projeção, conforme mostra a Figura - 4. 5. Nesta figura observa-se que um fractal de contorno auto-similar foi cortado adequadamente e sobreposto sobre uma superfície plana de projeção de dimensão euclidiana inteira.

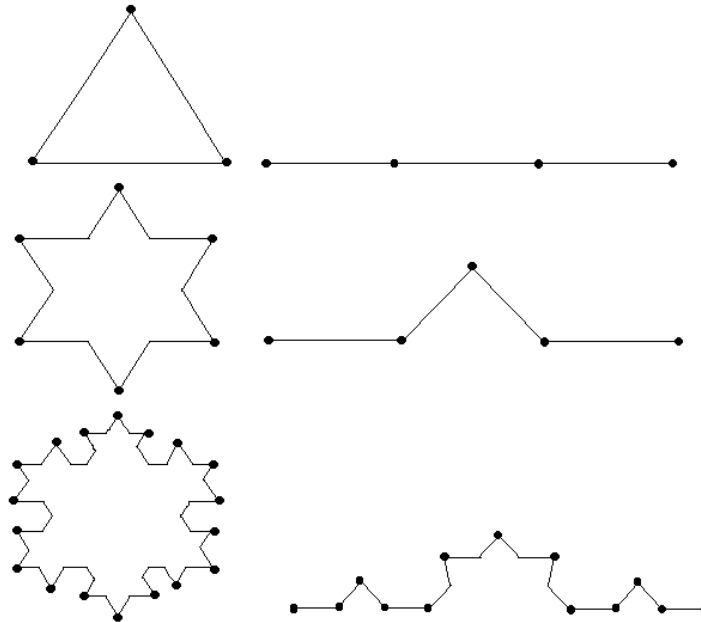


Figura - 4. 5. Fractal de contorno da ilha de Koch transformado em um fractal de superfície auto-similar pela sobreposição sobre uma superfície plana.

Observe que neste tipo de fractal, projetado sobre uma superfície plana, a extensão da superfície de projeção  $L_0$ , constitui-se em uma norma da extensão real representada pela projeção do fractal de contorno. Isto significa que não é possível imaginar um prolongamento da projeção do fractal, de contorno auto-similar, maior do que o comprimento,  $L_0$ . Pois se uma superfície tiver uma projeção maior do que a extensão da projeção,  $L_0$ , da Figura - 4. 5, só há sentido fazer uma correspondência biunívoca entre esta superfície e um fractal de contorno auto-similar, como a curva de Koch, por exemplo, se a extensão deste for normalizada pelo valor de  $L_0$ , coisa que não acontece com os fractais auto-afins, conforme será visto mais adiante.

### *Escalonamento fractal auto-similar de uma superfície rugosa de fratura*

Uma relação matemática entre a extensão do contorno auto-similar e a extensão da sua projeção é obtida da seguinte forma.

Seja  $A$  a extensão superficial do contorno fractal, dado por uma função homogênea auto-similar de grau,  $D$ , onde:

$$A(\varepsilon\delta) = \varepsilon^D A_u(\delta). \quad (4.42)$$

Seja  $A_0$  a extensão da projeção plana, dada por uma função homogênea auto-similar de grau,  $d$ , inteiro, de acordo com a expressão:

$$A_0(\varepsilon\delta) = \varepsilon^d A_u(\delta), \quad (4.43)$$

onde  $A_u(\delta) = \delta^d$ , é a área unitária de medida, cujos valores sobre a superfície rugosa e plana são iguais. Desta forma as relações (4.42) e (4.43) podem ser escritas de forma idêntica as equações (4.38) e (4.39). Logo, dividindo-se estas equações, tem-se:

$$A(\varepsilon\delta) = A_0(\delta) \varepsilon^{d-D}. \quad (4.44)$$

Uma ilustração das relações (4.42), (4.43) e (4.44) pode ser vista na Figura - 4.6.

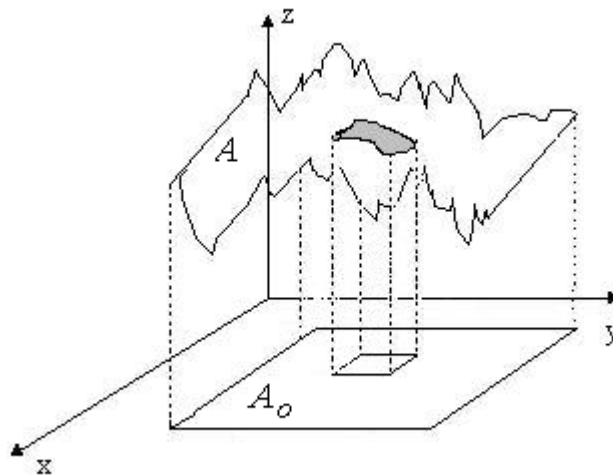


Figura - 4.6. Superfície rugosa formada por uma função homogênea  $A$ , de grau,  $D$ , cuja projeção plana,  $A_0$ , é uma função homogênea de grau,  $d$ , mostrando a superfície unitária  $A_u$ .

A superfície de fratura rugosa, pode ser considerada como sendo uma função homogênea de grau,  $D$ , ou seja,

$$A = A_k \varepsilon_k^{-D}, \quad (4.45)$$

e a sua projeção no plano, como sendo uma função homogênea de grau  $d = 2$ , ou seja,

$$A_0 = A_r \varepsilon_r^{-d}. \quad (4.46)$$

O índice,  $k$ , foi escolhido de forma a designar a superfície irregular num nível  $k$  de ampliação ou redução qualquer. O índice,  $r$ , foi escolhido para designar a superfície regular, num nível,  $r$ , e o índice,  $o$ , foi escolhido para designar a superfície de projeção correspondente à superfície rugosa,  $k$ .

Considerando-se que, para  $k = r$  e  $\varepsilon_k = \varepsilon_r$ , as áreas unitárias,  $A_k$  e  $A_r$ , são necessariamente iguais e dividindo-se as relações (4.45) e (4.46) tem-se:

$$A(\varepsilon_k) = A_0 \varepsilon_k^{d-D} . \quad (4. 47)$$

A relação (4. 47), significa que o escalonamento realizado entre uma superfície regular e uma outra irregular, deve ser acompanhado de um termo de potência do tipo  $\varepsilon_k^{d-D}$ . Desta forma, tem-se o escalonamento fractal, que relaciona as duas superfícies de fratura em questão: a superfície irregular ou rugosa, que contém a área verdadeira da fratura e a superfície regular, que contém a área projetada da fratura.

### *Escalonamento fractal auto-similar de um perfil rugoso de fratura*

A partir de agora será obtido uma relação entre o perfil rugoso e o perfil projetado da fratura de forma análoga à equação (4. 47), para uma fina placa plana ( Figura - 4. 7a e Figura - 4. 7b) de espessura  $e \rightarrow 0$ . Neste caso a área da superfície rugosa pode ser escrita como:

$$A = Le , \quad (4. 48)$$

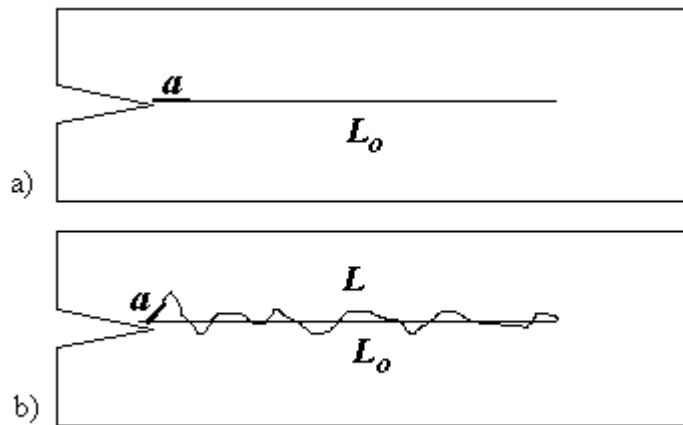


Figura - 4. 7. Escalonamento de um perfil rugoso de uma superfície de fratura ou de uma trinca, usando o tamanho mínimo de Mishnaevsky como “régua de medida”, a) caso de uma trinca retilínea não-fractal,  $d = D = 1$ ; b) caso de uma trinca retilínea tortuosa fractal  $d \leq D \leq d+1$ .

e a área da superfície projetada como

$$A_0 = L_0 e , \quad (4. 49)$$

de acordo com (4. 47) vale a relação:

$$L(\varepsilon_k) = L_0 \varepsilon_k^{d-D} , \quad (4. 50)$$

onde:  $L(\varepsilon_k)$  é o tamanho medido da trinca na escala  $\varepsilon_k$ ;  $L_0$  é o tamanho projetado da trinca medido na mesma escala, numa determinada direção.

#### 4.5.2 - Superfícies fractais auto-afins

Em primeiro lugar é preciso distinguir os fractais de contornos auto-similares projetados sobre superfícies planas, das superfícies fractais genuinamente auto-afins utilizadas para representar superfícies rugosas, como a superfície de fratura, por exemplo.

Fractais auto-afins são aqueles que possuem sua projeção em figuras regulares, tais como retas, planos, etc. e apresentam escalonamentos anisotrópicos nas diferentes direções perpendiculares,  $x$  e  $y$ . Ou seja, possuem dimensões fractais anisotrópicas (diferentes dimensões fractais,  $D_x$  e  $D_y$ , ). Isto é, a sua dimensão fractal depende da direção que é feito o escalonamento.

Para o caso de uma superfície auto-afim existem duas dimensões fractais,  $D_x$  e  $D_y$ , uma para cada direção, onde vale a relação:

$$3 - H = (D_x + D_y) \quad (4.51)$$

onde  $H$  é o expoente de Hurst e o número 3 representa a dimensão do espaço euclidiano no qual o fractal auto-afim se encontra imerso.

Uma superfície é chamada auto afim quando uma transformação de escala ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ) da aplicação  $A(x, y)$  resulta em:

$$A(\varepsilon_x x, \varepsilon_y y) = \varepsilon_x \varepsilon_y^H A(x, y) \quad (4.52)$$

Nestes fractais a rugosidade quadrática média é escalonada por uma relação do tipo.

$$R_q \sim \varepsilon^{-\alpha} \quad (4.53)$$

onde  $\alpha$  é o expoente de Lipshitz-Hölder.

Conclui-se que as considerações conceituais e matemáticas feitas neste capítulo são suficientes para fornecer os fundamentos lógicos para um modelamento fractal de uma superfície irregular como uma superfície de fratura, que é o objeto de estudo deste trabalho. Portanto, no capítulo que se segue usa-se as considerações do estudo da fractografia, de uma superfície de fratura, e as considerações da teoria fractal, feitas neste capítulo, para se chegar a um modelo satisfatório de uma superfície irregular de fratura.

## 4.6 - A formação das superfícies de fratura

No fenômeno da fratura, por ensaio de carregamento monotônico ou por impacto, de uma peça de metal, cerâmica, ou polímero, à medida que as ligações químicas entre os átomos do material são quebradas, produz-se duas superfícies complementares chamadas de superfícies de fratura. Devido a estrutura cristalina irregular destes materiais suas superfícies de fratura são

também geralmente irregulares, isto é, rugosas e de difícil descrição geométrica. A rugosidade que elas apresentam está diretamente relacionada com a microestrutura do material de que são formadas. Sendo assim, os diferentes aspectos microestruturais de um material (metal, cerâmica, ou polímero), que podem ser: grãos, inclusões, precipitados, etc., afetam o relevo da sua superfície de fratura (conforme foi exemplificado na Figura - 2. 6). Logo os diferentes tipos de defeitos presentes num material que agem como concentradores de tensão e influenciam na formação da superfície de fratura. Estes diferentes defeitos da microestrutura interagem com a ponta da trinca, enquanto ela caminha dentro do material, formando um relevo totalmente irregular à medida que as ligações químicas são quebradas, permitindo que os vazios vão se unindo (coalescência de vazios, etc.) e as superfícies de fratura se apartam. Por outro lado, as características macroestruturais tais como: o tamanho e a forma da amostra e o entalhe a partir do qual a fratura se inicia, também influenciam na formação da superfície de fratura, por causa do tipo de ensaio realizado e do campo de tensão aplicado ao corpo de prova.

Após as considerações feitas acima, pode-se dizer com segurança, que as informações do processo de fratura ficam em parte registradas na “história” que a trinca descreve, à medida que ela caminha no interior do material (Rodrigues 1996). O restante destas informações são perdidas para o meio externo na forma de energia irreversível tais como: som, calor, radiação, etc (Gross 1993, Sharon 1996). A parte das informações que permanecem, está sem dúvida nenhuma relacionada com o relevo da superfície de fratura que, de alguma forma, descreve a dificuldade que a trinca encontrou para se propagar (Rodrigues 1996). Com isto, pode-se analisar o fenômeno da fratura através do relevo descrito pela superfície de fratura e tentar relacioná-lo com as grandezas da mecânica da fratura. Esta foi a idéia básica que trouxe o desenvolvimento do estudo topográfico da superfície de fratura chamado de fractografia.

Dentro da fractografia, a descrição fractal de superfícies irregulares, surgiu como uma ferramenta poderosa capaz de descrever os padrões de fratura encontrados em materiais frágeis e dúcteis. Com esta nova caracterização tornou-se possível complementar a visão do fenômeno da fratura, resumindo as principais informações geométricas deixadas na superfície de fratura em apenas um número, “ $D$ ”, chamado de dimensão fractal. Portanto, admitindo-se que existe uma estreita relação entre o fenômeno físico e o padrão fractal gerado, como uma superfície de fratura, por exemplo, as propriedades físicas destes objetos têm implicações nas suas propriedades geométricas. Pensando nisso, pode-se tirar proveito da descrição geométrica dos fractais para extrair informações sobre a fenomenologia que o gerou, obtendo-se desta forma um maior entendimento do processo de fratura e de suas propriedades. Porém, antes de modelar uma superfície de fratura irregular (ou rugosa) qualquer, pela geometria fractal, será mostrado algumas das dificuldades existentes e os cuidados que devem ser tomados nesta descrição matemática.

#### *4.6.1 - Observações extraídas da fractografia quantitativa*

A técnica usada para a análise geométrica da superfície de fratura é chamada de *Fractografia*. Até bem pouco tempo ela estava baseada apenas no estudo perfilométrico e na análise estatística de superfícies irregulares [Underwood 1992a] . Ao longo dos anos, após repetidas observações destas superfícies, em várias magnificações, também foi revelada uma variedade de estruturas auto-similares que se encontram entre os níveis micro e macroestruturais, característicos do tipo de fratura em observação. Tais estruturas recentemente passaram a ser descritas de uma forma sistemática por meio da geometria fractal [Dauskardt 1990, Meakin 1993]. Esta nova abordagem permite a descrição de padrões que a primeira vista parecem irregulares, mas que guardam uma invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade), ou seja, o fato das suas partes serem semelhantes ao todo em diferentes escalas sucessivas de observação.

Já desde 1950 sabe-se que certas estruturas observadas em superfícies de fratura, por microscopia, apresentavam o fenômeno de invariância por magnificação. Isto significa que alguns fatos concernentes a fratura apresentam o mesmo caráter independentemente da escala de ampliação, ou seja, a fenomenologia que dá origem a estas estruturas é a mesma em várias escalas de observação.

#### *4.6.2 - Aspectos geométricos das estruturas irregulares da superfície de fratura*

O escalonamento euclidiano de grandezas físicas é um fato comum em muitas teorias da física, porém, quando se trata de fractalidade, aparece a possibilidade de se descrever situações irregulares. A fratura para cada tipo de material tem um comportamento que depende de suas propriedades físicas, químicas, estruturais, etc. Observando-se o relevo e as diferentes estruturas e padrões geométricos formados nas superfícies de fratura de diversos materiais, é impossível encontrar um padrão único capaz de descrever todas estas superfícies ( Figura - 4. 8), visto que o comportamento fractal da fratura depende do tipo de material (Underwood 1986). Contudo, as superfícies de fratura, obtidas nas mesmas condições mecânicas de ensaio e para um mesmo tipo de material, retém aspectos geométricos similares do seu relevo (Underwood 1992b) (vide Figura - 4. 9).



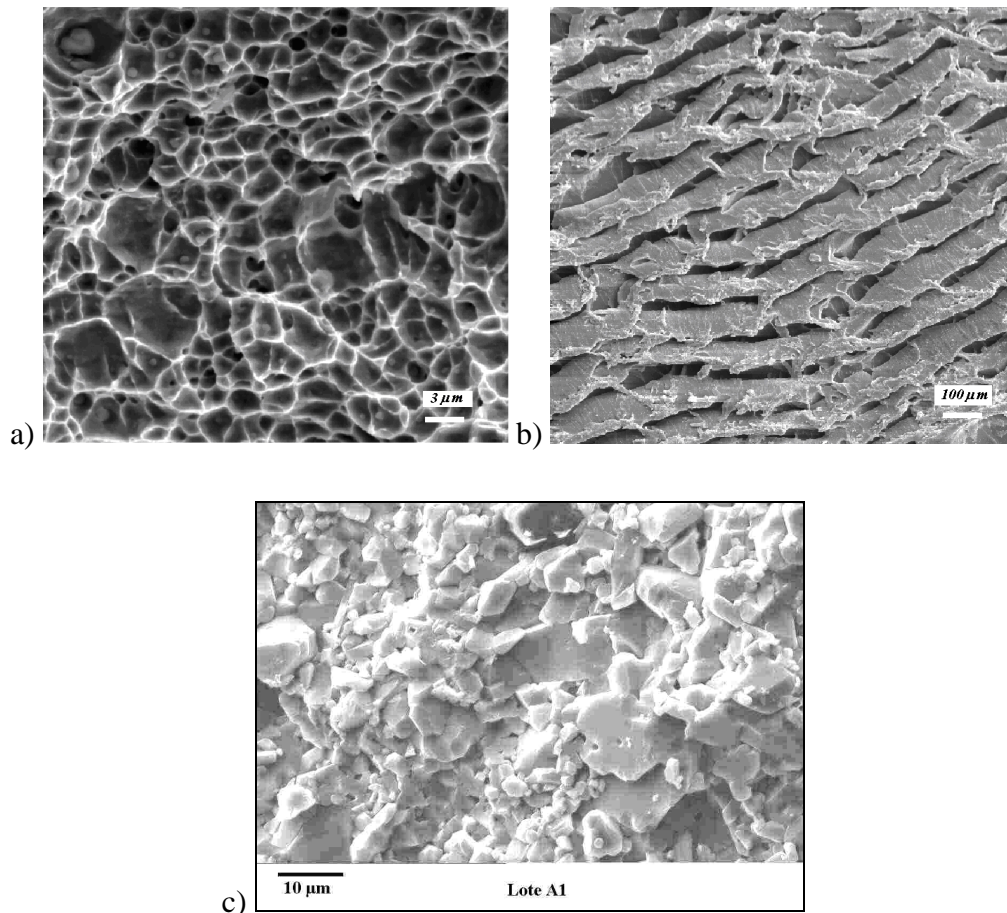


Figura - 4. 8. Aspectos variados da superfície de fratura de diferentes materiais: (a) Material metálico, amostra B2CT2; (b) Material polimérico, amostra PU1.0, com detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca; (c) Material cerâmico [Dos Santos 1999].

Esta semelhança demonstra que para um mesmo material existem condições semelhantes no processo de fratura, embora se modifique estatisticamente de peça para peça, fabricada do mesmo material e nas mesmas condições (Alves 2004a, Alves 2004b). Com base nesta constatação foi que nasceu a idéia de se relacionar a superfície da fratura rugosa com as propriedades mecânicas dos materiais (Underwood 1992a).

## 4. 7 - A teoria fractal aplicada a descrição do relevo da superfície de fratura

A partir de agora serão identificados os aspectos fractais das superfícies de fratura dos materiais em geral, para que seja obtido um embasamento experimental para o modelamento fractal de uma superfície de fratura genérica.

### 4.7.1 - A descrição de padrões irregulares

A descrição de *padrões e estruturas irregulares*, não é uma tarefa trivial. Toda descrição

está relacionada a identificação de fatos e aspectos que possam ser incluídos em uma classe de fenômenos ou estrutura previamente estabelecida. Da mesma forma, a descrição matemática da superfície de fratura também deve possuir critérios para a identificação dos seus aspectos geométricos, a fim de se identificar os *padrões* e as *estruturas irregulares* que podem ser sujeitas a uma classificação. Os critérios, usados até agora, são fornecidos pelo estudo fractográfico, através da análise estatística de grandezas tais como: tamanho médio de grão, rugosidade média, etc. Do ponto de vista geométrico esta descrição da *superfície irregular de fratura*, tinha como base, até bem pouco tempo, os fundamentos da geometria euclidiana. Porém, este procedimento tornava tal descrição uma tarefa por demais complicada. Com o surgimento da geometria fractal, tornou-se possível abordar o problema de uma forma analítica e mais autêntica, conforme será descrito nas seções 4.8 e 4.9.

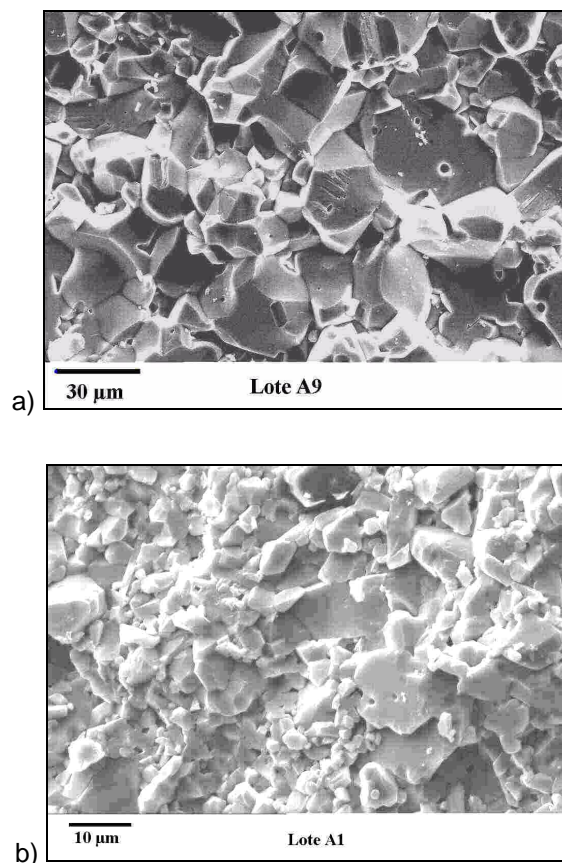


Figura - 4. 9. Superfícies de fratura de diferentes peças feitas do mesmo material, a) Lote A9; b) Lote A1 [Dos Santos 1999].

#### 4.7.2 - O padrão geométrico fractal de uma fratura e as suas escalas de medida

Ao se considerar que a superfície de fratura formada segue um comportamento fractal, necessariamente, também se admite a existência de um padrão geométrico que se repete, independente da escala de observação. A existência deste padrão também mostra que um certo grau de informação geométrica é conservado em escala, durante a propagação da trinca. Desta forma,

para cada tipo de material é possível abstrair um tipo de padrão geométrico, aparentemente irregular com ligeiras variações estatísticas, capaz de descrever a superfície de fratura.

Por outro lado, para um mesmo tipo de material é necessário observar cuidadosamente as escalas de ampliação da superfície de fratura. Pois, à medida que se reduz ou se amplia as escalas de observação, encontram-se padrões e estruturas que se modificam a partir de determinados intervalos destas escalas. Isto pode ser observado na

Figura - 4. 10. Nesta figura mostra-se uma cerâmica de alumina, cuja ampliação de um grão da sua microestrutura revela uma estrutura subjacente de degraus de clivagem, mostrando que para ampliações diferentes o material apresenta morfologias distintas da sua superfície de fratura.

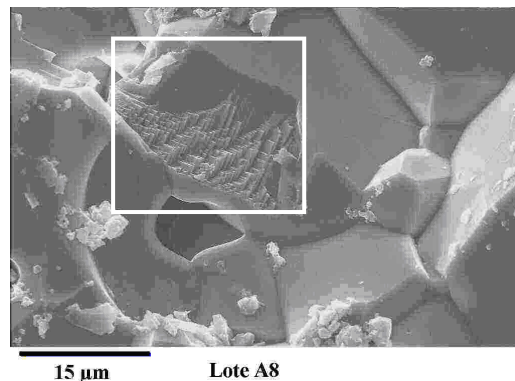


Figura - 4. 10. Variação do padrão de irregularidades com a escala de ampliação em uma cerâmica de alumina, Lote A8 [Dos Santos 1999].

Para abordar este problema é preciso em primeiro lugar observar que, aquilo que é estrutura para uma escala torna-se *elemento padrão* ou *elemento estrutural* para uma outra. Por exemplo, no estudo da matéria, a nível de dimensões atômicas, o átomo que possui sua própria estrutura ( Figura - 4. 11a) é o *elemento* de um outro nível superior, ou seja, o cristalino, (

Figura - 4. 11b). Neste nível, os *degraus de clivagem*, formados pelo conjunto de planos cristalinos deslocados, por sua vez, passam a ser os *elementos estruturais* da *microsuperfície de fratura* nesta escala ( Figura - 4. 11c). No nível seguinte, ao cristalino, encontra-se o nível da *microestrutura do material*, onde cada *microsuperfície de fratura* torna-se o *elemento estrutural*, embora irregular, da superfície de fratura rugosa macroscópica, já visível a olho nú, como está esquematizado na Figura - 4. 11d. Desta forma, os *níveis hierárquicos estruturais* [Guy 1986] são definidos dentro do material ( Figura - 4. 11), conforme já foi descrito na secção – 3.13.3 do Capítulo - III.

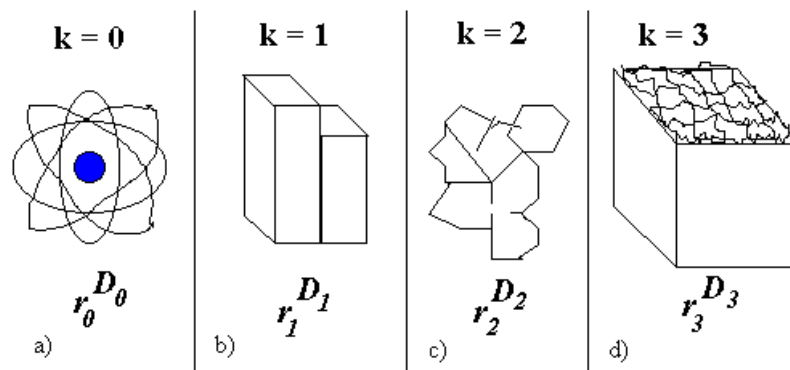


Figura - 4. 11. Diferentes níveis hierárquicos estruturais de uma fratura em função da escala de observação a) nível atômico b) nível cristalino (degraus de clivagem) c) nível microestrutural (microsuperfícies de fratura) e d) nível macroestrutural da superfície de fratura.

Com base nas observações feitas no parágrafo anterior, percebe-se que o escalonamento fractal de uma superfície de fratura deve se limitar a determinadas intervalos de escala, a fim de se preservar a descrição matemática de um mesmo padrão geométrico (átomo, cristal, etc), o que será demonstrado detalhadamente na secção - 4.8. Embora seja possível encontrar um elemento estrutural, formando um padrão, a cada nível hierárquico, deve-se lembrar que cada tipo de estrutura possui uma dimensão fractal característica. Portanto, é impossível caracterizar todos os níveis de escala de uma fratura com apenas uma única dimensão fractal. Para resolver esta questão pode-se utilizar uma descrição multifractal. Contudo, dentro da proposta do presente trabalho a descrição monofractal fornece resultados satisfatórios. Por esta razão, considerou-se, em primeira instância, que uma descrição mais sofisticada seria desnecessária.

Considerando-se o problema analítico da descrição fractal, deve-se estabelecer uma escala inferior e outra superior de observação, nas quais as considerações matemáticas se conservam dentro deste intervalo. Estes limites de escala serão estabelecidos a partir das propriedades mecânicas do material e a partir do tamanho da amostra, como será visto mais adiante. Obviamente, uma descrição matemática em outro nível de escala, deve levar em consideração o novo intervalo de escalas e réguas de medida dentro deste outro nível, como também a dimensão fractal correspondente.

Conforme já foi mencionado, a descrição da superfície rugosa da fratura pode ser efetuada em nível atômico, em nível de degraus de clivagem (cristalino), ou em nível microestrutural (microsuperfícies de fratura), dependendo do grau de detalhamento fenomenológico que se deseja atingir. Esse trabalho se aterá ao nível microestrutural (escala micrométrica), porque ele reflete a morfologia da superfície descrita pela visão termodinâmica da fratura. Isto significa que os comprimentos característicos dos defeitos gerados são grandes em relação a escala atômica definindo assim um meio contínuo que compatibiliza em uma mesma escala as propriedades mecânicas com as propriedades termodinâmicas. Enquanto que, o nível atômico e o nível de

degraus de clivagem é tratado pela dinâmica molecular e pela teoria da plasticidade, respectivamente, que são áreas a parte.

## **4. 8 - A descrição matemática de uma trinca ou uma superfície de fratura como sendo um fractal**

A partir de agora, será modelada uma superfície de fratura irregular (ou rugosa) qualquer pela geometria fractal, com a finalidade de reescrever as equações da Mecânica da Fratura Clássica levando em conta a rugosidade desta superfície.

### *4.8.1 – A fractalidade de uma trinca ou superfície de fratura*

Ao se observar uma trinca, de uma forma geral, nota-se que ela apresenta aspectos geométricos similares que se reproduzem, pelo menos dentro de um intervalo limitado de escalas. A esta propriedade também chamada de *invariância por transformação de escala* denomina-se *auto-similaridade*, quando não privilegia nenhuma direção, ou *auto-afinidade*, quando esta privilegia alguma direção em relação as demais. Alguns autores a definem como sendo a propriedade que certos objetos geométricos possuem, na qual suas partes são semelhantes ao todo em escalas sucessivas de transformação. Para o caso da fratura, isto acontece desde uma escala de corte mínima,  $\varepsilon_{min}$ , até uma escala de corte máxima,  $\varepsilon_{max}$ , ao contrário do que propôs Borodich (1997), que definiu um intervalo infinito de escalas para conservar a definição matemática de fractal. No modelo proposto neste capítulo, e no Capítulo – V, utilizou-se a teoria fractal como uma forma mais aproximada da realidade para descrever a superfície de fratura em relação a descrição euclidiana. Isto foi feito de forma a aproximar-se melhor tanto da realidade do problema quanto para utilizar a teoria fractal como uma abordagem mais autêntica.

Para se entender de forma clara as afirmações do parágrafo anterior, pode-se recorrer ao exemplo do pinheiro mostrado na Figura - 4. 12. Sabe-se que um galho qualquer de um pinheiro é semelhante, em escala, aos demais galhos, que por sua vez são semelhantes ao pinheiro todo. A relação entre as escalas citadas acima, para o caso do pinheiro, pode ser obtida considerando-se desde o tamanho do menor galho (semelhante ao pinheiro todo) até o tamanho macroscópico do pinheiro. Chamando-se de  $\delta_{min} = l_o$ , o tamanho deste menor galho e de  $\delta_{max} = L_o$ , o tamanho macroscópico do pinheiro todo, pode-se definir as escalas de corte inferior e superior (mínima e máxima), subdividindo-se portanto o pinheiro em níveis discretos de escalas, como a sua estrutura sugere, da seguinte forma:

$$\varepsilon_{min} = \frac{l_o}{L_o} \leq \varepsilon_k = \frac{l_k}{L_o} \leq \varepsilon_{max} = \frac{L_o}{L_o} = 1 \begin{cases} \text{caso estático} & L_o = L_{0max} \\ \text{caso dinâmico} & L_o = L_o(t) \end{cases} \quad (4.54)$$

onde uma escala intermediária  $\varepsilon_k$  ( $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{max}$ ) pode também ser definida da seguinte forma:

$$\varepsilon_k = \frac{l_k}{L_o} \quad (4.55)$$

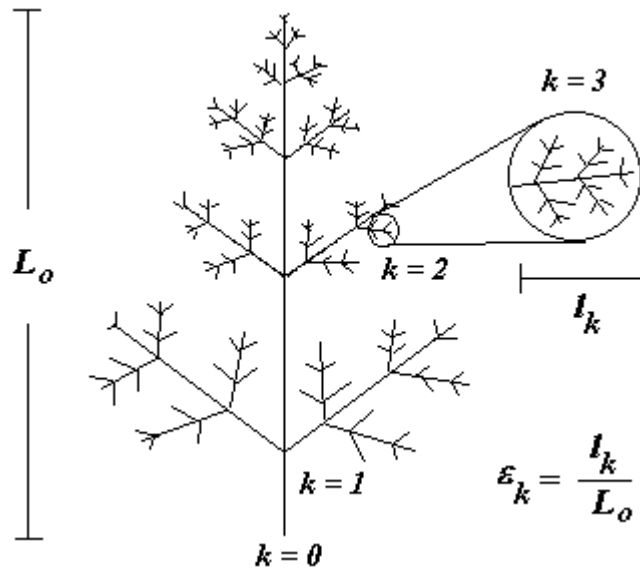


Figura - 4. 12. Auto-similaridade presente em um pinheiro (fractal), com diferentes níveis de escalonamento,  $k$ .

A grandeza  $\varepsilon_k$  representa a relação de escalonamento que retrata o tamanho de um galho de comprimento,  $l_k$ , qualquer em relação ao pinheiro todo.  $l_o$  está relacionado com o tamanho mínimo de Mishnaevsky que será mostrado na secção - 4.8.3 e  $L_o = L_{0max}$  se a fratura já estiver sido completada.

Analogamente será considerado que as trincas e superfícies de fratura também possuem suas relações de escalonamento, como aquela representada nas equações (4. 54) e (4. 55). Em níveis contínuos as escalas de corte inferior e superior (mínima e máxima) são, portanto, definidas da seguinte forma:

$$\varepsilon_{min} = \frac{l_o}{L_o} \leq \varepsilon = \frac{l}{L_o} \leq \varepsilon_{max} = \frac{L_o}{L_o} = 1 \quad (4.56)$$

Observe que a auto-similaridade do pinheiro assim como a auto-afinidade<sup>(8)</sup> de uma trinca, embora seja estatística, está limitada por uma escala inferior  $\varepsilon_{min}$ , determinada pelo tamanho mínimo,  $l_o$ , e por uma escala superior  $\varepsilon_{max}$ , dado pelo tamanho macroscópico da trinca,  $L_o$ .

<sup>8</sup> A auto-afinidade de um fractal já foi definida na secção 3.15.4 e na secção 4.5.2

Dos conceitos descritos até agora, verifica-se que a escala  $\varepsilon_k$  de medida para contagem dos elementos de estrutura é arbitrária. Porém, no escalonamento de uma superfície de fratura, ou de um perfil de trinca, segue uma pergunta:

*Qual é o valor da escala  $\varepsilon_k$  que deve ser corretamente utilizada, a fim de se obter a medida mais precisa possível da superfície de fratura rugosa?*

*Existe um tamanho mínimo de fratura que dependa apenas do tipo de material?*

Certamente que a resposta para esta pergunta se encontra na necessidade de se definir o menor tamanho da estrutura fractal de uma trinca, ou superfície de fratura, para que seu tamanho possa ser usado como uma calibração de uma régua de mínima medida (<sup>9</sup>). Uma vez que, uma superfície de fratura, ou trinca, é considerada um fractal, em primeiro lugar, é necessário identificar na microestrutura do material qual deve ser o menor tamanho possível de uma fratura rugosa, isto é, o valor de  $l_{min}$ . Esta fratura de tamanho mínimo, típica de cada material, passa então a ser considerada como uma estrutura elementar de formação do fractal da fratura, definindo-se assim uma escala mínima,  $\varepsilon_{min}$ , para o escalonamento fractal, onde,  $\varepsilon_{min} = l_o/L_o$ , sendo  $l_o$  a projeção plana de  $l_{min}$ . Na prática, a partir deste valor de escala mínima de medida,  $\varepsilon_{min}$ , define-se um tamanho de régua mínima,  $\delta_{min}$ , para este caso, igual ao valor da projeção plana da menor fratura possível, ou seja,  $\delta_{min} = l_o$ . Desta forma, o escalonamento fractal da superfície de fratura, ou trinca, poderá ser feito obtendo-se o valor mais preciso possível do comprimento rugoso,  $L$ . Contudo, a predição teórica deste tamanho mínimo de fratura,  $l_{min}$ , deve ser feita a partir da mecânica da fratura clássica, como será visto a seguir.

#### *4.8.2 - O problema da identificação do nível de escalonamento, $k$ , de uma estrutura fractal de uma fratura.*

Para os fractais matemáticos gerados por uma regra de iteração conhecida, é sempre possível descobrir, através de uma análise dos tamanhos relativos, a quantidade ou o número de níveis de escalonamento,  $k$ , que uma dada estrutura fractal possui, para um dado estágio de crescimento de uma estrutura formada por esta regra. Conseqüentemente, para uma dada ampliação em escala, ou para um dado tamanho de estrutura, é sempre possível saber a qual nível de escalonamento esta estrutura pertence. Isto pode ser feito contando-se a quantidade de estruturas auto-similares presentes no objeto para uma dada ampliação. Porém, para alguns fractais físicos isto não é possível. Este problema pode ser mais bem esclarecido através do seguinte exemplo. Se alguém receber de presente uma árvore de natal, ela poderá dizer a partir de que nível de galhos do

---

<sup>9</sup> Isto deve ser feito para que as escalas de medidas não sejam arbitrárias e possam depender de alguma propriedade do material.

pinheiro a árvore de natal foi cortada, ou, quantos níveis de escalonamento este fractal possui, tendo idéia da extensão completa do pinheiro, embora o pinheiro seja um fractal estatisticamente auto-similar. Mas no caso da fratura, esta identificação não é tão direta assim, embora se tenha idéia do tamanho macroscópico da trinca e se saiba que deve existir um tamanho mínimo de trinca determinado por algum balanço de energia<sup>(10)</sup> microscópico.

A dificuldade de se dizer o nível de escalonamento de um trecho de uma trinca em uma determinada escala, existe, porque basicamente não se tem uma idéia visível dos tamanhos relativos entre o nível de escalonamento máximo e mínimo, ou, não se conhece a geometria da semente que resulta no fractal aleatório por iterações sucessivas, fazendo-se aqui uma comparação deste tipo de fractal com um fractal matemático. Mesmo a fratura sendo um fractal estatisticamente auto-afim, de forma análoga ao caso do pinheiro, a tarefa de identificação do nível de escalonamento é quase que impossível.

Sabe-se que a partir de uma determinada resolução, a mudança na geometria das “unidades de recobrimento” da estrutura fractal não repercute em nenhuma variação no aspecto da estrutura final do fractal (veja Peitgen et al 1992, *Fractals for the Classroom*, Part one: Introduction to fractals e Chaos, página 191, Figura - 3.24). A forma da semente na escala mínima de iteração (para fractais de crescimento) por outro lado, determina a forma final da estrutura macroscópica mesmo que o iniciador do fractal seja o mesmo (veja Peitgen et al 1992, página 107, Figura - 2.34 e páginas 381-385).

Portanto, saber a forma da semente fractal dentro das possíveis variações estatísticas da fratura para um determinado material seria muito interessante para representar as propriedades microestruturais. Uma vez que mudando-se a forma da semente, muda-se a forma final do fractal e, a dimensão fractal que está relacionada com as propriedades do material também muda. Poderia-se talvez reproduzir a superfície de fratura final de diferentes tipos de materiais, variando-se entre outras coisas a forma desta semente geradora da fratura fractal. Esta dificuldade também se reflete em saber se, para um dado material, o tamanho mínimo para a fratura inclui-se apenas a escala dos degraus de clivagem ou também a escala que envolve os aspectos microestruturais do material. Pois dependendo disto, a superfície de fratura poderia ser reconstruída com sementes diferentes e com regras de iteração diferentes para cada escala de análise do fenômeno. Mesmo porque, mudando-se o nível hierárquico de observação da fratura, a dimensão fractal pode mudar. Portanto, um escalonamento que possua um “tamanho de régua” que varia com a escala de ampliação poderia ser usado no modelamento da fratura.

Caso seja possível de alguma forma identificar a forma geométrica da semente,

---

<sup>10</sup> Será visto posteriormente que o balanço de energia proposto por Mishnaevsky determina um tamanho crítico mínimo para uma trinca no interior da microestrutura.



imediatamente seria possível definir o nível hierárquico a que ela pertence, como também, saber em que nível de escalonamento se encontra uma dada fratura. Além disso, mudaria radicalmente a nossa compreensão do escalonamento fractal no que diz respeito às propriedades físicas e geométricas da fratura do material.

Para se reproduzir uma trinca sob o ponto de vista da geometria fractal é preciso encontrar um elemento de estrutura básico a partir do qual a trinca cresce. Portanto a partir de agora será modelado uma superfície de fratura, ou uma trinca, como sendo um fractal, a fim de se poder identificar qual deve ser o menor tamanho da estrutura fractal de uma trinca ou superfície de fratura, para que este tamanho possa ser usada como “régua de medida” no escalonamento fractal de toda a fratura.

#### 4.8.3 – O problema da calibração de um do tamanho mínimo de fratura como sendo um “tamanho de régua” mínimo do seu fractal

Para responder a questão anterior, do tamanho mínimo de fratura, Mishnaevsky Jr. (1994) propõe um tamanho mínimo característico,  $a$ , dado pelo tamanho da menor microtrinca, possível, formada na ponta da trinca (ou entalhe) como resultado da concentração de tensão na vizinhança de um empilhamento de discordâncias (ou deslocações) na matriz cristalina do material, satisfazendo uma condição de constrição máxima na ponta da trinca, onde:

$$a \sim k_o nb, \quad (4.57)$$

onde  $k_o$  é um coeficiente de proporcionalidade.  $n$  é a quantidade de discordâncias (ou deslocações) empilhadas que pode ser calculada por:

$$n = \frac{\pi l \sigma (1 - \nu)}{b \mu}, \quad (4.58)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $l$  é o comprimento do empilhamento das discordâncias (ou deslocações),  $\sigma$  é a tensão normal ou tangencial,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento e  $b$  é o vetor de Burgers. Substituindo-se (4.58) em (4.57) temos;

$$a \sim \frac{k_o n \pi l \sigma (1 - \nu)}{\mu}. \quad (4.59)$$

Mishnaevsky equaciona, com elegância matemática, a propagação de uma trinca como sendo o resultado de uma “reação física” de interação de uma trinca de tamanho,  $\langle L_o \rangle$ , com um empilhamento de discordâncias (ou deslocações),  $nb$ , formando a microtrinca de tamanho,  $a$ , ou seja;

$$\langle L_o \rangle + \langle nb \rangle \rightarrow \langle L_o + a \rangle, \quad (4. 60)$$

onde  $a \ll L_o$  e  $nb \ll L_o$ .

Mishnaevsky propõe um escalonamento fractal para o processo de fratura desde a escala mínima, dado pelo tamanho  $a$ , até a escala máxima, dado pelo tamanho macroscópico da trinca,  $L_o$ .

Como consequência da existência de um tamanho mínimo para a fratura, recentemente tem surgido um hipótese de que o processo de fratura seja discreto ou quantizado (Passoja, 1988; Taylor *et al.*, 2005; Wnuk, 2007). Taylor *et al.*, (2005) realizaram as modificações matemáticas na MFC para validar essa hipótese. Resultados experimentais confirmaram que um comprimento de fratura mínimo é dado por:

$$l_0 \sim \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_c}{\sigma_0} \right). \quad (4. 61)$$

onde  $K_c$  é a tenacidade a fratura,  $\sigma_0$  é a tensão de resistência de escoamento final antes do material fraturar.

#### 4.8.4 – A relação de auto-similaridade de uma trinca fractal

A fratura é caracterizada a partir da separação definitiva dos planos cristalinos. Esta separação possui um valor mínimo bem definido, possivelmente dado pela teoria de Mishnaevsky Jr. (1994). Se for considerado que abaixo deste valor mínimo a fratura não existe, e acima dele a trinca é definida à medida que os planos cristalinos se deslocam continuamente (e a ponta da trinca formada penetra o material), de tal forma que um número cada vez maior de planos cristalinos se separam definitivamente. Pode-se em princípio, usar este tamanho mínimo microscópico, como uma espécie de régua (ou escala) para a medida da trinca como um todo<sup>(11)</sup>, isto é, desde o ponto inicial a partir do qual a trinca cresce, até a sua extremidade caracterizada pelo processo instantâneo de propagação da trinca, por exemplo.

A idéia acima pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$L = L_0 \varepsilon^{d-D}, \quad (4. 62)$$

dividindo-se toda a expressão (4. 62) acima pelo tamanho mínimo de Mishnaevsky tem-se:

$$\frac{L}{a} = \left( \frac{L_0}{a} \right) \varepsilon^{d-D}, \quad (4. 63)$$

ou

---

<sup>11</sup> durante ou concomitantemente com a sua propagação, em um processo de escalonamento dinâmico, ou não

$$N = N_0 \varepsilon^{d-D}, \quad (4.64)$$

onde:

$N = L/a$  : é o número de elementos de trinca  $a$  sobre a trinca não projetada

$N_0 = L_0/a$  : é o número de elementos de tamanho  $a$  sobre a trinca projetada.

E ainda:

$$\varepsilon = a/L_0, \quad (4.65)$$

onde:

$\varepsilon$ : é o fator de escalonamento fractal da trinca

$d$ : é a dimensão euclidiana da projeção da trinca

$D$ : é a dimensão fractal da trinca.

Dentro deste contexto o número de microtrincas que forma a trinca macroscópica é dado por:

$$N = \left( \frac{a}{L_0} \right)^{-D}. \quad (4.66)$$

Neste contexto (no modelo de Mishnaevsky), a expressão acima é volumétrica e admite ramificações de trincas geradas no processo de fratura com abertura e coalescência de microtrincas. Contudo, ele prossegue equacionando o processo de uma forma unidimensional chegando a uma expressão para a velocidade de propagação da trinca. Uma abordagem completa desse assunto, utilizando um modelo fractal auto-afim por ser mais realista e precisa, poderá ser feito em um outro trabalho de pesquisa.

A resposta à pergunta sobre qual deve ser a melhor escala a ser utilizada para o escalonamento da fratura é portanto dada da seguinte forma: sendo o limite do tamanho da trinca  $L_k$  numa escala qualquer, dado por  $L_k \rightarrow L$  (tamanho real) assim como  $l_k \rightarrow l_{min}$ , o valor do tamanho de régua mínimo,  $l_0$ , deve ser igual ao valor do tamanho mínimo da trinca,  $a^{(12)}$ , dado por Mishnaevsky Jr. [1994], por meio do seu balanço de energia para a fratura de um monocristal da microestrutura do material. A razão física para esta escolha, é porque o tamanho mínimo de Mishnaevsky é determinado por um balanço de energia, a partir do qual a trinca passa a existir, pois abaixo deste tamanho, não há sentido em se falar em comprimento de trinca. Portanto, a escala que deve ser considerada é aquela dada por:

---

<sup>12</sup> Pode ser que este tamanho de régua seja muito menor do que as escalas de interesse utilizadas na caracterização fractal das superfícies de fratura. Contudo, ele não deixa de ser o menor tamanho possível para uma microtrinca.

$$\varepsilon_{\min} = a/L_0, \quad (4.67)$$

onde  $a$  é dada pela relação (4.59).

Portanto, a auto-similaridade ou auto-afinidade estatística de uma superfície de fratura, ou de uma trinca está limitada por um escala inferior  $\varepsilon_{\min}$ , determinada pelo tamanho crítico mínimo,  $l_0 = a$ , e por uma escala superior  $\varepsilon_{\max}$ , dado pelo tamanho macroscópico da trinca,  $L_0$ .

Em duas dimensões, a problemática da existência de um tamanho de escala mínimo, (dado possivelmente pelo tamanho mínimo de Mishnaevsky), leva à abstração de uma superfície de área mínima, cuja forma será investigada mais adiante, nos Apêndices, em termos do número de concentradores de tensão mais próximos existentes no interior de um material.

#### 4.8.5 – O problema da determinação da geometria da semente fractal de tamanho mínimo e suas consequências no modelamento fractal da fratura

Foi visto na secção 4.8.2 e na secção - 4.8.3, que, para haver uma descrição matemática correta de um fractal, como no caso de uma trinca, este precisa ser escalonado a partir de uma escala,  $\varepsilon_{\min}$ , até uma outra escala,  $\varepsilon_{\max}$ , correspondente ao tamanho do fractal como um todo. Foi visto também que, abaixo de  $\varepsilon_{\min}$ , o escalonamento fractal não existe. Isto está de acordo com o conceito do tamanho mínimo de Mishnaevsky. Como este tamanho mínimo é dado pelas propriedades mecânicas do material, o escalonamento fractal de uma trinca, se for feito usando-se este valor, passa a depender diretamente do material, deixando de ser um escalonamento arbitrário de natureza puramente geométrica.

A partir de agora é necessário procurar identificar qual é a forma geométrica mais adequada para descrever a semente fractal para uma fratura. Uma identificação aproximada da forma desta semente do fractal de uma fratura em materiais idealmente frágeis, pode ser feita recorrendo-se as relações de (A1.1) a (A1.13). De acordo com esta relação, o comportamento fractal apresenta uma relação de escalonamento do tipo:

$$M_d(\varepsilon_k) = N(\varepsilon_k)l_k^d, \quad (4.68)$$

onde  $M_d(\varepsilon_k)$  são funções geométricas tais como: perímetro, área, volume, etc.  $l_k$  é o tamanho do elemento da estrutura fractal, comparável ao tamanho da régua,  $\delta_k$ , isto é,  $\delta_k = l_k$ , usada na medida da função,  $M_d(l_k)$ .  $d$  é a dimensão euclidiana das unidades usadas no recobrimento do objeto fractal. O número de unidades que recobrem o objeto fractal é dado por:

$$N(\varepsilon_k) = \varepsilon_k^{-D} \Leftrightarrow N(\delta) = \delta^{-D}, \quad (4.69)$$

onde  $D$  é a dimensão fractal do objeto.

Observe que:

$$N(l_k) = M_d(l_k) / l_k^d \sim l_k^{d-D}, \quad (4.70)$$

logo

$$M_d(l) \sim l^{d-D}. \quad (4.71)$$

conforme mostra a Figura - 4. 13.

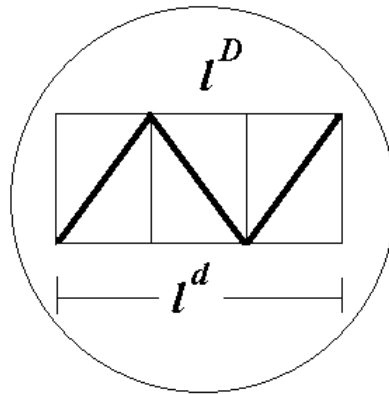


Figura - 4. 13. Elemento linear euclidiano e fractal em uma escala d corte mínima.

A descrição da função  $M_d(l_k)$  depende da forma geométrica das unidades de recobrimento e do tamanho da régua utilizada, dado pelo termo  $l_k^{d-D}$ . Isto significa que, para um fractal físico na escala mínima, haverá um objeto de geometria dado por  $l_o^{d-D}$ . Como em termos práticos, este objeto mínimo está relacionado com a microestrutura do material, a pergunta que surge é a seguinte:

*Qual é a melhor forma geométrica que descreve esta escala mínima, de tal maneira que seja capaz de representar toda a trinca por iterações sucessivas de escalonamento fractal?*

Na tentativa de responder a esta pergunta, alguns autores (Tanaka 1996), têm usado a curva triádica de Koch ( Figura - 4. 14), e outros fractais (Heping-Xie 1989), para modelar o perfil de trincas e superfícies de fraturas. Porém a curva de Koch (Tanaka 1996) não é um fractal auto-afim e portanto não é genuinamente um fractal de superfície, como a maioria dos fractais auto-afins. Na verdade, esta curva é um recorte do contorno de uma figura bi ou tridimensional chamado de “ilha de Koch”, estendida sobre uma superfície plana, conforme mostra a Figura - 4. 5. Esta curva é um fractal auto-similar, e por esta razão, em um nível de escalonamento  $k \rightarrow \infty$ , ela não apresenta verdadeiramente uma projeção sobre um plano ou sobre uma linha ( Figura - 4. 14), como é de se esperar para uma superfície de fratura, ou para uma simples trinca. Além disso, um fractal auto-afim dá lugar a superfícies complementares livres, enquanto que um fractal auto-similar, de projeção plana,

possui superfície complementar “auto-encaixante”, que não satisfaz a condição de superfície de fratura. Essas são as razões principais pelas quais o fractal da curva de Koch, além de não ser um fractal auto-afim, não pode ser usado como representativo de uma trinca (ou superfície de fratura), com a finalidade de retratar a sua propagação indefinidamente.

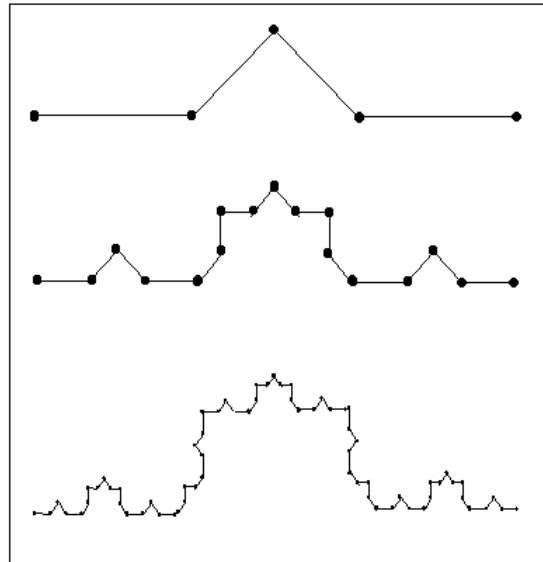


Figura - 4. 14. Curva triádica de Koch onde  $D \cong 1.26186$ . Este fractal está imerso numa dimensão  $d + 1 = 2$  e possui projeção retilínea em  $d = 1$  de tal forma que  $1 < D < 2$ .

A curva de Koch [Tanaka 1996], da forma como é apresentada nos livros textos sobre fractais, possui sua extensão de projeção normalizada por um comprimento máximo  $L_o$  fixo não podendo retratar uma trinca indefinidamente sem depender da extensão final do corpo de prova. Contudo, no modelamento de uma superfície de fratura, é também interessante construir um modelo que dependa, ou não, da extensão final do corpo de prova, conforme o campo de tensão aplicado e as suas condições de contorno. Na verdade a forma de se construir um fractal, se por “fragmentação” ou por “crescimento”, é que determina se este dependerá, ou não, da sua extensão final. Invariavelmente isto pode ser obtido por um fractal auto-similar ou auto-afim<sup>(13)</sup>, como o fractal do movimento Browniano fracional mostrado na Figura - 4. 15.

A Figura - 4. 15, mostra um fractal auto-afim, do movimento Browniano fracional, onde,  $\varepsilon = 1/4$  e  $D = 1.0$ , para três níveis de escalonamento.

<sup>13</sup> condições de contorno fixas (fragmentação); condições de contorno parcialmente fixas (crescimento ou propagação)

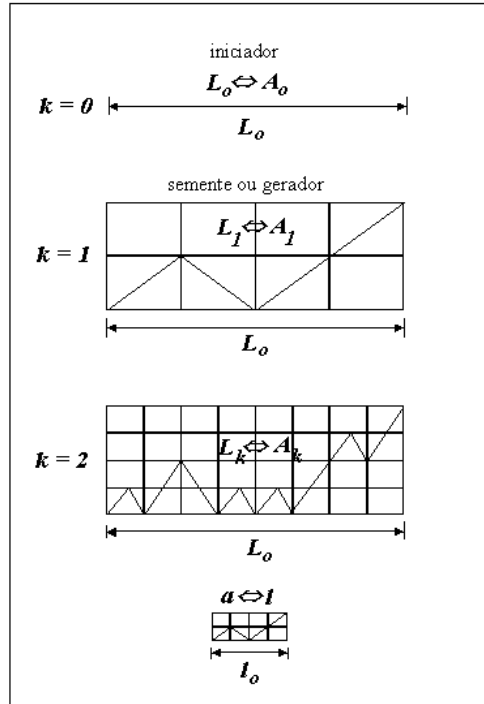


Figura - 4. 15. Fractal auto-afim, do movimento Browniano fracional, onde  $\varepsilon = 1/4$  e  $Dx = H = 1.0$ , para três níveis de escalonamento, utilizado para representar uma trinca.

Calculando-se a dimensão fractal local deste fractal, tem-se:

$$D = \frac{\ln(L/l)}{\ln(L_0/l_0)} = \frac{\ln(12)}{\ln(8)} \cong 1,195. \quad (4.72)$$

e calculando-se a dimensão fractal global deste fractal, tem-se:

$$D = \frac{\ln(L/l)}{\ln(L_0/l_0)} = \frac{\ln(4)}{\ln(4)} = 1. \quad (4.73)$$

Este fractal será utilizado para representar uma trinca. As linhas inclinadas deste fractal representam os diferentes planos cristalinos, fraturados, na direção de propagação de uma trinca. Nesta figura o comprimento rugoso,  $L_k$ , destas linhas (para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) será considerado equivalente a área da superfície rugosa de fratura,  $A_k$ , e a semente fractal de comprimento rugoso,  $l$ , será considerado equivalente a área rugosa,  $a$ , da superfície de uma fratura de área mínima. Respectivamente, o comprimento projetado da semente fractal,  $l_0$ , será considerado equivalente a área projetada da superfície de fratura,  $a_0$ , correspondente a área rugosa mínima,  $a$ .

Uma vez que as trincas e superfícies de fratura são objetos fractais auto-afins, e considerando-se as equivalências geométricas descritas acima, é possível gerar indefinidamente uma figura análoga a uma superfície de fratura, utilizando-se fractais auto-afins, como por exemplo, aquele do fractal auto-afim de Weierstrass-Mandelbrot, mostrado na Figura - 4. 17. Este fractal pode depender ou não da sua extensão final, para refletir a propagação indefinida de uma trinca em um meio material,

ou para representar uma fragmentação.

## 4.9 - O modelo fractal auto-afim de um perfil rugoso de fratura

### 4.9.1 – A condição matemática fractal auto-afim de um perfil rugoso de fratura

A partir de uma superfície rugosa de fratura podem-se extrair inúmeros perfis também rugosos, na direção de propagação da trinca. Contudo, será considerado nesta secção apenas um perfil, o qual será representativo de toda a superfície de fratura (Figura - 4. 16). A condição de deformação plana admite esta suposição. Porque, embora a tenacidade a fratura varie ao longo da espessura do material, para uma zona plástica reduzida, em relação a espesura do material, ela pode ser considerada uma propriedade. Isto significa que, é possível obter um perfil rugoso estatisticamente equivalente aos demais possíveis perfis, que podem ser obtidos dentro da faixa de espessura considerada pela condição de deformação plana.

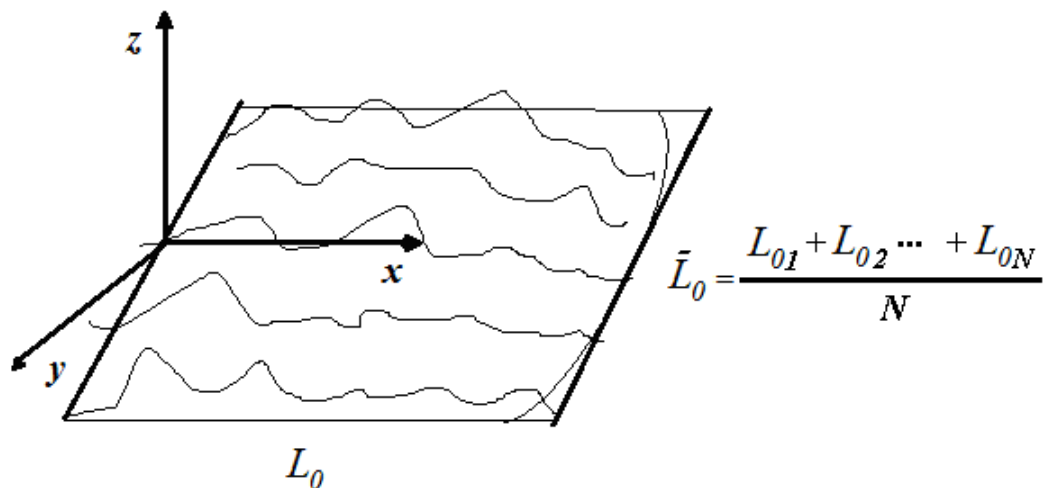


Figura - 4. 16. Perfis estatisticamente equivalentes ao longo da espessura do material .

De forma também equivalente a esta, é possível também obter um tamanho médio projetado de trinca, como resultado de uma média do tamanho da trinca ao longo da espessura do material, dentro da faixa de espessura considerada pela deformação plana, que, para efeitos de cálculos na MFC, considera-se este tamanho médio como se fosse apenas um único tamanho projetado de trinca, conforme recomenda a norma ASTM - E1737 (1996). Por esta razão, no que segue, efetua-se a redução ou abaixamento do grau das relações do caso bidimensional, mostrado anteriormente, para o caso unidimensional, da seguinte forma:

$$A(x, y) \rightarrow L(x). \quad (4. 74)$$

Logo, a partir de (4. 52) tem-se:



$$L(\lambda_x x) = \lambda_x^H L(x), \quad (4.75)$$

onde

$$H = 2 - D \quad (4.76)$$

é o expoente Hurst que mede a rugosidade do perfil. Neste caso unidimensional a superfície de fratura é um perfil cujo comprimento,  $L$ , é obtido a partir da medida do comprimento projetado,  $L_o$ , como é ilustrado abaixo na Figura - 4. 17.

#### 4.9.2 – Cálculo do comprimento rugoso de uma trinca em função do seu comprimento projetado

Na Figura - 4. 17 ilustra-se um dos métodos de medida fractal. Esta medida pode ser obtida tomando-se caixas, ou trechos, retangulares com base  $\Delta L_o$  e altura  $\Delta H_o$ , sobre o perfil da trinca, e recobrimo-se este perfil, dentro destas caixas, com “caixinhas” (unidades de recobrimento) menores de tamanhos,  $l_o$  e  $h_o$ , respectivamente ( Figura - 4. 17). Ao invés de caixinhas também pode-se usar outras formas geométricas<sup>(14)</sup> compatíveis com o objeto a ser medido. Em seguida efetua-se a contagem das caixinhas (ou unidades de recobrimento) necessárias para cobrir a extensão rugosa da trinca centrada na caixa  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ . O número destas caixinhas (ou unidades de recobrimento) de tamanho  $r$  em função da extensão das caixas (ou trechos),  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ , fornece a dimensão fractal, como foi mostrado na secção 3. 12 do Capítulo – III.

Considerando-se o perfil da superfície de fratura como sendo um fractal auto-afim, análogo ao fractal da Figura - 4. 17, cujas direções perpendiculares possuem a mesma natureza física, pode-se generalizar a equação de Voss (1991) para o movimento browniano<sup>(15)</sup> a fim de obter o comprimento rugoso da trinca,  $L$ , em função do comprimento projetado,  $L_o$ , da seguinte forma:

Suponha que as caixinhas retangulares (ou unidades de recobrimento) de tamanho microscópico,  $r$ , recobrem todo o comprimento da trinca,  $\Delta L$ , dentro da caixa maior com tamanho,  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ . O número de caixinhas (unidades de recobrimento) de lados  $l_o \times h_o$ , necessárias para cobrir a trinca na direção horizontal, contidos na caixa (ou trecho) retangular de área  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ , para o fractal auto-afim, pode ser obtido pela expressão:

$$N_v = \frac{\Delta L_o}{l_o} \varepsilon_v^0 \text{ (na vertical)} \quad (4.77)$$

onde  $\Delta L_o$  é a projeção horizontal da trinca e  $\varepsilon_v$  é o fator de escala vertical.

<sup>14</sup> alguns autores usam “bolas”

<sup>15</sup> Voss [1991], modelou o gráfico de “ruído” do movimento browniano fracional, onde na direção  $y$  ele graficou a amplitude,  $V_H$ , e na direção  $x$ , ele graficou o tempo,  $t$ .

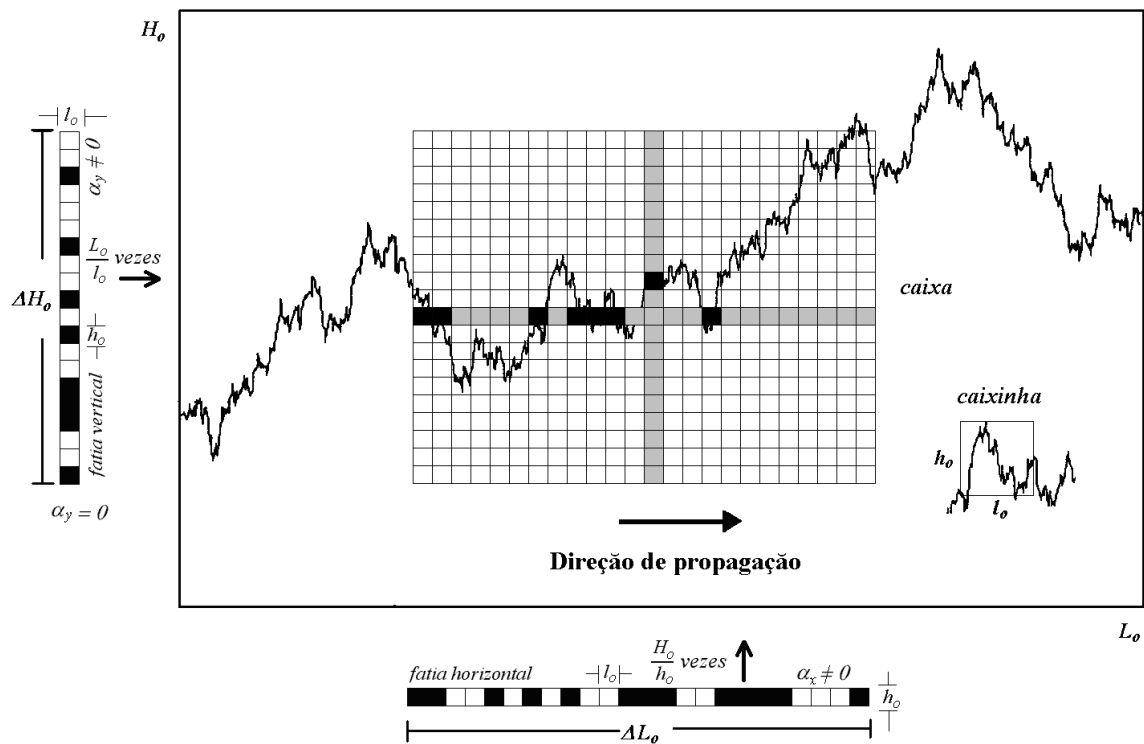


Figura - 4. 17. Fractal auto-afim, de Weierstrass-Mandelbrot, onde  $\varepsilon_k = 1/4$  e  $Dx = 1.5$  e  $H = 0.5$ , utilizado para representar um perfil de fratura (Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific, Singapore, 1991, p.7).

Considerando-se que fractal auto-afim se estende na direção horizontal, ao longo de  $L_o$ , e oscila na direção perpendicular, isto é, vertical, o número de caixinhas,  $N_h$ , de tamanho  $l_o$ , na direção horizontal, se juntam para formar o comprimento projetado,  $L_o$ , enquanto que na vertical o número de caixinhas,  $N_v$ , de tamanho,  $h_o$ , se superpõem umas as outras, potencializando o valor deste número em relação ao número de caixinhas na horizontal. Portanto, para a direção vertical com projeção  $\Delta H_o$ , da caixa de lados  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ , pode-se escrever uma expressão para o número de caixinhas (ou unidades de recobrimento) como sendo:

$$N_h = \frac{\Delta H_o}{h_o} \varepsilon_h^{-H} \text{ (na horizontal).} \quad (4.78)$$

Onde,  $H$  é o expoente Hurst,  $\Delta H_o$  é a variação total na altura ( $l_o \leq \Delta H_o \leq \Delta L_o$ ) e  $\varepsilon_h$  é o fator de transformação de escala na direção horizontal.

Portanto, para o correspondente comprimento rugoso (real) da trinca,  $\Delta L$ , no trecho  $\Delta L_o \times \Delta H_o$  pode-se escrever:

$$\Delta L = N_v r \quad (4.79)$$

onde  $r$  é igual ao comprimento rugoso da trinca em uma escala microscópica, dado em função das caixinhas de extensões  $l_o \times h_o$ , por:

$$r = \sqrt{l_o^2 + h_o^2} \quad (4.80)$$

onde  $l_o$  e  $h_o$  são tamanhos microscópicos do comprimento da trinca nas direções horizontal e vertical respectivamente. Substituindo-se (4.80) em (4.79) tem-se:

$$\Delta L = N_v \sqrt{l_o^2 + h_o^2} \quad (4.81)$$

substituindo-se (4.77) em (4.81) tem-se:

$$\Delta L = \frac{\Delta L_o}{l_o} \sqrt{l_o^2 + h_o^2} \quad (4.82)$$

Uma vez que, na fratura as escalas nas direções ortogonais são de mesma natureza física, pode-se escolher,  $\varepsilon_v = \varepsilon_h = l_o/\Delta L_o$  pode-se escrever a partir de (4.78) que:

$$N_h = \left( \frac{\Delta H_o}{l_o} \right) \left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right)^H \quad (4.83)$$

sendo necessariamente  $N_h = N_v$  temos:

$$\left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right) = \left( \frac{\Delta H_o}{l_o} \right) \left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right)^H \quad (4.84)$$

reescrevendo-se a expressão (4.82) tem-se:

$$\Delta L = \Delta L_o \sqrt{1 + \left( \frac{h_o}{l_o} \right)^2} \quad (4.85)$$

escrevendo-se  $h_o$  a partir de (4.84) como:

$$h_o = \Delta H_o \left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right)^{H-1}. \quad (4.86)$$

Eliminando-se em (4.85) a dependência de  $h_o$ , com o auxílio de (4.86), e substituindo-se em (4.85) tem-se:

$$\Delta L = \Delta L_o \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta H_o}{l_o} \right)^2 \left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right)^{2(H-1)}} \quad (4.87)$$

O comprimento da curva no trecho  $\Delta L_o \times \Delta H_o$ , considerando-se o método Sand-Box [Bunde 1994] cuja contagem é iniciada desde a origem do fractal, pode ser escrito como:

$\Delta L = L$ ,  $\Delta L_o = L_o$  e  $\Delta H_o = H_o$ , logo a equação (4.87) passa a ser dada por:

$$L = L_o \sqrt{1 + \left(\frac{H_o}{l_o}\right)^2 \left(\frac{L_o}{l_o}\right)^{2(H-1)}}, \quad (4.88)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura - 4. 18. Observe que, os comprimentos  $L_o$  e  $H_o$  correspondem aos comprimentos projetados da trinca, nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

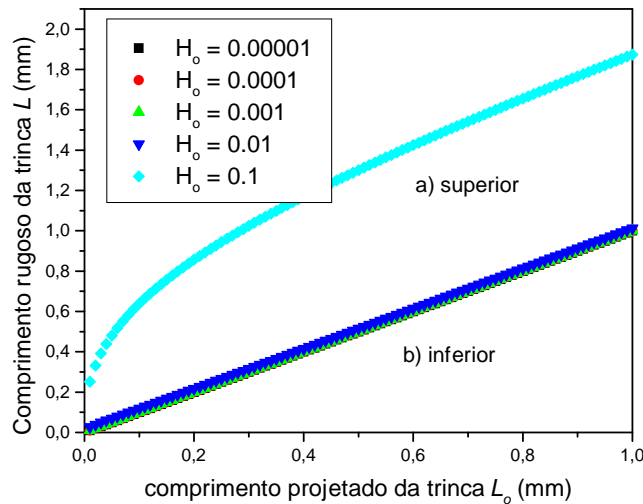


Figura - 4. 18. Gráfico do comprimento rugoso  $L$  em função do comprimento projetado  $L_o$ , mostrando a influência da altura,  $H_o$ , das caixas no modelo fractal da superfície de fratura; a) na curva superior observa-se o efeito deste  $H_o$  à medida que ele tende a unidade ( $H_o \rightarrow 1.0$ ); b) nas curvas inferiores, que aparecem quase sobrepostas, observa-se o efeito deste  $H_o$  à medida que ele tende a zero ( $H_o \rightarrow 0$ ).

O gráfico da Figura - 4. 18 mostra a influência da altura,  $H_o$ , das caixas sobre o comprimento rugoso da trinca,  $L$ , em função do comprimento projetado,  $L_o$ . Observe que para caixas de altura baixa, ( $H_o \rightarrow 0$ ), em relação ao seu comprimento,  $L_o$ , as curvas inferiores (para  $H_o = 0.01, 0.001, 0.0001$ ), denotadas pela letra “b”, quase se sobrepõem dando lugar a uma relação linear entre estes comprimentos (Figura - 4. 19). Enquanto que para caixas de altura elevada, ( $H_o \rightarrow 1$ ), em relação ao seu comprimento,  $L_o$ , a relação entre os comprimentos tornam-se cada vez mais distintas de uma relação linear para um mesmo expoente de rugosidade,  $H$ .

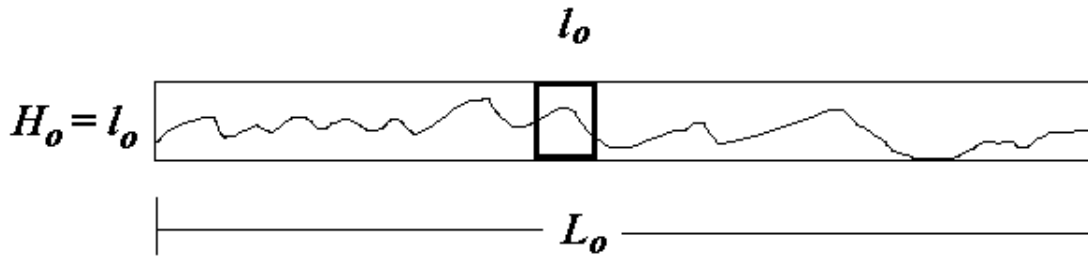


Figura - 4. 19. Caixas (ou trechos) de contagem de tamanho  $L_o \times H_o$  retangulares onde as caixas que cobrem o perfil têm a extensões diferentes nas direções horizontal e vertical.

Fazendo-se as caixas (ou trechos) de contagem de tamanho  $L_o \times H_o$  retangulares onde as caixas que cobrem o perfil têm a extensões diferentes nas direções horizontal e vertical respectivamente, isto é,  $H_o = l_o$  a equação (4. 88) se simplifica em:

$$L = L_o \sqrt{1 + \left(\frac{l_o}{L_o}\right)^{2H-2}} \quad (4. 89)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura - 4. 20.

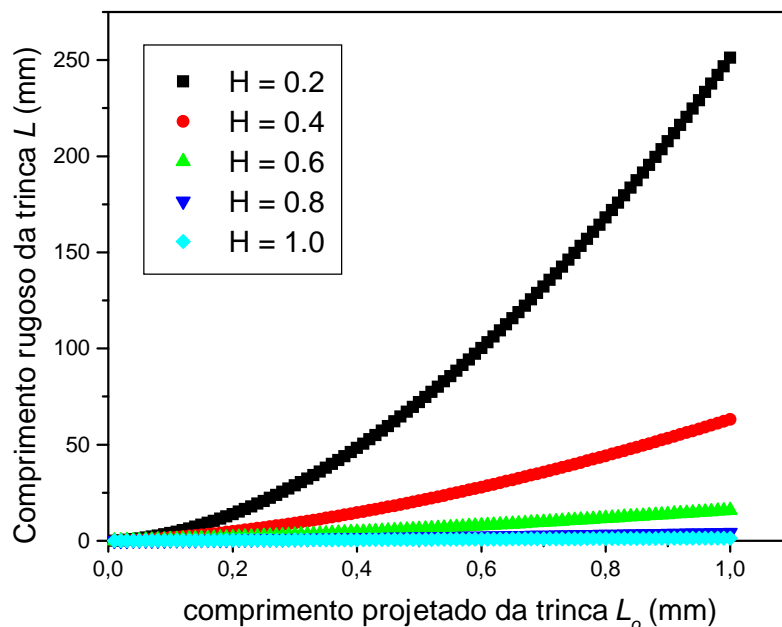


Figura - 4. 20. Gráfico do comprimento rugoso,  $L$ , em função do comprimento projetado,  $L_o$ , mostrando a influência do expoente Hurst,  $H$ , no modelo fractal da superfície de fratura.

O gráfico da Figura - 4. 20 mostra a influência da dimensão de rugosidade sobre o comprimento rugoso da trinca,  $L$ , em função do projetado,  $L_o$ . Observe que para  $H \rightarrow 1$ , que

corresponde a uma superfície mais lisa, a relação entre o comprimento rugoso e projetado torna-se cada vez mais linear. Enquanto que para  $H \rightarrow 0$ , que corresponde a uma superfície mais rugosa, a relação entre o comprimento rugoso e projetado torna-se cada vez mais não-linear.

Observe que para  $L_o = H_o$  temos, a partir da eq. (4. 78) e (4. 84) a relação:

$$L_o = h_o \left( \frac{l_o}{L_o} \right)^{-H}, \quad (4. 90)$$

que é uma relação autosimilar entre o comprimento projetado da trinca,  $L_o$ , e a altura da caixinha,  $h_o$ . Esta relação mostra que todo fractal auto-afim, na aproximação de pequenas escalas, possui uma auto-similaridade local formando uma subestrutura fractal, quando se considera trechos quadrados,  $L_o \times L_o$ , ao invés de trechos retangulares,  $L_o \times H_o$ .

É importante salientar que  $L_o$  denota a distância entre dois pontos da trinca (o comprimento projetado da trinca). A medida auto-afim,  $L$  de  $L_o$ , na dimensão fractal,  $D$ , é dada por (4. 88).  $l_o$  é o comprimento mínimo possível de uma micro-trinca, que define a escala  $l_o/L_o$  sob a qual a o perfil da trinca é escrutinado, conforme foi discutido na secção – 4.8.3 e ainda será discutido no Capítulo VII (no item Resultados e Discussões). O expoente de Hurst,  $H$ , está relacionado a  $D$  por (4. 76).

No estudo de um fractal auto-afim existem dois limites extremos para serem verificados. Um é o limite em que a altura das caixas é elevada em relação ao seu comprimento,  $L_o$ , isto é, ( $H_o \rightarrow 1$ ), que é também chamado de limite local. O outro limite é aquele em que a altura das caixas é baixa em relação ao seu comprimento,  $L_o$ , isto é, ( $H_o \rightarrow 0$ ) que é chamado de limite global. Será visto agora cada um destes casos limites contidos na expressão (4. 88).

#### *caso 1 : O limite auto-similar ou local da fractalidade*

Tomando-se o limite local da medida fractal auto-afim dada por (4. 88), isto é, para o caso em que  $H_o = L_o \gg l_o$  tem-se:

$$L \cong L_o \left( \frac{l_o}{L_o} \right)^{H-1} \quad (4. 91)$$

onde:

$$\frac{L}{L_o^{2-H}} \cong l_o^{H-1} = cte \quad (4. 92)$$

Esta equação é análoga a relação matemática auto-similar somente que o expoente é  $1 - H$  ao invés de  $D - 1$  [Dauskardt 1990; Borodich 1997; Mishnaevsky Jr. 1994; Feder 1989].

De acordo com esses resultados observa-se que a relação (4. 92) possui um

compromisso com o expoente Hurst dos perfis na escala de observação considerada  $\varepsilon = l_0 / L_0$ . Observa-se que a consideração de um tamanho mínimo para a fratura  $l_{01}$  sobre uma região, deve-se considerar a dimensão local de rugosidade da fratura nessa escala. De forma semelhante, se as considerações de tamanho mínimo de fratura são feitas em uma escala que envolve várias regiões  $l_{02}$ , este deve levar em conta o valor da dimensão global de rugosidade nessa escala, de tal forma que:

$$(2 - H_1)l_{01}^{H_1-1} = (2 - H_2)l_{02}^{H_2-1} = \text{const} , \quad (4.93)$$

embora  $l_{01} \neq l_{02}$  e  $H_1 \neq H_2$ .

### *caso 2: O limite auto-afim ou global da fractalidade*

Tomando-se o limite global da medida fractal auto-afim dada por (4. 88), isto é, para o caso em que:  $H_0 = l_0 \ll L_0$ . Logo o comprimento  $L$  é independente de  $H$  e  $D = l$ , portanto

$$L \cong L_0 \quad (4. 94)$$

Será observado que os materiais dúcteis por apresentar uma alta fractalidade possuem um perfil de trinca que pode ser melhor ajustado pela equação (4. 91), enquanto que os materiais frágeis por apresentar uma baixa fractalidade serão melhor ajustados pela equação (4. 94) correspondendo ao modelo clássico, isto é, plano para a superfície de fratura. Por outro lado, a clivagem que acontece na microestrutura de materiais dúcteis tenderia a produzir uma superfície, onde  $L \cong L_0$ , que poderia ser chamada de lisa. Contudo, este efeito de clivagem é apenas local nestes materiais e por isso a superfície de fratura resultante é na verdade rugosa.

### *4.9.3 - A rugosidade local de uma superfície de fratura*

Definindo-se a rugosidade local de uma superfície de fratura como sendo:

$$\xi \equiv \frac{dA}{dA_0} \Rightarrow A = \int \xi(A_0) dA_0 . \quad (4. 95)$$

Onde,  $A$  é a superfície rugosa e  $A_0$  é a superfície projetada. Para o caso de um perfil rugoso de trinca tem-se:

$$\xi \equiv \frac{dL}{dL_0} \Rightarrow L = \int \xi(L_0) dL_0 \quad (4. 96)$$

usando-se (4. 89) em (4. 96) tem-se que:

$$\xi \equiv \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_o}{L_o} \right)^{2H-2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{l_o}{L_o} \right)^{2H-2}}} \quad (4.97)$$

A partir de (4.96), observe que quando não há rugosidade na superfície gerada tem-se que:  $L = L_o$  logo

$$\frac{dL}{dL_o} = 1. \quad (4.98)$$

A grandeza  $\xi \equiv \frac{dL}{dL_o}$  parece ser uma boa definição de rugosidade ao contrário da definição onde  $\xi$  é dado por  $\xi = L/L_{||}$  [Dos Santos 1999, Anderson 1995] que não satisfaz a exigência intuitiva de rugosidade quando  $L_{oM}$  está apenas inclinado em relação a  $L_o$ , mantendo-se  $L_o = L_{oM}$ , conforme mostra a Figura - 4.21.

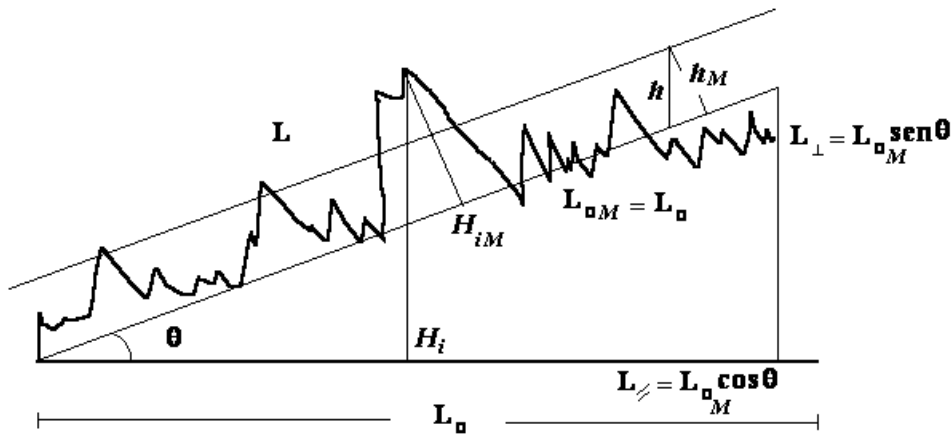


Figura - 4.21. Esquemática de uma superfície rugosa, a qual se encontra inclinada em relação a sua projeção.

A rugosidade deve depender infinitesimalmente do comprimento projetado e de sua orientação em relação a ele. Neste caso, a rugosidade pela definição usual acrescenta um erro igual a secante do ângulo  $\theta$ , ou seja,

$$\xi = L/L_{||} = \left( \frac{L}{L_{oM}} \right) \left( \frac{L_{oM}}{L_{||}} \right) = \left( \frac{L}{L_{oM}} \right) \frac{1}{\cos \theta}. \quad (4.99)$$

Porém, pela definição proposta neste trabalho, quando apenas inclina-se uma superfície lisa em relação a horizontal tem-se:  $L = L_{oM}$  e  $L_{oM} = L_o$  e



$$\text{novamente, } \xi = \frac{dL}{dL_o} = \frac{dL}{dL_{oM}} \frac{dL_{oM}}{dL_o} = 1.$$

Dentro desta filosofia será considerado como rugosa, qualquer superfície que apresenta em um trecho infinitesimal uma variação do seu contorno tal que  $\frac{dL}{dL_o} > 1$ , portanto tem-se que:

$$\frac{dL}{dL_o} \geq 1. \quad (4. 100)$$

A análise que segue é baseada no balanço de energia de Griffith-Irwin para a propagação estável, conforme já foi abordado no [Capítulo – II](#).

## 4. 10 – Considerações preliminares sobre o modelo proposto

i) É possível, a princípio, distinguir matematicamente uma trinca em diferentes materiais usando-se suas características geométricas as quais podem ser retratadas pelos diferentes valores dos expoentes de rugosidade nas relações (4. 88) e (4. 89).

ii) O modelo do comprimento da trinca rugosa,  $L$ , em função do comprimento projetado,  $L_0$ , sugerido por Alves [2001] e Alves [2002] aparece ter uma boa concordância com os resultados experimentais. Este resultados nos permite consolidar o modelo já publicado na literatura especializada em fratura em Alves [2005].

iii) O modelo proposto neste capítulo verificou que as superfícies de fratura dos materiais analisados são realmente fractais auto-afins. Partindo-se dessa verificação torna-se viável considerar o modelo fractal da superfície de fratura rugosa dentro das equações da mecânica da fratura. O entendimento da formação de estruturas de dissipação, com as trincas, deve proceder de sua análise matemática, conforme a estreita relação que existe entre a fenomenologia do processo de formação de estruturas de dissipação e a sua geometria fractal. Portanto, a descrição matemática das estruturas fractais deve ultrapassar a uma simples caracterização geométrica, com o propósito de relacionar o padrão formado com o processo de dissipação de energia gerado nele. Desta forma, é possível usar a geometria fractal com o propósito de entender outros processos cada vez mais complexos dentro da mecânica da fratura. Portanto, os vários mecanismos responsáveis pelo desvio da trinca e pela formação da superfície rugosa de fratura podem, a partir do modelo fractal, ser quantificado na análise fractal dessa superfície.

iv) O comprimento da trinca rugosa é uma resposta a interação desta com a microestrutura do material. Portanto, è possível retratar matematicamente o comportamento peculiar rugoso de uma trinca usando-se a geometria fractal

v) O modelo apresenta uma riqueza matemática que ainda pode ser explorada em termos da determinação do comprimento mínimo de trinca  $l_0$ , da dimensão fractal em função dos parâmetros de ensaio do material e de suas propriedades.

vi) O modelo matemático é sensível à variações no comportamento da trinca se seu comprimento é linear ou logarítmico com o comprimento projetado da trinca.

# Capítulo V

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA DA FRATURA CLÁSSICA

*Mas agora quebrarei o seu jugo de sobre ti, e romperei as tuas cadeias (Naum 1, 13)*

### 5. 1 - Introdução

A MF representa uma das mais importantes áreas interdisciplinares de estudos da Ciência e Engenharia dos Materiais e da Engenharia Mecânica. Ela estuda o aparecimento de falhas e defeitos e a sua influência sobre as propriedades mecânicas dos materiais. De uma forma geral, a MF trata da descrição da formação, do crescimento e da propagação de trincas e de superfícies de fratura. O entendimento dos mecanismos de formação e interação das trincas e superfícies de fratura com a microestrutura do material também é uma das suas principais preocupações. Este entendimento permite compreender as propriedades mecânicas dos materiais e os processos de dissipação de energia durante o crescimento e a propagação das trincas. Através do conhecimento das propriedades dos materiais na presença de defeitos, torna-se possível dar a cada material o uso correto adequando-os conforme a solicitação de suas aplicações. Porque, por meio da MF é possível conhecer além do emprego mecânico destinado aos diferentes materiais, as suas limitações, tanto para aqueles materiais desenvolvidos em laboratórios, como para aqueles utilizados ou fabricados pela indústria de uma forma geral, como também prevê as suas limitações em serviço.

É importante lembrar que a qualidade de um projeto em Engenharia está relacionada à correta escolha dos materiais envolvidos. A aplicação de cada material deve ser adequada às suas propriedades e limitações, a fim de preencher as necessidades e especificações do projeto e manter o controle dos riscos e danos, dentro de uma margem plausível, para que em uma situação crítica seja possível prever quais são as conseqüências existentes no caso de falha de um de seus componentes. Com isso é possível evitar futuros acidentes (inclusive com vítimas), ou prejuízos,

pelo uso indevido dos materiais além de suas limitações.

O interesse particular de se conhecer os diferentes mecanismos que podem levar um material à falha mecânica, ou a sua ruptura completa, tem a finalidade de otimizar as diversas propriedades mecânicas oferecidas e fornecer subsídios para o projeto de novos materiais, os quais devem ser capazes de resistir a solicitações com limites superiores aos limites dos materiais já existentes. A modificação das propriedades de um material pode ser feita melhorando-se os mecanismos de tenacificação. A finalidade é proporcionar à peça, ou ao produto, uma resistência mecânica, uma tenacidade, uma durabilidade e um melhor desempenho, conforme a especificação desejada.

As teorias e os modelos desenvolvidos na Mecânica da Fratura visam descrever as propriedades mecânicas dos materiais na presença de defeitos e, conseqüentemente, explicar os fenômenos ligados às falhas mecânicas, como por exemplo, o processo de dissipação de energia durante o crescimento e a propagação das trincas. Estes modelos também procuram relacionar as medidas feitas em ensaios macroscópicos com os efeitos da fratura sobre a microestrutura do material. Com isto é possível saber se um dado material pode, ou não, resistir à solicitação externa desejada (Anderson, 1995; Kanninen, 1985).

## 5. 2 - O que estuda a Mecânica da Fratura e a sua Importância Tecnológica na Engenharia dos Materiais

A mecânica da fratura trata da previsão da vida mecânica dos componentes e estruturas sólidas. Existem basicamente dois tipos de estruturas e componentes estudados pela MFC. O primeiro tipo é aquele constituído de materiais cujas falhas são dominadas pela fratura e o segundo tipo é aquele constituído de materiais cujas falhas são dominadas pela fluência ou escoamento, conforme mostra a Tabela - V. 1.

Tabela - V. 1: Tipos de estruturas e componentes comumente estudadas pela MFC (Ewalds, 1993)

Falhas de Estruturas e Componentes	
Materiais Frágeis: dominados pela fratura	Materiais Dúcteis: dominados pelo escoamento
- A plasticidade é localizada - Os tipos de defeitos que controlam a resistência são macroscópicos. - Introdução de defeitos no material Ex: falhas em soldas, porosidades, defeitos superficiais, trincas nucleadas por fadiga ou corrosão (com perda de massa)	- A plasticidade é generalizada - Os tipos de defeitos que controlam a resistência ao escoamento plástico são microscópicos. - Introdução de defeitos no material Ex: defeitos intersticiais, contorno de grão, precipitados, redes de discordâncias.

A MFC possui aplicações tecnológicas e científicas, das mais diversas, como por exemplo:

- chips eletrônicos, elementos de estrutura, elementos de máquinas, pontes, aviões, navios, vasos, tanques, caldeiras, auto-claves utilizados na armazenagem de fluidos sob pressão, para acionamento de máquinas a vapor, etc. Enfim, todo tipo de elemento, objeto, ou estrutura, soldada ou rebitada, que pode ser quebrada ou trincada.

Na maioria das aplicações, os materiais são submetidos a esforços mecânicos monotônicos e lentos (estáveis), rápidos (instáveis) e cíclicos. Com isto, eles podem apresentar o fenômeno da fratura, lenta ou quase-estática, da fratura rápida ou catastrófica e da fadiga, respectivamente. Por esta razão, o estudo da fratura compreende de uma forma geral, basicamente quatro áreas: (i) a fratura estável, (ii) a fratura instável ou a dinâmica da fratura, (iii) a fadiga e (iv) o estudo da fractografia (Ewalds, 1993).

(i) O estudo da fratura estável descreve o processo de propagação de trincas em situações próximas ao equilíbrio, ou seja, em situações em que as taxas de deformação não dependem da velocidade de propagação dessas trincas (Anderson, 1995).

(ii) A dinâmica da fratura procura descrever o processo de formação, crescimento e propagação de trincas que são produzidas por altas taxas de deformação (Kanninen, 1985), onde a sua velocidade de propagação influencia os valores das grandezas energéticas (caracterizando um fenômeno não-linear). A dinâmica da fratura, ou a fratura produzida em condições dinâmicas de instabilidade, por ser um fenômeno não-linear, apresenta situações de interesse para a Física e para a Engenharia de Materiais (Fineberg, 1991, 1993). Para a Física por se tratar de um exemplo de sistema instável, em processo de dissipação de energia. O entendimento deste processo de dissipação, pode contribuir para o estudo e a compreensão de fenômenos análogos, de complexidade ainda maior, como por exemplo, as avalanches, os terremotos e o movimento das placas tectônicas da crosta terrestre (Langer, 1991; Myers, 1993). Para a Engenharia de Materiais porque a compreensão deste fenômeno permite a otimização dos processos industriais e o projeto de novos materiais.

(iii) O estudo da fadiga leva em conta o processo de acúmulo de defeitos e trincas no material em função da velocidade, do tempo e da frequência de oscilação dos carregamentos cíclicos (Ewalds, 1993).

(iv) A fractografia é uma parte da MF que procura estudar o fenômeno do ponto de vista mesoscópico (Anderson, 1995). Ela envolve as três áreas citadas anteriormente e procura encontrar explicações para o processo de fratura na microestrutura do material, conforme foi descrito, anteriormente, no [Capítulo – IV](#).

Dentro destes estudos, a MFC procura fornecer respostas quantitativas para os seguintes

problemas:

- 1) Qual é a resistência residual do componente, ou estrutura, em função do tamanho da trinca? (Anderson, 1995)
- 2) Qual é o tamanho máximo da trinca, que pode ser tolerada, sob um dado carregamento de forças externas? (Anderson, 1995)
- 3) Qual é a velocidade de propagação que uma trinca apresenta em função do meio ou das condições de uso do material? (Mishnaevsky Jr., 1994).
- 4) Finalmente, quanto tempo leva para a trinca alcançar um tamanho crítico, isto é, qual é a vida útil de um componente ou estrutura? (Mishnaevsky Jr., 1996).

### 5.3 - Introdução a Teoria Clássica da Mecânica da Fratura

Partindo do princípio que os materiais são compostos de átomos ou moléculas, que se mantêm unidas por meio de ligações químicas, a fratura nada mais é do que o processo mecânico de quebra destas ligações mantendo-se, até certo ponto, inalterada as propriedades químicas do material. Logo, a primeira pergunta que surge no estudo da fratura é:

*Por que os corpos se rompem?*

Conhecendo-se a estrutura da matéria poder-se-ia dizer que os corpos se rompem porque, em um esforço mecânico, é fornecida a ele uma energia maior do que as energias das ligações químicas que mantêm os átomos unidos, fazendo com que estas se rompam entre si abruptamente.

É necessário lembrar que, de acordo com a teoria da elasticidade, para ocorrer a quebra das ligações químicas em um corpo, geralmente este acumula energia elástica antes da sua ruptura. Isto significa que, na ruptura, a energia por unidade de volume que se oferece ao corpo, por meio do esforço mecânico, é maior ou igual a sua capacidade volumétrica de armazenar esta energia. Portanto, é possível encontrar uma expressão matemática geral, capaz de fornecer a tensão de ruptura teórica dos materiais sólidos, substituindo-se  $u_f = \gamma_e/2a_o$  em  $u_f = \sigma_f^2/2E$ , obtendo-se:

$$\sigma_{teo} = \left( \frac{\gamma_e E}{a_o} \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

onde  $a_o$  é o parâmetro de rede do material e  $\gamma_e$  é a sua energia de superfície específica. Observe que este simples modelo não leva em conta as irregularidades, ou defeitos, encontrados na microestrutura do material tais como: discordâncias, inclusões, vacâncias, etc.

Para um material cristalino perfeito, pode-se relacionar diretamente o seu alongamento máximo com a porcentagem na qual este material distende suas ligações químicas antes de se

romper, ou seja,  $\varepsilon_{m\acute{a}x} = \Delta a_o/a_o$  (onde  $a_o$  é o parâmetro de rede do cristal). Portanto, neste caso, a relação entre o módulo elástico,  $E$ , e a tensão de fratura,  $\sigma_f$ , deveria ser direta, a menos de um fator de alongamento,  $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ , que depende de cada material (Marder 1996b), conforme mostra a equação  $\sigma_f = E\varepsilon_{m\acute{a}x}$ . Contudo, os materiais apresentam defeitos que produzem diferenças entre as elongações microscópicas, dadas por:  $\varepsilon = \Delta a_o/a_o$ , e as macroscópicas, dadas por:  $\varepsilon = \Delta l/l$ , isto é:

$$\frac{\Delta a}{a} \neq \frac{\Delta l}{l}, \quad (5.2)$$

onde  $l$  é o comprimento do corpo de prova. O que faz com que, na prática, os valores previstos teoricamente pela expressão (5.1) não correspondam à aqueles medidos experimentalmente. Isto significa que os defeitos nos materiais têm uma importância fundamental na sua ruptura. Este fato ocasionou todo o desenvolvimento da mecânica da fratura que se conhece até hoje.

Se nenhum material frágil apresentasse defeitos microestruturais, o modelo como está apresentado até aqui estaria ótimo e explicaria tudo o que acontece com os materiais que seguem a teoria elástica linear. Mas isso não se verifica na prática, o que tornou necessário criar um modelo que levasse em conta a presença dos defeitos (Inglis, 1913; Griffith, 1920), conforme será visto a seguir.

### 5.3.1 - A teoria de Inglis para a fratura e a sua abordagem dos concentradores de tensão

Inglis em 1912-1913 (Inglis 1913) foi o primeiro a considerar os defeitos presentes em um material para explicar a discrepância entre os valores experimentais e teóricos da resistência mecânica dos materiais à fratura. Ele utilizou um modelo de uma trinca elíptica, passante, no centro de uma placa, plana e infinita, sujeita a uma tensão externa,  $\sigma_{ap}$ .

Em seu modelo, Inglis imaginou que um defeito como este, no centro de uma placa plana, poderia retratar os principais problemas existentes em uma fratura. Entretanto, sua proposta não foi suficiente para explicar o efeito da variação da energia elástica à medida que um defeito cresce até o material se romper.

Griffith foi o primeiro a considerar uma abordagem mais realista do aumento no tamanho do defeito até um ponto crítico, a partir do qual o material se rompe. Ele formulou uma teoria fenomenológica, baseada no balanço termodinâmico das energias presentes na fratura, conforme será visto a seguir.

## 5.4 - A teoria termodinâmica para a fratura e o modelo de Griffith

O estudo da fratura e propagação de trincas lentas, ou de quase-equilíbrio (fratura

estável), possui seu início com o trabalho de Griffith em 1920-1922 [Griffith 1920]. Ele retomou o modelo de uma trinca elíptica em uma placa, plana e infinita, utilizado por Inglis. Pensando na questão do campo global no interior de um corpo, ele procurou elaborar sua teoria com a finalidade de calcular qual deveria ser o tamanho do defeito crítico, capaz de dar início à propagação de uma trinca. Com isto, ele explicou quantitativamente o decréscimo na resistência dos materiais, devido à presença de um defeito de tamanho crítico. Este cálculo contribuiu para o avanço da MFC, fornecendo as bases matemáticas para o cálculo da resistência mecânica de um material. A importância do trabalho de Griffith se reflete até os dias de hoje. Seu trabalho é considerado como o início da MFC, o que a tornou uma ciência quantitativa do comportamento mecânico dos materiais.

#### 5.4.1 – O balanço energético de Griffith para a fratura

Considere um corpo elástico na forma de uma fina placa plana, de espessura unitária, “ $e$ ”, desprezível frente a sua largura,  $W$ , e módulo elástico,  $E$ . Suponha que esta placa possui um entalhe (ou falha) central passante, através da sua espessura, na forma de uma trinca elíptica, cujo comprimento do eixo maior, que corresponde ao comprimento do entalhe, é  $2L_l$ . Essa trinca é introduzida no corpo para assegurar que a sua propagação se iniciará a partir dela e não de outro ponto qualquer da placa. Suponha, ainda, que esta placa está sujeita a um carregamento de tensão uniforme,  $\sigma$ , aplicada externamente (*ad infinitum*) nas suas extremidades, na condição de placa infinita, onde  $2L_l \ll w$ . A Figura - 5. 1 esquematiza uma aproximação geométrica de tal placa.

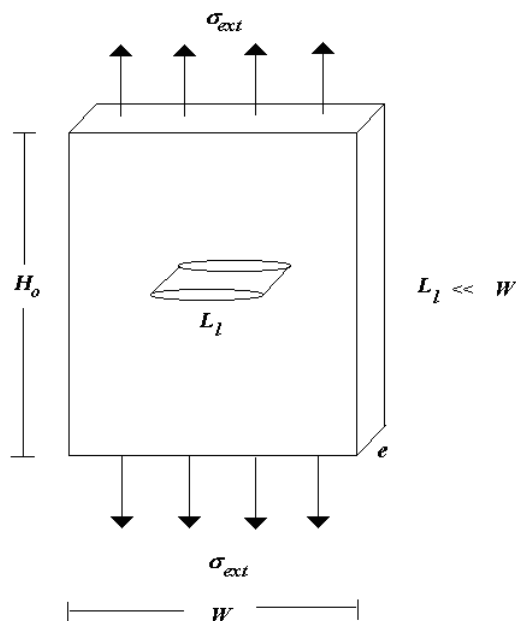


Figura - 5. 1. Modelo de Griffith para a propagação de uma trinca. Corpo elástico na forma de uma fina placa plana de espessura unitária  $e$  desprezível e largura  $W$ , sujeita a uma tensão aplicada,  $\sigma$ , com uma falha (ou trinca) central, que atravessa a espessura da placa, na forma de uma elipse de eixo maior, de comprimento  $2L_l$ , na condição de placa infinita, onde  $2L_l \ll w$ .



Assim como Inglis, Griffith considerou uma trinca plana sem *rugosidades* microestruturais e equacionou o balanço energético do sistema da Figura - 5. 1 somando as diferentes contribuições, da seguinte forma:

$$U_l = U_i + U_L + U_\gamma - F , \quad (5. 3)$$

onde:

$U_l$  é a energia elástica total da placa contendo o entalhe e remotamente solicitada (carregada) com uma tensão externa constante,  $\sigma_{ext} = cte$ .

$U_i$ : é a energia potencial elástica inicial armazenada no corpo sem o entalhe (ou trinca), antes de aplicar a tensão externa,  $\sigma_{ext}$ , à placa (é uma constante).

$U_L$ : é a variação na energia elástica de deformação, armazenada no corpo, causada pela introdução do entalhe (ou trinca), de tamanho  $2L_l$  na placa.

$U_\gamma$ : é a variação na energia elástica de superfície gasta para formar duas novas superfícies de fratura (energia necessária para criar superfícies lisas devido ao entalhe).

$F = \int X du$ : é o trabalho realizado pelas forças externas,  $X$ , necessárias para aumentar o tamanho do entalhe, onde  $du$  é o deslocamento infinitesimal do ponto de aplicação da carga,  $X$ . Este trabalho deve ser subtraído na equação (5. 3), desde que ele não é parte da energia potencial interna da placa.

Observe que a energia do corpo carregado sem defeito pode ser expressa como:

$$U_F = U_i - F , \quad (5. 4)$$

onde:

$U_F$ : é a energia elástica total armazenada no corpo sem defeito, após a aplicação da tensão externa,  $\sigma_{ext}$ .

Para a condição de equilíbrio proposta por Griffith, é razoável supor que as energias cinéticas, térmicas, acústicas e de discordâncias são desprezíveis frente às grandezas da equação anterior.

#### 5.4.2 - Cálculo da energias envolvidas no balanço de Griffith

A partir de agora será calculado, em particular e de forma matematicamente rigorosa, cada termo do balanço de energia da equação (5. 3), utilizando-se a análise de tensões desenvolvida por Inglis com a finalidade de demonstrar a dependência das grandezas citadas acima, por unidade de espessura “ $e$ ”.

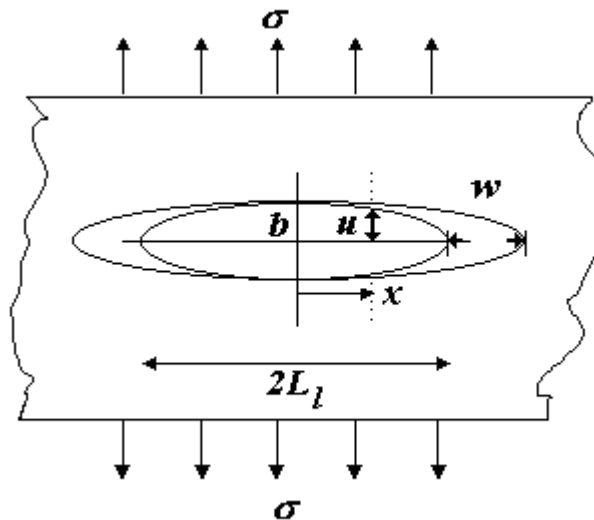


Figura - 5. 2. Deslocamento do flanco de uma trinca de comprimento  $2L_l$  em uma placa plana infinita, remotamente carregada com uma tensão constante,  $\sigma$ .

Considere o deslocamento,  $u$ , do flanco da trinca, conforme mostra a Figura - 5. 2, donde a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.5)$$

onde  $a$  e  $b$  neste caso são os eixos maiores e menores da elipse, respectivamente. Logo,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}. \quad (5.6)$$

A lei de Hooke permite escrever a equação do deslocamento,  $u$ , para a condição de tensão plana (espessura da placa desprezível), da seguinte forma:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (5.7)$$

e

$$\varepsilon = \pm \frac{b}{2a}. \quad (5.8)$$

A partir da Figura - 5. 2 temos que  $a = L_l$  para  $y = u$  os quais podem ser substituídos na equação (5. 5). Logo, extraindo-se o valor de  $u$  a partir da equação resultante desta substituição feita em (5. 5) e explicitando o valor de  $\varepsilon$  temos:

$$\varepsilon = \frac{u}{2(L_l^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (5.9)$$

nesta nova equação da elipse, obtém-se (<sup>16</sup>):

$$u = 2 \frac{\sigma}{E} (L_l^2 - x^2)^{1/2}. \quad (5.10)$$

A energia elástica de deformação necessária para abrir a trinca é:

$$U_L = -\frac{1}{2} (X \cdot 2u) = -Xu, \quad (5.11)$$

onde  $X$  é a força requerida para um deslocamento total,  $2u$ . A força,  $X$ , deve ser obtida pela soma (ou integral) da tensão,  $\sigma$ , sobre o comprimento total da trinca,  $2L_l$ . Então para tensão plana tem-se que:

$$U_L = -2 \int_0^{L_l} \sigma u dx = -2 \int_0^{L_l} \sigma \frac{2\sigma}{E} (L_l^2 - x^2)^{1/2} dx. \quad (5.12)$$

Logo, esta energia de deformação é então dada por:

$$U_L = -\frac{\pi \sigma^2 L_l^2}{2E}, \quad (5.13)$$

onde  $E$  é o módulo elástico do material e o índice “ $o$ ” se refere às superfícies planas lisas.

A energia elástica para formar a superfície,  $U_\gamma$ , é igual ao produto da energia específica elástica de superfície do material,  $\gamma_e$ , pela área das superfícies da trinca (duas superfícies, comprimento  $2L_l$ ) portanto:

$$U_\gamma = 2L_l \gamma_e \quad (5.14)$$

#### 5.4.3 – A abordagem variacional do balanço energético de Griffith para a fratura

O modelo de Griffith baseia-se no balanço energético de um sistema termodinâmico representado por um corpo sob tensão, contendo um entalhe na iminência de uma propagação de trinca. Fazendo uso de um método de cálculo variacional da energia contida no corpo e usando um critério de estabilidade estática, Griffith determinou as condições de início da propagação de uma trinca. Ele observou que o crescimento instável da trinca só ocorrerá a partir de quando não houver nenhum acréscimo em  $U_l$  pelo acréscimo no comprimento da trinca,  $L_l$  (Figura - 5. 3), ou seja, a instabilidade ocorrerá se:

$$\frac{dU_l}{dL_l} \leq 0. \quad (5.15)$$

---

<sup>16</sup> Na verdade o cálculo de (5. 10) é feito de uma forma muito mais complexa do que é apresentado aqui. Normalmente utiliza-se variáveis complexas e mapeamento conforme aplicado teoria da elasticidade. Contudo a aproximação apresentada é suficiente para os propósitos de cálculo a serem realizados nesta secção.

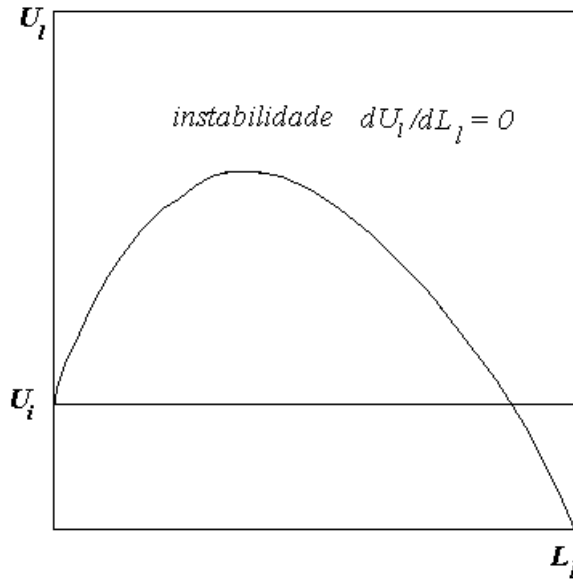


Figura - 5. 3. Gráfico da energia total,  $U_I$ , na placa em função do comprimento da trinca,  $L_I$ .

Substituindo-se (5. 3) em (5. 15) tem-se:

$$\frac{d}{dL_I}(U_i + U_L + U_\gamma - F) \leq 0. \quad (5. 16)$$

Os casos para o crescimento de trinca, segundo os critérios energéticos de Griffith, são:

i) Quando o deslocamento é constante ( $u = cte$ )

Neste caso, as forças externas são nulas e não realizam trabalho (grampos fixos,  $F = F_0$ , constante) e ainda a variação na energia elástica,  $U_L$ , causada pela introdução da trinca na placa, é negativa. Portanto, existe um decréscimo na energia de deformação elástica,  $U_L$ , do corpo por causa da perda de uma parte de sua rigidez e, conseqüentemente, a carga aplicada pelos grampos fixos cairá.

ii) Quando a carga aplicada é mantida fixa, ( $X = cte$ )

Neste caso, a tensão aplicada é constante ( $F = X_0u$ ) à medida que a trinca cresce e a energia elástica armazenada  $U_L$  antes da propagação da trinca é positiva. Os dois casos listados acima estão esquematizados na Figura - 5. 4.

Portanto, para o caso de grampos fixos, onde  $F = F_0$  é constante, a energia total,  $U_I$ , da placa trincada é dada somando-se as contribuições de energias de deformação e superficiais de acordo com a equação (5. 3). Isto é, substituindo (5. 13) e (5. 14) em (5. 3) tem-se:

$$U_I = U_i - \frac{\pi\sigma^2 L_I^2 e}{2E} + 2\gamma_e L_I e - F_0. \quad (5. 17)$$

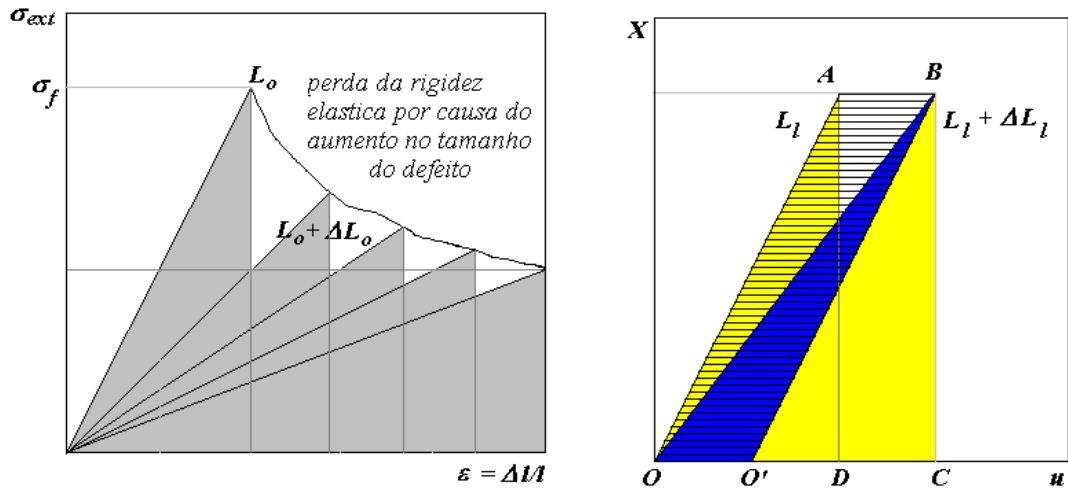


Figura - 5. 4. Variação da energia elástica e da flexibilidade com o aumento no tamanho do defeito; a) grampos fixos,  $F = F_0$ , constante ; b) Gráfico do carregamento de uma fratura a carga constante.

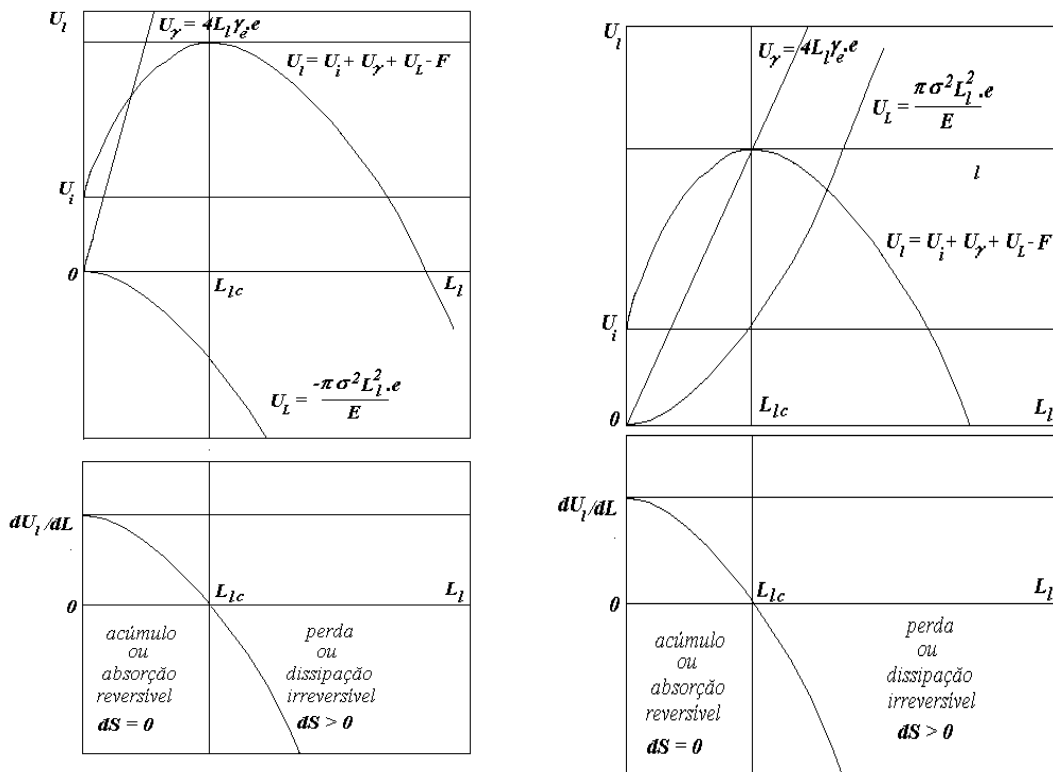


Figura - 5. 5. Balanço entre a energia volumétrica liberada,  $U_L$ , e a energia das superfícies geradas,  $U_\gamma$ , de uma trinca em uma fina placa, plana e infinita, sujeita a uma tensão externa,  $\sigma_{ext}$ , onde  $dS$  é a variação da entropia; a) quando nenhum trabalho é realizado por forças externas; b) para a condição de carga externa,  $\sigma_{ext}$  é constante.

O gráfico da dependência de  $U_i$ , na expressão (5. 17), com o comprimento da trinca,  $L_l$ , para  $U_i = constante$  e  $F = constante$ , é mostrado na Figura - 5. 5..

Supondo que a carga aplicada é mantida fixa, ( $X = cte$ ), à medida que a trinca cresce, a

energia elástica armazenada antes da propagação da trinca, de acordo com a Figura - 5. 4b, será dada por:

$$U_{antes} = \text{Área do triângulo } OAD. \quad (5. 18)$$

Considerando os triângulos  $\widehat{OBC}$  e  $\widehat{OAD}$  tem-se que a variação no valor de suas áreas com o comprimento da trinca,  $L_i$ , é dado por:

$$\Delta A = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{BC}}{2} - \frac{\overline{OD} \cdot \overline{AD}}{2}, \quad (5. 19)$$

mas  $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC}$ ,  $\overline{BC} = \overline{AD}$  e  $\overline{DC} = \overline{AB}$ , então pode-se escrever:

$$\Delta A = \frac{1}{2} [(\overline{OD} + \overline{DC}) \overline{AD} - \overline{OD} \overline{AD}], \quad (5. 20)$$

logo

$$\Delta A = \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AB}. \quad (5. 21)$$

Como  $\Delta A = U_L$ , tem-se:

$$U_L = \frac{1}{2} \underbrace{\overline{DC} \cdot \overline{AD}}_{\text{área do triângulo hachurado } OAB=OBO'} = \frac{1}{2} X \cdot du. \quad (5. 22)$$

mas de acordo com a Figura - 5. 4b tem-se que:

$$F = \overline{AD} \cdot \overline{DC} = \text{Carga} \cdot \text{deslocamento}, \quad (5. 23)$$

ou

$$F = \int X \cdot du. \quad (5. 24)$$

Comparando as expressões (5. 22) e (5. 24) tem-se que:

$$|U_L| = \frac{1}{2} |F| \Rightarrow F = 2U_L. \quad (5. 25)$$

Observe que o trabalho tem sinal oposto ao da energia elástica armazenada. Logo, ao se realizar trabalho aumenta-se a energia elástica armazenada no corpo. Portanto, de acordo com (5. 3), tem-se:

$$U_i = U_i - \underbrace{2U_L}_F + \underbrace{U_L}_{\text{elástica}} + \underbrace{U_\gamma}_{\text{superfície}}, \quad (5. 26)$$

ou

$$U_l = U_i - U_L + U_\gamma, \quad (5.27)$$

Substituindo os valores de (5.13) e (5.14) em (5.27) tem-se:

$$U_l = U_i - \frac{\pi\sigma^2 L_l^2 e}{2E} + 2L_l e \gamma_e, \quad (5.28)$$

cujos gráficos são mostrados na Figura - 5.5b.

A partir de agora será calculada a condição limite para o início da propagação da trinca. Griffith sugeriu que uma trinca só se propaga quando o decréscimo na energia elástica excede o aumento de energia superficial associada à formação de novas superfícies. Para falhas elípticas de eixo maior  $2L_l$  em uma placa fina (Figura - 5.2) a condição de equilíbrio para o comprimento da trinca é obtida fazendo:

$$\frac{dU_l}{dL_l} = 0 \text{ (ponto crítico)}. \quad (5.29)$$

De acordo com a Figura - 5.3, a condição de equilíbrio para a extensão da trinca é obtida estabelecendo-se  $dU_l/dL_l$  igual a zero. Logo, a partir de (5.16) tem-se:

$$\frac{dU_l}{dL_l} = \frac{d}{dL_l} (U_i + U_L + U_\gamma - F) = 0, \quad (5.30)$$

Logo, substituindo-se (5.17) na condição de equilíbrio (5.29) obtém-se :

$$\frac{dU_l}{dL_l} = \begin{cases} \frac{d}{dL_l} \left( U_i - \frac{\pi\sigma^2 L_l^2 e}{2E} + 2\gamma_e L_l e - F_0 \right) = 0 & p / F = F_0 = const \\ \frac{d}{dL_l} \left( U_i - \frac{\pi\sigma^2 L_l^2 e}{2E} + 2\gamma_e L_l e \right) = 0 & p / X = X_0 = const \end{cases}, \quad (5.31)$$

Observe que  $U_i$  é também constante,  $dU_i/dL_l$  é nulo, logo

$$\frac{dU_l}{dL_l} = 0 - \frac{\pi\sigma^2 L_l e}{E} + 2\gamma_e e = 0, \quad (5.32)$$

donde

$$-\frac{\pi\sigma^2 L_l e}{E} + 2\gamma_e e = 0. \quad (5.33)$$

Dividindo tudo por  $e$  tem-se:

$$-\frac{\pi\sigma^2 L_l}{E} + 2\gamma_e = 0, \quad (5.34)$$

Logo, substituindo-se (5.28) em (5.29) obtém-se de forma análoga ao caso I:

$$\pi\sigma^2 L_{lc} = 2\gamma_e E = const. \quad (5.35)$$

Será visto posteriormente que, na condição de deformação plana, esta constante chamada de tenacidade à fratura ( $K_{IC} = \sigma\sqrt{\pi L_{lc}} = \sqrt{2\gamma_e E} = const$ ) é uma propriedade do material que não depende da espessura.

Portanto, calculando-se o ponto onde o valor de  $U_l$  é máximo, no balanço energético de Griffith, obtém-se como consequência o valor crítico da tensão de fratura do material, dada por:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_{lc}} \right)^{1/2}. \quad (5.36)$$

A equação (5.36) apresenta o critério de Griffith para a determinação da tensão necessária para propagar uma trinca. Com seu modelo e argumentos Griffith explicou a discrepância que havia entre a tensão de fratura teórica e aquela obtida experimentalmente, independentemente da geometria do defeito. Observe que o resultado (5.36) é o mesmo para os dois casos, apenas por causa da montagem particular mostrada na Figura - 5.1, o que não aconteceria se esta montagem fosse diferente, como por exemplo, a de uma dupla alavanca (double cantilever).

#### 5.4.4 – O tamanho crítico, e o critério energético de Griffith para a propagação de trinca.

Dado um material de tensão de fratura,  $\sigma_f$ , e módulo elástico,  $E$ , agora, pela equação (5.36), pode-se calcular o ponto crítico a partir do qual uma trinca (ou um defeito) cresce, ou começa a se propagar. Nas condições energéticas do sistema de deslocamento, ou carga constante, o comprimento crítico deste defeito,  $L_{lc}$ , é dado igualmente por (5.36), ou seja:

$$L_{lc} = \frac{2\gamma_e E}{\pi\sigma_f^2}. \quad (5.37)$$

A equação(5.37), mostra que o comprimento crítico,  $L_{lc}$ , depende do material que está sendo ensaiado (módulo elástico,  $E$  e energia de superfície,  $\gamma_e$ ) e da montagem experimental, a qual é fornecida pela equação (5.13), para a variação da energia de deformação,  $U_L$ , causada pela introdução da trinca com comprimento,  $L_l$ . Ou seja, reescrevendo-se (5.37) tem-se:

$$L_{lc} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\gamma_e}{\left( \frac{\sigma_f^2}{2E} \right)} = \left( \frac{1}{2} \right) \frac{2\gamma_e L_l e}{\frac{\pi\sigma_f^2 L_l e}{2E}}. \quad (5.38)$$

Observe que o numerador da proporção dada em (5.38) corresponde à energia necessária para criar uma nova superfície,  $U_\gamma$ , dada por (5.14), ou seja, é a resistência que o material oferece à geração



de uma nova superfície, enquanto que o denominador corresponde à capacidade máxima de armazenar a energia elástica de um corpo de comportamento mecânico linear,  $U_L$ , dado por (5. 13).

A partir da Figura - 5. 4 observa-se que o ponto de ruptura é dado pelas coordenadas do gráfico ( $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ ,  $\sigma_f$ ). Neste ponto, a energia elástica acumulada no corpo começa a ser liberada na forma de uma trinca que se propaga a partir do defeito elíptico de tamanho  $L_{lc}$ , (Figura - 5. 2). Observe que, nestas condições se:

$L_l < L_{lc}$ ; Nesta região o valor da variação da energia de superfície é maior do que o valor da variação da energia elástica armazenada no corpo,  $\Delta U_L < \Delta U_\gamma$ . Logo, o valor energia específica de superfície supera o valor da taxa de energia elástica, impedindo que esta seja liberada pela propagação da trinca no corpo, ou seja,

$$\frac{\pi\sigma^2 L_l}{E} < 2\gamma_e \text{ (a trinca não se propaga) .} \quad (5. 39)$$

$L_l = L_{lc}$ ; Este ponto sobre o gráfico da Figura - 5. 5 é ponto de máximo, o que significa uma condição crítica limite, na qual o valor da variação da energia de superfície é igual ao valor da variação da energia elástica armazenada no corpo,  $\Delta U_L = \Delta U_\gamma$ . Neste ponto, o valor da taxa de energia elástica liberada é igual ao valor da energia específica de superfície, ou seja,

$$\frac{\pi\sigma^2 L_l}{E} = 2\gamma_e \text{ (trinca estável) .} \quad (5. 40)$$

$L_l > L_{lc}$ ; Nesta região predomina o valor da variação da energia elástica armazenada, sobre o valor da variação da energia de superfície,  $\Delta U_L > \Delta U_\gamma$ . Logo a taxa de energia elástica liberada é maior do que a energia específica gasta para formar as superfícies, ou seja,

$$\frac{\pi\sigma^2 L_l}{E} > 2\gamma_e \text{ (a trinca se propaga instavelmente).} \quad (5. 41)$$

A partir dos resultados (5. 40) a (5. 41) Irwin percebeu a necessidade de se definir uma nova grandeza para a MFC, chamada de taxa de energia elástica liberada,  $G$  (em homenagem a Griffith). Esta grandeza deu uma outra interpretação à situação do balanço energético de Griffith para uma trinca, conforme será mostrado a seguir.

## **5.5 - A Mecânica da Fratura Elástica Linear Clássica para os Materiais Frágeis**

Griffith (1920) e Irwin (1957) desenvolveram os primeiros estudos teóricos e experimentais da fratura, dando início ao que mais tarde foi chamada de Mecânica da Fratura

Elástica Linear (MFEL). A partir de agora será vista a modificação conceitual introduzida por Irwin na teoria de Griffith.

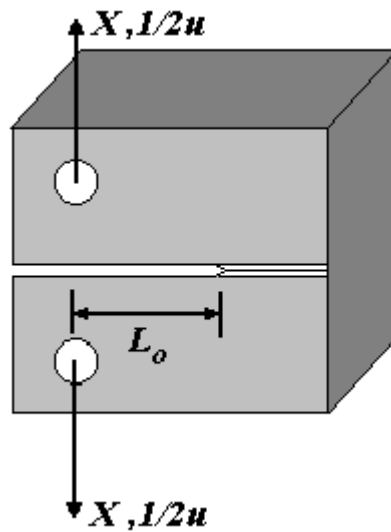


Figura - 5. 6. Corpo de prova com um entalhe,  $L_l$ , carregado por forças,  $X$ , com deslocamento total,  $u$ , nos pontos de aplicação da carga.

Devido à equivalência energética proposta por Irwin, para se tratar a fratura rugosa utilizando-se as mesmas equações da Mecânica da Fratura para o caminho liso, a partir deste ponto até o fim deste capítulo, somente, o caminho projetado da fratura rugosa,  $L_o$ , (denotado, a partir de agora, pelo índice “o”) será tratado indistintamente do caminho liso,  $L_l$ , (denotado pelo índice “l”). Portanto, desde este ponto em diante será considerado um corpo de prova com um entalhe,  $L_o$ , ao invés de  $L_l$ , carregado por forças,  $X$ , com deslocamento total,  $u$ , nos pontos de aplicação da carga. Logo, todas as equações que dependem do tamanho do entalhe,  $L_l$  sofrerão uma correção, em especial as equações das energias de deformação,  $U_L$ , e da energia de superfície,  $U_\gamma$ , dadas respectivamente para o caminho liso passarão a serem reescritas da seguinte forma:

$$U_L = -\frac{\pi\sigma^2 L_o^2}{2E}, \quad (5.42)$$

e para duas superfícies com comprimento,  $L_o$ , tem-se

$$U_\gamma = 2L_o\gamma_e. \quad (5.43)$$

### 5.5.1 – A modificação de Irwin para a teoria do balanço energético de Griffith

Irwin considerou, a partir da equação de instabilidade de Griffith, dada por:

$$\frac{d}{dL_i}(U_i + U_L + U_\gamma - F) \leq 0. \quad (5.44)$$

que se  $dU_\gamma/dL_i$  é menor ou igual a zero, ( $dU_\gamma/dL_i \leq 0$ ), esta equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dL_o}(F - U_L - U_i) \geq \frac{dU_\gamma}{dL_o}. \quad (5.45)$$

onde  $U_i$  é constante, ( $U_i = cte$ ).

No lado esquerdo da equação (5.45),  $dF/dL_o$ , representa a energia fornecida pelo trabalho da força externa,  $X$ , por unidade de extensão da trinca,  $L_o$ , e  $dU_L/dL_o$  é o aumento da energia elástica devido ao trabalho externo,  $dF/dL_o$ . Então  $dF/dL_o - dU_L/dL_o$  é a quantidade de energia que permanece disponível para aumentar a extensão da trinca de uma quantidade  $dL_o$ . O lado direito da equação (5.45),  $dU_\gamma/dL_o$ , representa a energia elástica que deve ser gasta para formar a superfície da trinca. Esta é a energia necessária para a trinca crescer, isto é, a resistência à fratura ou à propagação da trinca.

Derivando-se a equação (5.45) em relação a  $L_o$  tem-se:

$$\frac{d}{dL_o}(F - U_L) \geq \frac{dU_\gamma}{dL_o} \quad (5.46)$$

Utilizando-se a equação (5.42) e (5.43) em (5.46) e levando em conta o caso em que  $F = constante$ , para grampos fixos, desde que  $U_L = -\pi\sigma^2 L_o^2/2E$  decresce, tem-se que:

$$\frac{d}{dL_o}\left(F + \frac{\pi\sigma^2 L_o^2}{2E}\right) \geq \frac{d}{dL_o}(2\gamma_e L_o). \quad (5.47)$$

e para a condição de carga, ou tensão constante, onde  $|F| = 2|U_L|$ , desde que  $U_L = \pi\sigma^2 L_o^2/2E$  cresce com o trabalho externo, tem-se:

$$\frac{d}{dL_o}\left(F - \frac{\pi\sigma^2 L_o^2}{2E}\right) \geq \frac{d}{dL_o}(2\gamma_e L_o). \quad (5.48)$$

Logo, a partir das equações (5.47) e (5.48) tem-se os mesmos resultados obtidos por Griffith, percebendo-se imediatamente a necessidade que Irwin teve em definir a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , para a MFC.

### 5.5.2 – A taxa de energia elástica liberada, $G$

Irwin definiu de uma forma genérica, satisfazendo o balanço energético da equação (5.45), a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , contabilizada sobre a superfície plana,  $A_o$ , como sendo dada por:

$$G \equiv \frac{d}{dA_o} (F - U_V) \quad (5.49)$$

onde  $dF = Xdu$  é o incremento infinitesimal no trabalho realizado pela força externa aplicada,  $X$ .  $du$  é o deslocamento infinitesimal do ponto de aplicação da força externa,  $X$ .  $U_V$  é a energia elástica de deformação armazenada no volume do corpo.

É importante lembrar que a taxa de energia elástica liberada é a força motriz para a trinca se propagar. No caso de deformação plana, pode-se escrever a expressão (5.49) da taxa de energia elástica liberada,  $G$ , por unidade de área,  $A_o$ , em termos do perfil plano da fratura,  $L_o$ , isto é:

$$G = \frac{d}{dL_o} (F - U_L) \quad (5.50)$$

A rigor o termo de energia de deformação na equação (5.50) deveria ser denotado pelo índice,  $A$ , representando a área da fratura, ao invés do índice,  $L$ , representando o comprimento da trinca. Mas, como no caso de deformação plana, a relação entre a área projetada de fratura e o seu comprimento é dada por  $A_o = L_o e$ , e, nestas condições, as grandezas da fratura não dependem da espessura,  $e$ , porque esta se cancela nas equações. Logo, a notação usando o índice  $L$  será conservada, como já vem sendo feito até aqui.

Para descobrir a dependência de  $G$  com as demais grandezas pode-se reescrever a equação (5.50) de forma a satisfazer o balanço de energia dada pela seguinte equação:

$$Xdu = dU_L + GdL_o \quad (5.51)$$

$dU_L$  é a variação infinitesimal da energia elástica de deformação e  $G$  é a taxa de liberação de energia elástica definida durante o incremento infinitesimal do comprimento projetado  $dL_o$ .

Então,

$$X = \frac{dU_L}{du} + G \frac{dL_o}{du} \quad (5.52)$$

Por outro lado, para a fratura elástica linear vale a relação de Clapeyron, extraída a partir da lei de Hooke, dada por:

$$U_L = \frac{1}{2} Xu \quad (5.53)$$

onde  $U_L$  é a energia elástica de deformação, logo

Portanto, a expressão genérica da taxa de energia elástica liberada,  $G$ , por unidade de espessura do corpo, é dada por:

$$G(u, X, L_o) = \frac{1}{2} X^2 \frac{d(u/X)}{dL_o} \quad (5.54)$$

Esta expressão pode ser calculada para deslocamento constante,  $u = u_c$ , e para carga constante,  $X = X_c$ , obtendo respectivamente:

$$G(u, X, L_o) = -\frac{1}{2}u_c \left( \frac{dX}{dL_o} \right)_{u=u_c} \quad (5.55)$$

e

$$G(u, X, L_o) = \frac{1}{2}X_c \left( \frac{du}{dL_o} \right)_{X=X_c} \quad (5.56)$$

A expressão (5.54) é válida somente para o regime de fratura elástica linear estável. Esta expressão (5.54) também pode ser escrita em termos da tensão aplicada. Para isso deve-se dividir toda ela por  $L_w^2$ , onde  $L_w = w - L_o$ , e  $dL_w = -dL_o$ , obtendo-se:

$$G(u, X, L_o) = \frac{-1}{2} \left( \frac{X}{L_w} \right)^2 L_w^2 \frac{d(u/X)}{dL_w} \quad (5.57)$$

Fazendo  $\sigma = X/L_w$  obtendo-se:

$$G(u, X, L_o) = \frac{-1}{2} \sigma^2 (w - L_o)^2 \frac{d(u/X)}{dL_w} \quad (5.58)$$

Substituindo a expressão (5.42) em (5.50) para o caso de deslocamento constante (grampos fixos), onde as forças externas,  $X$ , não realizam trabalho, ou seja,  $F = \text{constante}$ , tem-se que  $G$  (quase-estático) é igual á:

$$G \equiv \frac{d}{dL_o} (F - U_L) = -\frac{dU_L}{dL_o} = \frac{\pi \sigma^2 L_o}{E} \quad (5.59)$$

Observe que, neste caso a taxa de energia elástica liberada é linear com o comprimento da trinca,  $L_o$ , o que não vai ocorrer mais adiante no Capítulo V, quando estas equações forem modificadas para levar em conta a *rugosidade* da superfície de fratura.

### 5.5.3 – A resistência à propagação da trinca, $R$ , para o caminho liso

O conceito de resistência à propagação da fratura,  $R$ , é definido apenas para a superfície plana, da seguinte forma:

$$R \equiv \frac{dU_\gamma}{dA_o} \quad (5.60)$$

Considerando a condição de deformação plana, a resistência à propagação da trinca, por unidade de espessura “ $e$ ” do material, é dada por:

$$R \equiv \frac{dU_\gamma}{dL_o}. \quad (5.61)$$

Portanto, substituindo-se a equação (5.43) na equação (5.61) tem-se que:

$$R = \frac{d(2L_o\gamma_e)}{dL_o} \quad (5.62)$$

logo a partir de (5.62) tem-se que:

$$R = 2\gamma_e \quad (5.63)$$

De acordo com o modelo apresentado até aqui a resistência à fratura,  $R_o$ , não depende das dimensões da trinca. Este modelo só é válido para materiais idealmente frágeis, onde não ocorre quase nenhuma deformação plástica na ponta da trinca. Ele corresponde basicamente ao modelo apresentado por Griffith, tendo apenas sido modificada a sua interpretação pela introdução do conceito de curva  $R$  para o caminho plano feito por Irwin.

A análise que segue é baseada no balanço de energia de Griffith-Irwin para a propagação estável, conforme já foi abordado nos parágrafos anteriores.

#### 5.5.4 – O critério de fratura segundo Griffith-Irwin e a relação entre $G$ e $R$ , para o caminho liso

Comparando (5.46) com (5.50) e (5.61) tem-se o critério de Griffith-Irwin. Na concepção de Irwin a condição de instabilidade é expressa como:

$$G \geq R \quad (5.64)$$

Usando os resultados (5.59) e (5.63) em (5.64) tem-se a partir desta equação que:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 L_o}{E} \geq 2\gamma_e. \quad (5.65)$$

Dividindo-se a equação (5.63) por (5.59) tem-se que:

$$\frac{R}{G} = \frac{2\gamma_e E}{\pi\sigma^2 L_o}. \quad (5.66)$$

Retomando-se a equação (5.66) e multiplicando-a e dividindo-a por  $\sigma_f^2$  tem-se que:

$$\frac{R}{G} = \frac{2\gamma_e E}{\pi\sigma_f^2 L_o} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2. \quad (5.67)$$

Escrevendo (5.67) em termos do tamanho crítico de Griffith  $L_{0c} = 2\gamma_e E / \pi\sigma_f^2$  tem-se:

$$\frac{R}{G} = \frac{L_{oc}}{L_o} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2. \quad (5.68)$$

Para o caso em que  $\sigma = \sigma_f$  fica-se com:

$$\frac{R}{G} = \frac{L_{oc}}{L_o} \quad (5.69)$$

ou ainda, substituindo-se (5.63) em (5.68) tem-se que:

$$\frac{2\gamma_e}{G_o} = \frac{L_{oc}}{L_o} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2. \quad (5.70)$$

Novamente para o caso em que  $\sigma = \sigma_f$ , fica-se com:

$$\frac{2\gamma_e}{G_o} = \frac{L_{oc}}{L_o} \quad (5.71)$$

Os resultados (5.68), (5.69) e (5.71) serão utilizados mais adiante e também na reformulação da MFC utilizando a teoria fractal de medida

#### 5.5.5 - O fator de intensidade de tensão, $K_I$ , e a flexibilidade ou módulo elástico, $E$ , para o caminho liso

Multiplicando-se os dois lados de (5.64) por  $E$  tem-se:

$$GE \geq RE. \quad (5.72)$$

Como o lado direito de (5.72) corresponde ao produto de duas grandezas, é conveniente definir o lado esquerdo como sendo o quadrado de uma grandeza, que será chamada de fator de intensidade de tensão,  $K_I$ , onde:

$$K_I^2 = GE. \quad (5.73)$$

Retornando-se a (5.72) tem-se:

$$K_I^2 \geq RE. \quad (5.74)$$

Substituindo-se (5.65) em (5.73) e (5.63) em (5.74) esta última equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\pi\sigma^2 L_o \geq 2\gamma_e E. \quad (5.75)$$

Portanto pode-se escrever naturalmente que o valor do fator de intensidade de tensão,  $K_I$ , é dado por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi L_o} \geq \sqrt{2\gamma_e E}. \quad (5.76)$$

Observe ainda que, a partir de (5.54), pode-se escrever:

$$G = \frac{1}{2} \frac{K_I^2 (w - L_o)^2}{\pi L_o} \frac{d(u/X)}{dL_o}, \quad (5.77)$$

desde que se defina o módulo de rigidez,  $E$ , como sendo dado por:

$$E \equiv \frac{2\pi L_o}{(w - L_o)^2} \frac{dL_o}{d(u/X)}. \quad (5.78)$$

No caso em que  $E$  é uma constante para os materiais, ele é chamado de módulo elástico ou módulo de Young.

Portanto a equação (5.77) pode ser expressa como:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (5.79)$$

Esta equação clássica relaciona a taxa de energia elástica liberada na fratura com o fator de intensidade de tensão e com o módulo de rigidez elástica.

### 5.5.6 - O fator de intensidade de tensão crítico, ou tenacidade a fratura, $K_{IC}$ , para o caminho liso

A condição de deformação plana é uma condição matemática que procura eliminar os efeitos de bordas do campo de tensão. Esta condição permite definir uma grandeza chamada de  $K_{IC}$  a qual não depende da espessura do material, ou seja, ela é uma propriedade do mesmo.

Levando em consideração o critério de Griffith-Irwin, a partir de (5.46), para a condição de equilíbrio instável, ou seja :

$$\frac{d(F - U_L)}{dL_o} = \frac{dU_\gamma}{dL_o}. \quad (5.80)$$

Ou a partir de (5.50) e (5.61) tem-se:

$$G = R. \quad (5.81)$$

A partir de (5.59), (5.63) e (5.81) observa-se que a tensão de fratura plana no material será dada por  $\sigma_f = \sqrt{2\gamma_e E / \pi L_{0C}}$ , e o tamanho crítico da fratura plana, segundo Griffith, é dado por  $L_{0C} = 2\gamma_e E / \pi \sigma_f^2$ . Contudo, considerando-se a condição (5.81) nas equações (5.74) percebe-se que nesta condição, o valor de  $K_I$  é específico, correspondendo a um valor determinado para a condição crítica de equilíbrio instável, donde conclui-se a partir de (5.76), (5.74) e (5.81) que o fator de intensidade de tensão crítico é definido por:



$$K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi L_{0c}} = \sqrt{2\gamma_e E} . \quad (5. 82)$$

Observa-se, a partir do lado esquerdo da equação (5. 82), que o fator de intensidade de tensão crítico da trinca,  $K_{IC}$ , para materiais idealmente frágeis, é governado pelo produto da tensão de fratura aplicada na ponta da trinca,  $\sigma_f$ , com a raiz quadrada do comprimento crítico da trinca,  $L_{0c}$ , e, a partir do lado direito desta mesma equação, que é dado pelo produto de duas propriedades do material,  $E$  e  $\gamma_e$ . Sendo assim, se o lado direito de (5. 82) possui grandezas que são propriedades do material, então, o lado esquerdo também deve representar uma propriedade do material que, no caso, é uma constante característica do processo de fratura no material idealmente frágil, chamada de tenacidade à fratura,  $K_{IC}$ . Portanto, por meio da teoria da fratura elástica linear e levando-se em conta a condição de deformação plana, é possível definir o fator de intensidade de tensão crítico, ou a tenacidade a fratura para o caminho plano,  $K_{IC}$ , como sendo uma propriedade dos materiais, dependente apenas da temperatura. Fica claro que a resistência mecânica real de um material é um compromisso energético entre a resistência mecânica, dada por  $\sigma_f$ , e a tenacidade à fratura,  $K_{IC}$ . Logo, a suspeita em (5. 75), de que havia uma propriedade embutida nesta relação, é confirmada. Mais especificamente a partir da relação (5. 79) tem-se que a condição de equilíbrio expressa em (5. 81) pode ser escrita como:

$$G_c = \frac{K_{IC}^2}{E} = R_c \quad (5. 83)$$

Desta forma, a medida da tenacidade à fratura,  $K_{IC}$ , pode ser relacionada com a taxa de energia elástica liberada crítica,  $G_c$ , e com a resistência no início da propagação da trinca,  $R_c$ , por meio de uma relação única dada por (5. 83). A partir de agora será modelada a propagação quase-estática da fratura para o caminho plano liso de acordo com os trabalhos de Griffith e Irwin.

### *5.5.7 - A propagação de trinca em regime de fratura estável ou quase-estática e o conceito de curva G-R de Irwin*

Irwin analisou o problema da fratura sob o ponto de vista da teoria elástica linear e juntamente com alguns matemáticos como Westergaard (1939), Hutchinson, *et al.* (1968), calcularam o campo de tensões em um material com uma trinca, para os três modos básicos de solitação ou carregamento, conforme mostra a Figura - 5. 7. Através de seus cálculos estes cientistas perceberam o problema da triaxialidade e da biaxialidade das tensões na ponta da trinca. Conforme o regime de propagação da trinca, estas duas situações podem se manifestar revelando um estado de tensão plana e/ou um estado de deformação plana, respectivamente. Esta distinção possibilitou definir as condições em que estavam situados os modelos de Inglis e Griffith.

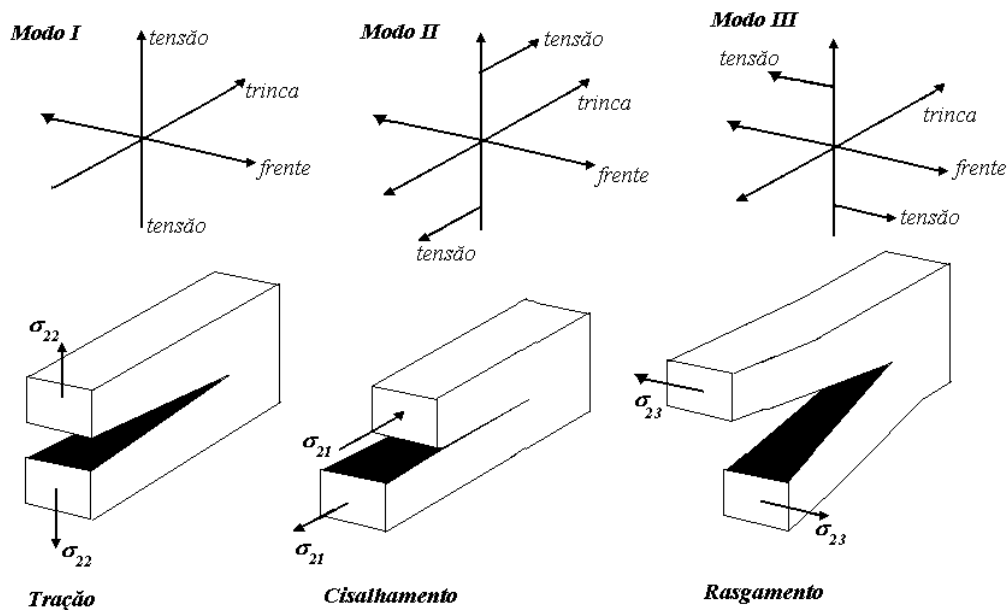


Figura - 5. 7. Modos fundamentais de sollicitação de carga ou carregamento para a fratura.

Irwin percebeu que as condições de tensão e deformação planas, mencionadas anteriormente, poderiam ser incluídas em uma única medida de resistência do material à propagação da trinca, a qual foi chamada posteriormente de curva -  $R$ . Para isso ele considerou que as condições de equilíbrio (5. 81) deveriam ser mantidas ao longo de todo o processo de propagação da trinca, por uma condição que foi chamada de fratura quase-estática, dada por:

$$K_{IR} = \sigma_f \sqrt{L_o} = \sqrt{RE} \quad (5. 84)$$

onde

$$G = \frac{K_{IR}^2}{E} = R \quad (5. 85)$$

Esta nova visão do balanço de Griffith introduzida na equação (5. 85) estendeu as condições do início da propagação da trinca (modelo de Griffith para a nucleação de trincas apresentado na [secção – 5.4.1](#)) para o caso de fratura quase-estática. Foi a partir desta idéia que nasceu o conceito de curva -  $R$ . Desta forma a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) passou a caracterizar o crescimento estável de trinca pela curva -  $R$  (Ewalds, 1993).

Da equação (5. 64) percebe-se que a instabilidade ocorre a partir de  $G = R$  e  $dG/dL_0 = dR/dL_0$ . Este é o critério de fratura de Griffith-Irwin, que também determina a criação de um tamanho de defeito crítico,  $L_{oc}$ . Portanto, um processo de crescimento quase-estático, que produz uma trinca longitudinal em um corpo, é obtido quando a sollicitação da carga é tal que a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , corresponde exatamente ao valor da taxa e energia gasta para formar as superfícies de fratura ( $G = R, dG/dL_0 = dR/dL_0$ ). Nestas condições a curva  $R$  é obtida experimentalmente graficando-se  $G$  e  $R$  em função do comprimento projetado da trinca,  $L_o$ . Neste

caso, a trinca pode ser retilínea ou não, dependendo da microestrutura do material. Se o material for cristalino ou vítreo, a trinca produzida é retilínea, como uma clivagem em um monocristal. Se por outro lado, o material possuir uma microestrutura mais complexa (material policristalino, por exemplo), a trinca interage com esta microestrutura, sendo desviada da propagação retilínea, produzindo uma superfície irregular rugosa.

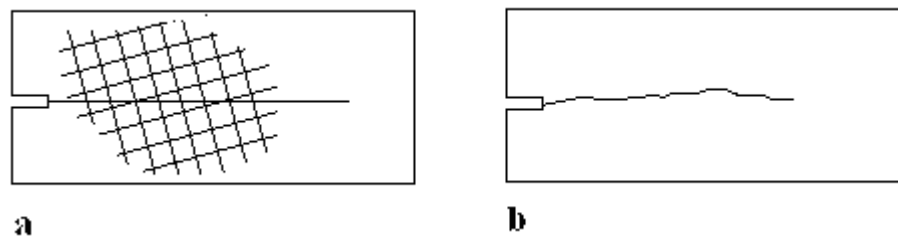


Figura - 5. 8. Fratura Estável a) num material monocristalino b) num material policristalino.

Mesmo no caso de um material que contém inúmeros defeitos distribuídos aleatoriamente no seu interior, a ruptura, neste caso, também se dá de forma que a energia a ser usada,  $G$ , seja exatamente igual à resistência mecânica do material à propagação da trinca  $R$  ( $G = R$ ). Pode-se imaginar que a escolha do caminho de propagação da trinca terá um caráter puramente estatístico. Sabe-se porém, que uma trinca só cresce se a tensão na ponta da mesma,  $\sigma$ , ultrapassa um valor crítico dado pela tensão de ruptura do material  $\sigma_f$  ( $\sigma_o \geq \sigma_f$ , ou  $G \geq R$ , critério para início de propagação de trinca), caso contrário a trinca se mantém estável. De qualquer forma, a trinca produzida neste processo corresponde exatamente à resposta do corpo à solicitação externa, definindo portanto a resistência  $R$  à propagação da trinca (Figura - 5. 8a e Figura - 5. 8b).

Como resultado de um ensaio de propagação quase-estática, o gráfico de  $X x u$  apresenta o aspecto mostrado na Figura - 5. 9.

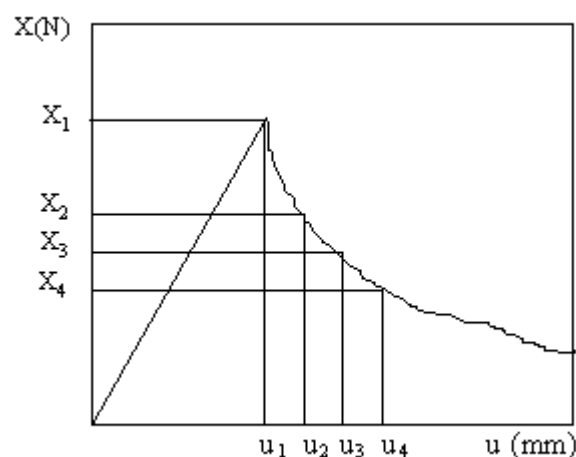


Figura - 5. 9. Variação da carga ou tensão elástica com o deslocamento para a fratura estável.

A dependência de  $X$  com  $u$ , para um ensaio de propagação de trinca quase-estático, pode ser determinada retornando-se a equação (5. 54) e considerando-se nesta equação  $G = R$ , e  $X = X_c$ , e obtendo:

$$X_c^2 = \frac{2R}{\frac{d(u/X)}{dL_o}} \quad (5. 86)$$

A partir da Figura - 5. 9, tem-se que, para uma fratura estável, após a propagação da trinca, as grandezas  $dX/du$  e  $dU_I/du$  assumem um valor mínimo. A equação (5. 86) dá a relação de único valor entre  $X$ ,  $u$  e  $L_o$  ao longo de um *locus* de liberação constante da energia de deformação,  $G$ , em um corpo elástico linear trincado. Se o trincamento é quase-estático, o valor crítico  $G_c$  balanceia com o trabalho específico de fratura,  $R$ , na zona de processo na ponta da trinca. De forma que, se  $G = R$  a fratura é estável e se  $G > R$  a fratura é instável; se  $G < R$  a fratura não ocorre.

A suposição básica desta teoria consiste em que a taxa de energia elástica liberada,  $G$  ou  $J$ , a energia total de fratura,  $\gamma_{wof}$ , e outras grandezas energéticas, não dependem da velocidade de propagação da trinca e, no caso de materiais frágeis, a resistência à fratura  $R$  não depende das dimensões da trinca. Por outro lado, é bem conhecido que o crescimento da curva -  $R$  é correlacionado com a *rugosidade* (morfologia) da superfície fraturada (Swanson 1987; Hübner 1977). No caso da condição de grampos fixos (trabalho zero realizado pela carga sobre o corpo de prova), a equação (5. 59) mostra que  $G$  tem uma dependência linear com o comprimento da trinca,  $L_o$ , enquanto que os resultados experimentais (Ewalds 1993; Kraff 1962) mostram que a curva de resistência,  $R$ , cresce de uma forma não-linear com o aumento no comprimento da trinca. Desde o estabelecimento do critério de Griffith em (5. 64) permanece a questão de como a energia é dissipada; até o presente momento, esta questão tem sido o centro das preocupações para o desenvolvimento quantitativo da mecânica da fratura. Seguramente esta problemática está associada à morfologia da superfície de fratura, a qual será abordada no Capítulo – IV.

## **5. 6 - A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica Clássica para os materiais frágeis e dúcteis**

Apesar das modificações introduzidas por Irwin, a teoria elástica linear precisou receber uma extensão que pudesse incluir a fratura elasto-plástica onde a parte irreversível do processo de fratura fosse considerada. Para isso Orowan (1948) e Irwin (1948) perceberam que na ponta da trinca havia uma região de deformação plástica que poderia ser incluída na descrição de Griffith, conforme será descrito a seguir.

### 5.6.1 – A teoria de Irwin-Orowan e a modificação do balanço energético da teoria de Griffith

A teoria de Irwin-Orowan passou a ser uma extensão da teoria de Griffith onde os efeitos da zona de deformação plástica na ponta da trinca de um material foram considerados. Orowan levou em conta esta deformação plástica, até o limite onde o módulo elástico,  $E$ , se mantém constante. Com isto ele percebeu que poderia acrescentar um termo de energia de superfície ao termo elástico, responsável pela deformação plástica, na prática, sem modificar essencialmente a teoria de Griffith-Irwin.

Em 1948 Irwin e Orowan (Orowan 1948) modificaram a teoria da fratura de Griffith para incluir também os materiais chamados dúcteis (metais), que apresentam o processo de deformação plástica. Este processo é um fenômeno muito importante que acontece durante o processo de propagação da trinca (Figura - 5. 10). É por meio dele que surge a chamada zona de processo da fratura. A modificação introduzida por Irwin-Orowan, no balanço energético de Griffith, consistiu em descrever a zona de deformação plástica na ponta da trinca por um termo de energia de superfície,  $\gamma_p$ , análogo à energia de superfície elástica,  $\gamma_e$ . Portanto a energia de superfície efetiva da fratura passou a ser descrita por:

$$\gamma_{\text{eff}} = \gamma_e + \gamma_p \quad (5. 87)$$

onde  $\gamma_p = \gamma_p(T)$  é uma função apenas da temperatura,  $T$ , do material.

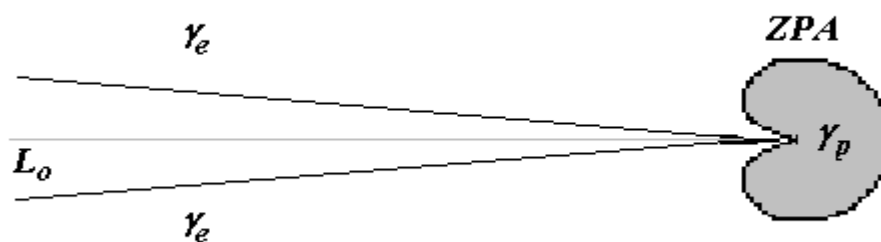


Figura - 5. 10. Zona de processo com deformação plástica na ponta da trinca (ZPA – zona plasticamente afetada<sup>17</sup>).

Do ponto de vista matemático a separação entre materiais dúcteis e frágeis tornou-se em:

Materiais dúcteis (metais em geral):  $\gamma_{\text{plástico}} \gg \gamma_{\text{elástico}}$

Materiais frágeis (óxidos em geral):  $\gamma_{\text{plástico}} \ll \gamma_{\text{elástico}}$ .

Portanto, a equação de Griffith para a tensão de fratura passou a ser escrita como:

<sup>17</sup> Na condição de tensão plana. Para problemas de deformação plana tem-se uma lemniscata.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2(\gamma_e + \gamma_p)E}{\pi L_o}} \quad (5.88)$$

Baseado no balanço de energia de Griffith-Irwin-Orowan (Ewalds, 1993) para o crescimento estável de trinca (Swanson, 1987; Anderson, 1995), a resistência à fratura  $R_o$  por espessura unitária é definida como:

$$R = \frac{dU_\gamma}{dL} \quad (5.89)$$

onde  $U_\gamma$  é o produto da energia de superfície elástica específica  $\gamma_e$  do material pela área superficial da trinca (duas superfícies de comprimento  $\Delta L_o$ ) mais a contribuição da energia de deformação plástica específica  $\gamma_p$ ; então

$$U_\gamma = (2\gamma_e + \gamma_p) L \quad (5.90)$$

A taxa de energia elástica linear liberada por espessura unitária  $G_o$  é definida por:

$$G = \frac{d(F - U_L)}{dL} \quad (5.91)$$

onde  $F$  é o trabalho realizado pelas forças externas sobre o corpo e  $U_L$  é a variação na energia elástica de deformação causada pela introdução de uma trinca de comprimento  $\Delta L_o$ . Para problemas de deformação plana tem-se (Ewalds, 1993),

$$U_L = -\frac{\pi\sigma^2 \Delta L^2}{2E} \quad (5.92)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\sigma$  é a tensão aplicada. Para deslocamentos constantes das bordas (condição de grampos fixos no experimento de Griffith) as forças externas não realizam trabalho durante o processo de extensão da trinca,  $dF/dL_o = 0$ , e a taxa de energia elástica liberada é dada por:

$$G = -\frac{dU_L}{dL} = \frac{\pi\sigma^2 \Delta L}{E} \quad (5.93)$$

De forma a ter uma fratura estável, a abordagem do balanço de energia de Griffith-Irwin-Orowan requer que:

$$G = R \quad (5.94)$$

Combinando as Eqs. (5.89), (5.93) e (5.94), o comprimento crítico da trinca  $\Delta L_{oc}$  é dado por:

$$\Delta L_c = \frac{(2\gamma_e + \gamma_p)E}{\pi\sigma_f^2} \quad (5.95)$$

onde  $\sigma_f$  é a tensão de fratura crítica. A equação (5.95) mostra que o comprimento crítico  $\Delta L_{oc}$  depende do material que está sendo testado ( $E, \gamma_e$  e  $\gamma_p$ ) e do arranjo experimental o qual forneceu a equação (5.92).

Observe que a formulação original de Griffith-Irwin-Orowan não considera o efeito da rugosidade da trinca, mas considera uma equivalência energética entre o caminho de trinca rugoso e o caminho de trinca projetado no plano.

### 5.6.2 – A taxa de energia elasto-plástica liberada, $J$ , para o caminho liso

Com a introdução da energia específica de deformação plástica,  $\gamma_p$ , feita por Irwin e Orowan (Atkins, 1985), a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , teve que ser estendida para o conceito de taxa de energia elasto-plástica liberada,  $J$ , ou seja, para uma trinca de caminho liso é possível definir a taxa de energia elasto-plástico liberada  $J$  de uma forma análoga à definição matemática anterior da taxa de energia elástica liberada (5. 49), como sendo:

$$J \equiv \frac{d}{dA_o} (F - U_V) \quad (5.96)$$

onde  $U_V$  é a energia volumétrica de deformação dada por:

$$U_V = U_L + U_{pl} \quad (5.97)$$

onde  $U_{pl}$  é a contribuição para a energia de deformação plástica no material.

Para as propostas deste trabalho é conveniente escrever (5. 96) de forma análoga a (5. 50) como sendo:

$$J \equiv \frac{d}{dL_o} (F - U_L - U_{pl}) \quad (5.98)$$

Considerando o trabalho externo  $dF = Xdu$ , onde  $X$  são as forças externas aplicadas ao corpo, de forma análoga à equação (5. 51) tem-se:

$$Xdu = dU_L + dU_{pl} + JdL_o \quad (5.99)$$

Para a fratura elástica,  $J$  é mais familiarmente conhecida como a taxa de perda da energia elástica  $G$ .  $J \equiv G$  para corpos elásticos lineares (Hookeanos).

Usando-se  $U_L = 1/2Xu$  dado pelo teorema de Clapeyron, após algumas manipulações algébricas encontra-se que equação (5. 54) passa a ser escrita como:

$$J(u, X, L_o) = \frac{1}{2} X^2 \frac{d(u/X)}{dL_o} - \frac{dU_{pl}}{dL_o} . \quad (5.100)$$

Uma vez que:

$$G_o(u, X, L_o) = \frac{1}{2} X^2 \frac{d(u/X)}{dL_o} = \frac{K_e^2 (1 - \nu^2)}{E} \quad (5.101)$$

onde  $K_e$  é o fator de intensidade elástico de tensão e substituindo (5.101) em (5.100), tem-se

$$J_o(u, X, L_o) = \frac{K_e^2 (1 - \nu^2)}{E} + J_{pl} \quad (5.102)$$

a qual representa a extensão da abordagem de Irwin-Orowan para a taxa de energia elasto-plástica  $J_o$ , com

$$J_{pl} = - \frac{dU_{pl}}{dA_o} = \frac{2A_{pl}}{B_N (w - L_o)} \quad (5.103)$$

onde  $B_N$  é a espessura líquida do corpo de prova e  $A_{pl}$  é a área definida pelo gráfico da Figura - 5.11. Logo, a partir de (5.79) tem-se:

$$J = \frac{K_I^2}{E} - \frac{dU_{pl}}{dL_o} \quad (5.104)$$

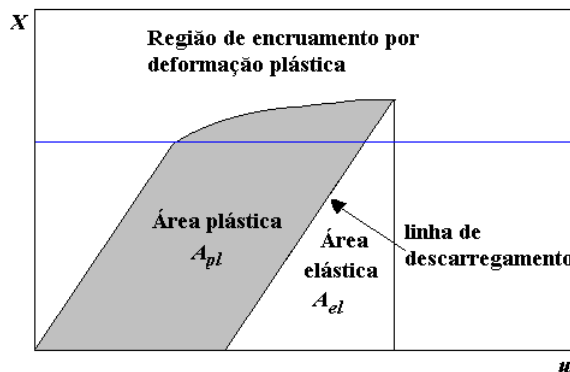


Figura - 5.11. Variação da carga ou tensão elasto-plástica com o deslocamento para a fratura estável de um material dúctil, ASTM - E1737 [1996].

Como na formulação elástica, a taxa de energia elasto-plástica não-linear liberada  $J_o$  não considera a rugosidade da trinca.

### 5.6.3 - O critério de Irwin-Orowan

A relação entre a teoria termodinâmica de Griffith e a teoria elástica linear de Irwin-Westergaard (Westergaard 1939) foi obtida com sucesso por meio da definição da integral -  $G$  (para materiais frágeis) ou  $J$  (para materiais dúcteis), feita por Eshelby e Rice (Rice 1968). Portanto o critério de fratura passou a ser dado de acordo com (5.83) por:



$$J_c = \frac{K_{IC}^2}{E} = R_c \quad (5.105)$$

Enquanto as sugestões de Orowan eram inseridas na MFC, uma análise matemática mais profunda do campo de tensão ao redor da ponta da trinca começou a ser realizada por cientistas e matemáticos da época. Hutchinson, Rice e Rosengren perceberam que as propriedades mecânicas de um material, sujeito a um campo de tensão com uma trinca, deveriam estar contidas dentro do seguinte triângulo de propriedades (Figura - 5. 12).

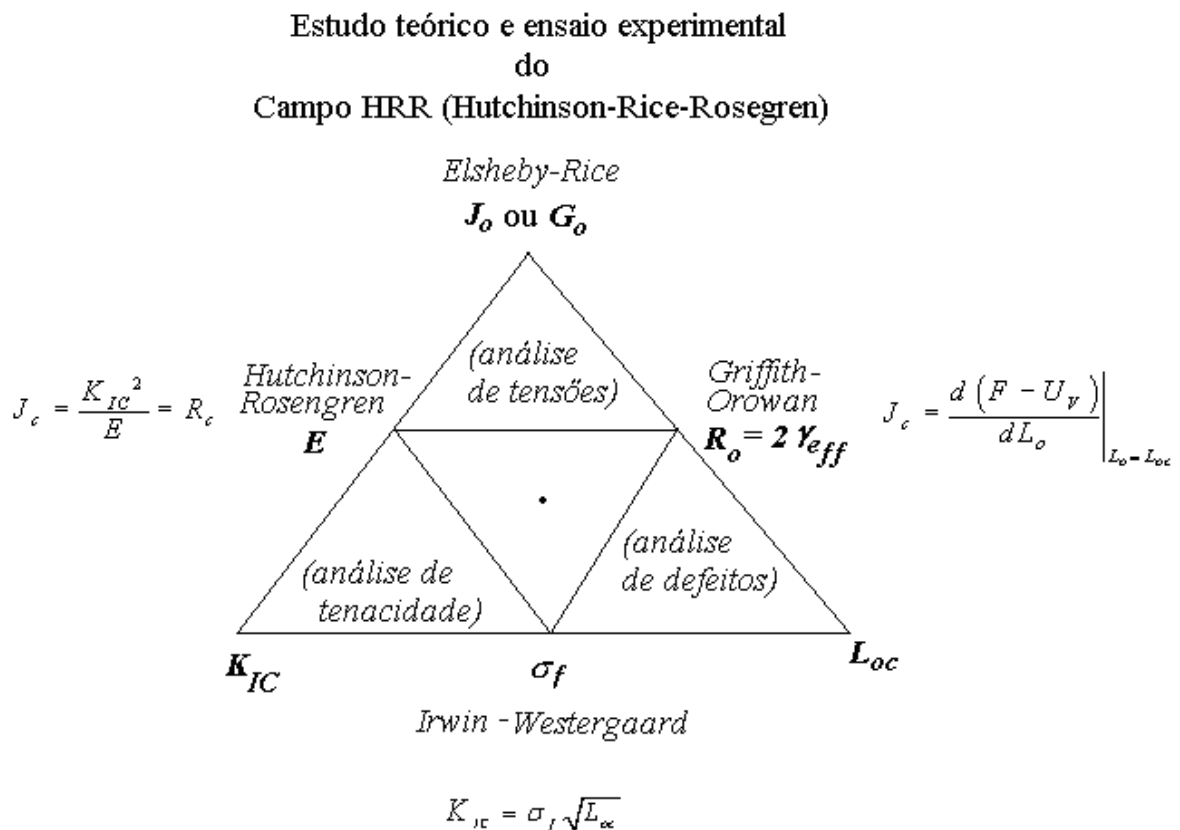


Figura - 5. 12. Triângulo de caracterização de um material quanto as suas propriedades mecânicas da fratura.

Esta visão ampla da fratura levou Eshelby e Rice (1968) a definirem uma integral de linha independente do caminho de circuitação ao redor da ponta da trinca que representa a conservação de energia durante um processo de fratura estável, conforme será mostrado a seguir.

#### 5.6.4 – A integral de Eshelby-Rice para o caminho liso

O conceito da integral -  $J$  de Eshelby-Rice nasceu como uma extensão da definição dada por Irwin-Orowan, definindo-se a função “energia potencial”,  $\Pi$ , da seguinte forma:

$$\Pi \equiv -\int (dF - dU_v). \quad (5.106)$$

Sabendo que  $dF = Xdu$  pode-se escrever:

$$\Pi \equiv \int (dU_v - Xdu), \quad (5.107)$$

onde  $U_v = \int WdV$  é a integral da densidade de energia,  $W$ , dada por:

$$W \equiv \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (5.108)$$

Por conveniência a taxa de energia elasto-plástica,  $J$ , definida em (5.98) será reescrita como:

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{Xdu}{dA_o} - \frac{dU_v}{dA_o}. \quad (5.109)$$

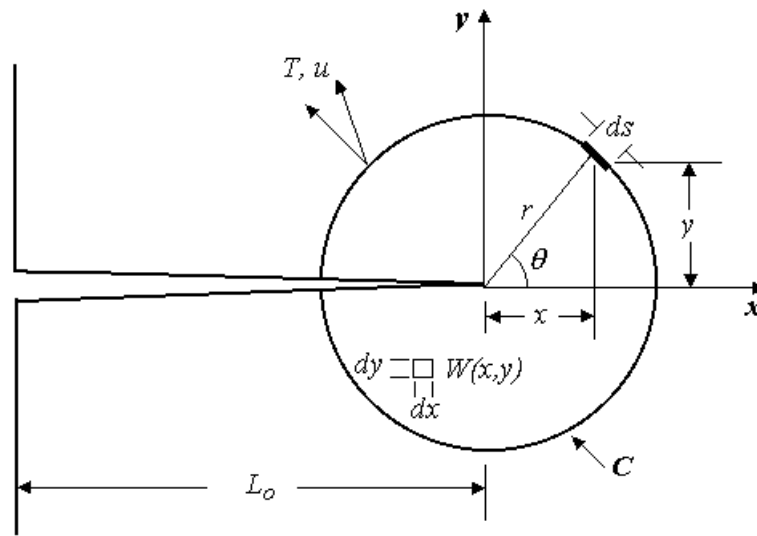


Figura - 5.13. Contorno da integral - J na zona ponta da trinca, Atkins [1985].

No lugar da somatória das componentes do trabalho realizado pelas forças externas  $Xdu = \sum X_i du_i$  na equação (5.107), serão consideradas as condições ao longo do contorno C ao redor da ponta da trinca, mas do lado de fora da zona de processo, conforme mostra a Figura - 5.13. Observe que, sob condições de carga em equilíbrio, existe energia de deformação dentro do contorno, e trações,  $T$ , e deslocamentos,  $u$ , sobre o próprio contorno.

Portanto, para a função  $\Pi$  na região de volume,  $V$ , encapsulada pelo contorno,  $C$ , vale:

$$\Pi \equiv \int_V WdV - \int_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \cdot ds, \quad (5.110)$$

onde  $s$  é a distância ao longo do contorno e a integração é realizada no sentido anti-horário. Então de acordo com a equação (5.109) tem-se:

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dA_o} \equiv -\frac{d}{dA_o} \left( \int_V WdV - \int_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \cdot ds \right). \quad (5.111)$$

No caso bidimensional com um corpo de espessura unitária,  $dV = dx dy$ , e (5. 111) torna-se:

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dL_o} \equiv -\frac{d}{dL_o} \left( \int W dx dy - \int_c \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \cdot ds \right), \quad (5. 112)$$

onde  $dL_o$  é o aumento incremental no comprimento da trinca. Com um contorno fixo,  $d/dL_o = -d/dx$  tal que:

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dL_o} = \int_c W dy - \int_c \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot ds, \quad (5. 113)$$

Desde que a equação (5. 99) é uma relação (para a qual todas as deformações são independentes do caminho, isto é, são reversíveis) a integral de contorno na equação (5. 113) é também independente do caminho.

A equação (5. 113) apresenta uma forma alternativa de se calcular  $J$  (ou  $G$  e, portanto,  $K_I$ ) em problemas elásticos; contudo, historicamente a integral de contorno não emergiu de estudos de fratura elástica. Ela foi primeiro apresentada no final de 1960 por Rice e utilizada pelos engenheiros da Westinghouse Laboratories como um critério para a fratura elasto-plástica considerando-se a teoria da plasticidade de Hencky, a qual permitiu tratar o problema plástico, real (irreversível), como um problema elástico não-linear reversível Atkins e Mai (1985). Rice utilizou o símbolo,  $J$ , para designar a fratura elasto-plástica e a integral de contorno independente do caminho em (5. 113) é hoje em dia familiarmente conhecida como Integral –  $J$ .

De acordo com este resultado,  $J$  é a diferença entre as taxas (com relação ao comprimento da trinca,  $d/dL_o$ ) de transferência de energia do sistema para o corpo (primeiro termo da equação (5. 113)) e o consumo de energia na fratura (segundo termo da equação (5. 113)), ou seja,  $J$ , é a taxa de energia disponível para a trinca se propagar, ou ainda, a força motriz da fratura elástica não-linear.

#### 5.6.5 - A propagação estável e o conceito de curva $J$ - $R$ , para o caminho liso

Considere a Figura - 5. 11 onde mostra-se o gráfico do carregamento,  $X$ , em função do deslocamento do ponto de aplicação da força,  $u$ , para um material que possui comportamento elasto-plástico.

De uma forma geral a integral  $J$  para um material dúctil pode ser escrita como:

$$J_{(i)} = \frac{K_{(i)}^2}{E} + J_{pl(i)} = R - \frac{dU_{pl(i)}}{dA_o} \quad (5. 114)$$

onde o índice  $i$ , representa os diferentes pontos sobre a curva de carga do corpo de prova, conforme mostra a Figura - 5. 11.  $J_{pl(i)}$  é a componente plástica de  $J$ ,  $K(i)$  são os diferentes fatores de

intensidade de tensão para cada modo de solicitação de carga.  $U_{pl(i)}$  é a energia de deformação plástica neste modos. Desde que

$$J_{pl(i)} = \frac{dU_{pl(i)}}{dA_o} = \frac{2A_{pl}(i)}{B_N(w-L_o)} \quad (5. 115)$$

Onde  $B_N$  é a espessura líquida do corpo de prova,  $A_{pl}$  é a área definida pelo gráfico da Figura - 5. 11.

Um material dúctil apresenta uma deformação plástica irreversível de tal forma que ao se realizar um ciclo de carga e descarga da força,  $X$ , ocorre o aparecimento de uma “histerese” de deformação. Portanto, para uma propagação estável de trinca, a determinação da curva  $J_R$ , em um ensaio de fratura, pode ser realizada por um processo em que a condição elástica não-linear (reversível) é mantida, de forma a retratar a condição elasto-plástica (irreversível). Isto significa que durante a medida de  $J$ , a cada ponto de uma curva de  $X$  x  $u$ , análoga àquela mostrada no gráfico da Figura - 5. 11, o ciclo de carregamento e descarregamento não pode exceder a um valor de aproximadamente 20% do valor da carga, naquele ponto, para que, ao se retornar ao ponto de carregamento inicial as condições elásticas não-lineares sejam mantidas

Quando uma fratura quase-estática (ou regime estável) ocorre, as grandezas  $J$  ou  $G$  assumem valores críticos,  $J_c$  ou  $G_c$ , respectivamente, os quais exatamente representam o trabalho específico de fratura requerido na zona de processo dado por  $R$ <sup>(18)</sup>. Experimentos mostram que  $R$  é uma quantidade reprodutível sobre uma faixa útil de variáveis (tensão, deformação, taxa, temperatura ambiente, etc.) e pode-se escrever para um incremento quase-estático de propagação de trinca em um corpo, contendo uma trinca existente de área  $A$ , sendo carregado por um par de forças externas auto-equilibrantes,  $X$ , associadas com os deslocamentos  $u$ , da seguinte forma:

$$J \geq R \quad (5. 116)$$

$J_C = R$ , geralmente na fratura de equilíbrio.

---

<sup>18</sup> A trinca, neste caso, possui plasticidade relevante para a resistência a fratura.

# Capítulo – VI

## TEORIA DO CAMPO ELASTOSTÁTICO DA FRATURA COM IRREGULARIDADES

*A cana trilhada, não a quebrará, nem apagará o pavio que fumeja; em verdade trará a justiça*  
*(Isaías 42,3)*

### 6.1 - Introdução

A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica Clássica quantifica suas grandezas físicas tais como, a energia de fratura, a velocidade, a dissipação de energia do crescimento de uma trinca, etc. em termos de comprimentos e áreas projetadas ao longo da direção do crescimento da mesma. Contudo, na natureza, assim como no fenômeno da fratura, as forma geométricas são normalmente irregulares e não são facilmente caracterizadas pelas formas regulares da geometria Euclidiana. Como exemplo desta limitação, existe o problema do crescimento estável de uma trinca, o qual é caracterizado pela curva J-R (Kraff, 1962; Ewalds 1993). onde observa-se que esta curva cresce com o aumento no comprimento da fratura. O crescimento desta curva tem sido analisado por argumentos qualitativos de interposição de deformação plana e tensão plana (Kraff, 1962; Hübner, 1977; Swanson, 1987; Ewalds, 1993) mas nenhuma explicação definitiva e satisfatória no contexto da MFEP tem sido dado.

Por outro lado, a geometria fractal surgiu como uma ferramenta matemática poderosa na descrição de estruturas irregulares e complexas como as superfícies de fratura (Mandelbrot, 1982). Está bem estabelecido que as trincas e superfícies de fratura são objetos fractais (Dauskardt, 1990, Borodich, 1997; Heping-Xie, 1998) e no estudo das propriedades físicas da propagação da trinca é razoável considerar de uma forma explícita as propriedades fractais das superfícies de fratura a serem incluídas nas equações da Mecânica da Fratura Clássica.

Uma rachadura real na mesoescala é diferente da trinca ideal de bordas lisas, e a

superfícies de fratura da maioria dos materiais são muito irregulares. Os diferentes detalhes geométricos contidos na superfície de fratura nos contam a história do crescimento da trinca e as dificuldades encontradas durante o processo de fratura (Rodrigues, 1998). As observações experimentais demonstraram uma fractalidade estatística para superfícies de fratura. Portanto, assumindo que os perfis de trinca são fractais a abordagem fractal para o problema da fratura é mais realista e atrativo do que assumir que eles são lisos (Herrmann, 1990).

Alternativamente, a geometria fractal pode revelar aspectos que a tradicional geometria Euclidiana não pode (Underwood, 1992) e sabendo-se como calcular os comprimentos, as áreas e os volumes verdadeiros de elementos irregulares, tais como as superfícies de fratura e outras, é muito importante para a proposta de uma descrição mais realista do problema da fratura. Por esta razão muitos cientistas têm procurado caracterizar a topografia da superfície de fratura (fractografia) usando a dimensão fractal (Mecholsky, 1989-Tanaka). Também, torna-se necessário incluir a topologia da superfície de fratura dentro da teoria da mecânica clássica da fratura (Underwood; Xie, 1989-Borodich). Esta nova “Mecânica da Fratura Fractal” segue as bases fundamentais da Mecânica da Fratura Clássica, mudando-se ligeiramente algumas de suas equações e considerando-se os aspectos fractais da superfície de fratura por meio de expressões analíticas (ASTM E1737-96, Alves 2005).

O objetivo deste capítulo é incluir a teoria fractal dentro das taxas de energia elástica e plástica,  $G_0$  e  $J_0$ , de uma forma diferente comparada com a de outros autores (Xie, 1989; Tanaka, 1996; Williford, 1990; Chelidze, 1990; Dos Santos, 1999; Borodich, 1997). A não-diferenciabilidade das funções fractais foi evitada desenvolvendo-se uma função analítica do comprimento da trinca rugosa, a qual foi previamente aplicada a curva- $G_0$  na MFEL (Alves, 2005). O procedimento proposto muda a expressão clássica para  $G_0$  a qual é linear com o comprimento da fratura em uma equação não-linear. Também, uma abordagem análoga é estendida e aplicada a integral- $J$  não-linear de Eshelby-Rice. As novas equações reproduzem precisamente o processo de crescimento de trincas rugosas em materiais frágeis e dúcteis. Por meio de manipulações algébricas, foi possível separar na expressão matemática da integral- $J$  as partes energéticas e geométricas do processo de fratura, explicando a história registrada pelas deformações elástica e plástica deixadas na superfície de fratura durante o fenômeno da fratura. Também, as partes micro e macroscópicas da integral- $J$  foram distinguidas. Uma generalização para a curva  $J-R$  de resistência à fratura para diferentes materiais é apresentada, dependendo somente das propriedades dos materiais e da geometria rugosa da superfície de fratura.

## 6. 2 – Revisão Bibliográfica da Mecânica da Fratura Fractal Estável ou Quase-Estática

A análise que segue é baseada no balanço de energia de Griffith-Irwin para a propagação estável conforme já foi abordado no Capítulo - V.

### 6.2.1 – Antecedentes da aplicação da teoria fractal no entendimento da fractografia

Mandelbrot (1977) foi o primeiro a apontar que as trincas, e superfícies de fratura, poderiam ser descritas por modelos fractais. Passoja (1978) realizou um dos primeiros trabalhos experimentais, de que se tem registro, usando a geometria fractal na descrição de superfícies de fratura. Ele procurou relacionar a rugosidade destas superfícies com a quantidade básica  $D$ , chamada de dimensão fractal. Para isso, ele mediu o comprimento das linhas costeiras (coastlines) das “ilhas” encontradas nas superfícies de nível, cortada a uma determinada altura, em função da escala de medida. Este método foi chamado por Mandelbrot e Passoja de “análise das ilhas cortadas”.

Desde o trabalho pioneiro de Mandelbrot et al. (1984), muitas tem sido as investigações a respeito da contribuição da fractalidade de superfícies de trincas para a mecânica da fratura. Mandelbrot e Passoja (1984), analisaram superfícies de fratura em aço (300-Grade Maragin steel), obtidas por ensaio de Impacto Charpy. Eles utilizaram o método de “análise das ilhas cortadas” para estimar a dimensão fractal destas superfícies. Eles relacionaram a energia de impacto ( $J$ ), no ensaio de Charpy, a temperatura ambiente, de amostras metálicas tratadas termicamente, com a dimensão fractal das superfícies de fratura geradas. A dimensão fractal dessas superfícies foi calculada pelo “método da ilhas cortadas” e pelo método perfilométrico baseado na análise de Fourier. Eles mostraram que os experimentos realizados revelavam a existência de uma larga faixa de escalas intermediárias, claramente distintas, nas quais a estrutura das trincas e superfícies de fratura poderiam ser modeladas por uma superfície fractal. Para comprovar a sua afirmação, eles compararam os resultados obtidos pela “análise das ilhas cortadas” com aqueles obtidos pela análise do espectro de potência da transformada de Fourier da superfície rugosa. A estimativa deste “método espectral de análise dos perfis das superfícies de fraturas” concordou com o valor obtido pelo “método de análise das ilhas cortadas”. Desta forma, Mandelbrot e Passoja (1984) procuraram estabelecer este último método, como sendo um método viável para o cálculo da dimensão fractal, além de mostrar que o espectro de Fourier da superfície fratura de um metal também pode fornecer informações do caráter fractal da superfície. Ainda nesse trabalho de Mandelbrot e Passoja (1984) também foi mostrado que a relação entre a dimensão fractal da superfície de fratura e a dimensão de

um dos perfis desta superfície é do tipo  $D_P = D_S - 1$ . Onde  $D_S$ , é a dimensão fractal da superfície de fratura e  $D_P$ , é a dimensão fractal de um dos perfis da superfície de fratura. Eles mostraram que, o número  $D$  estava relacionado com a medida da tenacidade dos materiais dúcteis (metais). Logo depois, outros autores revelaram a mesma validade para materiais frágeis.

Por último eles analisaram a dependência linear decrescente entre a energia de impacto em função da dimensão fractal, para várias temperaturas de tratamento do aço em questão. Eles mostraram que esta variação está relacionada com a mudança na microestrutura do material e concluíram que a formação da superfície de fratura envolve uma forma atípica da noção de percolação.

Mandelbrot e Passoja (1984) observaram que uma fratura transgranular (aquela que caminha através dos grãos) envolve uma forma atípica da noção de percolação, que é normalmente usada para descrição de uma trinca intergranular (aquela que caminha por entre os contornos dos grãos). Por exemplo, durante a fratura de um material dúctil quaisquer vazios formados ao redor das inclusões aumentam seu tamanho e coalesce em outros vazios maiores; este ultimamente forma uma superfície de fratura. Se o crescimento de um vazio fosse independente da posição de seus vizinhos na amostra, estaria-se de frente com um processo físico chamado de percolação. Sua aplicação, aqui, está associada com a distribuição da carga entre os ligamentos de tensões que permanecem; a coalescência de vazios é meramente a percolação de uma trinca na microestrutura conduzindo a uma fratura final. A percolação implicaria que, a dimensão fractal da fratura toma algum valor universal independente do material e dependente somente das propriedades do espaço. Porém, a percolação parece ser um modelo muito cruel neste caso, pois, tão logo que um vazio inicial crescido tenha coalescido localmente em pequenos outros vazios, as deformações sobre os ligamentos que suportam a carga aumentam e, os vazios vizinhos crescem a uma taxa que varia com sua posição na amostra. Certamente, a variabilidade espacial associada com a microestrutura é dependente desta e, o processo resultante difere de uma percolação usual.

Mecholsky et al (1988, 1989) trabalharam com materiais frágeis, como cerâmicas (alumina e alumino-silicato) e vitro-cerâmicas (silicato de zinco e borosilicato de lítio), fraturando estes materiais por meio de um ensaio padrão de flexão em três pontos, onde calcularam a dimensão fractal das superfícies de fratura formadas por meio da análise espectral de Fourier e pelo método das ilhas cortadas elaborado por Passoja e Mandelbrot. Mecholsky concluiu que o processo de fratura frágil é um processo fractal auto-similar e que, a aplicabilidade da geometria fractal implica no entendimento do mecanismo de geração da superfície de fratura. A dimensão fractal é também uma medida da tortuosidade de uma superfície. A partir destes dois trabalhos, é possível concluir que a fractalidade da superfície de fratura está relacionada com o grau de dificuldade de se fraturar um material, ou seja, a trinca se desvia a medida que ela encontra dificuldade para fraturar o



material, procurando sempre o “caminho mais fácil de fratura”, dando origem a uma superfície rugosa.

Sabe-se que a rugosidade da superfície de fratura está relacionada com a dificuldade que a trinca teve de se propagar. Vários autores (Rodrigues, 1996) procuraram relacionar a dimensão fractal com a energia de superfície e com a tenacidade a fratura. Mecholsky *et al.* (1988), usando também esta mesma idéia e os mesmos argumentos, relacionou a tenacidade a fratura,  $K_C = K_{IC} - K_o$ , com a dimensão fractal das superfícies de fratura. Onde,  $K_{IC}$  é a tenacidade a fratura do material e  $K_o$  é a tenacidade a fratura da superfície lisa. Ele sugeriu, uma relação fenomenológica entre estas duas grandezas e indicou a necessidade de se realizar pesquisas para determinar a validade de sua expressão. Mecholsky *et al.*, (1988) procurou, diante mão, dar uma interpretação fenomenológica para os seus resultados e encontrou que a dependência entre a tenacidade à fratura e a dimensão fractal é dada por:

$$K_C = A(D^*)^{1/2}, \quad (6.1)$$

onde  $D^* = D - d$ , é a parte fracionária da dimensão fractal,  $D$ ,  $d$  é a dimensão euclidiana de projeção da fratura e  $A$ , é uma constante que depende do material.

Ainda neste trabalho, Mecholsky *et al.* (1988), a partir da análise dimensional, argumenta que para que seja considerado válida a auto-similaridade fractal de uma trinca, a constante  $A$  deve ter a forma:

$$A = E(a_0)^{1/2} \quad (6.2)$$

onde,  $E$  é o módulo elástico do material e  $a_0$  é o seu parâmetro de rede.

Mecholsky substituiu (6.2) em (6.1) e obtém

$$K_{IC} = E(D^* a_0)^{1/2}. \quad (6.3)$$

Em seguida ele utiliza a relação para  $K_{IC}$  dada por:

$$K_{IC} = (2\gamma_{eff} E)^{1/2}. \quad (6.4)$$

onde,  $\gamma_{eff} = \gamma_e + 1/2\gamma_p$  é a energia efetiva de superfície do material.  $\gamma_e$ , é a sua energia elástica de superfície e  $\gamma_p$ , é a sua energia plástica de superfície. Substituindo-se (6.4) em (6.3) ele obteve:

$$\gamma_{eff} = \frac{a_0 D^* E}{2} \quad (6.5)$$

Mecholsky afirma que a relação (6.5) entre energia de fratura e o módulo elástico tem sido notada por vários investigadores, e, que esta parece se manter como uma constante de proporcionalidade para uma classe de materiais.

Da teoria da *Mecânica da Fratura Clássica* usual, tem-se, uma relação entre a energia

efetiva de superfície  $\gamma_{eff}$  ( $J/m^2$ ) e a tenacidade a fratura  $K_{IC}$  ( $MPa.m^{1/2}$ ) dada pela equação (6. 4). Portanto, as relações que escalonam as energias de superfícies também escalonam a tenacidade a fratura. Assim como Mecholsky os outros autores citados anteriormente, tais como, Mu e Lung (1988) também sugeriram relações matemáticas, do tipo lei de potência, entre a energia de superfície e a dimensão fractal. Contudo, essas relações são bem diferentes entre si. Será visto, ainda neste capítulo, que a sugestão de Mecholsky (1988), da energia específica de fratura,  $\gamma_{eff}$ , proporcional a dimensão fractal,  $D$ , mostrada em (6. 5) e a sugestão da lei de potência de Mu e Lung (1988), estarão juntamente contidas no modelo proposto neste trabalho, mostrando que as visões destes autores são complementares. Portanto, uma dedução mais rigorosa envolvendo os diferentes aspectos abordados por esses autores será vista ainda neste Capítulo - VI.

### 6.2.2 - Modelagem fractal das grandezas energéticas da Mecânica da fratura

Algumas propostas de inclusão da teoria fractal dentro da Mecânica da Fratura têm sido feitas nas últimas três décadas. Entre elas, existe a proposta feita por Williford (1990), a qual estabelece uma relação entre, os parâmetros geométricos fractais e os parâmetros medidos em ensaios de fadiga. Gong e Lai (1993) utilizaram a proposta de Williford (1990) e desenvolveram uma das primeiras relações matemáticas entre a curva  $J-R$  de resistência à fratura e os parâmetros da geometria fractal da superfície de fratura. Saouma et al. (1994) mostraram experimentalmente que as superfícies de fratura do concreto são fractais. Muitos pesquisadores tentaram encontrar uma relação entre a dimensão fractal de fissuras e da tenacidade à fratura. Mas, até agora, nenhuma relação universal foi obtida.

Estudos experimentais têm demonstrado que as superfícies de fratura são auto-afim, em vez de auto-similar (Mandelbrot, 1985; Brown e Scholz, 1985; Wong et al, 1986; Poder e Tullis, 1991). Além disso, como apontado por Bažant (1995, 1997) nem todas as curvas fractais são trajetórias admissíveis de trincas: zonas de material adjacente à face da trinca deve ser capaz de se separarem como corpos rígidos. Bažant (1995, 1997) demonstraram que a fractalidade de fissuras não faz uma importante contribuição para efeito de tamanho.

Bransley, (1986) e Falconer, (1990) elaboraram um método de definição de fractais considerando-os como pontos fixos de sistemas de funções iteradas. Essa idéia foi usada por Panagiotopoulos et al. (1993), para definir leis mecânicas de objetos fractais. Panagiotopoulos, et al. (1993), e Panagiotopoulos et al. (1995), trabalharam em elementos finitos e os métodos dos elementos de contorno para os corpos com contornos fractais. Usando sistemas de funções iteradas, Panagiotopoulos et al. (1995), concluiu que a  $r^{-1/2}$  singularidade do campo de tensão elástico linear de rachaduras clássica ainda se mantém para a rachaduras fractais. A conclusão de

Panagiotopoulos et al. (1995) foi considerada errada por Yavari (2000, 2002) que argumentou que Panagiotopoulos et al. não consideraram a interação dos cantos afiados no caso limite. Mas sabe-se que uma trinca real não possui cantos infinitamente afiados como em um fractal matemático. Portanto, as conclusões de Panagiotopoulos estão corretas, porque uma trinca é um fractal limitado em um intervalo de escala. No modelo de Borodich-Mosolov-Arash Yavari as trincas são tratadas como verdadeiros fractais matemáticos que se estende entre um intervalo infinito de escalas:

$\frac{1}{\infty} \leq \varepsilon \leq \infty$ . Porém sabe-se da observação da natureza que as trincas na verdade não são fractais matemáticos e são chamados de pré-fractais, pois sua auto-afinidade se estende apenas entre um intervalo de escalas:  $\varepsilon_{\min} = \frac{l_0}{L_0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{L_0}{L_0}$ . No modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010)

a trinca é um pré-fractal que se estende em escalas  $\varepsilon_{\min} = \frac{l_0}{L_0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{L_0}{L_0}$ . A forte influência do trabalho pioneiro de Borodich (1997) tem levado vários cientistas a cometerem equívocos como aconteceu com Yavari (2000, 2002).

Xie e Sanderson (1995) estudaram os efeitos de crescimento de trincas fractais sobre o fator dinâmico de intensidade de tensão e sobre a velocidade da trinca. Eles foram capazes de explicar o porquê das velocidades terminais da fratura observadas experimentalmente são apenas cerca de metade da velocidade da onda de Rayleigh. Xie (1989) propôs um modelo fractal de ramificação trincas em materiais quebradiços. Usando esse modelo, ele mostrou que a tenacidade à fratura pode ser aumentada devido a fractalidade das superfícies de fratura.

Mosolov (1992, 1993) e Borodich (1997) estabeleceram as relações matemáticas entre o campo de tensão elástico ao redor da trinca e o expoente de rugosidade da superfície de fratura. Mosolov (1993) e Borodich (1997) foram os primeiros a associar as energias de deformação e de superfície envolvidas na fratura com os expoentes de rugosidade das superfícies geradas durante o processo de quebra das ligações químicas, separação das superfícies e conseqüentemente a dissipação de energia. Eles fizeram esta relação usando o campo de tensão, dado na equação (6.7). Mosolov (1993) e Borodich (1997) utilizaram a dependência fracionária dos expoentes de singularidade desse campo na ponta da trinca e a dependência fracionária dos expoentes escalonamento fractal das superfícies de fratura, postulando a equivalência entre as variações nas energias de deformação e de superfície.

Borodich (1994, 1997) introduziu o conceito de energia específica para uma unidade de medida de fractal, a fim de resolver o paradoxo que a fratura é impossível para uma trinca fractal matemática. Seguindo idéias semelhantes, Carpinteri e Chiaia (Carpinteri, *et al.* 1996) descreveram o comportamento da resistência a fratura como uma conseqüência de sua topologia fractal auto-

similar. Eles usaram a teoria de Griffith e acharam uma relação entre a curva-G e o comprimento do avanço da trinca e o expoente fractal. Apesar da não-diferenciabilidade das funções fractais, eles foram capazes de obter esta relação por meio de um método de renormalização. Outras formulações têm sido propostas por Bouchaud (Bouchaud 1990, Bouchaud, Bouchaud 1997) usando a correlação entre as alturas das rugosidade em diferentes coordenadas na superfície de fratura.

### 6.2.3 - A Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

Yavari (2002) estudou a integral-J para uma trinca fractal e mostrou que ela é dependente da trajetória. Ele explicou que a proposta de modificação de integrais-J independente do caminho, que tem havido até agora na literatura, são apenas localmente independente do caminho e não tem significado físico. Ele conjecturou que uma integral-J fractal deve ser a taxa de liberação de energia potencial por unidade de medida fractal do crescimento da trinca.

Recentemente, Alves (2005) apresentou um modelo fractal auto-afim, capaz de descrever as propriedades geométricas fundamentais da superfície de fratura, incluindo a rugosidade local no critério de Griffith. Em todas estas formulações a teoria fractal foi introduzida em um contexto analítico de forma a estabelecer uma expressão matemática para a curva de resistência a fratura, pondo em evidência a influência da rugosidade da trinca.

### 6.2.4 - Modelagem fractal do campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa

Classicamente, um meio elástico frágil possui um campo tensorial assintótico, cujo expoente de singularidade, fornece uma função homogênea para o campo de tensão na ponta de uma trinca em função da distância  $r$  na frente da trinca (Hutchinson 1968; Rice & Rosengren, 1968) do tipo:

$$\sigma_{I,II,III}(r) \sim \frac{K_{I,II,III}}{r^{n/n+1}}. \quad (6.6)$$

onde  $n = 1$ , é o grau de homogeneidade da função do campo de tensão/deformação do meio elástico dado pela lei de Hooke.

Modelos da literatura têm discutido a singularidade do campo de tensão de uma trinca rugosa fractal (Balankin, 1994; Mosolov 1991, 1992, 1993, Yavari, 2002). Mosolov (1991, 1992) foi o primeiro a fazer conjecturas sobre o campo de tensão de uma trinca fractal rugosa em uma meso-escala.

Mosolov (1991) conjecturou e sugeriu que esse campo elástico na ponta de uma trinca fractal deveria possuir um expoente de singularidade fracionário associado a dependência assintótica com a distância  $r$  na frente da trinca dado pela expressão:

$$\sigma_{I,II,III}(r) \sim \frac{K_{I,II,III}}{r^\alpha}. \quad (6.7)$$

onde:

$$\alpha = \frac{2 - D_B}{2} = \frac{H}{2}. \quad (6.8)$$

A mudança da ordem da singularidade da tensão devido a fractalidade das superfícies da trinca foi primeiramente estudado por Mosolov (1991). Mosolov e Borodich) estabeleceram as relações matemáticas entre o campo de tensão elástico ao redor de uma trinca rugosa fractal e o expoente de rugosidade da superfície de fratura. Usando o critério de Griffith, e considerando o fato de que o comprimento real de uma trinca fractal é maior que seu tamanho aparente, ele obteve a expressão assintótica correta para uma trinca fractal auto-similar de Modo I:

$$\sigma \sim r^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2 - D}{2} \quad (6.9)$$

onde  $D$  é a dimensão fractal de uma rachadura auto-similar. É de notar que existem muitas definições para a dimensão fractal. Todas essas definições fornecem a mesma dimensão fractal para fractais auto-similares. Gol'dshtein e Mosolov (1991, 1992) obtiveram a mesma potência da singularidade usando uma transferência de energia em cascata. Eles mostraram que, se existe uma dissipação na transição entre a  $n$ th enésima ao  $(n+1)$ st da micromecânica nível de  $r$ , a dimensão fractal dos aumentos de trinca e, conseqüentemente, a ordem singularidade das tensões diminui. Balankin (1997) encontraram essa singularidade de tensão para rachaduras fractais auto-afins por meio da análise dimensional.

Deve-se mencionar que até agora só o Modo I de rachaduras fractais foram estudados. Mosolov (1993) tentou explicar o crescimento da trinca em compressão usando a fractalidade das rachaduras. Ele mostrou que para uma rachadura fractal uniforme ao longo de um esforço de compressão, a tensão na ponta da trinca são singulares. Mais tarde, esse problema foi discutido por Balankin (1997).

Arash Yavari (2000, 2002) apresentou uma abordagem sistemática para o cálculo da ordem da singularidade da tensão de rachaduras fractais utilizando o método das linhas de força, que é aplicável para todos os modos de fratura. Ele considerou os três modos clássicos de fratura para rachaduras fractais e investigou o problema da singularidade de tensões na ponta da trinca de forma mais aprofundada.

Yavari (2002) discutiu a expressão proposta por Mosolov (1993) e também a proposta de Balankin (1994). Yavari (2002) acredita que a expressão do campo de tensão na ponta de uma trinca fractal deve satisfazer a seguinte expressão:

$$\sigma \sim \frac{K_I}{r^\beta}. \quad (6.10)$$

onde:

$$\beta = \frac{2H-1}{2H}. \quad (6.11)$$

e ainda Yavari (2002) afirmou que singularidade deste campo depende do modo de fratura imposto sobre a trinca.

Arash Yavari (2000, 2002) descreveu no seu artigo uma abordagem sistemática para a obtenção da ordem da singularidade da tensão para diferentes rachaduras fractais auto-similares e auto-afim. Procurando uma abordagem matematicamente completa, ele considerou ambas as rachaduras como trincas fractais auto-similares e auto-afins. Ele estudou os Modo II e III de rachaduras fractais e mostrou que esse modos possuem a mesma ordem da singularidade da tensão que o Modo I de rachaduras fractais. Além desses três modos clássicos, ele descobriu um modo de IV de fratura como uma consequência da fratura fractal, que acontece devido a uma forma peculiar de engastamento da trinca por causa da sua rugosidade. Ele também mostrou que, por este modo, a tensão tem uma singularidade mais fraca do que nos modos clássicos de fratura, quando rachaduras fractais auto-afim são consideradas, e que a tensão é da mesma ordem da singularidade para trincas auto-similares. Segundo Arash Yavari (2000, 2002), considerando-se este novo modo de fratura, alguns problemas de modo único da mecânica da fratura clássica poderiam ser compreendidos como um modo misto na Mecânica da Fratura Fractal. Ao impor uma transição contínua do fractal para campos de tensão e deslocamento clássicos, ele obteve a forma completa dos campos de tensões e deslocamentos em torno da ponta de uma trinca fractal. Ele obteve também uma relação universal entre os fatores de intensidade de tensão fractal e clássica. Foi demonstrado que, por uma trinca fractal de Modo IV, apenas uma das componentes de tensão é singular; as outras componentes de tensão são identicamente zero. E finalmente, ele estudou a singularidade da tensão para corpos tridimensionais com trincas fractais auto-afim. Ele concluiu que como no caso bidimensional, o quarto modo de fratura apresenta uma singularidade de tensão mais fraca para rachaduras fractais auto-afim do que os modos clássicos de fratura.

Yavari estudou os atributos mecânicos da natureza fractal de superfícies de fratura. Ele também estudou a estrutura da tensão e da singularidade de tensão na ponta de uma trinca fractal, que pode ser auto-similar ou afim. Ele discutiu os três modos clássicos de fratura e o quarto modo de fratura para rachaduras fractais em corpos sólidos bidimensionais e tridimensionais e descobriu que há seis modos de fratura na mecânica da fratura fractal. Ele calculou as potências da singularidade do campo de tensão e deformação na ponta de uma trinca fractal em um material sob

encruamento e mostrou que as tensões e deformações apresentam singularidades mais fracas na ponta de uma trinca fractal do que aquelas que existem na ponta de uma trinca lisa.

### 6. 3 - Aplicação da Mecânica dos Meios Irregulares à Mecânica da Fratura Estável ou Quase-Estática para o caminho rugoso

Foi visto no Capítulo – V as equações básicas da MFC para o caminho plano, porém, a partir de agora será considerado o caminho rugoso da fratura. Para se efetuar as modificações das equações clássicas da mecânica da fratura pela rugosidade da superfície via geometria fractal é preciso em primeiro lugar estabelecer, na forma de postulados, as hipóteses que fundamentam a MFC e também evidenciar a correspondência entre as grandezas usuais da MFC, com aquelas que levam em conta a natureza fractal da superfície de fratura .

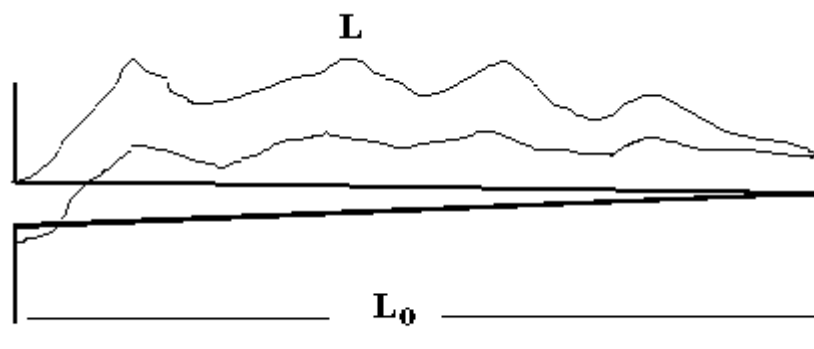


Figura - 6. 1. Trinca rugosa com a sua trinca projetada no plano energeticamente equivalente.

Considera-se portanto os seguintes postulados:

#### *I) Postulado da admissibilidade da superfície de fratura*

Considere-se uma fenda que se propaga ao longo do eixo-x: a trinca desvia da trajetória do eixo-x, mas a direção de propagação é o eixo-x, a trajetória da trinca é uma trinca fractal admissível se e somente se for uma função de valor único da variável independente x, isto é, qualquer linha perpendicular ao eixo-x devem se cruzar a trajetória da trinca uma única vez.

#### *II) Postulado do limite de escalas para a equivalência fractal de uma trinca*

As irregularidades das superfícies de trincas em contraste com fractais matemáticos, são finitos. Portanto, perfis de trincas podem ser assumidos como fractais apenas em uma escala  $l_0 \leq r \leq l_1$  (Cherepanov et al., 1995). O limite inferior  $l_0$  está relacionado com a micro-mecânica do material rachado e o limite superior é uma função do tamanho geométrico da amostra, o tamanho da

rachadura, e outros fatores.

### III) Postulado da equivalência energética de Irwin

Irwin se deu conta da dificuldade matemática de tratar, ou descrever, a fratura em termos da complexa geometria da superfície rugosa de fratura de diferentes materiais. Por esta razão, ele propôs a equivalência energética entre esta superfície (caminho rugoso) e a sua projeção sobre o plano euclidiano (caminho projetado da fratura) (Anderson 1995), para um mesmo material, conforme mostra a Figura - 6. 1. Desta forma, a Mecânica da Fratura Clássica (MFC) passou a quantificar o crescimento, a velocidade e a dissipação de energia, no crescimento de uma trinca em termos da geometria euclidiana (Ewalds 1993), isto é, em termos dos comprimentos, áreas e velocidades projetados ao longo da direção de crescimento.

A abordagem de Griffith-Irwin (Ewalds 1993) para a MFC passou a ser uma adaptação, para o caso de uma superfície de fratura, ou trinca, rugosa. Nesta adaptação, considerou-se a superfície gerada pelo crescimento da trinca como um plano euclidiano, apesar da morfologia irregular da mesma. A equivalência energética foi feita com a finalidade de tornar útil as equações da MFC, desenvolvida com base na geometria euclidiana para trincas e superfícies de fraturas planas. Desde o Capítulo - II a superfície plana de projeção da fratura vem sendo identificada pelo subscrito “o” ou “0”.

Pelo postulado da equivalência energética de Irwin considera-se que as variações na energia elástica, isto é, as energias das deformações, introduzida por uma trinca são iguais, tanto para o caminho rugoso como para o seu caminho projetado (plano):

$$U_{L0} = U_L, \quad (6.12)$$

e conseqüentemente a energia de superfície gasta para formar as superfícies rugosa de fratura e a sua superfície projetada (plana) também são iguais, isto é:

$$U_{\gamma0} = U_{\gamma}. \quad (6.13)$$

Por questões de simplicidade matemática, grandezas como a resistência ao crescimento da trinca não foram definidas por Irwin para o caminho rugoso. O equivalente da MFC para a superfície projetada (plana),  $R_0$ , é entendida como sendo  $R_0 = 2\gamma_{eff}$ . Em razão disto o efeito da rugosidade não é considerado na definição desta grandeza.

Como conseqüência desse postulado, pode-se escrever, matematicamente e de forma geral, a relação entre as funções de energia entre o caminho projetado e o caminho rugoso da seguinte forma:



$$f(L_0) = f(L), \quad (6.14)$$

#### IV) Postulado da invariância das equações

É necessário, a partir de agora, introduzir um novo postulado, que foi denominado de “postulado da covariância”, entre as equações da MFC e aquelas que foram desenvolvidas levando em consideração a morfologia rugosa, conforme acima comentado. Este novo postulado tem a finalidade de conservar a descrição clássica da mecânica da fratura, na forma como foi concebida inicialmente pelos seus criadores (Griffith, Irwin, etc) e, ao mesmo tempo, proporcionar a utilização da descrição fractal da superfície rugosa, no contexto da MFC.

Considere uma trinca lisa de comprimento,  $L$ , cuja grandezas que as descrevem sejam dadas de acordo com o quadro abaixo. Agora imaginando-se uma operação geométrica de enrugamento desta trinca de tamanho real,  $L$ , para um tamanho projetado,  $L_0$ , conforme mostra a Figura - 6. 1, onde o tamanho,  $L$ , pode ser descrito em termos de  $L_0$ , por uma equação de escalonamento fractal dada de acordo com a expressão (4. 87). Considerando-se também que a forma das equações da MF são invariantes por esta “transformação de enrugamento”, ou seja, postulando-se que a mecânica da fratura vale tanto para o “caminho projetado ou plano” como para o “caminho rugoso”, pode-se escrever equações análogas àquelas descritas na seção anterior apenas fazendo-se a devida substituição de variáveis, ou seja, de:

Tabela - VI. 1. Transformação das Grandezas Planas ou Lisas em Irregulares (ou Rugosas)

<b>Grandezas</b>	<b>Planas</b>	<b>para</b>	<b>Rugosas</b>	
<i>Comprimento,</i>	$L_0$	→	$L$	
<i>Energia de deformação,</i>	$U_{L_0}$	→	$U_L$	
<i>Taxa de energia elástica liberada,</i>	$G_0$	→	$G$	
<i>Energia para formar as superfícies de fratura,</i>	$U_{\gamma_0}$	→	$U_\gamma$	(6. 15)
<i>Resistência a fratura,</i>	$R_0$	→	$R = 2\gamma_{eff}$	
<i>Módulo Elástico ou Módulo de Rigidez</i>	$E_0$	→	$E$	
<i>Tensão de fratura,</i>	$\sigma_0$	→	$\sigma,$	etc.

Portanto, a partir da operação de enrugamento da trinca descrita cima, deseja-se saber como será a forma das equações desta nova Mecânica da Fratura Fractal (MFF) para o caminho rugoso em função do comprimento projetado,  $L_0$ , e vice-versa, e como será o comportamento de suas grandezas para os diferentes graus de rugosidade e para as diferentes escalas de observação. A resposta para esta pergunta será dada nos itens a seguir. Porém, antes todas as equações da MF serão reescritas para o caminho rugoso apenas em função do seu comprimento,  $L$ .

## V - Teorema das Transformações das Equações entre o Caminho Projetado e Rugoso

A proposta desta secção é utilizar o formalismo matemático da Mecânica da Fratura para o crescimento estável de trinca, generalizando-o para o caso rugoso. Por esta razão precisa-se agora encontrar as relações entre as grandezas  $U_0$  e  $U$ ,  $U_{\gamma 0}$  e  $U_{\gamma}$ ,  $G_0$  e  $G$ ,  $R_0$  e  $R$ ,  $L_{0c}$  e  $L_c$ , etc, a fim de permanecer com uma MF semelhante a anterior, a clássica, porém corrigida pela teoria fractal.

Como consequência dos dois postulados anteriores pode-se mostrar, utilizando-se a regra da cadeia, que as relações entre as taxas para os caminhos, projetado e o caminho rugoso, são dadas por:

$$\frac{df(L_0)}{dL_0} = \frac{df(L)}{dL} \frac{dL}{dL_0}, \quad (6.16)$$

Este resultado será usado para transformar as equações entre o caminho projetado e rugoso

Aplicando-se agora a mecânica dos meios irregulares a equação da energia do campo de tensão elastostático como uma forma de contextualizar em uma teoria matemática geral os resultados do capítulo V e VI e investigar o efeito da *rugosidade* em problemas de potenciais vetoriais.

## 6.4 – Relação de equivalência entre as grandezas das fraturas lisas e rugosas

### 6.4.1 - Cálculo da energia elástica e da energia de superfície para uma trinca lisa

Considerando-se uma placa trincada com uma trinca lisa, conforme mostra a Figura - 6.2, onde a tensão aplicada  $\sigma$  é dada por:

$$\sigma = \frac{dF}{dA_f} \quad (6.17)$$

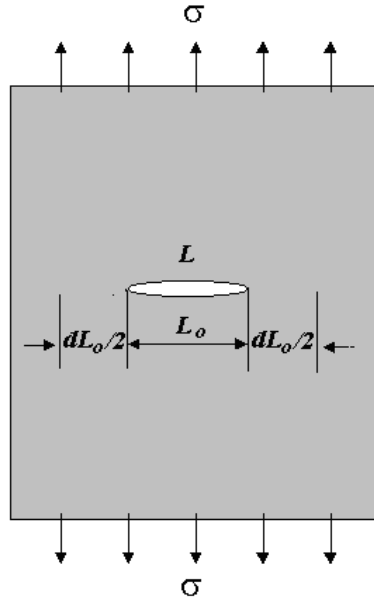


Figura - 6. 2. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca lisa de comprimento inicial,  $L_1$  introduzida na amostra para iniciar o crescimento da fratura, mostrando incrementos de tamanho  $dL_1$ , onde  $\sigma$  é a tensão aplicada à amostra.

A área da energia elástica descarregada por causa da introdução da trinca lisa de comprimento  $L_1$  é dada por:

$$A_1 = mL_1^2 \quad (6.18)$$

onde  $m$  é um fator de forma para a trinca lisa. A energia elástica acumulada na placa é dada por:

$$\Delta U_e = \int U_v dV \quad (6.19)$$

onde

$$U_v = \int \sigma d\varepsilon \quad (6.20)$$

Sendo a tensão dada pela lei de Hooke tem-se:

$$\sigma = E'\varepsilon \quad \text{onde} \quad E' = \begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \text{p/ Deformação Plana} \\ E & \text{p/ Tensão Plana} \end{cases} \quad (6.21)$$

Substituindo (6. 21) em (6. 20) tem-se:

$$\begin{aligned} U_v &= \int E'\varepsilon d\varepsilon \\ &= E' \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{E^2 \varepsilon^2}{2E'} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Logo

$$U_v = \frac{\sigma^2}{2E'} \quad (6.23)$$

Substituindo (6.23) em (6.19) tem-se:

$$\Delta U_e = \int \frac{\sigma^2}{2E'} dV \quad (6.24)$$

Sendo o elemento de volume dado por  $dV = t dA$ , onde  $t$  é a espessura do material e  $dA = 2mL_1 dL_1$ , logo a equação (6.24) pode ser escrita como:

$$\Delta U_e = 2mt \int \frac{\sigma^2}{2E'} L_1 dL_1 \quad (6.25)$$

Portanto, a energia elástica liberada pela introdução de uma falha de comprimento  $2L_0$  é então:

$$\Delta U_e = mt \frac{\sigma^2 L_1^2}{2E'} \quad \text{onde } E' = \begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} & p / \text{ Deformação Plana} \\ E & p / \text{ Tensão Plana} \end{cases} \quad (6.26)$$

Para uma trinca elíptica a região descarregada pode ser também considerada como quase elíptica e neste caso o fator de forma é  $m = \pi$ , ou seja:

$$\Delta U_e = t \frac{\pi \sigma^2 L_1^2}{2E'} \quad (6.27)$$

A energia de superfície é dada por:

$$\Delta U_s = 2(L_1 t \gamma) \quad (6.28)$$

ou

$$\Delta U_s = 2\gamma t L_1 \quad (6.29)$$

Yavari iguala a equação (6.27) com (6.29) e obtém:

$$t \frac{\pi \sigma^2 L_1^2}{2E'} = 2\gamma t L_1 \quad (6.30)$$

Logo

$$\sigma \sim \frac{1}{L_1^{1/2}} \quad (6.31)$$

Para calcular a ordem de singularidade Yavari comete um erro. Pois embora o resultado final seja o mesmo daquele mostrado aqui, o valor da dependência do campo de tensão em função do comprimento da trinca só pode ser obtido corretamente se utilizarmos o critério de Griffith que usa a igualdade da taxa da energia elástica liberada (dado pela derivada da energia elástica descarregada na placa) com a resistência a fratura que é ao invés da igualdade da própria energia

elástica com a energia de superfície.

A forma correta de calcular de acordo com o critério de Griffith-Irwin utilizando a derivada da energia elástica é dado da seguinte forma:

$$\frac{d(\Delta U_e)}{dL_t} = \frac{d(\Delta U_s)}{dL_t} \quad (6.32)$$

$$\frac{\pi\sigma^2 L_t}{E'} t = 2\gamma t$$

Obtém-se a tensão de fratura de Griffith é dado por:

$$\sigma = \left( \frac{2\gamma E'}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{L_t^{1/2}} \quad (6.33)$$

Portanto a ordem da singularidade do campo de tensão é dado por:

$$\sigma \sim \frac{1}{L_t^{1/2}} \quad (6.34)$$

Observe que a ordem da singularidade para o comprimento da trinca é o mesmo para um raio vetor na frente da trinca, ou seja  $\sigma \sim \frac{1}{r^{1/2}}$ .

#### 6.4.2 - Cálculo da energia elástica e da energia de superfície para uma trinca rugosa

Um cálculo análogo a placa com uma trinca lisa pode ser feito para uma placa idêntica, porém com uma trinca rugosa, conforme mostra a Figura - 6. 3, onde a tensão aplicada  $\sigma$  é dada por:

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \quad (6.35)$$

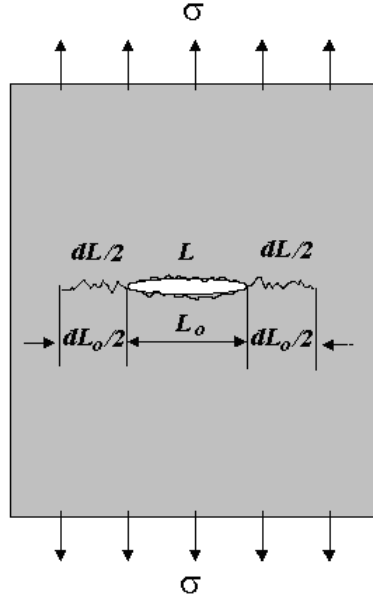


Figura - 6. 3. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca rugosa de comprimento inicial,  $L$  introduzida na amostra para iniciar o crescimento da fratura, mostrando incrementos de tamanho  $dL$ , onde  $\sigma$  é a tensão aplicada à amostra.

A área da energia elástica descarregada por causa da introdução da trinca de comprimento  $L$  é dada por:

$$A = m^* L^2 \quad (6.36)$$

onde  $m^*$  é um fator de forma para a trinca rugosa. A energia elástica acumulada na placa é dada por:

$$\Delta U_e = \int U_v dV \quad (6.37)$$

Onde de forma análoga tem-se:

$$U_v = \frac{\sigma^2}{2E'} \quad (6.38)$$

Substituindo (6.23) em (6.19) tem-se:

$$\Delta U_e = \int \frac{\sigma^2}{2E'} dV \quad (6.39)$$

Sendo o elemento de volume dado por  $dV = t dA$ , onde  $t$  é a espessura do material e  $dA = 2m^* L dL$ , logo a equação (6.24) pode ser escrita como:

$$\Delta U_e = 2m^* t \int \frac{\sigma^2}{2E'} L dL \quad (6.40)$$

Portanto, a energia elástica liberada pela introdução de uma falha de comprimento  $2L_0$  é então:

$$\Delta U_e = m^* t \frac{\sigma^2 L^2}{E} \quad \text{onde} \quad E' = \begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} & p / \text{ Deformação Plana} \\ E & p / \text{ Tensão Plana} \end{cases} \quad (6.41)$$

A energia de superfície é dada por:

$$\Delta U_s = 2(Lt\gamma) \quad (6.42)$$

ou

$$\Delta U_s = 2\gamma tL \quad (6.43)$$

A forma correta de calcular de acordo com o critério de Griffith-Irwin utilizando a derivada da energia elástica é dado da seguinte forma:

$$\frac{d(\Delta U_e)}{dL} = \frac{d(\Delta U_s)}{dL_0} \quad (6.44)$$

$$\frac{\pi\sigma^2 L}{E'} t = 2\gamma t$$

Obtém-se a tensão de fratura de Griffith é dado por:

$$\sigma = \left( \frac{2\gamma E'}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{L^{1/2}} \quad (6.45)$$

Portanto a ordem da singularidade do campo de tensão é dado por:

$$\sigma \sim \frac{1}{L^{1/2}} \quad (6.46)$$

Novamente comparando-se (6.46) com (6.34), observa-se que a ordem da singularidade para o comprimento da trinca é o mesmo para um raio vetor na frente da trinca, ou seja  $\sigma \sim \frac{1}{r^{1/2}}$ . Além disso, conclui-se que o postulado da invariância das equações da Mecânica da Fratura para o caminho liso e rugoso se confirma.

### 6.4.3 - Cálculo da taxa de energia elástica e da resistência a fratura para uma trinca lisa e rugosa

As energias de deformação e de superfície para as superfícies lisa são dadas por:

$$\Delta U_{0e} = \pi t \frac{\sigma_0^2 L_0^2}{2E'_0} \quad (6.47)$$

A energia de superfície é dada por:

$$\Delta U_{0s} = 2t\gamma_0 L_0 \quad (6.48)$$

e para as superfícies rugosas são:

$$\Delta U_e = m^* t \frac{\sigma^2 L^2}{2E'} \quad (6.49)$$

A energia de superfície é dada por:

$$\Delta U_s = 2t\gamma L \quad (6.50)$$

Considerando-se o postulado da equivalência energética entre uma superfície lisa projetada a partir de uma superfície rugosa para uma mesma placa, tem-se que:

$$\Delta U_{0e} = \Delta U_e \quad (6.51)$$

e

$$\Delta U_{0s} = \Delta U_s \quad (6.52)$$

Então

$$\pi t \frac{\sigma_0^2 L_0^2}{2E'_0} = m^* t \frac{\sigma^2 L^2}{2E'} \quad (6.53)$$

Considerando o mesmo valor do módulo elástico par a trinca projetada e rugosa, ou seja  $E_0 = E$ , tem-se:

$$\pi \sigma_0^2 L_0^2 = m^* \sigma^2 L^2 \quad (6.54)$$

Logo

$$\sigma_0^2 L_0^2 = \left( \frac{m^*}{\pi} \right) \sigma^2 L^2 \quad (6.55)$$

ou

$$\sigma_0 = \left( \frac{m^*}{\pi} \right)^{1/2} \sigma \left( \frac{L}{L_0} \right) \quad (6.56)$$

E para a energia de superfície tem-se:

$$2t\gamma_0 L_0 = 2t\gamma L \quad (6.57)$$

Logo

$$\gamma_0 = \gamma \left( \frac{L}{L_0} \right) \quad (6.58)$$

As taxas de energias elásticas liberadas, para o caminho liso projetado:



$$G_0 = \frac{dU_{0e}}{dL_0} \quad (6.59)$$

E para o caminho rugoso real:

$$G = \frac{dU_e}{dL} \quad (6.60)$$

Logo utilizando a regra da cadeia e escrevendo a taxa da trinca projetada em função da trinca real rugosa tem-se:

$$G_0 = \frac{dU_{0e}}{dL} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.61)$$

e considerando a equivalência energética (postulado III) entre os caminhos projetados e rugosos, tem-se:

$$G_0 = G \frac{dL}{dL_0} \quad (6.62)$$

Calculando de forma análoga para a resistência a fratura do caminho liso projetado:

$$R_0 = \frac{dU_s}{dL_0} \quad (6.63)$$

e para o caminho rugoso real:

$$R = \frac{dU_s}{dL} \quad (6.64)$$

Logo utilizando a regra da cadeia e escrevendo a taxa da trinca projetada em função da trinca real rugosa tem-se:

$$R_0 = \frac{dU_{0s}}{dL} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.65)$$

Ou

$$R_0 = R \frac{dL}{dL_0} \quad (6.66)$$

Este resultado permite-se escrever a relação entre a resistência a fratura para o caminho liso e rugoso.

É importante observar que a equivalência energética de Irwin, entre o caminho rugoso e o projetado, foi considerada para tornar válidas as equações desenvolvidas pela Mecânica da Fratura para o caminho plano liso, na ausência de qualquer rugosidade, conforme mostra a Figura - 6.4.

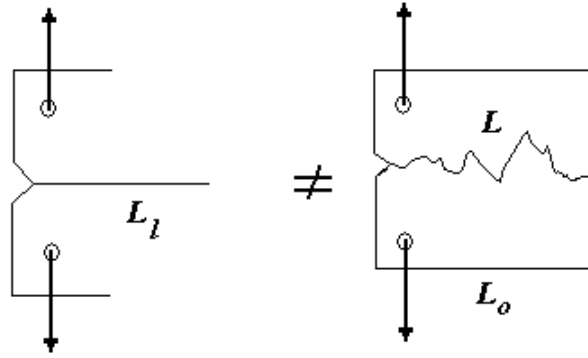


Figura - 6. 4. Diferença entre uma trinca plana e lisa e uma trinca rugosa com caminho plano projetado.

Porém, se for considerado uma fratura plana lisa,  $L_o^{(l)}$ , de mesmo comprimento de uma fratura projetada,  $L_o^{(p)}$ , observa-se que as grandezas energéticas e suas derivadas terão a seguinte relação:

$$U_{Ll} \leq U_{L0} \rightarrow \frac{dU_L}{dL_l} \leq \frac{dU_{L0}}{dL_0} \rightarrow G_l \leq G_0 \quad (6. 67)$$

e

$$U_{\gamma l} \leq U_{\gamma 0} \rightarrow \frac{dU_{\gamma l}}{dL_l} \leq \frac{dU_{\gamma 0}}{dL_0} \rightarrow R_l \leq R_{\gamma 0}, \quad (6. 68)$$

o que tem produzido muitas confusões na literatura (Lung 1988; Lei 1995; Mishnaevsky Jr. 2000). Pois a energia para  $L_o^{(l)}$  é menor do que a energia para  $L_o^{(p)}$  ou  $L$  rugoso, conseqüentemente tem-se:

$$U_{Ll} \leq U_L \rightarrow G_l \leq G \frac{dL}{dL_0}, \quad (6. 69)$$

$$U_{\gamma l} \leq U_\gamma \rightarrow R_{\gamma l} \leq R \frac{dL}{dL_0}, \quad (6. 70)$$

pois o caminho rugoso  $L$  é maior do que o projetado  $L_o$  ( $L > L_o$ ) e ( $L > L_l$ ) e conseqüentemente maior do que o caminho liso ( $L > L_l$ ).

A partir do postulado – III observa-se, portanto, que o caminho rugoso da trinca satisfaz as mesmas condições energéticas do caminho plano, porém na MFEL esta rugosidade não é levada em conta causando discrepâncias entre as teoria e o experimento. Não sendo possível explicar por meio de uma função analítica e de forma definitiva o crescimento da curva J-R, por exemplo. Para corrigir este problema será introduzido a partir de agora a geometria fractal nas equações da MFEL com a finalidade de descrever o processo de interação geométrico da trinca com a microestrutura do material.

## 6. 5 – Cálculo da ordem da singularidade e da intensidade do campo de tensão na ponta de uma trinca rugosa

A proposta de obtenção do grau de singularidade do campo de tensão na ponta de uma trinca fractal feita por Mosolov e seguida por Yavari, parte da expressão do campo em função do raio vetor  $r$  que mede a distância dessa ponta a um ponto qualquer dentro do material. Mosolov simplesmente generaliza o expoente que relaciona a tensão  $\sigma_{ij}$  com  $r$  mudando-o de um expoente do tipo  $-1/(n+1)$  para  $n$  inteiro para o expoente  $-\alpha$  fracionário. Essa generalização é um tanto “ad hoc” e foi seguida por Yavari. Balankin (1997) obteve essa singularidade por meio de uma análise dimensional. Contudo, essas metodologias devem ser melhor apuradas, por que resultados numéricos de simulação do campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa feita por Alves (2010) mostra que esse campo é apenas ligeiramente alterado em relação ao campo ao redor de uma trinca lisa. Os cálculos executado por Yavari são matematicamente corretos, mas não correspondem a realidade física, porque Yavari considerou suas trincas rugosas como sendo fractais verdadeiros de auto-afinidade ilimitada entre as escalas de zero a infinito,  $\frac{1}{\infty} \leq \varepsilon \leq \infty$  e, portanto os seus limites assintóticos são diferentes de uma trinca real que possui uma fractalidade estendida apenas em um estreito intervalo de escalas. Pois sabe-se da observação experimental que as trincas na verdade não são fractais matemáticos e são chamados de pré-fractais, pois sua auto-afinidade está contida dentro de um intervalo limitado de escalas:  $\varepsilon_{\min} = \frac{l_0}{L_0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{L_0}{L_0}$ . Desta forma, Alves propõe uma correção dada pelo seguinte desenvolvimento:

*1ª maneira*

Sabendo-se que  $\sigma_0 \sim \frac{1}{L_0^{1/2}}$  e  $\sigma \sim \frac{1}{L^{1/2}}$  pode-se calcular a ordem da singularidade do campo de tensão da seguinte forma:

Observe que a partir da equação (6. 34) pode-se escrever:

$$\sigma_0 \sim \frac{1}{\left(\frac{L_0}{L} L\right)^{1/2}} = \frac{(L/L_0)^{1/2}}{L^{1/2}} \quad (6. 71)$$

Como  $\sigma \sim \frac{1}{L^{1/2}}$  logo:

$$\sigma_0 \sim \sigma \left( \frac{L}{L_0} \right)^{1/2} \quad (6.72)$$

Observe que esse resultado ainda está incompleto conforme será visto logo a seguir.

*2ª maneira*

Considere, no modelo fractal proposto, que a taxa de energia elástica liberada  $G$  em relação a mesma grandeza  $G_0$  definida para o caminho liso é dada por:

$$G_0 = G \frac{dL}{dL_0} \quad (6.73)$$

Nesta segunda maneira que é considerada a correta utiliza-se o próprio critério de Griffith, onde da teoria elástica linear tem-se

$$G_0 = \frac{\pi \sigma_0^2 L_0}{E'} \quad (6.74)$$

e de forma análoga tem-se:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 L}{E'} \quad (6.75)$$

Por outro lado, explicitando-se a equação (6.73) em termos da equação (6.74) e (6.75) tem-se:

$$\pi t \frac{\sigma_0^2 L_0}{E'_0} = m^* t \frac{\sigma^2 L}{E'} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.76)$$

Considerando o mesmo módulo elástico para a trinca lisa e rugosa, ou seja  $E_0 = E$  tem-se:

$$\pi \sigma_0^2 L_0 = m^* \sigma^2 L \frac{dL}{dL_0} \quad (6.77)$$

logo

$$\sigma_0^2 = \left( \frac{m^*}{\pi} \right) \sigma^2 \left( \frac{L}{L_0} \right) \frac{dL}{dL_0} \quad (6.78)$$

Ou finalmente

$$\sigma_0 = \left( \frac{m^*}{\pi} \right)^{1/2} \sigma \sqrt{\left( \frac{L}{L_0} \right) \frac{dL}{dL_0}} \quad (6.79)$$

Este resultado relaciona o campo de tensão clássico com o campo de tensão na presença de uma trinca com rugosidade.

Considerando-se o campo de tensão na ponta de uma trinca lisa e rugosa, conforme

mostra a Figura - 6.5:

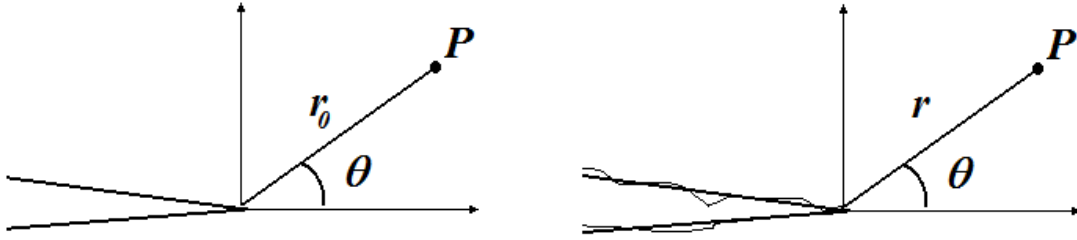


Figura - 6.5. Campo de tensão a uma distância  $\vec{r}$  na frente de uma trinca; a) Trinca Lisa b) Trinca rugosa

onde:

$$\vec{r}_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sim L_0 \quad (6.80)$$

e

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \sim L \quad (6.81)$$

Sabendo que o campo de tensão clássico é dado por:

$$\sigma_{ij}(r, \theta, \rho) = \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta, \rho) \quad (6.82)$$

Logo, usando-se o resultado (6.79) em (6.82) obtém-se:

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, \rho, L_0, L) = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \sigma_{ij}(r, \theta, \rho) \sqrt{\left(\frac{L}{L_0}\right) \frac{dL}{dL_0}} \quad (6.83)$$

e

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, \rho, L_0, L) = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{\left(\frac{L}{L_0}\right) \frac{dL}{dL_0}} \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta, \rho) \quad (6.84)$$

Para o Modo I de fratura tem-se que:

$$\sigma_x = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.85)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (6.86)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\}, \quad (6.87)$$

Observe que essas equações de campo apresentam apenas um termo de correção da rugosidade em relação ao campo de tensão clássico. Observe ainda que essa correção não afetou a ordem do expoente da distância  $r$  em relação ao campo clássico. Isto significa que a rugosidade da trinca a princípio não afeta a ordem da singularidade do campo de tensão, ao contrário do que afirma Yavari (2002). Contudo, se houver uma relação entre a distância  $r$  na frente da trinca com a fractalidade na sua ponta, na região de campo de tensão concentrado, de tal forma que as quantidades  $r$  e o comprimento rugoso  $L$  estiverem intimamente associados, conforme as equações (6.80) e (6.81), então pode ser que as intensidades do campo de tensão  $\sigma$  passem a depender tanto de  $r$  como de  $L$ , a tal ponto que uma única dependência surja entre essas quantidades, conforme mostra Yavari (2002). Mas isto só será possível se os limites assintóticos previstos por Yavari (2002) realmente acontecerem em uma trinca real, do contrário, uma simples rugosidade se comporta como previsto pelas equações (6.84).

## 6.6 – Equações de energia e taxas de energia da Mecânica da Fratura quase-estática para o caminho rugoso

A proposta desta secção é utilizar o formalismo matemático da Mecânica da Fratura para o crescimento estável de trinca, generalizando-a para o caso rugoso, a fim de permanecer com uma MF semelhante a anterior, a clássica, porém corrigida pela teoria fractal.

Levando-se em consideração os dois postulados propostos anteriormente, a partir de agora, será modelado a propagação quase-estática da fratura para o caminho rugoso de acordo com os trabalhos de Griffith (1920) e Irwin (1957) e outros. Elas serão análogas às equações do Capítulo VI porém sem o índice “zero”.

### 6.6.1 - A taxa de energia elástica liberada para o caminho rugoso

Considere uma placa plana e infinita de espessura,  $e$ , desprezível sujeita a um carregamento de tensão,  $\sigma$ , nas suas extremidades, conforme mostra a Figura - 6.6. A partir de agora serão obtidas a relação entre as grandezas projetadas e rugosas da MF, com a correção da rugosidade, para em seguida utilizar ao modelamento fractal da superfície de fratura a fim de se obter as equações da MF-Fractal.

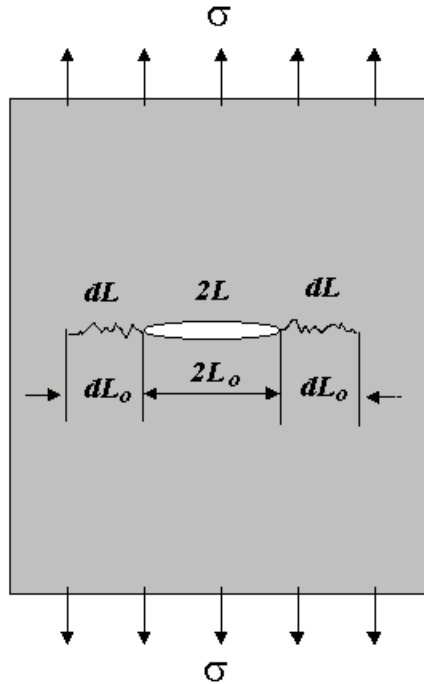


Figura - 6. 6. Modelo de Griffith para o crescimento de uma trinca, mostrando incrementos da trinca projetada  $dL_o$  e incrementos “fractais”  $dL$ .  $\sigma$  é a tensão aplicada à amostra.  $L_o$  é a trinca introduzida na amostra para iniciar o crescimento.

De acordo com o balanço energético de Griffith tem-se que:

$$F - U_L \geq U_\gamma, \quad (6. 88)$$

onde  $F = \int X du$  é o trabalho realizado pelas forças externas,  $X$ , e  $du$  é o deslocamento infinitesimal do ponto de aplicação da força.  $U_L$  é a variação da energia elástica armazenada no corpo, causada pela introdução da trinca de tamanho,  $L$ , na placa da Figura - 6. 3.  $U_\gamma$  é a energia gasta para formar as superfícies de fratura. Redefinindo a taxa de energia elástica liberada,  $G$  ou  $J$ , contabilizada sobre a superfície rugosa,  $A$ , como:

$$G = \frac{d}{dA} (F - U_\gamma). \quad (6. 89)$$

A resistência a propagação da fratura para a superfície rugosa é dada por:

$$R = \frac{dU_\gamma}{dA}, \quad (6. 90)$$

onde a omissão do índice “o” refere-se as superfícies rugosas.

No caso de deformação plana pode-se escrever a expressão em termos do perfil rugoso da fratura, isto é:

$$G = \frac{d}{dL} (F - U_L). \quad (6. 91)$$

Esta energia de deformação  $U_L$  para o caminho rugoso é então dada por:

$$U_L = -\frac{\pi\sigma^2 L^2}{2E}. \quad (6.92)$$

### 6.6.2 - A propagação quase-estática, o critério de Griffith-Irwin e a curva G-R

Definindo a partir de agora o conceito de resistência a propagação de trinca,  $R$ , para o caminho rugoso da seguinte forma:

$$R = \frac{dU_\gamma}{dL}, \quad (6.93)$$

cuja energia gasta para formar as superfícies rugosas de fratura,  $U_\gamma$  é dada por:

$$U_\gamma = 2(L)\gamma \quad (19). \quad (6.94)$$

Derivando a equação (6. 88) em relação a  $L$  tem-se:

$$\frac{d}{dL}(F - U_L) \geq \frac{dU_\gamma}{dL}, \quad (6.95)$$

logo comparando (6. 95) com (6. 90) e (6. 91) tem-se o critério de Griffith-Irwin. Na concepção de Irwin a condição de instabilidade é expressa como:

$$G \geq R. \quad (6.96)$$

Substituindo a expressão (6. 92) em (6. 91) para o caso de deslocamento constante (grampos fixos), onde as forças externas,  $X$ , não realizam trabalho, ou seja,  $F = 0$ , tem-se de forma análoga a relação (2.83) que  $G$  (quase-estático) para o caminho rugoso é igual á:

$$G = \frac{d}{dL}(F - U_L) = -\frac{dU_L}{dL} = \frac{\pi\sigma^2 L}{E}. \quad (6.97)$$

Substituindo (6. 94) em (6. 93) tem-se que:

$$R = \frac{d[2(L)\gamma]}{dL}, \quad (6.98)$$

logo a partir de (6. 98) tem-se que:

$$R = 2\gamma. \quad (6.99)$$

De forma análoga ao caso do caminho plano o modelo apresentado até aqui para a resistência a fratura,  $R$ , não depende das dimensões da trinca. Este modelo só é valido para materiais idealmente frágeis onde não ocorre quase nenhuma deformação plástica na ponta da trinca. Ele corresponde basicamente ao modelo apresentado por Griffith, tendo apenas sido

---

<sup>19</sup> Para o caso em que  $\gamma = \gamma_e + 1/2\gamma_p$  a taxa de energia elástica liberada passa a se chamar de taxa de energia elasto-plástica liberada, sendo denotada pela letra  $J$  ao invés de  $G$ .



modificado a sua interpretação pela introdução do conceito de curva  $G-R$  para o caminho rugoso.

### 6.6.3 – O tamanho crítico de Griffith e a tensão de fratura para o caminho rugoso

Usando os resultados (6. 99) e (6. 97) em (6. 96) tem-se que:

$$\frac{\pi\sigma^2 L}{E} \geq 2\gamma . \quad (6. 100)$$

Dividindo-se as equações (6. 97) e (6. 99) tem-se que:

$$\frac{R}{G} = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2 L} . \quad (6. 101)$$

Levando em consideração o critério de Griffith onde:

$$G = R , \quad (6. 102)$$

tem-se a partir de (6. 97), (6. 99), (6. 101) e (6. 102) que a tensão de fratura rugosa no material será dada por:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma E}{\pi L} \right)^{1/2} . \quad (6. 103)$$

Reescrevendo (6. 103) observa-se que o tamanho crítico da fratura rugosa baseado em Griffith é dado por:

$$L_c = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma_f^2} . \quad (6. 104)$$

De forma análoga a expressão deduzida em (5. 37).

### 6.6.4 – A relação entre $R$ e $G$ para o caminho rugoso

Retornando a equação (6. 101) e multiplicando e dividindo ela por  $\sigma_f^2$  tem-se que:

$$\frac{R}{G} = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma_f^2} \frac{1}{L} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2 . \quad (6. 105)$$

Escrevendo (6. 105) em termos de (6. 104) tem-se:

$$\frac{R}{G} = \frac{L_c}{L} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2 . \quad (6. 106)$$

Para o caso em que  $\sigma = \sigma_f$  fica-se com:

$$\frac{R}{G} = \frac{L_c}{L} , \quad (6. 107)$$

ou ainda substituindo (6. 99) em (6. 106) tem-se que:

$$\frac{2\gamma}{G} = \frac{L_c}{L} \left( \frac{\sigma_f}{\sigma} \right)^2. \quad (6.108)$$

Novamente para o caso em que  $\sigma = \sigma_f$  fica-se com:

$$\frac{2\gamma}{G} = \frac{L_c}{L}. \quad (6.109)$$

Esta equação (6.109) será útil em vários aspectos, pois relaciona a taxa de energia elástica liberada e a energia de superfícies com o comprimento da trinca e o comprimento crítico da trinca, mostrando que para  $G \geq 2\gamma$  teremos  $L \geq L_c$ .

### 6.6.5 - A tenacidade a fratura para o caminho rugoso

Usando (6.102) em (6.101) tem-se que:

$$2\gamma E = \pi \sigma_f^2 L_c. \quad (6.110)$$

Contudo, a tenacidade a fratura para o caminho rugoso é definida como:

$$K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi L_c} = \sqrt{RE} = \sqrt{2\gamma_{eff} E}. \quad (6.111)$$

Comparando (6.110) com a definição de  $K_{IC}$  dada em (6.111), percebe-se que essa propriedade do material não é invalidada pela consideração da rugosidade na MFC.

## 6.7 - Relação entre as grandezas projetadas e rugosas

Precisa-se agora encontrar as relações entre as grandezas  $U_0$  e  $U$ ,  $U_{\gamma_0}$  e  $U_\gamma$ ,  $G_0$  e  $G$ ,  $R_0$  e  $R$ ,  $L_{0c}$  e  $L_c$ , etc, a fim de relacionar a nova MFF com a MFC. Mas antes é importante lembrar que a teoria original de Griffith foi feita para materiais frágeis como os vidros, cuja microestrutura é homogênea e por isso não leva em conta a rugosidade das superfícies de fratura, ou seja, para Griffith o caminho rugoso e projetado são iguais,  $L = L_0$ . Portanto, no seu balanço energético, Griffith considera que a energia de deformação,  $U_L$ , e a energia de superfície,  $\gamma$ , tanto para o caso de um material homogêneo como para o caso de um material cristalino é independente da direção de propagação da trinca. Contudo, ele toma a taxa de energia elástica liberada sempre em relação a direção projetada da trinca. Portanto, para o modelo de nucleação de Griffith tem-se para a taxa de energia elástica liberada:

$$G \equiv \frac{d(F - U_L)}{dL} = G_0 \equiv \frac{d(F_0 - U_{L0})}{dL_0}, \quad (6.112)$$

e para a energia de deformação que:

$$\frac{dU_L}{dL} = \frac{dU_{L0}}{dL_0}, \quad (6.113)$$

e para a energia gasta para formar as superfícies que:

$$R \equiv \frac{dU_\gamma}{dL} = R_0 \equiv \frac{dU_{\gamma_0}}{dL_0}. \quad (6.114)$$

Logo, de acordo com a critério de Griffith tem-se:

$$G_0 = G \geq 2\gamma_0 = 2\gamma. \quad (6.115)$$

Por outro lado, a teoria de Irwin, leva em conta materiais cuja microestrutura possui energia de superfície que depende da direção de propagação da trinca como os materiais policristalinos (metálicos e cerâmicos, etc). Desta forma é necessário recorrer ao conceito de curva  $J$ - $R$  que é sempre tomado em relação a direção da projeção plana da trinca. Logo para o modelo de propagação estável de Irwin tem-se para a energia de deformação que a taxa de energia elástica liberada,  $G_0$ :

$$G_0 = \frac{d(F_0 - U_{L0})}{dL_0} = \frac{d(F_0 - U_{L0})}{dL} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.116)$$

e para uma mesma condição de carregamento  $F_0 = \int \vec{X} \cdot d\vec{u}$

$$\frac{dU_{L0}}{dL_0} = \frac{dU_{L0}}{dL} \frac{dL}{dL_0}, \quad (6.117)$$

e para a energia gasta para formar as superfícies, tem-se que a resistência a propagação da trinca,  $R_0$ , na direção da projeção plana de propagação, é dada por:

$$R_0 \equiv \frac{dU_{\gamma_0}}{dL_0} = \frac{dU_{\gamma_0}}{dL} \frac{dL}{dL_0}. \quad (6.118)$$

Percebe-se com isso que as relações entre as grandezas projetadas e rugosas são obtidas a partir de (6.97) e (6.93) pela regra de derivação da cadeia.

### 6.7.1 – Relação entre as taxas de energia elástica liberada, projetada e rugosa

Levando-se em consideração o postulado – IV descrito na secção 6.3 deste capítulo, pode-se definir a taxa de energia elástica liberada para o caminho projetado, de forma análoga a equação (2.69), como sendo dada por:

$$G_0 \equiv \frac{d}{dL_0}(F - U_{L0}). \quad (6.119)$$

Observe que, para se escrever  $G_0$  em termos de  $G$  e  $R_0$  em termos de  $R$ , dados respectivamente em

(6. 91) e (6. 93) precisa-se admitir a equivalência energética de Irwin dada em (6. 12) e (6. 13) a fim de que:

$$G_0 = \frac{d}{dL} (F - U_L) \frac{dL}{dL_0}. \quad (6. 120)$$

Logo a partir de (6. 91) a equação (6. 120) pode ser escrita como:

$$G_0 = G \frac{dL}{dL_0}. \quad (6. 121)$$

A equivalência energética de Irwin diz que a energia por unidade de comprimento do caminho rugoso é igual a aquela energia por unidade de comprimento do caminho projetado. Observe a partir de (6. 116), (6. 19) e (6. 20) que:

$$\frac{dU_{L_0}}{dL_0} \geq \frac{dU_L}{dL} \quad (6. 122)$$

pois a partir de (4. 97) tem-se  $dL/dL_0 \geq 1$ . Logo

$$G_0 \geq G. \quad (6. 123)$$

que pode ser verificada a partir da equação (6. 121).

### 6.7.2 – Relação entre as resistências a fratura, projetada $R_0$ e rugosa $R$

A taxa de energia elástica liberada,  $G_0$ , conforme definida pela equação (6. 116), (6. 19) e (6. 20) é a derivada da variação na energia elástica do campo de tensão,  $U_{L_0}$ , dada pela equação (2.83), quando o tamanho da trinca introduzido é  $L_0 + dL_0$  ao invés de  $L_0$ . Na realidade a trinca cresce uma quantidade  $dL \geq dL_0$  (Figura – 7.3) e a Eq.(2.85) tem de ser corrigida, isto é a resistência a fratura,  $R_0$ , deve ser escrita como:

$$R_0 = \frac{dU_{\gamma_0}}{dL} \frac{dL}{dL_0}, \quad (6. 124)$$

de acordo com (6. 93) a equação (6. 124) pode ser escrita como:

$$R_0 = R \frac{dL}{dL_0}. \quad (6. 125)$$

Embora na MFC a resistência a fratura,  $R$ , não tenha sido definida para a superfície rugosa, e sim para a superfície plana e lisa, o conceito de curva  $J$ - $R$ , neste trabalho, foi também utilizado para manter válidas as definições (2.85) e (2.113) para o caso da superfície projetada. Observe a partir de ( ) e (6. 118) que:

$$\frac{dU_{\gamma_0}}{dL_0} \geq \frac{dU_{\gamma}}{dL}, \quad (6.126)$$

pois  $dL/dL_0 \geq 1$ . Logo, de forma análoga a [secção – 6.7.1](#), tem-se que:

$$R_0 = R. \quad (6.127)$$

Usando (6.99) em (6.125) pode-se definir a energia específica da superfície projetada,  $\gamma_0$ , como sendo dada por:

$$2\gamma_0 = 2\gamma \frac{dL}{dL_0}, \quad (6.128)$$

logo

$$\gamma_0 = \gamma \frac{dL}{dL_0}. \quad (6.129)$$

observe que:

$$U_{\gamma_0} = \int 2\gamma_0 dL_0 = U_{\gamma} = \int 2\gamma dL \quad (6.130)$$

que faz recuperar a equivalência dada na equação (6.13).

### 6.7.3 – A relação entre o critério de Griffith-Irwin para o caminho projetado e rugoso

Considerando o critério de Griffith-Irwin para a propagação da trinca,  $G_0 \geq R_0$  pode-se agora escrever a seguinte relação

$$G_0 = \frac{d}{dL} (F - U_L) \frac{dL}{dL_0} \geq R_0 = \frac{dU_{\gamma_0}}{dL} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.131)$$

Ou a partir de (6.121) e (6.125) pode-se escrever:

$$G_0 = G \frac{dL}{dL_0} \geq R_0 = R \frac{dL}{dL_0} \quad (6.132)$$

A relação (6.132) também pode ser escrita como:

$$G_0 \geq R_0 \rightarrow G \frac{dL}{dL_0} \geq R \frac{dL}{dL_0} \quad (6.133)$$

usando (6.132) e o critério de Griffith para o caso em que  $G_0 = R_0$  a relação (6.133) fica:

$$G_0 = R_0 \rightarrow G \frac{dL}{dL_0} = R \frac{dL}{dL_0} \quad (6.134)$$

considerando também  $G = R$ , conforme (6.102), portanto, tem-se a partir de (6.121) que:

$$G_0 = R \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 135)$$

Neste ponto é preciso distinguir a curva  $G_0 - R_0$  frágil da curva  $J_0 - R_0$  dúctil a qual será esclarecida na secção 6.9.7 e 6. 10.

#### 6.7.4 - Relação entre as tenacidades, tensões de fratura e módulos de rigidez elásticos projetado e rugoso

Multiplicando os dois lados de (6. 125) pelo módulo elástico de Young,  $E_0$ , tem-se:

$$R_0 E_0 = R E_0 \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 136)$$

Considerando-se o postulado II, a partir da equação (6. 97) e (6. 134) tem-se que:

$$\frac{\pi \sigma_{0f}^2 L_{0c}}{E_0} = R_0 \quad (6. 137)$$

logo

$$\pi \sigma_{0f}^2 L_{0c} = R_0 E_0 \quad (6. 138)$$

substituindo (6. 138) em (6. 136) tem-se

$$\pi \sigma_{0f}^2 L_{0c} = R E_0 \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 139)$$

tomando a raiz de (6. 136) tem-se que:

$$\sqrt{R_0 E_0} = \sqrt{R E_0 \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 140)$$

A tenacidade a fratura para o caminho plano é definida como:

$$K_{IC0} = \sigma_{0f} \sqrt{\pi L_{0c}} = \sqrt{R_0 E_0} \quad (6. 141)$$

usando a definição (6. 141) de  $K_{IC0}$  em (6. 140) tem-se que:

$$K_{IC0} = \sigma_{0f} \sqrt{\pi L_{0c}} = \sqrt{R \frac{dL}{dL_0} E_0} \quad (6. 142)$$

multiplicando e dividindo (6. 142) por  $E^{1/2}$  tem-se:

$$K_{IC0} = \sqrt{R E \frac{E_0}{E} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 143)$$

Considerando-se a situação onde ocorre a propagação da trinca, pode-se escrever a

expressão de um módulo elástico aparente, dado por:  $E_0 = E dL_0/dL$ , onde  $E$  é o módulo elástico do material, que é uma propriedade. Esta expressão não invalida o fato de que o módulo elástico  $E$  é uma propriedade. Ela apenas diz que, uma vez que uma trinca se propaga, ou seja, uma vez que o comprimento rugoso,  $L$ , varia com o comprimento projetado,  $L_0$ , existe uma variação no módulo de rigidez do material,  $E_0$ , devido ao contínuo crescimento da trinca (vide Figura - 5. 4). Observe que, se o carregamento for livre de propagação, ou seja, no caso onde tem-se apenas a flexão do corpo de prova, não é possível considerar a dependência de  $L$  com  $L_0$  porque para fins práticos ela não existe, logo a expressão para o módulo elástico aparente não faz sentido, neste caso, por isso é que existe a duplicidade de dependência entre as relações 5.62 e 5.65 da tese. Observe que para o caso de um entalhe inicial obtido por fadiga, por exemplo, pode-se considerar o comprimento rugoso praticamente igual ao comprimento projetado, isto é,  $L = L_0$ , logo, o fator de correção  $dL/dL_0$  é igual a unidade e portanto,  $dL/dL_0 = 1$ , o que significa que  $E = E_0$ . Portanto, o que o modelo fractal está dizendo é que a variação de  $L$  com  $L_0$  a ser considerada na fratura deve acontecer durante a propagação da trinca.

Mas a tenacidade a fratura para o caminho rugoso é definida a partir de (6. 111) como:

$$K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi L_c} = \sqrt{RE} \quad (6. 144)$$

usando a definição (6. 144) de  $K_{IC}$  para o caminho rugoso em (6. 143) tem-se:

$$K_{IC0} = K_{IC} \sqrt{\frac{E_0}{E} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 145)$$

considerando que  $K_{IC0} = K_{IC}$  é uma propriedade que não depende do caminho tem-se uma relação entre os módulos de rigidez rugoso e projetado:

$$E_0 = E \frac{dL_0}{dL} \quad (6. 146)$$

Esta equação faz o papel de uma equação que relaciona os módulos de rigidez com e sem dano elástico.

Para a tenacidade a fratura, ainda pode-se escrever:

$$\sigma_{0f} \sqrt{\pi L_{0c}} = \sigma_f \sqrt{\pi L_c} \sqrt{\frac{E_0}{E} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 147)$$

logo

$$\sigma_{0f} = \sigma_f \sqrt{\frac{E_0}{E} \frac{L_c}{L_{0c}} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 148)$$

usando o resultado (6. 146) em (6. 148) tem-se que a relação entre as tensões de fratura é dada por:

$$\sigma_{0f} = \sigma_f \sqrt{\frac{L_c}{L_{0c}}} \quad (6. 149)$$

Observe que, sendo o módulo elástico,  $E$ , uma propriedade do material, parece estranho que haja uma dependência desta grandeza com o caminho (rugoso ou projetado) considerado na análise matemática da trinca, acima. Isto pode ser explicado se for observado que as equações de (6. 146) a (6. 149) levam em consideração as grandezas e os tamanhos críticos,  $L_c$  e  $L_{0c}$ , que correspondem a uma situação de fratura e não uma situação de carregamento livre. Pois no primeiro caso, isto é, na situação de fratura, a rigidez do material,  $E_0$ , (retratada aqui pela relação entre o módulo elástico,  $E$ , e a rugosidade,  $dL/dL_0$ ), muda, a medida que a trinca se propaga. Isto está perfeitamente de acordo com a idéia intuitiva apresentada pelo gráfico da curva de ensaio, carga,  $X$ , *versus* deslocamento,  $u$ , conforme mostrado na Figura - 5. 4, Figura - 5. 9 e na Figura - A4. 1 e Figura - A4. 3, onde a rigidez,  $E_o$ , que é a secante a esta curva a partir da origem varia a medida que o corpo é fraturado. Uma explicação análoga pode ser considerada para o caso da relação entre a tensão de fratura do material do caminho rugoso,  $\sigma_f$ , e a tensão de fratura projetada,  $\sigma_{of}$ . Observe que todo esse fato é decorrente da consideração de que a tenacidade a fratura,  $K_{IC} = K_{IC0}$ , é uma propriedade independentemente do caminho.

#### 6.7.5 - Relação entre as tensões aplicadas e os comprimentos da trinca rugosa e projetada

A partir de (6. 12) e (6. 92) tem-se que:

$$-\frac{\pi\sigma_0^2 L_0^2}{2E_0} = -\frac{\pi\sigma^2 L^2}{2E} \quad (6. 150)$$

portanto

$$L^2 = \frac{E\sigma_0^2}{E_0\sigma^2} L_0^2 \quad (6. 151)$$

ou

$$L = \sqrt{\frac{E}{E_0}} \left( \frac{\sigma_0}{\sigma} \right) L_0 \quad (6. 152)$$

Portanto considerando-se que o modulo elástico é uma propriedade, portanto  $E = E_o$ , independente se o caminho é rugoso ou projetado, tem-se:

$$L^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} L_0^2 \quad (6. 153)$$



logo

$$\sigma_0 L_0 = \sigma L \quad (6. 154)$$

Multiplicando-se os dois lados de (6. 95) pela espessura do corpo tem-se:

$$Força = \sigma_0 A_0 = \sigma A \quad (6. 155)$$

Observe que esta relação mostra que a força aplicada se conserva independentemente se a superfície sob tensão é projetada ou rugosa, ou seja, a carga aplicada sobre o corpo não depende da superfície de fratura. Ainda de (6. 95) tem-se:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{L}{L_0} \quad (6. 156)$$

Esta relação é válida somente para a situação de carregamento livre, não sendo válida para a situação de propagação ou crescimento da trinca.

Por outro lado, explicitando-se a equação (6. 121) em termos da equação (6. 97) tem-se:

$$\frac{\pi \sigma_0^2 L_0}{E_0} = \frac{\pi \sigma^2 L}{E} \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 157)$$

considerando  $E_0 = E$  tem-se:

$$\pi \sigma_0^2 L_0 = \pi \sigma^2 L \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 158)$$

Portanto a relação entre as tensões projetada,  $\sigma_0$ , e rugosa,  $\sigma$ , é dada por:

$$\sigma_0 = \sigma \sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6. 159)$$

Observe em (6. 159) que para o caso em que  $L_0 = L_{0c}$  e  $L = L_c$ , nesta situação, tem-se necessariamente que  $\sigma_{0f} = \sigma_f$ . Logo a relação entre os tamanhos críticos, projetado e rugoso é obtida, ou seja:

$$L_c = L_{0c} \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 160)$$

Quadrando-se a equação (6. 163) e reescrevendo-a tem-se:

$$\sigma_0^2 L_0 dL_0 = \sigma L dL \quad (6. 161)$$

Observe que, esta expressão corresponde a derivada, dos dois lados da expressão (6. 151). A relação (6. 151) é válida somente para a situações de tensão e deformação uma em situação de carregamento livre (sem propagação da trinca) e a (6. 159) para uma situação de fratura em andamento, ou seja, propagação da trinca.

Se o carregamento for livre de propagação, ou seja, no caso onde tem-se apenas a flexão do corpo de prova, não é possível considerar a dependência de  $L$  com  $L_0$ , porque para fins práticos ela ainda não existe, logo a expressão para a resistência a fratura,  $K_{IRo}$ , não faz sentido nesta situação, por isso é que existe a duplicidade de dependência entre as relações (6. 95) e (6. 163). Observe que, para o caso de um entalhe inicial obtido por fadiga, por exemplo, pode-se considerar o comprimento rugoso, praticamente igual ao comprimento projetado, isto é,  $L = L_0$ , logo, o fator de correção,  $dL/dL_0$ , é praticamente igual a unidade ( $dL/dL_0 = 1$ ), o que significa que,  $K_{IRo} = K_{IC}$ . Portanto, o que o modelo fractal está dizendo é que a variação de  $L$  com  $L_0$ , a ser considerada na fratura, deve acontecer durante a propagação da trinca. Portanto, a rugosidade dada pela derivada,  $dL/dL_0$ , só faz sentido para a situação durante a propagação da trinca. Porque do contrário ela é igual a unidade.

Sendo o módulo de ruptura,  $\sigma_f$ , uma propriedade do material, parece estranho que haja uma dependência desta grandeza com o caminho (rugoso ou projetado) considerado na análise matemática da trinca, acima. Isto pode ser explicado, se for observado que as equações de (6. 146) a (6. 163) correspondem a uma situação de fratura e não uma situação de carregamento livre. Pois no primeiro caso, isto é, na situação de fratura, a resistência do material,  $K_{R0}$ , (retratada aqui pela relação entre a tenacidade a fratura,  $K_{IC}$ , e a rugosidade,  $dL/dL_0$ ), muda, a medida que a trinca se propaga. Isto está perfeitamente de acordo com a idéia intuitiva apresentada pelo gráfico da curva de ensaio, carga,  $X$ , versus deslocamento,  $u$ , conforme mostrado na Figura - 5. 4, Figura - 5. 9 e na Figura - A4. 1, onde a flexibilidade,  $X/u$ , que é a secante a esta curva a partir da origem, varia, a medida que o corpo é fraturado. Uma explicação análoga pode ser considerada, utilizando-se a relação entre o módulo de rigidez do material para o caminho projetado,  $(X/u)_0$ , e o módulo elástico,  $E$ , ao invés de  $K_{IRo}$  e  $K_{IC}$ . Observe que todo esse fato é decorrente da consideração de que a tenacidade a fratura,  $K_{IC} = K_{IC0}$  é uma propriedade e o módulo elástico e o módulo de rigidez,  $E = E_0$ , são iguais independentemente se o caminho considerado na fratura é o projetado ou o rugoso.

## **6. 8 – Campo de Tensão na Ponta de uma Trinca Fractal para os Modos de Fratura I, II e III**

Substituindo (4. 89) em (6. 72) tem-se:

$$\sigma_0 \sim \sigma \left[ 1 + \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2} \right]^{1/4} \quad (6.162)$$

Esse resultado mostra a relação entre o campo de tensão ao redor de uma trinca lisa e rugosa.

Considere, no modelo fractal proposto, a relação entre as tensões projetada,  $\sigma_0$ , e rugosa,  $\sigma$ , dada por:

$$\sigma_0 = \sigma \sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} \quad (6.163)$$

Mas o comprimento rugoso é dado por (4.89) e a rugosidade é dada por (4.97), portanto:

$$\left( \frac{L}{L_0} \right) \frac{dL}{dL_0} = 1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2} \quad (6.164)$$

Usando o fato de que:

$$\sqrt{\frac{L}{L_0} \frac{dL}{dL_0}} = \sqrt{1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}} \quad (6.165)$$

Logo substituindo (6.165) em (6.163) tem-se:

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, l_0, H) = \sigma_{ij}(r, \theta) \left( \frac{m^*}{\pi} \right)^{1/2} \sqrt{1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}} \quad (6.166)$$

Substituindo (6.82) em (6.166) tem-se:

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, l_0, H) = \left( \frac{m^*}{\pi} \right)^{1/2} \sqrt{1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}} \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta, \rho) \quad (6.167)$$

Sabendo que:

$$r \sim L \Rightarrow r \sim \frac{L}{L_0} L_0 \quad (6.168)$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sim \left( \frac{L_0}{L} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{L_0}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} \sim \left( \frac{L_0}{L} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r_0}} \quad (6.169)$$

Portanto a dependencia do campo de tensão na ponta da trinca é

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, l_0, H) \sim \left( \frac{m^*}{\pi} \right)^{1/2} \sqrt{1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}} \left( \frac{L_0}{L} \right)^{1/2} \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\pi r_0}} f(\theta) \quad (6.170)$$

ou

$$\sigma_{0ij}(r, \theta, l_0, H) \sim \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}}}{\left(1+\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}\right)^{1/4}} \frac{K_{I,II,III}}{\sqrt{2\pi r_0}} f(\theta) \quad (6.171)$$

Para cada um dos Modos de Fratura tem-se:

i) Para o Modo I:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0xx} \\ \tau_{0xy} \\ \sigma_{0yy} \end{bmatrix} (r, \theta, l_0, H) = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (6.172)$$

Logo acrescentando a dependencia do raio de curvatura tem-se:

$$\sigma_{0xx} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.173)$$

$$\sigma_{0yy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.174)$$

$$\tau_{0xy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.175)$$

ii) Para o Modo II:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0xx} \\ \sigma_{0xy} \\ \sigma_{0yy} \end{bmatrix} (r, \theta, l_0, H) = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \end{bmatrix} \quad (6.176)$$

Logo acrescentando a dependencia do raio de curvatura tem-se:

$$\sigma_{0xx} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \left(\frac{\rho}{2r}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.177)$$

$$\sigma_{0yy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\}, \quad (6.178)$$

$$\tau_{0,xy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.179)$$

iii) Para o Modo III:

$$\begin{bmatrix} \tau_{0,xy} \\ \tau_{0,yx} \end{bmatrix} (r, \theta, l_0, H) = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (6.180)$$

Logo acrescentando a dependencia do raio de curvatura tem-se:

$$\tau_{0,xy} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\}, \quad (6.181)$$

$$\tau_{0,yx} = \left(\frac{m^*}{\pi}\right)^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sqrt{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{2H-2}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\}, \quad (6.182)$$

Estas são as equações do campo de tensão elástico modificado pela fractalidade da trinca rugosa.

## 6. 9 – A teoria fractal aplicada as equações de energia e taxas de energia ao fenômeno da fratura estável ou quase-estática

Para adicionar o problema da rugosidade, a partir de agora, será inserido nas equações da MFC o modelo fractal da superfície rugosa de fratura, desenvolvido na secção - 4.9 do Capitulo IV, com a finalidade de descrever o processo de interação geométrico da trinca com a microestrutura do material.

### 6.9.1 – A relação entre as energias de deformação rugosa, $U_L$ , e projetada, $U_{L_0}$ , em termos da geometria fractal

A energia de deformação sobre a superfície rugosa,  $U_L$ , ou projetada,  $U_{L_0}$ , é definida de forma análoga as equações (5. 13) e (5. 42), como:

$$U_L \equiv -\frac{\pi\sigma^2 L^2}{2E} = U_{L_0} \equiv -\frac{\pi\sigma_0^2 L_0^2}{2E_0} \quad (6.183)$$

Substituindo a equação (4. 89) na relação anterior (6. 92) obtém-se:

$$U_{L_0} = U_L = -\frac{\pi\sigma^2 L_0^2}{2E} \left[ 1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2} \right] \quad (6.184)$$

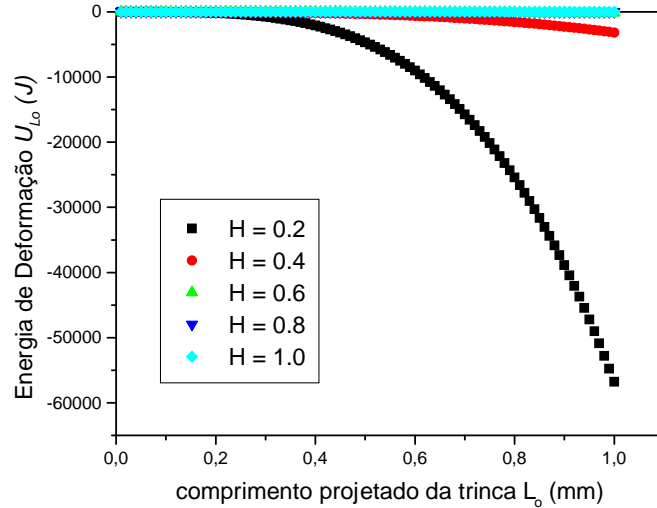


Figura - 6. 7 Gráfico da curva  $U_o$  obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.

cujo gráfico é mostrado na Figura - 6. 7. Observe que, embora o lado direito da equação (6. 91) está expresso em termos de  $L_0$ , e (6. 184) também está expresso em termos de  $L_o$ , contudo, as tensões de fratura,  $\sigma$ , e  $\sigma_0$ , sobre as superfícies de fratura rugosa e projetada não são iguais. O que permanece igual é a força aplicada,  $X$ , sobre o corpo, conforme mostra mais adiante a equação (6. 95).

O gráfico da Figura - 6. 7 mostra a influência do expoente da rugosidade,  $H$ , sobre a energia de deformação,  $U_{L_0}$ . Observe que para  $H \rightarrow 1$ , que corresponde a uma superfície mais lisa, a relação entre a energia de deformação,  $U_{L_0}$ , e o comprimento projetado,  $L_0$ , torna-se cada vez mais linear. Enquanto que para  $H \rightarrow 0$ , que corresponde a uma superfície mais rugosa, a relação entre a energia de deformação,  $U_{L_0}$ , e o comprimento projetado,  $L_0$ , torna-se cada vez mais não-linear. Isto é razoável, porque quanto mais rugosidade, mais deformação (elástica e plástica) por unidade de comprimento.

Portanto, a partir de (6. 184),que usando a equação (4. 89) em (6. 95), tem-se a relação entre os carregamentos sobre a superfície projetada e rugosa:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right]^{1/2}, \quad (6. 185)$$

Usando a equação (6. 151) tem-se que:

$$\frac{\sigma_0^2}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma^2}{E} \left[ 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right], \quad (6. 186)$$

### 6.9.2 – A energia de superfície, $U_{\gamma_0}$ , em termos da geometria fractal

A energia gasta para formar a superfície rugosa,  $U_{\gamma}$ , ou projetada,  $U_{\gamma_0}$ , é definida de forma análoga as equações (5. 14) e (5. 43) é dada da seguinte forma:

$$U_{\gamma} \equiv 2\gamma L = U_{\gamma_0} \equiv 2\gamma_0 L_0 \quad (6. 187)$$

A energia para formar a superfície rugosa é dado por:

$$U_{\gamma_0} = U_{\gamma} = \frac{2\gamma L_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}} \quad (6. 188)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura - 6. 8. Observe que, embora o lado direito de (6. 99) está expresso em termos de  $L_0$ , e (6. 188) também está expresso em termos de  $L_0$ , contudo, as energias de superfície,  $\gamma$  e  $\gamma_0$ , rugosa e projetada não são iguais. O que permanece igual é a força aplicada,  $U_{\gamma}$ , sobre o corpo, conforme mostra a equação (6. 98).

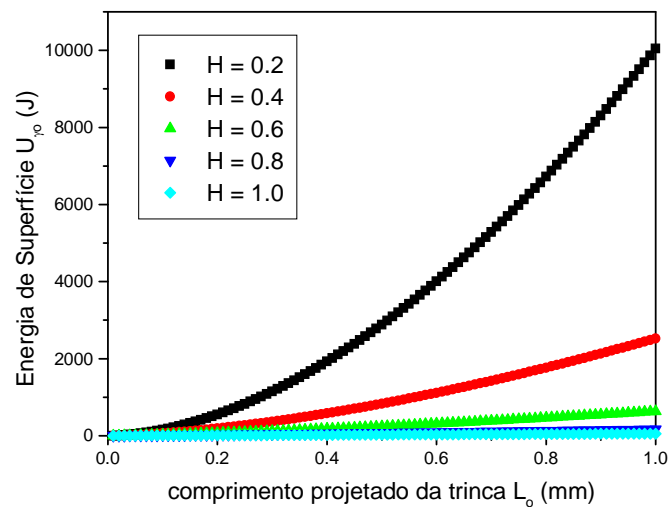


Figura - 6. 8. Gráfico da curva  $U_{\gamma_0}$  obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.

O gráfico da Figura - 6. 8 mostra a influência do expoente da rugosidade,  $H$ , sobre a energia de superfície,  $U_{\gamma_0}$ . Observe que para  $H \rightarrow 1$ , que corresponde a uma superfície mais lisa, a relação entre a energia de superfície,  $U_{\gamma_0}$ , e o comprimento projetado,  $L_0$ , torna-se cada vez mais linear. Enquanto que para  $H \rightarrow 0$ , que corresponde a uma superfície mais rugosa, a relação entre a energia de superfície,  $U_{\gamma_0}$ , e o comprimento projetado,  $L_0$ , torna-se cada vez mais não-linear. Isto é razoável porque quanto mais rugoso é o caminho mais energia ele possuirá, ou mais energia será necessária para formá-lo.

e ainda usando (6. 129) tem-se que:

$$\gamma_0 = \gamma \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}}, \quad (6. 189)$$

Observe que o que acontece para a energia de superfície,  $U_{\gamma_0}$ , acontece para a energia específica de superfície,  $\gamma_0$ , visto que a relação entre elas é dada de forma análoga a equação (6. 94).

Portanto a resistência a propagação da trinca (curva  $J-R$ ), que é definida para a superfície de projeção plana, passa a ser dada pela substituição de (6. 99) e (4. 97) em (6. 125):

$$R_0 = 2\gamma \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}} \quad (6. 190)$$

### 6.9.3 – O balanço energético de Griffith em termos da geometria fractal

De posse dos resultados (6. 184) e (6. 188) pode-se agora somar as contribuições de  $U_{L_0}$  e  $U_{\gamma_0}$  para reproduzir o gráfico do balanço energético de Griffith dado pela equação (5. 44) dentro da nova visão fractal, conforme mostra a Figura - 6. 9.

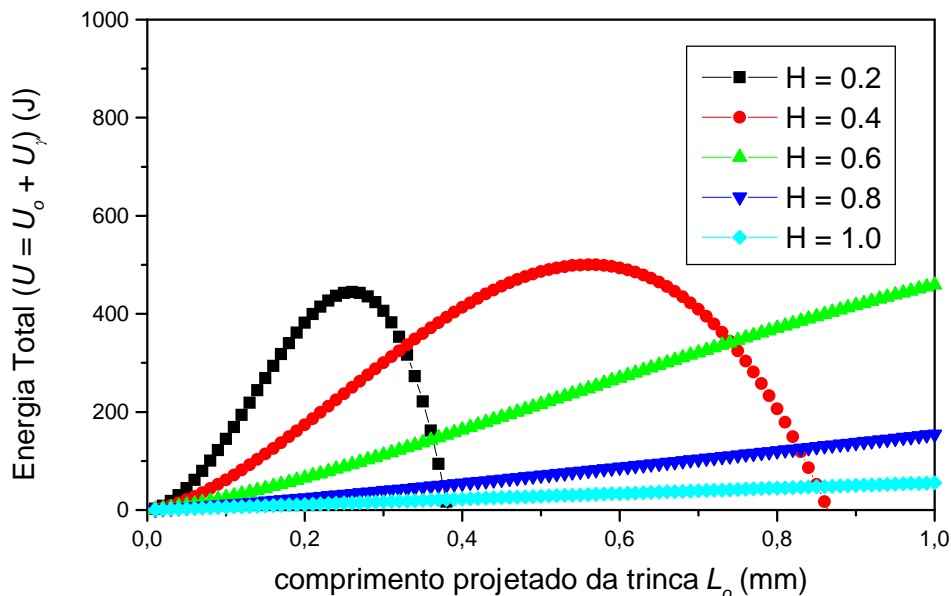


Figura - 6. 9. Balanço energético de Griffith na visão da geometria fractal da superfície rugosa de fratura.

Ou seja,



$$U_T = U_i + U_L + U_\gamma - F. \quad (6.191)$$

e

$$\frac{d}{dL_f} \left( U_i + -\frac{\pi\sigma^2 L_0^2}{2E} \left[ 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right] + \frac{2\gamma L_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}} - F \right) \leq 0. \quad (6.192)$$

Observe que este gráfico é análogo aos gráficos do balanço de Griffith, porém distorcido em relação a estes devido a rugosidade da superfície de fratura. Observe que a “rugosidade” prevista para a trinca tende a aumentar o tamanho crítico de fratura,  $L_{0C}$ , para um mesmo valor de energia total em relação a um material com fratura lisa, ( $L_{iC} \leq L_C$ ). Isto porque a rugosidade é resultante da interação da trinca com a microestrutura do material. Logo, se o material possui um microestrutura que resulta em uma trinca mais rugosa, ele terá a tendência a ter um tamanho crítico de fratura real,  $L_{0C}$ , maior.

#### 6.9.4 – A taxa de energia elástica liberada, $G_0$ , em termos da geometria fractal

A taxa de energia elástica liberada,  $G_0$ , pode ser escrita em termos de  $L_0$  como:

$$G_0 = \frac{\pi\sigma^2 L_0}{E} \left[ 1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right] \quad (6.193)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura - 6. 10.

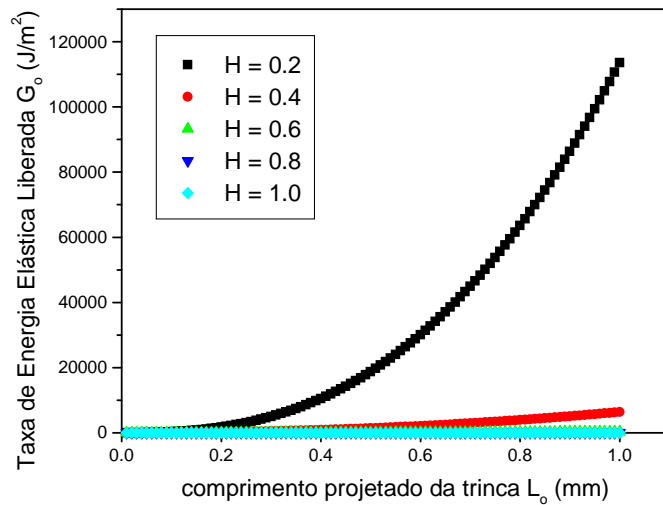


Figura - 6. 10. Gráfico da curva  $G$  ou  $J$  obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.

O gráfico da Figura - 6. 10 mostra a influência do expoente da rugosidade,  $H$ , sobre a taxa de energia liberada,  $G_o$ . Observe que para  $H \rightarrow 1$ , que corresponde a uma superfície mais lisa, a relação entre a taxa de energia liberada,  $G_o$ , e o comprimento projetado,  $L_o$ , torna-se cada vez mais linear. Enquanto que para  $H \rightarrow 0$ , que corresponde a uma superfície mais rugosa, a relação entre a taxa de energia liberada,  $G_o$ , e o comprimento projetado,  $L_o$ , torna-se cada vez mais não-linear. Isto é razoável, porque quanto mais rugoso o caminho, maior é este caminho e mais energia elástica é liberada.

### 6.9.5 – A curva $G-R$ de resistência a propagação da trinca em termos da geometria fractal

A partir de agora será considerado o caso elasto-plástico em que há uma pequena deformação plástica na ponta da trinca, isto é, quando  $\gamma = \gamma_e + 1/2\gamma_p$ . É importante lembrar que no caso da secção – 5.5 do Capítulo – V, a superfície verdadeira de fratura em um monocristal era considerada lisa. Logo, a energia elástica mais a energia plástica de superfície,  $\gamma_e + 1/2\gamma_p$ , naquele caso era igual a energia de superfície plana,  $\gamma_{eff}$ , ou seja,  $\gamma_{eff} = \gamma_e + 1/2\gamma_p$ . Neste caso de fratura irregular, ou rugosa, acontece de forma diferente, porque a verdadeira superfície de fratura não é mais lisa, logo deve-se ter  $\gamma = \gamma_{eff}$  e não igual a  $\gamma_o$  (projetado) porque a definição de  $\gamma_o$  tornou-se agora um artifício matemático para satisfazer a equivalência energética sobre uma trinca projetada no plano, que na verdade não existe. Portanto a resistência a propagação da trinca (curva  $J-R$ ), que é definida para a superfície de projeção plana, passa a ser dada pela substituição de (6. 99) e (4. 97) em (6. 125):

$$R_0 = 2\gamma \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}} \quad (6. 194)$$

Fazendo  $G_o = R_0$  (critério de Irwin-Orowan) pode-se igualar as relações (6. 193) com (6. 190) e obter:

$$\frac{\pi\sigma^2 L_0}{E} \left[ 1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right] = 2\gamma \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}} \quad (6. 195)$$

que após manipulação algébrica fica

$$\frac{\pi\sigma^2 L_0}{E} = 2\gamma \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}} . \quad (6.196)$$

logo

$$L_0 = \frac{2\gamma E / \pi\sigma^2}{\sqrt{2\left(1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}} . \quad (6.197)$$

Portanto, a tensão de fratura para uma trinca rugosa é dada por:

$$\sigma_f = \frac{\sqrt{2\gamma E}}{\sqrt{\pi L_{0c} \sqrt{2\left(1 + \left(\frac{l_0}{L_{0c}}\right)^{2H-2}\right)}}} . \quad (6.198)$$

Chamando-se de  $L_c = 2\gamma E / \pi\sigma^2$  recupera-se a relação (6.104), agora envolvendo  $\gamma = \gamma_e + 1/2\gamma_p$ , isto é:

$$L_{0c} = \frac{L_c}{\sqrt{2\left(1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}} \quad (6.199)$$

A relação (6.199) mostra que o tamanho crítico de fratura,  $L_{0c}$ , também deve possuir uma rugosidade subjacente devido a microestrutura do material.

### 6.9.6 – A resistência e a tenacidade à fratura, a tensão de fratura em termos da geometria fractal

A resistência a fratura,  $K_{IR}$  é uma grandeza definida durante a propagação da trinca. De acordo com o [Postulado II](#), mencionado na secção – 6.3, pode-se escrevê-la para o caminho projetado a partir de (6.141) como:

$$K_{IR_0} = \sigma_{f_0} \sqrt{L_0} = \sqrt{R_0 E_0} . \quad (6.200)$$

Logo, substituindo a relação (6.190) em (6.305) tem-se:

$$K_{IR_0} = \sqrt{2\gamma_{eff} E_0 \frac{1 + (2-H)\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}}{\sqrt{2\left(1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}}} \quad (6.201)$$

multiplicando e dividindo (6.306) por  $E$  tem-se:

$$K_{IR0} = \sqrt[2]{2\gamma_{eff} E \frac{E_0}{E} \frac{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}}{\sqrt{2\left(1+\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}}} \quad (6. 202)$$

escrevendo (6. 307) em termos de (5. 82) a relação entre  $K_R$  e  $K_{IC}$  pode ser calculada em termos da geometria fractal a partir da relação (6. 307) como:

$$K_{IR0} = \sqrt[2]{K_{IC}^2 \frac{E_0}{E} \frac{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}}{\sqrt{2\left(1+\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}}} \quad (6. 203)$$

considerando que  $E_0 = E$  é uma propriedade do material tem-se a relação entre a resistência,  $K_{R_0}$ , do material durante a propagação da trinca e a sua tenacidade a fratura,  $K_{IC}$ , dado por:

$$K_{IR0} = K_{IC} \sqrt[2]{\frac{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}}{\sqrt{2\left(1+\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}}} \quad (6. 204)$$

Esta relação mostra o efeito da rugosidade da superfície de fratura sobre a resistência a fratura do material, que aumenta medida que a trinca se propaga, onde a tenacidade a fratura,  $K_{IC}$ , é apenas o valor inicial desta resistência. Isto está perfeitamente de acordo com as observações experimentais. Analogamente de (6. 163), (4. 96) e (4. 97) tem-se que:

$$\sigma_{0f} = \sqrt[2]{\sigma_f \frac{1+(2-H)\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}}{\sqrt{2\left(1+\left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}\right)}}} \quad (6. 205)$$

Observe que a relação (6. 310) mostra que a tensão de fratura,  $\sigma_{0f}$ , tende a aumentar com o aumento do comprimento da trinca,  $L_0$ . Isto significa que o material se torna mais resistente após o encruamento e a formação da zona de processo, porém, menos tenaz.

### 6.9.7 – A curva $J$ - $R$ de resistência ao crescimento da trinca em termos da geometria fractal

O modelo fractal descrito ao longo deste trabalho foi elaborado estendendo-se a mecânica da fratura elástica linear (onde se considera a definição da taxa de energia elástica liberada,  $G$ ) para a mecânica da fratura elástica não-linear (onde se considera a taxa de energia elasto-plástica liberada,  $J$ ). Esta extensão foi realizada acrescentando-se apenas o termo de energia plástica de superfície,  $\gamma_p$ , devido a Irwin e Orowan juntamente com a correção da rugosidade nas equações. Isto é perfeitamente aceitável, porque a definição de  $J$  é uma integral que não depende do caminho, ou seja, utiliza-se a teoria elástica não-linear, que é um processo reversível para retratar a teoria elasto-plástica, que é um processo irreversível. Esta equivalência é obtida com base na teoria da plasticidade de Hencky (ATKINS 1985 Cap. 4, secção 4.5, p. 318). Portanto passar de  $G = 2\gamma_e dL / dL_0$  para  $J = 2\gamma_{eff} dL / dL_0$  é perfeitamente válido para os propósitos do modelo apresentado.

Portanto a partir de (5. 96), pode-se definir  $J_0$  para a superfície projetada:

$$J_0 \equiv \frac{d}{dL_0} (F - U_{L_0} - U_{pl_0}) \quad (6. 206)$$

Utilizando-se o Postulado III e a regra de derivação da cadeia tem-se:

$$J_0 \equiv \frac{d}{dL} (F - U_L - U_{pl}) \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 207)$$

Fazendo uso do Postulado IV pode-se definir  $J$  para o caminho rugoso como sendo:

$$J \equiv \frac{d}{dL} (F - U_L - U_{pl}) \quad (6. 208)$$

E finalmente a equação (6. 207) fica:

$$J_0 \equiv J \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 209)$$

Esta equação mostra como a curva  $J$  também pode ser modelada pela rugosidade da trinca, conforme será mostrado a seguir.

### 6.9.8 – O efeito da fração volumétrica irregular efetiva e da rugosidade na equação de energia do campo de tensão elastostático

A partir de agora uma abordagem nova envolvendo a aplicação da Mecânica dos Meios Irregulares ao problema dos potenciais vetoriais da fratura será descrita

Uma vez que o tensor das tensões  $\sigma_0$  imposta a um material satisfaz a definição de fluxo generalizado dada em (2. 45) e corresponde, neste caso, ao um fluxo de momentum,

onde  $\rho_x = \rho_{\bar{p}}$  para  $X \equiv \bar{p}$

$$J_p \rightarrow \sigma_0 \equiv \frac{d}{d\bar{A}} \left( \frac{d\bar{p}}{dt} \right), \quad (6.210)$$

a equação do campo de tensão elastostático é dada por (2. 109) considerando o termo dinâmico nulo, ou seja:

$$\frac{d}{dt}(\rho_x \zeta) = 0 \quad (6.211)$$

logo a equação (2. 107) fica então dada por:

$$\sum \vec{f}_v + \sum \vec{f}_s = 0 \quad (6.212)$$

ou simplesmente substituindo  $\vec{f}_s = \nabla \cdot \sigma_0$  na equação de movimento (6. 212) tem-se:

$$f_{v_0} + \nabla \cdot \sigma_0 = 0 \quad (6.213)$$

multiplicando esta equação (6. 213) pelo deslocamento  $\vec{u}$  tem-se:

$$f_{v_0} \vec{u} + \vec{u} \nabla \cdot \sigma_0 = 0 \quad (6.214)$$

mas considerando a seguinte expressão para a derivada do produto:

$$\nabla \cdot (\sigma_0 \vec{u}) = \frac{1}{2} \sigma_0 (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) + \vec{u} (\nabla \cdot \sigma_0) \quad (6.215)$$

logo pode-se re-escrever o segundo termo da equação (6. 214) como:

$$\vec{u} (\nabla \cdot \sigma_0) = \nabla \cdot (\sigma_0 \vec{u}) - \frac{1}{2} \sigma_0 (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \quad (6.216)$$

definindo o tensor deformação para pequenas deformações infinitesimais,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla) \quad (6.217)$$

sendo a energia de deformação dada por:

$$W_0 = \int \sigma_0 : d\mathbf{E} = \int \sigma : d\mathbf{E}_0 \quad (6.218)$$

onde a sua densidade de energia de deformação é dada por:

$$W_0 \equiv \frac{dU_{V_0}}{dV_0} = \int \sigma_0 : d\mathbf{E} \quad (6.219)$$

onde

$$W \equiv \frac{dU_v}{dV} = \int \sigma : d\mathbf{E} \quad (6.220)$$

logo para  $U_{V_0} = U_V$  tem-se:

$$\frac{dU_{V_0}}{dV_0} = \frac{dU_{V_0}}{dV} \frac{dV}{dV_0} \Rightarrow W_0 = W \frac{dV}{dV_0} \quad (6. 221)$$

onde

$$\begin{aligned} U_{V_0} &= \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{V_0} (\boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E}) dV_0 = \\ &= \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_V (\boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E}) \frac{dV_0}{dV} dV = \\ U_V &= \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_V (\boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E}) dV \end{aligned} \quad (6. 222)$$

então substituindo (6. 217) na equação (6. 216) tem-se:

$$\bar{\mathbf{u}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) - \int \boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E} \quad (6. 223)$$

e substituindo (6. 223) na equação de movimento em (6. 214) pode-se reescrevê-la como sendo:

$$f_{V_0} \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) - \int \boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E} = 0 \quad (6. 224)$$

substituindo (6. 219) em (6. 224) tem-se:

$$-f_{V_0} \bar{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) - \frac{dU_{V_0}}{dV_0} \quad (6. 225)$$

definindo o fluxo de energia devido ao trabalho das forças de volume de

$$\Pi_0 = - \int_{V_0} f_{V_0} \bar{\mathbf{u}} dV_0 = - \int_{V_0} f_{V_0} \bar{\mathbf{u}} \frac{dV_0}{dV} dV = - \int_V f_V \bar{\mathbf{u}} dV \quad (6. 226)$$

chamando sua densidade do fluxo de energia externa de :

$$P_0 \equiv - \frac{d\Pi_0}{dV_0} = f_{V_0} \bar{\mathbf{u}} \quad (6. 227)$$

onde

$$P \equiv - \frac{d\Pi}{dV} = f_V \bar{\mathbf{u}} \quad (6. 228)$$

logo para  $\Pi_0 = \Pi$  tem-se:

$$\frac{d\Pi_0}{dV_0} = \frac{d\Pi_0}{dV} \frac{dV}{dV_0} \Rightarrow P_0 = P \frac{dV}{dV_0} \quad (6. 229)$$

substituindo (6. 227) em (6. 225) tem-se:

$$\frac{d\Pi_0}{dV_0} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) - \frac{dU_{V_0}}{dV_0} = 0 \quad (6. 230)$$

a energia devido ao campo de tensão é dada por:

$$\begin{aligned} F_0 &= \int_{V_0} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) dV_0 = \int_{\partial V_0} \boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{S}}_0 \\ &= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) \frac{dV_0}{dV} dV = \int_{\partial V} T_i u_i \frac{dS_0}{dS} dS \end{aligned} \quad (6.231)$$

onde a sua densidade de energia do campo de tensão  $\boldsymbol{\sigma}_0$  é dada por:

$$E_0 \equiv \frac{dF_0}{dV_0} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}}) = \frac{d}{dV_0} \int_{\partial V_0} T_{i0} u_i dS_0 = \frac{d}{dV_0} \int_{\partial V} T_i u_i \frac{dS_0}{dS} dS \quad (6.232)$$

onde

$$E \equiv \frac{dF}{dV} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{u}}) = \frac{d}{dV} \int_{\partial V} T_i u_i dS = \frac{d}{dV} \int_{\partial V_0} T_i u_i \frac{dS}{dS_0} dS_0 \quad (6.233)$$

logo para  $F_0 = F$  tem-se:

$$\frac{dF_0}{dV_0} = \frac{dF}{dV} \frac{dV}{dV_0} \Rightarrow E_0 = E \frac{dV}{dV_0} \quad (6.234)$$

substituindo (6.232) em (6.230) tem-se:

$$\frac{d\Pi_0}{dV_0} = \frac{dF_0}{dV_0} - \frac{dU_{V_0}}{dV_0} \Rightarrow -P_0 = E_0 - W_0 \quad (6.235)$$

e

$$\Pi_0 = F_0 - U_{V_0} \quad (6.236)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0}{dV_0} &= \frac{dF_0}{dV_0} - \frac{dU_{V_0}}{dV_0} \\ &= \frac{dF_0}{dV} \frac{dV}{dV_0} - \frac{dU_{V_0}}{dV} \frac{dV}{dV_0} \\ \frac{d\Pi_0}{dV_0} \frac{dV}{dV_0} &= \left( \frac{dF_0}{dV} - \frac{dU_{V_0}}{dV} \right) \frac{dV}{dV_0} \end{aligned} \quad (6.237)$$

logo

$$\Pi = F - U_V \quad (6.238)$$

e

$$\frac{d\Pi}{dV} = \frac{dF}{dV} - \frac{dU_V}{dV} \Rightarrow -P = E - W \quad (6.239)$$

usando (6.218) e (6.231) em (6.236) tem-se:



$$\frac{d\Pi_0}{dV_0} = \frac{d}{dV_0} \int_{\partial V_0} \boldsymbol{\sigma}_0 \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_0 - \int \boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E} \quad (6.240)$$

com a correção da *rugosidade* da trinca no campo de tensão para o tensor:  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma} d\bar{\mathbf{A}} / d\bar{\mathbf{A}}_0$  tem-se:

$$\frac{dU_{V_0}}{dV_0} = \frac{dU_{V_0}}{dV} \frac{dV}{dV_0} = \int \boldsymbol{\sigma} \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{d\bar{\mathbf{A}}_0} : d\mathbf{E} \quad (6.241)$$

considerando a *rugosidade* da trinca e a *fração volumétrica efetiva* do material para uma circuitação  $\partial V$  em torno da trinca, obviamente também rugosa devido a trinca a equação (6.240) torna-se:

$$\Pi_0 = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{d\bar{\mathbf{A}}_0} \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{dS_0}{dS} dS - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_V \left( \int \boldsymbol{\sigma} \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{d\bar{\mathbf{A}}_0} : d\mathbf{E} \right) \frac{dV_0}{dV} dV \quad (6.242)$$

sabendo que:

$$W_0 = \int \boldsymbol{\sigma}_0 : d\mathbf{E} = \int \boldsymbol{\sigma} \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{d\bar{\mathbf{A}}_0} : d\mathbf{E} \quad (6.243)$$

tem-se:

$$\Pi_0 = \int_{\partial V} T_i \frac{dA}{dA_0} u_i \frac{dS_0}{dS} dS - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_V W_0 \frac{dV_0}{dV} dV \quad (6.244)$$

Esta é a expressão da energia potencial desenvolvida por um campo de tensão elastostático.

Reduzindo-se a dimensionalidade do problema de 3D para 2D em (6.240) e (6.244) conforme mostra a Figura - 6.11, tem-se:

$$-\Pi_0 = \int_{\partial A_{\perp 0}} T_{i0} u_i ds_0 - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp 0}} W_0 dA_{\perp 0} \quad (6.245)$$

onde  $A_{\perp 0}$  é o elemento de área perpendicular ao plano da trinca. Novamente considerando a *rugosidade* da trinca e a *fração volumétrica irregular efetiva* do material

$$-\Pi_0 = \int_{\partial A_{\perp}} T_i \frac{dL}{dL_0} u_i \frac{ds_0}{ds} ds - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp}} W_0 \frac{dA_{\perp 0}}{dA_{\perp}} dA_{\perp} \quad (6.246)$$

como  $dA_{\perp 0} = dx dy$ , tem-se:

$$-\Pi_0 = \int_{\partial A_{\perp 0}} T_i \frac{dL}{dL_0} u_i ds_0 - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp 0}} W_0 dx dy \quad (6.247)$$

como  $dL/dL_0 = 1/\cos \theta_r$ , e na trinca  $ds/ds_0 = 1/\cos \theta_r$ , apenas na trinca tem-se:

$$-\Pi_0 = \int_{\partial A_{\perp 0}} (T_i / \cos \theta_r) u_i ds_0 - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp 0}} W_0 dx dy \quad (6.248)$$

mas  $T_{i0} = T_i / \cos \theta_r$ , logo

$$-\Pi_0 = \int_{\partial A_{L_0}} T_{i0} u_i ds_0 - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{L_0}} W_0 dx dy \quad (6.249)$$

Esta é equação da energia potencial elasto-plástica liberada por ocasião de uma fratura em um material dúctil para o caso de uma geometria bi-dimensional.

### 6.9.9 - A integral- $J_0$ de Eshelby-Rice para os caminhos de trinca rugoso e projetado no plano

O conceito de integral- $J$  de Eshelby-Rice nasceu como uma extensão não-linear da definição dada por Irwin-Orowan. Neste contexto a energia potencial  $\Pi_0$  é definida como:

$$\Pi_0 \equiv - \int (dF - dU_{V_0}) \quad (6.250)$$

Sabendo que  $dF = Xdu$ , pode-se escrever

$$\Pi_0 \equiv \int (dU_{V_0} - Xdu) \quad (6.251)$$

onde  $U_{V_0} \equiv \int W dV_0$  é a integral da densidade de energia  $W$  é dada por

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (6.252)$$

onde  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são os campos de tensão e de deformação ao redor da ponta da trinca, respectivamente.

A integral- $J$  de Eshelby-Rice independente do caminho ao redor da trinca é definida a partir de (6.236) ou (6.238) como:

$$J_0 \equiv - \frac{d\Pi_0}{dL_0} = \frac{d}{dL_0} (F_0 - U_{V_0}) \quad (6.253)$$

Por conveniência, a taxa de energia elasto-plástica é reescrita como:

$$J_0 \equiv - \frac{d\Pi_0}{dL_0} = \frac{Xdu}{dL_0} - \frac{dU_{V_0}}{dL_0} \quad (6.254)$$

onde  $Xdu$  é o trabalho realizado pelas forças externas aplicado a um contorno  $C$  ao redor da ponta da trinca, mas fora da zona plástica, conforme mostra a Figura - 6.11. Nas condições de equilíbrio de cargas, a energia  $\Pi_0$  no volume  $V_0$  envolvido pelo contorno  $C$  é dado por,

$$\Pi_0 = \int_{V_0} W dV_0 - \int_C \vec{T} \cdot \vec{u} ds \quad (6.255)$$

onde  $s$  é a distancia ao longo do contorno  $C$  e a integração é feita no sentido anti-horário. De acordo com a equação(6.254), tem-se

$$J_0 \equiv -\frac{d\Pi_0}{dL_0} = -\frac{d}{dL_0} \left( \int_V W dV_0 - \int_C \vec{T} \cdot \vec{u} ds \right) \quad (6.256)$$

ou a partir de (6. 245) obtém-se:

$$J_0 = -\frac{d\Pi}{dL_0} = \frac{d}{dL_0} \left[ \int_{\partial A_{\perp 0}} T_{0i} u_i ds_0 - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp 0}} W_0 dA_{\perp 0} \right] \quad (6. 257)$$

No caso da deformação plana, onde a superfície de fratura é caracterizada por uma trinca com comprimento  $\Delta L_0$ , e uma espessura unitária do corpo tem-se que  $dV = dx dy$  e

$$J_0 \equiv -\frac{d\Pi_0}{dL_0} = -\frac{d}{dL_0} \left( \int_V W dx dy - \int_C \vec{T} \cdot \vec{u} ds \right) \quad (6.258)$$

onde  $dL_0$  é o crescimento incremental do comprimento da trinca. Então,

$$J_0 \equiv -\frac{d\Pi_0}{dL_0} = -\left( \int_V W \frac{dx}{dL_0} dy - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial L_0} ds \right) \quad (6.259)$$

Para um contorno fixo  $C$ ,  $d/dL_0 = -d/dx$ , a integral- $J_0$  pode ser escrita somente em termos do contorno,

$$J_0 = \int_C W dy - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \quad (6.260)$$

Esta é a integral- $J$  para o caminho de trinca projetado no plano. Ou a partir de (6. 246) tem-se:

$$J_0 = -\frac{d\Pi}{dL_0} = \frac{d}{dL_0} \left[ \int_{\partial A_{\perp}} T_i \frac{dL}{dL_0} u_i \frac{ds_0}{ds} ds - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{A_{\perp}} W_0 \frac{dA_{\perp 0}}{dA_{\perp}} dA_{\perp} \right] \quad (6. 261)$$

conforme mostra a Figura - 6.11,

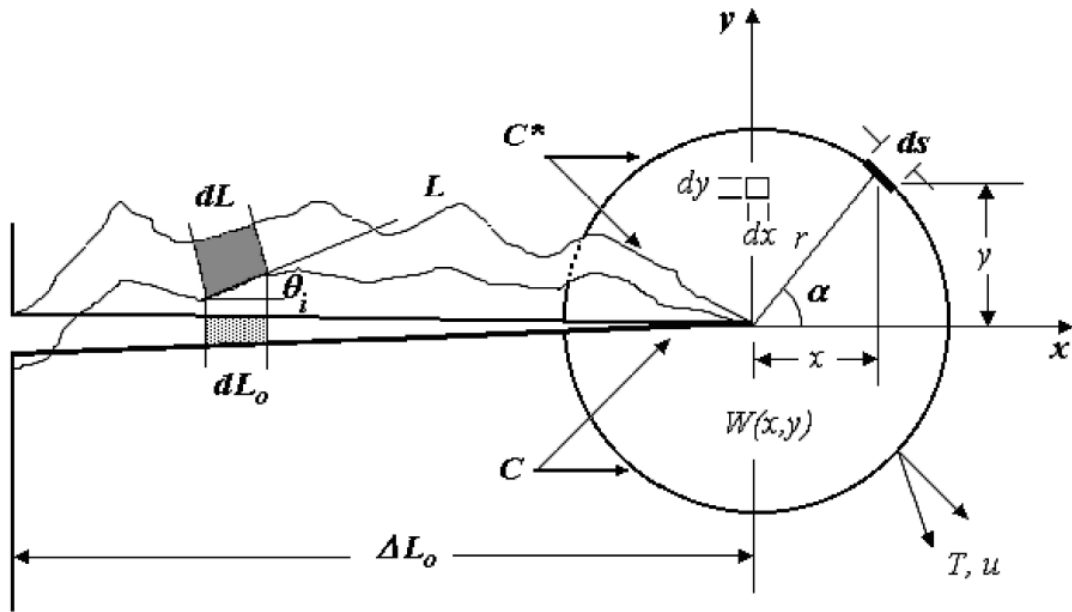


Figura - 6.11. Contorno ao redor da ponta de uma trinca onde é definida a integral -  $J$ .

Agora, a teoria da integral J-R de Eshelby-Rice será modificada para incluir a rugosidade da superfície de fratura baseado em considerações de fractal da Mecânica da Fratura. Portanto, para descrever o processo de dissipação de energia em um caminho de trinca rugoso é necessário:

I) Postular que a energia para criar a superfície de fratura no caminho rugoso é a mesma que a energia no caminho da trinca projetada,  $L_0$ , , então,  $U_{v0} = U_v$  e  $\Pi_0 = \Pi$  (esta é a equivalência previamente proposta por Irwin).

II) Postular que os formalismos matemáticos da Mecânica de Fratura são invariantes em um caminho de trinca rugoso e em um caminho de trinca projetada.

Utilizando-se a correção da *rugosidade* para o problema da fratura, a taxa de energia elasto-plástica liberada é definida a partir de (6. 253) como:

$$J_0 \equiv -\frac{d\Pi_0}{dL_0} = \frac{d}{dL}(F - U_v) \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 262)$$

onde a partir de (6. 246) obtém-se:

$$J_0 = -\frac{d\Pi}{dL_0} = \frac{d}{dL} \left[ \int_{\partial A_{10}} T_i \frac{dL}{dL_0} u_i \frac{ds_0}{ds} ds - \lim_{\Gamma^* \rightarrow 0} \int_{V_0} W_0 \frac{dA_{\perp 0}}{dA_{\perp}} dA_{\perp} \right] \frac{dL}{dL_0} \quad (6. 263)$$

Observe que:

$$\frac{d}{dL} \left( T_i \frac{dL}{dL_0} u_i \frac{ds_0}{ds} ds \right) = T_i \frac{du_i}{dL_0} \frac{ds_0}{ds} ds = -T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \cos \theta_r ds \quad (6.264)$$

onde  $d/dL_0 = -d/dx = -(1/\cos \theta_r) d/dx^*$  e que:

$$dA_{\perp 0} \equiv dxdy = dx^* dy^* \equiv dA_{\perp} \quad (6.265)$$

e ainda que:

$$\frac{d}{dL} \left( \frac{dA_{\perp 0}}{dA_{\perp}} dA_{\perp} \right) = \frac{d}{dL} (dA_{\perp 0}) = \frac{d}{dx} (dxdy) \quad (6.266)$$

como  $d/dL = -d/dx^*$

$$\frac{d}{dL} (dx^* dy^*) = -dy^* = dy \cos \theta_r \quad (6.267)$$

Reescrevendo as condições

$$\frac{dx}{dL_0} = \frac{dx}{dL} \frac{dL}{dL_0}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial L_0} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial L} \frac{dL}{dL_0} \quad (6.268)$$

e substituindo na equação (6.259), sobre o mesmo volume  $V_0 = V$  e contorno  $C$  (veja Figura 6.11), pode-se escrever:

$$J_0 = - \left( \int_V W \frac{dx}{dL} \frac{dL}{dL_0} dy - \int_C \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial L} \frac{dL}{dL_0} ds \right) \quad (6.269)$$

logo

$$J_0 = - \frac{d\Pi}{dL_0} = \frac{d}{dL} \left[ \int_{\partial A_{\perp 0}} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x^*} ds - \int_{V_0} W_0 dx^* dy^* \right] \frac{dL}{dL_0} \quad (6.270)$$

observe que  $dA_{\perp 0}/dL_0 = -dy$  e que  $dA_{\perp}/dL = -dy^*$ .

Portanto,

$$J_0 = \left[ \int_{V_0} W_0 dy \cos \theta_r - \int_{C^*} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \cos \theta_r ds \right] \frac{dL}{dL_0} \quad (6.271)$$

Este resultado é a base da teoria de curva J-R com rugosidade fractal a ser desenvolvida na secção 6.10 deste capítulo e que corrobora a aplicação da Mecânica dos Meios Irregulares a Mecânica da Fratura.

A partir do segundo postulado, a nova integral- $J$  sobre o caminho da trinca rugosa é dado por:

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dL} = -\frac{d}{dL} \left( \int_V W dx^* dy^* - \int_C \vec{T} \cdot \vec{u} ds \right), \quad (6.272)$$

ou

$$J \equiv -\frac{d\Pi}{dL} = -\left( \int_V W \frac{dx^*}{dL} dy^* - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial L} ds \right), \quad (6.273)$$

onde o símbolo (\*) representa as coordenadas com respeito ao caminho rugoso. Portanto, de forma análoga a integral- $J$  para o caminho de trinca projetada dado pela equação(6.260), uma vez que  $d/dL = -d/dx^*$ , tem-se

$$J = \int_C W dy^* - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^*} ds. \quad (6.274)$$

retornando a equação(6.254) e considerando o primeiro postulado ao longo do caminho projetado junto com a regra de derivação da cadeia, pode-se substituir a equação (6.273) nesta equação, obtendo-se:

$$J_o \equiv -\frac{d\Pi}{dL} \frac{dL}{dL_o} = -\left( \int_V W \frac{dx^*}{dL} dy^* - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial L} ds \right) \frac{dL}{dL_o} \quad (6.275)$$

Comparando a equação(6.269) com a equação(6.275) e considerando que o caminho rugoso da trinca é um resultado de uma transformação no volume da trinca, análogo à “transformação do padeiro” da trinca projetada sobre o plano Euclidiano, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} dx^* dy^* &= \frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(x, y)} dx dy \\ \frac{dx^*}{dL} dy^* \frac{dL}{dL_o} &= \frac{dx}{dL} \frac{dL}{dL_o} dy \end{aligned} \quad (6.276)$$

a qual mostra a equivalência entre os elementos de volume, útil ao problema da deformação plástica.

$$dV = dx^* dy^* = dx dy \quad (6.277)$$

Portanto, a rugosidade  $dL/dL_o$  do caminho da trinca rugosa não depende do volume  $V$  nem do contorno  $C$  e nem do elemento infinitesimal de comprimento  $ds$  ou  $dy$ . Então, ele deve depender somente das características do caminho rugoso descrito por uma trinca no material. Finalmente, a integral na equação (6.275) pode ser escrita como

$$J_o = -\left( \int_V W \frac{dx}{dL} dy - \int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial L} ds \right) \frac{dL}{dL_o} \quad (6.278)$$

ou alternativamente,

$$J_0 = \left( \int_C W dy^* - \int_C \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^*} ds \right) \frac{dL}{dL_0} \quad (6.279)$$

onde os incrementos infinitesimais  $dx/dL = -\cos\theta_i$  e  $dy^* = -dy\cos\theta_i$  acompanha a direção do caminho rugoso  $L$  como mostra a Figura - 6.11. Portanto,

$$J = \int_V W dy \cos\theta_i - \int_C \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cos\theta_i ds \quad (6.280)$$

Observe que a integral- $J$  para o caminho de trinca rugosa dado pela equação(6.280) difere da integral- $J$  para o caminho de trinca projetada no plano, dado pela equação(6.260), apenas por um termo de  $\cos\theta_i$  que flutua dentro do integral. Também, pode ser observado que as partes enérgicas e geométricas do processo de fratura estão consistentemente separadas pelas equação(6.275) e equação (6.254), pondo em evidência a influência da rugosidade do material na taxa de energia elástico-plástico liberada,

$$J_0 \equiv J \frac{dL}{dL_0} \quad (6.281)$$

deve-se observar que esta relação é geral e a introdução da abordagem fractal para descrever a rugosidade da trinca  $dL/dL_0$  é apenas uma forma particular de modelagem da rugosidade.

## 6. 10 - A Teoria Fractal aplicada ao Modelo de curva J-R para material dúctil

Nesta secção inclui-se a geometria fractal no formalismo da MFEP para descrever os efeitos da rugosidade nas propriedades mecânicas. Para isso foi corrigida a expressão clássica da taxa de energia elasto-plástica liberada introduzindo a fractalidade (rugosidade) da superfície trincada. Este procedimento tornou a expressão clássica, linear com o comprimento da fratura, obtida pela MFEP, eq. (6. 97), em uma equação não-linear, eq. (6. 193), que reproduz precisamente o processo de propagação quase-estático de trincas nos materiais dúcteis.

Observe que a condição de crescimento quase-estático é obtida pelo critério de fratura de Griffith, fazendo-se  $J_0 = R_0$  e  $dJ_0/dL_0 = dR_0/dL_0$ . Logo, neste caso conclui-se que a curva  $J$ - $R$  pela equação (6. 125) e pelo critério de fratura de Griffith ( $J = 2\gamma_{eff}$ ) é descrita por:

$$J_0 = 2\gamma_{eff} \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}} \quad (6.282)$$

cujo gráfico é dado pela Figura - 6. 12.

Este gráfico mostra a dependência entre a resistência ao crescimento da trinca (curva  $J-R$ ) e a geometria da fratura para diferentes valores de expoentes Hurst,  $H$ , que retrata diferentes rugosidades.

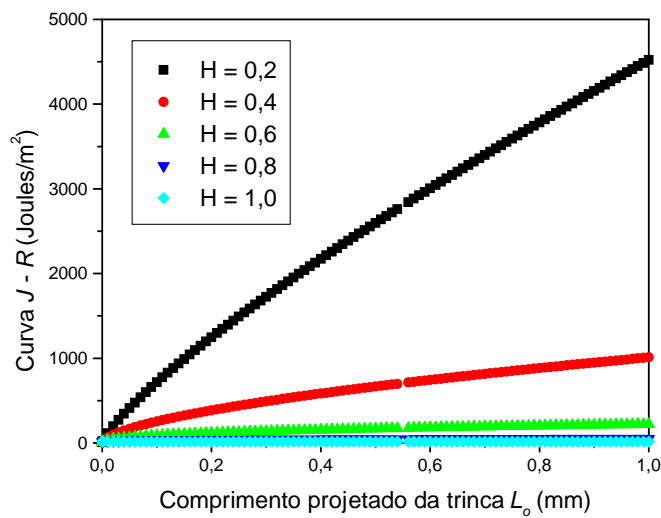


Figura - 6. 12. Gráfico da curva J-R obtida pelo modelo fractal da superfície de fratura para diferentes expoentes Hurst de rugosidade.

A idéia de correlacionar as propriedades da fratura com a rugosidade da superfície de fratura não é novidade (Mandelbrot e Passoja, 1984), contudo esta correlação não tem sido feita criteriosamente (Mandelbrot, 1984; Mecholsky, 1989; Borodich, 1997; Mu, 1988; Lung 1988; Lin, 1993; Nagahama, 1994; Lei, 1995; Tanaka, 1996; Chelidze 1990).

Mostrou-se, portanto, de forma inambígua como diferentes morfologias (rugosidades) são correlacionadas com o crescimento da curva  $J-R$ . Ou seja, devido a equivalência energética de Irwin para o caminho projetado da fratura, a curva  $J-R$  apresenta um crescimento proveniente da influência da rugosidade que não era computado anteriormente pelas equações clássicas da MFEP baseada na geometria euclidiana.



### 6.10.1 - Influencia do Crescimento Estável (ou Quase-Estático) da Trinca Rugosa e a Relação entre a Curva G-R e J-R

Na prática, as curvas  $G-R$  ou  $J-R$  são obtidas experimentalmente através do gráfico de  $G_o$  ou  $J_o$  e  $R_o$  contra o comprimento da trinca projetada  $L_o$ . A instabilidade acontece em  $G_o = R_o$  ou  $J_o = R_o$  e  $dG_o/dL_o = dR_o/dL_o$  ou  $dJ_o/dL_o = dR_o/dL_o$  (Ewalds). Porém, a equação (9) mostra que  $G_o$  possui uma dependência linear com o comprimento da trinca  $L_o$  considerando que resultados experimentais (Ewalds, Kraff) mostram que  $J_o$  e a resistência de trinca  $R_o$  crescem de uma forma não-linear. É bem conhecido que este crescimento da curva de  $J-R$  está correlacionado à rugosidade (morfologia) da superfície trincada (Swanson, Hübner). Portanto, a taxa de energia elasto-plástica liberada  $J_o$  como definida pela equação (6. 253) é derivada a partir da variação da energia do campo de tensão  $U_{L_o}$  quando o tamanho da trinca introduzido é  $L_o + dL_o$  em vez de  $L_o$  (Figura - 6. 3b). Dada a rugosidade, a trinca cresceu uma quantidade  $dL \geq dL_o$  e corrigindo a equação (5.90) tem-se a partir da equação (5.89)

$$R_o = \frac{dU_\gamma}{dL} \frac{dL}{dL_o} = (2\gamma_e + \gamma_p) \frac{dL}{dL_o} \quad (6.283)$$

da mesma forma

$$J_o = \frac{d(F - U_v)}{dL} \frac{dL}{dL_o} \quad (6.284)$$

O balanço de energia proposto por Griffith-Irwin-Orowan, para a fratura estável é

$$J_o = R_o \quad (6.285)$$

Portanto, para as condições de tensão plana ou deformação plana, pode-se escrever:

$$J_{R0} = (2\gamma_e + \gamma_p) \frac{dL}{dL_o} = \frac{K_{R0}^2 f(v)}{E} \quad (6.286)$$

onde  $f(v)$  é uma função que define as condições do ensaio. Para deformação plana,  $f(v) = 1 - v^2$ , e para tensão plana,  $f(v) = 1$ . Então,

$$K_{R0} = \sqrt{\frac{(2\gamma_e + \gamma_p) E}{f(v)} \frac{dL}{dL_o}} \quad (6.287)$$

Sabendo-se que a tenacidade a fratura é dada por:

$$K_{C0} = \sqrt{\frac{(2\gamma_e + \gamma_p) E}{f(v)}} \quad (6.288)$$

tem-se,

$$K_{R0} = K_{C0} \sqrt{\frac{dL}{dL_0}} \quad (6.289)$$

a partir da Mecânica da Fratura Clássica, a resistência a fratura para o modo I de carregamento é dada por:

$$K_{IR0} = Y_0 \left( \frac{L_0}{w} \right) \sigma_f \sqrt{L_0} \quad (6.290)$$

onde  $Y_0 \left( \frac{L_0}{w} \right)$  é uma função que define a forma do corpo de prova (CT, SEBN, etc) e o tipo de ensaio (tração, flexão, etc) e  $\sigma_f$  é a tensão de fratura. Considerando o caso quando  $L_0 = L_{0C}$ , então  $K_{IR0} = K_{IC0}$  e a tenacidade a fratura para o modo I de carregamento é dado por:

$$K_{IC0} = Y_0 \left( \frac{L_{0C}}{w} \right) \sigma_f \sqrt{L_{0C}} \quad (6.291)$$

Portanto, a partir da equação (6.287) a curva de tenacidade a fratura para o modo I de carregamento é dado por:

$$K_{IR0} = K_{IC0} \sqrt{\frac{dL}{dL_0}} \quad (6.292)$$

Substituindo a equação (6.290) e a equação (6.291) na equação (6.292), tem-se

$$\sqrt{\frac{(2\gamma_e + \gamma_p) E}{f(v)} \frac{dL}{dL_0}} = Y_0 \left( \frac{L_0}{w} \right) \sigma_f \sqrt{L_0} \quad (6.293)$$

ou

$$\frac{dL}{dL_0} = Y_0^2 \left( \frac{L_0}{w} \right) \frac{\sigma_f^2 L_0 f(v)}{(2\gamma_e + \gamma_p) E} \quad (6.294)$$

Observe que de acordo com o lado direito da equação(6.294), a rugosidade  $dL/dL_0$  é determinado pela condição do ensaio (deformação ou tensão plana), a forma do corpo de prova (CT, SEBN, etc) o tipo de carregamento (tração, flexão, etc.) e o tipo de material.

Considerando a superfície de fratura como possuindo uma topologia fractal, tal como foi descrito nos modelos previamente desenvolvidos (Bouchaud 1994, 1997; Alves, 2001, 2004), a partir do lado esquerdo de equação (6.294), observa-se que as características da superfície de fratura listadas acima estão totalmente incluídas no termo que representa a sua rugosidade, isto é  $\xi \equiv dL/dL_0$  e particularmente no expoente de rugosidade fractal  $H$ . Portanto, substituindo equação (4. 97) em equação (6.286), obtém-se

$$J_{R0} = (2\gamma_e + \gamma_p) \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}}}. \quad (6.295)$$

a equação (6.295) é não-linear na extensão de trinca  $\Delta L_0$ . Ela corresponde à clássica equação (6.285) corrigida para uma superfície rugosa com o expoente Hurst  $H$ . Seu gráfico é mostrado em Figura - 6. 12.

A integral- $J$  no caminho da trinca rugosa é uma característica específica do material. Portanto, ela pode ser considerada como sendo proporcional a  $J_C$  (ASTM E1737-96) no início da extensão de trinca, uma vez que neste caso tem-se  $L \gg L_0$ . A partir da equação (6.281), tem-se:

$$J_0 \sim J_C \frac{dL}{dL_0} \quad (6.296)$$

Substituindo o modelo monofractal da trinca proposto na equação (4. 97), para a rugosidade  $dL/dL_0$ , tem-se

$$J_0 \sim J_C \frac{1 + (2 - H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{2H-2}}}, \quad (6.297)$$

corroborando o fato de que a energia específica de superfície está relacionada a resistência crítica da fratura

$$J_C \sim (2\gamma_e + \gamma_p) \quad (6.298)$$

### 6.10.2 – O limite auto-similar, ou local, da fratura e as grandezas críticas

É fácil verificar que na situação crítica de início do crescimento da fratura tem-se que,  $G_{0c} = R_{0c}$ , quando  $L_0 = L_{0c}$ , mostrando que o critério de Griffith para o início do crescimento da trinca, dado pelas equações (5. 65) e (6. 62), é também válido para a equação (6.295). Neste caso, pode-se expressar a resistência ao crescimento da trinca,  $R_0$ , dado por (6. 66) ou (6.283) e (6.295) derivando-se a expressão (4. 91) em relação a  $L_0$ , obtendo:

$$\frac{dL}{dL_0} = (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{H-1} \quad (6.299)$$

No limite auto-similar local pode ser calculado aplicando a condição quando a escala de

observação corresponde a uma grande amplitude da trinca é comparável ao seu comprimento quando  $H_0 \rightarrow L_0 \gg l_0$  na equação (4. 88), obtendo-se para  $J_0 = R_0$  a partir de (6.298) e (6. 66) que:

$$J_0 = 2\gamma_{eff} (2 - H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{H-1}, \quad (6. 300)$$

ou

$$J_{R0} = (2\gamma_e + \gamma_p) (2 - H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{H-1} \quad (6.301)$$

ou para  $D = 2 - H$ , tem-se

$$J_0 = 2\gamma_{eff} D \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{1-D}, \quad (6. 302)$$

Este resultado corresponde ao mesmo achado por Mu (Mu, 1988) e Lung (Lung, 1988) e outros autores para os materiais dúcteis.

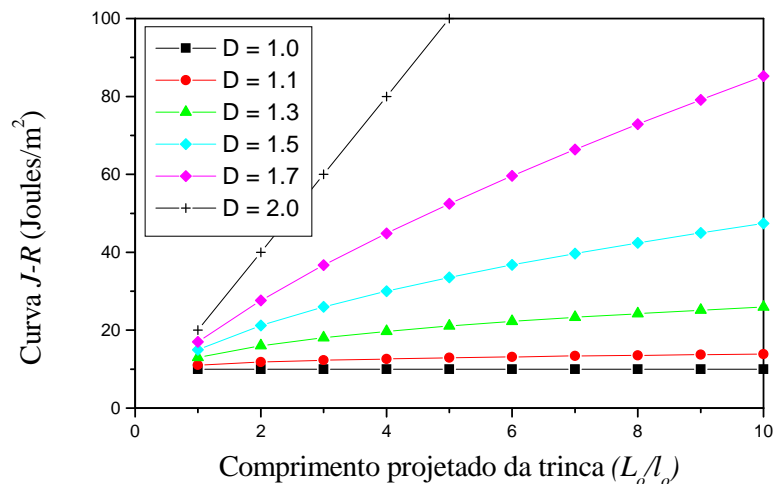


Figura - 6. 13. Curvas  $J-R$  calculadas em função do comprimento projetado da trinca,  $L_0$ . Onde  $L_0$  é tomado em unidades de  $l_0$  para uma fratura de espessura unitária, para diferentes perfis caracterizados por dimensões fractais  $D = 1.0, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, e 2.0$ , com  $2\gamma_e = 10.0 \text{ Joules/m}^2$ .

Como será mostrado através de medidas experimentais, este resultado é válido para o caso de materiais dúcteis como os metais, por exemplo. Graficando-se a relação equação (6. 302) em função do comprimento da trinca obtem-se o gráfico mostrado na Figura - 6. 13. Nesta figura, as curvas  $J-R$  são calculadas tomando-se diferentes valores de dimensão fractal  $D$ .  $2\gamma_{eff}$  é tomado igual a  $10,0 \text{ J/m}^2$  porque é um valor compatível com os materiais frágeis.  $L_0/l_0$  é o comprimento da trinca em unidades de  $l_0$ . Esta figura mostra de uma forma muito clara como a morfologia da superfície (caracterizada pela dimensão fractal  $D$ ) determina a forma da curva  $J-R$  no início do

crescimento da trinca.

Na Figura - 6. 14 as curvas  $J-R$  com dimensão fractal  $D = 1.3$  são calculadas em função do comprimento projetado,  $L_0$ , para diferentes régua de medidas,  $l_0$ , mostrando como a morfologia rugosa da superfície trincada é mais bem descrita para pequenos valores de  $l_0$ , trazendo como consequência o acentuado crescimento da curva  $J-R$ . Esta Figura - 6. 14 e a equação (6. 302) mostram que a resistência inicial da trinca está correlacionada a morfologia da superfície aqui caracterizada pela dimensão,  $D$ , de acordo com a literatura.

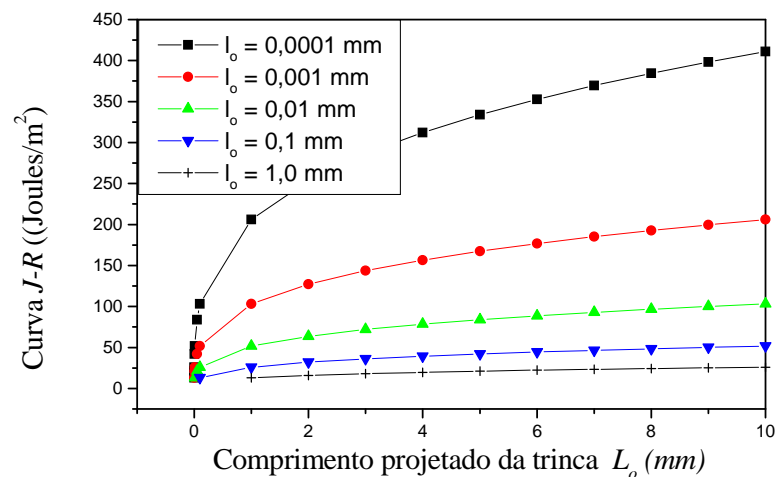


Figura - 6. 14. Curvas  $J-R$  calculadas em função do comprimento projetado da trinca,  $L_0$ , com diferentes comprimentos de régua de medida  $l_0 = 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$  e  $1,0$  mm, para uma fratura de espessura unitária com perfil de trinca de dimensão fractal  $D = 1.3$ .  $2\gamma = 10,0$  Joules/m<sup>2</sup>.

O limite auto-similar (ou local) da curva  $J-R$ , dado pela equação (6. 302), é valido apenas para regiões próximas ao início do crescimento da trinca, isto é, para  $H_0 \rightarrow L_0$ . Isto porque, como já foi mencionado nos Capítulos II e IV, o encruamento do material, que dá origem a rugosidade da superfície de fratura, acontece logo antes da trinca se propagar. No caso de materiais dúcteis (metais), o comprimento da zona de encruamento,  $H_0$ , vai afetando uma região cada vez maior do material, a medida que a trinca se propaga, fazendo com que o limite auto-similar ( $H_0 = L_0 \gg l_0$ ) passe a ser válido em regiões maiores do comprimento da trinca,  $L_0$ .

Contudo, no caso de materiais frágeis (cerâmicas), após o estágio inicial de encruamento, a trinca mantém este estado em uma região de comprimento,  $H_0$ , muito curta em relação ao comprimento da trinca,  $L_0$ , gerando uma estrutura fractal auto-similar apenas quando o comprimento da trinca,  $L_0$ , é pequeno, e da ordem de  $l_0$ , isto é,  $H_0 = L_0 = l_0$ . Quando o comprimento da trinca,  $L_0$ , torna-se muito maior do que o tamanho da região inicial de

encruamento,  $H_0$ , presente no início do crescimento da trinca, isto é, o limite em que  $H_0 = l_0 \ll L_0$ , o limite auto-similar perde a validade, passando a ser válido o limite auto-afim (ou global) da fratura, conforme será mostrado a seguir.

### 6.10.3 – O limite auto-afim, ou global, da fratura e as grandezas críticas

É fácil verificar que na situação de crescimento estável de trinca, isto é, quando  $L \rightarrow \infty$ , a resistência a fratura,  $R_0$ , é dada pelas equações (6. 66) e (6.295) cuja derivada em relação a  $L_0$  da expressão (4. 87), obtendo  $dL/dL_0 = 1$ .

No limite auto-afim global de  $J_0$  pode ser calculado aplicando a condição quando a escala de observação corresponde a uma amplitude da trinca muito estreita comparável ao seu incremento, ou seja, quando  $H_0 \rightarrow l_0 \ll L_0$  na equação (4. 88), obtém-se o resultado elástico linear, logo para  $J_0 = R_0$  tem-se que:

$$J_0 = 2\gamma_{eff} . \quad (6. 303)$$

onde  $J_0 = G_0$  e

$$G_{R0} = 2\gamma_e + \gamma_p \quad (6.304)$$

Este corresponde ao resultado clássico da MFC, pode ser entendido como o caso geral análogo a (5. 63) apresentado válido para os materiais frágeis como os vidros e algumas cerâmicas.

### 6.10.4 – A tenacidade a fratura, a tensão de fratura e a rigidez em termos da geometria fractal

A tenacidade a fratura,  $K_{IC}$  é uma grandeza definida para o início da propagação da trinca. De acordo com o [Postulado IV](#), mencionado na [secção - 6.3](#), pode-se escrevê-la para o caminho projetado a partir de (6. 141) como:

$$K_{IC_0} = \sigma_{f_0} \sqrt{L_0} = \sqrt{R_0 E_0} . \quad (6. 305)$$

Logo, substituindo a relação (6. 300) em (6. 305) tem-se:

$$K_{IC_0} = \sqrt{2\gamma E_0 (2-H) \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{H-1}} \quad (6. 306)$$

multiplicando e dividindo (6. 306) por  $E$  tem-se:

$$K_{IC0} = \sqrt{2\gamma E \frac{E_0}{E} (2-H) \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{H-1}} \quad (6.307)$$

escrevendo (6.307) em termos de (6.110) a relação entre  $K_{IC0}$  e  $K_{IC}$  pode ser calculada em termos da geometria fractal a partir da relação (6.307) como:

$$K_{IC0} = K_{IC} \sqrt{\frac{E_0}{E} (2-H) \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{H-1}} \quad (6.308)$$

considerando que  $K_{IC0} = K_{IC}$  é uma propriedade do material tem-se a relação entre a rigidez,  $E_0$ , do material e o seu módulo de rigidez,  $E$ , dado por:

$$E_0 = \frac{E}{(2-H) \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{H-1}} \quad (6.309)$$

Esta relação mostra o efeito da rugosidade da superfície de fratura sobre a rigidez do material<sup>(20)</sup>, que diminui a medida que a trinca se propaga, onde o módulo de rigidez,  $E$ , é apenas o valor inicial desta rigidez. Isto está perfeitamente de acordo com as observações experimentais. Analogamente de (6.149), (6.159) e (6.152) tem-se que:

$$\sigma_{0f} = \sigma_f \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{\frac{H-1}{2}} \quad (6.310)$$

Observe que a relação (6.310) mostra que a tensão de fratura,  $\sigma_{0f}$ , tende a aumentar com o aumento do comprimento da trinca,  $L_0$ . Isto significa que o material se torna mais resistente após o encruamento (endurecimento por deformação) e a formação da zona de processo, porém, menos tenaz.

### 6.10.5 - As análises das curvas $J$ - $R$ usando o modelo fractal

A Eq.(6.295) representa um modelo fractal auto-afim e demonstra que além do coeficiente  $H$ , existe uma certa “universalidade” ou, melhor dizendo, uma certa “generalidade” nas curvas  $J$ - $R$ . Esta equação pode ser reescrita usando-se um fator universal de escala,  $\varepsilon = l_0 / L_0$ , como

$$\underbrace{f(2\gamma_e + \gamma_p, J_0)}_{\text{energetica}} = \frac{J_0}{2(2\gamma_e + \gamma_p)} = \frac{1 + (2-H)\varepsilon^{2H-2}}{\sqrt{2(1 + \varepsilon^{2H-2})}} = \underbrace{g(\varepsilon, H)}_{\text{geometrica}} \quad (6.311)$$

<sup>20</sup> Uma explicação para esta situação pode ser dada a partir de um tratamento rigoroso dado pela teoria do dano.

A qual é uma função válida para todos os resultados experimentais obtidos e mostrados na Figura - 7.27. Esta figura mostra a existência de uma relação entre as componentes energéticas e geométricas da resistência a fratura dos materiais, de acordo com a Eq.(6.311). Então, quanto maior for o consumo de energia na fratura de um material, deformando ele plasticamente, maior será seu caminho geométrico descrito pela trinca e, por conseguinte, mais rugosa será a trinca.

No limite auto-similar onde  $l_0 \ll L_0 = H_0$ , Eq.(6.301) é aplicável e as componentes energéticas e geométricas são postas em evidência na equação abaixo,

$$J_0 = \underbrace{(2\gamma_{e0} + \gamma_p)}_{\text{energética}} \underbrace{(2-H) \left( \frac{l_0}{\Delta L_0} \right)^{H-1}}_{\text{geométrica}} \quad (6.312)$$

A partir da Eq (6.312), pode-se derivar uma expressão a qual resulta em um valor constante associado a cada tipo de material ,

$$\underbrace{J_0 \Delta L_0}_{\text{macroscópica}}^{H-1} = \underbrace{(2\gamma_{e0} + \gamma_p)(2-H)l_0^{H-1}}_{\text{microscópica}} = (\text{const})_{\text{material}} \quad (6.313)$$

È possível concluir que os termos macroscópicos e microscópicos nos lados esquerdo e direito da Eq. (6.313), respectivamente, são ambos iguais a uma constante, sugerindo a existência de uma propriedade fractal da fratura válida para o início do crescimento da trinca, a qual é justificada experimentalmente e teoricamente. Estes valores constantes foram calculados para cada ponto na curva  $J-R$  para os materiais testados. O valor médio para cada material foi listado na última coluna da Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7 (na página 288). Observe que esta nova propriedade está unicamente determinada pelo processo de crescimento da trinca, dependendo do expoente  $H$  e da energia de superfície específica  $2\gamma_e + \gamma_p$  e do tamanho mínimo da trinca  $l_0$ .

Esta nova constante pode ser entendida como uma "densidade fractal de energia" e é uma quantidade física que leva em conta a rugosidade da superfície de fratura além de outras propriedades físicas. Sua existência pode explicar a razão de diferentes problemas encontrados quando definindo o valor da tenacidade à fratura  $K_{IC}$ . Esta constante pode ser usada para complementar a informação fornecida pela tenacidade a fratura que depende de vários fatores como as espessuras  $B$  do corpo de prova, a forma ou tamanho do entalhe, etc (ASTM E813-89). Para resolver este problema, a norma ASTM E1737-96 (ASTM E1737-96) estabelece um valor para o comprimento da trinca  $a$  (aproximadamente  $0.5 < a/W < 0.7$  e  $B = 0.5W$ , onde  $W$  é a largura do corpo de prova) por obter a tenacidade a fratura  $K_{IC}$ , de forma a manter a zona de fluência em pequena escala.

Uma outra interpretação da Eq. (6.312) pode ser feita dividindo-se os termos elásticos e



plásticos,

$$J_0 = \underbrace{2\gamma_e(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1}}_{\text{Elástica}} + \underbrace{\gamma_p(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1}}_{\text{Plástica}}, \quad (6.314)$$

Observando a Eq. (5.102), pode-se escrever,

$$J_e = 2\gamma_e(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1} = \frac{K_e^2}{E}, \quad (6.315)$$

e

$$J_{pl} = \gamma_p(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1} = \frac{2A_{pl}}{B_N(w-L_0)}. \quad (6.316)$$

Para uma situação particular onde  $J_0 = J_{IC}$  e  $\Delta L_0 = \Delta L_{0C}$ , pode-se derivar a partir da Eq. (6.301) que,

$$J_{IC} = (2\gamma_e + \gamma_p)(2-H)\left(\frac{l_0}{L_{0C}}\right)^{H-1} \quad (6.317)$$

e a partir da Eq.(6.287),

$$K_{IC} = \sqrt{(2\gamma_e + \gamma_p)E(2-H)\left(\frac{l_0}{L_{0C}}\right)^{H-1}} \quad (6.318)$$

Portanto, usando o fato de que uma vez o valor experimental de  $J_{IC}$  é determinado e o ajuste da curva  $J-R$  já tem fornecido os valores de  $2\gamma_e + \gamma_p, l_0$  e  $H$  para o material, o valor de  $L_{0C}$  pode ser calculado.

## 6. 11 – Mecânica da Fratura Elasto-Plástica com Irregularidades

### 6.11.1 - Trincas fractais no endurecimento clássico por deformação plástica nos sólidos elásticos não-lineares

Nesta seção as distribuições de tensão em torno da ponta de uma trinca fractal em um material sob encruamento é estudado. Hutchinson (1968) e Rice e Rosengren (1968), de forma independente, descobriram as formas assintóticas das tensões e deformações na ponta de uma trinca estacionária em um material com um encruamento tipo Ramberg-Osgood. Eles descobriram que as tensões e as deformações são singulares na ponta da trinca e esta singularidade é agora conhecido como singularidade do campo HRR.

Relações entre tensão-deformação em um material de Ramberg-Osgood pode ser escrita

como:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (6.319)$$

onde  $\varepsilon_0$  e  $\sigma_0$  são propriedades do material e  $n$  é o expoente de encruamento. Usando a teoria da deformação plástica  $J_2$ , Hutchinson e Rice e Rosengren encontrou as seguintes tensões e deslocamentos assintóticos

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (6.320)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \varepsilon_0 \alpha \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (6.321)$$

$$u_i(r, \theta) = \varepsilon_0 \alpha r \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \right)^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (6.322)$$

No caso,  $\tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(r, \theta)$ , e  $\tilde{u}_i(r, \theta)$  são funções tabuladas. Vê-se que as tensões têm uma singularidade  $r^{-1/(n+1)}$  e as deformações possuem uma singularidade  $r^{-n/(n+1)}$  na ponta da trinca. Deve-se lembrar que vários cuidados devem ser tomados sobre as soluções HRR

### 6.11.2 - Modelagem Fractal da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

Considerando que a curva  $J_0$  projetada em relação a curva  $J$  rugosa tem-se:

$$J_0 = J \frac{dL}{dL_0} \quad (6.323)$$

e considerando a validade do postulado IV tem-se:

Considerando a teoria da plasticidade e a expressão do campo encontrada por Hutchinson-Rice e Rosengren tem-se que a relação para o campo de tensões de HRR é dada por:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \frac{dL}{dL_0} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (6.324)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \varepsilon_0 \alpha \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \frac{dL}{dL_0} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (6.325)$$

$$u_i(r, \theta) = \varepsilon_0 \alpha r \left( \frac{J}{\alpha \varepsilon_0 \sigma_0 I_n r} \frac{dL}{dL_0} \right)^{1/(n+1)} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (6.326)$$

Onde  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$  e  $\tilde{u}_i(\theta, n)$  são funções tabuladas.

## 6. 12 – Resultados dos Métodos Analíticos de Fratura Fractal com variação do expoente de singularidade

Nesta secção apresenta-se o aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa fractal para diferentes valores do expoente  $\alpha$  da equação (6.7).

A primeira análise que será feita é entender como o grau de homogeneidade das funções analíticas do campo de tensão/deformação e conseqüentemente seus expoentes influenciam na forma geométrica desse campo. As equações analíticas do campo de tensão/deformação ao redor de uma trinca são graficados na forma de mapas bidimensionais desde a Figura - 6. 15 até a Figura - 6. 22. Nessas figuras a parte superior representa os mapas obtidos para  $\alpha \leq 0,5$  e a parte inferior representa os mapas obtidos para  $\alpha \geq 0,5$ . Essa comparação qualitativa das intensidades dos campos serve para mostrar o grau de singularidade desses campos em relação ao campo clássico para  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Esses mapas analíticos foram obtidos por meio do código denominado Sistema de Simulação de Fenômenos em Materiais (SIMFENMAT) desenvolvido durante esse trabalho. Neste código, foi utilizado o sistema internacional de cores equivalente ao sistema de cores do ANSYS® para mapear as intensidades de campo.

### 6.12.1 – Aspecto geral do campo ao redor de uma trinca com singularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo I

Seguindo o raciocínio de que uma trinca fractal gera um campo fractal em uma meso-escala, que deveria possuir um expoente de singularidade fracionário associado a dependência assintótica com a distância  $r$  na frente da trinca dado por:

$$\sigma(r) \sim r^{-\alpha} \quad p / \alpha = \frac{2 - D_B}{2} = \frac{H}{2}. \quad (6. 327)$$

Onde  $\alpha$  é o expoente da singularidade do campo de tensão devido a Mosolov (1991,1992, 1993).

O aspecto geral desse campo de tensão ao redor de uma trinca rugosa fractal é mostrado nas Figura - 6. 15 a Figura - 6. 17 para as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yy}$  do Modo I de fratura. Observe que para os valores de  $\alpha < 0,5$  o decaimento da intensidade do campo com o vetor posição  $\vec{r}$  é mais acentuada do que para os valores de  $\alpha > 0,5$ .

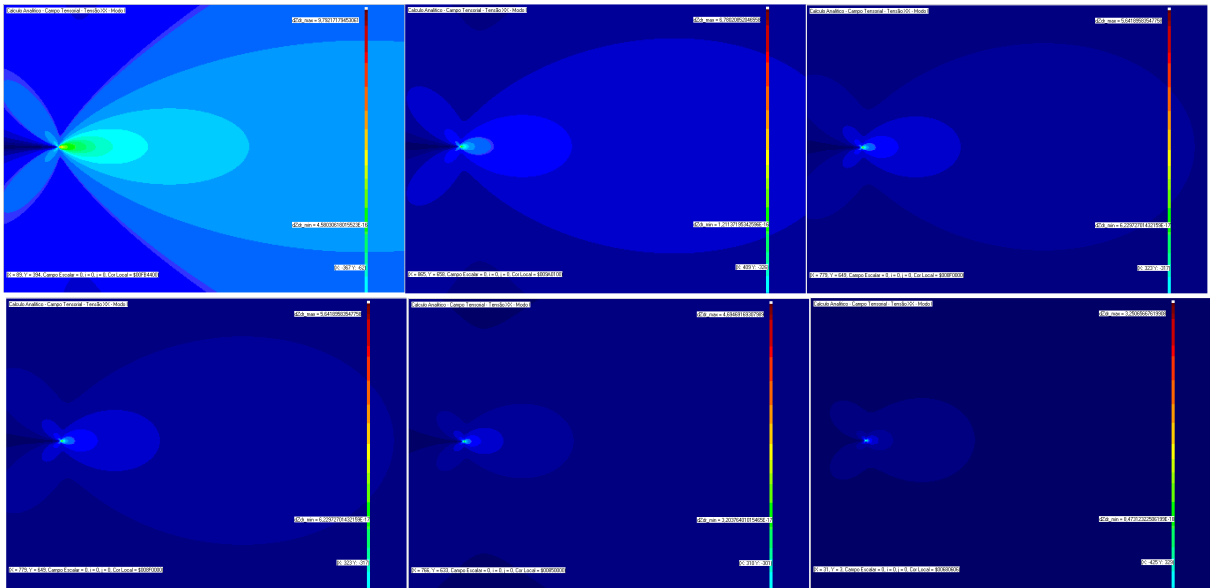


Figura - 6. 15. Campo de Tensão  $\sigma_{xx}$  no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

A Figura - 6. 15 e a Figura - 6. 17 mostram como muda o aspecto do campo de tensão elástico ao redor de uma falha se a ordem da singularidade muda em relação ao campo elástico clássico.

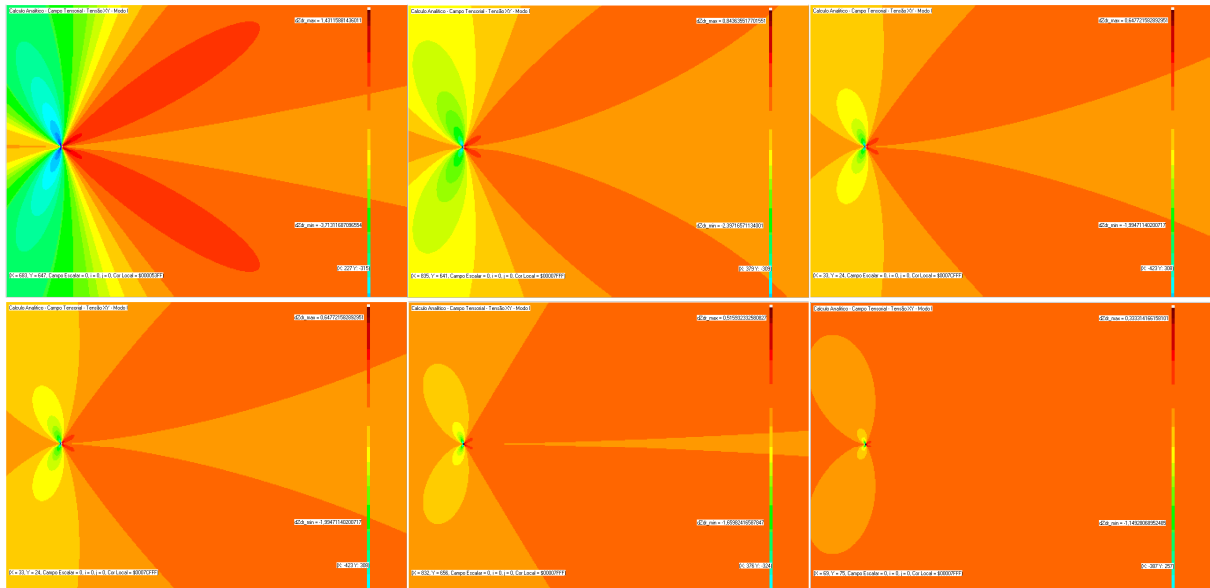


Figura - 6. 16. Campo de Tensão  $\sigma_{xy}$  no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

Fazendo-se um mapeamento do campo elástico ao redor de uma trinca, a partir de uma expressão obtida por uma solução analítica do campo de tensão, observa-se que uma mudança no expoente  $\alpha = 1/2$  para um outro expoente  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) dado pela equação (6. 9) muda-se pouco os aspectos gerais do campo elástico ao redor de uma falha, conforme mostram as Figura - 6.

15 a Figura - 6. 17.

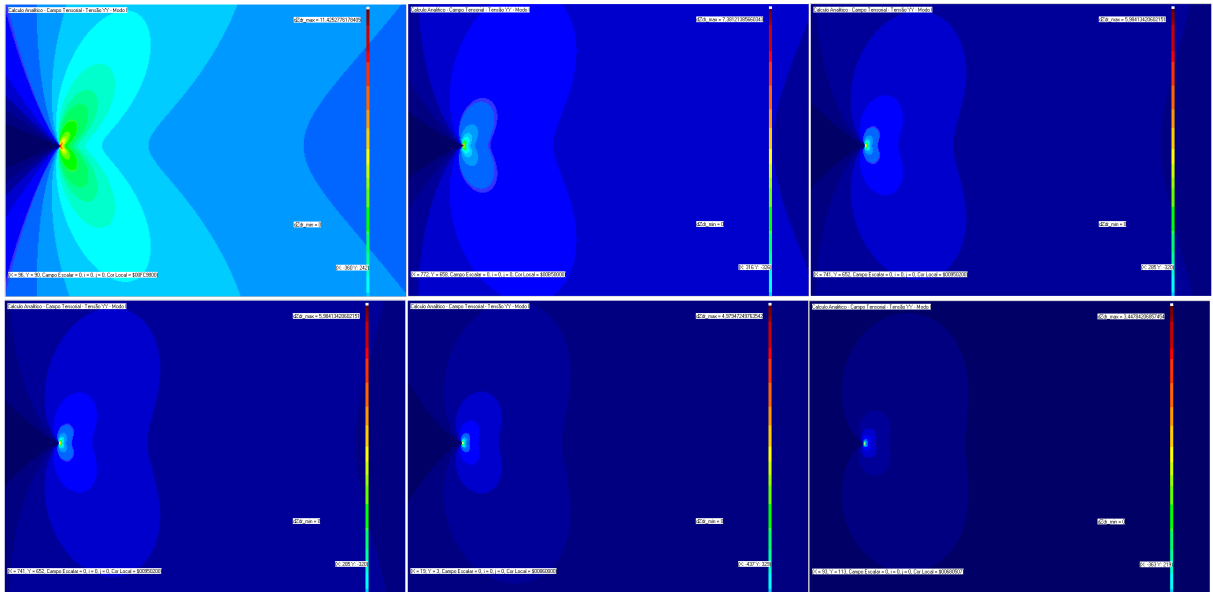


Figura - 6. 17. Campo de Tensão  $\sigma_{yy}$  no modelo fractal para o Modo I de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

Observa-se na Figura - 6. 15 que o campo de tensão  $\sigma_{xx}$  com expoente fractal parece está mais espalhado em relação ao campo tensão clássica. Isto se deve ao fato de que a potência de singularidade  $r^{-\alpha}$  do campo clássico para  $\alpha = \frac{1}{2}$  é mais intensa do que a do campo fractal para  $\alpha = 0,2$  ou  $\alpha = 0,4$ .

### 6.12.2 – Campo ao redor de uma trinca com sigularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo II

No caso do Modo II de fratura o aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca fractal é mostrado nas Figura - 6. 18 a Figura - 6. 22.

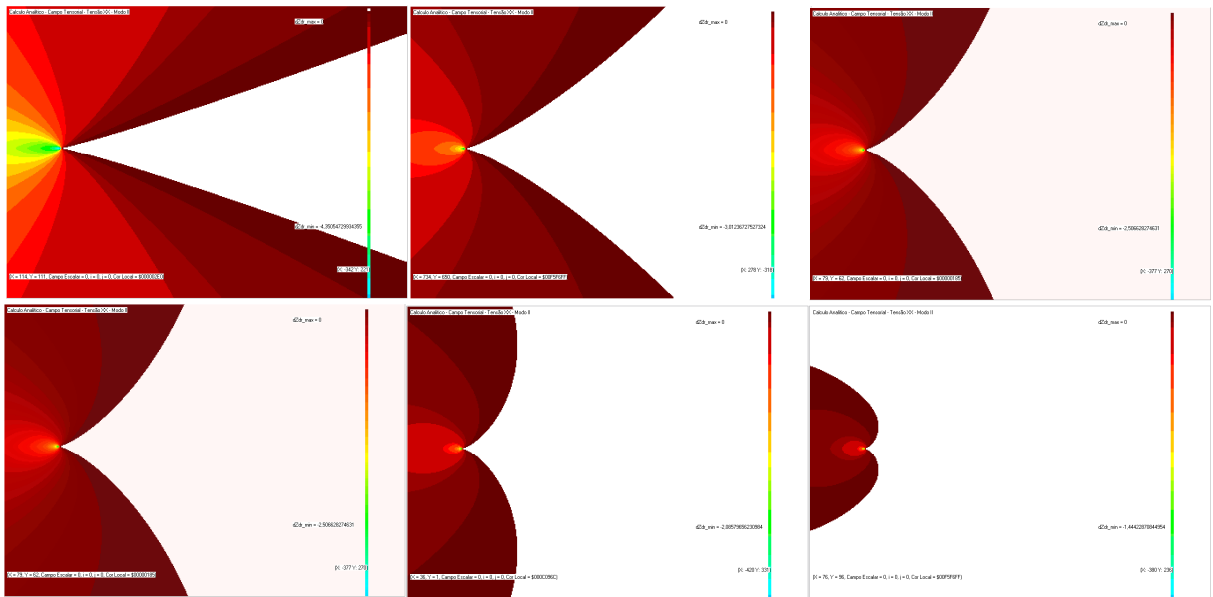


Figura - 6. 18. Campo de Tensão  $\sigma_{xx}$  no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

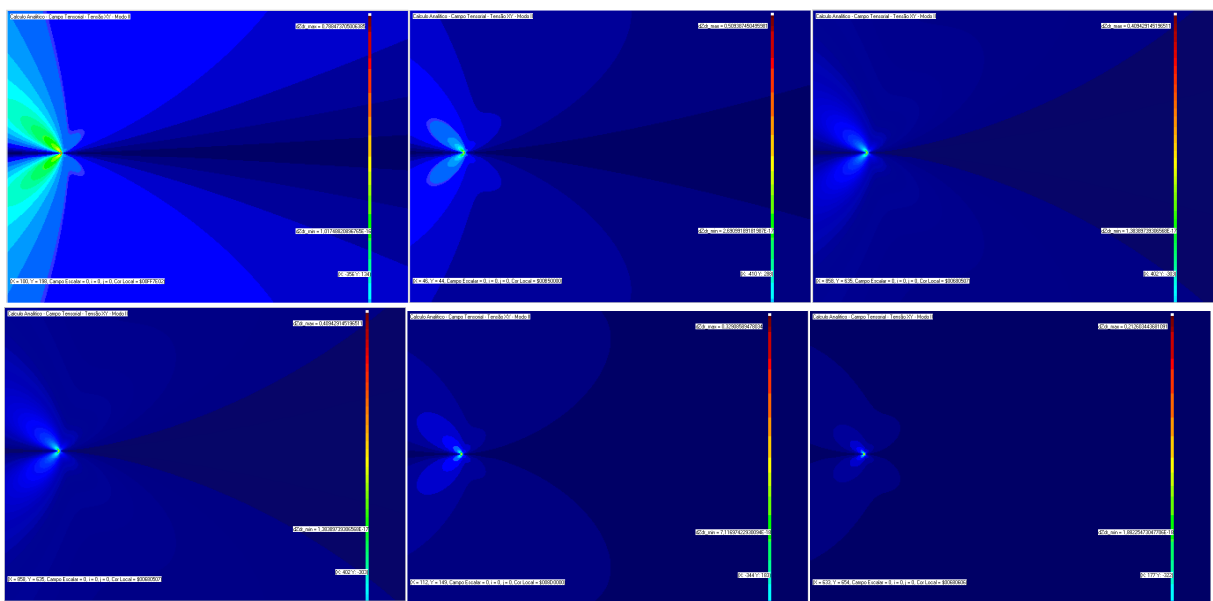


Figura - 6. 19. Campo de Tensão  $\sigma_{xy}$  no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0.2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

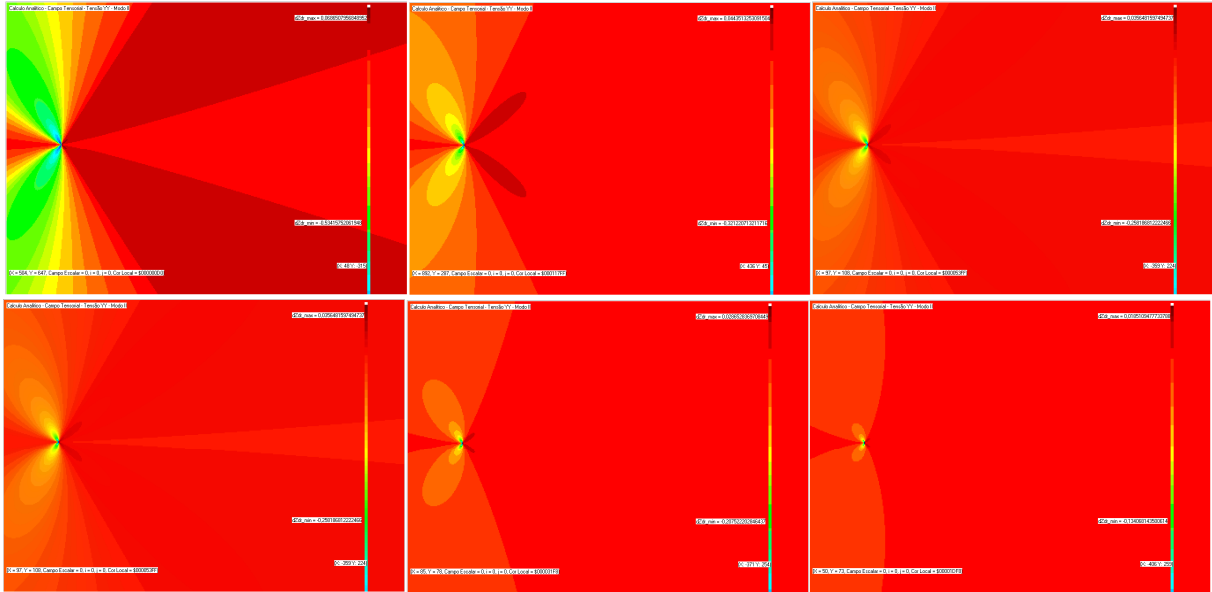


Figura - 6. 20. Campo de Tensão  $\sigma_{yy}$  no modelo fractal para o Modo II de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

Observe, novamente, que para o valores de  $\alpha < 0,5$  o decaimento da intensidade do campo com o vetor posição  $\vec{r}$  é mais acentuada do que para os valores de  $\alpha > 0,5$ . Para os campos fractais com expoente  $\alpha = 0,6$  e  $\alpha = 0,8$  ambos com valores maiores que o campo clássico  $\alpha = 0,5$  observa-se um aumento na intensidade e uma concentração maior do campo ao redor da trinca. Isto se deve ao aumento da potência de singularidade  $r^{-\alpha}$  para estes casos.

### 6.12.3 – Campo ao redor de uma trinca com sigularidade fractal da ordem $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ : Modo III

No caso do Modo III de fratura o aspecto geral do campo de tensão ao redor de uma trinca fractal é mostrado nas Figura - 6. 21 e Figura - 6. 22. Observe, novamente, que para os valores de  $\alpha < 0,5$  o decaimento da intensidade do campo com o vetor posição  $\vec{r}$  é mais acentuada do que para os valores de  $\alpha > 0,5$ .

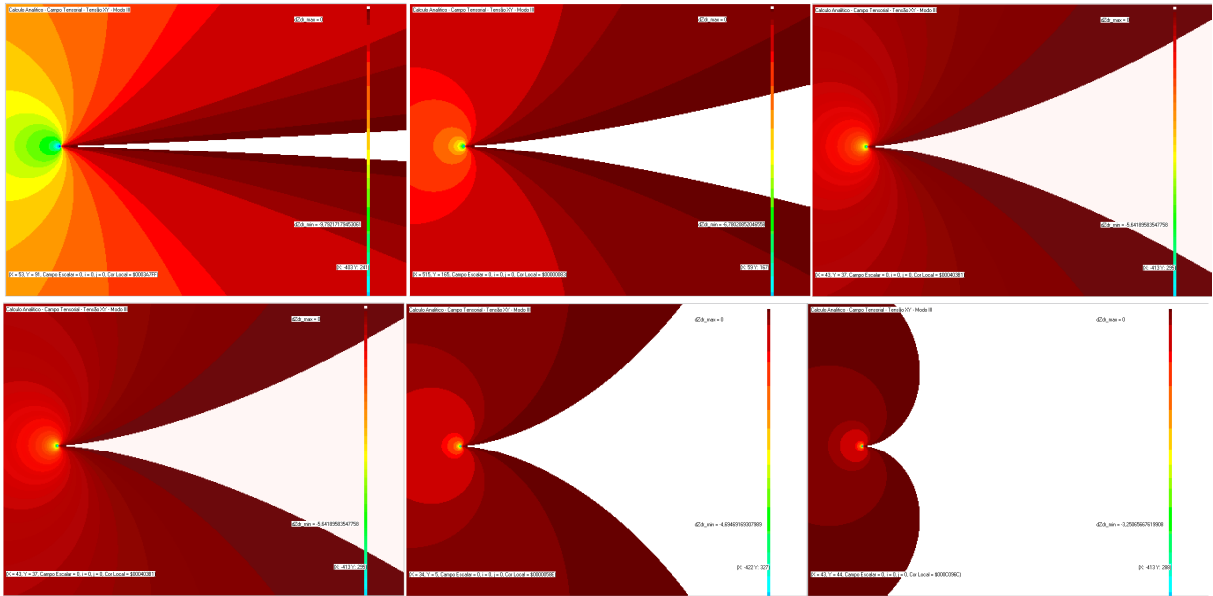


Figura - 6. 21. Campo de Tensão  $\sigma_{xy}$  no modelo fractal para o Modo III de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

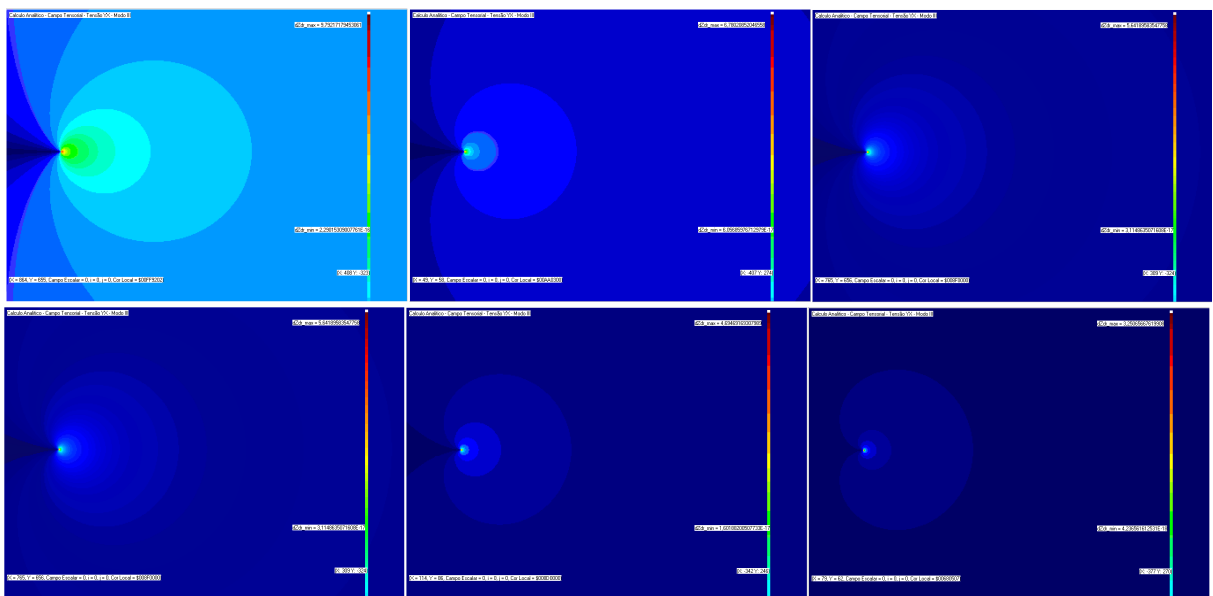


Figura - 6. 22. Campo de Tensão  $\sigma_{yx}$  no modelo fractal para o Modo III de Fratura com singularidade  $1/r^\alpha$ . Modelo de Mosolov  $\alpha = 0,2; 0,4; 0,5$  na parte superior e  $\alpha = 0,5; 0,6; 0,8$  na parte inferior.

### 6. 13 – Análise comparativa das grandezas da Mecânica da Fratura lisa, projetada e rugosa

A partir dos resultados numéricos obtidos na secção anterior foi feito uma análise das grandezas da Mecânica da Fratura a fim de se obter uma reformulação matemática para uma Mecânica da Fratura Rugosa.



6.13.1 – Relação entre as taxas de energia elástica liberada para uma trinca lisa, projetada e rugosa

Uma forma de ver a influência da rugosidade e do raio de curvatura da trinca é tomar a expressão de equivalência da variação da energia de deformação  $\Delta U_L$  para o caso rugoso e projetado, onde

$$\Delta U_L = \Delta U_{L_0} \quad (6.328)$$

Comparando (6.328) com (3.358) tem-se:

$$\Delta U_{L_0} = \Delta U_{L_l} \left( \frac{m^*}{\pi} \right) = \Delta U_L \quad (6.329)$$

ou para comprimentos infinitesimais de trinca tem-se:

$$G_0 dL_0 = G_l dL_l \left( \frac{m^*}{\pi} \right) = G dL \quad (6.330)$$

ou

$$G_0 = G_l \frac{dL_l}{dL_0} \left( \frac{m^*}{\pi} \right) = G \frac{dL}{dL_0} \quad (6.331)$$

Considerando que o comprimento da trinca lisa é igual ao da trinca projetada tem-se:

$$G_0 = G_l \left( \frac{m^*}{\pi} \right) = G \frac{dL}{dL_0} \quad (6.332)$$

Observe que a diferença entre a taxa de energia elástica liberada projetada e lisa está razão do fator de forma  $(m^*/\pi)$ , o que significa simplesmente que o que torna uma quantidade diferente da outra é a rugosidade acrescentada, conforme foi analisada na secção - 6. 7.

Mariano (2003) sugere que a variação da superfície de fratura em toda borda da trinca define um gradiente de superfície que está relacionado com o seu raio de curvatura. Alguns autores (Weiss 2001, Rupnowski 2001) têm modificado a geometria de uma trinca lisa utilizando a geometria fractal na tentativa de investigar a influência da rugosidade no campo de tensão. Entre eles destaca-se o trabalho de Wnuk e Yavari (2005). Alguns resultados têm sido adiantados na literatura entre eles, o trabalho de Yavari *et alli* (2006).

Utilizando-se um modelo termodinâmico para uma trinca tem-se que a dissipação da energia no caso de uma trinca lisa em movimento é dada por:

$$\psi_l = G_l v_l \quad (6.333)$$

e para uma trinca rugosa tem-se:

$$\psi = Gv \quad (6.334)$$

que é o mesmo valor para uma trinca projetada, ou seja,  $\psi = \psi_0 = G_0 v_0$  onde:

$$G_l = \frac{\pi\sigma^2 L_l}{E} \text{ e } G = \frac{m^* \sigma^2 L}{E} \quad (6.335)$$

Sendo  $L \geq L_l$ , observa-se da equação (6.335) que uma trinca rugosa dissipa mais energia do que uma trinca lisa. Porque nesse último caso o valor da taxa de energia elástica liberada  $G \geq G_l$ . Portanto o valor da dissipação  $\psi$  é maior do que o valor da dissipação de uma trinca lisa  $\psi_l$ , viajando a mesma velocidade.

### 6.13.2 - Generalização dos critérios de fratura para uma trinca rugosa

O modelo de fratura de Orowan (1949) baseado na energia de coesão de um monocristal tem como resultado a seguinte expressão:

$$\sigma_{Teórico} = \left( \frac{E\gamma_e}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.336)$$

Reescrevendo a expressão (6.336) tem-se:

$$\sigma_{Teórico} = \left( \frac{2E\gamma_e}{\pi a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.337)$$

Se definirmos uma função  $g(\rho)$  dependente do raio de curvatura mínimo na ponta da trinca em um monocristal como sendo dada por:

$$g = \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.338)$$

Esse modelo não prever a tensão de fratura de materiais em cuja microestrutura estão presentes diferentes tipos de defeitos que atuam como concentradores de tensão no seu interior.

Inglis em 1913 utilizou o problema elástico de uma placa com um defeito elíptico representando uma trinca onde obteve o campo de tensão em sua ponta em função do raio de curvatura obtido através da seguinte expressão:

$$\sigma = \sigma_{aplicado} \left( 1 + 2 \left( \frac{L_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6.339)$$

Pensando nos concentradores de tensão Inglis procurou formular um critério que levasse em conta a presença de um defeito elíptico concentrador de tensão o qual representava uma trinca

quando o semi-eixo menor da elipse era muito menor do que o seu semi-eixo maior , isto é,  $b \ll a$  . Com esta hipótese Inglis conclui que a tensão na ponta da trinca era aumentada por um fator geométrico de amplificação de tensão, cujo valor é dado pela expressão:

$$\sigma_{Inglis} = 2\sigma \left( \frac{L_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.340)$$

A proposta de Inglis era obter um critério de fratura que levasse em conta o concentração de tensão na ponta de um defeito elíptico, como uma forma de retratar um critério mais realista em relação a previsão feita pela tensão de fratura do modelo do mono cristal. O critério foi obtido por Inglis, igualando a equação (6.336) com (6.340) e obtendo a seguinte expressão:

$$\sigma_f = \left( \frac{\rho \gamma_e E}{4a_0 L_{0c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.341)$$

Reescrevendo expressão (6.341) pode-se obter:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_{0c}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi \rho}{8a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.342)$$

Comparando (6.337) com (6.342) tem-se que:

$$\left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi \rho}{8a_0} \right)^{1/2} \quad (6.343)$$

Logo concluímos que o raio de curvatura mínimo para um monocristal é dado por:

$$\rho = 4a_0 \quad (6.344)$$

Se definirmos a função  $g(\rho, a_0)$  dependente do raio de curvatura na ponta da trinca como sendo dada por:

$$g(\rho, a_0) = \left( \frac{\pi \rho}{8a_0} \right) \quad (6.345)$$

A principio o critério obtido por Griffith (1920), anos mais tarde, parece muito diferente daquele dado em (6.341), onde:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_{0c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.346)$$

Reescrevendo (6.346) tem-se:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_{0c}} \right)^{\frac{1}{2}} (1)^{\frac{1}{2}} \quad (6.347)$$

Comparando (6.347) com (6.342) tem-se que:

$$\left( \frac{\pi\rho}{8a_0} \right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} \quad (6.348)$$

Logo, encontra-se que o raio de curvatura mínimo para uma trinca de Griffith é dado por:

$$\rho = \left( \frac{8a_0}{\pi} \right) \quad (6.349)$$

que corresponde a  $\rho \cong 2,5465a_0$ . Isto parece sugerir um raio de curvatura mínimo.

Se redefinirmos o critério de Griffith mostrado em (6.346) em termos da função do raio de curvatura definida em (6.345) este critério fica modificado da seguinte forma:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g(\rho, a_0)} \quad (6.350)$$

E elaborando-se a expressão (6.341) em termos da taxa de energia elástica liberada,  $G$ , e do critério de Griffith- Irwin, obtém-se a seguinte relação:

$$G = \frac{\pi\sigma_f^2 L_0}{E} \geq 2\gamma_e \left( \frac{\pi\rho}{8a_0} \right) \quad (6.351)$$

ou

$$G = \frac{\pi\sigma_f^2 L_0}{E} \geq 2\gamma_e g(\rho, a_0) \quad (6.352)$$

Alves em 2005 propôs uma reformulação para o critério de Griffith-Irwin levando em conta a rugosidade da trinca

$$G \geq 2\gamma_e \frac{dL}{dL_0} \quad (6.353)$$

Comparando-se a equação (6.351) com a equação (6.353) proposta por Alves (2005), onde:

$$G_0 = \frac{\pi\sigma_f^2 L_0}{E} \geq 2\gamma_e \left( \frac{dL}{dL_0} \right) \quad (6.354)$$

E generalizando essas equações obtém-se uma expressão que une os quatro critérios de fratura mencionados acima, da seguinte forma:

$$G = \frac{\pi\sigma_f^2 L_0}{E} \geq 2\gamma_e g(\rho, a_0) \frac{dL}{dL_0} \quad (6.355)$$

Este último desenvolvimento mostra que os critérios de fratura citados anteriormente são unidos por uma única expressão, cujos valores mudam conforme a condições do material ou a montagem experimental.

Generalizando ainda a equação (6.341) obtém-se uma expressão que une os quatro critérios de fratura mencionados acima, da seguinte forma:

$$\sigma_f = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{g(\rho, a_0) \frac{dL}{dL_0}} = \left( \frac{2\gamma_e E}{\pi L_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{f(L_0, \rho, \xi, a_0)} \quad (6.356)$$

ou

$$G = \frac{\pi\sigma_f^2 L_0}{E} \geq 2\gamma_e f(L_0, \rho, \xi, a_0) \quad (6.357)$$

onde  $f(L_0, \rho, \xi, a_0)$  é uma função que deve retratar tanto a dependência do raio de curvatura da expressão (6.345) quanto a dependência do tamanho da trinca  $L_0$  e de sua rugosidade  $\xi(l_0, L_0) = dL/dL_0$ . da seguinte forma:

$$f(L_0, \rho, \xi, a_0) = g(\rho, a_0) \frac{dL(l_0, L_0)}{dL_0} \quad (6.358)$$

Considerando a trinca sem rugosidade isto é  $dL/dL_0 = 1$ , a equação de Inglis dada em (6.341) é obtida a partir de (6.356) quando  $g(\rho, a_0) = \pi\rho/8a_0$ . Da mesma forma o critério de Griffith é obtido quando se considera que o produto das funções  $g(\rho, a_0)dL(l_0, L_0)/dL_0 = 1$  em (6.356).

Por outro lado, o critério de Irwin é também obtido quando além de  $g(\rho, a_0)dL(l_0, L_0)/dL_0 = 1$ , considera-se que a função  $g(\rho, a_0) = \pi\rho/8a_0$  e que a rugosidade é  $dL/dL_0 = \pi/2 \cong 1,5708$ , dando com resultado um raio de curvatura mínimo de

$$\rho = 4a_0 \quad (6.359)$$

Esta deve ser uma expressão para um raio de curvatura mínimo de uma trinca, que possui uma rugosidade de  $dL/dL_0 = \pi/2 \cong 1,5708$ . Isto parece sugerir tanto um raio de curvatura mínimo, quando uma rugosidade adequada para essa raio de curvatura mínimo, útil na obtenção de um comprimento de microtrinca (trinca de tamanho mínimo) para um escalonamento da rugosidade da trinca em termos da geometria fractal.

Observa-se que o critério de Irwin prevê a influência da rugosidade associada ao raio de curvatura de uma trinca. Desde que se considere a complementaridade das expressões (6.353) e (6.351) donde se obtém de forma geral, que a variação com comprimento rugoso com o comprimento nominal (projetado) possui uma dependência do tipo:

$$f(L_0, \rho, \xi, a_0) = g(\xi, L_0) \frac{dL}{dL_0} = \left( \frac{\pi\rho}{16a_0} \right) \frac{dL}{dL_0} \quad (6.360)$$

Portanto, um critério geral de fratura envolvendo tanto a rugosidade da trinca quanto o seu raio de curvatura pode ser dado por:

$$\begin{aligned} G &\geq 2\gamma_e f(L_0, \rho, \xi, a_0) \\ G &\geq 2\gamma_e g(\xi, L_0) \frac{dL}{dL_0} \end{aligned} \quad (6.361)$$

ou

$$G \geq 2\gamma_e \left( \frac{\pi\rho}{16a_0} \right) \frac{dL}{dL_0} \quad (6.362)$$

Observa-se, dos estudos realizados, na secção - 2. 9, que para uma trinca se propagar em um meio irregular ela precisa interagir com uma microestrutura (pontos concentradores de tensão) na sua frente. Viu-se também que a rugosidade atrás da trinca possui pouca influência no processo instantâneo de crescimento. Mas é a rugosidade na ponta da trinca e a rugosidade que vai se formar, devido aos defeitos da microestrutura na frente da trinca, que causa grande influência no surgimento de um campo de tensão irregular e conseqüentemente o surgimento de uma trinca rugosa. Dessa forma, o critério de fratura sugerido na equação (6.362) parece levar em conta todas essas situações levantadas nesse trabalho.

## **Capítulo – VII**

# **APLICAÇÕES, VALIDAÇÃO DOS MODELOS, RESULTADOS, ANÁLISES EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES**

*A cana trilhada, não a quebrará, nem apagará o pavio que fumeja; em verdade trará a justiça*  
(Isaiás 42,3)

### **7.1 – Introdução**

Apresenta-se nessa parte a descrição dos materiais e dos procedimentos experimentais realizados nos ensaios de fratura para obtenção da curva  $J-R$  experimental. O objetivo é verificar a validade dos modelos da superfície de fratura e da curva  $J-R$  desenvolvidos neste trabalho, utilizando-se a geometria fractal. Foram analisadas as superfícies de fratura de materiais metálicos (materiais dúcteis), com o intuito de verificar em qual material, (ou em quais materiais), os modelos propostos neste trabalho melhor se aplicam. Nos parágrafos que se seguem, apresentam-se os métodos de obtenção dos materiais e a análises realizadas. Os resultados experimentais das medidas referentes aos ensaios com crescimento estável de trinca (processo de fratura quase-estático) serão apresentados. Estes ensaios foram realizados pelos seguintes métodos: (i) ensaio de flexão em três pontos, utilizando múltiplos corpos de prova, para a determinação da tenacidade à fratura, e (ii) ensaio de variação da flexibilidade elástica, utilizando-se apenas um corpo de prova, para a determinação da curva  $J-R$ , para diversos tipos de amostras de materiais metálicos (solda em aço HSLA). Para a comprovação do modelo fractal proposto neste trabalho, foram feitas as devidas análises fractográfica e fractal das superfícies e perfis de fratura, produzidas pelos ensaios. Os ajustes do modelo aos resultados de curvas  $J-R$ , para os materiais metálicos (dúcteis) foram realizados.

## 7.2 – Materiais Utilizados

O estudo experimental da Mecânica da Fratura em trincas rugosas foi feito em dois tipos de materiais: soldas metálicas e um polímero poliuretano. Esses materiais foram ensaiados no Departamento de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo e foram gentilmente cedidos através da estudante Rosana Vilarim da Silva para ajuste e verificação dos modelos apresentados nesse trabalho.

### 7.2.1 – Os Corpos de Prova do Material Metálico do Processo de Soldagem

Os corpos de prova usados neste trabalho foram extraídos de metais de solda multipasso de aço de material de *Alta Resistência e Baixa Liga* (ARBL). Eles foram divididos em dois grupos baseados no processo de soldagem utilizado e na composição macroestrutural. Foram utilizados dois tipos de soldas, as quais foram produzidas pela deposição de múltiplos passes (Da Silva 1998a). O primeiro grupo (as soldas foram designadas por A1 e A2) é composto de metais de adição constituído de um aço ARBL de *C-Mn acalmado com Titânio*. As soldas desse grupo foram preparadas pelo processo de eletrodo revestido e o metal da solda foi unido por meio do processo de arco metálico manual. Este foi obtido pelo depósito de seis camadas, com dois passes por camada. O segundo grupo (as soldas foram designadas por B1 e B2) também são constituídas de um aço ARBL de *C-Mn acalmado com Titânio*; porém, outros elementos de liga foram adicionados com a finalidade de elevar a temperabilidade e aumentar a dureza. Neste caso, a soldagem foi feita utilizando-se um processo de arco submerso, sendo que o metal de solda foi composto pelo depósito de oito camadas, com o número de passes por camada variando da base para o topo.

Tabela - VII. 1: Composição química dos metais de solda (% em peso).

<b>Solda</b>	<b>C</b>	<b>Mn</b>	<b>Ti*</b>	<b>Ni</b>	<b>Cr</b>	<b>Al*</b>	<b>O*</b>	<b>N*</b>	<b>B*</b>	<b>Si</b>	<b>Mo</b>	<b>V*</b>	<b>W*</b>
<b>A1</b>	0,07	1,4	300	0,85	---	80	350	70	<5	0,42	---	---	---
<b>A2</b>	0,07	1,4	230	0,83	---	70	400	75	<5	0,40	---	---	---
<b>B1</b>	0,05	1,07	490	2,38	0,60	110	650	55	---	0,58	0,55	230	380
<b>B2</b>	0,05	1,32	760	2,65	0,05	100	750	120	---	0,65	---	230	510

Obs: (i) As quantidades de S e P estão na faixa de 0,022 à 0,024 (% em peso); (ii) \* valores em ppm.

Os metais de solda A1 e A2 possuem uma composição química similar. Estes foram produzidos utilizando-se os mesmos parâmetros de soldagem. O mesmo aconteceu com as soldas B1 e B2. Portanto para uma maior facilidade na análise, os metais das soldas foram divididos em dois grupos: grupo A, soldas (A1 e A2) e grupo B, soldas (B1 e B2). A composição química e as propriedades mecânicas elásticas de ambos os metais de solda são listadas na Tabela - VII. 1 e



Tabela - VII. 2, respectivamente. Essas tabelas são usadas nos cálculos de  $J_{IC}$  e de outras quantidades físicas necessárias à Mecânica da Fratura Clássica para ajustar as equações fornecidas pelo modelo proposto com os resultados experimentais.

Tabela - VII. 2: Valores do limite de escoamento e de resistência, dos metais de solda estudados, obtidos por Bose Filho [1995].

T (°C)	Limite de escoamento, MPa				Limite de resistência, MPa			
	A1	A2	B1	B2	A1	A2	B1	B2
24	516	484	771	757	771	577	909	798
-10	527	518	-	-	777	610	-	-
-20	570	531	-	-	779	622	-	-
-25	577	537	-	-	780	628	-	-
-50	613	568	-	-	784	657	-	-
-65	634	586	-	-	786	675	-	-
-85	663	611	-	-	790	698	-	-

Os ensaios de fratura foram realizados em amostras de soldas metálicas. Com a propósito de aplicar o modelo fractal proposto, um procedimento experimental para a obtenção das curvas  $J-R$  experimentais é apresentado.

### 7.2.2 – Os Corpo de Prova do Material Polimérico

O material polimérico utilizado neste trabalho é um poliuretano fornecido pelo Grupo de Química Analítica e Tecnologia de Polímeros (GQATP) da USP – São Carlos. Esse apresenta-se na forma de bicomponente, constando de um polioliol e um pré-polímero.

Tabela - VII. 3: Propriedades mecânicas de tração, flexão e dureza, da resina poliuretana estudada (a margem de erro é dada a partir do desvio padrão da medida)

Resistência à tração no escoamento, $\sigma_R$ , (MPa)	Módulo de Elasticidade, $E$ , (GPa)	Alongamento (%)	Tensão de flexão para 5% de deformação	Módulo de Elasticidade em flexão (GPa)	Coefficiente de Poisson, $\nu$ ,	Dureza Shore D <sub>s</sub>
40.7 ± 2.2	0.8 ± 0.0	12 ± 3.4	70.6 ± 0.9	1.98 ± 0.0	0,3799 ± 0,01	77

O polioliol foi sintetizado a partir do óleo de mamona. O pré-polímero foi sintetizado a partir do difenilmetano di-isocianato (MDI) e pré-polymerizado com um polioliol também derivado do óleo de mamona, permanecendo com um percentual de isocianato livre para posterior reação. O poliuretano foi preparado<sup>(21)</sup> pela mistura dos dois componentes, polioliol e pré-polímero na proporção de 1:1. As propriedades mecânicas de tração, flexão e dureza são apresentadas na Tabela

<sup>21</sup> por Rosana Vilarim da Silva, doutoranda do Departamento de Materiais da Escola de Engenharia de São Carlos, conforme descrito em Da Silva [2000].

- VII. 3.

### 7. 3 – Métodos dos Ensaio, Procedimentos e Testes Experimentais para os Materiais utilizados

A partir de agora serão descritos os métodos experimentais realizados nas amostras de material metálico, polimérico (Da Silva 2000), para a obtenção das propriedades de fratura de interesse dos cálculos realizados neste trabalho, para comparação com o modelo proposto. Os materiais e as amostras de solda metálica (Da Silva 1998a; 1998b), utilizadas neste parte, foram retirados de uma placa soldada e preparados de acordo com a descrição contida na secção – 7.2.1.

#### 7.3.1 - Métodos para o Material Metálico

Para se obter as superfícies de fratura foram realizados ensaios pela técnica de flexibilidade elástica (ou método de descarregamento elástico) utilizando-se o conceito de curva  $J-R$  segundo a norma ASTM - E1737 (1996), conforme a descrição contida em Da Silva (1998a). Posteriormente, as amostras fraturadas foram cedidas ao estudante de doutorado, Lucas Máximo Alves, para a realização, no Departamento de Física e Ciências dos Materiais (FCM-USP São Carlos), das devidas análises fractográfica, perfilométrica e fractal das superfícies de fratura, com a finalidade de testar a validade dos modelos desenvolvidos neste trabalho.

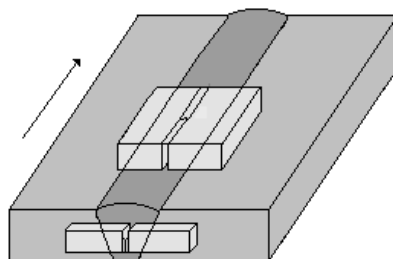


Figura - 7. 1. Desenho esquemático mostrando a posição de retirada dos corpos de prova em relação à junta soldada.

Os corpos de prova foram confeccionados de tal maneira que o metal da solda ficou localizado no centro deste. O entalhe também foi posicionado no centro, para a realização posterior da pré-trinca por fadiga. A Figura - 7. 1 mostra um esquema da posição de retirada dos corpos de

prova em relação à junta soldada, e na Figura - 7.2 são mostradas as dimensões dos mesmos.

Dois métodos foram utilizados para a determinação das propriedades mecânicas dos materiais metálicos: o primeiro, utilizando-se apenas um corpo de prova, por ensaio de variação da flexibilidade elástica, para a determinação da curva  $J-R$ , e o segundo, utilizando-se múltiplos corpos de prova, por ensaio de flexão em três pontos, para a determinação da tenacidade à fratura, conforme será descrito a seguir.

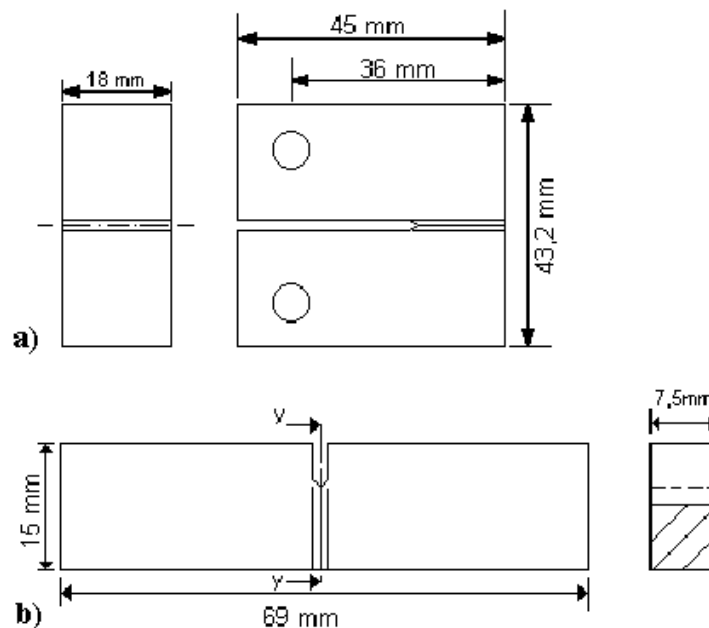


Figura - 7.2. Dimensões dos corpos de prova, (a) corpo de prova C(T) e (b) corpo de prova SE[B].

No caso dos corpos de prova do tipo C(T) (Figura - 7.2a), com soldas do grupo A (A1 e A2), os ensaios foram realizados à temperatura ambiente e também a  $-10$ , e  $-20^{\circ}\text{C}$ . enquanto que para as soldas desse grupo com corpos de prova do tipo SE(B) (Figura - 7. 1b) os ensaios ocorreram nas temperaturas de  $-20$ ,  $-25$ ,  $-50$ ,  $-65$ , e  $-85^{\circ}\text{C}$ .

Para as soldas do grupo B (B1 e B2), estes ensaios foram realizados somente à temperatura ambiente. Isto porque as soldas deste grupo apresentaram temperatura de transição dúctil-frágil próxima da temperatura ambiente (Bose Filho, 1995). Por segurança, foi utilizado controle de deslocamento nos corpos de prova, ensaiados nas temperaturas de  $-10$  e  $-20^{\circ}\text{C}$ . Enquanto que nas soldas do grupo B, usou-se somente a temperatura ambiente, pela razão acima citada.

Os ensaios a baixas temperaturas foram realizados em uma câmara ambiental INSTRON, modelo 3111, que permite ensaios em temperaturas entre  $-100$  e  $200^{\circ}\text{C}$ . Cada corpo de prova foi mantido por um período mínimo de  $20\text{min}$  na temperatura desejada. Um extensômetro permite o registro da abertura da trinca. Um termopar foi fixado próximo ao entalhe, para medida da

temperatura.

### 7.3.2 – O Ensaio de Tenacidade à Fratura

A avaliação da tenacidade à fratura foi feita usando-se o conceito de integral- $J$  e a técnica de flexibilidade elástica com descargas parciais de 15% da carga máxima. Os testes foram executados em uma máquina de ensaio MTS810 (Sistema de Teste de Materiais) a uma temperatura ambiente, de acordo com a norma ASTM E1737-96. Entalhes foram feitos em uma única extremidade dos corpos de prova de ensaio por flexão SENB, e dos corpos prova de ensaio por tração compacta CT, e ambas as amostras continham entalhes laterais e possuíam espessura de 7.5 e 18 mm, respectivamente. Uma curva  $J$ - $R$  para cada corpo de prova testado foi obtida. A análise de superfície de fratura foi executada usando microscópio eletrônico de varredura, SEM.

### 7.3.3- O Ensaio de Curva $J$ - $R$

A determinação da tenacidade à fratura foi realizada usando-se o conceito de *integral-J*. Os ensaios foram executados conforme a norma ASTM - E1737 (1996). Para tanto, foram utilizados corpos de prova SE(B), contendo entalhes laterais da ordem de 20% da espessura do corpo de prova com  $w=15mm$ ,  $B=7,5mm$  ( $B_N=6mm$ ) e  $L_{oc}/w=0,6$ . Estes corpos de prova foram pré-trincados por fadiga, conforme a norma ASTM - E1737 (1996), usando uma razão de carga,  $r=0,1$ , e uma frequência de 30Hz. Foi empregado um fator de intensidade de tensão máximo,  $K_{máx}$ , de aproximadamente  $30MPam^{1/2}$ , para os últimos 1,3mm de crescimento da pré-trinca. A monitoração ótica do crescimento da pré-trinca, por fadiga, foi realizada através de uma luneta, adaptada para esta finalidade. Após a execução da pré-trinca, os corpos de prova SE(B) (Figura - 7.2b) foram então ensaiados por flexão a três pontos, com controle de deslocamento.

Foram utilizados também corpos de prova compacto, C(T) (Figura - 7.2a), contendo entalhes laterais também da ordem de 20% da espessura, com  $w=36mm$ ,  $B=18mm$  ( $B_N=14.4mm$ ) e  $L_{oc}/w=0,6$ . Estes corpos de prova foram pré-trincados por fadiga, conforme a norma ASTM - E1737 (1996), com um  $K_{máx}$  final de  $40MPam^{1/2}$ , razão de carga,  $r=0,1$  e uma frequência de 30Hz. Após a execução da pré-trinca, os corpos de prova foram ensaiados com controle de deformação. Ambos os tipos de corpos de prova foram ensaiados utilizando-se a técnica da variação da flexibilidade elástica, com os descarregamentos parciais de 15% da carga máxima. A identificação dos corpos de prova foi feita da seguinte forma: solda (A1, A2, B1, B2), seguida pelo tipo do corpo de prova (SE(B) ou C(T)) e a numeração dos mesmos, por exemplo, A1SE(B)3 e B2CT1.

Para a realização dos ensaios foi utilizado o programa denominado de  $J_{IC}$  759.50 versão V2.0A, desenvolvido pela MTS Systems Co. Este programa é particularmente indicado para a

determinação de valores  $J$  iniciais, de acordo com as normas ASTM – E813, nas versões 1981 e 1987. O mesmo permite a utilização de corpos de prova compacto, C(T), ou de flexão a três pontos, SE(B). O ensaio pode ser conduzido com controle de deslocamento do curso do pistão ou com controle da abertura do extensômetro (controle de COD). Neste trabalho, foi utilizada a norma ASTM - E1737, (1996), que juntamente com a norma ASTM E1820 (1996) são as publicações mais recentes para a caracterização da tenacidade à fratura, utilizando o conceito de *integral-J*. Como o programa  $J_{IC}$  759.50, utilizado nos ensaios, é específico para a norma ASTM – E813 nas versões de 1981 e 1987, é, portanto, necessário que, ao final do ensaio, os valores de  $J$  sejam corrigidos segundo as especificações da norma atual. Esta correção é necessária porque a norma ASTM - E1737 considera o crescimento estável de trinca durante o ensaio, o que não acontece na norma ASTM – E813. O programa  $J_{IC}$  759.50 permite corrigir os valores do comprimento inicial e final da trinca ( $L_{oc}$ ) e ( $L_o$ ) após o ensaio. Com este propósito, após o ensaio, as superfícies de fratura dos corpos de prova foram demarcadas através da técnica da oxidação seletiva; para isto, os corpos de prova foram mantidos à temperatura de  $400^\circ\text{C}$  por um período de aproximadamente 20min e então rompidos em nitrogênio líquido. As medidas de comprimento de trinca foram tomadas através de uma mesa micrométrica. O valor médio de crescimento ( $\overline{\Delta L_o}$ ) foi obtido pela média de nove medidas, igualmente espaçadas, ao longo da espessura líquida do corpo de prova ( $B_N$ ).

A correção dos valores de  $J$  foi realizada através da seleção de determinados conjuntos de pontos de dados ( $\Delta L_o, J$ ), de tal forma que tanto o crescimento médio da trinca  $\Delta L_o$ , quanto  $J$  estivessem dispostos de modo crescente. A correção foi realizada ponto a ponto até o nível máximo de crescimento de trinca alcançado, segundo as expressões fornecidas pela norma ASTM - E1737 (1996). Após a correção dos dados foram obtidas as curvas  $J-\Delta L_o$ , também denominadas de curvas  $J-R$ . O ajuste das mesmas foi feito segundo uma lei de potência tal como é recomendada pela norma ASTM - E1737 (1996). A expressão matemática para o cálculo de  $J$  segundo a norma ASTM – E813 (1987) é utilizada como ponto de partida para a correção dos valores de  $J$ . Observa-se grande semelhança entre as expressões das duas normas, a menos obviamente do fator de correção para o crescimento de trinca na ASTM - E1737 e do fato da ASTM – E813 utilizar o ligamento original do corpo de prova, enquanto que a ASTM - E1737 utiliza o ligamento instantâneo.

#### 7.3.4 – Métodos para o Material Polimérico

Para se obter as superfícies de fratura foram realizados ensaios de tenacidade a fratura com múltiplos corpos de prova, utilizando-se o conceito de curva  $J-R$  segundo a norma ASTM - E1737 (1996). O procedimento de ensaio para a obtenção das curvas  $J - R$  foi diferente daquele utilizados para as soldas metálicas. Como os polímeros são materiais viscoelásticos, a Técnica da

Variação da Flexibilidade Elástica, (utilizada no caso das soldas metálicas) já não é mais adequada. No caso do polímero foram necessários de 8 a 10 corpos de prova idênticos para se obter cada curva  $J - R$ . Logo cada ponto da curva é referente a um corpo de prova. Os dados para as amostras *PU0.5* e *PU1.0* são idênticos, o que mudou foi a taxa de carregamento utilizada no ensaio. A amostra *PU0.5* foi ensaiada a uma taxa de  $0,5\text{mm}/\text{min}$  e a amostra *PU1,0* foi ensaiada a uma taxa de  $1,0\text{mm}/\text{min}$ . Em seguida essas amostras foram cedidas para a análise fractográfica, a qual foi feita de forma idêntica àquela realizada para as amostras de materiais metálicos.

## 7. 4 – Métodos de Análise Fractal das Superfícies de Fratura

### 7.4.1- Análise Fractal das Superfícies de Fratura

A análise fractográfica da fratura, nos materiais metálicos, foi feita por microscopia eletrônica de varredura (MEV) na região da trinca onde vários campos ao longo de toda a espessura fraturada foram capturados. Em seguida, foi efetuado o devido processamento das imagens digitalizadas, obtidas por MEV, utilizando-se um software apropriado (Scion Image for Windows). Este processamento digital das imagens produziu outras imagens análogas àquelas obtidas pelo método das ilhas-cortadas de Mandelbrot (Mandelbrot e Passoja, 1984), porém, sem danificar as amostras.

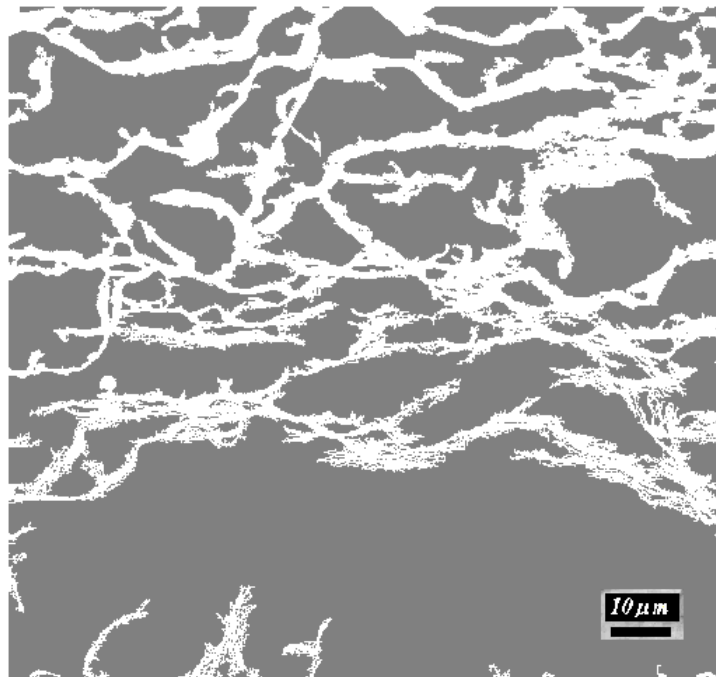


Figura - 7. 3. Foto de uma superfície de fratura tratada para se obter ilhas de contraste da amostra A1CT2, com má definição do contorno dessas ilhas

Por intermédio do software (Scion Image for Windows) aplicou-se filtros gráficos tipo

“sharpen”, “threshold” e “binary”, sobre as imagens das micrografias, os quais permitiram obter estruturas gráficas, que foram chamadas de “ilhas de contraste”. Estas “ilhas” são formadas pelo contorno dos *dimples* e das demais microestruturas presentes nas imagens originais, conforme mostra a Figura - 7. 3 e Figura - 7. 4.

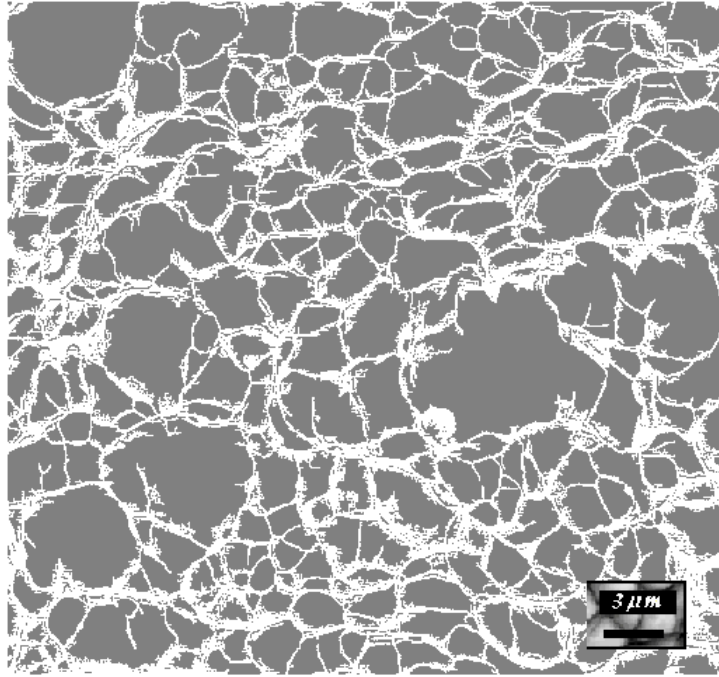


Figura - 7. 4. Foto de uma superfície de fratura tratada para se obter ilhas de contraste da amostra B2CT2, com boa definição do contorno dessas ilhas

#### 7.4.2 – Análise das superfícies de fratura pelo Método das “Ilhas de Contraste”

A análise de uma superfície visa extrair informações que possam caracterizar a mesma, evidenciando suas propriedades geométricas e classificando-as em relação às demais. As análises das superfícies de fratura foram feitas utilizando-se uma técnica criada para este fim, denominada de “Método de Análise das Ilhas de Contraste” (MAICon) de forma análoga “Método de Análise das ilhas Cortadas” (MAIC ou Island Slit Method - ISM) de Mandelbrot, conforme descreve-se a seguir.

As análises fractais das superfícies de fratura obtidas por meio dos ensaios experimentais foram feitas utilizando-se o métodos das ilhas de contraste dado por:

$$A_{kr}^{1/2} \sim P_{kr}^{1/Ds} \quad (7. 1)$$

Após a obtenção das ilhas de contraste mostradas na Figura - 7. 3 e na Figura - 7. 4 procedeu-se à análise do contorno e da área dessas “ilhas”.

$$\log A_{kr} \sim 2 / D \log P_{kr} \quad (7. 2)$$

Usando-se a contagem de pixels foram obtidas as áreas e os perímetros de diferentes

"ilhas", contidas em figuras como esta. Por último, procedeu-se a análise fractal do contorno das microestruturas presentes nas superfícies de fratura, utilizando-se a relação matemática entre a área e o perímetro dessas "ilhas" (equação (7. 2)), para determinação da dimensão fractal da superfície de fratura.

#### 7.4.3 - Análise fractal auto-similar e auto-afim de superfícies

A perfilometria de superfície permite o cálculo da dimensão fractal pelo método Sand-Box ou Box-Counting (Bunde, 1994). Estes métodos consistem basicamente em obter medidas do perfil de fratura,  $L$ , em função de várias escalas de medida,  $\varepsilon$ , deste perfil (Figura - 7. 5a e Figura - 7. 5b).

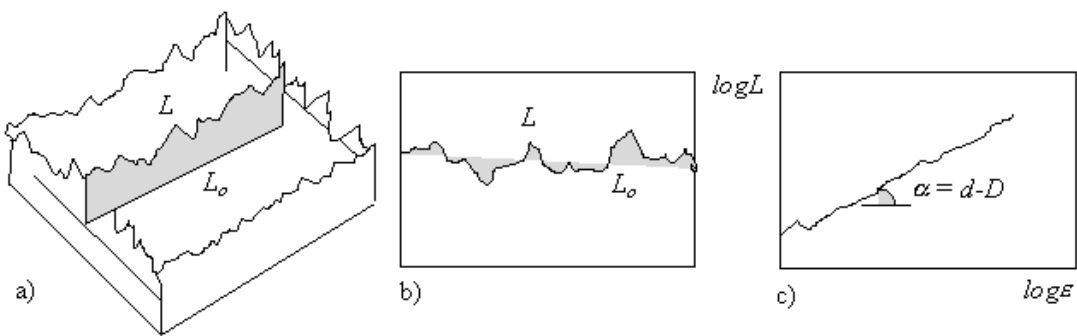


Figura - 7. 5. Método de medida da dimensão fractal. a) Superfície de fratura b) Perfil de fratura c) Gráfico de  $\log L \times \log \varepsilon$ , onde  $d = 1$ .

Os valores do logaritmo do comprimento do perfil,  $L$ , medido, graficado em função do logaritmo das escalas,  $\varepsilon$ , escolhidas arbitrariamente, tem como resultado uma linha reta, cuja inclinação dá a dimensão fractal do perfil (Figura - 7. 5c). Este tipo de análise pressupõe, grosseiramente, que a superfície a ser analisada possui algum tipo de escalonamento fractal no seu perímetro, permitindo que uma análise fractal ou multifractal seja realizada, onde o caso auto-similar é dado de acordo com (4. 91) por:

$$L = L_0 \varepsilon^{d-D}. \quad (7. 3)$$

Onde,  $d = 1$  e  $1 - D = H - 1$ .

Analicamente, para o caso de perfis, a relação fractal entre o comprimento real,  $L$ , e o comprimento projetado da trinca,  $L_0$ , de acordo com o modelo proposto no Capítulo - IV, é dado de forma idêntica à relação (4. 89), ou seja:

$$L = L_0 \left[ 1 + \varepsilon^{2(1-H)} \right]^{1/2} \quad (7. 4)$$

Para a Análise Fractal e Multifractal das superfícies de fratura analisadas foram utilizados os Métodos Sand-Box e Box-Counting. Os modelos que foram desenvolvidos neste



trabalho seguiram o formalismo matemático que já vinha sendo desenvolvido na literatura especializada, tal como o de Vicsék (1992), etc., e os métodos desenvolvidos por Alves (2005, 2010).

## **7.5 – Resultados Experimentais dos Materiais Metálico e Polimérico**

Nesta secção apresentam-se os resultados experimentais dos ensaios de fratura realizados para determinação das propriedades de fratura dos materiais testados.

Neste capítulo serão apresentados os resultados experimentais das medidas referentes aos ensaios com crescimento estável de trinca (processo de fratura quase-estática). Estes ensaios foram realizados pelos seguintes métodos: (i) ensaio de flexão em três pontos, utilizando múltiplos corpos de prova, para a determinação da tenacidade à fratura, e (ii) ensaio de variação da flexibilidade elástica, utilizando-se apenas um corpo de prova, para a determinação da curva  $J-R$ , para diversos tipos de amostras de materiais metálicos (solda em aço ARBL), e poliméricos (poliuretano). Para a comprovação do modelo fractal proposto neste trabalho, foram feitas as devidas análises fractográfica e fractal das superfícies e perfis de fratura, produzidas pelos ensaios. Os ajustes do modelo aos resultados de curvas  $J-R$ , para os materiais metálicos (dúcteis) e poliméricos foram realizados.

### *7.5.1- Análise das superfícies de fratura dos materiais metálicos*

Apresenta-se nesta secção as análises micrográficas das superfícies de fratura obtidas após os ensaios realizados, para o material metálico.

Os diferentes aspectos das superfícies de fratura são mostradas nas figuras que se seguem. Na Figura - 7. 6 observa-se a interface entre a pré-trinca por fadiga e a região de propagação estável, além da formação de microvazios. Desde a Figura - 7. 8 à Figura - 7. 11 observa-se a formação de microvazios na forma de “dimples”, ao contrário da Figura - 7. 6 e Figura - 7. 7 em que o contorno destes “dimples” não estão bem definidos. Em especial, na Figura - 7. 11, observa-se a presença de precipitados (pequenas esferas) no interior destes “dimples”, resultantes da precipitação de outra fase na microestrutura do material. Na Figura - 7. 12 observa-se que os “dimples” apresentam um aspecto mais “plástico” do que os demais.

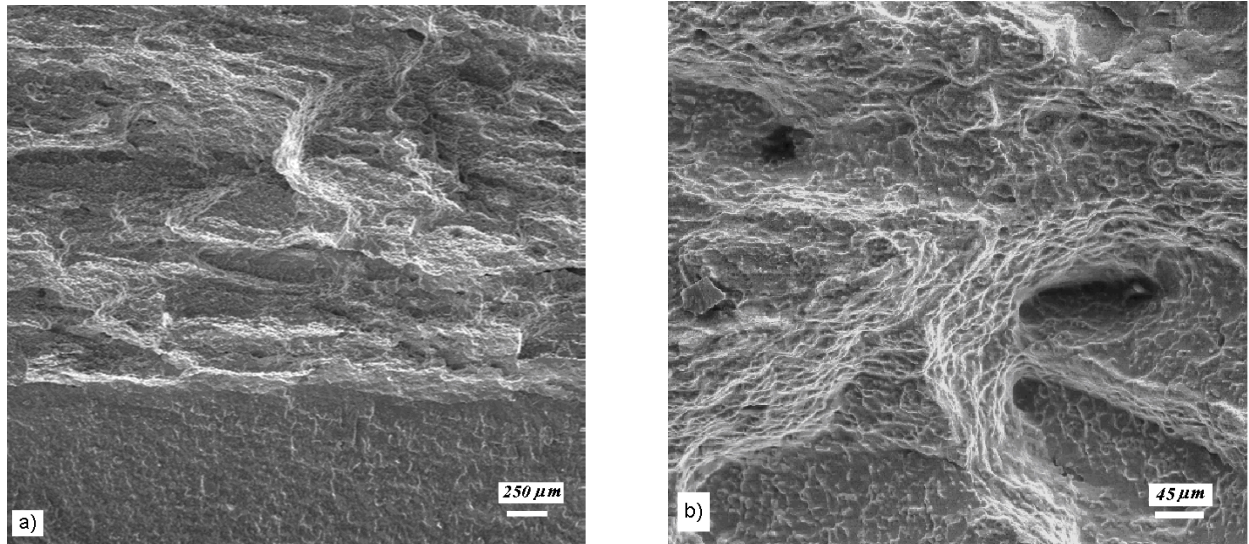


Figura - 7. 6. Corpo de prova A1CT1. (a) aspecto geral da superfície de fratura mostrando a interface entre a pré-trinca por fadiga e a propagação estável da trinca, Escala: 8mm : 200μm (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 11mm : 50μm.

A formação de microvazios e a coalescência deles é um processo dinâmico que acontece simultaneamente para vários pontos do material durante a propagação da frente da trinca. Isto acontece porque a fratura é um fenômeno de campo, no caso, campo de tensão x deformação, no interior do material. Durante este processo dinâmico é discutível a utilização de um modelo fractal único, conforme afirma Mandelbrot e Passoja (1984). O que se pode afirmar é que uma vez que a trinca esteja formada a sua invariância por transformação de escala (auto-afinidade ou auto-similaridade) retrata de forma espacial os efeitos deixados por este campo (no caso dimples) durante a propagação da trinca. Portanto, a descrição do crescimento fractal para a propagação da trinca contorna o efeito dinâmico e simultâneo da formação e coalescência dos microvazios, permitindo que uma descrição alternativa e equivalente para a propagação seja feita, imaginando-se um fractal em crescimento, conforme é mostrado em Alves (2001).

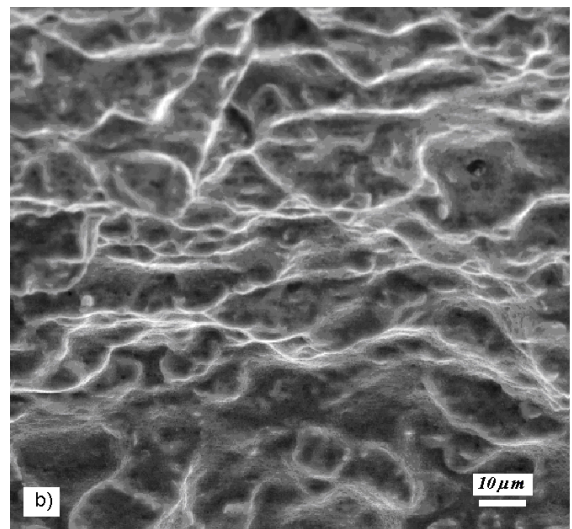
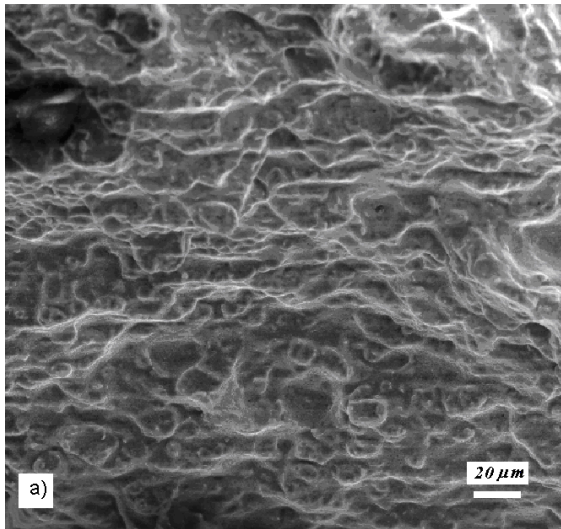


Figura - 7. 7. Corpo de prova A1CT2. (a) aspecto geral da superfície de fratura., (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.

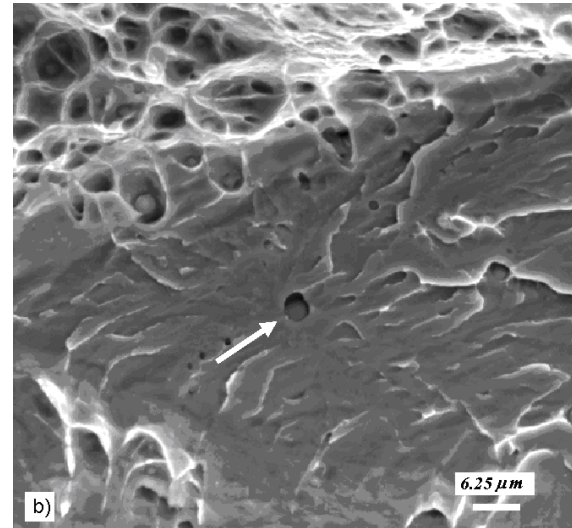
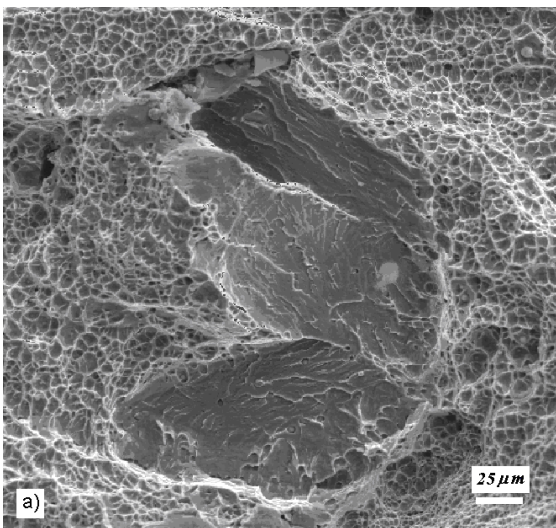


Figura - 7. 8. Corpo de prova B1CT6. (a) Fotomicrografia mostrando região de clivagem Escala: 8mm : 20μm, (b) detalhe do sítio de início da fratura mostrando a inclusão nucleadora (seta) do processo de clivagem, Escala: 8mm : 5μm.

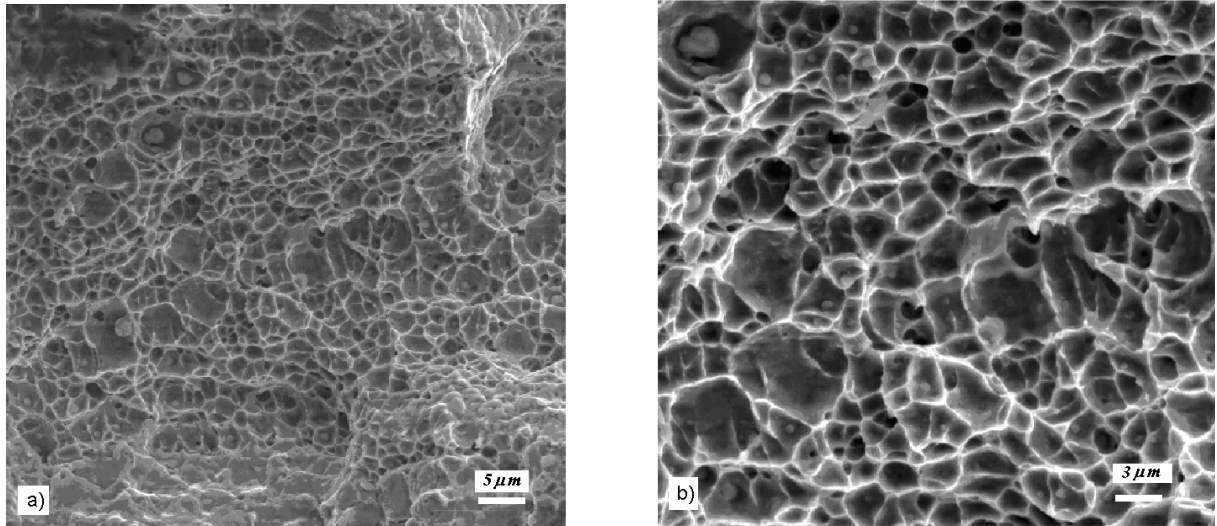


Figura - 7. 9. Corpo de prova B2CT2. (a) aspecto geral da superfície de fratura. (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.

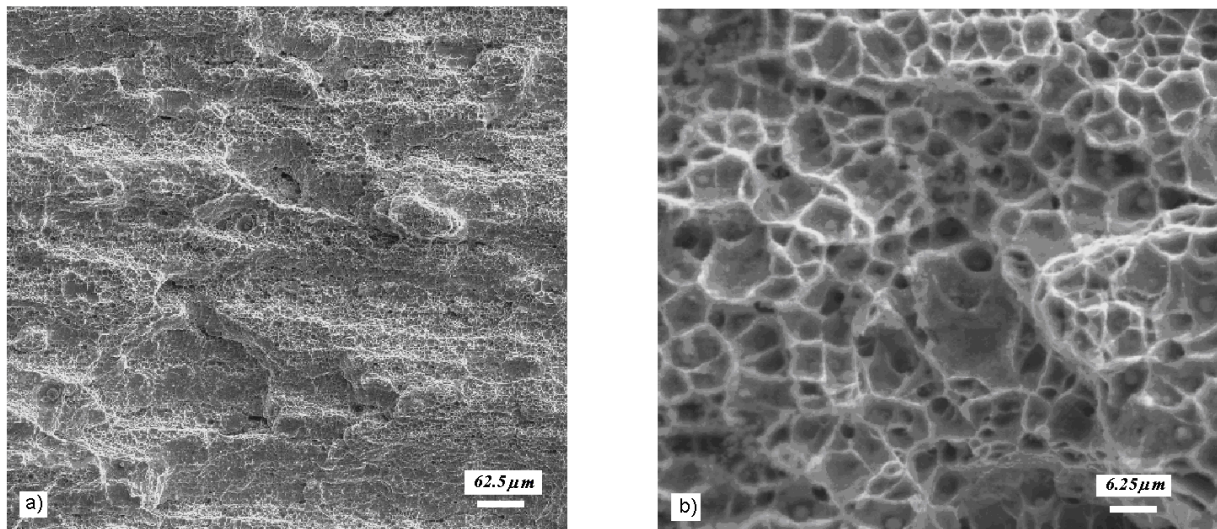


Figura - 7. 10. Corpo de prova B2CT7. (a) aspecto geral da superfície de fratura, Escala: 8mm : 50μm (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 8mm : 5μm.

Observando-se o aspecto invariante, em diferentes escalas, dos dimples produzidos nas superfícies de fratura, constata-se a fractalidade dessas superfícies dentro de uma faixa de escala que permite observar essa “invariância por transformação de escala” ou auto-similaridade. Contudo, é possível que, para escalas maiores, apareçam outras estruturas que afetem a rugosidade das superfícies de fratura e, conseqüentemente, o valor da integral-J naquele ponto. Porém, é importante lembrar que a descrição fractal da rugosidade deve acumular no seu modelo todos os aspectos invariantes dentro de um intervalo que vai desde uma escala  $\epsilon_{min}$  até uma escala  $\epsilon_{max}$ . Nesta situação, uma discussão que pode ser feita é procurar saber qual é a forma geométrica que mais caracteriza a fractalidade da superfície de fratura para se usá-la como semente de um modelo fractal para um determinado intervalo de escala em consideração.

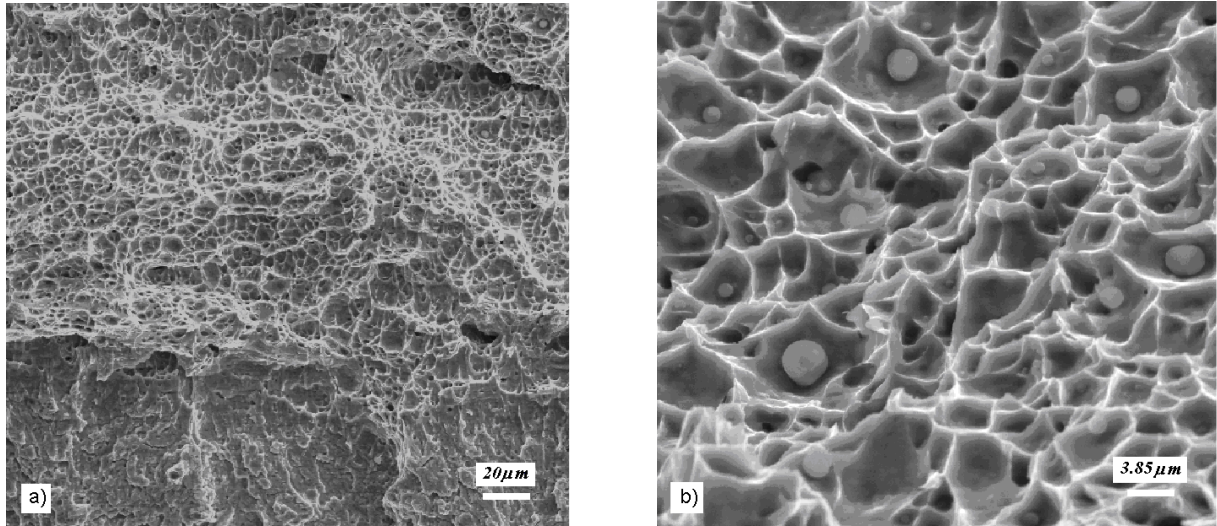


Figura - 7. 11. Corpo de prova B1SE[B]6 (a) aspecto geral da superfície de fratura mostrando a interface entre a pré-trinca por fadiga e a propagação estável da trinca, Escala: 10mm : 20 $\mu$ m (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 13mm : 5 $\mu$ m. Imagem: 8,4 x 8,6.

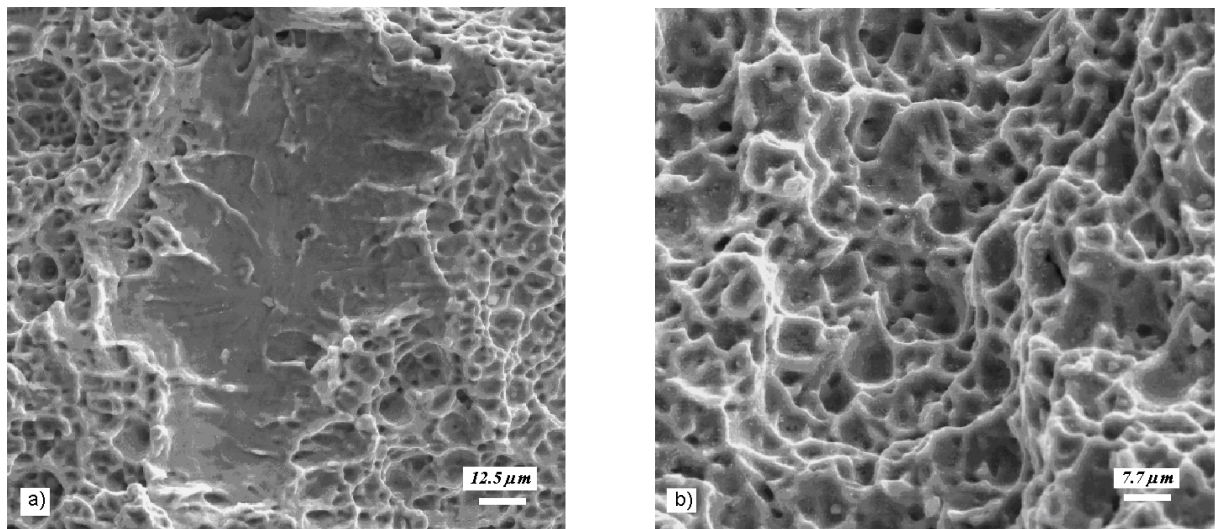


Figura - 7. 12. Corpo de prova B2SE[B]7 (a) exemplo de região de clivagem, presente durante o processo de extensão da trinca, Escala: 8mm : 10 $\mu$ m. (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca, Escala: 13mm : 10 $\mu$ m. Imagens: Ídem à anterior.

Portanto, relacionando-se a auto-similaridade fractal (o fato de um pequena região do fractal ser representativa do todo) com a “homogeneidade em escala” que o aspecto microestrutural (dimples, por exemplo) da superfície de fratura apresenta, dentro da faixa de escalas considerada pelo modelo proposto (vide secção 4.5.1 e

Figura - 4. 10 e Figura - 4. 11 das páginas 122 e 123 respectivamente), é possível compreender que a análise da rugosidade dentro desta faixa é capaz de retratar os principais mecanismos envolvidos na formação desta rugosidade. Contudo, se outros mecanismos de formação da rugosidade (além do exemplo dos dimples) estiverem presentes, e estes possuírem a mesma propriedade de “homogeneidade em escala” ou auto-similaridade, ainda assim a análise fractal da rugosidade, através do expoente Hurst, será capaz de detectá-los, mesmo que neste caso o valor de  $H$  seja diferente do primeiro, onde se considera a presença apenas dos dimples. Pois, o que importa é que a auto-similaridade fractal seja mantida. Desta forma, o contorno de um número

razoável destes “dimples” foi usado como “ilhas de contraste” na análise fractal que se segue.

### 7.5.2 - Determinação do expoente Hurst, $H$ .

A existência de um contorno irregular na forma de um dimple minúsculo que se reproduz em escala, quando um número enorme de dimples de diferentes tamanhos e contornos se somam, para formar um contorno maior, é que determina a existência das ilhas de contraste analisadas em diferentes escalas (Figura - 7. 4). Desta forma, a dimensão fractal  $D$  destas ilhas foi obtida a partir das micrografias das superfícies fraturadas, (Figura - 7. 6 a Figura - 7. 12), através do gráfico da expressão abaixo obtida a partir da equação (7. 1):

$$\ln A \approx \frac{2}{D} \ln P \quad (22), \quad (7. 5)$$

onde  $A$  é a área e  $P$  é o perímetro de uma dada "ilha". A inclinação  $2/D$  do gráfico forneceu o expoente Hurst (rugosidade) dado pela equação (4. 76).

A análise fractal para obtenção do expoente Hurst, por meio do método das ilhas de contraste, constitui uma alternativa para a obtenção deste parâmetro requerido pelo modelo fractal, e não é uma medida definitiva, como se pode pensar a princípio. Esta análise foi feita com a finalidade de que esta medida de  $H$  funcionasse como um parâmetro de entrada no ajuste do modelo, nos cálculos de regressão não-linear realizados via software. O mais correto seria realizar uma medida mais precisa sobre toda a superfície de fratura, tomando-se diferentes perfis ao longo da espessura do material, para que se tivesse uma amostragem completa do efeito da rugosidade ao longo de toda a superfície de fratura. Contudo, as variações das profundidades dos dimples nos metais ultrapassam o limite de variação vertical do rugosímetro, impedindo, desta forma, que se utilize um perfilômetro convencional nestas medidas, devido à limitação física de sua alavanca. Outra alternativa seria utilizar um perfilômetro a Laser, cujo princípio de medida da profundidade da rugosidade é ótico e não mecânico, não possuindo portanto nenhuma limitação física para a medição da profundidade dos dimples, ou mesmo do aparecimento de outras microestruturas. A Microscopia de Força Atômica (MFA) também poderia ser utilizada. Mas nessa técnica as escalas envolvidas são muito menores do que a escala mesoscópica do modelo fractal. Contudo, os resultados obtidos pela análise aqui apresentada corroboram a suposição de um modelo fractal para a superfície de fratura, pelo menos dentro de um intervalo de escalas que compreende as microestruturas analisadas. Esta comprovação é suficiente para corroborar a validade das equações (4. 89) e (7. 1) utilizadas na correção das equações da MFC pela rugosidade da superfície de fratura.

---

<sup>22</sup> Uma discussão sobre a validade desta relação (Área versus Perímetro) pode ser encontrada em Jens Feder, *Fractals*, capítulo 12, p. 200-211, Plenum Press, New York, 1989.

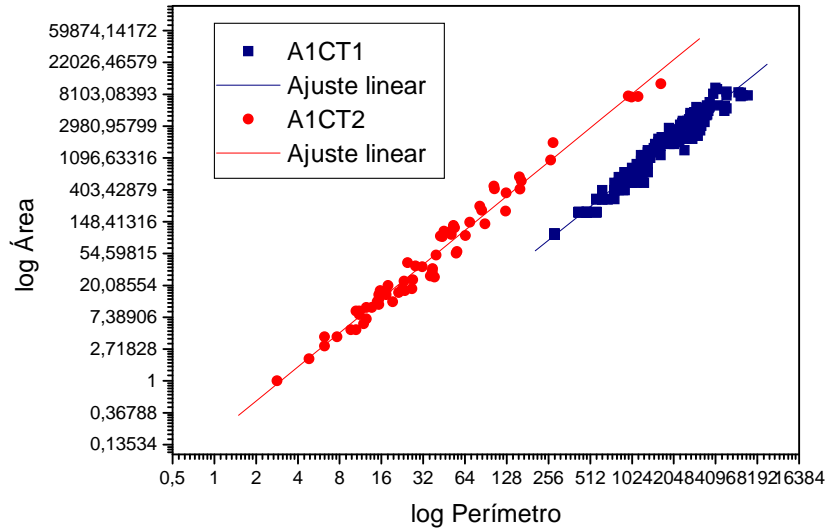


Figura - 7. 13. Gráfico do ajuste linear entre  $\log \text{Área}$  x  $\log \text{Perímetro}$  para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio.

O gráfico do logaritmo das áreas,  $A$ , versus o logaritmo dos perímetros,  $P$ , da equação (7. 5) é mostrado nas Figura - 7. 13 a Figura - 7. 16 para diferentes amostras.

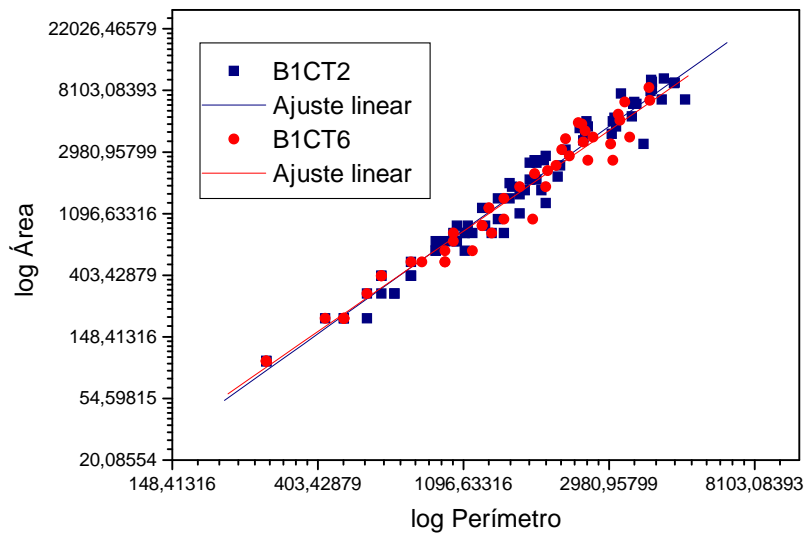


Figura - 7. 14. Gráfico do ajuste linear entre  $\log \text{Área}$  x  $\log \text{Perímetro}$  para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade.

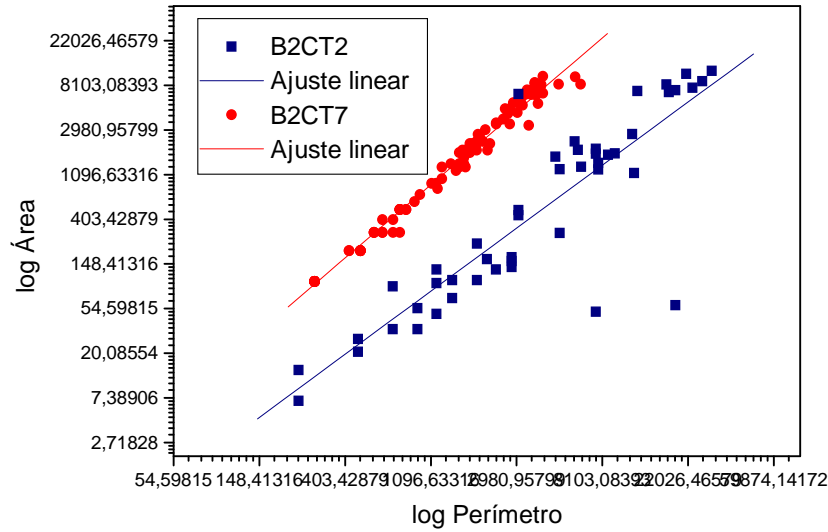


Figura - 7. 15. Gráfico do ajuste linear entre  $\log \text{Área}$  x  $\log \text{Perímetro}$  para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade.

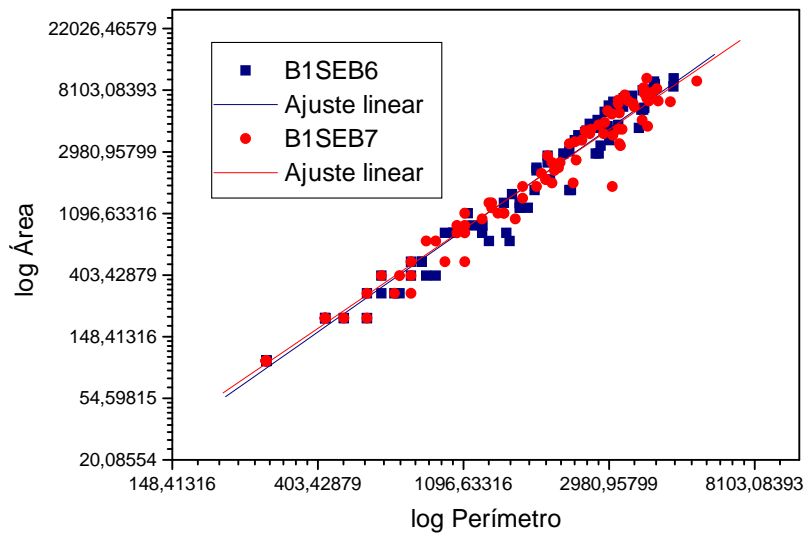


Figura - 7. 16. Gráfico do ajuste linear entre  $\log \text{Área}$  x  $\log \text{Perímetro}$  para o aço ARBLC-Mn acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade.

Os dados de coordenadas ( $\log P, \log A$ ) dos gráficos mostrados desde a Figura - 7. 13 até a Figura - 7. 16 foram ajustados por regressão linear, os quais forneceram as inclinações  $2/D$  dadas na Tabela - VII. 4, correspondendo ao expoentes de Hurst,  $H$ , e a dimensão fractal  $D$  para as diferentes amostras. Estes resultados assim obtidos, para os materiais metálicos, comprovam a existência da fractalidade das superfícies de fratura destes materiais, através da correlação entre a Área,  $A$ , e o Perímetro,  $P$ , das “ilhas de contraste” analisadas. Contudo, será mostrado nas Tabela - VII. 6 e na Tabela - VII. 7 a existência de um erro sistemático positivo nestas medidas.



### 7.5.3 – Ensaio e ajustes de curva $J-R$

Amostras dos resultados dos ensaios realizados, para obter as curvas  $J-R$ , dos materiais metálicos das soldas, são mostrados desde a Figura - 7.17 a Figura - 7.21. Os valores de  $J_{IC}$  e  $L_{oc}$  foram calculados de acordo com a norma ASTM - 813-89 (ASTM E813-89). Desde a Figura - 7.17 a Figura - 7.21 as curvas  $J-R$  medidas experimentalmente foram ajustadas através do modelo fornecido pelas equação (6. 282) e (6. 300) onde o fator multiplicativo,  $2\gamma_e + \gamma_p$ , foi obtido pelo ajuste juntamente com os valores de  $l_o$  e  $H$  para as diferentes amostras. Tipicamente, nestas figuras, estes valores mostraram-se compatíveis com os valores experimentais obtidos para materiais ductéis (ASTM - E1737 1996) e frágeis (Lin e Lai 1993; Dos Santos 1999). O crescimento das curvas  $J-R$  se acentua a medida que o expoente Hurst diminui de  $1,0$  para  $0,0$ , como pode ser visto na equação (6. 282) e na Figura - 6. 12.

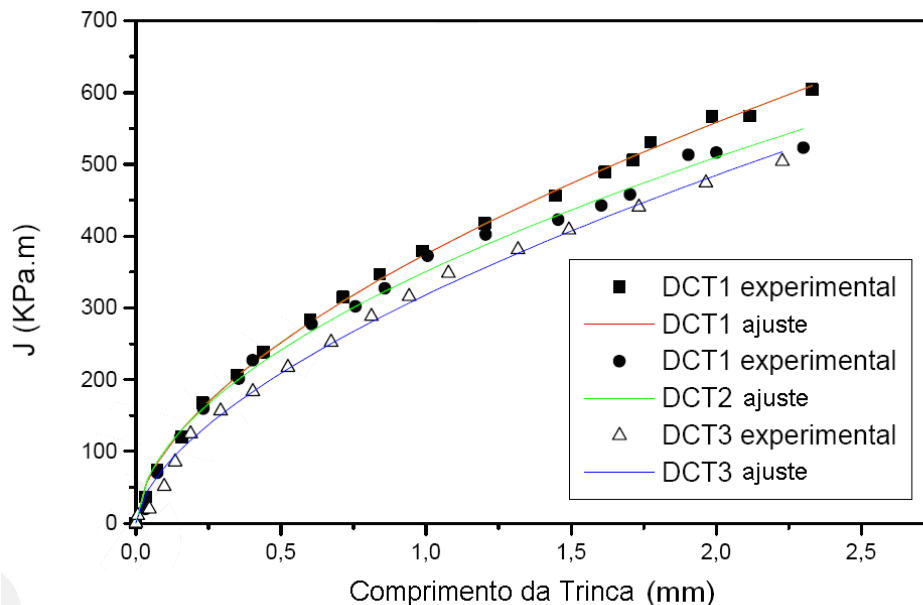


Figura - 7.17. Curva  $J-R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para os aços DCT1, DCT2 e DCT3.

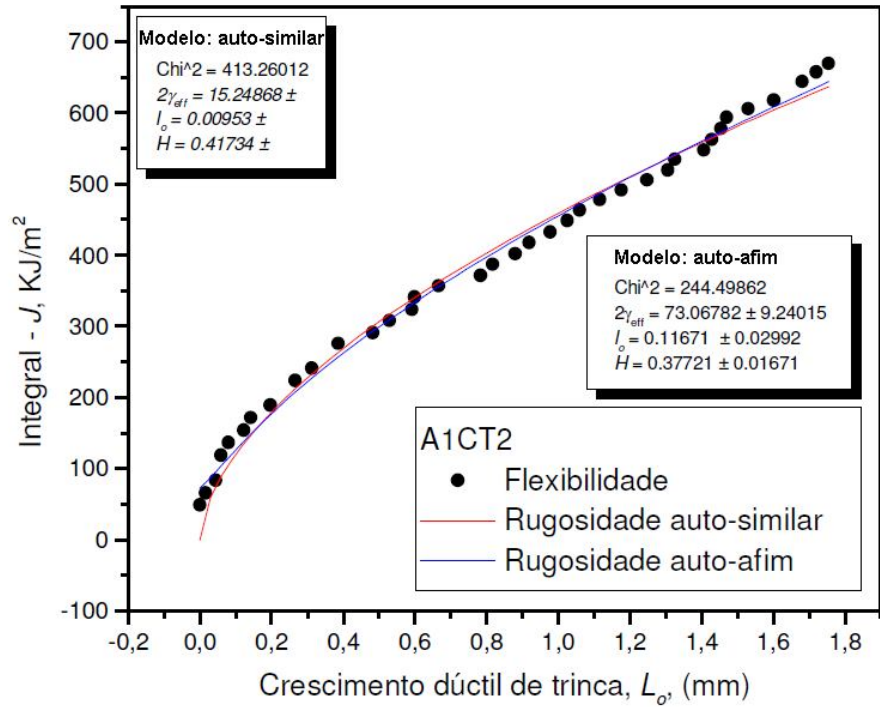


Figura - 7. 18. Curva  $J$ - $R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra A1CT2).

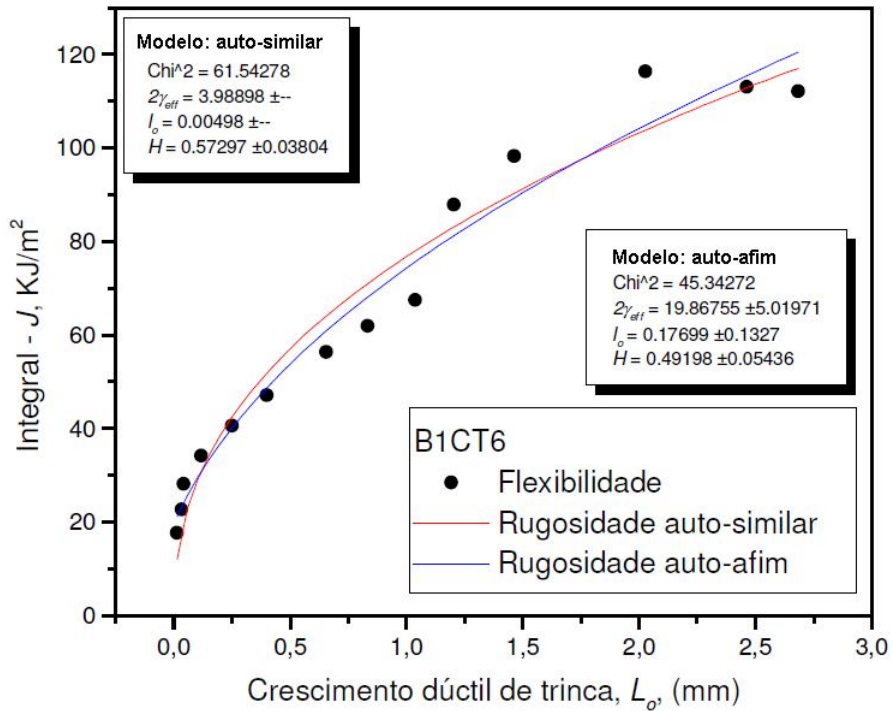


Figura - 7. 19. Curva  $J$ - $R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra B1CT6).

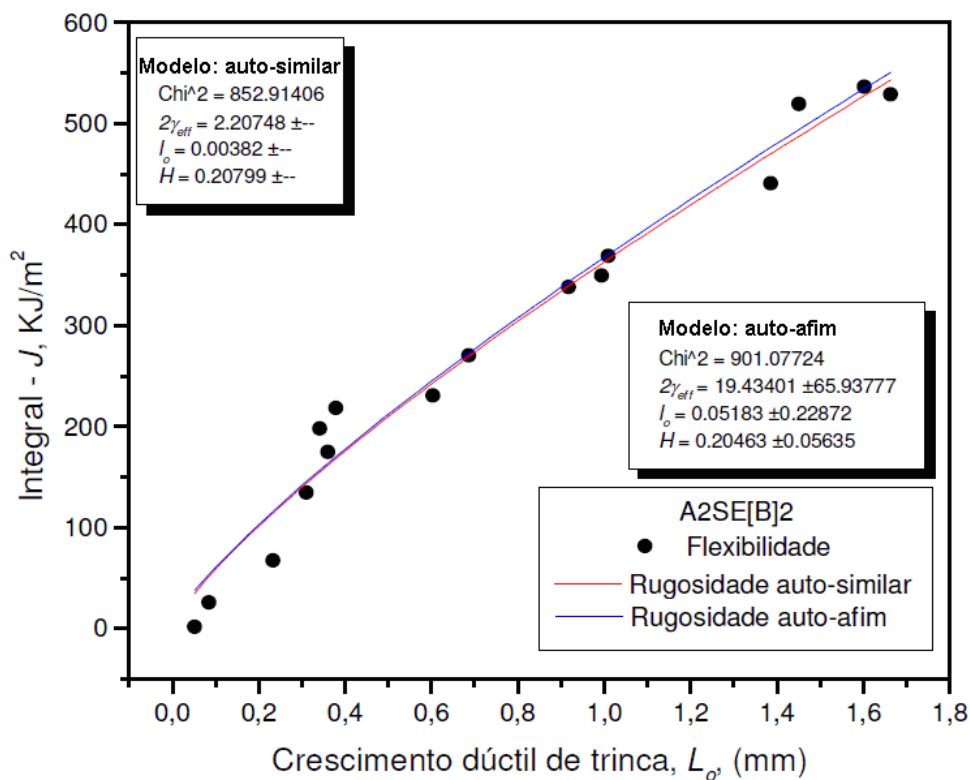


Figura - 7.20. Curva  $J$ - $R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra A2SE(B)2).

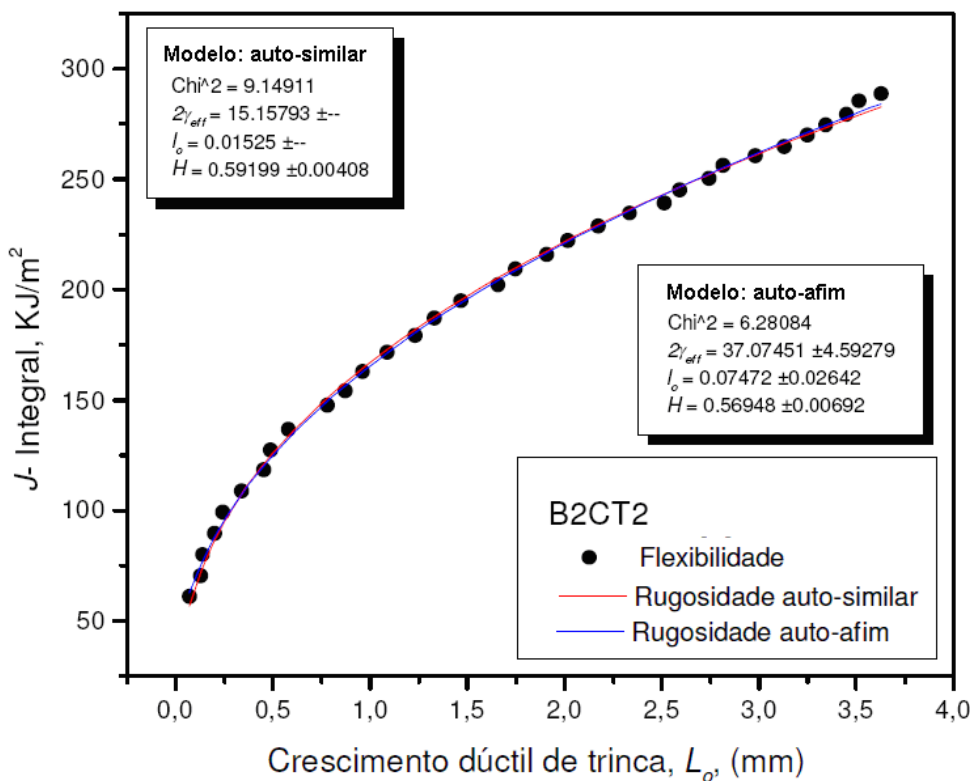


Figura - 7.21. Curva  $J$ - $R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o aço ARBLC-Mn/Ti (amostra B2CT2) acalmado com titânio e outros elementos de liga para aumentar a temperabilidade.

Observe a partir dos resultados mostrados na Figura - 7.17 a Figura - 7.21 que a modificação das equações da Mecânica da Fratura por uma lei de escalonamento fractal (auto-afim ou auto-similar) sugere que o modelo da curva de  $J-R$  é não-linear. Este modelo por sua vez reproduz muito bem os resultados elasto-plásticos dentro da aproximação clássica feita pelo mesmo. Portanto, com esta modificação a energia necessária para propagar uma trinca deixa de ser proporcional a área de fratura como era no caso da mecânica da fratura elástica linear clássica. Compare por exemplo a equação (6.75) dada por:

$$G = \pi\sigma^2 L / E' \quad (7.6)$$

com a equação (6.282) dada por:

$$J_0 = 2\gamma_{eff} \left( 1 + (2-H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right) / \sqrt{2 \left( 1 + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{2H-2} \right)}. \quad (7.7)$$

No modelo de fractal a energia necessária para crescer uma fratura não é mais proporcional à área de fratura ou o comprimento  $L_0$  como era no caso da Mecânica da Fratura Elástica Linear Clássica. Isso pode ser visto comparando-se a equação (5.93) com a equação (6.301), por exemplo.

Embora os modelo auto-similar se ajusta tão bem como o modelo auto-afim os resultados mostrados na Figura - 7.20 a Figura - 7.21, há uma diferença no ajuste, mas ela é quase imperceptível. A diferença é menor no modelo auto-afim. Isto é devido ao fato de que o modelo auto-similar introduz erros no cálculo e subestimando os valores da energia específica de superfície  $\gamma_{eff}$  e o tamanho mínimo da fratura microscópica  $l_0$ , embora ele não afeta o valor do expoente Hurst  $H$ . É importante lembrar que para um fractal natural auto-afim como uma trinca, a aproximação de limite auto-similar só é válida no começo do processo de crescimento de trinca (Mandelbrot) e a aproximação do limite auto-afim é válido no restante do processo. Observa-se a partir dos resultados mostrados anteriormente que a fratura dúctil está mais próxima da auto-similaridade enquanto que a fratura frágil está mais próxima da auto-afinidade. Isto é porque os tamanhos de caixa que devem ser levados em conta no escalonamento fractal da trinca são do tipo  $H_0 \rightarrow L_0 \gg l_0$  na fratura dúctil, e  $H_0 \rightarrow l_0 \gg L_0$  na fratura frágil.

Observa-se a partir dos resultados mostrados que a fratura dúctil está mais próximo da auto-similaridade enquanto que a fratura frágil está mais próxima da auto-afinidade.

#### 7.5.4 – Análise das superfícies de fratura dos materiais poliméricos

Apresenta-se nesta secção as análises micrográficas das superfícies de fratura obtidas após os ensaios realizados, para o material polimérico.

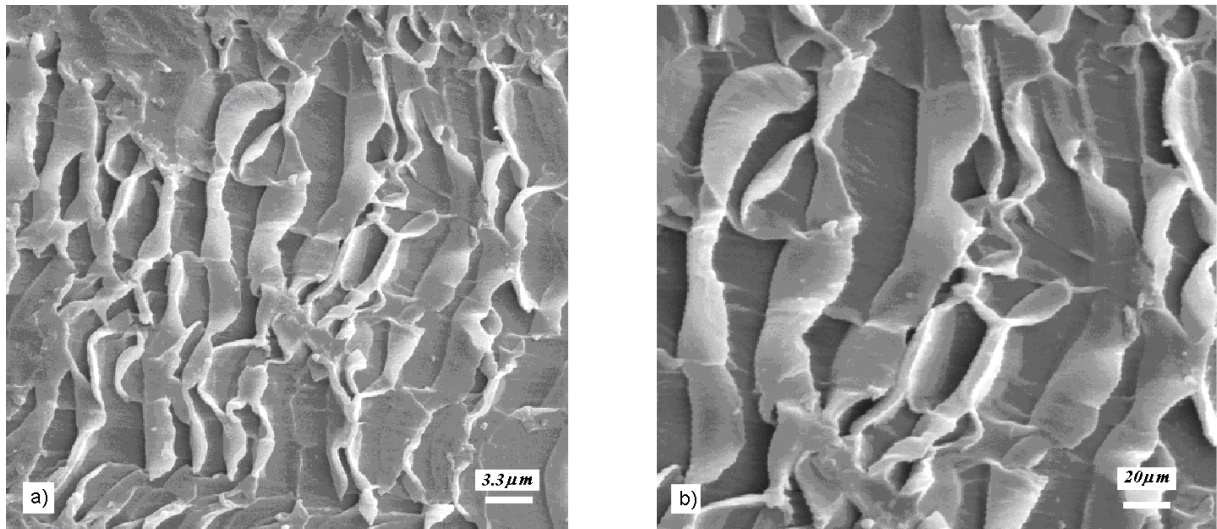


Figura - 7. 22 Corpo de prova PU0.5. (a) aspecto geral da superfície de fratura, (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.

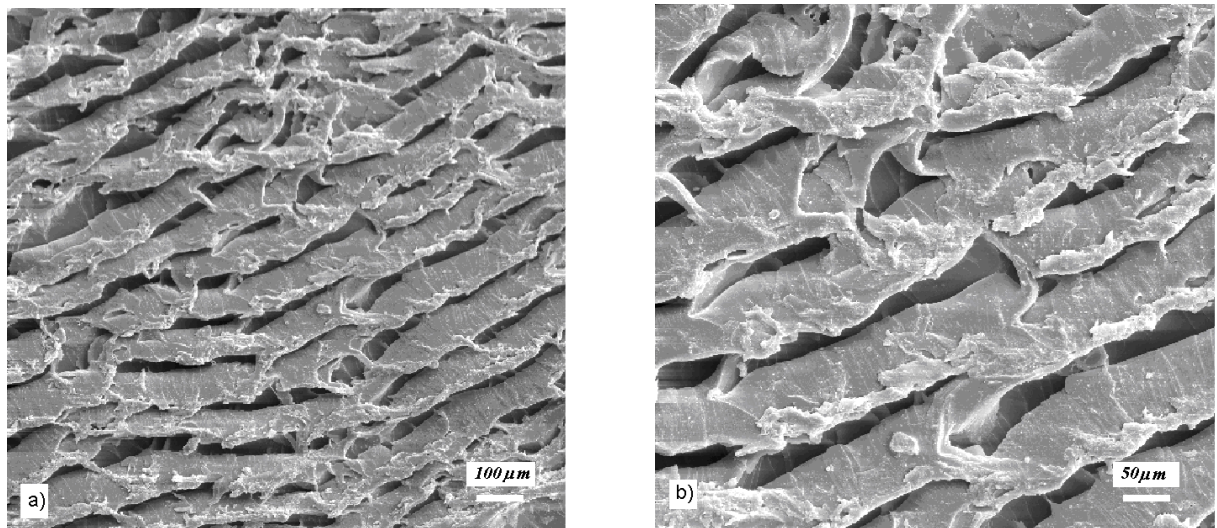


Figura - 7. 23 Corpo de prova PU1.0. (a) aspecto geral da superfície de fratura, (b) detalhes da formação dos microvazios durante a propagação estável da trinca.

As micrografias das superfícies de fraturas do material polimérico analisado apresentam uma espécie de “escamas” paralelas que diferem em aspecto entre a Figura - 7. 22 e a Figura - 7. 23, certamente devido a diferente taxa de carregamento empregada no ensaio de fratura.

#### 7.5.5 - Determinação do expoente Hurst, $H$ .

A determinação do expoente Hursts,  $H$ , foi feita de forma análoga a aquela realizada para o material metálico.

Embora a presença das “escamas” mostra que o aspecto da superfície de fratura é periódico, ao invés de fractal, o que foi analisado, pelo “método da ilhas de contraste”, em termos de fractalidade, não foi a frequência do aparecimento destas “escamas”, e sim a relação  $\text{Área} \times \text{Perímetro}$  dos vazios contidos entre elas. Os gráficos da Figura - 7. 24 mostram, de forma análoga

ao material metálico, a existência de fractalidade no contorno destes vazios.

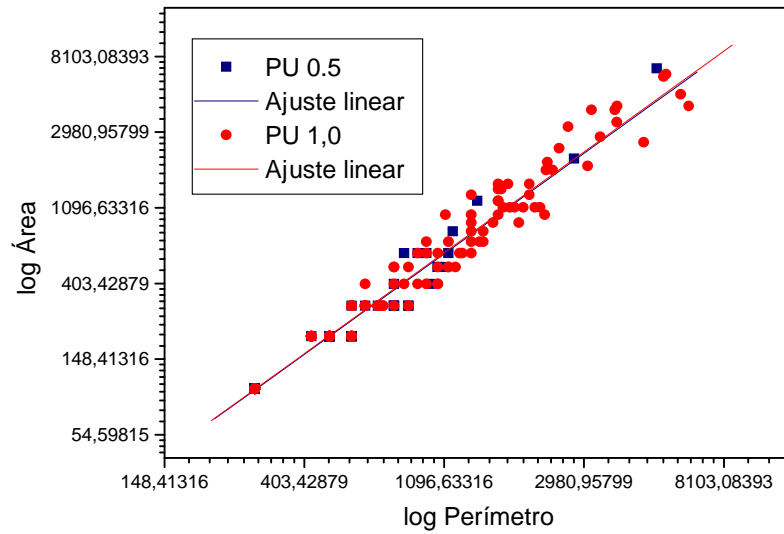


Figura - 7. 24. Gráfico do ajuste linear entre  $\log \text{Área}$  x  $\log \text{Perímetro}$  para o PMMA.

### 7.5.6 – Ensaios de curva J-R

Os materiais poliméricos apresentaram as curvas  $J - R$  mostradas desde a Figura - 7. 25 a Figura - 7. 26.

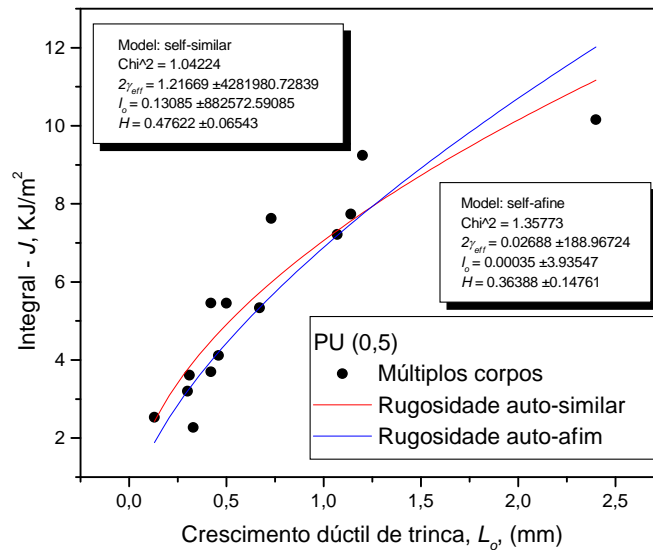


Figura - 7. 25. Curva  $J-R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o polímero PMMA (amostra PU(0,5)).

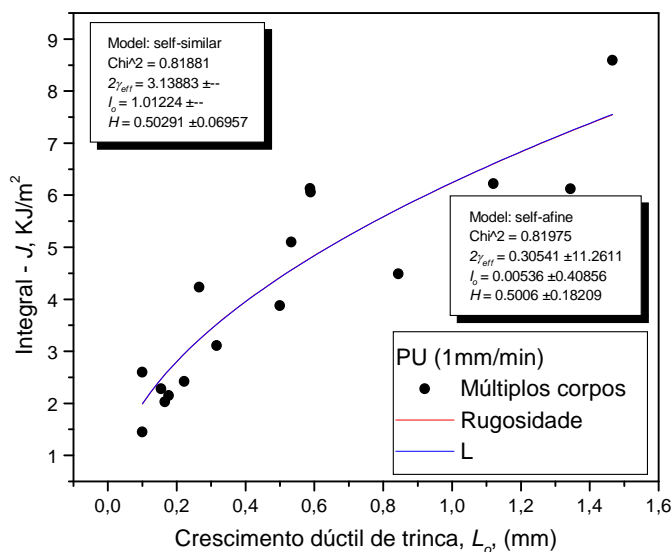


Figura - 7. 26. Curva  $J-R$  ajustada de acordo com o modelo auto-similar apresentado na equação (6. 300) e com o modelo auto-afim apresentado na equação (6. 282) para o polímero PMMA (amostra PU(1,0))

No caso do material polimérico o ajuste da curva  $J-R$  também obteve um bom resultado, mesmo com os pontos da curva mais dispersos do que para os materiais frágeis e dúcteis, conforme mostram as Figura - 7. 25 a Figura - 7. 26.

## 7. 6 – Análise dos Resultados Experimentais

Nesta secção apresenta-se a análise dos resultados experimentais dos ensaios de fratura realizados para determinação das propriedades de fratura dos materiais ensaiados.

Tabela - VII. 4: Grandezas fractais extraídas por regressão linear da “análise fractal das ilhas de contraste”

Amostras	$\alpha = 2/D = 2/(2-H)$	$D = 2 - H$	$H = 2 - D$
A1CT1	$1,0544 \pm 0,0094$	$1,89681 \pm 0,16910$	$0,10319 \pm 0,00092$
A1CT2	$1,5468 \pm 0,0297$	$1,29298 \pm 0,02483$	$0,70702 \pm 0,01357$
B1CT2	$1,6818 \pm 0,0329$	$1,18922 \pm 0,02326$	$0,81078 \pm 0,01586$
B1CT6	$1,6315 \pm 0,0435$	$1,22589 \pm 0,03268$	$0,77411 \pm 0,02064$
B2CT2	$1,4100 \pm 0,1200$	$1,42000 \pm 0,12085$	$0,58000 \pm 0,04936$
B2CT7	$1,6437 \pm 0,0186$	$1,21680 \pm 0,01377$	$0,78320 \pm 0,00886$
B1SE[B]6	$1,6525 \pm 0,0260$	$1,21030 \pm 0,01904$	$0,78970 \pm 0,01242$
B1SE[B]7	$1,6106 \pm 0,0224$	$1,2418 \pm 0,01727$	$0,75820 \pm 0,01054$
PU0.5	$1,3281 \pm 0,0178$	$1,50590 \pm 0,02018$	$0,49410 \pm 0,00662$
PU1.0	$1,3330 \pm 0,0122$	$1,50034 \pm 0,01373$	$0,49966 \pm 0,00457$

Constata-se por meio da Tabela - VII. 4 a fractalidade (auto-similar ou auto-afim) das superfícies de fratura de materiais metálicos, poliméricos utilizados neste trabalho. Esta constatação torna razoável imaginar que exista uma influência desta fractalidade nas propriedades mecânicas da

fratura destes materiais, a qual será verificada e discutida na secção – 7. 7 deste Capítulo.

Nas três situações (materiais metálicos, poliméricos) a presença de vazios, ou outros defeitos microestruturais, cooperam com a formação da rugosidade na superfície de fratura. Esta rugosidade na forma em que foi modelada, registra a “história” de crescimento da trinca sendo responsável pela dificuldade que a trinca encontrou ao se propagar, definindo-se conseqüentemente a resistência ao crescimento da trinca.

### 7.6.1 - As análises das curvas *J-R* usando o modelo fractal

Os valores que melhor se ajustaram as curvas são mostrados na Tabela - VII. 6 para o modelo auto-similar da equação (6. 300) e na Tabela - VII. 7 para o modelo auto-afim da equação (6. 282) . Os valores medidos de *H* diferem entre-si em relação às medidas experimentais (vide Tabela - VII. 5, Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7) com erro aproximadamente de menos que 20% para o primeiro corpo de prova e aproximadamente de menos que 2% para a segundo. A razão para esta discrepância, ou seja o erro ser maior para o primeiro corpo de prova em relação ao segundo é devido à qualidade de sua estrutura fractográfica que não apresenta “ilhas de contraste” bem definidas (Alves, 2001) que podem ser vistas pelas Figura - 7. 6 a Figura - 7. 12. Esta é uma limitação do método que é investigada, e discutida no futuro em outro artigo (Alves, 2011).

Tabela - VII. 5: Dados extraídos a partir dos ensaios experimentais de curva *J-R* obtidas pelo método da flexibilidade.

<i>Material</i>	<i>Sample</i>	$\sigma_f$ (MPa)	$J_{IC}(exp)(KJ/m^2)$	$L_{OC}(exp)(mm)$	<i>H (exp)</i>
Metais	A1CT2	516,00	291,60	0,48256	0,71 ± 0,01
	A2SEB2	537,00	174,67	0,36264	0,77 ± 0,01
	B1CT6	771,00	40,61	0,22634	0,77 ± 0,02
	B2CT2	757,00	99,22	0,26553	0,58 ± 0,05
	DCT1	554,00	227,00	0,40487	-
	DCT2	530,00	211,47	0,3995	-
	DCT3	198,75	318,00	1,00000	-
Polímero	PU0,5	40,70	8,10	0,29951	0,47 ± 0,07
	PU1,0	40,70	3,00	0,23685	0,50 ± 0,05

A Figura - 7.17 mostra outras curvas-*J* também ajustadas pelo modelo proposto neste trabalho para verificar a potencialidade da aproximação fractal, na Mecânica da Fratura, em outros materiais dúcteis (amostras DCT1, DCT2, DCT3) e polímeros (amostras de poliuretano PU0.5, PU1.0).

A Tabela - VII. 6 e a Tabela - VII. 7 mostram os resultados obtidos pelo ajuste do modelo para cada material ensaiado, conforme descrito no procedimento experimental. Observe que



para os valores de  $H(teo)$  e  $l_0(teo)$  na 4ª e na 5ª coluna destas tabelas ocorre uma discrepância entre os resultados experimentais de  $H(exp)$  e  $L_{oc}(exp)$ , da Tabela - VII. 4 e Tabela - VII. 5, e aqueles ajustados pelo cálculo teórico dos valores do expoente Hurst,  $H$ , das amostras de metal (Tabela - VII. 6 e a Tabela - VII. 7). Esse fato é devido a uma deficiência na obtenção de  $H$  pela técnica de análise das ilhas de contraste, para amostras com “ilhas” ou microestruturas contidas na superfície de fratura, não bem definidas.

Tabela - VII. 6: Dados do ajuste das curvas  $J - R$  para o modelo auto-similar.

<i>Material</i>	<i>Amostra</i>	$2\gamma_{eff}$ ( $KJ/m^2$ )	$H$ ( <i>teo</i> )	$l_0(mm)$	$L_{oc} =$ $l_0(2-H)^{1/(H-1)}$	$L_{o\gamma_{eff}} =$ $(2-H)l_0^{(H-1)}$	$J_c L_c^{(H-1)} = cte$
Metais	A1CT2	283,247	$0,417 \pm 0,018$	1,00944	0,459079	1,57411	445,862579
	A2SEB2	187,639	$0,208 \pm 0,057$	0,82912	0,396956	2,07868	390,042318
	B1CT6	40,514	$0,573 \pm 0,038$	0,51758	0,225086	1,89071	76,600193
	B2CT2	101,204	$0,592 \pm 0,0041$	0,64484	0,278764	1,68407	170,433782
	DCT1	230,843	0,426	0,91887	0,416893	1,65219	381,397057
	DCT2	209,127	0,461	0,87082	0,391328	1,65806	346,745868
	DCT3	317,819	0,393	2,18249	0,999062	1,00057	318,000000
Polímero	PU0,5	17,4129	0,476	2,88612	1,291434	0,87464	15,230001
	PU1,0	2,95252	0,503	0,51653	0,229374	2,079	6,138287

Tabela - VII. 7: Dados do ajuste das curvas  $J - R$  para o modelo auto-afim.

<i>Material</i>	<i>Sample</i>	$2\gamma_{eff}$ ( $KJ/m^2$ )	$H$ ( <i>teo</i> )	$l_0(mm)$	$L_{oc} =$ $L_0(2-H)^{1/(H-1)}$	$L_{o\gamma_{eff}} =$ $(2-H)l_0^{(H-1)}$	$J_c L_c^{(H-1)} = cte$
Metais	A1CT2	160,640	0,609	0,24422	0,105004	2,413408	387,700806
	A2SEB2	102,750	0,442	0,31002	0,140040	2,993092	307,535922
	B1CT6	22,980	0,700	0,08123	0,033873	2,757772	63,385976
	B2CT2	57,978	0,705	0,10304	0,042893	2,529433	146,651006
	DCT1	129,850	0,599	0,23309	0,100540	2,511844	326,184445
	DCT2	118,850	0,624	0,20167	0,086294	2,512302	298,592197
	DCT3	178,810	0,612	0,5282	0,226901	1,778386	318,000000
Polímero	PU0,5	7,500	0,664	0,56541	0,238775	1,618852	12,150370
	PU1,0	1,690	0,649	0,10898	0,046244	2,938220	4,971102

Infelizmente para algumas amostras metálicas não foi possível obter valores de  $H$ , medidos experimentalmente, tão próximos dos valores de  $H$  ajustados pelo gráfico, como no caso dos materiais poliméricos (Tabela - VII. 6 e a Tabela - VII. 7). Esses valores obtidos experimentalmente não corresponderam aos valores obtidos pelo ajuste do gráfico, porque, supõem-se que, a diferença entre eles é devido a um erro sistemático positivo introduzido pelo “método das ilhas de contraste”. Portanto, para algumas amostras o valor de  $H$  obtido a partir da análise da superfície de fratura pelo “método das ilhas de contraste” é um tanto fictício em relação a aquele

obtido pelo ajuste do modelo. Observa-se com isto que, a interpretação da rugosidade, a partir da dimensão,  $H$ , neste caso, deve ser feita com cuidado.

Tabela - VII. 8. Dados calculados a partir dos modelos auto-afim e auto-similar

Material	Amostra	$\sigma_f (10^7 N/m^2)$	$E (10^7 N/m^2)$ p/ $l_o$ auto-similar	$K_{IC} (N.m^{-3/2})$ p/ $l_o$ auto-similar	$E (10^7 N/m^2)$ p/ $l_o$ auto-afim	$K_{IC} (N.m^{-3/2})$ p/ $l_o$ auto-afim
Metálico	A1CT2	5,16	0,52825463	283816,59245	1,3360761	988049,43125
	A2SE(B)2	7,57	1,8112216	523969,17429	3,6282991	1,15982E6
	B1CT6	7,71	2,33145	304960,77721	16,636541	1,81804E6
	B2CT2	4,84	1,2735241	167668,69319	1,9627247	617605,14095

As colunas da Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7 foram calculadas do seguinte modo: As curvas  $J$ - $R$  experimentais são ajustadas usando as equação (6.295) e equação (6.301) e determinando os valores de  $2\gamma_{eff}$ ,  $H$  e  $l_o$ . Fazendo  $J = 2\gamma_{eff}$  na equação (6.301), o valor do tamanho de trinca  $L_{o\gamma_{eff}}$  é calculado e ele corresponde ao valor daquela energia específica de superfície. Usando o valor experimental de  $J_{IC}$ ,  $L_{oC}$  e  $H$ , determinado pela curva de  $J$ - $R$ , o valor da constante à última coluna da Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7 são calculados.

A relação (6.295) obtida para a curva  $J$  -  $R$  representa um modelo fractal auto-afim e demonstra, a menos do coeficiente  $H$ , a existência de uma certa “universalidade”, ou melhor dizendo, uma certa generalidade, nestas curvas. A equação (6. 282) pode ser reescrita, utilizando um fator de escala genérico,  $\varepsilon = l_o / L_o$ , como sendo:

$$\underbrace{f(2\gamma_e + \gamma_p, J_0)}_{\text{energética}} = \frac{J_0}{2(2\gamma_e + \gamma_p)} = \frac{1 + (2 - H)\varepsilon^{2H-2}}{\underbrace{\sqrt{2(1 + \varepsilon^{2H-2})}}_{\text{geométrica}}} = g(\varepsilon, H) \quad (7. 8)$$

cujo gráfico generalizado para todos os resultados experimentais obtidos é mostrado na Figura - 7.27.

Observe que, reescrevendo-se a equação (6. 282) em termos desse fator de escala genérico,  $\varepsilon = l_o / L_o$ , é possível separar a parte energética, devido ao campo de tensão-deformação, da parte geométrica, devido a rugosidade, conforme mostra a equação (7. 8), a qual é uma função válida para todos os resultados experimentais obtidos e mostrados na Figura - 7.27. Este gráfico nesta figura mostra a existência de uma relação de compromisso que há entre as componentes energéticas e geométricas da resistência a fratura dos materiais, de acordo com a equação (7. 8). Portanto, quanto maior for o consumo de energia na fratura de um material, deformando-se plasticamente, mais longo será o seu caminho geométrico descrito pela trinca e, conseqüentemente,

mais rugosa será a sua trinca

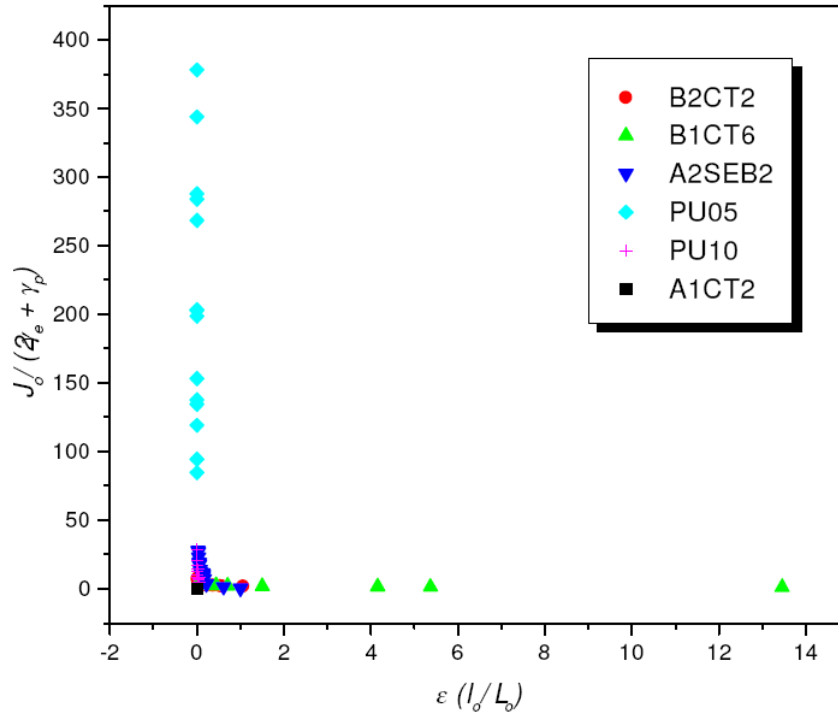


Figura - 7.27. Gráfico generalizado das curvas  $J - R$  de diferentes materiais, modelada pela geometria fractal auto-afim, em função do fator de escala,  $\varepsilon$ , do comprimento da trinca.

No limite auto-similar onde  $l_0 \ll L_0 = H_0$  a equação (6. 282) é aplicável e as componentes enérgicas e geométricas são postas em evidência na equação abaixo, tornando-se:

$$J_0 = \underbrace{(2\gamma_{e0} + \gamma_p)}_{\text{enérgica}} \underbrace{(2-H) \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^{H-1}}_{\text{geométrica}}, \quad (7.9)$$

A partir da Eq (7. 9), pode-se derivar uma expressão a qual resulta em um valor constante associado a cada tipo de material, escrevendo-a da seguinte forma:

$$\underbrace{J_0}_{\text{macroscópico enérgica}} \underbrace{L_0^{H-1}}_{\text{macroscópica geométrica}} = \underbrace{(2\gamma_{e0} + \gamma_p)}_{\text{microscópico enérgica}} \underbrace{(2-H) l_0^{H-1}}_{\text{microscópica geométrica}} = \text{const}, \quad (7.10)$$

É possível concluir que os termo macroscópicos, do lado esquerdo da equação (7. 10), e os termos microscópico, do lado direito da equação (7. 10), respectivamente, são ambos iguais a uma constante, sugerindo a existência de uma propriedade fractal da fratura válida para o início do crescimento da trinca, a qual é justificada experimentalmente e teoricamente. Pode-se ver facilmente ver que a equação (7. 10) relaciona o ensaio de fratura com o seu efeito sobre a a microestrutura do material. Os valores dessas constantes foram calculados para cada ponto na curva  $J-R$  para os materiais testados. O valor médio para cada material foi listado na última coluna da

Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7. Observe que esta nova propriedade está unicamente determinada pelo processo de crescimento da trinca, dependendo do expoente  $H$  e da energia de superfície específica  $2\gamma_e + \gamma_p$  e do tamanho mínimo da trinca  $l_0$ . Este fato possibilita obter uma estimativa muito boa para a curva  $J$ - $R$  medindo-se a energia efetiva,  $2\gamma_{eff}$ , o tamanho projetado da trinca,  $L_0$ , e o valor do expoente Hurst,  $H$ , a partir de uma análise metalográfica do material em serviço, sem necessariamente se realizar um ensaio de fratura convencional.

Esta nova constante pode ser chamada ou entendida como uma "densidade fractal de energia" por se tratar de uma grandeza volumétrica e por ser uma quantidade física que leva em conta a rugosidade da superfície de fratura além de outras propriedades físicas. A sua existência pode explicar a razão de diferentes problemas encontrados quando definindo o valor da tenacidade à fratura  $K_{IC}$ , como por exemplo, o fato desse valor em alguns casos depender do tamanho do entalhe (ASTM – E813 1987). Esta constante pode ser usada para complementar a informação fornecida pela tenacidade a fratura que depende de vários fatores como as espessuras  $B$  do corpo de prova, a forma ou tamanho do entalhe, etc (ASTM E813-89). Para resolver este problema, a norma ASTM E1737-96 estabelece um valor para o comprimento da trinca  $a$  (aproximadamente  $0.5 < a/W < 0.7$  e  $B = 0.5W$ , onde  $W$  é a largura do corpo de prova) para garantir uma alta restrição da zona plástica na ponta da trinca e obter valores confiáveis da tenacidade a fratura  $K_{IC}$ , de forma a manter a zona de fluência em pequena escala. Para valores de  $a/W < 0.4$  ocorre uma baixa restrição da zona plástica na ponta da trinca e os resultados da tenacidade a fratura não são confiáveis.

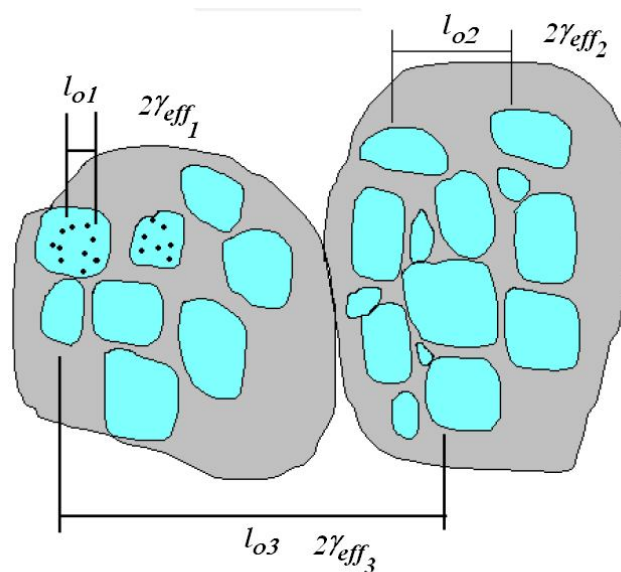


Figura - 7.28. Aspecto microestrutural da escala de observação com diferentes tamanhos de régua,  $l_0$ , para o escalonamento fractal da fratura

Conforme é mostrado na relação (7. 10) existe um compromisso entre a energia

específica de superfície,  $2\gamma_{eff}$ , e o tamanho mínimo de trinca  $l_0$  na escala de observação,  $\varepsilon = l_0 / L_0$ , considerada.

De acordo com a Figura - 7.28 pode-se observar que, a consideração de um tamanho mínimo para a fratura,  $l_{01}$  em um grão, deveria significar a energia específica efetiva da fratura,  $2\gamma_{eff1}$  nesta escala. De um modo semelhante, se a consideração de um tamanho mínimo de fratura é feita em uma outra escala, como aquela que envolve vários grãos, policristalinos  $l_{02}, l_{03}$ , etc., esta deve levar em conta o valor de uma energia efetiva específica nesta outra escala,  $2\gamma_{eff2}, 2\gamma_{eff3}$ , etc, de tal forma que:

$$2\gamma_{ef1}(2-H_1)l_{o1}^{H_1-1} = 2\gamma_{eff2}(2-H_2)l_{o2}^{H_2-1} = const \quad , \quad (7.11)$$

embora  $l_{01} \neq l_{02} \neq l_{03}$  e  $2\gamma_{eff1} \neq 2\gamma_{eff2} \neq 2\gamma_{eff3}$ . Assim, a constante não depende das régua de medida  $l_0$  usadas no modelo fractal, mas ela depende apenas do tipo de material usado no ensaio.

Observa-se que a constante mostrada em (7. 10) e (7. 11) não depende da escala,  $\varepsilon$ , ou da régua de medida,  $l_0$ , usada no modelo fractal, mas ela dependerá apenas do tipo de material usado no ensaio. Ela sugere, portanto, uma nova propriedade fractal de fratura para o início do crescimento da trinca. Esta propriedade que leva em conta rugosidade da superfície de fratura, pode ser usada para substituir a tenacidade à fratura,  $K_{IC}$ , que depende de vários fatores tais como o comprimento do entalhe em relação a largura do corpo de prova, etc. Mas esta nova propriedade é unicamente determinada pelo processo de crescimento da trinca. Observe que o expoente,  $H$ , as energias de superfície,  $2\gamma_e + \gamma_p$ , o comprimento mínimo de trinca,  $l_0$ , estão relacionados para manter a constante de proporcionalidade na equação (7. 10).

Uma outra interpretação da equação (7. 10) pode ser feita dividindo-se os termos elásticos e plásticos,

$$J_0 = \underbrace{2\gamma_e(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1}}_{Elastic} + \underbrace{\gamma_p(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1}}_{Plastic} \quad , \quad (7.12)$$

Observando a equação (5.102), pode-se escrever,

$$J_e = 2\gamma_e(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1} = \frac{K_e^2}{E} \quad , \quad (7.13)$$

e

$$J_{pl} = \gamma_p(2-H)\left(\frac{l_0}{\Delta L_0}\right)^{H-1} = \frac{2A_{pl}}{B_N(w-L_0)} \quad . \quad (7.14)$$

Para uma situação particular onde  $J_0 = J_{IC}$  e  $\Delta L_0 = \Delta L_{0C}$ , pode-se derivar a partir da equação (6.301) que,

$$J_{IC} = (2\gamma_e + \gamma_p)(2-H) \left( \frac{l_0}{L_{0C}} \right)^{H-1} \quad (7.15)$$

e a partir da equação (6.287),

$$K_{IC} = \sqrt{(2\gamma_e + \gamma_p)E(2-H) \left( \frac{l_0}{L_{0C}} \right)^{H-1}} \quad (7.16)$$

Portanto, usando o fato de que uma vez o valor experimental de  $J_{IC}$  é determinado e o ajuste da curva  $J-R$  já tem fornecido os valores de  $2\gamma_e + \gamma_p, l_0$  e  $H$  para o material, o valor de  $L_{0C}$  pode ser calculado como mostrado na Tabela - VII. 6 e Tabela - VII. 7.

## 7.7 – Discussão dos Resultados Experimentais

### 7.7.1 – Discussão da Abordagem Fractal na Mecânica da Fratura

Bernardes (1998) criticou a idéia de se modificar diretamente, via teoria fractal, a Mecânica da Fratura Clássica, sem levar em conta uma formulação mais básica, usando a força de interação entre as partículas, por exemplo. Ele argumentou que a Mecânica da Fratura foi criada para situações de corpos homogêneos e isotrópicos. Contudo, é bom lembrar que a teoria elástica linear, desenvolvida para a fratura por Irwin-Westergaard, é uma teoria diferencial, ou seja, puntual, cuja equação de energia usada para a fratura, (equação de Lamé (Fung 1969)), realmente não leva em conta efeitos encontrados fora da escala atômica, onde se envolve situações não-homogêneas. Esta teoria elástica, faz aproximações lineares utilizando a lei de Hooke para a força das ligações químicas dos átomos ou moléculas do material, considerando basicamente o modelo do sólido harmônico de Einstein. Ela não envolve efeitos microestruturais do material. Por outro lado, a teoria de Griffith por ser basicamente uma teoria termodinâmica, apesar de escrita na forma diferencial abaixo:

$$Xdu = dU + GdA, \quad (7.17)$$

envolve os aspectos microestruturais da fratura, porque toma limites infinitesimais maiores do que a teoria elástica linear na escala atômica, sendo portanto, uma teoria mesoscópica. Este limites infinitesimais mesoscópicos, incluem o limite termodinâmico de  $10^{15}$  partículas, onde grandezas como a Resistência a Fratura (Curva  $J - R$ ), retratam aspectos de interação da trinca com a microestrutura do material.

### 7.7.2 – Do modelo fractal para a curva *J-R*

O modelo proposto neste trabalho foi baseado na idéia (Mandelbrot 1982) e na comprovação experimental (Mandelbrot 1984) de que uma trinca ou uma superfície de fratura é um fractal e por isso a rugosidade desta superfície pôde ser modelada analiticamente a fim de ser inserida nas equações da Mecânica da Fratura.

A ciência da Mecânica da Fratura foi originalmente desenvolvida para o estudo de situações de corpos homogêneos e isotrópicos. Ela pode ser estudada basicamente em três níveis de escala: o micro, meso e o nível macroscópico.

No nível microscópico, basicamente, o material elástico é modelado considerando a aproximação do sólido harmônico de Einstein onde a lei de Hooke é empregada para a força entre as ligações químicas dos átomos ou moléculas (Holian, 1997). Portanto, a teoria elástica é usada para fazer aproximações lineares e não envolve os efeitos micro estruturais do material.

No nível de mesoscópico a equação de energia usada para a fratura, (equação de Lamé, veja Ref. (Fung, 1969)), não leva em conta os efeitos escala atômica que envolve situações não-homogêneas. Baseado nos argumentos dos últimos parágrafos torna-se claro porque Herrmman, Arcangelis e Roux (Herrmann, Herrmann Jr., 1989) (Herrmann e De Arcangelis 1989; Herrmann e Roux 1990) e outros autores precisaram incluir pesos estatísticos, como um critério de crescimento de trinca, para a quebra das ligações químicas em simulações de fratura, como uma forma de retratar aspectos das interações microestruturais da fratura (defeitos) (Fung, 1969), em modelos computacionais de malhas que utilizam a equação de Lamé (Fung 1969) quando usam o método de diferenças finitas e métodos de elemento finitos em modelos de computacional.

No nível macroscópico, por outro lado, a teoria de Griffith usa um balanço de energia termodinâmico que é escrito de uma maneira simplificada pela equação (7. 17). É importante recordar que a teoria elástica linear de fratura desenvolva por Irwin-Westergaard como o a teoria de Griffith, é também uma teoria diferencial para a escala macroscópica que significa que elas são teorias pontuais seus limite locais considerados. Estas duas aproximações envolvem os aspectos microestruturais da fratura, uma vez que leva em conta um limite infinitesimal local maior do que a teoria elástica linear na escala atômica e na escala mesoscópica. Esta escala infinitesimal macroscópica é grande o bastante para incluir  $10^{15}$  partículas como o limite termodinâmico inferior, onde a quantidade física como a resistência à fratura (curve *J-R*) retrata aspectos da interação da trinca com a microestrutura do material.

Neste artigo, por sua vez, a Mecânicas da Fratura Clássica foi modificada usando, diretamente, a teoria fractal sem levar em conta uma formulação mais básica, tal como a força de interação entre as partículas, ou usando a equação de energia de Lamé na escala mesoscópica como

uma forma incluir o rugosidade no processo de fratura.

A idéia de relacionar a morfologia (rugosidade) das superfícies de fratura com as propriedades físicas dos materiais não é uma novidade (Mandelbrot e Passoja 1984). Ela tem sido realizada por vários autores (Xie, 1989-Tanaka, Chelidze, Borodich-Mecholsky, 1989). Contudo, essas abordagens feitas até então (Mu e Lung 1988, Mecholsky 1989; Heping-XIE 1989; Lin 1993; Nagahama 1994; Lei 1995; Tanaka 1996; Borodich 1997; Chelidze 1990), não tem sido feita criteriosamente. Estes autores incorreram em erros conceituais que comprometem os seus resultados experimentais, conforme será visto a seguir. A utilização da fractalidade da superfície de fratura para quantificar as grandezas que descrevem o processo físico da dissipação de energia recebeu duas propostas diferentes. A primeira foi feita por Mu, Z. Q (Mu, 1988) e Lung, C. W, (Lung, 1988), que propuseram uma relação fenomenológica exponencial entre o comprimento da trinca e a taxa de energia elástica liberada,  $G$ , que na notação adotada neste trabalho torna-se:

$$G_{IC} = G_{I0}\varepsilon^{1-D}, \quad (7.18)$$

onde  $\varepsilon$  é o comprimento da régua de medida utilizado na teoria fractal. A segunda proposta foi feita por Mecholsky, J. J. (1988) e Mandelbrot, B. B. (1984) que propuseram uma relação empírica entre a parte fracionária da dimensão fractal,  $D^*$ , e a tenacidade a fratura,  $K_{IC}$ , dada a partir da equação equação(5.101) (6. 3), seguinte forma:

$$K_{IC} = D^* A(E)^{1/2}. \quad (7.19)$$

e

$$K_{IC} \sim A(D^*)^{1/2} \quad (7.20)$$

onde  $A = E\sqrt{l_0}$ ,  $A$  é uma constante e  $E$  é o modulo de rigidez e  $l_0$  é um parâmetro que possui um comprimento unitário (ou seja, uma comprimento atômico característico). A taxa de energia elástica liberada é então dada a partir da equação (7. 19). Na notação usada neste trabalho, ela torna-se

$$G_0 = El_0 D^* \quad (7.21)$$

onde  $G_{0c} = K_{IC}^2 / E$ , e  $K_{IC}$  é tenacidade a fratura e  $E$  é o módulo de rigidez.  $l_0$  é um parâmetro que tem unidade de comprimento (comprimento característico).

Os autores citados acima usaram o Método de Ilhas Cortadas nas suas medidas da dimensão de fractal,  $D$ . É importante enfatizar que cada uma das dessas propostas possuem argumentos plausíveis, apesar de sua discrepância matemática. Observe que, na proposta de Mu (Mu, 1988) e Lung (Lung, 1988) a dimensão de fractal,  $D$ , aparece no expoente de um termo de fator de escala,  $\varepsilon$ . Enquanto que, na proposta de Mecholsky (Mecholsky, 1988) e Mandelbrot



(Mandelbrot, 1984) a dimensão de fractal,  $D$ , aparece como um termo multiplicando do fator de escala.

Porém, a expressão matemática proposta neste trabalho na equação (6. 282) e a equação(6.301), possui os dois aspectos matemáticos destas duas formulações. Para o caso de  $J_0 \equiv G_0$ , a expressão matemática proposta neste trabalho é compatível com as duas propostas. Portanto, neste trabalho, propõe-se uma unificação destas duas abordagens distintas, em uma única expressão matemática, deduzida a partir de uma conceituação mais rigorosa das grandezas em questão. Em outras palavras, mostra-se que as duas propostas anteriores são visões complementares do problema do problema de acordo com a expressão deduzida neste capítulo.

Uma interpretação experimental cuidadosa deve ser feita a partir dos resultados obtidos em uma curva J-R de um ensaio. Os autores mencionados acima trabalharam com o conceito de  $G$ , válido para materiais frágeis, e não com o conceito de  $J$  válido para materiais dúcteis. Os resultados experimentais mostram que para o caso de materiais metálicos os ajustes com suas expressões matemáticas são somente válidos no início do desenvolvimento da trinca por causa do limite auto-similar, enquanto que a auto-afinidade é uma característica geral de todo o processo da fratura (Mandelbrot).

Para o caso em que  $J_0 \equiv G_0$ , a aparente similaridade entre as equações (6. 302), (7. 18) e (7. 21) constitui-se em um “tropeço” para uma cuidadosa interpretação experimental que deve ser feita dos resultados obtidos em um ensaio de curva  $J$ - $R$ . Mesmo porque, os autores citados acima trabalharam com o conceito de  $G$ , válido para materiais frágeis, e não com o conceito de  $J$  válido para materiais dúcteis. Os resultados experimentais mostram que para o caso de materiais metálicos, como aqueles utilizados por estes autores, o ajuste feito pelas suas expressões não é válido, porque a fratura destes materiais é dúctil. Além disso, eles usam o limite auto-similar que é válido somente no começo do processo de fratura (Mandelbrot 1991) enquanto auto-afinidade é uma característica geral de todo o processo.

### *7.7.3 - Do método de análise das superfícies de fratura*

O método das “ilhas de contraste”, usado neste trabalho para caracterizar as superfícies de fratura, em analogia ao método das “ilhas cortadas”, revela vários problemas interessantes, do ponto de vista conceitual e prático.

Embora não apareça, nas expressões (7. 1) e (7. 2) utilizadas no método das ilhas de contraste, a dependência direta com o tamanho da régua,  $\delta_r$ , utilizado na medida, ela está presente, porque cada medida a ser obtida deve ter sua precisão bem definida. Idealmente se escolhe um tamanho de régua,  $\delta_{min}$ , que seja suficientemente capaz de resolver graficamente detalhes

minúsculos do contorno das ilhas, para que a medida seja a mais precisa possível. Por outro lado, sabe-se que os valores da medida obtida para as áreas e para os perímetros dependem do tamanho da régua,  $\delta$ , utilizada. Esta é uma característica de um objeto fractal, conforme mostra a seguinte relação.

$$M_d(\delta) = N(\delta)\delta^d, \quad (7.22)$$

onde  $M_d(\delta) = L(\delta), A(\delta), V(\delta)$  para  $d = 1, 2, 3$  e  $N(\delta) = (\delta/\delta_{max})^{-D}$ . Observe que:  $M_d(\delta_{max}) = \delta_{max}^d$ , pois  $N(\delta_{max}) = 1$ .

Portanto, comparando-se a metodologia das ilhas cortadas sugerida pela relação (7. 1) com a metodologia da determinação da dimensão fractal sugerida pelos fractais matemáticos dada pela relação (7. 22) tem-se:

$$M_d(\delta) = M_d^*(\delta/\delta^*)\delta^{d-D} \quad (7.23)$$

Extraindo-se de (7. 22) o valor de um comprimento de régua,  $\delta_r^*$ , que depende da área,  $A_r(\delta)$ , da  $r$ 'ésima ilha, para uma relação dada por:

$$\delta_r^* = [A_r(\delta)/N_A(\delta)]^{1/2} \quad (7.24)$$

Substituindo-se (7. 22) em (7. 23) para uma medida de perímetro,  $P_r(\delta^*) = N_P(\delta^*)\delta_r^*$ , onde  $d = 1$ , tem-se:

$$P_r(\delta) = N_P(\delta^*)\delta_r^{*D}\delta^{1-D} \quad (7.25)$$

Substituindo-se o tamanho de régua  $\delta^*$  dado em (7. 24) em (7. 25) para a medida de perímetro  $P_r(\delta)$  dada por:

$$P_r(\delta) = N_P(\delta^*)/N_A(\delta)^{D/2} A_r(\delta)^{D/2} \delta^{1-D}, \quad (7.26)$$

obtem-se

$$P_r(\delta) = C(\delta, D)A_r(\delta)^{D/2} \quad (7.27)$$

onde  $C(\delta, D) = N_P(\delta^*)/N_A(\delta)^{D/2} \delta^{1-D}$

Segundo a teoria fractal desenvolvida anteriormente, uma medida é invariante quando a dimensão do objeto,  $d_o$ , é igual a dimensão da unidade de medida,  $d$ , ou, quando, no caso de um fractal, com dimensão,  $D \neq d$ , o tamanho da régua,  $\delta$ , utilizada na medida tende a zero,  $\delta \rightarrow 0$ . Observe, a partir da relação (7. 27), que além da relação *Área x Perímetro* possuir uma dimensão fractal,  $D \neq d$ , a grandeza  $C(\delta, D)$ , que deveria ser constante, modifica o seu valor em função da dimensão fractal,  $D$ , da ilha e do comprimento da régua de medida,  $\delta$ . Portanto, se houver mudança

no tamanho da régua,  $\delta$ , ou na resolução da escala de medida,  $\varepsilon = \delta / \delta^*$ , no método das ilhas cortadas, haverá necessariamente mudanças nos valores de  $A(\delta)$  e  $P(\delta)$  para uma mesma ilha analisada. Isto a princípio, não deveria influenciar no valor da dimensão fractal a ser determinado. Porém, Shi (1996) alerta para este fato, demonstrando teórica e experimentalmente que há variações no valor da dimensão fractal assim determinada, quando o tamanho da régua não é adequadamente escolhido. Isto significa que a dimensão fractal determinada pelo método das ilhas cortadas depende dela mesma da seguinte forma:

$$D = 2 \ln [P_r(\delta) / C(\delta, D)] / \ln [A_r(\delta)] \quad (7.28)$$

Porque o coeficiente  $C(\delta, D)$  não é uma constante, para que a variação na medida do perímetro seja compensada pela variação na medida área de forma que o valor de  $D$  seja único.

Um outro problema que surge no método das ilhas cortadas, é que, para materiais cerâmicos, a dimensão fractal varia com o nível de profundidade dos cortes (Dos Santos 1999). Dos Santos (1999) também mostrou que a dimensão fractal varia de ilha para ilha, para um mesmo nível de corte, evidenciando também que as superfícies de fraturas na verdade são possivelmente multifractais com variações tênues em sua dimensão.

#### 7.7.4 – Ensaio de curva J-R para metais, soldas metálicas, materiais poliméricos e outros

A tensão plana é uma condição matemática que despreza os efeitos dos contornos no campo de tensão. Esta condição permite definir uma quantidade física chamada  $K_{IC}$  a qual não depende da espessura do material. A medida de um tamanho médio de trinca ao longo da espessura do material, de acordo com a norma ASTM E1737-96, é considerada como uma média do tamanho de trinca a um certo número de perfis ao tomados longo da espessura. Desta forma, qualquer perfil estatisticamente auto-afim, entre todos os possíveis perfis que podem ser obtidos em uma superfície de fratura, é estatisticamente equivalentes um ao outro qualquer extraído nas mesmas condições, e dá uma média representativa para o cálculo do expoente Hurst.

Na (4. 87), é observado que a altura da trinca (correspondendo ao ensaio de abertura de trinca CTOD) segue uma lei de potência com a escala  $\varepsilon_h = \varepsilon_v = \varepsilon = l_o / \Delta L_o$ , e pode ser escrita como:

$$\frac{\Delta H_o}{h_o} = \left( \frac{\Delta L_o}{l_o} \right)^{1-H} \quad (7.29)$$

Esta relação mostra que, enquanto a medida do número de unidades de comprimentos de trinca,  $N_h = \Delta L_o / l_o$ , na direção de crescimento cresce linearmente, o número de unidades da altura de trinca,  $N_v = \Delta H_o / h_o$ , cresce com um potência de  $1-H$ . Se é considerado que, o inverso do número de incrementos de trinca na direção de crescimento,  $N_h^{-1} = l_o / \Delta L_o$ , também é uma medida de

deformação do material, conforme a trinca cresce, e considerando que o número de incrementos da altura de trinca pode ser uma medida da quantia de empilhamento das discordâncias, de acordo com equação (7.29), então, a tensão normal é do tipo (Zaiser, 2004, Weiss):

$$\sigma \sim \varepsilon^{-H} \quad (7.30)$$

Observe que esta relação mostra uma homogeneidade na escala de deformações, semelhante à lei de potência da equação de encruamento (Anderson 1995, Atkins 1985). Ela também mostra que o escalonamento fractal que escala de uma superfície de fratura rugosa está relacionado à lei de potência do encruamento na deformação. É possível que a fractalidade da superfície de fratura rugosa seja um resultado da acumulação do empilhamento das discordâncias no encruamento do material que acontece antes do crescimento de trinca.

#### 7.7.5 – Dos Ensaio de curva *J-R* para os materiais metálicos

A aproximação auto-similar, embora ajuste tão bem quanto o modelamento auto-afim, os resultados mostrados nas Figura - 7. 18 a Figura - 7.21, com uma diferença nos ajuste quase imperceptível, ela é inferior ao modelo auto-afim. Isto porque esta aproximação introduz erros no cálculo, subestimando os valores da energia de superfície,  $\gamma_{eff}$ , e do tamanho mínimo da fratura microscópica,  $l_o$ , embora ela não afete o valor do expoente Hurst,  $H$  Pois a aproximação auto-similar é válida somente no início do crescimento da trinca.

Através do modelo proposto neste capítulo e utilizando-se uma técnica de análise fractal da rugosidade (método das ilhas de contraste<sup>(23)</sup>) das amostras ensaiadas, foi possível reproduzir a curva *J-R* experimental de aços HSLA e de polímeros, obtida por técnica de flexibilidade e de múltiplos corpos de prova. Os parâmetros,  $l_o$ ,  $H$ , e  $2\gamma_{eff} = 2\gamma_e + \gamma_p$  que melhor se ajustaram as curvas foram obtidos por meio de um método de ajuste não-linear de curvas utilizando-se o software de cálculo Origin 5.0. Embora as normas técnicas ASTM – E813 (1989) e ASTM - E1737 (1996), sugiram um ajuste exponencial do tipo:

$$J_o = C_1 L_o^{C_2} , \quad (7.31)$$

para as curvas *J-R*, elas não fornecem nenhum esclarecimento sobre a natureza dos coeficientes para este ajuste. Contudo, comparando-se a equação (7.31) com a equação (6.300), conclui-se que  $C_1 = 2\gamma_{eff}(2-H)l_o^{H-1}$  e  $C_2 = 1-H$ .

Portanto é importante ressaltar que o modelo proposto neste trabalho esclarece além da natureza dos coeficientes do ajuste proposto pelo modelo fractal, qual é a verdadeira influência da rugosidade no processo de crescimento da curva *J-R*. A aplicação deste modelo na prática de

<sup>23</sup> método também desenvolvido o longo deste trabalho

ensaios de fratura poderá futuramente ser empregada, desde que as técnicas de experimentais de obtenção dos parâmetros,  $l_o$ ,  $H$ , e  $2\gamma_{eff}$  sejam realizadas com a devida precisão. Porém, o método das ilhas de contraste, ainda necessita ser aprimorado, ou talvez substituído por algum outro que possa dar resultados mais precisos.

O método de obtenção da curva  $J-R$  proposto neste capítulo não pretende, a princípio, substituir o atual método experimental utilizado na Mecânica da Fratura, conforme apresentado pelas normas ASTM. Contudo, ele pode dar uma margem de segurança maior aos resultados experimentais obtidos, além de ser possível trabalhar com a microestrutura dos materiais, na obtenção de novos materiais mais tenazes a fratura, uma vez que o modelo explica micro e macroscopicamente o comportamento da curva  $J-R$ .

# Capítulo VIII

## CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E PERPECTIVAS FUTURAS

*No primeiro dia tomareis para vós o fruto de árvores formosas, folhas de palmeiras, ramos de árvores frondosas e salgueiros de ribeiras; e vos alegrareis perante o Senhor vosso Deus por sete dias (Lv 23, 40).*

### 8.1 - Considerações finais e objetivos alcançados por este trabalho

Foi visto nos capítulos anteriores que a proposta do projeto de doutorado foi modelar a mecânica do contínuo com irregularidades e utilizar o Método dos Elementos Finitos, para uma rápida verificação numérica do modelo proposto. Depois as equações básicas da Mecânica da Fratura foi deduzida a partir da Mecânica dos Meios Irregulares incorporando-se a técnica de cálculo da rugosidade fractal, para calcular a nova integral-J, assim como outras grandezas da mecânica da Fratura, as quais foram redefinidas por (Alves 2005, 2010). Tudo isto foi feito para incluir analiticamente a rugosidade da superfície de fratura nas equações de campo. Essa proposta de utilização de métodos numéricos para simular um processo de fratura que leva em conta a rugosidade da superfície de fratura é considerada inovadora, porque os modelos fractais em que o trabalho está baseado são de autoria do próprio candidato e do seu orientador. Este trabalho de tese de doutorado tratou de uma proposta de uma metodologia de cálculo inédita. Ele correspondeu a um trabalho onde outras situações importantes e de interesse ainda poderão ser incluídas, tais como: o estudo da influência da rugosidade em processos de dissipação de energia fora do regime estacionário, a formação de rugosidade por um processo dinâmico de dissipação de energia como em uma fratura, por exemplo, onde se deseja entender o efeito da instabilidade dinâmica na formação de uma trinca rugosa, etc.

Este trabalho proporcionou uma ampliação da visão do mecanismo de fratura. Através

desta pesquisa foi possível entender melhor os mecanismos de dissipação de energia elástica e plástica armazenada num sólido através da formação de uma superfície rugosa de fratura. Uma vez que se busca sempre melhorar as propriedades de um material, todo estudo realizado aqui proporcionará uma melhor quantificação dos resultados de uma pesquisa neste sentido e, conseqüentemente, a otimização das propriedades dos materiais, sendo inclusive possível projetar novos materiais com base nos modelos aqui apresentados.

## **8. 2 – Conclusões do Resultados Analíticos da Mecânica dos Meios Irregulares**

### *8.2.1 - A solução analítica para o modelo de fratura baseado na Mecânica dos Meios Irregulares*

Os resultados analíticos obtidos a partir das equações do campo elástico com irregularidades geométricas, apresentados no capítulo II, mostram que uma irregularidade, quer na superfície (rugosidade), quer no interior do domínio (porosidade), produz uma perturbação no campo que se esvai exponencialmente à medida que se afasta da irregularidade para o interior do meio. O fato desse resultado de decaimento da perturbação do campo ser exponencial com a distância é porque essas irregularidades consideradas são estáticas, no espaço e no tempo. Caso contrário, se elas se movessem, ou se elas oscilassem de tamanho no tempo, sua perturbação dinâmica interagiria diretamente com o campo produzindo efeitos não-lineares e ondas elásticas de tensão/deformação que se propagariam pelo meio.

Todos esses resultados apontados pela descrição analítica do problema parecem confirmar a intuição tida anteriormente. Pois, se uma trinca (ou entalhe) é a inserção de uma perturbação geométrica estática no campo elástico, que produz uma singularidade no campo à medida que o raio de curvatura tende a zero, torna-se plausível pensar que essa “perturbação” ou irregularidade geométrica possui efeitos evanescentes, uma vez que ela é estática. Para o caso dinâmico de crescimento de uma trinca, que embora não tenha sido estudado e nem simulado nesse trabalho pode ser inferido *a priori* como sendo de uma perturbação dinâmica que interagem como campo de na forma de ondas elásticas, podendo levar as instabilidades já apontadas experimentalmente por alguns autores (Fineberg et al 1991, 1992).

## **8. 3 - Conclusões dos Resultados Numéricos de Simulação**

Os resultados obtidos são promissores, mas ainda necessita-se uma análise mais acurada

da resposta de Elementos Finitos para o Problema P2. Mas, se o Problema – P2 pode ser resolvido computacionalmente por que utilizar o Problema Equivalente – PE ?. A resposta é reduzir o custo computacional.

Nesse trabalho foi possível verificar alguns fenômenos superficiais e volumétricos que anteriormente não poderiam ser observados analiticamente. Também foi feita a separação do problema físico do geométrico, foi feita a análise para diferentes rugosidades e a análise variando alguns parâmetros de controle. Dessas análises pôde-se concluir que:

- i) Carregamento simétrico produz campo simétrico;
- ii) Como a rugosidade de uma face da trinca é a complementar da outra, logo, campos assimétricos são mais afetados pela rugosidade do que campos simétricos.
- iii) As tensões perpendiculares à propagação da trinca como  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_1$ , e a tensão principal, são pouco afetadas pela rugosidade da trinca em qualquer caso,
- iv) Em campos paralelos à propagação da trinca, como as tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_2$  e a tensão principal são mais afetadas pela rugosidade da trinca;
- v) Rugosidades que possuem pontas que penetram o campo de tensão produzem efeitos análogos à da ponta principal (formação de lemniscata para deformação plana e cardióide para tensão plana). Para uma trinca rugosa, observa-se que novas cardióides surgem além daquela da trinca principal, quando protuberâncias dessa rugosidade penetram dentro de uma região mais intensa do campo de tensão na ponta da trinca. Isto leva a concluir que a rugosidade permite uma forma alternativa de dissipação que pode levar à bifurcação da trinca em processo de altas taxas de deformação para trincas rápidas, por exemplo. Este resultado corrobora o que já havia sido demonstrado experimentalmente por Fineberg (1992).
- vi) A variação do raio de curvatura alarga o campo de tensão mantendo o padrão de variação de intensidade.
- vii) A singularidade do campo de tensão na ponta da trinca não possui uma única dimensão fractal de rugosidade, mas depende do raio vetor posição na frente da ponta da trinca.

## **8. 4 – Conclusões do Resultados Analíticos dos Modelos Fractais da Fratura**

### *8.4.1 - A Solução Analítica para o modelo do Campo de Tensão ao redor de uma trinca rugosa*

Comparando-se o modelo fractal proposto por Alves *et al.* 2010 com o modelo de Borodich-Mosolov-Yavari publicado na literatura chega-se às seguintes conclusões sobre essas duas



teorias:

No modelo de Borodich- Mosolov-Yavari as trincas são tratadas como verdadeiros fractais matemáticos que se estendem entre um intervalo infinito de escalas:  $\frac{1}{\infty} \leq \varepsilon \leq \infty$ . Porém sabe-se da observação da natureza que as trincas na verdade não são fractais matemáticos e são chamadas de pré-fractais, pois sua auto-afinidade se estende apenas entre um intervalo de escalas:  $\varepsilon_{\min} = \frac{l_0}{L_0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{L_0}{L_0}$ . No modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010) a trinca é um pré-

fractal que se estende em escalas  $\varepsilon_{\min} = \frac{l_0}{L_0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{L_0}{L_0}$

Na consideração sobre o fractal, no modelo de Borodich- Mosolov- Arash Yavari usa-se a função coordenada da trinca que é uma curva não diferenciável (ou usa derivada e integral de lesbegue para esse caso) enquanto que no modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010) a consideração sobre o fractal é que a função comprimento real da trinca  $L = f(L_0)$  é uma função diferenciável, pois não usa a função coordenada (ou seja, evita o problema da não-diferenciabilidade, pois qualquer função comprimento é diferenciável pois resulta de uma integral, mesmo que a função coordenada dos pontos não seja)

O modelo de Borodich-Mosolov-Yavari no limite de pequenas escalas usa a teoria de renormalização para o calculo de infinitésimos para satisfazer o Critério de Griffith , enquanto que o modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010), no limite de pequenas escalas usa o cálculo na escala  $\varepsilon_{\min}$  para satisfazer o critério de Griffith (isso evita a complicação desnecessária do uso de uma teoria muito avançada).

No modelo de Borodich- Mosolov-Yavari, a premissa de cálculo de comprimento de trinca rugosa é  $L \sim l_0^{1/H}$ , enquanto que no modelo fractal proposto por Alves-Alkimin (Alves *et al.* 2010), a premissa de cálculo de comprimento de trinca rugosa é:

$$L \cong L_0 \sqrt{1 + \left(\frac{l_0}{L_0}\right)^{2H-2}} \quad (8. 1)$$

No modelo de Borodich-Mosolov-Yavari, o modelo de comprimento de trinca rugosa se divide em intervalos de  $H : 0 \leq H \leq 1/2$  (para materiais dúcteis)  $H : 1/2 \leq H \leq 1$  (para materiais frágeis),  $L \sim l_0^{1/H}$ , enquanto que no modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010), o modelo de comprimento de trinca rugosa transita continuamente de frágil para dúctil satisfazendo o que se observa na prática.

No modelo de Borodich- Mosolov- Arash Yavari, o campo de tensão é do tipo  $\sigma_{ij} \sim r^{-\alpha}$ ,

$L \sim l_0^{1/H}$ . Nesse modelo o campo de tensão na ponta da trinca depende de apenas uma única dimensão fractal  $\alpha = (D-2)/2$ , enquanto que no modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010), o campo de tensão é dado pela equações (6. 167). Nesse modelo o campo de tensão na ponta da trinca depende de vários fatores, possivelmente é um multifractal e não depende apenas de uma única dimensão fractal

No modelo de Borodich-Mosolov-Yavari, a curva  $J-R$  é apenas localmente independente do caminho, pois seu integrando depende do raio na forma  $r^{-D}$ , enquanto que no modelo fractal proposto por Alves *et al.* (2010), a curva  $J-R$  é totalmente independente do caminho, pois seu integrando não depende nem do raio  $r$  nem do comprimento rugoso da trinca e sim da rugosidade  $\xi \equiv dL/dL_0$ , que fica do lado de fora da integral- $J$ .

Nas demais conclusões sobre a teoria fractal da fratura os modelos concordam entre si.

Ainda foi possível unificar os critérios de fratura: (i) monocristal, (ii) Inglis, (iii) Griffith, (iv) Irwin e (v) Alves, acrescentando um termo multiplicativo de rugosidade.

## 8.5 - Conclusões dos Resultados Experimentais

A geometria fractal é uma ferramenta imprescindível na análise física do processo de fratura estável e instável (ou catastrófica). Ela, sendo parte da teoria do caos determinístico, tornou possível a descrição matemática de fenômenos aleatórios ou estocásticos como a fratura. A partir destas duas visões modernas do problema da fratura foi possível explicar, ao longo deste trabalho:

(i) A rugosidade,  $\xi = dL/dL_0$ , e o comportamento da curva  $J-R$  ou  $G-R$  para diferentes materiais, definindo uma nova metodologia para sua determinação, através da medida fractal,  $H$ , desta rugosidade e da energia efetiva de fratura,  $2\gamma_{eff} = 2\gamma_e + \gamma_p$ .

(ii) o processo de dissipação de energia e de instabilidade estática no crescimento de uma trinca, registrado na rugosidade da superfície de fratura.

### 8.5.1 - Modelamento fractal da superfície de fratura

Comparando-se os resultados experimentais obtidos com o modelo proposto neste trabalho, conclui-se que um dos principais resultados, aqui obtido, é a equação (4. 87) que leva a constatação de que a superfície de fratura rugosa é realmente um fractal auto-afim. A partir desta constatação torna-se viável considerar o modelo fractal da superfície de fratura rugosa dentro das equações da mecânica da fratura, segundo a equação (4. 89). Como existe uma estreita relação entre a fenomenologia e a estrutura formada, decorrente da sua geometria fractal, o entendimento dos processos de formação destas estruturas devem ser provenientes da sua análise matemática.

Portanto, a descrição matemática das estruturas fractais deve transcender a uma simples caracterização geométrica, com a finalidade de relacionar o padrão formado com o processo de dissipação de energia que o gerou. Desta forma, é possível utilizar a geometria fractal com a finalidade de se entender processos cada vez mais complexos dentro da fratura. Portanto, os diversos mecanismos responsáveis pelo desvio da trinca e pela formação da superfície rugosa de fratura podem a partir de então ser quantificados na análise fractal desta superfície.

A idéia de se obter uma relação entre  $L$  e  $L_o$  vem da necessidade de se manter o atual formalismo utilizado pela MFC, mostrando que a geometria fractal pode em muito contribuir para o contínuo avanço desta ciência.

Utilizando-se um modelo termodinâmico para uma trinca rugosa (Alves, 2010), tem-se que a entropia dessa linha é dada por:

$$S = -k \left( \frac{h_0}{H_0 \cos(\alpha\pi)} \right) \ln \left( \frac{l_0 h_0}{L_0 H_0 \cos(\alpha\pi)} \right) \quad (8.2)$$

onde:  $l_0, h_0$  são os comprimentos mínimos da trinca na direção paralela e perpendicular à direção de crescimento,  $L_0, H_0$  são o comprimento e a altura da trinca e  $\alpha$  é o ângulo máximo de flutuação da trinca.

A dissipação da energia no caso de uma trinca em movimento é dada por:

$$\psi = T \frac{dS}{dt} = -kT \left( \frac{h_0}{\cos^2(\alpha\pi)} \right) \left[ \frac{l_0}{L_0} - \text{sen}(\alpha\pi) \ln \left( \frac{L_0 \cos(\alpha\pi)}{l_0} \right) \right] \frac{d\alpha}{dt} \quad (8.3)$$

Observa-se da equação (8.3) que uma trinca rugosa dissipa mais energia do que uma trinca lisa. Pois nesse último caso o valor de  $\cos(\alpha\pi) = 1$  e, portanto, o valor da dissipação  $\psi$  é menor do que o valor da dissipação de uma trinca lisa, viajando a mesma velocidade.

### 8.5.2 – Do modelo fractal da curva $J-R$ e dos seus ensaios experimentais

Na literatura da MFEP (Ewalds, 1993; Kraff, 1962) o crescimento da curva  $J-R$  tem por um longo tempo sido associado à interposição de condições de tensão plana e deformação plana, gerando a morfologia peculiar da superfície de fratura rugosa. Nos metais este crescimento tem sido associado ao crescimento e coalescência de microvazios (Ewalds, 1993). Contudo, a MFEP Fractal não tem proposto uma análise definitiva do crescimento da curva  $J-R$ . Neste capítulo foi mostrado que a morfologia da superfície de fratura, caracterizada por parâmetros da geometria fractal, explica de uma forma simples e direta o crescimento da forma da curva  $J - R$ . É mostrado que o crescimento da curva  $J-R$  é devido à não-linearidade no balanço de energia de Griffith-Irwin-Orowan quando a rugosidade é levada em conta.

A curva  $J - R$  possui um crescimento não-linear, devido a um modelamento matemático de uma situação rugosa sobre um referencial liso, que corresponde à superfície de fratura projetada. Ou seja, se a curva  $J - R$  for descrita no seu referencial próprio, que é a superfície rugosa, ela poderá não apresentar nenhum crescimento devido a rugosidade da trinca. Alguns autores consideram que a deformação plástica seja a responsável pelo crescimento da curva  $J - R$ , observe que esta deformação plástica já é contabilizada no coeficiente,  $\gamma_p$ , da equação (6. 282) que descreve a curva  $J - R$ . Portanto, a parte da rugosidade das superfícies de fratura, que fica registrada no material, foi matematicamente separada do termo de deformação plástica,  $\gamma_p$ , no modelo fractal proposto neste trabalho. Isto significa que os efeitos das deformações elástica e plástica estão implicitamente incluídos no termo de rugosidade geométrica fractal da equação (6. 282).

O sucesso do modelamento fractal da fratura entre a curva  $J-R$  e o expoente,  $H$ , pode ser atribuído ao seguinte fato: uma fratura só acontece após um processo de encruamento no material (hardening), por mínimo que seja. Este tipo de processo segue uma lei de potência (Kanninen 1985), auto-similar (Mosolov 1993), da tensão aplicada,  $\sigma$ , com a deformação,  $\varepsilon$ , conforme mostra a equação (6. 319). Portanto é possível associar a taxa de energia elasto-plástica liberada,  $J$ , que é uma grandeza energética, com a tensão aplicada,  $\sigma$ , que é uma densidade de energia (ASTM - E1737 1996), e o comprimento da fratura,  $L_o$ , com a deformação,  $\varepsilon = \Delta l/l$ , e o expoente de rugosidade,  $H$ , com o expoente de encruamento, “ $m$ ” (ASTM - E1737 1996). Como o encruamento acontece antes do início do crescimento da trinca, é evidente que seu resultado físico aparece registrado na superfície de fratura em termos da rugosidade, criada no processo de crescimento da trinca. Este processo de crescimento de trinca admite um escalonamento fractal em termos da superfície projetada,  $L_0$ ; logo é possível que o efeito do seu encruamento prévio seja responsável pela posterior auto-afinidade da fratura válida no início do crescimento da trinca. Isto porque no limite do início do crescimento da trinca, a relação de escalonamento fractal é uma lei de potência auto-similar, análoga à lei de potência da relação de encruamento (Mosolov 1993; Borodich 1997).

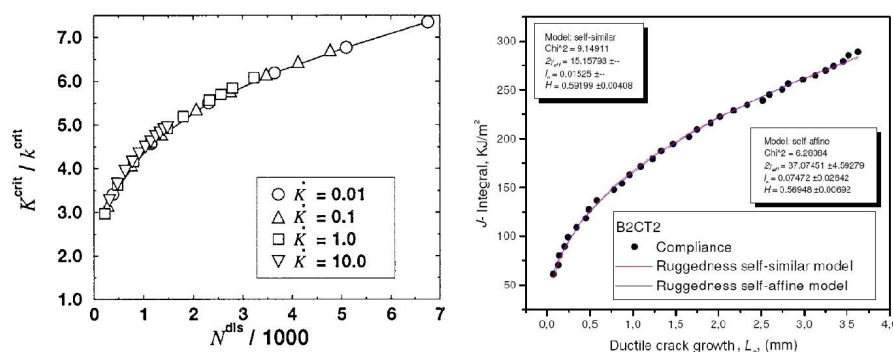


Figura - 8. 1. Analogia entre o gráfico do campo de tensão,  $K_I$ , em função do número de discordâncias,  $n$ , antes da trinca se propagar e o gráfico da curva  $J - R$  em função do comprimento projetado da trinca,  $L_o$ .

De acordo com Borodich (1997), é possível considerar o acúmulo de discordâncias como sendo um efeito de preparo do campo de tensão na ponta da trinca para esta se propagar. Hartmaier & Gumbsch (1999) fizeram simulações da atividade de discordâncias na transição frágil-dúctil e obtiveram uma correlação entre a tenacidade a fratura crítica e o número de discordâncias emitidas, para diferentes taxas de carregamento, conforme mostra a Figura - 8. 1a. De acordo com a Figura - 8. 1 e a Figura - 8. 2, pode-se concluir que para a singularidade do campo de tensão na ponta da trinca ser fractal ela deve passar de um valor, cujo expoente é semi-inteiro, para um valor de expoente fracionário, devido ao desordenamento do acúmulo discordâncias, que produz um arranjo irregular do planos cristalinos em relação a uma situação não deformada plasticamente.

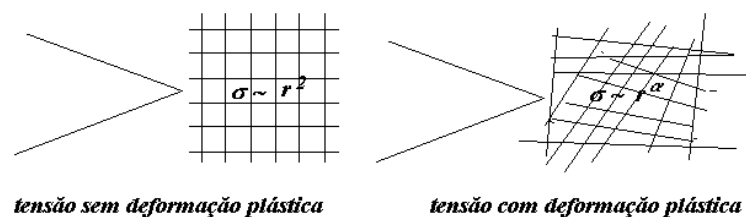


Figura - 8. 2. Potencialidade da funções de campo na ponta de uma trinca antes e depois da deformação plástica.

Para concluir, é muito importante notar que a derivação apresentada neste capítulo difere daquele tratamento feito por Mu (1988) e Lung (1988). Ao invés da equação (6. 282) deste capítulo, este autores, baseando-se em argumentos fenomenológicos, propõem a expressão (7. 18) para a taxa de energia elasto-plástica liberada. Uma outra proposição baseada em argumentos empíricos foi apresentada por Mecholsky e Passoja (1989) conforme mostra a equação (7. 19). Em contraste com a equação (6. 282), as equações (7. 18) e (7. 19) são empíricas e não têm base matemática. Elas tem sido largamente usada na literatura comprometendo, portanto, os resultados assim apresentados. Dessas análises podemos concluir que:

i) O modelo proposto neste trabalho está baseado na idéia proposta por Mandelbrot (1982) e na verificação experimental (Mandelbrot) de que as trincas ou superfícies de fratura são fractais e que sua rugosidade pode ser modelada analiticamente para ser inserida nas equações de Mecânicas de Fratura;

ii) A viabilidade de introduzir a teoria de fractal na Mecânica da Fratura justificada face aos incontáveis resultados experimentais de caracterização fractográfica que confirmam a natureza de fractal apresentada pelas trincas e superfícies de fratura (Nagahama, Tanaka, Mecholsky, 1989);

iii) A teoria apresentada neste artigo introduz a geometria de fractal (para descrever o rugosidade da fratura) no formalismo da EPFM clássico. O modelo resultante é consistente com os resultados experimentais e mostra que a geometria de fractal tem muito para contribuir ao avanço

desta ciência;

Os parâmetros que melhoram as curvas quando ajustadas foram obtidos por meio de um método de ajuste não-linear de curvas;

iv) Pelo modelo proposto neste artigo e usando uma técnica de análise de fractal da rugosidade ("Método da Análise da Imagem das Ilhas de Contraste" (Alves, 2010) das amostras testadas, foi possível reproduzir a curva  $J-R$  experimental de aços HSLA e de materiais poliméricos, obtida pela técnica da flexibilidade e pela técnica de testes de múltiplos corpos de prova. Os parâmetros  $l_0$ ,  $H$  e  $2\gamma_{eff} = 2\gamma_e + \gamma_p$ , que melhor corresponderam às curvas quando elas foram ajustadas foram obtidos por meio de um método de ajuste não-linear de curvas;

v) Mostra-se que o crescimento da curva de  $J-R$  é devido à não-linearidade no balanço de energia de Griffith-Irwin-Orowan quando a rugosidade é levada em conta;

vi) A idéia de conectar a morfologia de uma superfície de fratura com propriedades físicas dos materiais foi feita por vários autores (Xie, 1989; Tanaka, 1996; Mu, 1988, Mecholsky, 1989). Contudo, esta conexão é mostrada nesta tese com um pouco mais de rigor matemático;

vii) A equação (6.294) mostra que a rugosidade local  $dL/dL_0$  depende das características do ensaio e da superfície de fratura. Esta equação está em oposição às suspeitas anteriores de que existiria um valor universal para a dimensão de rugosidade da fratura para cada material;

viii) Pode ser facilmente entendido porque a equação (7. 10) está relacionada ao ensaio de fratura junto com seu efeito sobre a microestrutura do material. Este fato permite obter uma boa estimativa da curva de  $J-R$ . Ela é simplesmente obtida medindo-se a energia efetiva de superfície  $\gamma_{eff}$  sobre o tamanho projetado da trinca  $L_0$  e o valor do expoente Hurst, a partir de uma análise de metalográfica do material, sem necessariamente administrar um ensaio de fratura convencional,;

ix) As normas técnicas ASTM E813-89 e ASTM E1737-96 sugerem um ajuste exponencial do tipo:

$$J_0 = C_1 \Delta L_0^{C_2} \quad (8. 4)$$

para as curvas de  $J-R$ . Eles não fornecem nenhuma explicação sobre a natureza dos coeficientes para este ajuste. Porém, comparando a equação (8. 4) com a equação (7. 9), pode-se concluir que

$C_1 = 2\gamma_{eff} (2-H) l_0^{H-1}$  e  $C_2 = 1-H$ , o que explica a natureza física destes parâmetros;

ix) Portanto, é importante enfatizar que o modelo proposto neste trabalho ilumina a natureza dos coeficientes para o ajuste proposto pelo modelo de fractal e mostra qual é a verdadeira influência da rugosidade no crescimento da curva  $J-R$ . A aplicação deste modelo na prática de um ensaio de fratura pode ser usada no futuro, uma vez que as técnicas para se obter os parâmetros experimentais,  $l_0$ ,  $H$ , e  $\gamma_{eff}$  podem ser realizadas com a precisão necessária;

x) O método para se obter as curvas de  $J-R$  propostas neste artigo não pretende substituir o método experimental atual usado em Mecânica de Fratura, como apresentado pelas normas ASTM. Porém, ele pode dar uma margem maior de confiança aos resultados obtidos experimentalmente, além de permitir trabalhar com a microestrutura dos materiais. Por exemplo, obtendo materiais novos, com uma tenacidade a fratura mais alta, uma vez que o modelo explica micro e macroscopicamente o comportamento de curvas de  $J-R$ .

Os processos de fratura são muito complexos e ainda não bem entendidos. Os mecanismos pelos quais as irregularidades geométricas das superfícies são introduzidas na superfície de fratura dependem de inúmeros fatores tais como, inhomogeneidades, microtrincas, contornos de grão, emissão de ondas sonoras, radiação, impurezas, instabilidades induzidas por campos de tensão na ponta da trinca, etc. A construção de um modelo que leva em conta todos os fatores que contribuem para a fratura é, se não, quase praticamente impossível. Mas, uma vez que todos eles contribuem até certo ponto ao processo, faz sentido presumir que a influência deles deixa rastros na morfologia da superfície fraturada. Esta hipótese é confirmada pelo ajuste obtido para a curva  $J-R$  mostrado nas Figura - 7.17 a Figura - 7.21 quando a fractalidade da superfície é levada em conta pela teoria. Desta forma, o comportamento elasto-plástico da curva  $J-R$ , retratado comumente por uma teoria elástica não-linear, pôde ser evidenciado analiticamente nas equações desta nova MF-Fractal, por meio do termo geométrico que expressa a rugosidade da trinca, como mostram as equações (7. 8), (7. 9) e (7. 10). Portanto a geometria fractal mostra ser um poderoso recurso que torna simplificada a análise de um problema de tal complexidade.

É bem conhecido que as superfícies de fratura de uma forma geral são objetos multifractais (Heping-XIE 1998) e o tratamento aqui apresentado aplica-se somente a superfícies monofractais. Contudo, para os propósitos de se evidenciar a influência da rugosidade na fenomenologia da MFC proposta neste trabalho os resultados aqui apresentados foram satisfatórios. Portanto, a generalização pela multifractalidade deve ser um assunto a ser tratado em trabalhos futuros.

## **8. 6 - Perspectivas resultantes deste trabalho e Propostas de Trabalhos futuros**

### *8.6.1 – Para os Meios Irregulares e Simulações Numéricas*

Sugere-se como trabalho futuro um estudo com diferentes tipos de rugosidades desde as analíticas com uma expressão definida do tipo senoidal até outras rugosidades com diferentes graus de fractalidade.

Sugere-se aplicar o mesmo modelo matemático de rugosidade aqui utilizado em problemas de potenciais os quais foram resolvidos neste trabalho pelo Método dos Elementos Finitos em comparação com os resultados obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno.

Sugere-se também a análise do problema Elástico Linear para verificação da validade do modelo de rugosidade proposto, a fim de se utilizar a aproximação sugerida como uma forma de economia do custo computacional não só em problemas mecânicos como de em problemas térmicos. Além disso, existem outros vários problemas interessantes da Teoria Elástica Linear em corpos com superfície rugosa que podem ser analisados com o intuito de se extrair informações de interesse sobre o efeito da rugosidade em problemas de tensão, deformação, contato e até mesmo fratura.

Complementando o problema Elástico Linear uma Análise Elasto-Plástica deve ser feita como uma extensão do problema Elástico Linear para se investigar o efeito da relação entre a plasticidade e a formação de rugosidades em superfícies submetidas a regime de carga, deformação com o possível o surgimento de falhas.

A área de Transmissão do Calor, da Teoria da Elasticidade e da Mecânica da Fratura possui muitos atrativos científicos e tecnológicos devido a sua abrangência e utilização em outras áreas da Engenharia. Diante dos problemas globais de aquecimento e mudança no clima podemos, particularmente, pensar, por exemplo, em um problema térmico onde a distribuição de temperatura sobre uma linha da costa marítima influência consideravelmente no habitat da vida marinha. Com isso a modelagem de uma costa via geometria euclidiana torna-se inviável. A proposta de utilização da descrição do campo escalar (térmico ou elétrico) é deixada para um outro trabalhos futuros.

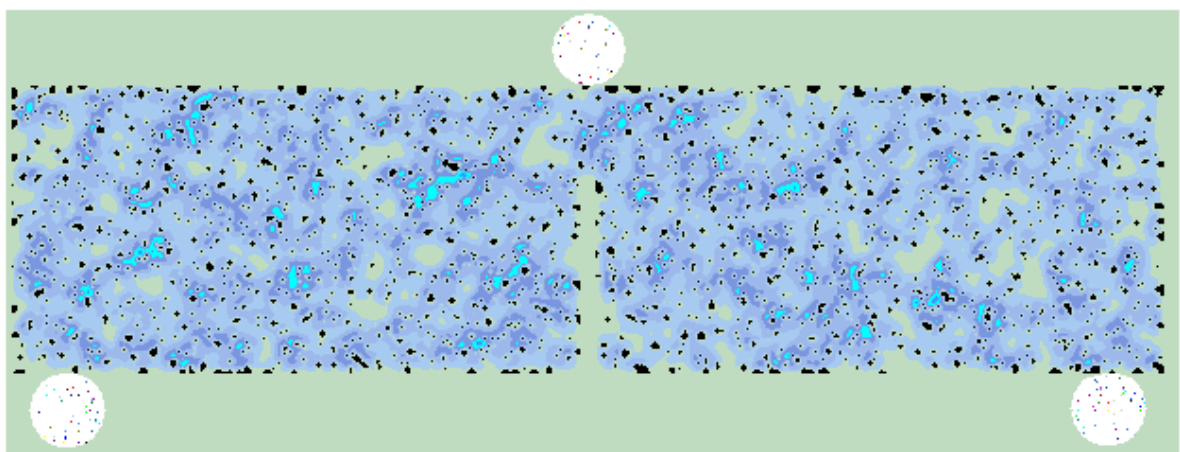


Figura - 8. 3. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio mostrando a dispersão deste campo ao redor de cada ponto concentrador

Uma campo com irregularidades foi simulado com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos. Na Figura - 8. 3 observa-se a simulação desse um campo escalar onde



cada ponto no meio irregular recebeu um valor aleatório intensidade de campo. O problema como um todo foi solucionado numericamente pela equação de Laplace  $\nabla^2 \rho_x = 0$ , cuja solução para o meio irregular simulado mostra uma dispersão local do tipo gaussiano ao redor de cada ponto concentrador.

Na Figura - 8. 4 observa-se o mesmo campo anterior, porém, com uma gama de cores diferente da representação anterior

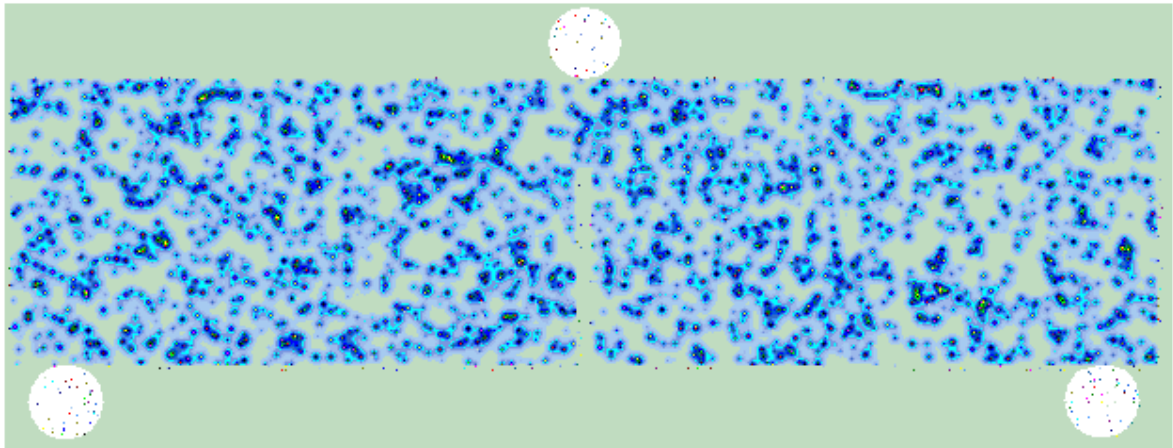


Figura - 8. 4. Campo escalar com pontos concentradores de campo aleatoriamente distribuídos no meio mostrando a dispersão deste campo ao redor de cada ponto concentrador, com outra escala de cores

Observe nesta simulação a dispersão do campo ao redor de cada concentrador de tensão dada pela equação do Laplaciano:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8. 5)$$

Isso significa que na simulação de uma fratura deve-se considerar, além do critério energético do campo, o critério geométrico para se obter um critério de fratura mais realista, a fim de retratar o processo de crescimento de uma trinca em um meio irregular.

Em uma outra instância, decorrente da proposta deste trabalho seria desenvolver um método numérico baseado nos métodos numéricos convencionais mas que leve em conta a influência da rugosidade no processo de dissipação de energia de tal forma que a geometria fractal possa ser identificada nesse processo de simulação. Uma opção que tem sido usada por outros autores (LEUNG, et al), mas que não foi executada por nós, consiste na solução do problema por Métodos Numéricos como o Método dos Elementos Finito Fractal (MEFF). Este método consiste na estruturação da malha utilizando a propriedade de invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade fractal) nas equações matriciais do método, para se obter uma solução melhorada, válida em várias escalas de ampliação. Outros métodos como o MDF, ou MEC podem também receber uma formulação fractal nos seus elementos e na sua malha (quando

possível) de forma a executar um papel similar àquele proposto por LEUNG no MEFF. Esta opção pode gerar um MDFF e um MECF ou qualquer outro método que possa ser modificado para levar em conta na sua formulação a fractalidade ou a irregularidade geométrica do problema. Estas propostas podem ser implementadas e sendo deixada para trabalhos futuros.

### 8.6.2 – *Para a Mecânica da Fratura Fractal*

São muitos os trabalhos de pesquisa na área de fratura, levando-se em conta a rugosidade fractal dessas superfícies e o efeito desta rugosidade sobre as propriedades mecânicas do material. Sugere-se uma análise da influência da rugosidade nos processos contidos na Mecânica da Fratura Instável (processo de trincas rápidas) como a curva de  $J - D$  de resistência e nos processo contidos nos problemas de Análise da Mecânica da Fratura Instável (processo dinâmico) como a formação de instabilidade e bifurcação de caminhos de trinca.

Existem várias perspectivas para a utilização dos modelos e resultados apresentados neste trabalho. Dentre eles pode-se sugerir:

(i) o problema do modelamento fractal da fratura instável (ou catastrófica) com ramificações de trinca que não foi feito neste trabalho. Este modelo deverá ser um extensão dos modelos de fratura aqui apresentados.

(ii) o modelamento fractal da fragmentação por ramificação de trinca. Este é um problema que deve ser resolvido devido a suas diretas aplicações tecnológicas, mas é necessário contar com o estágio sugerido pelo item anterior.

(iii) o modelamento fractal da nucleação e do crescimento simultâneo de trincas ramificadas. Este modelo será útil para resolver problemas de choque térmico, fratura em solos e impacto.

(iv) um modelamento Termodinâmico Fractal e uma Mecânica Estatística Fractal para a fratura. Este tipo de abordagem generalizada deverá preencher uma lacuna existente entre a mecânica da fratura e a teoria da fragmentação e a teoria dos meios granulares.

(v) uma simulação da fratura rugosa nos seus mais variados casos. Esta simulação será útil para se obter respostas imediatas a problemas tecnológicos de fraturas e choque térmico em materiais.

Fim

# Apêndices

## A1 - O Modelo fractal de estruturas geométricas

A partir de agora será estudada a formação de estruturas invariantes por transformação de escala com dimensão excedente a dimensão topológica. Nesta secção, será descrita de forma sucinta, a origem dos fractais na natureza e a sua descrição matemática do ponto de vista geométrico, envolvendo as principais relações, que serão uteis para descrição do processo de fratura, crescimento e propagação de trincas e fragmentação.

### A1.1- Estruturas e padrões geométricos invariantes por transformação de escala

Uma estrutura simples é definida pela configuração de um padrão geométrico elementar sobre pontos de um arranjo espacial, no qual este padrão se organiza, conforme é exemplificado na a Figura - A1. 1.

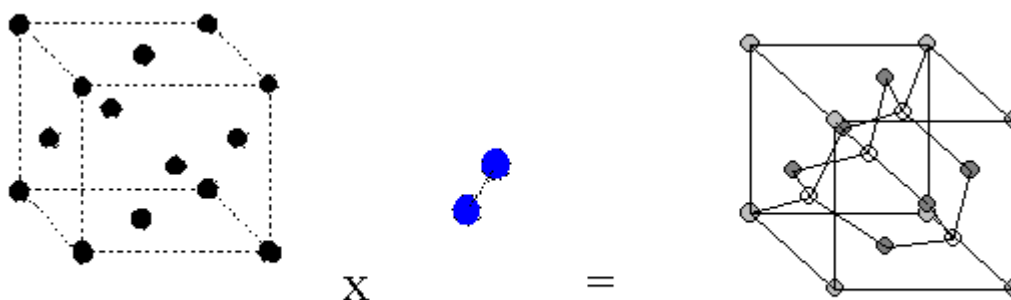


Figura - A1. 1. Definição de uma estrutura geométrica. Arranjo Espacial x Padrão Geométrico Elementar = Estrutura para uma Rede Cúbica FCC x Base Química de Átomos de Carbono = Estrutura do Diamante.

Na natureza encontra-se estruturas geométricas que vão desde o interior do núcleo dos átomos ( $10^{-12}$ m) até aglomerados de galáxias ( $10^{12}$ m). Exemplos de estruturas geométricas de interesse para o estudo da fratura são: a estrutura cristalina e a microestrutura do materiais sólidos. A estrutura cristalina dos sólidos é formada por uma rede espacial (chamada de rede de Bravais) preenchida por uma base química de átomos ou moléculas a cada ponto da rede, conforme mostra a Figura - A1. 1. Estruturas deste tipo são chamada de periódicas.

A estrutura formada num primeiro nível, pode vir a ser um padrão geométrico elementar disposto sobre o arranjo espacial de uma estrutura num nível superior (Figura - A1. 2) e assim por sucessivamente. Isto pode acontecer formando-se diversos níveis hierárquicos de estrutura. Por exemplo, a estrutura atômica forma um padrão geométrico elementar para a estrutura cristalina e

esta por sua vez forma um padrão geométrico elementar para a microestrutura dos materiais. Portanto, padrões geométricos e estruturas podem se confundir. Quando isso acontece indefinidamente de maneira que o padrão geométrico elementar mais o arranjo espacial formam uma estrutura que, por sua vez, é similar ao padrão geométrico anterior, apenas mudando as dimensões da escala, diz-se que a estrutura global é invariante por transformação de escala, ou seja, as partes são semelhantes ao todo, conforme mostra a Figura - A1. 2.

Uma estrutura fractal, com dimensão de Hausdorff-Besicovitch,  $D_H$ , invariante por transformação de escala, em todas as escalas de ampliação ou redução, pode ser gerada por regras de iteração, a partir de dois elementos básicos, chamado de semente e iniciador, conforme mostra a Figura - A1. 2.

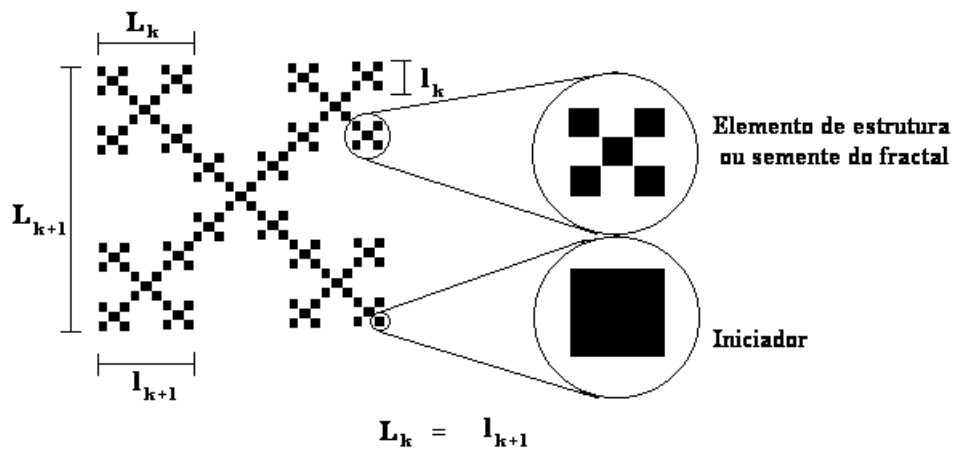


Figura - A1. 2. Estrutura geométrica fractal construída a partir de iterações entre uma semente padrão e um iniciador, em escalas sucessivas de ampliação, formando um padrão geométrico auto-similar.

A geração dessa estrutura fractal é feita substituindo-se o iniciador pela semente a cada estágio de iteração, conforme mostra a Figura - A1. 2.

### A1.2 - Elemento geométrico fundamental da estrutura ou “semente fractal”

Define-se o “*elemento geométrico fundamental da estrutura*” ou pode-se chamar de “*semente*” de um fractal, como sendo o elemento básico de formação do fractal que dá origem a estrutura do fractal físico ou matemático, conforme mostra a Figura - A1. 3. Este elemento é invariante por transformação de escala (auto-similar ou auto-afim) a outro, em escalas sucessivas de ampliação ou redução. Nas regras de iteração ele é usado como semente de construção do padrão, que se repete nas sucessivas escalas. No caso de fractais físicos, o “*elemento geométrico fundamental da estrutura*”, é definido como sendo, o menor elemento da estrutura (Figura - A1. 3a), a partir do qual a propriedade de invariância por transformação de escala, (auto-similaridade ou

auto-afinidade) aparece, podendo ser extraído do contexto do objeto a partir da menor escala de observação,  $\varepsilon_{min}$ . Este “*elemento*” ou esta “*unidade geométrica padrão*” é utilizado na contagem do número de estruturas invariantes, formadas numa determinada escala, a fim de obter-se uma descrição analítica ou numérica da estrutura formada.

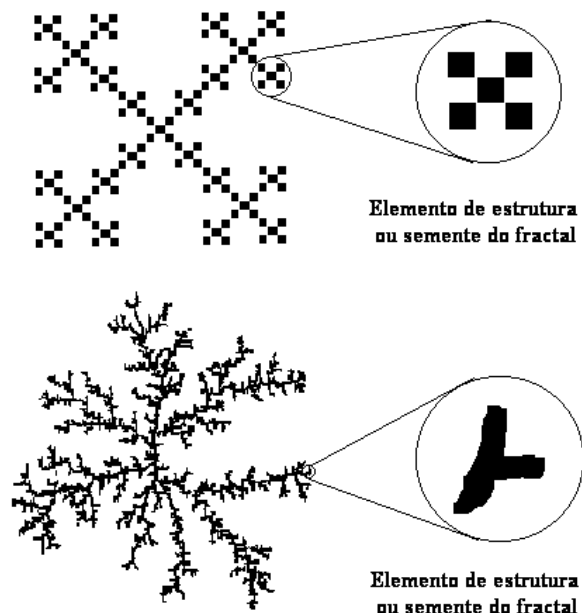


Figura - A1. 3. Exemplo de fractais ramificados, mostrando os elementos de estrutura, ou as unidades geométricas elementares, de dois fractais. a) Um fractal matemático auto-similar. b) Um fractal físico estatisticamente auto-similar.

### A1.3 - Limites hierárquicos de escalonamento

Mandelbrot [1984] apontou em seu trabalho que as superfícies de fraturas e os objetos encontrados na natureza, de uma forma geral, caem numa hierarquia regular, onde os vários tamanhos das irregularidades descritas pela geometria fractal, estão limitados por tamanhos superiores e inferiores, no qual cada nível é uma versão dos níveis contido abaixo e acima destes tamanhos. Algumas estruturas que aparecem na natureza, ao contrário dos fractais matemáticos, apresentam a propriedade de invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade) apenas dentro de uma faixa limitada de transformação de escalas ( $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{máx}$ ). Observe da Figura - A1. 3 que, nesta escala de corte mínima,  $\varepsilon_{min}$ , é possível encontrar uma parte elementar do objeto semelhante ao todo, que nas regras de iteração é usado como semente de construção do padrão, que se repete nas sucessivas escalas. E na escala de corte máxima é possível visualizar o objeto fractal como um todo.

Não se pode confundir esta forma seqüencial de construção, com a forma na qual os fractais realmente aparecem na natureza. Em meios físicos, os fractais aparecem normalmente por situações de instabilidade locais ou globais [Sander 1984], dando origem a estruturas que podem ser

chamadas de fractais, pelo menos dentro de uma estreita faixa de escalonamento ( $\varepsilon_{min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{máx}$ ), como é o caso de árvores tais como o pinheiro, couve-flor, estruturas dendríticas em solidificação de materiais, trincas, montanhas, nuvens, etc. A partir desses exemplos observa-se que, na natureza, as características peculiares do padrão da semente dependem do sistema em particular. Para estas estruturas, é fácil ver, que o escalonamento se dá desde o menor galho do pinheiro, que se repete seguindo a mesma aparência, até o tamanho final do mesmo e vice-versa. No caso de uma trinca, se for ampliado um trecho desta trinca por uma escala,  $\varepsilon$ , ver-se-á que este se parece com a trinca inteira e assim sucessivamente, até que chegar-se ao limite máximo de ampliação numa escala mínima,  $\varepsilon_{min}$ , na qual, não se pode mais ampliar o trecho, sem perder a propriedade de invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade). Como a teoria fractal de crescimento trata de estruturas em crescimento, devido a situações de instabilidades locais ou globais [Sander 1984], tal intervalo de escalonamento está relacionado com a energia total gasta para formar a estrutura. Os limites mínimos e máximo de escalas estão relacionados com as escalas mínima e máxima de energia gasta na formação da estrutura, pois esta é proporcional a massa do fractal. O número de níveis de escalonamento,  $k$ , entre  $\varepsilon_{min}$  e  $\varepsilon_{max}$ , depende da taxa com que a energia de formação do fractal formado foi dissipada, ou também do grau de instabilidade que deu origem ao padrão.

#### *A1.4 – A relação de invariância por transformação de escala de uma estrutura fractal auto-similar*

A partir de agora será utilizado o exemplo de um pinheiro como sendo um fractal auto-similar, conforme mostra a Figura - 3. 9 e Figura - A1. 2, para então deduzir as principais relações matemáticas de escalonamento geométrico e em seguida aplicar a fratura

Uma vez que se define um fractal como sendo um objeto invariante com dimensão,  $D$ , excedente a dimensão topológica,  $d$ , é possível imaginar que cada parte de sua estrutura possui uma medida de sua extensão geométrica do tipo:

$$M_{Dk}(l_k) \sim l_k^D. \quad (A1. 1)$$

onde  $d \leq D \leq d+1$ . e  $l_k$  é o tamanho do elemento da estrutura no nível de escalonamento,  $k$ . Portanto, para o tamanho máximo aparente do fractal,  $L_o$ , tem-se:

$$M_{D_o}(L_o) \sim L_o^D. \quad (A1. 2)$$

Dividindo-se a equação (A1. 1) por (A1. 2) tem-se:

$$\frac{M_{D_o}(l_k)}{M_{Dk}(L_o)} = \left( \frac{l_k}{L_o} \right)^{-D}, \quad (\text{A1. 3})$$

A razão  $M_{D_o}(l_k)/M_{Dk}(L_o)$  corresponde ao número de elementos de estrutura de tamanho,  $l_k$ , com dimensão,  $D$ , contido na extensão geométrica total do fractal, ou seja:

$$N_D(l_k) = \left( \frac{l_k}{L_o} \right)^{-D}. \quad (\text{A1. 4})$$

Portanto a grandeza geométrica  $M_D(l_k)$  é dada por:

$$M_D(l_k) = M_{Dk} \left( \frac{l_k}{L_o} \right)^{-D}, \quad (\text{A1. 5})$$

De forma análoga à equação (A1. 5), é possível obter relações de escalonamento para estruturas rugosas formadas, superfícies e linhas, as superfícies de fratura e as trincas respectivamente, estas por sua vez são dadas por:

$$A = A_k \left( \frac{l_k}{L_o} \right)^{-D_A}, \quad (\text{A1. 6})$$

para estruturas superficiais, onde  $2 \leq D_A \leq 3$ , e

$$L = L_k \left( \frac{l_k}{L_o} \right)^{-D_L}, \quad (\text{A1. 7})$$

para estruturas lineares, onde  $1 \leq D_L \leq 2$ .

Definindo-se o fator de escala,  $\varepsilon_k$ , como sendo dado por:

$$\varepsilon_k = \frac{l_k}{L_o}, \quad (\text{A1. 8})$$

Logo (A1. 5) pode ser escrita como:

$$M_D(\varepsilon_k) = M_{Dk} \varepsilon_k^{-D}, \quad (\text{A1. 9})$$

Este é uma relação de escalonamento fractal geral para medidas de comprimento, área ou volume fractal.

### *A1.5 - Diferença entre régua de medida e tamanho do elemento de estrutura*

A régua de medida,  $\delta^d$ , é o elemento geométrico que usa-se para realizar a medida de um objeto (fractal ou não). Ela consiste de uma extensão finita,  $\delta$ , com dimensão,  $d$ , compatível

com a do objeto,  $d = d_o$ . Na medida ela é usada para recobrir o objeto, com a finalidade de se alcançar a sua medida da extensão geométrica,  $M_{d_o}(\delta)$ .

Comparando-se o desenvolvimento matemático descrito na secção – **3.4** com aquele descrito na secção – 3.13.4 (A relação de invariância por transformação de escala) é preciso fazer a distinção entre régua de medida e elemento fundamental da estrutura fractal (ou semente). A régua de medida,  $\delta^\alpha$ , é o elemento geométrico que usa-se para realizar a medida de um objeto (fractal, ou não). Ela consiste de uma extensão finita,  $\delta$ , com dimensão,  $\alpha$ , compatível com a do objeto,  $\alpha = D$ . Na medida ela é usada para recobrir o objeto, com a finalidade de se alcançar a medida da sua extensão geométrica,  $M_\alpha(\delta)$ .

O elemento de estrutura,  $l_r^D$ , corresponde a um elemento geométrico que forma o fractal em escalas sucessivas mantendo auto-similaridade do objeto. É certo, que a régua de medida,  $\delta^d$ , pode colapsar sobre o elemento de estrutura,  $\delta^d \rightarrow l_r^D$ , cobrindo a sua extensão a fim de que a medida extensão do objeto,  $M_d(\delta)$ , seja obtida com maior precisão, onde,  $M_d(\delta) \sim \delta^{d-D}$  ( com  $D \geq d$  ). No diagrama de Richardson, os pontos de coordenada  $x$  e  $y$ , correspondem à medidas de régua tomadas arbitrariamente sobre a extensão do fractal. Contudo, se o tamanho da régua,  $\delta$ , foi escolhido exatamente igual ao tamanho do elemento de estrutura,  $l_r$ , em cada escala, então, haverá apenas pontos discretos sobre este diagrama por causa dos níveis discretos de escalonamento de uma estrutura fractal.

O elemento de estrutura,  $l_r^D$ , por outro lado, corresponde a um elemento geométrico que forma o fractal em escalas sucessivas mantendo auto-similaridade ou auto-afinidade do objeto. É certo, que a régua de medida,  $\delta^\alpha$ , pode colapsar sobre o elemento de estrutura,  $\delta^\alpha \rightarrow l_r^D$ , cobrindo a sua extensão a fim de que a medida da extensão do objeto,  $M_d(\delta)$ , seja obtida com maior precisão, onde,  $M_\alpha(\delta) \sim \delta^{\alpha-D}$  (com  $d \leq D \leq d + 1$ ). No diagrama de Richardson (vide Figura - 3.11), os pontos de coordenada  $x$  e  $y$ , correspondem à medidas de régua tomadas arbitrariamente sobre a extensão do fractal. Contudo, se o tamanho da régua,  $\delta$ , for escolhido exatamente igual ao tamanho do elemento de estrutura,  $l_k$ , em cada escala, então, haverá apenas pontos discretos de coordenadas  $(\ln(\varepsilon_k = \delta_k / \delta_{\max}), \ln N_k)$  sobre este diagrama por causa dos níveis discretos de escalonamento da estrutura fractal.

Considerando-se uma medida em que o tamanho da régua,  $\delta_k$ , colapsa sobre os elementos de estrutura,  $l_k$ , isto é,  $\delta_k = l_k$ , a relação (3.35) fica:



$$M_{\alpha}(l_k) = N_D(l_k)l_k^{\alpha}, \quad (\text{A1. 10})$$

Substituindo (A1. 4) em (A1. 10) obtém-se:

$$M_{\alpha}(l_k) = \left(\frac{l_k}{L_o}\right)^{-D} l_k^{\alpha}, \quad (\text{A1. 11})$$

chamando de  $M_{\alpha o} = L_o^{\alpha}$  a medida euclidiana da estrutura completa do fractal tem-se que:

$$M_{\alpha}(l_k) = M_{\alpha o} \left(\frac{l_k}{L_o}\right)^{\alpha-D}. \quad (\text{A1. 12})$$

O tamanho da “régua de medida” utilizada pode ser comparável ao estrutura intermediária,  $l_k$ , para se obter o valor da grandeza  $M_{\alpha}(l_k)$ . Logo, a medida mais precisa da grandeza,  $M_{\alpha}$ , será obtida quando for tomado o limite,  $l_k \rightarrow 0$ , ou  $l_k \rightarrow l_{\min} = l_o$ . A medida,  $M_{\alpha o} = L_o^{\alpha}$ , corresponde à medida máxima de  $M_{\alpha}$ , na projeção euclidiana do fractal,  $\alpha = d$ . Logo a partir de (A1. 12) tem-se :

$$M_d(l_o) = M_{do} \left(\frac{l_o}{L_o}\right)^{d-D}. \quad (\text{A1. 13})$$

Percebe-se com isto a importância de se conhecer o tamanho mínimo e o tamanho máximo da estrutura fractal, para se obter a medida,  $M_{\alpha}(\alpha = d)$  a mais precisa possível.

## A2 - Classes e tipos de fractais

Um dos mais fascinantes aspectos dos fractais é a variedade extremamente rica de possíveis realizações de tais objetos geométricos. Este fato dá lugar a questão da classificação, e no livro de Mandelbrot [1982] e nas publicações seguintes muitos tipos de estruturas fractais tem sido descritas. Abaixo será discutido algumas importantes classes com alguma ênfase sobre sua relevância para o fenômeno de crescimento.

Os fractais são classificados, ou se dividem em: fractais matemáticos e fractais físicos.

### A2.1- Fractais Matemáticos ou Exatos (Uniformes e Não-uniformes)

Fractais matemáticos são aqueles cuja relação de escalonamento é exata, isto é, gerados por regras de iteração puramente geométricas, e não tem limites de escala superior ou inferior pois são gerados por regras de interações infinitas (Figura - A1. 3a) sem levar em conta nenhuma fenomenologia em si, conforme mostra a Figura - A1. 3a. Alguns fractais, aparecem de forma

especial no espaço de fases de sistemas dinâmicos que estão próximo a situações de movimento caótico segundo a Teoria Não Linear de Sistemas Dinâmicos ou Teoria do Caos. Este tipo de abordagem não será feita aqui, por se tratar de um outro assunto que está fora dos objetivos deste capítulo.

## A2.2 - Fractais Físicos ou Reais ou Estatísticos (Uniformes e Não-uniformes)

Fractais físicos são aqueles onde não só a escala mas todos os parâmetros do fractal podem variar aleatoriamente. Portanto, sua relação de escalonamento é aproximada ou estatística, isto é, são obedecidas na média estatística feita ao longo de todo o fractal, desde uma escala inferior,  $\varepsilon_{min}$ , até uma outra escala superior  $\varepsilon_{max}$  (auto-similaridade), conforme mostra a Figura - A1. 3b e a Figura - A3. 4. Estes fractais são aqueles que aparecem na natureza como resultado do desencadeamento de condições de instabilidades em processos naturais (Sander, 1984), em um fenômeno físico qualquer, conforme mostra a Figura - A1. 3b. Nestes fractais físicos ou naturais o escalonamento da extensão da estrutura é feito por meio de uma função homogênea da seguinte forma:

$$F(\delta) \sim \delta^{d-D}, \quad (A2.1)$$

onde  $d$  é a dimensão euclidiana de projeção do fractal e  $D$  é a dimensão fractal da estrutura auto-similar.

É certo que os fractais físicos ou reais podem ser determinísticos ou aleatórios. Nos fractais aleatórios ou estatísticos as propriedades de auto-similaridade variam estatisticamente de região para região do fractal. A sua dimensão pode não ser única, porém caracterizada por um valor médio, de forma análoga a análise feita para fractais matemáticos. A Figura - A1. 3b mostra os aspectos de um fractal estatisticamente auto-similar cuja aparência varia de ramificação para ramificação dando-nos a impressão de que, cada parte é semelhante ao todo.

Os fractais matemáticos (ou exatos) e físicos (ou estatísticos), por sua vez, podem se subdividir em fractais uniformes e não uniformes.

Fractais uniformes são aqueles bem comportados que crescem uniformemente com um fator de escala único e constante,  $\lambda$ , e apresentam uma única dimensão fractal em toda a sua extensão.

Fractais não-uniformes são aqueles que crescem com fatores de escala  $\lambda_i$ 's que podem variar de região para região do fractal e possuem diferentes dimensões fractais ao longo de sua extensão.

Desta forma, a teoria fractal pode ser estudada sob três aspectos fundamentais da sua origem:

1 ) A partir dos padrões com características geométrica auto-similares encontrados em diferentes objetos na natureza.

2) A partir da teoria dinâmica não linear no espaço de fases de sistemas complexos.

3) A partir da interpretação geométrica da teoria dos expoentes críticos da mecânica estatística.

### **A3 - Propriedades dos objetos e estruturas geométricas fractais**

Além da dimensão não inteira, as propriedades básicas dos fractais são:

#### *A3.1- Dimensão Fractal (não-inteira)*

Um objeto possui dimensão fractal,  $D$  ( $d \leq D \leq d + 1 = I$ , onde,  $I$ , é a dimensão do espaço euclidiano a qual está imerso) quando:

$$F(\varepsilon L_0) = \varepsilon^{-D} F(L_0) \quad (\text{A3. 1})$$

onde:

$\varepsilon$  é o fator de transformação da escala da dimensão linear do fractal,  $F(L_0)$  é uma das funções das propriedades físicas mensuráveis tais como: comprimento, área superficial, rugosidade, volume, etc, as quais seguem leis de escalonamentos, com expoente de homogeneidade, nem sempre inteiros, cuja a geometria que melhor descrevem, se aproxima mais da geometria fractal do que da geometria euclidiana. Estas funções dependem da dimensionalidade,  $I$ , do espaço a qual o objeto está imerso. Portanto, para os fractais o grau de homogeneidade  $n$  corresponde a dimensão fractal,  $D$  (não-inteira), do objeto, onde  $\varepsilon$  é uma escala arbitrária.

Baseado nesta definição da dimensão fractal não pode-se calcula-la fazendo:

$$\varepsilon^{-D} = \frac{F(\varepsilon L_0)}{F(L_0)} \quad (\text{A3. 2})$$

tomando o logaritmo tem-se:

$$D = - \frac{\ln \left[ \frac{F(\varepsilon L_0)}{F(L_0)} \right]}{\ln(\varepsilon)} \quad (\text{A3. 3})$$

Do ponto de vista geométrico, um fractal deve está imerso dentro de uma dimensão euclidiana inteira,  $I = d + 1$ . A sua dimensão não-inteira,  $D$ , aparece por que, a regra de preenchimento da figura a partir da semente, obedece algumas falhas ou excessos, de forma que a estrutura complementar da semente formada pelos vazios da figura, também é um fractal.

Desta forma, pode-se escrever:

$$V = V_p + V_v \quad (\text{A3. 4})$$

onde  $V_p$  é o volume preenchido e  $V_v$  é o volume de vazios do fractal, ou seja:

$$N(l)l^d = N_A(l)l^{D_A} + N_B(l)l^{D_B} \quad (\text{A3. 5})$$

onde

$d$ : é a dimensão euclidiana na qual o fractal está imerso

$D_A$ : é a dimensão do fractal em consideração

$D_B$ : é a dimensão do fractal complementar formados pelos vazios da semente do fractal em consideração

Porém, no processo de escalonamento em um número  $k$  de níveis tem-se que:

$$\left[ N(l)l^d \right]^k = \left[ N_A(l)l^{D_A} + N_B(l)l^{D_B} \right]^k \quad (\text{A3. 6})$$

Para o caso de  $k$  inteiro, tem-se a fórmula para o binômio de Newton.

Para um fractal a fração de pontos do espaço preenchido é invariante também por transformação de escala, ou seja:

$$P(L_o) = \frac{F(\lambda L_o)}{F(L_o)} = \frac{1}{N(L_o)} \quad (\text{A3. 7})$$

Portanto

$$\varepsilon^D = P(L_o) \text{ ou } N(L_o) = \varepsilon^{-D} \quad (\text{A3. 8})$$

Se for interessante dimensionar os vazios de um objeto fractal (o complementar de um fractal) de forma estática análoga a aquela descrita na secção – 3. 12 observa-se que a dimensão deste novo fractal complementar corresponde a dimensão do espaço euclidiano no qual ele está imerso menos a dimensão do fractal original.

### A3.2- Invariância por transformação de escala

Na nova visão dos fractais imagina-se objetos no espaço euclidiano com preenchimentos irregulares (excesso ou falta) deste espaço, em diferentes escalas, porém com alguma similaridade. Esta regra de preenchimento irregular em escalas dá origem a dimensões não inteiras, segundo os métodos de determinação da dimensão que já foram descritos. Estes objetos, também podem apresentar ainda propriedades de invariância por transformação de escala (auto-similaridade ou auto-afinidade), que só podem ser descritos por meio da geometria fractal, como é o caso mostrado na Figura - A1. 3.

A invariância por transformação de escala pode acontecer basicamente de duas formas: por auto-similaridade, isto é, o fato de suas partes se assemelharem ao todo em diferentes escalas e em todas as direções, ou por auto-afinidade, quando uma ou mais direção é privilegiada em relação as demais. Estas propriedades tornam-se mais evidente quando se faz uma transformação de escala homogênea de uma parte qualquer de sua estrutura, em escalas sucessivas.

### A3.3 - Auto-similaridade fractal e Fractais Auto-similares

A auto-similaridade pode ser expressa matematicamente se for considerada uma transformação de escala, onde a dimensão macroscópica do fractal,  $L_0$ , está relacionada com a dimensão de suas partículas numa escala,  $\lambda$ , da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{L_0}{l_0} \quad (\text{A3. 9})$$

onde:

$l$ : é a dimensão das partículas do fractal na escala,  $\lambda$ .

Se cada partícula nesta escala for substituída pelo todo que contém inicialmente,  $N$ , partículas no fim deste primeiro estágio,  $k$ , haverá,  $N^2$ , partículas. Logo para um estágio,  $k$ , de transformações auto-similares observa-se que o fractal como um todo terá:

$$N(\lambda_k L) = N^{k+1}(L) \quad (\text{A3. 10})$$

De forma análoga a escala final,  $\lambda_k$ , está relacionada com a escala inicial  $\lambda$  da seguinte forma:

$$\lambda_k = (\lambda)^k \quad (\text{A3. 11})$$

Portanto não tem sentido de falar em dimensão fractal sem está associada a ela uma dinâmica de crescimento. Pois a auto-similaridade é uma propriedade que provém basicamente desta dinâmica de crescimento. E cada tipo de fractal possui sua dinâmica própria de crescimento que resulta na invariância por transformação de escala.

É possível construir objetos, com regras iterativas em escalas de ampliação ou redução, de tal forma, que as características, (falhas e preenchimentos), se repitam (sejam “periódicas”) em escalas sucessivas, igualmente em todas as direções ( Figura - A3. 1). Neste caso, diz-se que o objeto é auto-similar. Para garantir a auto-similaridade, é preciso construir um padrão que se repete pelo menos em duas escalas sucessivas de ampliação ou redução. Se as falhas se estenderem invariavelmente por sucessivas transformações de escala de ampliação ou redução, neste caso, diz-se que este objeto é um fractal auto-similar ( Figura - A3. 1). Pois a invariância por transformação de escala implicará no fato de que as partes desse objeto serão semelhantes ao todo em escalas sucessivas de ampliação, ou redução, desde pelo menos uma escala de corte mínima,  $\varepsilon_{min}$ , até uma escala de corte máxima,  $\varepsilon_{máx}$ , ( Figura - A3. 1).

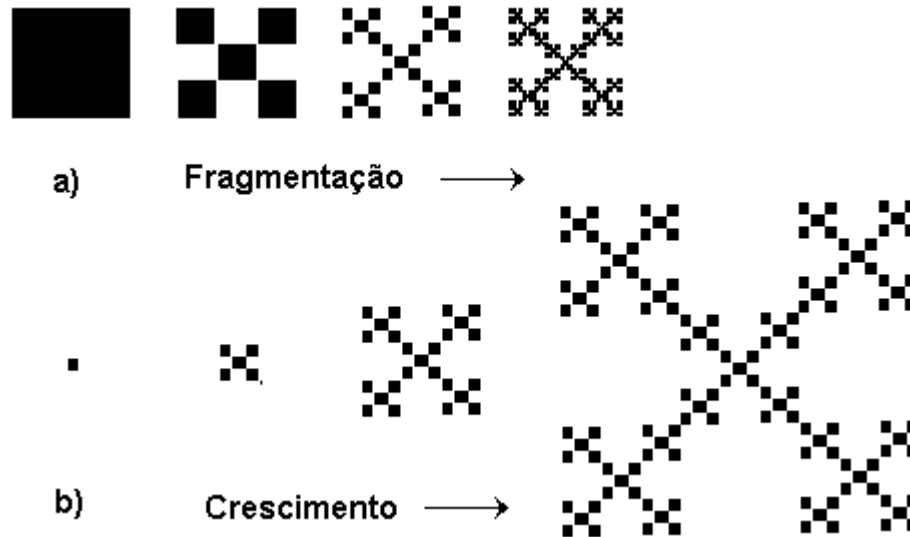


Figura - A3. 1. Fractal com um padrão “periódico em escala” de redução ou ampliação, desde uma escala de corte  $\varepsilon_{min}$  até uma escala de corte máxima  $\varepsilon_{máx}$ . Exemplo de construção de um fractal determinístico imerso em duas dimensões. a) demonstração de como gerar uma estrutura fractal usando um procedimento iterativo de fragmentação pela subdivisão do quadrado original. b) Estrutura análoga construída pelo crescimento fractal em torno de uma semente. Ambos os procedimentos levam a fractais para  $k \rightarrow \infty$  com uma dimensão  $D \cong 1.465$ .

Desta forma, objetos fractais auto-similares são estruturas que podem ser reescaladas isotropicamente sob uma transformação que envolve mudança no comprimento de escala. Isto é, as mudanças de escala em qualquer direção são as mesmas ou estão afetadas por um mesmo fator. Para estas estruturas, a dimensão fractal,  $D$ , como definida na seção anterior é única. O número de elementos da estrutura de um fractal auto-similar é dado de acordo com

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^{-D} \quad (\text{A3. 12})$$

Nestes fractais físicos ou naturais o escalonamento da extensão geométrica da estrutura é feito por meio de uma função homogênea da seguinte forma:

$$M(\delta) \sim \delta^{d-D}, \quad (\text{A3. 13})$$

onde  $d$  é a dimensão euclidiana de projeção do fractal e  $D$  é a dimensão fractal da estrutura auto-similar.

#### A3.4 - Auto Afinidade fractal e Fractais Auto Afins

No entanto, na maioria das vezes, a propriedade descrita na secção – 3.15.3 não acontece, pois nem sempre as mudanças de escala são as mesmas. Pode acontecer que o escalonamento em uma direção esteja afetada por algum parâmetro diferente do escalonamento em uma outra direção, ou seja, a existência de uma certa anisotropia na estrutura do objeto fractal. Isto faz com que haja diferentes dimensões ao longo de suas direções ortogonais. Este tipo de anisotropia gera estruturas fractais, que são chamadas de fractais auto-afins. Eles possuem esse

nome porque apresentam uma certa afinidade (preferência) de crescimento ou escalonamento adequado em uma dada direção.

Fractais auto-afins, portanto, são aqueles que aparecem imersos numa dimensão euclidiana superior ( $I = d + 1$ ) com propriedades anisotrópicas nesta dimensão e possuem projeção no espaço euclidiano de dimensão inferior, ( $d$ ), de tal forma que, para cada direção, é possível encontrar diferentes propriedades de escalonamento e diferentes dimensões fractais (Figura - A3. 3). Por outro lado, é possível que a anisotropia esteja apenas na dimensão excedente e a dimensão, ( $d$ ), da sua projeção seja isotrópica. Neste caso, no limite de escalas muito grandes a dimensão deste é a dimensão euclidiana,  $d$ . Por exemplo, no caso de trincas e superfícies de fratura rugosas, é fácil ver que no limite de grandes escalas ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ), isto é, vista de uma distância muito grande, as estruturas lineares (cuja dimensão é  $d = 1$ ) tendem a retas e as superficiais tendem a planos (cuja dimensão é  $d = 2$ ), respectivamente. Neste caso, diz-se que estruturas fractais deste tipo são chamadas de fractais auto-afins com projeção euclidiana.

A descrição matemática do cálculo da extensão geométrica de um objeto ou estrutura fractal (ou simplesmente o escalonamento) em função da escala de medida, deste tipo de fractal, é feita por meio de uma função homogênea modificada escrita da seguinte forma:

$$N(\varepsilon_x) = \varepsilon_x^{-D_x}. \quad (\text{A3. 14})$$

Onde o expoente da função acima é dado por  $D_x = I - H$ ;  $N$ : é o número de estruturas auto-similares dentro de uma determinada escala  $\varepsilon$ ;  $I$ : é a dimensão euclideana de imersão do fractal  $D_x$ : é a dimensão fractal do objeto, ou da estrutura auto-afim, ao longo da direção  $x$ ;  $d$ : é a dimensão euclideana da projeção do fractal sobre a qual, o fractal está apoiado;  $H$ : é o expoente de Hurst da rugosidade da estrutura, dado por:  $H = 2 - D$ , para o caso de um fractal imerso em um plano, onde  $I = 2$ , conseqüentemente nestes fractais físicos ou naturais o escalonamento da extensão geométrica da estrutura,  $M(\delta)$ , é feito por meio de uma função homogênea da seguinte forma:

$$M(\delta) \sim \delta^{H-I}, \quad (\text{A3. 15})$$

Quando o objeto geométrico a ser analisado é do tipo auto-afim, diferentes dimensões são encontradas para cada método citado anteriormente. Um exemplo de um fractal auto-afim é o relevo formado pelas ilhas ou continentes. Outro exemplo é mostrado na Figura - A3. 3, o qual pode ser usado para modelar o um perfil de uma trinca. Isto será mostrado mais oportunamente, quando será modelada uma superfície de fratura e um perfil de uma trinca.

Grande parte dos objetos fractais na natureza pertence a estruturas fractais auto-afins. Por exemplo, os fenômenos de corrosão, o deslocamento dos fluidos, através de um meio poroso, os fenômenos hidrodinâmicos, as superfícies rugosas, eletrodeposição e outros são processos fractais

estatisticamente auto-afins [Bunde 1994].

A diferença entre os objetos fractais auto-similares, e os objetos fractais auto-afins é caracterizada por duas dimensões fractais. Uma dimensão fractal,  $D_l$ , chamada de local e outra dimensão fractal,  $D_g$ , chamada de global [Family 1991]. Um fenômeno interessante que envolve este contexto é o movimento Browniano. Por exemplo, o processo  $B(t)$  que descreve a distância,  $x$ , deslocada por uma partícula browniana no tempo,  $t$ , pode ser estatisticamente reescalada sobre si mesma pela transformação:

$$B(t) \rightarrow b^{-H} B(bt), \quad (\text{A3.16})$$

onde  $H$  é um expoente,  $0 < H < 1$ , chamado de expoente de Hurst [Feder 1989]. Nesta relação, observa-se que o escalonamento nas coordenadas tempo,  $t$ , e distância,  $x$ , são diferentes. Assim, para uma função  $F(x)$  que é escalonada da seguinte forma [Family 1991]:

$$F(x) \approx b^{-H} F(bx) \quad (\text{A3.17})$$

esta função é dita auto-afim, onde  $H > 0$  é um expoente. Esta expressão de fato, será invariante sob o seguinte escalonamento: encolhendo ao longo do eixo- $x$  por um fator  $l/b$ , seguido por reescalamento do valor da função (perpendicular ao eixo- $x$ ) por um fator  $b^{-H}$ . Para alguma função determinística auto-afim a equação (A3.17) será dada exatamente, enquanto que para funções estatisticamente auto-afim a equação (A3.17) será dada em forma aproximada.

No caso de um fractal auto-afim como aquele mostrado na Figura - A3.2, tem-se uma relação de escalonamento dada por:

$$z(\lambda_x x, \lambda_y y) = \lambda_x^{\zeta_x} \lambda_y^{\zeta_y} z(x, y) \quad (\text{A3.18})$$

Para uma linha rugosa a relação (A3.18) pode ser escrita como:

$$z(\lambda_x x) = \lambda_x^H z(x) \quad (\text{A3.19})$$

Onde  $H$  é o chamado expoente Hurst.

O expoente Hurst é definido conforme o parágrafo seguinte:



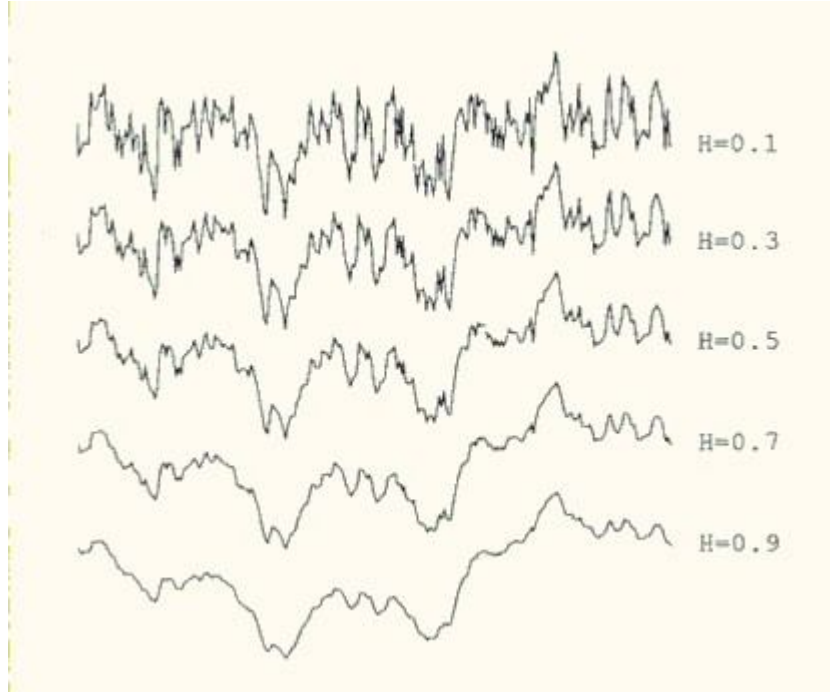


Figura - A3. 2. Diferentes Expoentes Hurst de uma de um ruído ou linha fractal rugosa.

O expoente de Hurst é usado como uma medida da memória de longo prazo de séries temporais, ou seja, a autocorrelação das séries temporais. Onde um valor de  $0 < H < 0,5$  indica uma série de tempo com autocorrelação negativa (por exemplo, uma diminuição entre os valores provavelmente será seguido por um aumento), e um valor de  $0,5 < H < 1$  indica uma série de tempo com autocorrelação positiva (por exemplo, um aumento entre os valores provavelmente será seguido por outro de aumento). Um valor de  $H = 0,5$  indica um passeio aleatório verdadeiro, onde é igualmente provável que uma diminuição ou um aumento seguirá a partir de qualquer valor particular (por exemplo, a série de tempo não tem memória de valores anteriores)

A estrutura da Figura - A3. 3 é um exemplo de um fractal auto-afim (determinístico), onde ele é reescalado na direção do eixo-y com fator  $2^n$  e, na direção do eixo-x, é escalonado por um fator  $4^n$ .

Para o caso de sua dimensão fractal local  $D_l$  da mesma estrutura ( $\varepsilon \ll 1$ ), usando os argumentos do item anterior, tem-se:

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{4}\right)^n, N(\varepsilon) = 4^n \cdot 2^{n-1}. \quad (\text{A3. 20})$$

Considerando-se a equação (3. 34) e substituindo-se (A3. 20) em (3. 34) tem-se,

$$D_l = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n \cdot 2^{n-1})}{\log(4^n)} \right] = 1,5. \quad (\text{A3. 21})$$

Para o cálculo da dimensão fractal global  $D_g$ , usa-se os mesmos argumentos, só que

desta vez  $\lambda \gg I$ , então

$$\lambda = 4^n, N(\lambda) = 4^{n-1} \quad (\text{A3. 22})$$

logo

$$D_g = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^{n-1})}{\log(4^n)} \right] = 1. \quad (\text{A3. 23})$$

Em geral, para qualquer estrutura fractal auto-afim, a dimensão fractal local é relacionada com o parâmetro  $H$  como segue,

$$D_l = d + 1 - H_{q=1}, \quad (\text{A3. 24})$$

onde  $q$  é o índice de multifractalidade, e para a dimensão fractal global  $D_g = d$ , sendo  $I = d + 1$  a dimensão euclidiana onde o fractal está imerso.

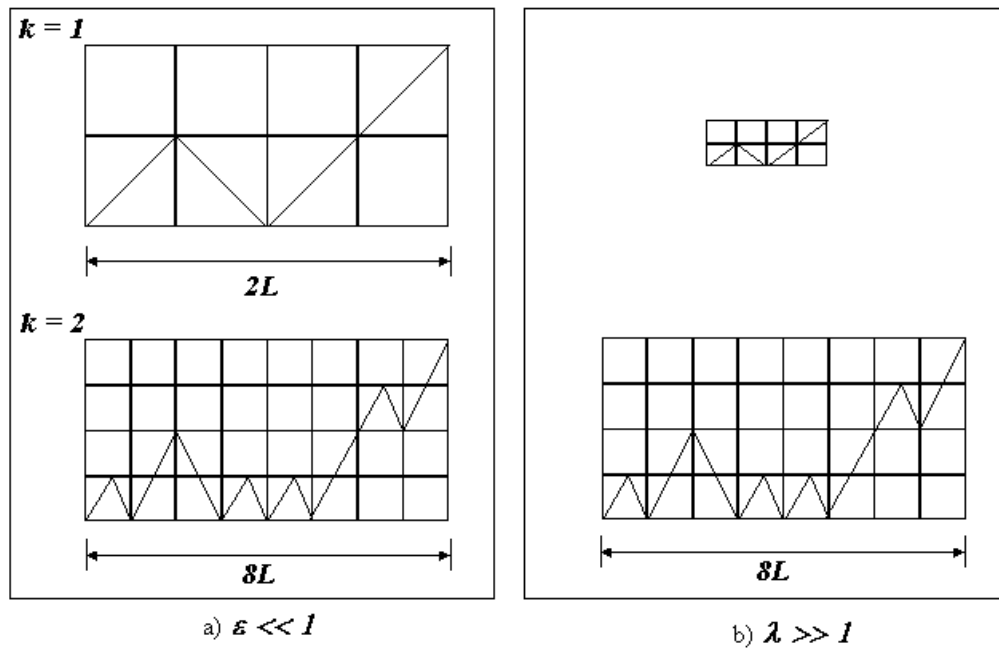


Figura - A3. 3. Esquema mostrando uma estrutura fractal auto-afim. Dois estágios do processo de crescimento,  $k=1$  e  $k=2$  são apresentados: a) para  $\epsilon \ll I$  e b)  $\lambda \gg I$ .

### A3.5 - Auto-similaridade e a auto-afinidade exata e estatística

A auto-similaridade exata, é aquela em que o padrão de crescimento se repete com exatidão, a partir de uma semente que deu origem a estrutura. Por outro lado, os fractais físicos aparecem na natureza como resultado de processos irreversíveis, originados de situações de instabilidade, por exemplo, as quais podem gerar superfícies irregulares ou estruturas ramificadas. Nestes processos, não existe um padrão exato, e sim, apenas padrão geral de crescimento, que dá uma idéia de auto-similaridade aproximada. Isto porque, em escalas menores, tais padrões sofrem

flutuações em torno de uma configuração média, conforme mostra a Figura - A1. 3b e na Figura - A3. 4. Nesta figura, tem-se a impressão de simetria, o que rigorosamente não é verdade e as ramificações apresentam uma auto-similaridade estatística. Desta forma, para se caracterizar uma estrutura como essa, usa-se a dimensão fractal para representar o processo de média estatística, ao longo de toda a figura, porque localmente esta dimensão sofre flutuações de ponto a ponto, e o seu coeficiente de auto-correlação não é exato.



Figura - A3. 4. Fractal estatisticamente auto-similar mostrando conhecido como figura de Lichtenberg foi produzido por uma desaceleração de uma carga elétrica (descarga elétrica corona) que foi injetada dentro de um plexiglas.

## A4 – Análise do Módulo Secante e Tangente de um corpo material

### A4.1 – A diferença entre o Módulo de Rigidez e o Módulo Elástico

Considere a seguinte diferencial

$$d\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \frac{d\sigma}{\varepsilon} - \frac{\sigma}{\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (\text{A4. 1})$$

Logo

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \quad (\text{A4. 2})$$

Chamando de módulo de rigidez  $E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  a secante do gráfico da Figura - 5. 4a e de módulo

Young  $E \equiv d\sigma/d\varepsilon$  a tangente do gráfico da Figura - 5. 4a, logo a equação (A4. 2) fica:

$$\frac{dE_R}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(E - E_R) \quad (\text{A4. 3})$$

Veja que a secante  $E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  será igual a tangente  $E \equiv d\sigma/d\varepsilon$  se acontecer tensão  $\sigma$  não variar com a deformação. Neste caso, tem-se  $dE_R/d\varepsilon = 0$  e portanto,

$$E = E_R \quad (\text{A4. 4})$$

Por outro lado, se a rigidez  $E_R$  variar com o comprimento de uma trinca que se propaga, por exemplo, isto é:

$$\frac{dE_R}{dL} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\sigma}{dL} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dL}\right) \quad (\text{A4. 5})$$

Logo a tensão  $\sigma$  no corpo tem que variar com o comprimento da trinca. Então a equação (A4. 5) pode ser escrita como:

$$\frac{dE_R}{dL} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dL} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dL}\right) \quad (\text{A4. 6})$$

para  $E \equiv d\sigma/d\varepsilon = \text{constante}$  tem-se:

$$\frac{dE_R}{dL} = \frac{1}{\varepsilon}(E - E_R) \frac{d\varepsilon}{dL} \quad (\text{A4. 7})$$

ou seja, desde que a rigidez varia com o comprimento da trinca mesmo o módulo elástico sendo constante e uma propriedade do material, a rigidez não é.

#### A4.2 – A variação do módulo de rigidez de um material durante a fratura

Observando o gráfico da Figura - A4. 1, percebe-se que a energia elástica armazenada (dado pela área sob o gráfico) aumenta para manter o mesmo nível de tensão no interior do corpo de prova, cujo o tamanho do defeito,  $L_o$ , continua aumentando durante o ensaio. Como fica então a variação da energia elástica armazenada no corpo,  $\Delta U_L$ , com o aumento no tamanho do defeito? ou seja, o que acontece com a energia elástica armazenada no corpo (material frágil) quando uma trinca se propaga?

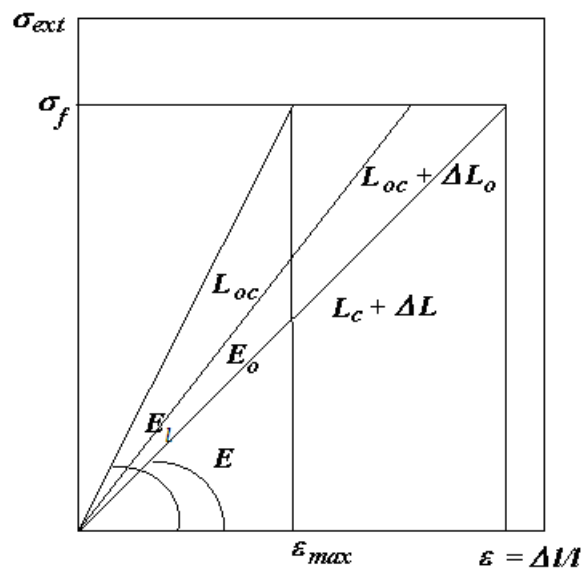


Figura - A4. 1. Gráfico do comportamento da deformação do corpo,  $\varepsilon = \Delta l/l$  em função da tensão externa aplicada,  $\sigma_{ext}$ , para um corpo sem trinca, com trinca lisa e com trinca rugosa.

- De acordo com a expressão (5. 42) a variação na energia elástica armazenada,  $U_L$ , depende das grandezas,  $\sigma$ ,  $L_l$ , e  $E$ . Considerando que,  $\sigma_f$ , se mantém constante, resta apenas analisar a influência desta variação na energia elástica armazenada, no módulo de rigidez ou na flexibilidade do material.

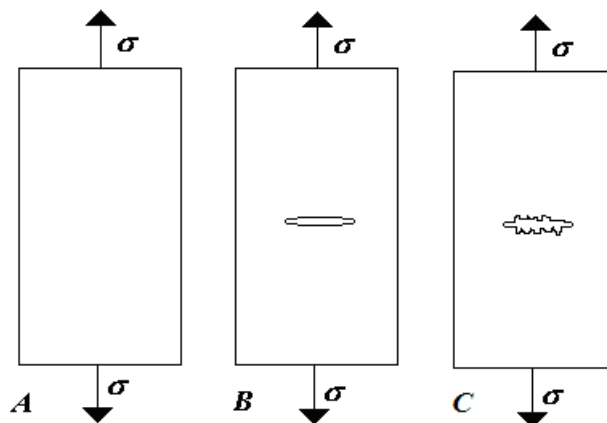


Figura - A4. 2. Corpos A, B e C de mesmo material e sujeitos as mesmas condições de carga. A) sem entalhe B) com entalhe liso e C) com entalhe rugoso.

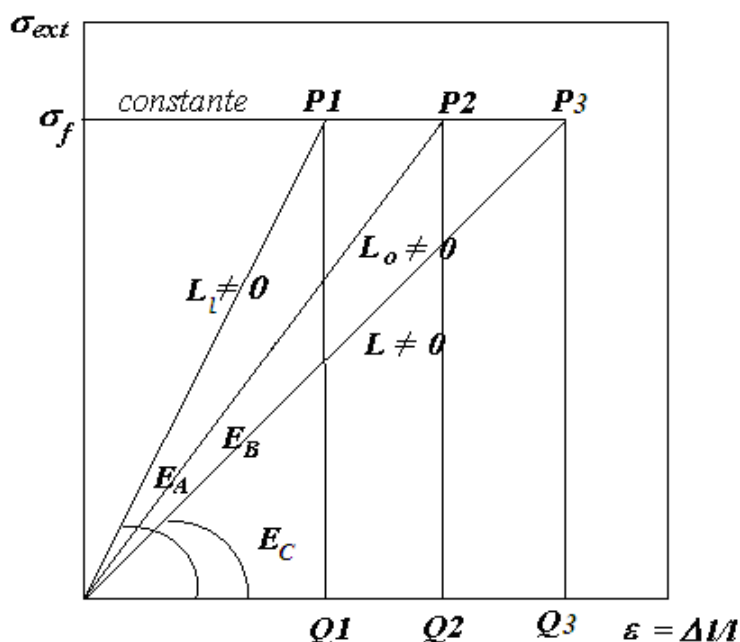


Figura - A4. 3. Comparação dos carregamentos entre os corpos A, B e C idênticos conforme a Figura - A4. 2.

Ao se aplicar uma tensão,  $\sigma$ , sobre um material que já possui uma trinca de tamanho  $L_o$ , se a energia fornecida for suficiente para produzir um aumento na trinca, observa-se que a rigidez,  $E$ , do material diminuirá com o aumento no tamanho do defeito. Veja o exemplo da Figura - A4. 2.

Considere o exemplo da Figura - A4. 2, onde três corpos idênticos de mesmo material são submetidos a mesma condição de ensaio. Porém, o corpo A não possui entalhe, enquanto o corpo B já o possui e o corpo C possui um entalhe rugoso com comprimento projetado igual ao de B. Veja, a partir do gráfico da Figura - A4. 3, que o corpo C possui um módulo de rigidez,  $E_C$ , menor do que o corpo B que por sua vez possui um módulo de rigidez,  $E_B$ , menor do que o corpo A

e ainda uma maior deformação. Logo, a energia elástica armazenada em C deve ser maior do que no corpo B e que deve ser maior do que no corpo A, para o mesmo nível de tensão (tensão constante).

Comparando-se as áreas dos triangulos na Figura - A4. 3 tem-se que:

$$\Delta OP_1Q_1 < \Delta OP_2Q_2 < \Delta OP_3Q_3, \quad (\text{A4. 8})$$

logo

$$U_{LA} < U_{LB} < U_{LC}, \quad (\text{A4.9})$$

ou seja

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E_A} < \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E_B} < \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E_C}, \quad (\text{A4.10})$$

portanto

$$E_A > E_B > E_C. \quad (\text{A4.11})$$

Por outro lado, quando o material está sujeito à transformações de fase, ou microtrincas, geradas na ponta da trinca principal durante o ensaio, existe ainda uma deformação residual, que não foi considerada nesta argumentação.

## Referências

Allen, Martin; Gareth J. Brown; Nick J. Miles, - "Measurements of Boundary Fractal Dimensions": Review of Current Techniques. *Powder Technology*, Vol. 84, P.1-14, 1995.

Alves, Lucas Máximo – Escalonamento Dinâmico da Fractais Laplacianos Baseado No Método Sand-Box, In: Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho., Artigo a Ser Publicado Neste Congresso Ref.007/1, 1998a.

Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva, Bernhard Joachim Mokross, the Influence of the Crack Fractal Geometry on the Elastic Plastic Fracture Mechanics. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 295, N. 1/2, P. 144-148, 12 June 2001.

Alves, Lucas Máximo, "Modelamento Fractal da Fratura E Do Crescimento de Trincas Em Materiais", Relatório de Tese de Doutorado Em Ciência E Engenharia de Materiais, Apresentada À Interunidades Em Ciência E Engenharia de Materiais, da Universidade de São Paulo-Campus, São Carlos, Orientador: Bernhard Joachim Mokross, Co-Orientador: José de Anchieta Rodrigues, São Carlos – Sp, 2002.

Alves, L. M. ; Chinelatto, Adilson Luiz ; Chinelatto, Adriana Scoton Antonio; Prestes, Eduardo. Verificação de um modelo fractal de fratura de argamassa de cimento. In: Anais do 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, realizado no Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves, L. M. ; Chinelatto, Adilson Luiz ; Chinelatto, Adriana Scoton Antonio ; Grzebielucka, Edson Cezar . Estudo do perfil fractal de fratura de cerâmica vermelha. In: Anais do 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, realizado no Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves, Lucas Máximo: Fractal Geometry Concerned With Stable and Dynamic Fracture Mechanics. *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol 44/1, Pp 44-57, 2005.

Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva, Luiz Alkimin de Lacerda, Fractal Modeling of the *J-R* Curve and the Influence of the Rugged Crack Growth on the Stable Elastic-Plastic Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 77, Pp. 2451-2466, 2010.

Alves, Lucas Máximo, the Fractality Analysis of Geometric Artifacts Distribution on Fracture Surfaces By A New Non Destructive Method, to be submmited, 2011.

Alves, Lucas Máximo, A Fractal Modeling of the Crack Rugged Path And of A Fracture Surface For A Geometric Description of Crack Grow to be submmited, 2011.

ASTM E1737-96 – "Standard Test Method For J-Integral Characterization of Fracture Toughness", *Designation Astm E1737-96*, Pp.1-24, (1996).

ASTM E813-89 – "Standard Test Method For  $J_{ic}$ , A Measure of Fracture Toughness", *Designation, Astm E813-89*, (1989).



- Anderson, T. L. *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, (Crc Press, 2th Edition, 1995).
- Anderson, T. L. *Fracture Mechanics, Fundamental and Applications*, (Chapter 4, Section 4.1.2, Equations (4.14), (4.19) and (4.20), P. 215-218, 2<sup>nd</sup> Edition, Crc Press, 1995.
- Achdou, Y., C. Sabot, et al. (2004). "Boundary Values Problems in Some Ramified Domains with Fractal Boundary: Analysis and Numerical Methods, Part II: Non homogeneous Neumann problems."
- Åström, Jan; Timonen Jussi, Fragmentation By Crack Branching, *Phys. Rev. Letters*, Vol. 78, N. 19, P. 3677-3680, 12 May 1997.
- Atkins, A. G. & Mai, Y-M. *Elastic and Plastic Fracture*. Ellis Horwood, Chichester, 1985.
- Balankin , A.S and P. Tamayo, *Revista Mexicana de Física* 40, No. 4, Pp. 506-532, 1994.
- Balankin , Alexander S., *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 57, N. 2/3, Pp.135-203, 1997.
- Bammann, D. J. and Aifantis, E. C., on a Proposal For a Continuum With Microstructure, *Acta Mechanica*, 45,91-121, 1982.
- Barabási, Albert – László; H. Eugene Stanley, *Fractal Concepts In Surface Growth*, Cambridge University Press, 1995.
- Barnsley, Michael, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.
- Bernardes, 1998 A. T, *Comunicação Pessoal* 1998
- Barenblatt, G. I. "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks In Brittle Fracture", *Advances In Applied Mechanics*, Vol. 7, P.55-129, 1962.
- Beck, C. and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*, Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 4, England: Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- Benson, D. J.; Nesterenko, V. F.; Jonsdottir, F.; Meyers, M. A., Quasistatic and Dynamic Regimes of Granular Material Deformation Under Impulse Loading, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N. 11/12, P. 1955-1999, 1997.
- Besicovitch, A. S. "On Linear Sets of Points of Fractional Dimensions". *Mathematische Annalen* 101. 1929.
- Besicovitch, A. S. H. D. Ursell. "Sets of Fractional Dimensions". *Journal of the London Mathematical Society* 12, 1937. Several Selections From This Volume Are Reprinted In Edgar, Gerald A. (1993). *Classics on Fractals*. Boston: Addison-Wesley. Isbn 0-201-58701-7. See Chapters 9,10,11
- Blyth, M. G. , C. Pozrikidis, Heat Conduction Across Irregular and Fractal-Like Surfaces, *International Journal of Heat and Mas Transfer*, Vol. 46, P. 1329-1339, 2003
- Borodich, F. M., "Some Fractals Models of Fracture", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N. 2, P. 239-259, 1997.
- Bouchaud, Elisabeth, "Scaling Properties of Crack", *J. Phys: Condens. Matter*, Vol.9, P. 4319-4344, 1977.
- Bouchaud, E.; G. Lapasset and J. Planés, Fractal Dimension of Fractured Surfaces: a Universal Value? *Europhysics Letters*, Vol. 13, N. 1, P. 73-79, 1990.
- Bouchaud, E.; J. P. Bouchaud, Fracture Surfaces: Apparent Roughness, Relevant Length Scales, and Fracture Toughness. *Physical Review B*, Vol. 50, N. 23, 17752 – 17755, 15 December 1994-I.

- Bouchaud, Elisabeth, Scaling Properties of Cracks, *J. Phy. Condens. Matter* 9, Pp. 4319-4344, 1997.
- Boudet, J. F.; S. Ciliberto, and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* Vol.9, P. 4319-4344, 1977.
- Boudet, J. F.; S. Ciliberto, and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* 30, 337, 1995.
- Boudet, J. F.; S. Ciliberto and V. Steinberg, Dynamics of Crack Propagation In Brittle Materials, *J. Phys. Ii France*, Vol. 6, P. 1493-1516, October 1996.
- Bunde, Armin; Shlomo Havlin, *Fractals In Science*, Springer-Verlag 1994.
- Carpinteri - Alberto and Bernardino Chiaia, Crack-Resistance As a Consequenca of Self-Similar Fracture Topologies, *International Journal of Fracture*, 76, Pp. 327-340, 1996.
- Carpinteri, A; Chiaia, B.; Cornetti, P., A fractal theory for the mechanics of elastic materials *Materials Science and Engineering*, A365, p. 235–240, 2004.
- Carpinteri, A.; Puzzi, S., Complexity: a New Paradigm For Fracture Mechanics, *Frattura Ed Integrità Strutturale*, 10, 3-11, 2009, Doi:10.3221/Igf-Esis.1001
- Charmet, J. C. ; Roux , S and Guyon, E, *Disorder and Fracture*, Plenum Press New York 1990.
- Chelidze, T.; Y. Gueguen, Evidence of Fractal Fracture, (Technical Note) *Int. J. Rock. Mech Min. Sci & Geomech Abstr.* Vol. 27, N. 3, P. 223-225, 1990.
- Cherepanov, G. P. (1967). "Crack propagation in continuous media." *J. Appl. Math. Mech* **31**(3): 503-512.
- Chiquito, Paulo; Trabalho não publicado, 2010
- Dauskardt, R. H.; F. Haubensak and R. O. Ritchie, on the Interpretation of the Fractal Character of Fracture Surfaces; *Acta Metall. Matter.*, Vol. 38, N. 2, P. 143-159, 1990.
- De Arcangelis, L.; Hansen A; Herrmann, H. J.- "Scaling Laws In Fracture", *Phys. Review B*, N. 1, Vol. 40, 1 July 1989.
- Dyskin, A. V., Effective Characteristics and Stress Concetrations In Materials With Self-Similar Microstructure, *International Journal of Solids and Structures*, 42, 477-502, 2005
- Dos Santos, Sergio Francisco; Aplicação Do Conceito de Fractais Para Análise Do Processo de Fratura de Materiais Cerâmicos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos. Centro de Ciências Exatas E de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação Em Ciência E Engenharia de Materiais, São Carlos, 1999.
- Dos Santos, 1999, Sergio Francisco; Aplicação Do Conceito De Fractais Para Análise Do Processo De Fratura De Materiais Cerâmicos, Dissertação De Mestrado, Universidade Federal De São Carlos. Centro De Ciências Exatas E De Tecnologia, Programa De Pós-Graduação Em Ciência E Engenharia De Materiais, São Carlos (1999).
- Duda, Fernando Pereira; Souza, Angela Crisina Cardoso, on a Continuum Theory of Brittle Materials With Microstructure, *Computacional and Applied Mathematics*, Vol. 23, N.2-3, Pp.327-343, 2007.
- Ewalds, H. L. and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*, Delftse Uitgevers Maatschappij Third Edition, Netherlands 1986, (Co-Publication of Edward Arnold Publishers, London 1993).
- Engelbrecht, J., Complexity In Mechanics, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Vol. 67, 3, 293-325, 2009
- Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley & Sons 1990

- Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás, Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific, Singapore, P.7-8,1991.
- Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás - Dynamics of Fractal Surfaces, Chapter 3, P. 73-77, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 1991.
- Feder, Jens; Fractals, (Plenum Press, New York, 1989).
- Fineberg, Jay; Steven Paul Gross; Michael Marder and Harry L. Swinney, Instability In Dynamic Fracture, Physical Review Letters, Vol. 67, N. 4, P. 457-460, 22 July 1991.
- Fineberg, Jay; Steven Paul Gross, Michael Marder, and Harry L. Swinney, Instability In the Propagation of Fast Cracks. Physical Review B, Vol.45, N. 10, P.5146-5154 (1992-II), 1 March, 1992.
- Forest, S. Mechanics of Generalized Continua: Construction By Homogenization, J. Phys. Iv, France, 8,.Pp.39-48, 1998.
- Fung, Y. C. a First Course In Continuum Mechanics, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- Fung, 1969 Y. C. Fung, *A First Course In Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- Greenberg, Michael D., Advanced Engineering Mathematics, chapter 15, Curves, Surfaces, and Volumes, Prentice Hall, 2<sup>nd</sup> Edition, 1998.
- Gol'dshtein, R. V. and A. B. Mosolov, Flows of Fractally Broken Ice, Sovol. Phys. Dokl., Vol. 37, N. 5, P. 253-256, May 1992.
- Gong , Bo and Zu Han Lai, Fractal Characteristics of J-R Resistance Curves of Ti-6Al-4V Alloys, Eng. Fract. Mech.. Vol. 44, N. 6, 1993, Pp. 991-995.
- Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow In Solids", Phil. Trans. R. Soc. London (Mechanical Engineering) A221 , P. 163-198, 1920.
- Gross, Steven. P.; Jay. Fineberg, M. P. Marder, W. D. McCormick and Harry. L. Swinney, Acoustic Emissions From Rapidly Moving Cracks. Physical Review Letters, Vol. 71, N. 19, P. 3162-3165, 8 November, 1993.
- Guy, A. G. (1986). Ciência dos Materiais Editora Guanabara Dois.
- Alexander Hartmaier and Peter Gumbsch, The brittle-to-ductile transition and dislocation activity at crack Tips, Journal of Computer-Aided Materials Design, 6: 145–155, 1999.
- Hausdorff F. "Dimension Und Äußeres Maß". Mathematische Annalen 79 (1–2): 157–179. March 1919, Doi:10.1007/Bf01457179.
- Herrmann, Hans J. - "Growth: An Introduction", In: on the Growth and Form" Fractal and Non-Fractal Patterns In Physics, Edited By H. Eugene Stanley and Nicole Ostrowsky Nato Asi Series, Series E: Applied Sciences N. 100 (1986), Proc. of the Nato Advanced Study Institute On Growth and Form", Cargese, Corsiva, France June 27-July 6 1985. Copyright By Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- Herrmann Jr., H.; Kertész, J.; De Arcangelis, L. - "Fractal Shapes of Deterministic Cracks", *Europhys. Lett.* 10 N. (2), (1989). pp.147-152, 1989.
- Herrmann, Hans J.; Roux, Stéphane, "Statistical Models For the Fracture of Disordered Media, Random Materials and Processes", Series Editors: H. Eugene Stanley and Etienne Guyon, North-Holland Amsterdam, 1990.
- Heping, Xie the Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on the Fracture Toughness of Brittle Materials, International Journal of Fracture, Vol. 41, P. 267-274, 1989.

- Heping, Xie; Jin-An Wang and E. Stein, Direct Fractal Measurement and Multifractal Properties of Fracture Surfaces, *Physics Letters a*, Vol. 242, P. 41-50, 18 May 1998.
- Holian, Brad Lee; Raphael Blumenfeld, and Peter Gumbsch, An Einstein Model of Brittle Crack Propagation, *Physical Review Letters*, Vol. 78, N<sup>o</sup> 1, P. 78-81, 6 January 1997.
- Hornbogen, E.; *Fractals In Microstructure of Metals; International Materials Reviews*, Vol. 34. N. 6, P. 277-296, 1989.
- Hübner, Heinz and W. Jillek, Subcritical Crack Extension and Crack Resistance In Polycrystalline Alumina, *J. Mater. Sci.*, Vol. 12, N. 1, P. 117-125, 1977.
- Hutchinson, J.W., " Plastic Stress and Strain Fields At a Crack Tip." *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 337-347 (1968).
- Hyun, S. L. Pei, J. –F. Molinari, and M. O. Robbins, Finite-Element Analysis of Contact Between Elastic Self-Affine Surfaces, *Physical Review E*, Vol. 70, 026117, 2004.
- Inglis, C. E. Stressess In a Plate Due To the Presence of Cracks and Sharp Corners, *Transactions of the Royal Intitution of Naval Architects*, V. 60, P. 219-241, 1913.
- Irwin, G. R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, P. 361-364, 1957.
- Irwin, G. R.; J. W. Dally, T. Kobayashi, W. L. Fournery, M. J. Etheridge and H. P. Rossmanith, on the Determination of a  $\dot{A}$ -K Relationship For Birefringent Polymers. *Experimental Mechanics*, Vol. 19, N. 4, P. 121-128, 1979.
- Kanninen, Melvin F.; Popelar, Carl H., *Advanced Fracture Mechanics*, the Oxford Engineering Science Series 15, Editors: A. Acrivos, Et Al. Oxford University Press, New York, Claredon Press, Crc Press, Chapter 7, P. 437, Oxford, 1985.
- Kogut, L. (2003). "Element Based Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces." *Tribology Transactions* **46**(3): 383-390.
- Kraff, J. M.; A. M. Sullivan and R. W., Boyle, Effect of Dimensions on Fast Fracture Instability of Notched Sheets, *Proceedings of the Craks Propagation Symposium Cranfield*, 1962, (The College of Aeronautics, Cranfield, England, 1962), Vol. 1. P. 8-28, 1962.
- Kraft, R. L. "Chaos, Cantor Sets, and Hyperbolicity For the Logistic Maps." *Amer. Math. Monthly* 106, 400-408, 1999.
- Kral, E.R., Komvopoulos, K., Bogy, D.B., 1993. Elastic–Plastic Finite Element Analysis of Repeated Indentation of A Half-Space By A Rigid Sphere. *J. Appl. Mech. Asme* 60, 829–841.
- Lazarev, V. B., Balankin, A. S. and Izotov, A. D. "Synergetic and Fractal Thermodynamics of Inorganic Materials. Iii. Fractal Thermodynamics of Fracture In Solids, *Inorganic Materials*, Vol. 29, No. 8, Pp. 905-921,1993.
- Lei, Weisheng and Bingsen Chen, Fractal Characterization of Some Fracture Phenomena, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, N. 2, pp. 149-155, 1995.
- Leung, A. Y. T. and R. K. L. Su, Mixed-Mode Two Dimensional Crack Problem By Fractal Two Level Finite Element Method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, N. 6, P. 889-895, 1995.
- Lin, G. M.; J. K. L. Lai, Fractal Characterization of Fracture Surfaces In a Resin-Based Composite, *Journal of Materials Science Letters*, Vol. 12, P. 470-472, 1993.
- Lin, 1993 G. M.; J. K. L. Lai, "Fractal Characterization of Fracture Surfaces In A Resin-Based Composite", *Journal Mat. Science Letters*, Vol. 12, (1993) , pp. 470-472.
- Lung, C. W. and Z. Q. Mu, Fractal Dimension Measured With Perimeter Area Relation and Toughness of Materials, *Physical Review B*, Vol. 38, N. 16, P. 11781-11784, 1 December 1988.

- Lopez, Juan M. Miguel A. RODRIGUEZ, and Rodolfo CUERNO, Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces, *PHYS. REV. E*, vol. 56, n.4, 3993-3998 1997
- Lopez, Juan M. and SCHMITTBUHL, Jean, Anomalous scaling of fracture surfaces, *PHYS. REV. E*, vol. 57, n.6, 6405-6408, 1998.
- Mandelbrot, Benoit B, *Fractals: Form Chance and Dimension*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, Cal-Usa, 1977.
- Mandelbrot, 1982 Benoit B. Mandelbrot, the *Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco - New York 1982.
- Mandelbrot, Benoit B., the *Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, Cal-Usa, - New York 1982(1983).
- Mandelbrot, Benoit B.; Dann E. Passoja & Alvin J. Paullay, Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals, *Nature (London)*, Vol. 308 [5961], P. 721-722, 19 April, 1984.
- Marder, Michael and Jay Fineberg, “How Things Break”, *Physics Today*, P. 24-29, September 1996b.
- Mariano Paolo Maria O, Influence of the Material Substructure on Crak Propagation: a Unified Treatment, Arxiv:Math-Ph/0305004v1, May 2003.
- Mccauley, Joseph L., *Chaos, Dynamics and Fractals: An Algorithmic Approach To Deterministic Chaos*, Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 2, England: Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- Meakin, Paul and Susan Tolman, *Diffusion-Limited Aggregation: Recent Developments, Fractals Physical Origin and Properties*, Edited By L. Pietronero, Plenum Press, New York P. 137-168, 1988.
- Meakin, Paul; Li, G.; Sander, L. M.; Louis, E.; Guinea, F. - “A Simple Two-Dimensional Model For Crack Propagation”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 22, 1393-1403, 1989.
- Meakin, Paul, “The Growth of Rough Surfaces and Interfaces”, *Physics Reports*, Vol. 235, N. 485, P. 189-289, December 1993.
- Meakin, Paul, *Fractal Growth: , Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 5*, England: Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- Mecholsky, J. J.; T. J. Mackin and D. E. Passoja, “Self-Similar Crack Propagation In Brittle Materials”. (In: *Advances In Ceramics, Vol. 22, Fractography of Glasses and Ceramics*, the American Ceramic Society, Inc), P. 127-134, Edited By J. Varner and V. D. Frechette. America Ceramic Society, Westerville, Oh, 1988.
- Mecholsky, J. J.; D. E. Passoja and K. S. Feinberg-Ringel; Quantitative Analysis of Brittle Fracture Surfaces Using Fractal Geometry, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 72, N. 1, P. 60-65, 1989.
- Mecholsky, 1989 J. J., D. E. Passoja And K. S. Feinber-Ringel, *J. Am. Ceram. Soc.*, 72, 1, (1989), pp. 60-65.
- Mishnaevsky Jr., L. L., “A New Approach To the Determination of the Crack Velocity Versus Crack Length Relation”, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct*, Vol. 17, N. 10, P. 1205-1212, 1994.
- Morel, Sthéphane, Jean Schmittbuhl, Juan M.Lopez and Gérard Valentin, Size Effect In Fracture, *Phys. Rev. E*, V.58, N.6, Dez 1998.
- Morel, Sthéphane, Jean Schmittbuhl, Elisabeth Bouchaud and Gérard Valentin, Scaling of Crack Surfaces and Implications on Fracture Mechanics, Arxiv:Cond-Mat/0007100, V.1, 6 Jul 2000 Or *Phys. Rev. Lett.* V. 85, N.8, 21 August, 2000.
- Mosolov, A. B., *Zh. Tekh. Fiz.* V. 61, N. 7, 1991. (*Sov. Phys. Tech. Phys.* , V. 36, 75, 1991).

- Mosolov, A. B. and F. M. Borodich Fractal Fracture of Brittle Bodies During Compression, *Sovol. Phys. Dokl.*, Vol. 37, N. 5, P. 263-265, May 1992.
- Mosolov, A. B., Mechanics of Fractal Cracks In Brittle Solids, *Europhysics Letters*, Vol. 24, N. 8, P. 673-678, 10 December 1993.
- Muskhelisvili, N. I., Some Basic Problems In the Mathematical Theory of Elasticity, Nordhoff, the Netherlands, 1954.
- Mu, 1988 Z. Q. And C. W. Lung, Studies on the Fractal Dimension And Fracture Toughness of Steel, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 21, P. 848-850, 1988.
- Nagahama, Hiroyuki; “A Fractal Criterion For Ductile and Brittle Fracture”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 75, N. 6, P. 3220-3222, 15 March 1994.
- Orowan, E., “Fracture and Strength of Solids”, *Reports on Progress In Physics*, Xii, P. 185, 1948.
- Panagiotopoulos, P.D. Fractal Geometry In Solids and Structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, N<sup>o</sup> 17, P. 2159-2175, 1992.
- Panin, V. E., the Physical Foundations of the Mesomechanics of a Medium With Structure, Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Translated From *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika*, N<sup>o</sup> 4, P. 5-18, Plenum Publishing Corporation (305 - 315), April, 1992.
- Passoja, D. E. & Amborski, D. J. In *Microstruct. Sci.* 6, 143-148, 1978.
- Peitgen, H.-O., *Fractals For the Classroom, Part One: Introduction To Fractals and Chaos*, 1992, Página 191, Figura - 3.24, Ibid: Página 107, Figura - 2.34 E Páginas 381-385.
- Peitgen, Heinz-Otto; Hartmut Jürgens; Dietmar Saupe, *Fractals For the Classroom, Part One: Introduction To Fractals and Chaos*, Evan Maletsky; Terry Perciante and Lee Yunker, Nctm Advisory Board Springer Verlag, Página 191, Figura - 3.24, Ibid: Página 107, Figura - 2.34 E Páginas 381-385, 1992.
- Pietronero, L.; Erzan, A.; Everstsz, C. - “Theory of Fractal Growth”, *Phys. Revol. Lett.* Vol. 61, N. 7, 861-864, 15 August 1988.
- Ponson, L., D. Bonamy, H. Auradou, G. Mouroto, S. Morel, E. Bouchaud, C. Guillot, J. P. Hulin, Anisotropic Self-Affine Properties of Experimental Fracture Surfaces, *Arxiv:Cond-Mat/0601086*, V.1, 5 Jan 2006.
- Rice, J. R., “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations By Notches and Cracks”, *Journal of Applied Mechanics*, 35, P. 379-386, 1968.
- Richardson, L. F. the Problem of Contiguity: An Appendix To Statistics of Deadly Quarrels. *General Systems Yearbook*, N.6, P. 139-187, 1961.
- Rodrigues, J. A. E V. C. Pandolfelli, “Dimensão Fractal E Energia Total de Fratura” *Cerâmica* Vol. 42, N. 275, Maio/Junho, 1996.
- Rodrigues, José de Anchieta; Caio Moldenhauer Peret E Victor Carlos Pandolfelli, *Relação Entre Energia Total de Fratura E Dimensão Fractal*. 12<sup>o</sup> Congresso Bras. de Eng. E Ciência Dos Materiais (12<sup>o</sup> Cbecimat). Águas de Lindóia –Sp, de 8 a 11 de Dezembro de 1996 A.
- Rodrigues, José de Anchieta, *Comunicação Pessoal Por E-Mail Em 9-13/10/1998*.
- Rupnowski, Przemysław; Calculations of J Integrals Around Fractal Defects In Plates, *International Journal of Fracture*, V. 111: pp. 381–394, 2001
- Sahoo Prasanta and Niloy Ghosh, Finite Element Contact Analysis of Fractal Surfaces, *J. Phys D: Appl. Phys.* Vol. 40, P. 4245-4252, 2007

- Salvini, V. R.; Pandolfelli, V. C.; Rodrigues, J. A.; Vendrasco, S. L., Comportamento de Crescimento de Trinca Após Choque Térmico Em Refratários No Sistema  $Al_2O_3-3Al_2O_3.2SiO_2-ZrO_2$ , Cerâmica, Vol. 42, N. 276, Jul/Ago, P. 357-360, 1996.
- Sander, L. M. - "Theory of Fractal Growth Process", Kinetics of Aggregation and Gelation, F. Family, D. P. Landau (Editors) © Elsevier Science Publishers B. V., P. 13-17, 1984.
- Sharon, Eran; Steven Paul Gross and Jay Fineberg, "Energy Dissipation In Dynamic Fracture", Physical Review Letters, Vol. 76, N. 12, P. 2117-2120, 18 March 1996.
- Stanley, H. Eugene, Introduction To Phase Transitions and Critical Phenomena, (Clarendon Oxford, Editors: Cooperative Phenomena Near Phase Transitions, a Bibliography With Selected Readings, Mit, Cambridge, Massachusetts), 1973.
- Su, Yan; Lei, Wei-Cheng, *International Journal of Fracture*, V. 106: L41-L46, 2000.
- Swanson, Peter L. Carolyn J. Fairbanks; Brian R. Lawn; Yiu-Ming Mai and Bernard J. Hockey; Crack-Interface Grain Bridging As a Fracture Resistance Mechanism In Ceramics: I, Experimental Study on Alumina, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 70, N. 4, P. 279-289, 1987.
- Tanaka, M., "Fracture Toughness and Crack Morphology In Indentation Fracture of Brittle Materials", Journal of Materials Science, Vol. 31. P. 749-755, 1996.
- Tarasov, Vasily E. Continuous Medium Model For Fractal Media, Physics Letters a 336, P.167-174, 2005.
- Taylor D, Cornetti P, Pugno N. The fracture mechanics of finite crack extension. *Engng Fract Mech* 2005;72:1021-38.
- Timoshenko, Theory of Elasticity, 3th Ed, McGraw Hill, 1951
- Trovalusci, P. and Augusti, G., a Continuum Model With Microstructure For Materials With Flaws and Inclusions, J. Phys. Iv, France, 8, Pp.353-, 1998.
- Tsallis, C.; Plastino, A. R.; and Zheng, W.-M. Chaos, Solitons & Fractals 8, 885, 1997.
- Power, W. L. and Tullis, T. E., 1991, Euclidean and fractal models for the description of rock surface roughness, J. Geophys. Res., 96, 415-424.
- Underwood, Erwin E. and Kingshuk Banerji, Fractals In Fractography, Materials Science and Engineering, Ed. Elsevier, Vol. 80, P. 1-14, 1986.
- Uzunov, D. I., Theory of Critical Phenomena, Mean Field, Flutuactions and Renormalization, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singaore, 1993.
- Vicsék, Tamás, Fractal Growth Phenomena, World Scientific, Singapore, 1992.
- Voss, Richard F. (In: Dynamics of Fractal Surfaces, Edited By Family, Fereydoon. and Vicsék, Tamás), World Scientific, Singapore, P. 40-45, 1991.
- Xie, 1989 Heping, the Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on the Fracture Toughness of Brittle Materials, *International Journal of Fracture*, Vol. 41, 1989, pp. 267-274.
- Xie, Heping; Effects of Fractal Cracks, *Theor. Appl. Fract. Mech.* V.23, Pp.235-244, 1995.
- Xie, J. F., S. L. Fok and A. Y. T. Leung, a Parametric Study on the Fractal Finite Element Method For Two-Dimensional Crack Problems, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 58, P. 631-642, 2003. (Doi: 10.1002/Nme.793)
- Yamaguti, Marcos, 1992. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo
- Yavari, Arash, the Fourth Mode of Fracture In Fractal Fracture Mechanics, *International Journal of Fracture*, Vol. 101, 365-384, 2000.

- Yavari, Arash, the Mechanics of Self-Similar and Self-Afine Fractal Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 114, 1-27, 2002,
- Yavari, Arash, on Spatial and Material Covariant Balance Laws In Elasticity, *Journal of Mathematical Physics*, 47, 042903, 1-53, 2006
- Zaiser, 2004 Michael, Frederic Madani Grasset, Vasileios Koutsos, And Elias C. Aifantis' , Self-Affine Surface Morphology of Plastically Deformed Metals, *Phys. Rev. Lett.* 93, 195507 (2004) .
- Weiss, Jérôme; Self-Affinity of Fracture Surfaces And Implications on A Possible Size Effect on Fracture Energy, *International Journal of Fracture*, V. 109: P. 365–381, 2001
- Westergaard, H. M., “Bearing Pressures and Cracks” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, Pp. 49-53, 1939.
- Williford, R. E. Fractal Fatigue, *Scripta Metallurgica Et Materialia*, Vol. 24, 1990, Pp. 455-460.
- Willner, K. (2008). Symposium of Advances in Contact Mechanics: a tribute to Prof. J. J. Kalker Delft, The Netherlands.
- Wnuk, Michael P.; Yavari, Arash, a Correspondence Principle For Fractal and Classical Cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72 (2005) 2744-2757.
- Wong, P., Howard, J. and Lin, J. (1986). Surface roughening and the fractal nature of rocks. *Physics Revue Letters* **57**, 637–640.



## A

- Abraham, Farid F.; D. Brodbeck, R. A. Rafey and W. E. Rudge, Instability Dynamics of Fracture: a Computer Simulation Investigation. *Physical Review Letters* Vol. 73, N. 2, P. 272-275, 11 July 1994.
- Abraham, Farid F.; D. Schneider; B. Land; D. Lifka; J. Skovira; J. Gemer and M. Rosenkrantz, Instability Dynamics In Three-Dimensional Fracture: An Atomistic Simulation, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N<sup>o</sup> 9, P. 1461-1471, 1997.
- Abraham, Farid F.; Dominique Brodbeck, Willian E. Rudge and Xiaopeng Xu, a Molecular Dynamics Investigation of Rapid Fracture Mechanics, *J. Mech Phys. Solids*, Vol 45, N. 9, P. 1595-1619, 1997.
- Adda-Bedia, Mokhtar and Martine Ben Amar, Stability of Quasiequilibrium Cracks Under Uniaxial Loading, *Physical Review. Letters*. Vol. 76, N. 9, P. 1497-1500, 26 February 1996.
- Aliabadi, M. H. *Numerical Fracture Mechanics, Solid Mechanics and Its Applicaions* Vol. 8, Computational Mechanics Publications, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Aliabadi, M. H. *the Boundary Element Method, Vol. 2, Applications In Solids and Strucutres*, John Wiley & Sons, Ltd, London, Dordrecht, 2002.
- Allen, Martin; Gareth J. Brown; Nick J. Miles, - "Measurements of Boundary Fractal Dimensions": Review of Current Techniques. *Powder Technology*, Vol. 84, P.1-14, 1995.
- Alves, Lucas Máximo. "Estudo da Solidificação de Ligas de Silício-Germânio Para Aplicações Termoelétricas", *Dissertação de Mestrado Fcm-Ifsc-Usp-1995*.
- Alves, L. M., *Simulação Bidimensional da Propagação de Trincas Em Materiais Frágeis: Parte – I*, In: *Anais Do 41o Congresso Brasileiro de Cerâmica, São Paulo-Sp. Artigo Publicado Neste Congresso Ref.063/1, 1997*.
- Alves, Lucas Máximo – *Escalonamento Dinâmico da Fractais Laplacianos Baseado No Método Sand-Box*, In: *Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho., Artigo a Ser Publicado Neste Congresso Ref.007/1, 1998a*.
- Alves, Lucas Máximo - *Um Novo Principio de Dissipação de Energia Para a Fratura Baseado Na Teoria Fractal*, In: *Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho. Artigo Publicado Neste Congresso Ref.008/1, 1998b*.
- Alves, L. M. "Uma Teoria Estatística Fractal Para a Curva-R", In: *Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho. Artigo Publicado Neste Congresso Ref.009/1, 1998c*.
- Alves, Lucas Máximo – *da Fratura a Fragmentação, Uma Visão Fractal*, In: *Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho. Artigo Publicado Neste Congresso Ref. 010/1, 1998d*.
- Alves, Lucas Máximo - *Simulação Bidimensional da Propagação de Trincas Em Materiais Frágeis: Parte – Ii*, In: *Anais Do 42o Cong. Bras. de Cerâmica, Poços de Caldas de 3 a 6 de Junho. Artigo Publicado Neste Congresso Ref. 011/1, 1998e*.
- Alves, Lucas M. Et Al, *Relationship Between Crack Resistance (R-Curve) and Fracture Geometry - To Be Published, 1998f*.
- Alves, Lucas Máximo. *Proposta de Tese de Doutorado, Interunidades-Dfcm-Ifsc-Usp, 1998g*.
- Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva and Bernhard Joachim Mokross, (In: *New Trends In Fractal Aspects of Complex Systems – Facs 2000 – Iupap International Conference At Universidade Federal de Alagoas – Maceió, Brasil, October, 16, 2000*).

Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva, Bernhard Joachim Mokross, the Influence of the Crack Fractal Geometry on the Elastic Plastic Fracture Mechanics. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 295, N. 1/2, P. 144-148, 12 June 2001.

Alves, Lucas Máximo, “Modelamento Fractal da Fratura E Do Crescimento de Trincas Em Materiais”, Relatório de Tese de Doutorado Em Ciência E Engenharia de Materiais, Apresentada À Interunidades Em Ciência E Engenharia de Materiais, da Universidade de São Paulo-Campus, São Carlos, Orientador: Bernhard Joachim Mokross, Co-Orientador: José de Anchieta Rodrigues, São Carlos – Sp, 2002.

Alves, L. M. ; Chinelatto, Adilson Luiz ; Chinelatto, Adriana Scoton Antonio ; Prestes, Eduardo. Verificação de um modelo fractal de fratura de argamassa de cimento. In: Anais do 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, realizado no Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves, L. M. ; Chinelatto, Adilson Luiz ; Chinelatto, Adriana Scoton Antonio ; Grzebielucka, Edson Cezar . Estudo do perfil fractal de fratura de cerâmica vermelha. In: Anais do 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, realizado no Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves – Alves, Lucas Máximo; *et al.*, Verificação de Um Modelo Fractal Do Perfil de Fratura de Argamassa de Cimento, 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, Realizado No Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves - Alves, Lucas Máximo; *et al.*, Estudo Do Perfil Fractal de Fratura de Cerâmica Vermelha, 48º Congresso Brasileiro de Cerâmica, Realizado No Período de 28 de Junho a 1º de Julho de 2004, Em Curitiba – Paraná.

Alves, Lucas Máximo: Fractal Geometry Concerned With Stable and Dynamic Fracture Mechanics. *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol 44/1, Pp 44-57, 2005.

Alves, Lucas Máximo; Lobo, Rui F. M., a Chaos and Fractal Dynamic Approach To the Fracture Mechanics, In: the Logistic Map and the Route To Chaos: From the Beginning To Modern Applications; Proc. of Verhulst 200 Congress on Chaos, 16 To 18 Sept. (2004), Brussels, Belgium. Edited By Spinger. 2006.

Alves, Lucas Máximo. Proposta de Tese de Doutorado, Ppgmne-Cesec-Ufpr-Curitiba-Paraná, Em Andamento, 2010.

Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva, Luiz Alkimin de Lacerda, Fractal Modeling of the *J-R* Curve and the Influence of the Rugged Crack Growth on the Stable Elastic-Plastic Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 77, Pp. 2451-2466, 2010.

Alves, Lucas Máximo; Rosana Vilarim da Silva, A fractal modeling of the *J-R* curve on the stable elastic-plastic fracture mechanics submetido à publicação a *Engineering Fracture Mechanics*, 2009b.

Alves, Lucas Máximo, A Fractal Modeling of the Crack Rugged Path And of A Fracture Surface For A Geometric Description of Crack Growth, , 2010, To Be Submmited.

Alves, Lucas Máximo, the Fractality Analysis of Geometric Artifacts Distribution on Fracture Surfaces By A New Non Destructive Method, , 2010, To Be Submmited.

Alves, Lucas Máximo, Application of a Generalized Fractal Model For Rugged Fracture Surface To Profiles of Brittle Materials , Artigo Em Preparação, 2011.

ASTM C 348, Standard Test Method for Flexural Strenght of Hydraulic - Cement Mortars,1995.

ASTM C 305, Standard Practice for Mechanical Mixing of Hydraulic Cement Pastes and Mortars of Plastic Consistency, 1994

ASTM E1737-96 – “Standard Test Method For J-Integral Characterization of Fracture Toughness”, *Designation Astm E1737-96*, Pp.1-24, (1996).

ASTM E813-89 – “Standard Test Method For  $J_{ic}$ , A Measure of Fracture Toughness”, *Designation, Astm E813-89*, (1989).

Anderson, T. L. *Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications*, (Crc Press, 2th Edition, 1995).

Anderson, T. L, *Fracture Mechanics, Fundamental and Applications*, (Chapter 4, Section 4.1.2, Equations (4.14), (4.19) and (4.20), P. 215-218, 2<sup>nd</sup> Edition, Crc Press, 1995.

Achdou, Y., C. Sabot, et al. (2004). "Boundary Values Problems in Some Ramified Domains with Fractal Boundary: Analysis and Numerical Methods, Part II: Non homogeneous Neumann problems."

ASTM – Handbook – Vol. 12, Fractography – the Materials Information Society (1992)

ASTM - E399 “Standard Test Method For Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials”, *Annual Book of Standards*, Part. 10, American Society For Testing and Materials, Philadelphia, E-399-81, P. 588-618, 1981.

ASTM – E813, “Standard Test Method For  $J_{ic}$ , a Measure of Fracture Toughness”, *Designation, Astm E813-89*, 1989.

ASTM – E1290, “Standard Test Methos For Crack-Tip Opening Displacement (Ctod) Fracture Toughness Measurement”, *Designatuion Astm E 1290-93*, P. 853-862, 1993.

ASTM - E561, “Standard Practice For R-Curve Determination”, *Designation Astm E 561-94*, 1994.

ASTM - E1552, “Standard Test Method For Determining J-R Curves”, *Designation Astm E 1152-95*, 1995.

ASTM - E1737, “Standard Test Method For J-Integral Characterization of Fracture Toughness”, *Designation Astm E1737/96*, P.1-24,1996.

ASTM – E1820, “Standard Test Method For Measurement of Fracture Toughness”, *Designation Astm E 1820-96*, P. 1- 33, 1996.

ASTM - D6068, - 10 Standard Test Method for Determining J-R Curves of Plastic Materials, crack growth resistance, fracture toughness, JR curves, plastics, 96(2002).

Åström, Jan; Timonen Jussi, Fragmentation By Crack Branching, *Phys. Rev. Letters*, Vol. 78, N. 19, P. 3677-3680, 12 May 1997.

Atkins, A. G. & Mai, Y-M. *Elastic and Plastic Fracture*. Ellis Horwood, Chichester, 1985.

## **B**

Balankin , A.S and P. Tamayo, *Revista Mexicana de Física* 40, No. 4, Pp. 506-532, 1994.

Balankin , Alexander S., *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 57, N. 2/3, Pp.135-203, 1997.

Bammann, D. J. and Aifantis, E. C., on a Proposal For a Continuum With Microstructure, *Acta Mechanica*, 45,91-121, 1982.

Barabási, Albert – László; H. Eugene Stanley, *Fractal Concepts In Surface Growth*, Cambridge University Press, 1995.

Bernardes, 1998 A. T, *Comunicação Pessoal* 1998

- Barabási, 1995 Albert – László; H. Eugene Stanley, *Fractal Concepts In Surface Growth*, Cambridge University Press, 1995.
- Barber, M.; Donley J.; and Langer, J. S., *Steady-State Propagation of a Crack In a Viscoelastic Strip*. *Phys. Rev. A*, Vol. 40, N. 1, P. 366-376, July 1, 1989.
- Barenblatt, G. I. “The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks In Brittle Fracture”, *Advances In Applied Mechanics*, Vol. 7, P.55-129, 1962.
- Barnsley, Michael, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.
- BATHE , K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
- Beck, C. and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*, Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 4, England: Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- Bechhoeffer, J. "The Birth of Period 3, Revisited." *Math. Mag.* 69, 115-118, 1996.
- Becker, R. and R. E. Smelser, *Simulation of Strain Localization and Fracture Between Holes In An Aluminum Sheet*, *J. Mech Phys. Solids*, Vol. 42, N<sup>o</sup> 5, P. 773-796, 1994.
- Benson, D. J.; Nesterenko, V. F.; Jonsdottir, F.; Meyers, M. A., *Quasistatic and Dynamic Regimes of Granular Material Deformation Under Impulse Loading*, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N. 11/12, P. 1955-1999, 1997.
- Bernardes, A. T., *Comunicação Pessoal* 1998
- Besicovitch, A. S. "On Linear Sets of Points of Fractional Dimensions". *Mathematische Annalen* 101. 1929.
- Besicovitch, A. S. H. D. Ursell. "Sets of Fractional Dimensions". *Journal of the London Mathematical Society* 12, 1937. Several Selections From This Volume Are Reprinted In Edgar, Gerald A. (1993). *Classics on Fractals*. Boston: Addison-Wesley. Isbn 0-201-58701-7. See Chapters 9,10,11
- Bikerman, J. J., *Review Article: Surface Energy of Solids*, *Phys. Stat. Sol.* Vol. 10, N. 3, P. 1-26, 1965.
- Blyth, M. G. , C. Pozrikidis, *Heat Conduction Across Irregular and Fractal-Like Surfaces*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, P. 1329-1339, 2003
- Bogomolny, A. "Chaos Creation (There Is Order In Chaos)." [Http://Www.Cut-The-Knot.Com/Blue/Chaos.Html](http://www.cut-the-knot.com/blue/chaos.html), 1999.
- Borodich, F. M., “Some Fractals Models of Fracture”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N. 2, P. 239-259, 1997.
- Bornhauser, A.; K. Kromp; R. F. Pabst, *R-Curve Evaluation With Ceramic Materials At Elevated Temperatures By An Energy Approach Using Direct Observation and Compliance Calculation of the Crack Length*. *Journal of Materials Science*, Vol. 20, P. 2586-2596, 1985.
- Bose Filho, Waldek Wladimir, “Phd Thesis”, the University of Birmingham, U. K.,1995.
- Bouchaud, Elisabeth, “Scaling Properties of Crack”, *J. Phys: Condens. Matter*, Vol.9, P. 4319-4344, 1977.
- Bouchaud, E.; G. Lapasset and J. Planés, *Fractal Dimension of Fractured Surfaces: a Universal Value?* *Europhysics Letters*, Vol. 13, N. 1, P. 73-79, 1990.

Bouchaud, E.; J. P. Bouchaud, Fracture Surfaces: Apparent Roughness, Relevant Length Scales, and Fracture Toughness. *Physical Review B*, Vol. 50, N. 23, 17752 – 17755, 15 December 1994-I.

Bouchaud, Elisabeth, Scaling Properties of Cracks, *J. Phy. Condens. Matter* 9, Pp. 4319-4344, 1997.

Boudet, J. F.; S. Ciliberto, and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* Vol.9, P. 4319-4344, 1977.

Boudet, J. F.; S. Ciliberto, and V. Steinberg, *Europhys. Lett.* 30, 337, 1995.

Boudet, J. F.; S. Ciliberto and V. Steinberg, Dynamics of Crack Propagation In Brittle Materials, *J. Phys. II France*, Vol. 6, P. 1493-1516, October 1996.

BREBBIA, : C. A. and DOMINGUEZ, J. “Boundary Elements, An Introductory Course”, 2<sup>nd</sup> Edition, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill Book Company

Brotchie, John F. “Optimization and Robustness of Structural Engineering Systems”, *Engineering Structures*, Vol. 19, N<sup>o</sup> 4, P. 289-292, 1997.

Bunde, Armin; Shlomo Havlin, *Fractals In Science*, Springer-Verlag 1994.

## C

Caldarelli, G.; Castellano, C.; Vespignani, A. - “Fractal and Topological Properties of Directed Fractures”, *Phys. Revol. E*, N. 4, Vol. 49, April 1994.

Caldarelli, Guido; Di Tolla, Francesco D.; Petri, Alberto. - “Self-Organization and Annealed Disorder In a Fracture Process”, *Phys. Revol. Lett.* N. 12, Vol. 77, 16 September 1996.

Callen, Herbert, *Thermodynamics*, John Wiley & Sons, 1986

Calister, *Introdução a Ciências Dos Materiais*, Editora , 2000

Caraça, Bento de Jesus, *Fundamentos da Matemática*. Ed. 1962.

Carpinteri - Alberto and Bernardino Chiaia, Crack-Resistance As a Consequenca of Self-Similar Fracture Topologies, *International Journal of Fracture*, 76, Pp. 327-340, 1996.

Carpinteri, A; Chiaia, B.; Cornetti, P., A fractal theory for the mechanics of elastic materials *Materials Science and Engineering*, A365, p. 235–240, 2004.

Carpinteri, A.; Puzzi, S., Complexity: a New Paradigm For Fracture Mechanics, *Frattura Ed Integrità Strutturale*, 10, 3-11, 2009, Doi:10.3221/Igf-Esis.1001

Chakrabarti B. K. and Benguigui L. G., *Statistical Physics of Fracture and Breakdown in Disordered Systems* (Clarendon Press, Oxford) 1997.

Family & Vicsek , Scaling in steady-state cluster-cluster aggregate, *J. Phys. A* 18, L75, 1985.

Chalmers, Bruce. *Principles of Solidification*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, Malabar, Florida, 1982, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1964.

Charmet, J. C. ; Roux , S and Guyon, E, *Disorder and Fracture*, Plenum Press New York 1990.

Chelidze, T.; Y. Gueguen, Evidence of Fractal Fracture, (Technical Note) *Int. J. Rock. Mech Min. Sci & Geomech Abstr.* Vol. 27, N. 3, P. 223-225, 1990.

Chelidze, T.; Y. Gueguen, Evidence of Fractal Fracture, (Technical Note) *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* Vol. 27, N. 3, P. 223-225, 1990a.

Chen, J. Y. and Y. Huang and M. Ortiz, Fracture Analysis of Cellular Materials: a Strain Gradient Model, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, N<sup>o</sup> 5, P. 789-828, 1998.

Cherepanov, G. P., Crack Propagation In Continuous Media, J. Appl. Math. Mech. (Pmm) (English Translation), Vol.31, N. 3, P. 503-512, 1967.

Cherepanov, G. P.; L. N. Germanovich, An Employment of the Catastrophe Theory In Fracture Mechanics As Applied To Brittle Strength Criteria, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, N. 10, P. 1637-1649, 1993.

Ching, Chien; Emily S. C., Dynamic Stresses At a Moving Crack Tip In a Model of Fracture Propagation, Physical Review E, Vol. 49, N. 4, P. 3382-3388, April 1994.

Christensen, R. M., Theory of Viscoelasticity: An Introduction, Academic Press, New York, 1982.

Chudnovsky, A.; B. Kunin; M. Gorelik, Modeling of Brittle Fracture Based on the Concept of Crack Trajectory Ensemble, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 58, N<sup>os</sup> 5-6, P. 437-457, 1997.

Colafemea, A. A.; J. R. Tarpani, W. W. Bose Filho and D. Spinelli. Linear Normalization Vs Elastic Compliance In Determining J-R Curves. Iv Sicem – Simpósio da Interunidades Em Ciência E Engenharia de Materiais – USP – São Carlos de 23 a 24 de Novembro de 2000.

Cook, R. D., Malkus D. S. and Plesha M. E., Conceptions and Applications of Finite Element Analysis, 3<sup>rd</sup> Edition, Wiley, 1989.

Costa, U. M. S. and Lyra, M. L. Phys. Revol. E 56, 245, 1997.

Cotterell, B.; Velocity Effects In Fracture Propagation. Applied Materials Research Vol. 4, P. 227-232, 1965.

Cotterell, B. and J. R. Rice, Int. J. Fract.Mech. Vol. 16, 155, 1980.

## D

Dally, J. W., Dynamic Photoelastic Studies of Fracture. Experimental Mechanics, Vol. 19, P. 349-361, 1979

Da Silva, R. V., “Avaliação da Tenacidade À Fratura de Soldas de Alta Resistência E Baixa Liga Pelo Método da Integral-J, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil, 1998a.

Da Silva, R. V., “Avaliação da Tenacidade À Fratura de Soldas de Alta Resistência E Baixa Liga Pelo Método da Integral-J, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil, 1998.

Da Silva, R. V., Bose Filho, W. W., Spinelli, D., Influência da Microestrutura Na Tenacidade À Fratura de Soldas de Alta Resistência E Baixa Liga, 13<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Engenharia E Ciência de Materiais, Dezembro de 1998b, Curitiba – Pr, Brasil.

Da Silva, R. V., Bose Filho, W. W., Spinelli, D., Influência da Microestrutura Na Tenacidade À Fratura de Soldas de Alta Resistência E Baixa Liga, 13<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Engenharia E Ciência de Materiais, Dezembro de 1998, Curitiba – Pr, Brasil.

Da Silva, Rosana Vilarim; Comportamento Mecânico Do Compósito Sisal/Poliuretano Derivado de Óleo de Mamona, 14o Congresso Brasileiro de Engenharia E Ciência Dos Materiais, de 3 a 6 de Dezembro, São Pedro – Sp, Brasil, 2000.

Da Silva, Rosana Vilarim Da, Comportamento Mecânico Do Compósito Sisal/Poliuretano Derivado de Óleo de Mamona, 14o Congresso Brasileiro de Engenharia E Ciência Dos Materiais, de 3 a 6 de Dezembro, São Pedro – Sp, Brasil, 2000.

Dauskardt, R. H.; F. Haubensak and R. O. Ritchie, on the Interpretation of the Fractal Character of Fracture Surfaces; Acta Metall. Matter., Vol. 38, N. 2, P. 143-159, 1990.

De Arcangelis, L.; Hansen A; Herrmann, H. J.- "Scaling Laws In Fracture", Phys. Review B, N. 1, Vol. 40, 1 July 1989.

Devaney, R. *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems, 2nd Ed.* Redwood City, Ca: Addison-Wesley, 1989.

Dickau, R. M. "Bifurcation Diagram." [Http://Forum.Swarthmore.Edu/Advanced/Robertd/Bifurcation.Html](http://Forum.Swarthmore.Edu/Advanced/Robertd/Bifurcation.Html)". 1999.

Dyskin, A. V., Effective Characteristics and Stress Concentrations In Materials With Self-Similar Microstructure, *International Journal of Solids and Structures*, 42, 477-502, 2005

Doyle, M. ; a Mechanism of Crack Branching In Polymethylmethacrylate and the Origin of Bands on the Surface of Fracture. *Journal of Materials Science*, Vol. 18, P. 687-702, 1983.

Dos Santos, Sergio Francisco; *Aplicação Do Conceito de Fractais Para Análise Do Processo de Fratura de Materiais Cerâmicos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos. Centro de Ciências Exatas E de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação Em Ciência E Engenharia de Materiais, São Carlos, 1999.

Dos Santos, 1999, Sergio Francisco; *Aplicação Do Conceito De Fractais Para Análise Do Processo De Fratura De Materiais Cerâmicos*, Dissertação De Mestrado, Universidade Federal De São Carlos. Centro De Ciências Exatas E De Tecnologia, Programa De Pós-Graduação Em Ciência E Engenharia De Materiais, São Carlos (1999).

Dubuc, B; S. W. Zucker; C. Tricot; T. F. Quiniou and D. Wehbi, Evaluating the Fractal Dimension of Surfaces; *Proc. R. Soc. Lond. A*425, P. 113-127, 1989.

Duda, Fernando Pereira; Souza, Angela Crisina Cardoso, on a Continuum Theory of Brittle Materials With Microstructure, *Computacional and Applied Mathematics*, Vol. 23, N.2-3, Pp.327-343, 2007.

Dulaney, E. N. and W. F. Brace, Velocity Behavior of a Growing Crack. *Journal Applied Physics*, Vol. 31, N. 12, P. 2233-2266, December 1960.

## E

Ewalds, H. L. and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*, Delftse Uitgevers Maatschappij Third Edition, Netherlands 1986, (Co-Publication of Edward Arnold Publishers, London 1993).

Ewalds, H. L. and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*, Delftse Uitgevers Maatschappij Third Edition, Netherlands 1986, (Co-Publication of Edward Arnold Publishers, London 1993).

Engelbrecht, J., Complexity In Mechanics, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Vol. 67, 3, 293-325, 2009

Engoy, Thor and Knut Jørgen Måløy, Roughness of Two-Dimensional Cracks In Wood, *Physical Review Letters*, Vol. 73, N. 6, 834-837, 8 August 1994.

## F

Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore, P.7-8,1991.

Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás - *Dynamics of Fractal Surfaces*, Chapter 3, P. 73-77, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 1991.

Feder, Jens; *Fractals*, (Plenum Press, New York, 1989).

- Fernandez, L; Guinea, F.; Louis, E.- “Random and Dendritic Patterns In Crack Propagation”, J. Phys. A: Math. Gen. 21, L301-L305, 1988.
- Fiedler-Ferrara, N. and C. P. C. Do Prado, Caos, Uma Introdução, Ed. Edgard Blücher Ltda, Brazil, 1994.
- Field, J. E., Brittle Fracture: Its Study and Application. Contemporary Physics, Vol 12, P. 1-31, 1971.
- Fineberg, Jay; Steven Paul Gross; Michael Marder and Harry L. Swinney, Instability In Dynamic Fracture, Physical Review Letters, Vol. 67, N. 4, P. 457-460, 22 July 1991.
- Fineberg, Jay; Steven Paul Gross, Michael Marder, and Harry L. Swinney, Instability In the Propagation of Fast Cracks. Physical Review B, Vol.45, N. 10, P.5146-5154 (1992-II), 1 March, 1992.
- Fletcher, D. C., “Conservations Laws In Linear Elastodynamics”, Archive For Rational Mechanics and Analysis, Vol. 60, P. 329-353, 1975.
- Forest, S. Mechanics of Generalized Continua: Construction By Homogenization, J. Phys. Iv, France, 8,.Pp.39-48, 1998.
- Freund, L. B., Energy Flux Into the Tip of An Extending Crack In An Elastic Solid, Journal of Elasticity, Vol. 2. N. 4, P. 341-349, December 1972.
- Freund, B. L. “Crack Propagation In An Elastic Solid Subjected To General Loading - I. Constant Rate of Extension”. J. Mech. Phys. Solids. Vol. 20, P. 129-140, 1972.
- Freund, B. L. Crack Propagation In An Elastic Solid Subjected To General Loading - Ii. Non-Uniform Rate of Extension. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20, P. 141-152, 1972.
- Freund, B. L. Crack Propagation In An Elastic Solid Subjected To General Loading - Iii. Stress Wave Loading. J. Mech. Phys. Solids., Vol. 21, P. 47-61, 1973.
- Freund, B. L. Crack Propagation In An Elastic Solid Subjected To General Loading - Iv. Obliquely Incident Stress Pulse. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 22, P. 137-146, 1974.
- Freund, L. B., and R. J. Clifton, on the Uniqueness of Plane Elastodynamic Solutions For Running Cracks, Journal of Elasticity, Vol. 4, N. 4, 293-299, December, 1974.
- Freund, L. B., Dynamic Crack Propagation; the Mechanics of Fracture, American Society of Mechanical Engineers, P. 105-134, New York, 1976.
- Freund, L. B. (Brown University); Dynamic Fracture Mechanics, (Cambridge University Press, Published By the Press Syndicate of the University of Cambridge), New York, 1990.
- Fung, Y. C. a First Course In Continuum Mechanics, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- Fung, 1969 Y. C. Fung, *A First Course In Continuum Mechanics*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

## G

- Gao, Huajian; Surface Roughening and Branching Instabilities In Dynamic Fracture, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, N. 3, P. 457-486, 1993.
- Gao, Huajian; a Theory of Local Limiting Speed In Dynamic Fracture, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 44, N<sup>o</sup> 9, P. 1453-1474, 1996.
- Gaspard, P. and G. Nicolis, Transport Properties, Lyapunov Exponents, and Entropy Per Unit Time, Physical Review Letters, Vol. 65, N<sup>o</sup> 14, P. 1693-1696, 1 October 1990.



- Greenberg, Michael D., *Advanced Engineering Mathematics*, chapter 15, Curves, Surfaces, and Volumes, Prentice Hall, 2<sup>nd</sup> Edition, 1998.
- Ghyka, Matila, *the Geometry of Art and Life*, Dover Publications, Inc, New York, 1977.
- Giannakopoulos, Antonios E. and Kristin Breder, *Modelling of Toughening and Its Temperature Dependency In Whisker-Reinforced Ceramics*.
- Gilberti, C. J.; J. J. Cao; L.C. de Jonghe and R. O. Ritchie, *Crack Growth Resistance-Curve Behavior In Silicon Carbide: Small Versus Long Cracks*, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 80, N.9, P. 2253-2261, 1997.
- Gilman, J. J.; C. Knudsen, and W. P. Walsh, *Cleavage Cracks and Dislocations In Lif Crystals*. Journal Applied Physics, Vol. 6, P. 601-607, 1958.
- Gleick, J. *Chaos: Making a New Science*. New York: Penguin Books, P. 69-80, 1988.
- Gol'dshtein, R. V. and A. B. Mosolov, *Flows of Fractally Broken Ice*, Sovol. Phys. Dokl., Vol. 37, N. 5, P. 253-256, May 1992.
- Golenievski, G., *International Journal of Fracture*, Vol. 33, 39-44, 1988.
- Gong , Bo and Zu Han Lai, *Fractal Characteristics of J-R Resistance Curves of Ti-6al-4v Alloys*, Eng. Fract. Mech.. Vol. 44, N. 6, 1993, Pp. 991-995.
- Gordon, W. B. "Period Three Trajectories of the Logistic Map." *Math. Mag.* 69, 118-120, 1996.
- Govindjee, Sanjay; Gregory J. Kay, Juan C. Simo, *Anisotropic Modelling and Numerical Simulation of Brittle Damage In Concrete*. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 38, P. 3611-3633, 1995.
- Grassberger, P. "On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors." *J. Stat. Phys.* 26, 173-179, 1981.
- Grassberger, P. and Procaccia, I. "Measuring the Strangeness of Strange Attractors." *Physica D* 9, 189-208, 1983.
- Griffith, A. A., "The Phenomena of Rupture and Flow In Solids", *Phil. Trans. R. Soc. London (Mechanical Engineering)* A221 , P. 163-198, 1920.
- Gross, Steven. P.; Jay. Fineberg, M. P. Marder, W. D. McCormick and Harry. L. Swinney, *Acoustic Emissions From Rapidly Moving Cracks*. *Physical Review Letters*, Vol. 71, N. 19, P. 3162-3165, 8 November, 1993.
- Gross, Steven Paul, *Dynamics of Fast Fracture*, Dissertation Presented To the Faculty of the Graduate School of the University of Texas At Austin, In a Partial Fulfillment of the Requiriments For the Degree of Doctor of Philosophy, University of Texas At Austin, August, 1995.
- Gulick, D. *Encounters With Chaos*. New York: Mcgraw-Hill, 1992.
- Gumbsch, Peter., *An Atomistic Study of Brittle Fracture: Toward Explicit Failure Criteria From Atomistic Modeling*. *Journal of Materials Research*, Vol.10, N. 11, P. 2897-2907, 1995.
- Gumbsch, Peter, *Brittle Fracture Processes Modelled on the Atomic Scale*, *Z. Metallkd.*, Vol. 87, N. 5, P. 341-347, 1996.
- Gumbsch, Peter, In: *Computer Simulation In Materials Science*, Edited By H. O. Kirchner Et Al. Kluwer Academic, Netherlans, P. 227,1996.
- Gumbsch, Peter; S. J. Zhou and B.L. Holian, Et Al. *Molecular Dynamics Investigation of Dynamic Crack Stability*, *Physical Review. Rev. B*, Vol. 55, N. 6, P. 3445-3455, 1 February 1997-Ii;
- Gumbsch, Peter and Huajian Gao, *Dislocations Faster Than the Speed of Sound*, *Science*, Vol. 283, P. 965-968, 12 February 1999.

Gurney, C.; Hunt, J. - "Quasi-Static Crack Propagation", Proc. Royal Soc. London, Series-A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 299, N.1459, 25 July 1967.

Guy, Ciências Dos Materias, Editora Guanabara 1986.

## H

Haase, Rolf - Thermodynamics of Irreversible Process. Dover Publications, Inc New York 1990.

Hall, E. O, the Brittle Fracture of Metals. Journal Mechanics and Physics Solids, Vol.1, P. 227-233, 1953.

Halm, D. and A. Dragon, An Anisotropic Model of Damage and Frictional Sliding For Brittle Materials, Eur. J. Mech., A/ Solids, Vol. 17, N<sup>o</sup> 3, P. 439-460, 1998.

Hansen, Alex and Einar L. Hinrichsen, Roughness of Crack Interfaces, Physical Review Letters, Vol. 66, N. 19, P. 2476-2479, 13 May 1991.

Hauch, J. A. and M. P. Marder, Energy Balance In Dynamic Fracture, Investigated By a Potential Drop Technique, Submitted To International. Journal of Fracture, 1997.

Hausdorff F. "Dimension Und Äußeres Maß". Mathematische Annalen 79 (1-2): 157-179. March 1919, Doi:10.1007/Bf01457179.

Heino, P. and K. Koshi, Mesoscopic Model of Crack Branching, Physical Review B, Vol. 54, N<sup>o</sup> 9, 1 September, P. 6150-6154, 1 September 1996 -I.

Heino, P. and K. Kashi, Dynamic Fracture of Disordered Viscoelastic Solids, Physical Review E, Vol. 56, N. 4, P. 4364-4370, October 1997.

Hernández, Gonzalo; Hans J. Herrmann, Discrete Models For Two- and Threee-Dimensional Fragmentation, Physica A, Vol. 215, P. 420-430, 1995.

Hernández, Gonzalo; Hans J. Herrmann, Discrete Models For Two- and Threee-Dimensional Fragmentation, Physica A, Vol. 215, P. 420-430, 1995.

Herrmann, Hans J. - "Growth: An Introduction", In: on the Growth and Form" Fractal and Non-Fractal Patterns In Physics, Edited By H. Eugene Stanley and Nicole Ostrowsky Nato Asi Series, Series E: Applied Sciences N. 100 (1986), Proc. of the Nato Advanced Study Institute Ön Growth and Form", Cargese, Corsiva, France June 27-July 6 1985. Copyright By Martinus Nighoff Publishers, Dordrecht, 1986.

Herrmann, H. J.; Kertész, J.; de Arcangelis, L. - "Fractal Shapes of Deterministic Cracks", Europhys. Lett. Vol. 10, N. (2) P.147-152, (1989).

Herrmann Jr., 1989 H.; Kertész, J.; De Arcangelis, L. - "Fractal Shapes of Deterministic Cracks", Europhys. Lett. 10 (2), (1989). Pp.147-152

Herrmann, Hans J.; Roux, Stéphane, "Statistical Models For the Fracture of Disordered Media, Random Materials and Processes", Series Editors: H. Eugene Stanley and Etienne Guyon, North-Holland Amsterdam, 1990.

Herrmann, Hans J.; Homepage, 1995.

Hermann, Helmut, Exact Second Order Correlations Functions For Random Surface Fractals, J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 27, L 935-L938, 1994.

Heping, Xie the Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on the Fracture Toughness of Brittle Materials, International Journal of Fracture, Vol. 41, P. 267-274, 1989.

- Heping, Xie and David J. Sanderson, Fractal Effects of Crack Propagation on Dynamics Stress Intensity Factors and Crack Velocities, *International Journal of Fracture*, Vol. 74; 29-42, 1995.
- Heping, Xie; Jin-An Wang and E. Stein, Direct Fractal Measurement and Multifractal Properties of Fracture Surfaces, *Physics Letters a*, Vol. 242, P. 41-50, 18 May 1998.
- Hill, R., a Variational Principle of Maximum Plastic Work In Classical Plasticity, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 1, 18-28, 1948.
- Hill, Rodney, "Aspects of Invariance In Solid Mechanics", *Advances In Applied Mechanics*, Vol. 18, Academic Press, P. 1-75, 1978.
- Hill, Rodney Apud Rodney Hill, Aspects of Invariance In Solid Mechanics, *Advances In Applied Mechanics*, Vol. 18, Academic Press, P. 1-75, 1978.
- Holian, Brad Lee; Raphael Blumenfeld, and Peter Gumbsch, An Einstein Model of Brittle Crack Propagation, *Physical Review Letters*, Vol. 78, N<sup>o</sup> 1, P. 78-81, 6 January 1997.
- Holland, Dominic and M. Marder, Ideal Brittle Fracture of Silicon Studied With Molecular Dynamics, *Physical Review Letters*, Vol. 80, N. 4, P. 746-748, 26 January 1998.
- Holmgren, R. *A First Course In Discrete Dynamical Systems*, 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 1996.
- Honein, T; Honein, E. E Herrmann, G - a Thermodynamically- Based Theory of Damage In Brittle Structures, In: *Fracture and Damage Quasibrittle Structures*. Edited By Z. P. Bazant, Z. Bittnar, M. Jirásek and J. Mazars. E&Fn Spon. London, 1994.
- Hornbogen, E.; Fractals In Microstructure of Metals; *International Materials Reviews*, Vol. 34. N. 6, P. 277-296, 1989.
- Hornig, T.; Sokolov, I. M.; Blumen, A., Patterns and Scaling In Surface Fragmentation Processes, *Phys. Rev. E*, Vol. 54, N. 4, 4293-4298, October 1996.
- Hübner, Heinz and W. Jillek, Subcritical Crack Extension and Crack Resistance In Polycrystalline Alumina, *J. Mater. Sci.*, Vol. 12, N. 1, P. 117-125, 1977.
- Hughes, T. J. R., the *Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1987.
- Hull, D. and P. Beardmore, Velocity of Propagation of Cleavage Cracks In Tungsten. *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 2, 468-487, 1966.
- Hutchinson, J.W., " Plastic Stress and Strain Fields At a Crack Tip." *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 337-347 (1968).
- Hyun, S. L. Pei, J. -F. Molinari, and M. O. Robbins, Finite-Element Analysis of Contact Between Elastic Self-Affine Surfaces, *Physical Review E*, Vol. 70, 026117, 2004.

## I

- Inglis, C. E. Stressess In a Plate Due To the Presence of Cracks and Sharp Corners, *Transactions of the Royal Intitution of Naval Architects*, V. 60, P. 219-241, 1913.
- Irwin, G. R., "Fracture Dynamics", *Fracturing of Metals*, American Society For Metals, Cleveland, P. 147-166, 1948.
- Irwin, G. R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, P. 361-364, 1957.

Irwin, G. R.; J. W. Dally, T. Kobayashi, W. L. Fourny, M. J. Etheridge and H. P. Rossmanith, on the Determination of a  $\dot{A}$ -K Relationship For Birefringent Polymers. *Experimental Mechanics*, Vol. 19, N. 4, P. 121-128, 1979.

Isola, S.; R. Livi and S. Ruffo, Stability and Chaos An Hamiltonian Dynamics, *Physical Review A*, Vol. 33, N<sup>o</sup> 2, February 1986, P. 1163-1170.

## J

Johnson, C., *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press (texto muito matemático), 1987.

## K

Kanninen, Melvin F.; Popelar, Carl H., *Advanced Fracture Mechanics*, the Oxford Engineering Science Series 15, Editors: A. Acrivos, Et Al. Oxford University Press, New York, Clarendon Press, Crc Press, Chapter 7, P. 437, Oxford, 1985.

Katsuragi, Hiroaki, *Multiscaling Analysis on Rough Surfaces and Critical Fragmentation*, Doctorial Dissertation , Kyushu University, July, 2004.

Kaye, Brian H., *a Random Walk Through Fractal Dimensions*, Ed. Vch, 1989.

Kertész, János, *Fractal Fracture*, *Physica A*, Vol. 191, P. 208-212, 1992.

Kingery, W. D.; H. K. Bowen; D. R. Uhlmann, *Introduction To Ceramics*, John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> Edition, 1976.

Knaus, W. G. and K. Ravi-Chandar, *Int. J. of Fracture*, Vol. 27, 127-143, 1985.

Kobayashi, A.; N. Ohtani and T. Sato, *Phenomenological Aspects of Viscoelastic Crack Propagation*, *Journal Applied Polymer Science*, Vol. 18, P. 1625-1638, 1974.

Kobayashi, T. and J. W. Dally, *Relation Between Crack Velocity and the Stress Intensity Factor In Birefringent Polymers*. In: *Fast Frature and Crack Arrest*, G. T. Hahn and M. F. Kanninen, Eds. *Astm Stp 627*, P. 7-18, 1977.

Kobayashi, A. S. and S. Mall, *Dynamic Fracture Toughness of Homalite-100*. *Experimental Mechanics*, Vol. 18, N. 1, P. 11-18, 1978.

Komvopoulos, K 1993,

Komvopoulos, K 1995a,

Komvopoulos, K 1995b.

Kogut, L, 2003

Kraff, J. M.; A. M. Sullivan and R. W., Boyle, *Effect of Dimensions on Fast Fracture Instability of Notched Sheets*, *Proceedings of the Craks Propagation Symposium Cranfield*, 1962, (The College of Aeronautics, Cranfield, England, 1962), Vol. 1. P. 8-28, 1962.

Kraft, R. L. "Chaos, Cantor Sets, and Hyperbolicity For the Logistic Maps." *Amer. Math. Monthly* 106, 400-408, 1999.

Kral, E.R., Komvopoulos, K., Bogy, D.B., 1993. *Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Repeated Indentation of A Half-Space By A Rigid Sphere*. *J. Appl. Mech. Asme* 60, 829-841.

Krostrom, B. V, and L. V. Nikitin,. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. 22, P. 749-775, 1970

Kostron, 1949 H. *Arch Metallkd*; Vol. 3, N. 6, pp. 193-203, 1949.

Kunin, B. and M. Gorelik, on Representation of Fracture Profiles By Fractional Integrals of a Wiener Process, *J. Appl. Phys*, Vol. 70, N. 12, 15 December 1991.

## L

Lacerda, Luiz Alkimin; Wrobel, L. C. Dual Boundary Element Method For Axisymmetric Analysis, *International Journal of Fracture*, Vol. 113, 267-284, 2002a

Lacerda, Luiz Alkimin; Wrobel, L. C., Na Efficient Numerical Model For Contact-Induced Crack Propagation Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, 5719-5736, 2002b.

Langer, J. S. and the Stress Intensity Factor In Birefringent Polymers. In: *Fast Fracture and Crack Arrest*, G. T. Hahn and M. F. Kanninen, Eds. *Astm Stp 627*, P. 7-18, 1977.

Langer, J. S.; Tang, C., Rupture Propagation In a Model of An Earthquake Fault, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 67, N. 8, P. 1043-1046, 19 August 1991.

Langer, J. S. Models of Crack Propagation, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, N. 6, P. 3123-3131, 15 September, 1992.

Langer, J. S., Dynamical Model of Onset and Propagation of Fracture, *Physical Review Letters*, Vol. 70. N. 23, P. 3592-3594, 7 June 1993a.

Langer, J. S. and Nakanishi, Hiizu, Models of Crack Propagation. ii. Two-Dimensional Model With Dissipation on the Fracture Surface, *Phys. Rev. E*. Vol. 48, N. 1, P. 439-448, July 1993b.

Latora, V.; Rapisarda, A.; Tsallis, C.; and Baranger, M. the Rate of Entropy Increase At the Edge of Chaos. 1999. <http://www.lanl.gov/abs/cond-mat/9907412/>, 1999.

Lauwerier, H. *Fractals: Endlessly Repeated Geometrical Figures*. Princeton, Nj: Princeton University Press, P. 119-122, 1991.

Lavenda, Bernard H. - *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Dover Publications, Inc. New York, 1978.

Lawn, Brian; *Fracture of Brittle Solids*, Cambridge Solid State Science Series, Editors: Professors E. A. Davis (Department of Physics, University of Leicester) and I. M. Ward Frs (Department of Physics, University of Leds), 2nd. Edition, Cambridge University Press, 1993(1995).

Lazarev, V. B., Balankin, A. S. and Izotov, A. D. “Synergetic and Fractal Thermodynamics of Inorganic Materials. iii. Fractal Thermodynamics of Fracture In Solids, *Inorganic Materials*, Vol. 29, No. 8, Pp. 905-921,1993.

Ledergerber-Ruoff, Erika Brigitta, *Isometrias E Ornamento No Plano Euclidiano*, Editora Atual, Ltda, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1982.

Lei, Weisheng and Bingsen Chen, Discussion on “The Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on the Fracture Toughness of Brittle Materials” By Xie Heping, *International Journal of Fracture* Vol. 65, R65-R70, 1994a.

Lei, Weisheng and Bingsen Chen, Discussion: “Correlation Between Crack Tortuosity and Fracture Toughness In Cementitious Material” By M. A. Issa, A. M. Hammad and A. Chudnovsky, A., *International Journal of Fracture*, Vol. 65, R29-R35, 1994b.

Lei, Weisheng and Bingsen Chen, *Fractal Characterization of Some Fracture Phenomena*, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, N. 2, P. 149-155, 1995.

- Lei, 1995 Weisheng, And Bingsen Chen, Fractal Characterization of Some Fracture Phenomena, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, N. 2, 1995, pp. 149-155.
- Leung, A. Y. T. and R. K. L. Su, Mixed-Mode Two Dimensional Crack Problem By Fractal Two Level Finite Element Method, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, N. 6, P. 889-895, 1995.
- Li, Xiao Wu; Jifeng Tian; Yan Kang and Zhongguang Wang; Quantitative Analysis of Fracture Surface By Roughness and Fractal Method, *Scripta Metallurgica Et Materialia*, Vol. 33, N. 5, P. 803-809, 1995.
- Li, Ju and Ostoja-Starzewski, Martin, Fractal Solids, Product Measures and Fractional Wave Equations, *Proceedings of the Royal Society A, Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 4 June 2009, Doi:10.1098/Rspa.2009.0101
- Lima, Elon Lages, *Medida E Forma Em Geometria (Comprimento, Área, Volume E Semelhança) Coleção Professor de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.*
- Lin, G. M.; J. K. L. Lai, Fractal Characterization of Fracture Surfaces In a Resin-Based Composite, *Journal of Materials Science Letters*, Vol. 12, P. 470-472, 1993.
- Liu, Xiangming. and M. P. Marder, the Energy of a Steady-State Crack In a Strip. *Journal Mechanics and Physics Solids*, Vol. 39, P. 947-961, 1991.
- Lin, 1993 G. M.; J. K. L. Lai, “Fractal Characterization of Fracture Surfaces In A Resin-Based Composite”, *Journal Mat. Science Letters*, Vol. 12, (1993) , pp. 470-472.
- Lung, 1988 C. W. And Z. Q. Mu, Fractal Dimension Measured With Perimeter Area Relation And Toughness of Materials, *Physical Review B*, Vol. 38, N. 16, P. 11781-11784, 1 December 1988.
- Long, Q. Y.; Li Suqin and C. W. Lung. Studies on the Fractal Dimension of a Fracture Surface Formed By Slow Stable Crack Propagation. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 24, P. 602-607, 1991.
- Lopez, Juan M. Miguel A. RODRIGUEZ, and Rodolfo CUERNO, Superroughening versus intrinsic anomalous scaling of surfaces, *PHYS. REV. E*, vol. 56, n.4, 3993-3998 1997
- Lopez, Juan M. and SCHMITTBUHL, Jean, Anomalous scaling of fracture surfaces, *PHYS. REV. E*, vol. 57, n.6, 6405-6408, 1998.
- Louis, E.; Guinea, F - “The Fractal Nature of Fracture”, *Europhys. Lett.* Vol. 3, N. 8, P.871-877, 1987.
- Lubliner, J., a Maximum – Dissipation Principle In Generalized Plasticity, *Acta Mechanica* 52, P. 225-237, 1984.
- Lung, C. W. Fractals and the Fracture of Cracked Metals , (In: *Fractals In Physics*, L. Pietronero, E. Tossatti (Editors) Elsevier Science Publishers B. V., P. 189-192, 1986.
- Lung, C. W. and Z. Q. Mu, Fractal Dimension Measured With Perimeter Area Relation and Toughness of Materials, *Physical Review B*, Vol. 38, N. 16, P. 11781-11784, 1 December 1988.
- Lung, C. W., “Fractal Description of Fractures”, *Int. Atomic Energy Agency and United Nation Educational Scientific and Cultural Organization , Int. Centre For Theoretical Physics, Miramare – Trieste, June, 1991.*

## M

- Magon, M. F. A.; Rodrigues, J. A.; Pandolfelli, V. C., Caracterização Do Comportamento de Curva-R de Refratários de Mgo-C Obtida Por Diferentes Métodos de Ensaio, *Revista Brasileira de Ciências, Abcm, Rio de Janeiro-Rj, Vol. Xix, N. 4, P. 589-596, Dez. 1997.*

- Måløy, Knut Jørgen; Alex Hansen and Einar L. Hinrichsen; Experimental Measurements of the Roughness of Brittle Cracks, *Physical Review Letters*, V. 68, N. 2, P. 213-215, 13 January 1992.
- Måløy, Comment on “Experimental Measurements of the Roughness of Brittle Cracks, *Physical Review Letters*, Vol. 71, N. 1, P. 204-205, 5 July, 1993.
- Mandelbrot, Benoit B, *Fractal*. 1975.
- Mandelbrot, Benoit B, *Fractals: Form Chance and Dimension*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, Cal-Usa, 1977.
- Mandelbrot, Benoit B. 1978.
- Mandelbrot, Benoit B., the *Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco - New York 1982.
- Mandelbrot, Benoit B., the *Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, Cal-Usa, - New York 1982(1983).
- Mandelbrot, Benoit B.; Dann E. Passoja & Alvin J. Paullay, Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals, *Nature (London)*, Vol. 308 [5961], P. 721-722, 19 April, 1984.
- Mandelbrot, B. B., In: *Dynamics of Fractal Surfaces*, Edited By Family, Fereydoon. and Vicsék, Tamás, World Scientific, Singapore, P. 19-39. 1991.
- Mandelbrot, B; “Fractals In Nature”, 1994.
- Marder, M.; New Dynamical Equation For Cracks, *Physical Review Letters*, Vol. 66, N. 19, 2484-2487, 13 May, 1991.
- Marder, M. P. and Xiangming Liu, Instability In Lattice Fracture, *Physical Review Letters*, Vol. 71, N. 15, P. 2417-2420, 11 October 1993a.
- Marder, M. P., Simple Models of Rapid Fracture, *Physica D*, Vol. 66, P. 125-134, 1993b.
- Marder, M. P. and Steven. P. Gross, Origin of Crack Tip Instabilities. *Journal Mechanics and Physics Solids*, Vol. 43, N. 1, P. 1-48, 1995.
- Marder, M., Statistical Mechanics of Cracks, *Physical Review E*, Vol. 54, N. 4, October 1996a
- Marder, Michael and Jay Fineberg, “How Things Break”, *Physics Today*, P. 24-29, September 1996b.
- Marder, Michael; Breaking In Computers, *Nature*, P. 219-220, 20 March 1997a.
- Marder, Michael; Cracks of Doom, *New Scientist*, P. 32-35, 30 August 1997.
- Marder, Michael; Roughing It, *Science*, Vol. 277, P 647, 1 August 1997.
- Marder, Michael; Adiabatic Equation For Cracks, *Philosophical Magazine B*, Vol. 78, N. 2, P. 203-214, 1998a.
- Marder, M.; Energies of a Kinked Crack Line, *J. Stat. Phys.* 1998b.
- Mariano Paolo Maria O, Influence of the Material Substructure on Crack Propagation: a Unified Treatment, *Arxiv:Math-Ph/0305004v1*, May 2003.
- Margolina, Alla E. “The Fractal Dimension of Growth Perimeters”, (In: *Fractal In Physics*; L. Pietronero; E. Tossatti Editors, Elsevier Science Publishers B. V.) P. 357 –360, 1986.
- May, R. M. "Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics." *Nature* 261, 459-467, 1976.
- Mazzei, Angela Cristina Accácio, “Estudo Sobre a Determinação de Curva-R de Compósitos Cerâmica-Cerâmica”, Tese de Doutorado, Dema-Ufscar, 1999.

- Mcanulty, Peter; L. V. Meisel and P. J. Cote, Hiperbolic Distributions and Fractal Character of Fracture Surfaces, *Physical Review A*, Vol. 46, N. 6, P. 3523-3526, 15 September 1992.
- Mccauley, Joseph L., *Chaos, Dynamics and Fractals: An Algorithmic Approach To Deterministic Chaos*, Cambridge Nonlinear Science Series, Vol. 2, England: Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- Meakin, Paul and Susan Tolman, Diffusion-Limited Aggregation: Recent Developments, *Fractals Physical Origin and Properties*, Edited By L. Pietronero, Plenum Press, New York P. 137-168, 1988.
- Meakin, Paul; Li, G.; Sander, L. M.; Louis, E.; Guinea, F. - "A Simple Two-Dimensional Model For Crack Propagation", *J. Phys. A: Math. Gen.* 22, 1393-1403, 1989.
- Meakin, Paul, "The Growth of Rough Surfaces and Interfaces", *Physics Reports*, Vol. 235, N. 485, P. 189-289, December 1993.
- Meakin, Paul, *Fractal Growth: , Cambridge Nonlinear Science Series*, Vol. 5, England: Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- Mecholsky, J. J.; T. J. Mackin and D. E. Passoja, "Self-Similar Crack Propagation In Brittle Materials". (In: *Advances In Ceramics*, Vol. 22, *Fractography of Glasses and Ceramics*, the American Ceramic Society, Inc), P. 127-134, Edited By J. Varner and V. D. Frechette. America Ceramic Society, Westerville, Oh, 1988.
- Mecholsky, J. J.; D. E. Passoja and K. S. Feinberg-Ringel; Quantitative Analysis of Brittle Fracture Surfaces Using Fractal Geometry, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 72, N. 1, P. 60-65, 1989.
- Mecholsky, John J., Jr.; Stephen W. Freiman, Relationship Between Fractal Geometry and Fractography, *J. Am. Ceram. Soc.* Vol. 74, N. 12, P. 3136-3138, 1991.
- Mecholsky, 1989 J. J.; D. E. Passoja And K. S. Feinberg-Ringel, Quantitative Analysis of Brittle Fracture Surfaces Using Fractal Geometry, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 72, N. 1, P. 60-65, 1989.
- Mecholsky, 1988 J. J.; T. J. Mackin And D. E. Passoja, "Self-Similar Crack Propagation In Brittle Materials". (In: *Advances In Ceramics*, Vol. 22, *Fractography of Glasses And Ceramics*, the American Ceramic Society, Inc), P. 127-134, Edited By J. Varner And V. D. Frechette. America Ceramic Society, Westerville, Oh, 1988.
- Mecholsky, 1989 J. J., D. E. Passoja And K. S. Feinber-Ringel, *J. Am. Ceram. Soc.*, 72, 1, (1989), pp. 60-65.
- Mertens, F.; Scott V. Franklin and M. Marder; Dynamics of Plastic Deformation Fronts In An Aluminum Alloy. *Physical Review Letters*, Vol. 78, N<sup>o</sup> 23, P. 4502-4505, 9 June 1997
- Mescheryakov, Yu. I.; N. A. Mahutov; and S. A. Atroschenko, Micromechanisms of Dynamic Fracture of Ductile High-Strength Steel, *J. Mech Phys. Solids*, Vol. 42, N<sup>o</sup> 9, P. 1435-1457, 1994.
- Miehe, C.; E. Stein and W. Wagner, Associative Multiplicative Elastoplasticity: Formulation and Aspects of the Numerical Implementation Including Stability Analysis, *Computers & Structures*, Vol. 52, N<sup>o</sup> 5, P. 969-978, 1994.
- Mikulla, R.; J. Stadler, F. Krul, H. -R. Trebin, and P. Gumbsch, *Physical Review Letters*, Vol. 81, N. 15, P. 3163-3165, 12 October, 1998.
- Milman, Victor Y.; Nadia A. Stelmashenko and Raphael Blumenfeld, Fracture Surfaces: a Critical Review of Fractal Studies and a Novel Morphological Analysis of Scanning Tunneling Microscopy Measurements, *Progress In Materials Science*, Vol. 38, P. 425-474, 1994.
- Miller, O.; L. B. Freund and A. Needleman, Energy Dissipation In Dynamic Fracture of Brittle Materials, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 7, P. 573-586, 1999.



- Mishnaevsky Jr., L. L., “A New Approach To the Determination of the Crack Velocity Versus Crack Length Relation”, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, Vol. 17, N. 10, P. 1205-1212, 1994.
- Mishnaevsky Jr., L. L., Determination For the Time-To-Fracture of Solids, *Int. Journ. Fract.* Vol. 79, P. 341-350, 1996.
- Mishnaevsky Jr., L. L., *Methods of the Theory of Complex Systems In Modelling of Fracture; a Brief Review*, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 56, N. 1, P. 47-56, 1997.
- Mishnaevsky Jr., L. Optimization of the Microstructure of Ledeburitic Tool Steels: a Fractal Approach. *Werkstoffkolloquium (Mpa, University of Stuttgart)*, 13 January 2000.
- Mohan, R.; A. J. Markworth and R. W. Rollins Et Al., Effects of Dissipation and Driving on Chaotic Dynamics In An Atomistic Crack-Tip Model. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* **2**, 659-676, 1994.
- Mokross, Bernhard Joachim, Projeto de Pesquisa, “Estudo da Propagação de Trincas Em Materiais Frágeis”, Sumetido a PapeSP (Processo 99/01177-2) Em Julho de 1999.
- Moreira, J. G.; J. Kamphorst Leal da Silva and S. Oliffson Kamphorst, on the Fractal Dimension of Self-Affine Profiles, *J. Phys. A: Math Gen.*, Vol. 27, P. 8079-8089, 1994.
- Morel, Sthéphane, Jean Schmittbuhl, Juan M.Lopez and Gérard Valentin, Size Effect In Fracture, *Phys. Rev. E*, V.58, N.6, Dez 1998.
- Morel, Sthéphane, Jean Schmittbuhl, Elisabeth Bouchaud and Gérard Valentin, Scaling of Crack Surfaces and Implications on Fracture Mechanics, *Arxiv:Cond-Mat/0007100*, V.1, 6 Jul 2000 Or *Phys. Rev. Lett.* V. 85, N.8, 21 August, 2000.
- Morel, Sthéphane, Elisabeth Bouchaud and Gérard Valentin, Size Effect In Fracture, *Arxiv:Cond-Mat/0201045*, V.1, 4 Jan 2002 Or *Phys. Rev. B*, V. 65, 104101-1-8.
- Morel, Sthéphane, Elisabeth Bouchaud, Jean Schmittbuhl and Gérard Valentin, R-Curve Behavior and Roughness Development of Fracture Surfaces, *International Journal of Fracture*, V.114, Pp. 307-325, 2002.
- Mourot, Guillaume, Morel, Sthéphane, Gérard Valentin, *Comportement Courbe-R D’Un Matériau Quasi-Fragile (Le Bois)*, *Materiaux*, Pp. 1-4, 2002
- Mosolov, A. B., *Zh. Tekh. Fiz.* V. 61, N. 7, 1991. (*Sov. Phys. Tech. Phys.* , V. 36, 75, 1991).
- Mosolov, A. B. and F. M. Borodich *Fractal Fracture of Brittle Bodies During Compression*, *Sovol. Phys. Dokl.*, Vol. 37, N. 5, P. 263-265, May 1992.
- Mosolov, A. B., *Mechanics of Fractal Cracks In Brittle Solids*, *Europhysics Letters*, Vol. 24, N. 8, P. 673-678, 10 December 1993.
- Mott, Neville. F., *Brittle Fracture In Mild Steel Plates–Ii*. *Engineering*, Vol. 165, P. 16-18, 2 Jan 1947(1948).
- Mu, Z. Q. and C. W. Lung, *Studies on the Fractal Dimension and Fracture Toughness of Steel*, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 21, P. 848-850, 1988.
- Muskhelisvili, N. I., *Some Basic Problems In the Mathematical Theory of Elasticity*, Nordhoff, the Netherlands, 1954.
- Myers, Christopher R.; Langer, J. S. *Rupture Propagation, Dynamical Front Selection, and the Role of Small Length Scales In a Model of An Earthquake Fault*. *Phys. Rev. E*, Vol. 47, N. 5, P. 3048-3056, May, 1993.
- Milman V. Yu., Blumenfeld R., Stelmashenko N. A. and Ball R. C., *Phys. Rev. Lett.*, 71 (1993) 204.

Mu, 1988 Z. Q. And C. W. Lung, Studies on the Fractal Dimension And Fracture Toughness of Steel, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 21, P. 848-850, 1988.

## N

Nagahama, Hiroyuki; "A Fractal Criterion For Ductile and Brittle Fracture", *J. Appl. Phys.*, Vol. 75, N. 6, P. 3220-3222, 15 March 1994.

Nakayama, Junn; Direct Measurement of Fracture Energies of Brittle Heterogeneous Materials. *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 48, N. 11, P.583-587, 1965.

NBR 7214, 1982

Needleman, A. and V. Tvergaard, Dynamic Crack Growth In a Nonlocal Progressively Cavitating Solid, *Eur. J. Mech. A/ Solids*, 17, N<sup>o</sup> 3, 421-438, 1998.

Nikolaevskij, Viktor N.; Fracture Criterion For Inelastic Solids, *Int. J. Engng Sci.* Vol. 20, N.2, P. 311-318, 1982.

Nikolaevskij, Viktor N., Path-Independent Rate Integrals and the Criterion of Steady Crack Growth In Inelastic Bodies. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 28, N.3, P. 275-282, 1987.

Nikolaevskij, Viktor N. Apud L. I. Slepyan, Principle of Maximun Energy Dissipation Rate In Crack Dynamics, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, N<sup>o</sup> 6, P. 1019-1033, 1993.

Nguyen, Quoc Son, "Biffurcation Et Stabilité Des Systèmes Irréversibles Obéissant Au Principe de Dissipation Maximale, *Journal de Mécanique Théorique Et Appliquée*, Vol. 3, N. 1, P. 41-61, 1984.

Nguyen, Quoc Son, "Bifurcation and Post-Bifurcation Analysis In Plasticity and Brittle Fracture", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, N. 3, P. 303-324, 1987.

Nilsson, Christer, "Nonlocal Strain Softening Bar Revisited", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, N<sup>o</sup> 33-34, P. 4399-4419, 1997.

## O

Odum, Howard T. and Richard C. Pinkerton, "Time's Speed Regulator: the Optimum Efficiency For Maximum Power Output In Physical and Biological Systems". *American Scientist*, 43, 1963.

Orowan, E., "Fracture and Strength of Solids", *Reports on Progress In Physics*, Xii, P. 185, 1948.

## P

Panagiotopoulos, P.D. Fractal Geometry In Solids and Structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, N<sup>o</sup> 17, P. 2159-2175, 1992.

Panin, V. E., the Physical Foundations of the Mesomechanics of a Medium With Structure, Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Translated From *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Fizika*, N<sup>o</sup> 4, P. 5-18, Plenum Publishing Corporation (305 - 315), April, 1992.

Passoja, D. E. & Amborski, D. J. In *Microstruct. Sci.* 6, 143-148, 1978.

Passoja, D. E. (In: *Advances In Ceramics*, Vol. 22: Fractography of Glasses and Ceramics, the American Ceramic Society, Inc), P.101-126, Edited By J. Varner and V. D. Frechette. American Ceramic Society, Westerville, Oh, 1988.

Passoja, D. E. (In: *Advances In Ceramics*, Vol. 22: *Fractography of Glasses and Ceramics*, the American Ceramic Society, Inc), P.101-126, Edited By J. Varner and V. D. Frechette. American Ceramic Society, Westerville, Oh, 1988.

Passoja, D. E., *Fundamental Relationships Between Energy and Geometry In Fracture*, (In: *Advances In Ceramics*, Vol. 22: *Fractography of Glasses and Ceramics*, the American Ceramic Society, Inc), P. 101-126, 1988.

Peitgen, H.-O., *Fractals For the Classroom, Part One: Introduction To Fractals and Chaos*, 1992, Páginas 191, Figura - 3.24, Ibid: Páginas 107, Figura - 2.34 E Páginas 381-385.

Peitgen, Heinz-Otto; Hartmut Jürgens; Dietmar Saupe, *Fractals For the Classroom, Part One: Introduction To Fractals and Chaos*, Evan Maletsky; Terry Perciante and Lee Yunker, Nctm Advisory Board Springer Verlag, Páginas 191, Figura - 3.24, Ibid: Páginas 107, Figura - 2.34 E Páginas 381-385, 1992.

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut and Saupe, Dietmar. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. New York: Springer-Verlag, P. 585-653, 1992.

Pezzoti, Giuseppe; Mototsugu Sakai, Yasunori Okamoto; Toshihiko Nishida, *Fractal Character of Fracture Surfaces and Boundary Values of Toughness In a Simple Ceramic-Ceramic System*, *Materials Science and Engineering A197*, P. 109-112, 1995.

Pietronero, L.; Erzan, A.; Everstsz, C. - "Theory of Fractal Growth", *Phys. Rev. Lett.* Vol. 61, N. 7, 861-864, 15 August 1988.

Politi, Antonio and Annette Witt, *Fractal Dimension of Space-Time Chaos*, *Physical Review Letters*, Vol. 82, N<sup>o</sup> 15, P. 3034-3037, 12 April 1999.

Ponson, L., D. Bonamy, H. Auradou, G. Mourot, S. Morel, E. Bouchaud, C. Guillot, J. P. Hulin, *Anisotropic Self-Affine Properties of Experimental Fracture Surfaces*, *Arxiv:Cond-Mat/0601086*, V.1, 5 Jan 2006.

Plouraboue F., Kurowski P., Hulin J. P., Roux S. and Schmittbuhl J., *Phys. Rev. E*, 51 (1995) 1675.

Pook, L. P.; on *Fatigue Crack Paths*. *Int. J. Fatigue*, Vol. 17, N. 1, P. 5-13, 1995.

Povstenko, Jurij, *From Euclid'S Elements To Cosserat Continua*, Ed. Jan Diugosz University of Czestochowa, *Scientific Issues, Mathematics Xiii*, Czestochowa, Pp.33-42, 2008

## Q

## R

Rantainen, T. T.; M. J. Alava; and K. Kashi, *Dissipative Dynamic Fracture of Disordered Systems.*, *Physical Review E*, Vol. 51, P. R2727, 1995.

Rasband, S. Neil, *Chaotic Dynamics of Non-Linear Systems*, John Wiley Sons, New York, P. 23, 1990.

Ravi-Chandar, K. and W. G. Knauss, *Int. J. Fracture*, Vol. 26, 141, 1984a.

Ravi-Chandar, K. and W. G. Knauss, *An Experimental Investigation Into Dynamic Fracture: I. Crack Initiation and Arrest*. *International Journal of Fracture*, Vol. 25, P. 247-262, 1984b.

Ravi-Chandar, K. and W. G. Knauss, *An Experimental Investigation Into Dynamic Fracture: II. Microstructural Aspects*. *International Journal of Fracture*, Vol. 26, P. 65-80, 1984c.

- Ravi-Chandar, K. and B. Yang, on the Role of Microcracks In the Dynamic Fracture of Brittle Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, N<sup>o</sup> 4, P. 535-563, 1997.
- REDDY, J. N. and Gartling, D. K., the *Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, 1994.
- Rice, J. R., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations By Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, 35, P. 379-386, 1968.
- Robert, D. K.; Wells, A. A., "The Velocity of Brittle Fracture", *Engineering*, Vol. 178, P. 820-821, 1954.
- Richardson, L. F. the Problem of Contiguity: An Appendix To Statistics of Deadly Quarrels. *General Systems Yearbook*, N.6, P. 139-187, 1961.
- Ristinmaa, Matti; Marcello Vecchi, Use of Couple-Stress Theory Inelastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 136, P. 205-224, 1996.
- Robinson, C. *Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Boca Raton, FL: Crc Press, 1995.
- Rocha, João Augusto de Lima, "Contribuição Para a Teoria Termodinamicamente Consistente de Fratura", Tese de Doutorado, Eesc-Usp-São Carlos (1030639 de 12/03/1999), 1999.
- Rodrigues, J. A. E V. C. Pandolfelli, "Dimensão Fractal E Energia Total de Fratura" *Cerâmica* Vol. 42, N. 275, Maio/Junho, 1996.
- Rodrigues, José de Anchieta; Caio Moldenhauer Peret E Victor Carlos Pandolfelli, Relação Entre Energia Total de Fratura E Dimensão Fractal. 12<sup>o</sup> Congresso Bras. de Eng. E Ciência Dos Materiais (12<sup>o</sup> Cbecimat). Águas de Lindóia –Sp, de 8 a 11 de Dezembro de 1996 A.
- Rodrigues, José de Anchieta, Comunicação Via E-Mail Em 28/09, 1998a.
- Rodrigues, José de Anchieta, Comunicação Via E-Mail Em 9-13/10,1998.
- Rodrigues, José de Anchieta, Comunicação Pessoal Por E-Mail Em 9-13/10/1998.
- Rodrigues, José Anchieta; Pandolfelli, Victor Carlos, "Insights on the Fractal-Fracture Behaviour Relationship", *Materials Research*, Vol.1, N. 1, 47-52, 1998b.
- Ronsin, O; F. Heslot, and B. Perrin, *Phys. Rev. Lett.* 75, 2352, 1995.
- Runde, Karl; Dynamic Instability In Crack Propagation, *Physical Review E*, Vol. 49, N. 4, P. 2597-2600, April, 1994.
- Rupnowski, Przemysław; Calculations of J Integrals Around Fractal Defects In Plates, *International Journal of Fracture*, V. 111: pp. 381–394, 2001
- Russell, D. A.; Hanson, J. D.; and Ott, E. "Dimension of Strange Attractors." *Phys. Review. Letters*, Vol. 45, P. 1175-1178, 1980.

## S

- Saha, P. and Strogatz, S. H. "The Birth of Period Three." *Math. Mag.* 68, 42-47, 1995.
- Sahoo Prasanta and Niloy Ghosh, Finite Element Contact Analysis of Fractal Surfaces, *J. Phys D: Appl. Phys.* Vol. 40, P. 4245-4252, 2007
- Sakai, Mototsugu and Richard C. Bradt, the Crack Growth Resistance Curve of Non-Phase Transforming Ceramics, *J. Ceram. Soc. Jpn. Inter. Ed.*, Vol. 96. P. 779-786, 1988.
- Sakay, Mototsugu and R.C. Bradt, Fracture Toughness Testing of Brittle Materials. *International Materials Reviews*, Vol. 38, , N<sup>o</sup> 2, P. 53-78, 1993.

- Sakurai, Hiroshi “Motion and Force Prediction of a Pushed Object By Maximum Dissipation Method”, Transactions of the Asme, Vol. 61, P. 440-445, June 1994.
- Salvini, V. R.; Pandolfelli, V. C.; Rodrigues, J. A.; Vendrasco, S. L., Comportamento de Crescimento de Trinca Após Choque Térmico Em Refratários No Sistema  $Al_2O_3-3Al_2O_3.2SiO_2-ZrO_2$ , Cerâmica, Vol. 42, N. 276, Jul/Ago, P. 357-360, 1996.
- Sander, L. M. - “Theory of Fractal Growth Process”, Kinetics of Aggregation and Gelation, F. Family, D. P. Landau (Editors) © Elsevier Science Publishers B. V., P. 13-17, 1984.
- Sbaizero, O.; G. Pezzotti and T. Nishida, Fracture Energy and R-Curve Behavior of  $Al_2O_3/Mo$  Composites. *Acta Mater.*, Vol. 46, , N<sup>o</sup> 2, P. 681-687, 1998.
- Sharon, Eran; Steven Paul Gross and Jay Fineberg, “Local Crack Branching As a Mechanism For Instability In Dynamic Fracture”, Physical Review Letters, Vol. 74, N. 25, P. 5096-5099, 19 June 1995.
- Sharon, Eran; Steven Paul Gross and Jay Fineberg, “Energy Dissipation In Dynamic Fracture”, Physical Review Letters, Vol. 76, N. 12, P. 2117-2120, 18 March 1996.
- Sharon, Eran & Jay Fineberg, Confirming the Continuum Theory of Dynamic Brittle Fracture For Fast Cracks, Nature, Vol. 397, P. 333-335, 28 January 1999.
- Schmittbuhl, J.; S. Roux and Y. Berthaud, Development of Roughness In Crack Propagation, Europhysics Letters, Vol. 28, N. 8, P. 585-590, 1994.
- Sewell, M. J. Maximum and Minimun Principles.
- Silberschmidt, V., Fractal and Multifractal Characteristics of Propagating Cracks, Journal de Physique Iv, Colloque C6, Supplément Au Journal de Physique Iii, Vol. 6, C6 –287 –C295, October 1996.
- Shi, Duan Wen; Jian Jiang and Chi Wei Lung, Correlation Between the Scale-Dependent Fractal Dimension of Fracture Surfaces and the Fracture Toughness, Physical Review B. Vol. 54, N. 24, R17355-R17358, 15 December, 1996-Ii (Iii)
- Sinha, Sudeshna, “Roughening of Spatial Profiles In the Presence of Parametric Noise. Physics Letters a 245, P. 393-398, 1998.
- Sinclair, J. E. and B. R. Lawn, An Atomistic Study of Cracks In Diamond-Structure Crystals. Proceedings of the Royal Society a 329, P. 83-103, 1972.
- Shitikov, A. V., “Q Varitional Principle For Constructing the Equations of Elastoplasticity For Finite Deformations”, J. Appl. Maths. Mechs, Vol. 59, N<sup>o</sup> 1, P. 147-150, 1995.
- Slepyan, L. J., “The Criterion of Maximum Dissipation Rate In Crack Dynamics Theory of Elasticity”, Sovol. Phys. Dokla, Vol. 37, N. 5, May 1992.
- Slepyan, L. I., “Principle of Maximum Energy Dissipation Rate In Crack Dynamics”, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, N. 6, P. 1019-1033, 1993.
- Stanley, H. Eugene, Introduction To Phase Transitions and Critical Phenomena, (Claredon Oxford, Editors: Cooperative Phenomena Near Phase Transitions, a Bilbiography With Selected Readings, Mit, Cambridge, Massachusetts), 1973.
- Stanley, Eugene - “Form: An Introduction To Self-Similarity and Fractal Behavior”, In: on the Growth and Form” Fractal and Non-Fractal Patterns In Physics, Edited By H. Eugene Stanley and Nicole Ostrowsky Nato Asi Series, Series E: Applied Sciences N. 100 (1986), Proc. of the Nato Advanced Study Institute Ön Growth and Form”, Cargese, Corsiva, France, June 27-July 6, Copyright By Martinus Nighoff Publishers, Dordrecht; P. 21-53, 1985.
- Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, Ma: Addison-Wesley, 1994.

Strang, G. and Fix, G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall (muito matemático, uma referência extraordinária para a época), 1973.

Stroh, A. N.; a Theory of the Fracture of Metals. *Philosophical Magazine*, Vol. 6, 418-465. Supplement: *Advances In Physics*, 1957.

Su, Yan; Lei, Wei-Cheng, *International Journal of Fracture*, V. 106: L41-L46, 2000.

Swain, M. U., R-Curve Behavior In Ceramic Materials, *Advanced Ceramics II*. Edited By Shigeoyuki Somiya. Elsevier Applied Science, 45-66, 1988.

Swanson, Peter L. Carolyn J. Fairbanks; Brian R. Lawn; Yiu-Ming Mai and Bernard J. Hockey; Crack-Interface Grain Bridging As a Fracture Resistance Mechanism In Ceramics: I, Experimental Study on Alumina, *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 70, N. 4, P. 279-289, 1987.

## T

Tabor, M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics: An Introduction*. New York: Wiley, 1989.

Tan, Honglai; Yang, Wei, Nonlinear Motion of Cracks Tip Atoms During Dislocation Emission Processes, *J. Appl. Phys.*, Vol. 78, N. (12), 15 December 1995.

Tanaka, M., "Fracture Toughness and Crack Morphology In Indentation Fracture of Brittle Materials", *Journal of Materials Science*, Vol. 31. P. 749-755, 1996.

Tarasov, Vasily E. Continuous Medium Model For Fractal Media, *Physics Letters A* 336, P.167-174, 2005.

Thomson, R.; C. Hsieh and V. Rana, Lattice Trapping of Fracture Cracks. *Journal Applied Physics*, Vol. 42, N. 8, P. 3154-3160, 1971.

Timoshenko, *Theory of Elasticity*, 3th Ed, McGraw Hill, 1951

Troczynski, T. Stochastic Model of An R-Curve Due To Crack Bridging, *Acta Metall. Mater.*, Vol. 43 , , N<sup>o</sup> 11, P. 4131-4149, 1995.

Trott, M. "Numerical Computations." §1.2.1 In *The Mathematica Guidebook, Vol. 1: Programming In Mathematica*. New York: Springer-Verlag, 2000.

Trovalusci, P. and Augusti, G., a Continuum Model With Microstructure For Materials With Flaws and Inclusions, *J. Phys. Iv, France*, 8, Pp.353-, 1998.

Tsai, Y. L. and J. J. Mecholsky Jr., Fractal Fracture of Single Crystal Silicon, *Journ. Mater. Res.*, Vol. 6, N. 6, P.1248-1263, June 1991.

Tsallis, C.; Plastino, A. R.; and Zheng, W.-M. *Chaos, Solitons & Fractals* 8, 885, 1997.

## U

Underwood, Erwin E. and Kingshuk Banerji, *Fractals In Fractography, Materials Science and Engineering*, Ed. Elsevier, Vol. 80, P. 1-14, 1986.

Underwood, Erwin E. and Kingshuk Banerji, *Quantitative Fractography*, P. 192-209. *Engineering Aspects of Failure and Failure Analysis - Asm - Handbook - Vol. 12, Fractography - the Materials Information Society* (1992). Astm 1996

Underwood, Erwin E. and Kingshuk Banerji, Fractal Analysis of Fracture Surfaces, , P. 210-215. Engineering Aspects of Failure and Failure Analysis - Asm - Handbook - Vol. 12, Fractography - the Materials Information Society (1992), Astm 1996.

Uzunov, D. I., Theory of Critical Phenomena, Mean Field, Flutuactions and Renormalization, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singaore, 1993.

## V

Vakulenko, a and S.A. Kukushkin; Kinetics of Brittle Fracture of Elastic Materials, Physics of the Solid State, Vol. 40, N<sup>o</sup> 7, P. 1147-1150, July 1998.

Vega, H. J.; N. Sanchez and F. Combes, Fractal Dimensions and Scaling Laws In the Interstellar Medium: a New Field Theory Approach , Physical Review D, Vol. 54, N. 10, P. 6008-6020, 15 November, 1996.

Vicsek, Tamás, “Formation of Solidification Patterns In Aggregation Models”, P.247-250. Fractals In Physics, L. Pietronero, E. Tossatti (Editors) Elsevier Science Publishers B. V. 1986.

Vicsék, Tamás, Fractal Growth Phenonmena, World Scientific, Singapore, 1992.

Voss, Richard F. (In: Dynamics of Fractal Surfaces, Edited By Family, Fereydoon. and Vicsék, Tamás), World Scientific, Singapore, P. 40-45, 1991.

## X

Xavier, Celio; Persio de Souza Santos, Aumento da Tenacidade À Fratura Em Aluminas Policristalinos Com O Crescimento Do Tamanho Do Trinco (R-Curve). Cerâmica, Vol. 38, N. 253, Janeiro/Feveiro, 1992.

Xie, 1989 Heping, the Fractal Effect of Irregularity of Crack Branching on the Fracture Toughness of Brittle Materials, *Internatinal Journal of Fracture*, Vol. 41, 1989, pp. 267-274.

Xie, Heping; Effects of Fractal Cracks, *Theor. Appl. Fract. Mech.* V.23, Pp.235-244, 1995.

Xie, J. F., S. L. Fok and A. Y. T. Leung, a Parametric Study on the Fractal Finite Element Method For Two-Dimensional Crack Problems, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 58, P. 631-642, 2003. (Doi: 10.1002/Nme.793)

Xu, X-P. and A. Needleman, Numerical Simulations of Fast Crack Growth In Brittle Solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 42, N<sup>o</sup> 9, P. 1397-1434, 1994.

## Y

Yang, B. and K. Ravi-Chandar, on the Role of the Process Zone In Dynamic Fracture, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, N. 12, P. 1955-1976, 1996.

Yamaguti, Marcos, 1992. Tese - Universidade de São Paulo

Yavari, Arash, the Fourth Mode of Fracture In Fractal Fracture Mechanics, *International Journal of Fracture*, Vol. 101, 365-384, 2000.

Yavari, Arash, the Mechanics of Self-Similar and Self-Afine Fractal Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 114, 1-27, 2002,

Yavari, Arash, on Spatial and Material Covariant Balance Laws In Elasticity, *Journal of Mathematical Physics*, 47, 042903, 1-53, 2006

Yoffe, Elisabeth H., "The Moving Griffith Crack", . Philosophical Magazine, Vol. 42, P. 739-751, 1951.

Yuse and M. Sano, Nature (London) Vol. 362, 329, 1993.

## Z.

Zaiser, 2004 Michael, Frederic Madani Grasset, Vasileios Koutsos, And Elias C. Aifantis' , Self-Affine Surface Morphology of Plastically Deformed Metals, Phys. Rev. Lett. 93, 195507 (2004) .

Zanotto, Edgar Dutra; Migliore Jr., Angelo Rubens - " Propriedades Mecânicas de Materiais Cerâmicos: Uma Introdução"; Cerâmica, Vol. 37, N. 247, Janeiro/Fevereiro, 1991.

Zeng, Kaiyang; Kristin Breder and David Rowcliffe, Comparison of Slow Crack Growth Behavior In Alumina and Sic – Whisker-Reinforced Alumina, J. Am. Ceram. Soc. Vol. 76, N. 7, P. 1673-1680, 1993.

Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. the *Finite Elements Method*, 4<sup>th</sup>.Edition, Vol.1 E Vol. 2, Mcgraw-Hill, 1989-91.

Zhang, Y. W. and T.C. Wang Lattice Instability At a Fast Moving Crack Tip, J. Appl. Phys. Vol. 80, N. 8, P. 4333-4335, 15 October 1996.

Zhou, S. J.; A. E. Carlsson and R. Thomson, Crack Blunting Effects on Dislocation Emission From Cracks. Physical Review Letters , Vol. 72, P. 852-855, 1994.

Zhou, Zicong and Béla Joás; Mechanism of Membrane Rupture: From Cracks To Pores, Physical Review B, Vol. 56, N<sup>o</sup> 6, P. 2997-3009, 1 August 1997 – ii.

Zhou, S. J.; N. Grønbech-Jensen; A. R. Bishop; P.S. Lamdahl, B. L. Holian, a Nonlinear – Discrete Model of Dynamic Fracture Instability, Physics Letters A, 232, P. 183-188, 1997.

Zubov, L. M., "Conjugate Solutions In the Nonlinear Theory of Elasticity", Sovol. Phys. Dokl. Vol. 37, N. 5, P. 261-263, May 1992.

## W

Wang, Ze-Ping and K.Y. Lam, Evolution of Microcracks In Brittle Solids Under Intense Dynamic Loading. J. Appl. Phys., Vol. 77, N. 7, P. 3479-3483, 1 April 1995.

Wagner, Norman J.; Brad Lee Holian and Arthur F. Voter, Molecular-Dynamics Simulations of Two-Dimensional Materials At High Strain Rate, Physical Review A, Vol. 45, N<sup>o</sup> 12, P. 8457-8470, 15 June 1992.

Wagon, S. "The Dynamics of the Quadratic Map." §4.4 In *Mathematica In Action*. New York: W. H. Freeman, P. 117-140, 1991.

Walton, J. R., the Dynamic Energy Release Rate For Steadily Propagating Antiplane Shear Crack In a Linearly Viscoelastic Body, J. App. Mech., Vol. 54, 635, 1987.

Washabaugh, P. D. and W. G. Knauss; a Reconciliation of Dynamics Crack Velocity and Rayleigh Wave Speed In Isotropic Brittle Solids. International Journal of Fracture, N. 65, P. 97-144, 1994.

Watanabe, Masaaki, "Phenomenological Equations of a Dynamic Fracture", Physics Letters 179, P. 41-44, 1993.

Weiss, Jérôme; Self-Affinity of Fracture Surfaces And Implications on A Possible Size Effect on Fracture Energy, *International Journal of Fracture*, V. 109: P. 365–381, 2001



- Weierstrass-Mandelbrot, Apud Family, Fereydoon; Vicsek, Tamás, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore, P. 8, 1991.
- Westergaard, H. M., “Bearing Pressures and Cracks” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 6, Pp. 49-53, 1939.
- Williams, J. G. “The Analysis of Dynamic Fracture Using Lumped Mass-Spring Models”, *International Journal of Fracture*, Vol. 33, P. 47-59, 1987.
- Williams, J.G. and A. Ivankovic, “Limiting Crack Speeds In Dynamic Tensile Fracture Test, *International Journal of Fracture*”, Vol. 51, P. 319-330, 1991.
- Willis, J. R., a Comparison of the Fracture Criteria of Griffith and Barenblatt, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, 151, 1967.
- Williford, R. E. *Fractal Fatigue*, *Scripta Metallurgica Et Materialia*, Vol. 24, 1990, Pp. 455-460.
- Willner, K. (2008). *Symposium of Advances in Contact Mechanics: a tribute to Prof. J. J. Kalker* Delft, The Netherlands.
- Witten Iii, Thomas A.. - “Scale - Invariant Diffusive Growth, In: on the Growth and Form” *Fractal and Non-Fractal Patterns In Physics*, Edited By H. Eugene Stanley and Nicole Ostrowsky *Nato Asi Series, Series E: Applied Sciences N. 100* (1986), *Proc. of the Nato Advanced Study Institute On Growth and Form*”, Cargese, Corsiva, France, June 27-July 6, Copyright By Martinus Nighoff Publishers, Dordrecht; P. 54-78, 1985.
- Witten Jr., T. A. .; Sander, L. M. - “Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon”, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 47, N. 19, 1400-1403, 9 de Nov 1981.
- Witten, T. A.; Sander, L. M - “Diffusion Limited Aggregation”, *Phys. Revol. B.* Vol. 29, N.9, 5686-5697, 1 May 1983.
- Wnuk, Michael P.; Yavari, Arash, a Correspondence Principle For Fractal and Classical Cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72 (2005) 2744-2757.
- Wu, Chien H., “Explicit Asymptotic Solution For the Maximum-Energy-Release-Rate Problem”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 15, P. 561-566, 1979.